Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

Milestone 4, 5 y 6

Ampliación de Matemáticas 1

17 de noviembre de 2022

Autor:

- Jaime Jiménez-Alfaro Piédrola

Índice

1. Introducción

Este informe trata sobre los resultados de los Hitos 4, 5 y 6. Se introduce brevemente los problemas a tratar, se explica el código utilizado y se va a comentar los resultados que se obtienen.

1.1. Hito 4

El problema a tratar en el Hito 4 es la integración del oscilador lineal con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(t=0) = x_0 = 1 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La integración se realizará mediante los esquemas numéricos: *Euler*, *Euler Inverso*, *Crank-Nicolson*, *Runge-Kutta 4* y *LeapFrog*.

Para el cálculo de las regiones de estabilidad se tiene que representar el lugar geométrico de las raíces del polinimio característico del sistema con módulo valor unidad. Estos polinomios característicos $\pi(r, \omega)$ se han de calcular.

1.2. Hito 5

El problema a tratar en el Hito 5 es el problema de N-Cuerpos. La ecuación es la siguiente:

$$\begin{cases} \ddot{r}_i(t) = -\sum_{j=1, i\neq j}^{j=N} \dfrac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|^3} \\ \\ r_i(t) = r_0 \\ \dot{r}_i(t) = \dot{r}_0 \end{cases} \tag{2}$$

1.3. Hito 6

El problema a tratar en el Hito 5 es hallar los Puntos de Lagrange y su estabilidad. Para este hito se utilizará un esquema de tipo *Runge Kutta embebido*. Las ecuaciones que se utilizarán son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= x + 2v_y - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\sqrt{((x+\mu)^2 + y^2)^3}} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{\sqrt{((x+\mu)^2 + y^2)^3}} \\ \dot{v}_y &= y + 2v_x - \frac{(1-\mu)y}{\sqrt{((x+\mu)^2 + y^2)^3}} - \frac{\mu y}{\sqrt{((x+\mu)^2 + y^2)^3}} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Código

El código que se ha utilizado para resolver este problema se ha separado en diferentes módulos.

- Hito 4: Este módulo será el módulo principal del Hito 4, y desde aquí se llamará a los diferentes módulos y funciones y se harán las gráficas.
- Hito 5: Este módulo será el módulo principal del Hito 5, y desde aquí se llamará a los diferentes módulos y funciones y se harán las gráficas.
- Hito 6: Este módulo será el módulo principal del Hito 6, y desde aquí se llamará a los diferentes módulos y funciones y se harán las gráficas.
- Oscilador: En este módulo se encuentra las ecuaciones del oscilador lineal.
- NBodies: En este módulo se encuentran las ecuaciones del problema de N-cuerpos.
- 3BodyProblem: En este módulo se encuentra el problema de 3 cuerpos y las funciones para hallar los puntos de Lagrange.
- EDO: En este módulo se encuentra el problema de Cauchy
- EsquemasNumericos: En este módulo se encuentran los siguientes esquemas numéricos: *Euler*, *Euler Inverso*, *Crank-Nicolson*, *Runge-Kutta 4* y *LeapFrog*.
- ERK: En este módulo se encuentra el *Runge Kutta embebido*.

3. Resultados Hito 4

3.1. Oscilador lineal

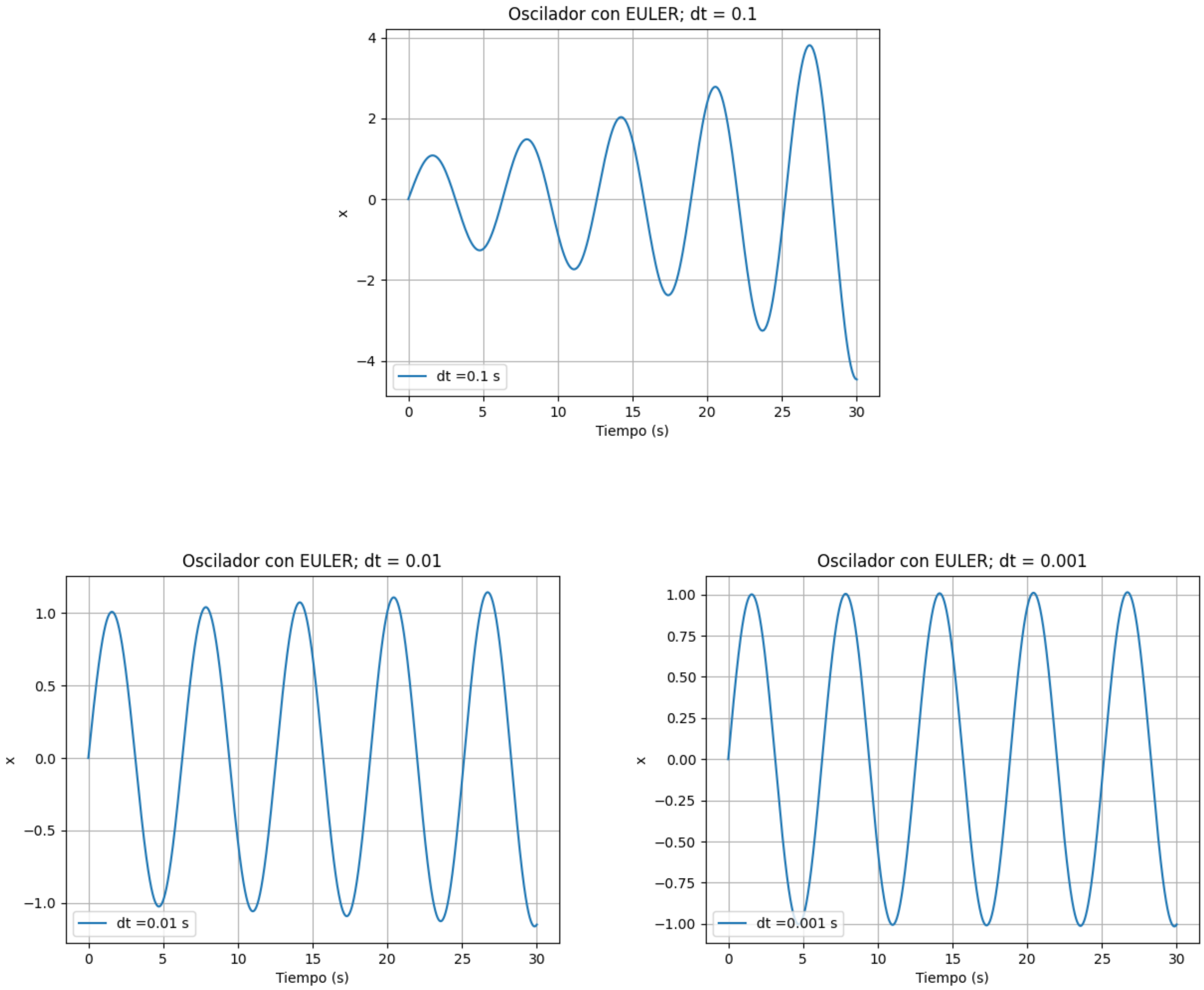

Figura 1: Resultados con Euler

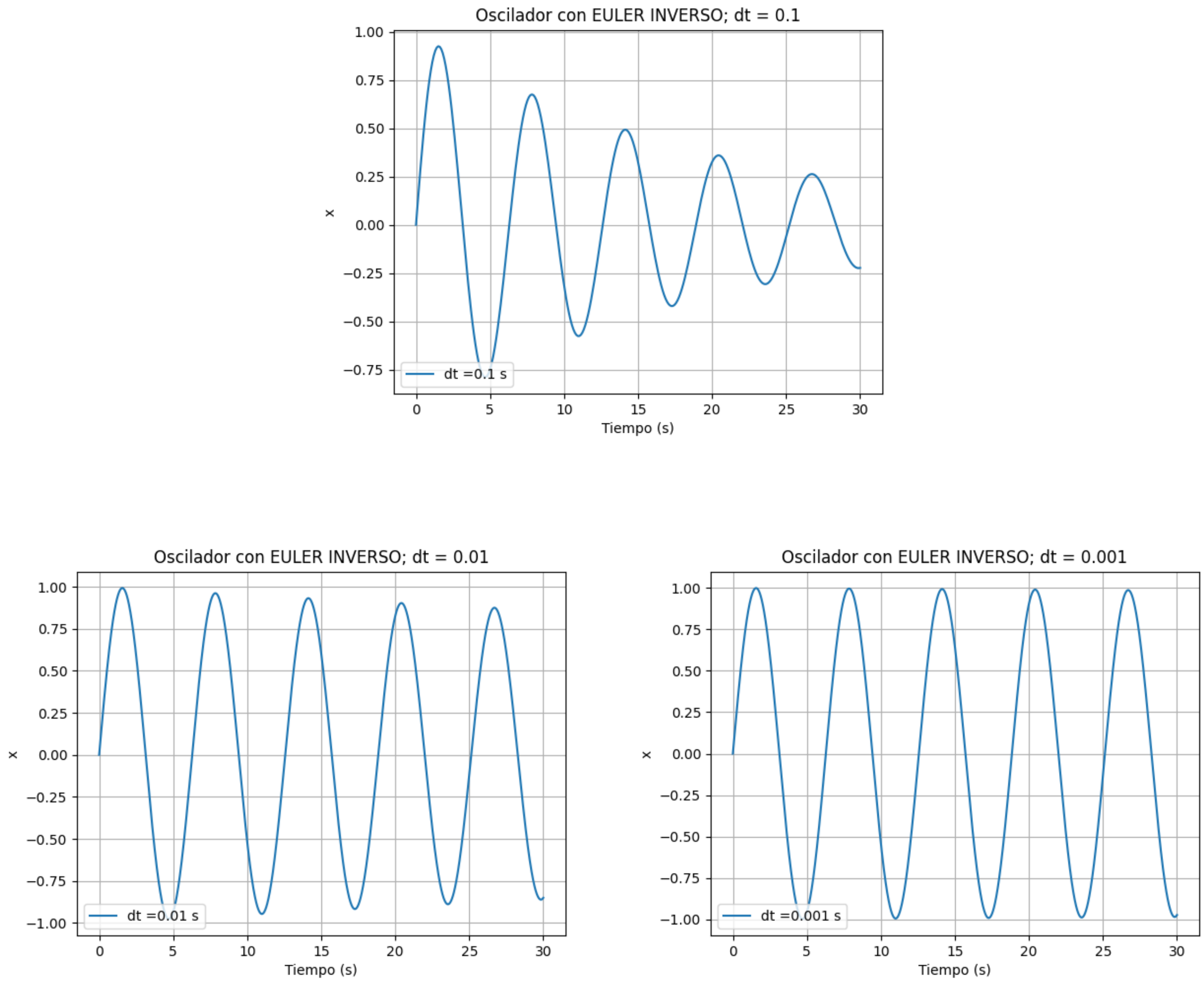

Figura 2: Resultados con Euler Inverso

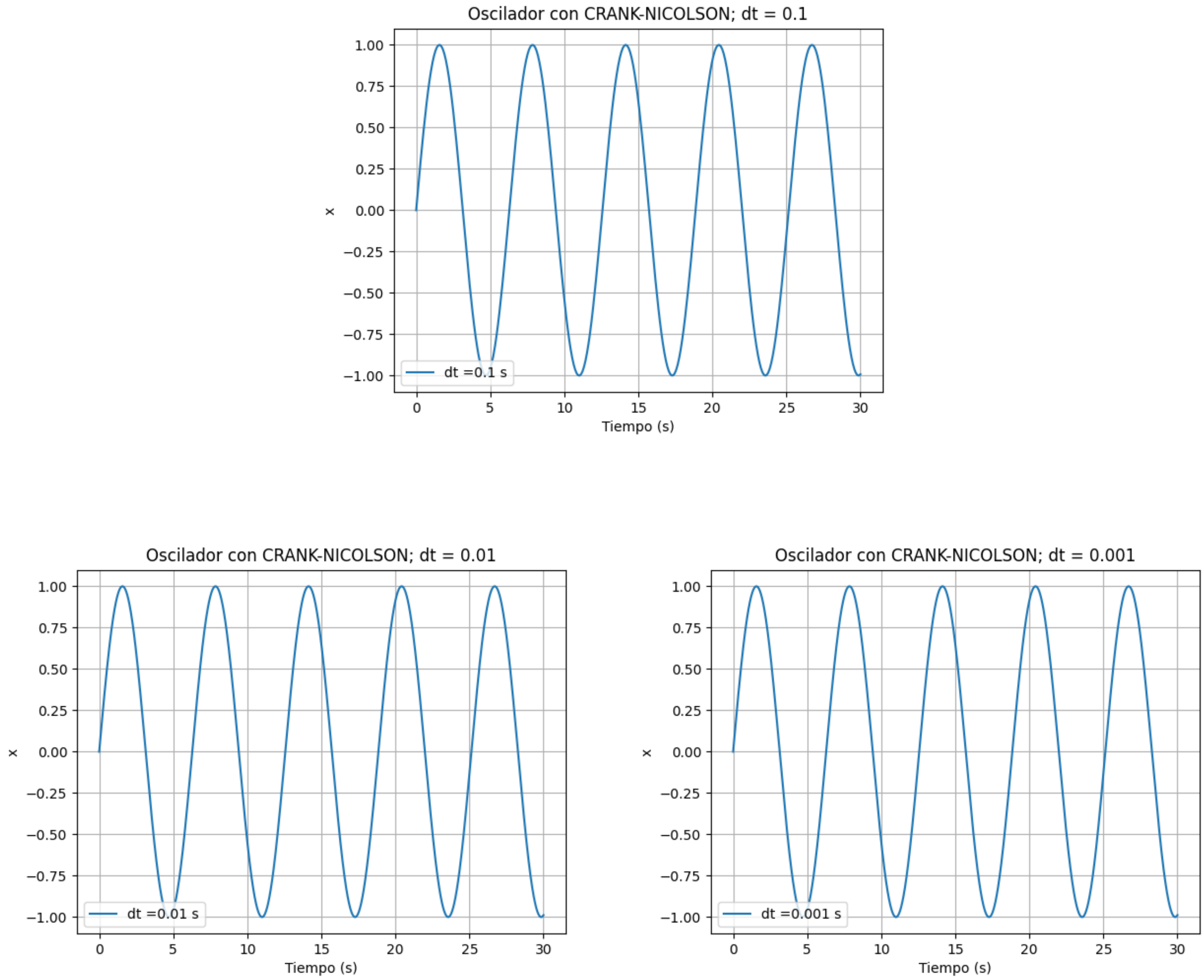

Figura 3: Resultados con Crank-Nicolson

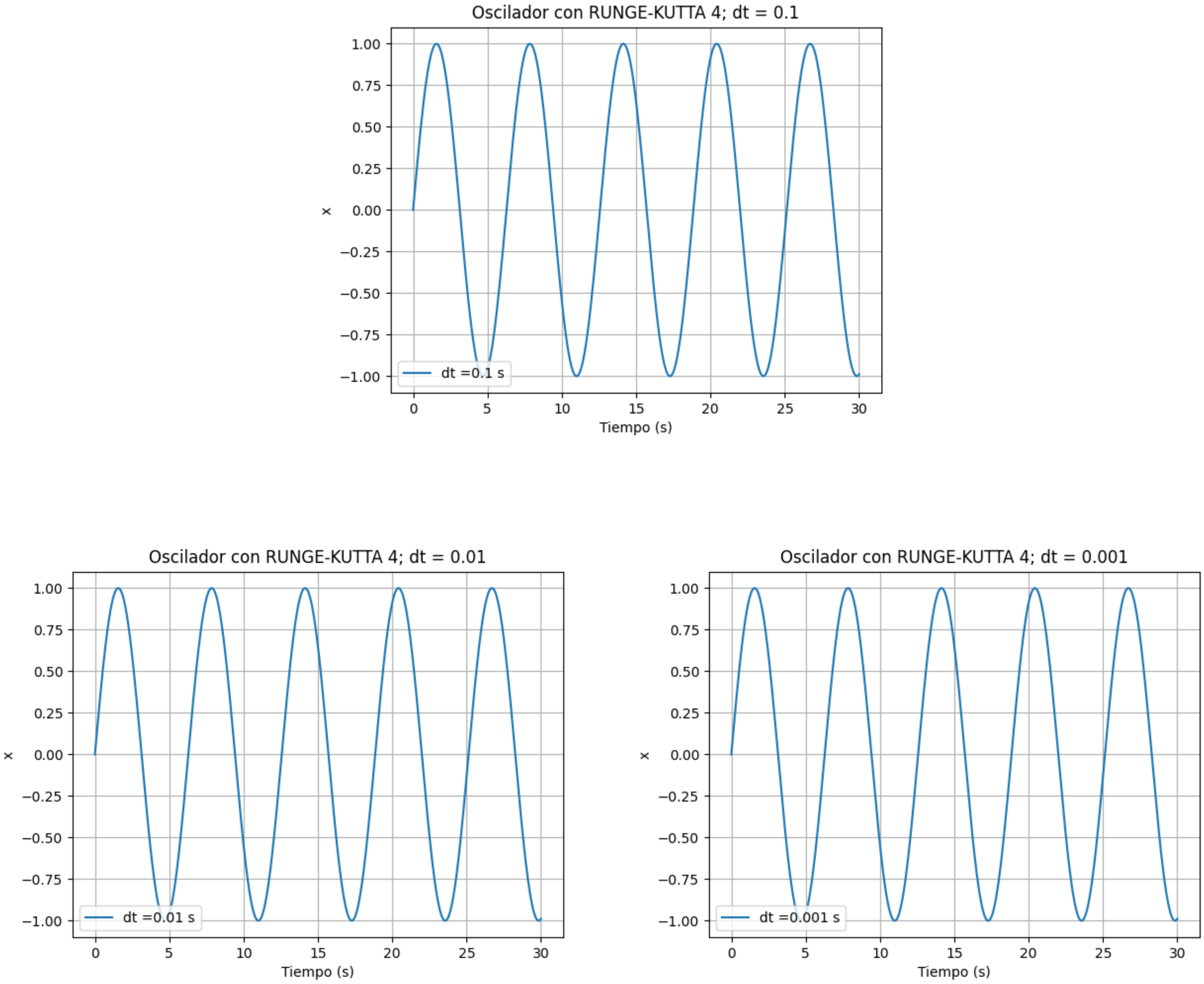

Figura 4: Resultados con Runge-Kutta 4

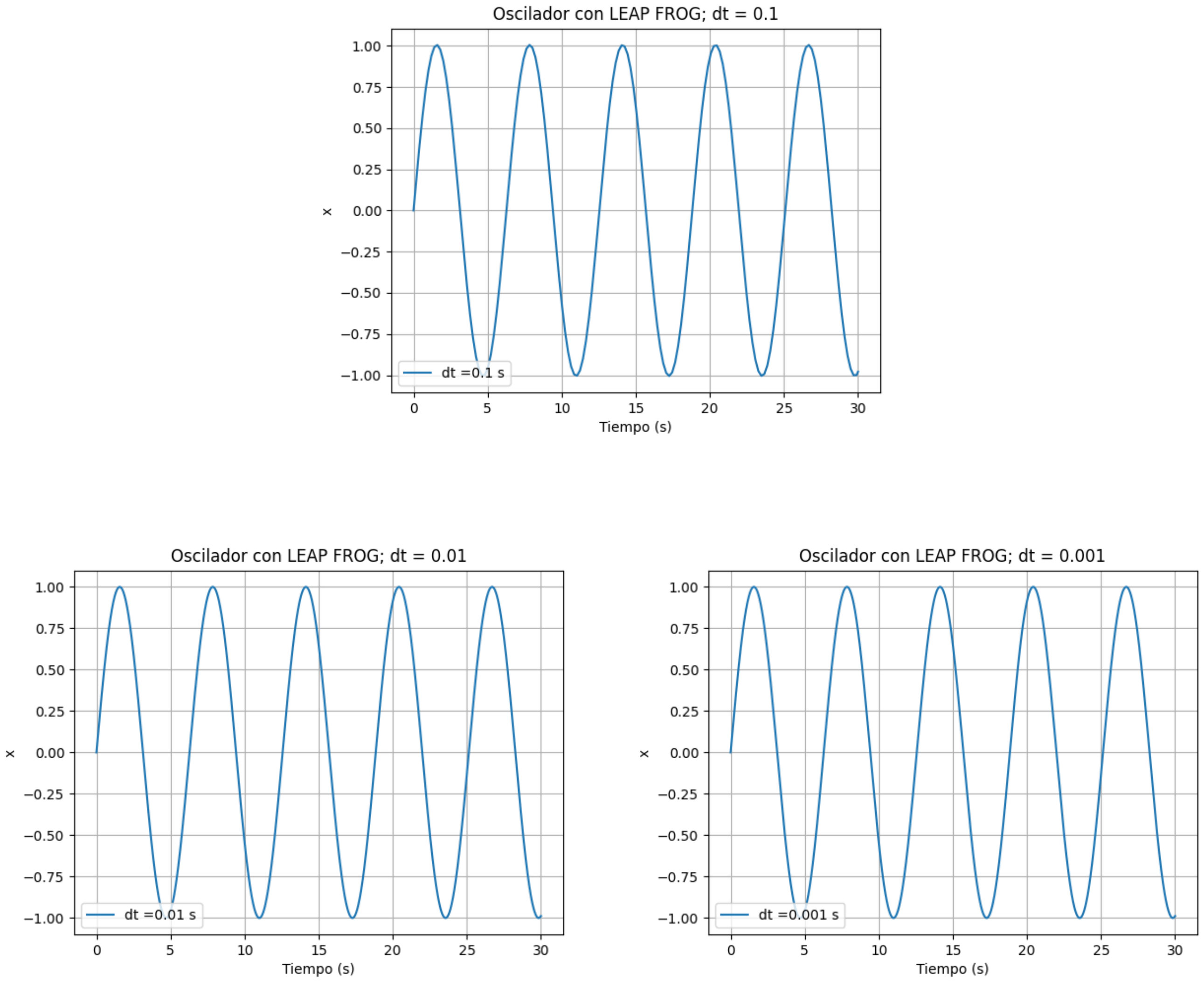

Figura 5: Resultados con LeapFrog

En las figuras se observa que los esquemas Euler y LeapFrog presentan las peores convergencias. Esto se debe a que el primer paso en LeapFrog se define con el esquema Euler. El esquema Euler inverso es el que mejor converge.

3.2. Regiones

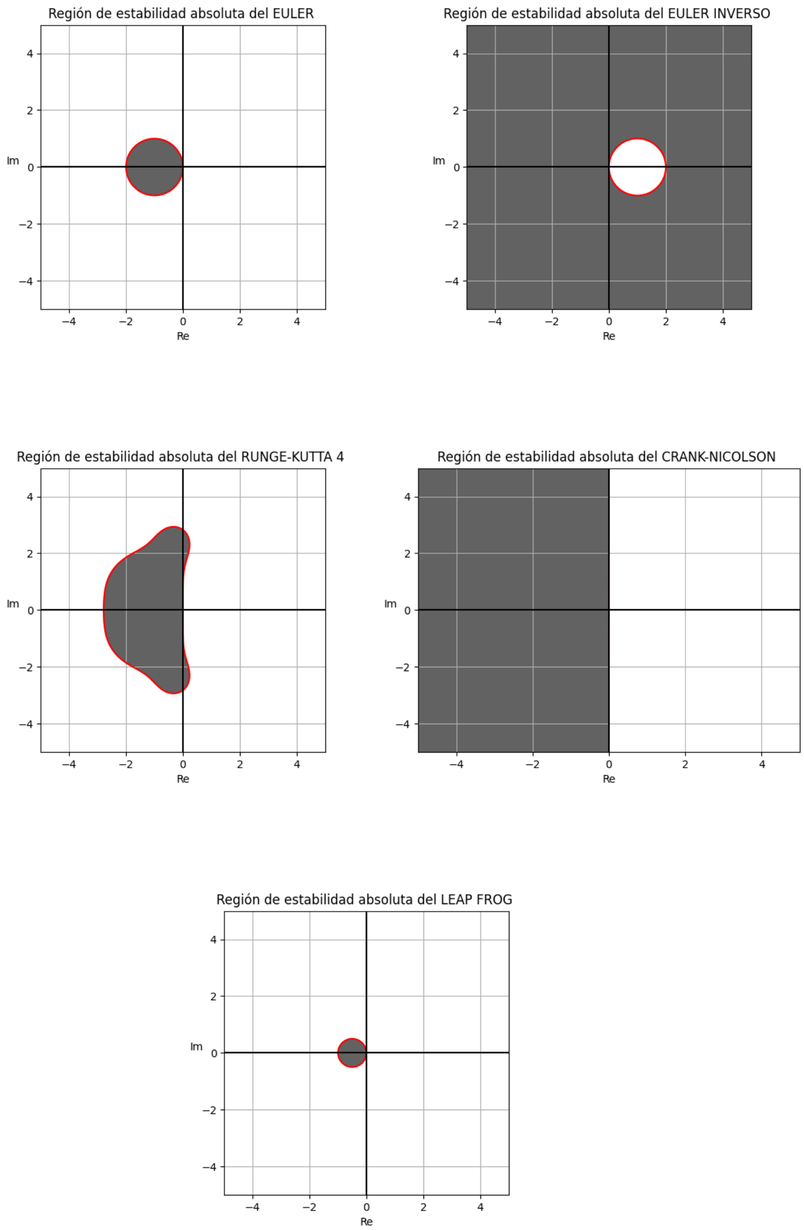

Figura 6: Resultados con Euler, Euler Inverso, Crank-Nicolson, Runge Kutta 4 y Leap Frog

Las raíces del oscilador corresponden al complejo puro, positivo y negativo, por lo que las regiones de los esquemas Euler y Euler inverso necesitaran mallado tendiendo a avalores muy pequeños para tener cierta estabilidad. Los esquemas RK4, Crank-Nicolson y LeapFrog sí recogen dicha solución.

4. Resultados Hito 5

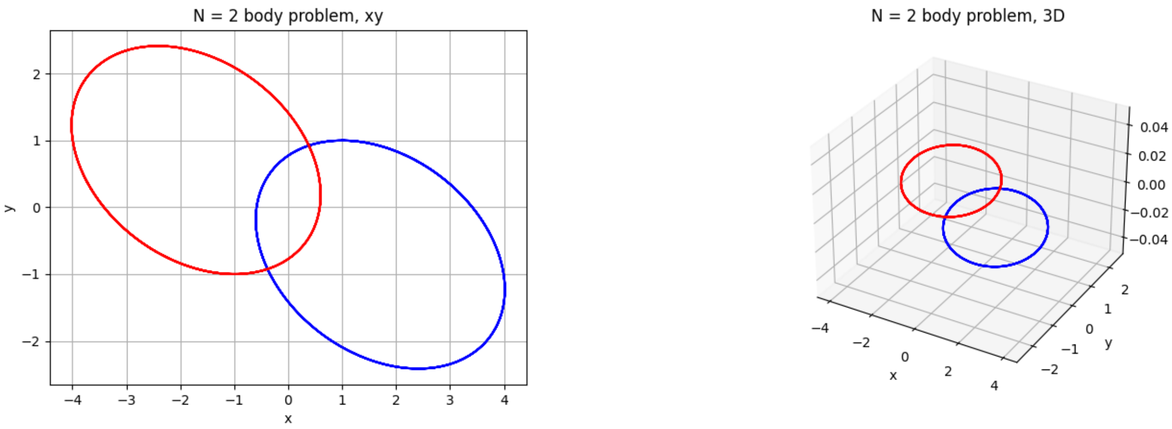

Figura 7: Problema de 2 cuerpos.

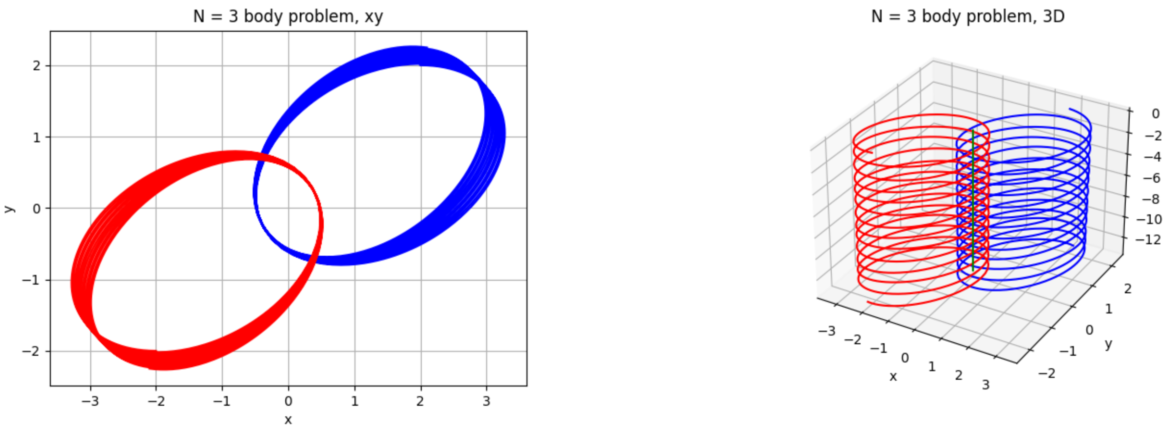

Figura 8: Problema de 3 cuerpos.

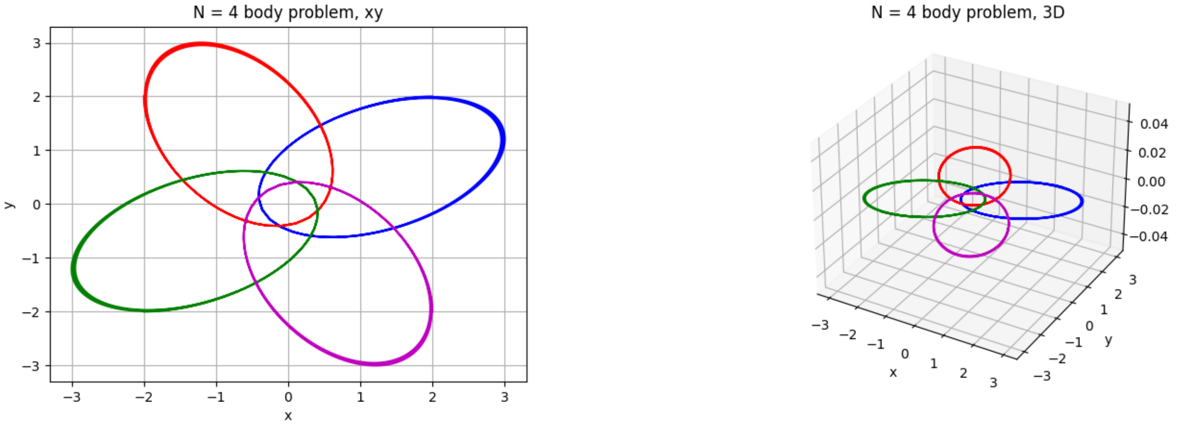

Figura 9: Problema de 4 cuerpos.

Se han realizado simulaciones para el problema de 2, 3 y 4 cuerpos. El esquema que se ha utilizado ha sido el Runge Kutta 4, debido a que ofrece una buena simulación ya que los valores convergen.

5. Resultados Hito 6

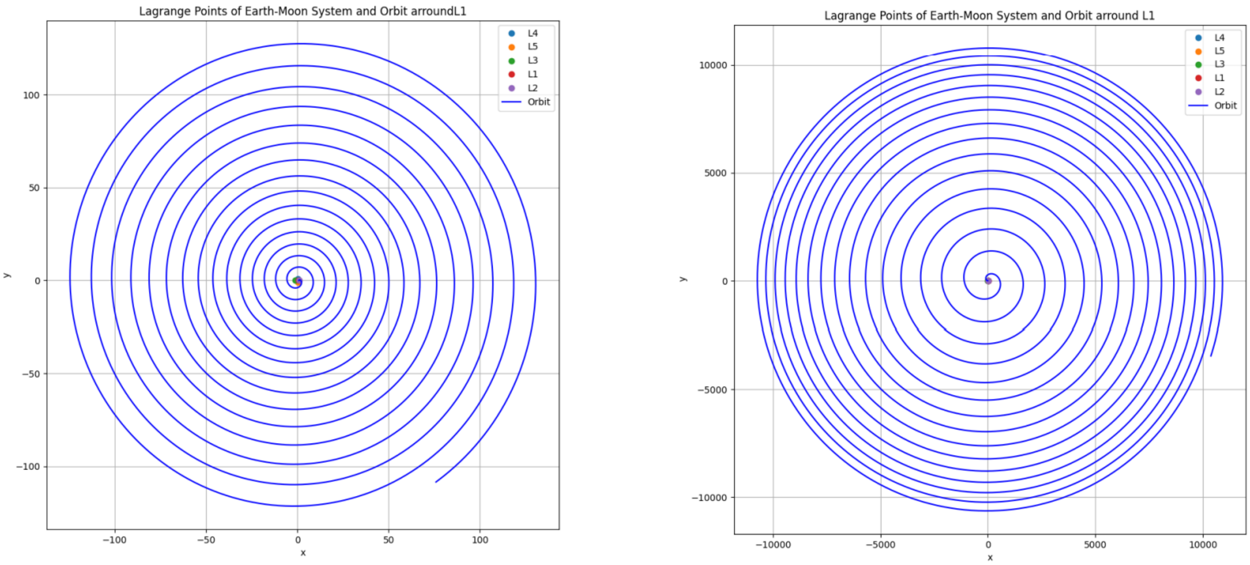

Figura 10: Punto de Lagrange L1 con los esquemas numéricos Euler y Euler Inverso.

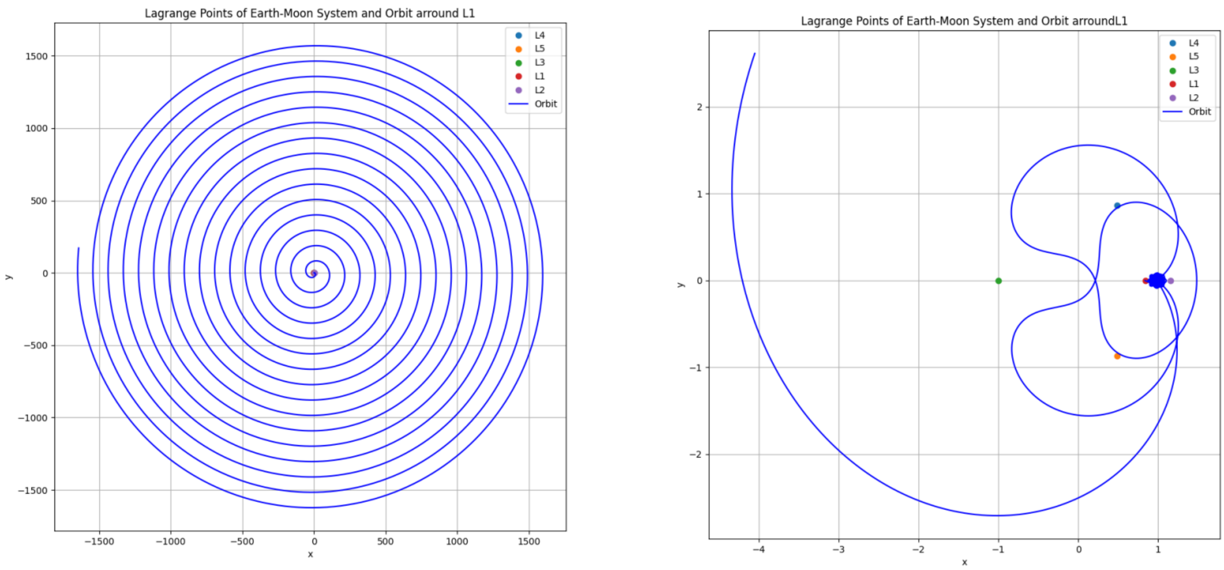

Figura 11: Punto de Lagrange L1 con los esquemas numéricos Crank-Nicolson y Runge Kutta 4.

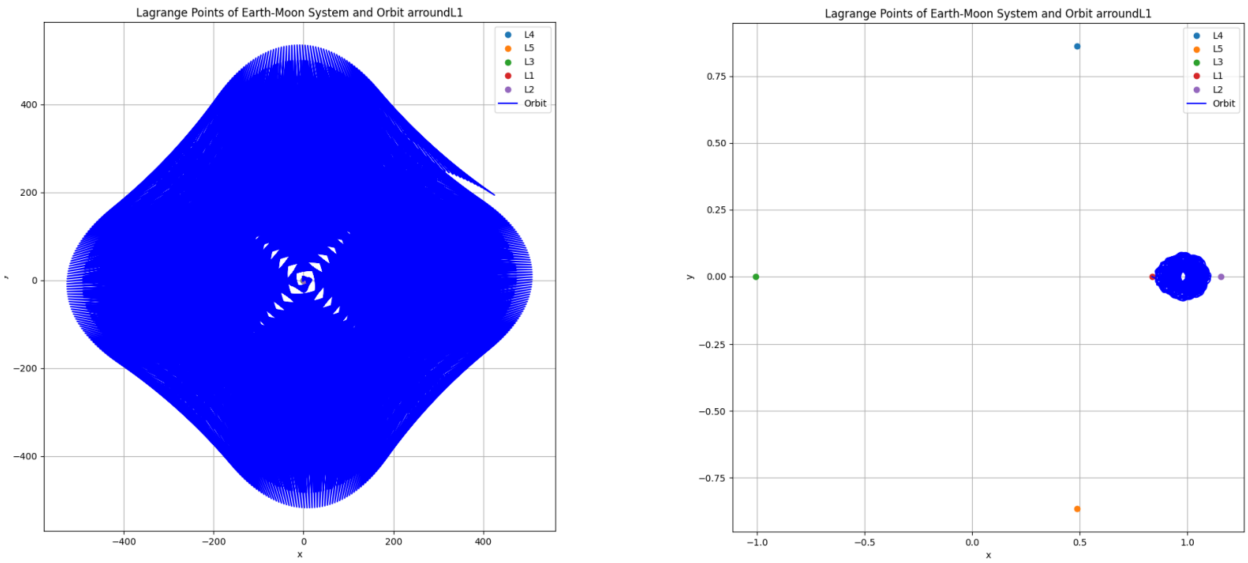

Figura 12: Punto de Lagrange L1 con los esquemas numéricos LeapFrog y Runge Kutta embebido.

Las figuras muestran la órbita en torno a L1 con diferentes esquemas numéricos.