



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

MILESTONE I

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS I

24 de septiembre de 2022

Autor:

SERGIO LÓPEZ ACEDO

02740571 - Y

Índice

1. Introducción	1
2. Resultados	1
2.1. Esquema tipo Euler explícito	1
2.2. Esquema tipo Crank-Nicolson	2
2.3. Esquema tipo Runge Kutta de orden 4	3
3. Conclusiones	5

Índice de figuras

1. Solución del problema de Kepler con esquema tipo Euler para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$	2
2. Solución del problema de Kepler con esquema tipo Crank-Nicolson para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$	3
3. Solución del problema de Kepler con esquema tipo Runge Kutta de cuarto orden para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$	4

1. Introducción

En el presente informe se recogen los resultados asociados al primer hito de la asignatura, basado en la resolución del problema de Cauchy para una órbita Kepleriana, tal que

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \\ \vec{r}(0) &= (1, 0) \\ \dot{\vec{r}}(0) &= (0, 1)\end{aligned}\quad (1)$$

Para ello se implementan los esquemas de Euler explícito, Crank-Nicolson y Runge Kutta de orden 4 para una serie de valores de paso temporal, a fin de realizar una comparación entre los resultados obtenidos.

2. Resultados

En primer lugar, se define el problema de Cauchy como

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{U}}{dt} &= -\vec{F}(\vec{U}, t) \\ \vec{U}(0) &= \vec{U}_0\end{aligned}\quad (2)$$

siendo \vec{U} el vector de estado y $F(\vec{U}, t)$ la función definida a partir de sus derivadas, tal y como se recoge en la ecuación (3),

$$\vec{F}(\vec{U}, t) = \frac{d\vec{U}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{-x}{(x^2+y^2)^{(3/2)}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2)^{(3/2)}} \end{pmatrix}\quad (3)$$

En ella se aprecia la dependencia del vector de estado y del término forzante con la naturaleza del problema, variando con el mismo. Con ello, se recogen los resultados de los esquemas previamente mencionados.

2.1. Esquema tipo Euler explícito

Se comienza con el método numérico de menor complejidad que corresponde a la ecuación (4), donde se simplifica haciendo referencia al superíndice n al instante t_n y $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t^n F^n\quad (4)$$

Por ello, se aprecia cómo solo es necesaria la información del instante anterior al que se quiere calcular, para la obtención del mismo.

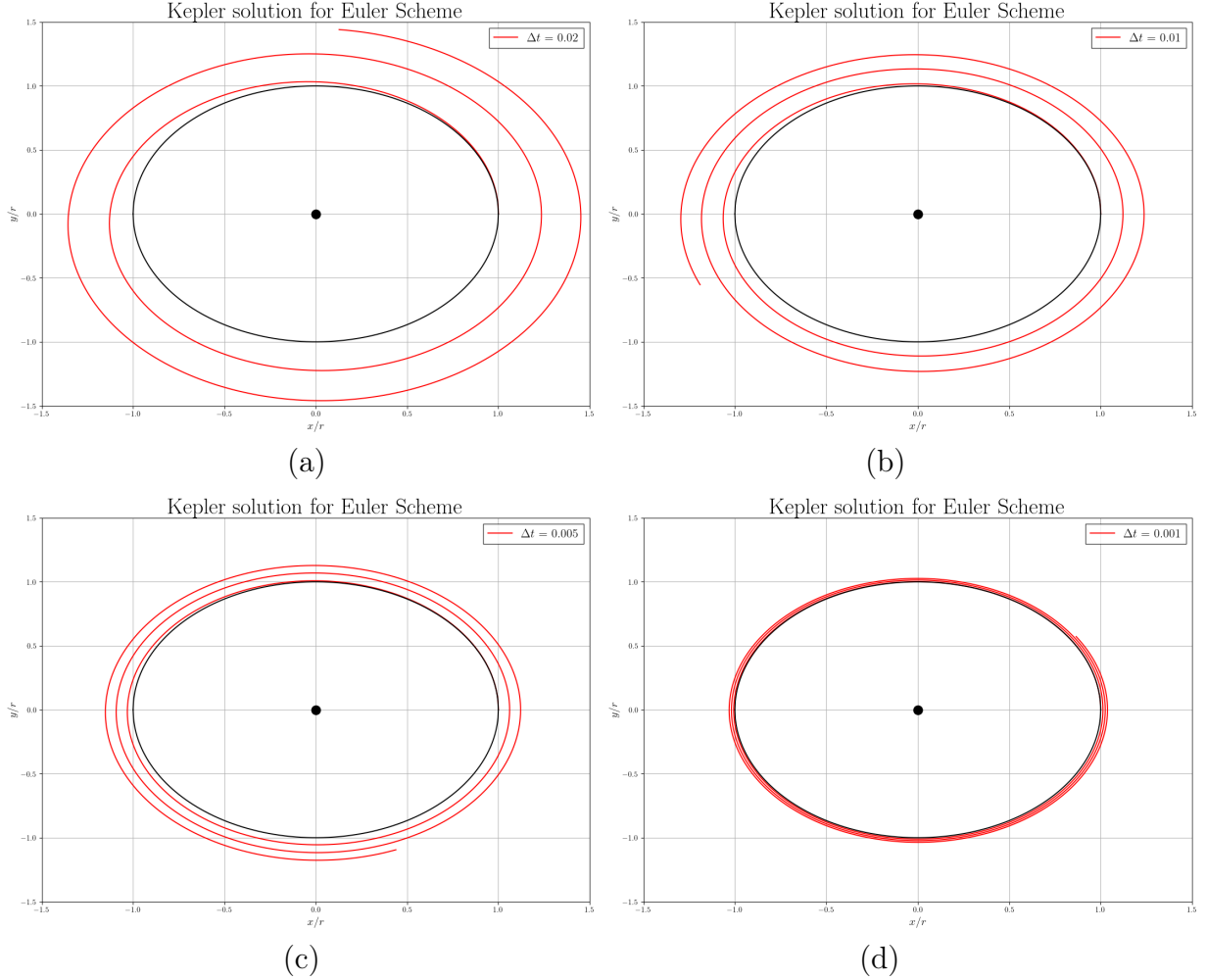


Figura 1: Solución del problema de Kepler con esquema tipo Euler para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$.

De la figura 1 se extrae como la solución se aproxima a la ideal, representada en negro (respecto de un cuerpo central marcado con punto negro) a medida que disminuye el valor del paso temporal, al tener un mayor número de datos representativos para el cálculo de la solución. No obstante, el valor sigue sin converger para tiempos infinitos, al ser el radio espectral mayor que la unidad.

2.2. Esquema tipo Crank-Nicolson

Este método numérico se corresponde con la ecuación (5):

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t^n}{2}(F^{n+1} + F_n) \quad . \quad (5)$$

En este caso, es necesaria la información del instante anterior al que se quiere calcular y del mismo, por lo que se obtiene una ecuación no lineal, definiéndose por ello como método implícito (y además de segundo orden).

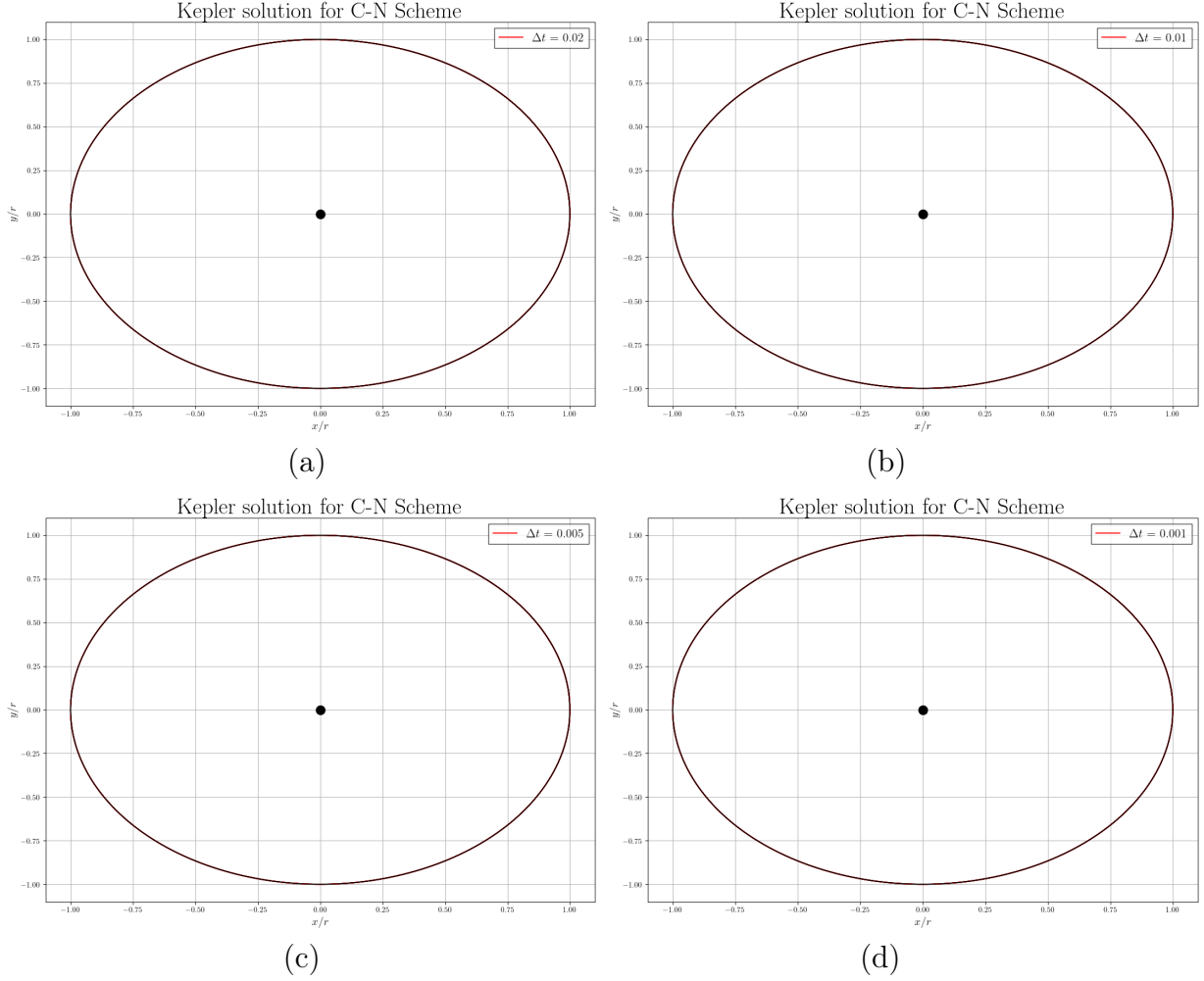


Figura 2: Solución del problema de Kepler con esquema tipo Crank-Nicolson para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$.

De la figura 2 se puede observar como, independientemente de los pasos temporales escogidos, la solución mejora respecto al esquema tipo Euler, debido a que se trata de un esquema de segundo orden, lo que aumenta su velocidad de convergencia.

2.3. Esquema tipo Runge Kutta de orden 4

Para este último esquema multipaso, se recoge en la ecuación ((6)), las expresiones a utilizar.

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t^n}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad , \quad (6)$$

donde las expresiones para las k_i se definen según:

$$\begin{cases} k_1 = F(U^n, t_n) \\ k_2 = F(U^n + \frac{\Delta t_n}{2}k_1, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ k_3 = F(U^n + \frac{\Delta t_n}{2}k_2, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ k_4 = F(U^n + \Delta t_n k_3, t + \Delta t) \end{cases} \quad . \quad (7)$$

En este caso, la aproximación sigue siendo muy buena, hecho correlado con ser un método de cuarto orden y cuatro etapas, como se refleja en la figura 3.

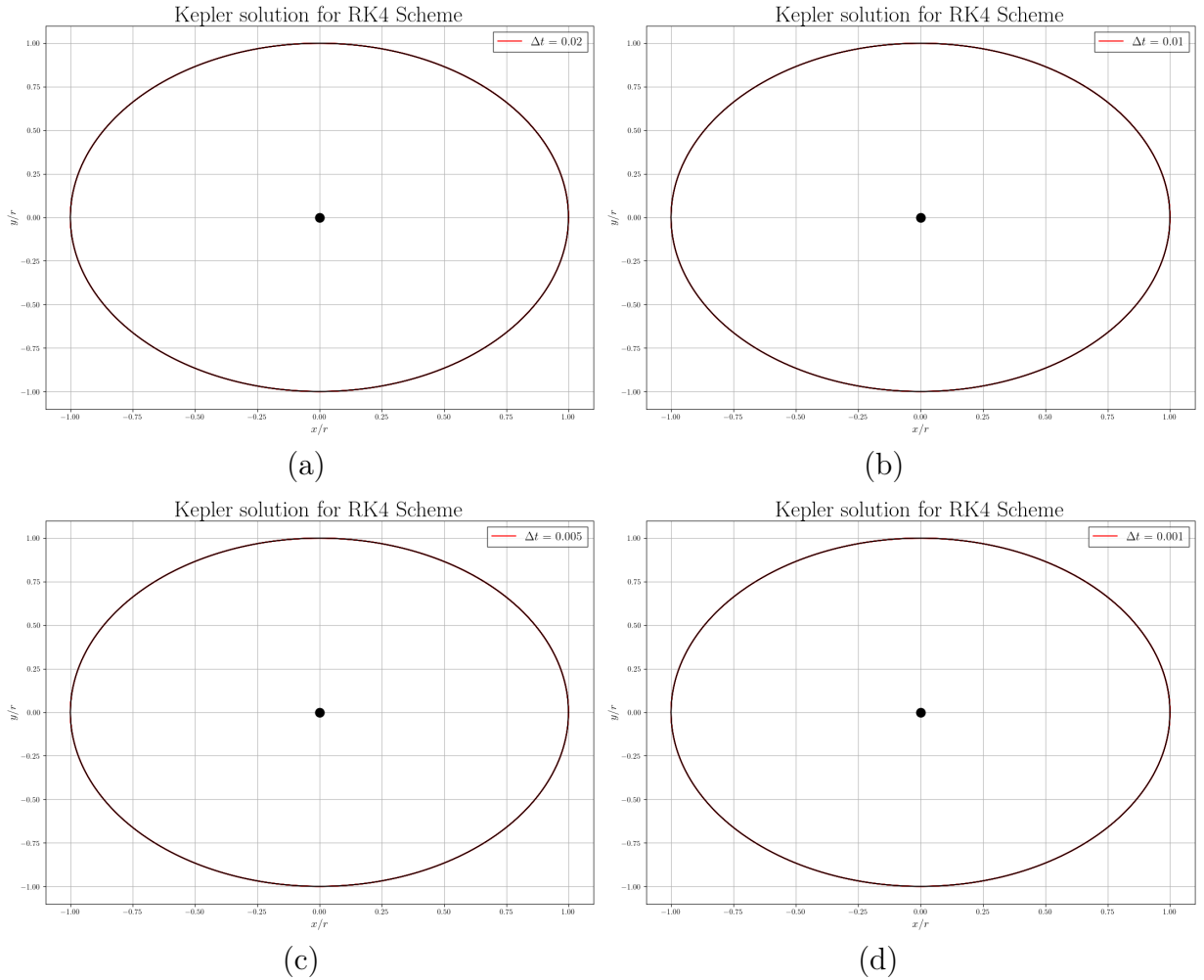


Figura 3: Solución del problema de Kepler con esquema tipo Runge Kutta de cuarto orden para un $t_f = 20$ y pasos temporales (a) $\Delta t = 0,02$, (b) $\Delta t = 0,01$, (c) $\Delta t = 0,005$ y (d) $\Delta t = 0,001$.

3. Conclusiones

Con los resultados anteriormente comentados, se extrae cómo, a mayor orden del esquema, mejor es la aproximación por el aumento de velocidad de convergencia.

Además, de cara a la implementación, los métodos implícitos, como el Crank-Nicolson, requiere resolver, para cada paso temporal, un sistema de ecuaciones lineales, por lo que queda claro la utilidad de métodos explícitos en la resolución de órbitas.

Por último, para los métodos Runge Kutta 4 y Crank-Nicolson, el efecto del paso temporal solo influye en el número de puntos en los cuales se calcula la solución, y no en su exactitud.

Referencias

- [1] HERNANDEZ, Juan and TAMARIT, Rapado, *Advanced Programming for Numerical Calculations: Climbing Python & Fortran*, 2022.
- [2] HERNANDEZ, Juan and ZAMECNIK, Mario A *Calculo Numerico en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 2022.
- [3] HERNANDEZ, Juan, *Interpolación polinómica de alto orden. Metodos espectrales. Aplicacion a problemas de contorno y de condiciones iniciales*, 2020.