



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

Milestones 4, 5 y 6

Ampliación de Matemáticas I

4 de diciembre de 2022

Autor:

Sergio de Ávila Cabral

Índice

1. Milestone 4	1
1.1. Introducción	1
1.2. Esquema de dependencia funcional	1
1.3. Descripción de módulos nuevos o modificados	2
1.4. Comentarios y mejoras	7
2. Milestone 5	13
2.1. Introducción	13
2.2. Esquema de dependencia funcional	13
2.3. Scripts	14
2.4. Resultados	17
2.5. Comentarios y posibles mejoras	20
3. Milestone 6	22
4. Introducción	22
4.1. Esquema de dependencia funcional	22
4.2. Scripts	23
4.3. Resultados	29
4.4. Comentarios y posibles mejoras	36
Referencias	37

Índice de figuras

1.1.	Relaciones de dependencia del Milestone 4	2
1.2.	Resultados Euler	8
1.3.	Resultados Runge-Kutta orden 4	9
1.4.	Resultados Crank-Nicolson	10
1.5.	Resultados Euler inverso	11
1.6.	Resultados LeapFrog	12
2.1.	Esquema de dependencia del <i>Milestone 5</i>	13
2.2.	Órbitas estables	18
2.3.	Órbitas inestables	19
2.4.	Movimiento helicoidal de dos cuerpos	20
4.1.	Esquema de dependencia funcional del Milestone 6	23
4.2.	Órbitas entorno a L1	30
4.2.	Órbitas entorno a L1	31
4.3.	Órbitas entorno a L2	31
4.3.	Órbitas entorno a L2	32
4.4.	Órbitas entorno a L3	33
4.4.	Órbitas entorno a L3	34
4.5.	Órbitas entorno a L4	34
4.5.	Órbitas entorno a L4	35
4.6.	Órbitas entorno a L5	35
4.6.	Órbitas entorno a L5	36

Índice de tablas

4.1. Puntos de Lagrange Sistema Tierra-Luna	29
---	----

1. Milestone 4

1.1. Introducción

Para la realización el *Milestone 4* se define como objetivo principal la integración del oscilador lineal:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (1.1.1)$$

Dicha integración será realizada mediante los esquemas numéricos ya empleados hasta ahora (Euler, Runge-Kutta de orden 4, Crank-Nicolson y Euler inverso) junto con un nuevo esquema, *LeapFrog*. El segundo objetivo es el cálculo de las regiones de estabilidad de dichos esquemas.

Para la realización de estos cálculos se han empleado los módulos ya existentes:

- Physics.py: Incluye la física del problema a resolver. Se encuentra en *Sources/Problems*.
- Temporal_Schemes.py: Se incluyen los diferentes esquemas numéricos. Se localiza en *Sources/ODES*.
- Cauchy_Problem.py: En el se encuentra la definición del problema de Cauchy, cuya localización coincide con la de Temporal_Schemes.py.
- Jab_Newt.py: En el se encuentra la integración numérica de Newton junto con el Jacobiano. Se localiza en el mismo path que las dos anteriores.
- Plots.py: se encarga de graficar las soluciones de los problemas de Cauchy. Se localiza en *Sources/Graf*.

Y se ha definido los siguientes nuevos módulos:

- Milestone_4.py: Actúa como *main* y en él se encuentran importados todos los módulos. A su vez, se definen: las condiciones iniciales del problema, las iteraciones, diccionarios y las llamadas a las funciones que integran el problema objetivo y, por último, llama a las nuevas funciones que calculan la región de estabilidad de los diferentes esquemas numéricos.
- R_S.py: En el se encuentran las dos nuevas funciones que permiten el segundo objetivo principal de este *Milestone*: la función *Stability_Region*, que calcula la región de estabilidad; y la función *Stability_Region*, que entrega a la función anterior el polinomio de estabilidad de cada esquema numérico.

1.2. Esquema de dependencia funcional

Como ya se ha mencionado en anteriores informes, se pretende cumplir con la filosofía de programación *Top-Down*. Esto requiere una buena jerarquización de los scripts empleados para la realización del *Milestone 4*.

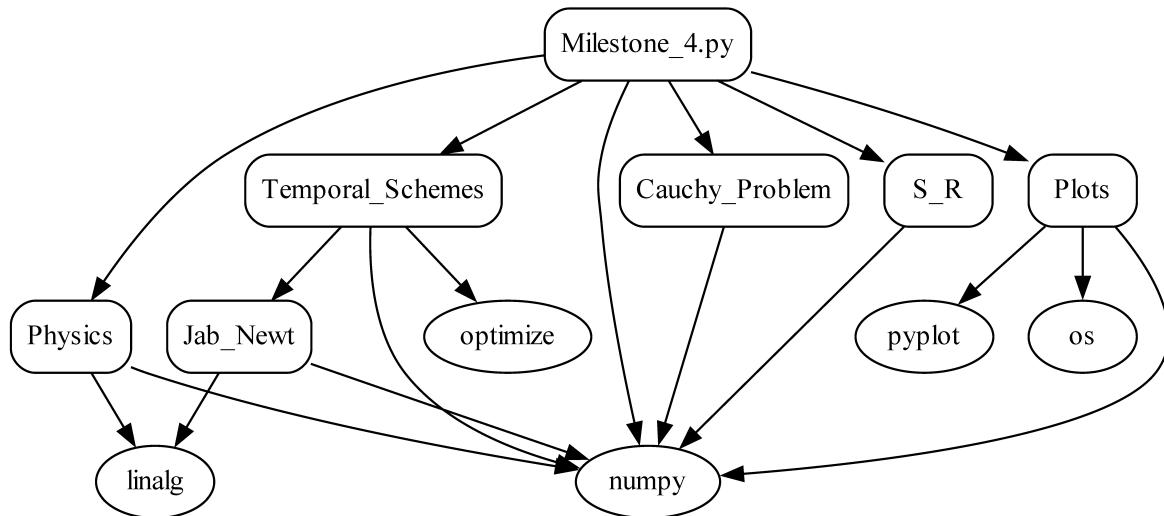


Figura 1.1: Relaciones de dependencia del Milestone 4

Como se puede apreciar en la Figura 1.1, todo el diagrama de dependencia fluye hacia abajo, lo que indica una buena estructuración según la filosofía *Top-Down*. Se puede apreciar que todos los módulos dependen de *numpy* (*linalg*) es un módulo interno de *numpy*.

1.3. Descripción de módulos nuevos o modificados

A continuación se hará una descripción de los nuevos módulos y de las modificaciones realizadas a ciertos módulos ya existentes.

Milestone_4.py

Como se ha descrito en la Sección 1.1, actual como *main*. Este módulo sigue la misma estructura que los *main* de anteriores *Milestones*. En él se pueden apreciar diferentes secciones a lo largo del mismo:

En primer lugar, se exponen las librerías empleadas para el desarrollo de este módulo:

```

1 from numpy import array, save, zeros, linspace, shape
2 from ODES.Cauchy_Problem import C_P
3 from Problems.Physics import Linear_Oscilator
4 from ODES.Temporal_Schemes import Euler, RK4, Crank_Nicolson,
   Inverse_Euler, LeapFrog
5 from Stability_Region.S_R import Stability_Region
6 import Graf.Plots as plt

```

Listing 1.1: Librerías

Tras las librerías empleadas se encuentra la inicialización de las condiciones iniciales. En este caso, se definen como condiciones iniciales $r_0 = 1$ y $v_0 = 0$ para este oscilador libre.

```

1 #Initial Conditions
2 r0 = [1]
3 v0 = [0]
4 U0 = r0 + v0
5 T = 100
6 dt = [0.1, 0.01, 0.001]
```

Listing 1.2: Condiciones iniciales

A continuación, se mantiene el *boolean* que permite elegir si los *plots* se guardan o solo se muestran. Esta función está resultando muy útil puesto que, dada la correcta implementación de las funciones de los anteriores *Milestones*, con la comprobación del correcto funcionamiento de una esquema numérico en las nuevas funciones, se puede graficar todas las figuras si necesidad de controlar el proceso de los cálculos.

```

1 #Save Plots
2 Save = False # True Save the plots / False show the plots
3
```

Listing 1.3: selección guardado

Tras ello se definen las listas que contienen los diferentes esquemas numéricos, donde se puede observar el nuevo esquema numérico, *LeapFrog*.

```

1 #Temporal_Schemes to use
2 T_S = [Euler, RK4, Crank_Nicolson, Inverse_Euler, LeapFrog]
3 T_S_plot = ["Euler", "RK4", "CN", 'Euler_inver', "LeapFrog"]
```

Listing 1.4: Esquemas temporales

Se inicializan los diccionarios que se emplearán para el almacenamiento de los datos junto con la lista de los N que se emplearán. En este caso se inicializa también un diccionario para las regiones de estabilidad.

```

1 #Initiation of Dictionaries
2 t_dic = { }
3 U_dic = { }
4 S_R = { }
5 N = zeros(len(dt))
6
```

Listing 1.5: Inicialización de diccionarios

Se calculan las iteraciones necesarias junto con los tiempos que se emplearán en los cálculos de forma análoga al anterior *Milestone*.

```

1 #Iterations and times
2 for i in range(len(dt)):
```

```

3     N[i] = int(T/dt[i])
4     t_dic[str(i)] = linspace(0,T, int(N[i]))
5

```

Listing 1.6: definición tiempos e iteraciones

Por último, para la realización de los diferentes cálculos encomendados se emplea, al igual que en el *Milestone 2*, un doble bucle que recorre todos los quemas numéricos y todos os Δt deseados. Tras ello, se implementa un segundo bucle que calcula, mediante la función *Stability_Region*, las diferentes regínes de estabilidad. Tras ello, se grafica mediante una nueva función en el módulo *Plots.py*.

```

1 # # #Simulations
2 for j in range ( len(T_S_plot) ):
3     for x in t_dic: # x is a str and U is creating new keys
4         U_dic[x]= C_P(Linear_Oscilator, t_dic[x], U0, T_S[j])
5         plt.Plot_CP(U_dic[x], t_dic[x], T, dt[int(x)], T_S_plot[j]
6 ], Save) # x return the value of the key
7     plt.Plot_CP_all(U_dic,t_dic,T, dt, T_S_plot[j], Save)
8     print(T_S_plot[j] + " calculado \n")
9
10
11 #Stability Region
12 for i in range( len(T_S_plot) ):
13     S_R[i] = Stability_Region(T_S_plot[i])
14     plt.Plot_SR(S_R[i], dt, T_S_plot[i], Save)

```

Listing 1.7: Integración numérica y región de estabilidad

Physics.py

Se define el problema objetivo de este *Milestone* como un oscilador lineal. Este oscilador lineal tiene la siguiente forma:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (1.3.1)$$

Se define el problema de Cauchy para la integración numérica:

$$\frac{dU}{dt} = F(U, t) \quad (1.3.2)$$

Puesto que el vector posición se define como $\vec{r}(x)$ y la aceleración como $\dot{\vec{r}}(\dot{x})$:

$$U = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

Se obtiene que $F(U, t)$ como:

$$F(U, t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -x \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

Por lo tanto, la programación de este problema resulta de la siguiente forma:

```

1 def Linear_Oscilator(U,t):
2
3     return array([U[1], -U[0]])

```

Listing 1.8: Definición problema Oscilador lineal

R_S.py

Como se ha descrito en la Sección 1.1, se implementa este módulo para el cálculo de las regiones de estabilidad. En un primer lugar, se definen los módulos que se van a emplear.

```

1 from numpy import sqrt, linspace, zeros, absolute, array

```

Listing 1.9: librerías para R_S.py

Función Stability_Region

Se sigue de la función *Stability_Region*, en la cual se definen dos vectores de N componentes, uno para números reales y otro para imaginario. Una vez definidos estas dos series de números, en una primera iteración se intento realizar la obtención de ω mediante un simple bucle, lo cual presenta dos problemas: El primero de ellos que se impide el empleo de la función que se emplea para graficar dicha región, pues requiere un *array* $2 - D$ y no $1 - D$. Derivado de este problema se deduce un segundo: dado que se realiza en un simple bucle, no se garantizan todas las combinaciones posibles para ω .

Tras la obtención de ω , se busca obtener todos los $|r|$ que derivan de dichas ω a través de los diferentes esquemas numéricos.

```

1 def Stability_Region(T_S):
2     N = 100
3     R = linspace(-5,5,N)
4     I = linspace(-5,5,N)
5     w = zeros([N, N], dtype = complex)
6     for i in range(N):
7         for j in range(N):
8             w[j,i] = complex(R[i], I[j])
9
10    if T_S.__name__ == "LeapFrog":
11        return absolute( T_S(1,1,1,0, lambda U, t: w*U) )
12    else:
13        return absolute( T_S(1,1,0, lambda U, t: w*U) )
14

```

Listing 1.10: Función Stability_Region

Plots.py

Para graficar las regiones de estabilidad es necesario la implementación de una nueva función que empleará una función de la librería *matplotlib* que permite graficar el contorno deseado de una serie de datos, llamado en esta función "*levels*".

Como se puede ver a continuación, se implementa la función *Plot_SR*. Como comentario, se ve que se hace necesario separar el caso del *LeapFrog*, dado que el valor devuelto por la función *Stability_Region* no es un *array*. El resto de la función es simple, se emplea la función *contour* y *contourf* para que grafique aquellos valores cuyo $|r| = 1$ y resalte el área donde ello ocurre, *levels* = [0, 1]

```

1 def Plot_SR(r, dt, T_S, Save):
2     ax = plt.figure(figsize = (10, 10))
3     if T_S == 'LeapFrog':
4         Im = linspace(-1,1,100)
5         Re = zeros(100)
6
7         ax = plt.plot(Re, Im, color = '#0013ff')
8
9     else:
10        N = len(r)
11        x = linspace(-5,5,N)
12        y = linspace(-5,5,N)
13        ax = plt.contour(x,y, r, levels = [0, 1], colors = ['#0013ff'])
14        ax = plt.contourf(x,y, r, levels = [0, 1], colors =[#626262'])
15
16        colors = ['r','orange','g']
17
18    for i in range(len(dt)):
19        plt.plot([0,0], [dt[i],-dt[i]], 'o', color = colors[i], label = "Oscillator's Roots by dt " + str(dt[i]))
20    plt.ylabel("Im")
21    plt.xlabel("Re")
22    plt.legend()
23    plt.grid()
24
25    file = 'Stability Region of ' + T_S + ".png"
26    Save_plot(Save, file)

```

Listing 1.11: Función para graficar las regiones de estabilidad

subsectionResultados Por último, se exponen los resultados obtenidos mediante el código expuesto en este informe. Todos estos resultados han sido obtenidos para un $T = 30$ s.

Euler

En primer lugar se expone los resultados de la integración mediante el esquema numérico de Euler, Figura 1.2a. Se puede observar que para $\Delta t = 0,1$ se produce una amplificación del valor de x con respecto del tiempo. Esto es debido al error que arrastra el método para ese Δt . Esto es comprobable, pues como se puede apreciar en la región de estabilidad, Figura 1.2b, cuanto menor es Δt más estable es la solución del método.

Del mismo modo, se puede comprobar que se produce la amplificación por el error del método, pues en el problema de Cauchy, al igual que ocurría con el problema de Kepler, mantiene la Energía constante. Como se aprecia, el valor de x aumenta progresivamente, no conservándose la energía.

Runge-Kutta orden 4

Como se puede observar en la Figura 1.3a, a diferencia del resultado anterior, este error se encuentra acotado dada la estabilidad del método, observable en la Figura 1.3b. Se observa que se encuentra en la región de estabilidad, pero no indefinidamente.

Crank-Nicolson

Al igual que en RK4, se obtiene resultados con un error muy acotado (Figura 1.4a). Pero a diferencia de este, como se puede observar en la 1.4b, la región de estabilidad es todo el semiplano negativo de los números reales. Esto le concede grandes propiedades de estabilidad. Las raíces de este oscilador se mantienen en todo momento sobre la frontera de la región de estabilidad.

Euler Inverso

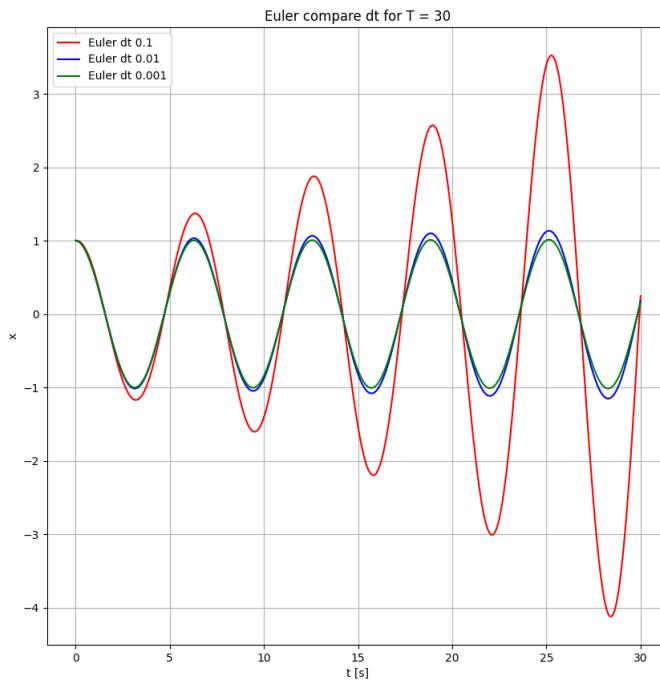
Al igual que en el caso de integración de Euler, la región de estabilidad para Euler Inverso es una circunferencia, pero en este caso en el semieje positivo de los números reales. Como se puede observar en la Figura 1.5a, a medida que se disminuye Δt , disminuye el error del método. Como se visualiza en la Figura 1.5b, cuanto menor Δt , más cerca de la frontera se encuentran las raíces del oscilador lineal, otorgando mayor precisión y estabilidad a los resultados.

LeapFrog

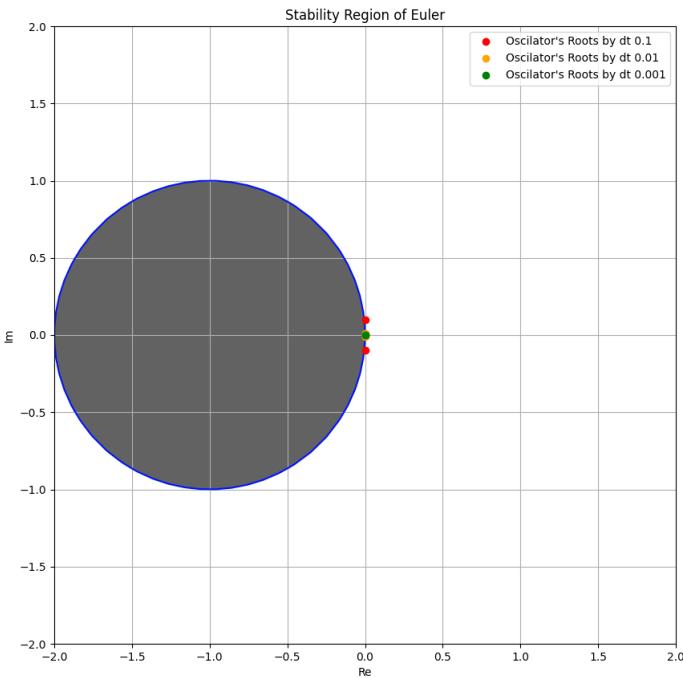
Por último, se encuentra el nuevo método implementado, *LeapFrog*. Como se aprecia en la Figura 1.6a, los resultados tienen una buena estabilidad a partir de $\Delta t = 0,01$. Como se puede apreciar en la Figura 1.6b, su región de estabilidad es una recta desde $(0, -1)$ hasta $(0, 1)$. Dado este hecho, se puede deducir que este método no presenta tanta estabilidad como en RK4 o en CN.

1.4. Comentarios y mejoras

Como posible mejora a este hito, se podrían aplicar *decorator* que permitan plotear las figuras de una función en concreto. La implementación de un procesamiento en paralelo no se hace necesario, pues el tiempo computacional no es muy elevado para el esfuerzo que requeriría dicha programación.

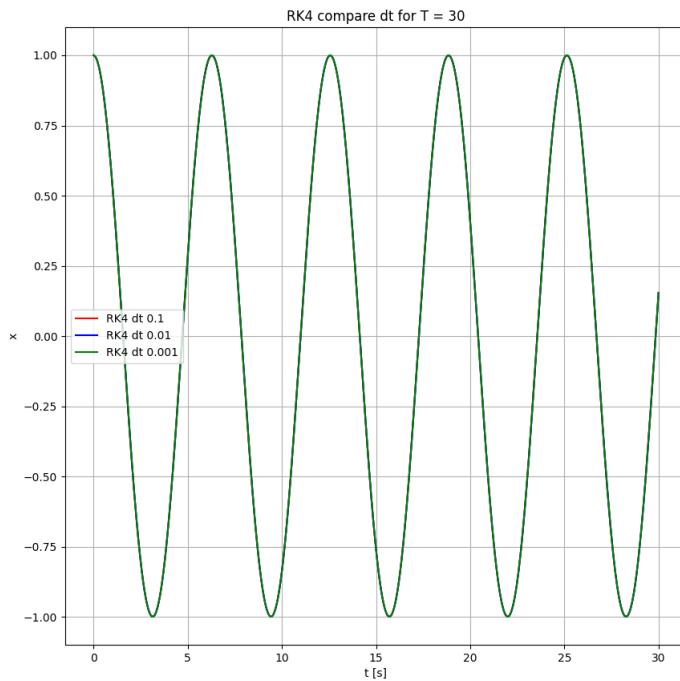


(a) Integración Euler para diferentes Δt

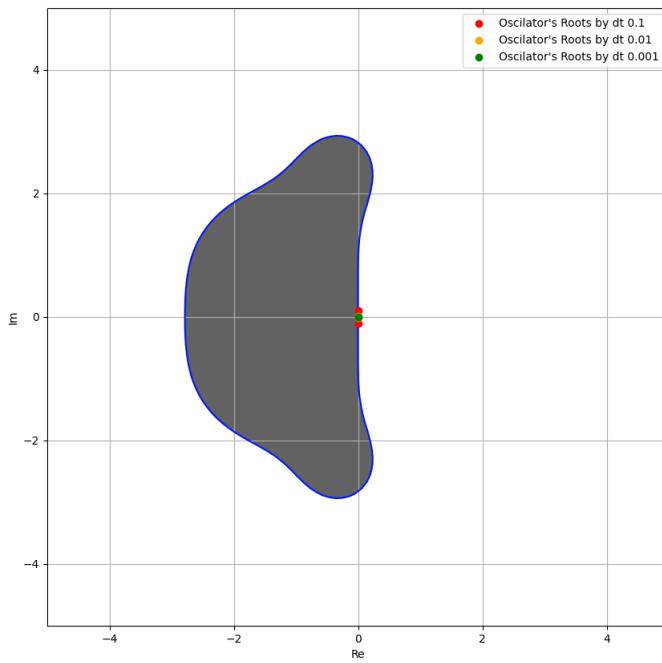


(b) Región de estabilidad de Euler

Figura 1.2: Resultados Euler

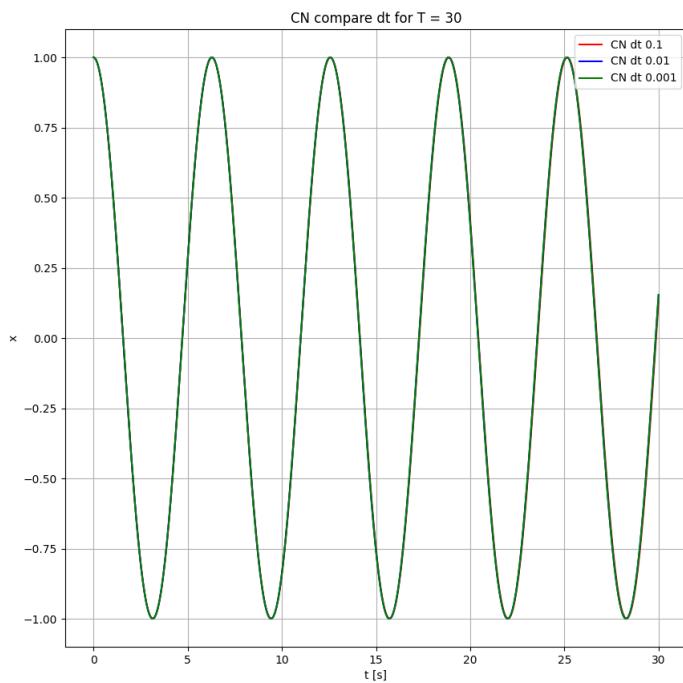


(a) Integración RK4 para diferentes Δt

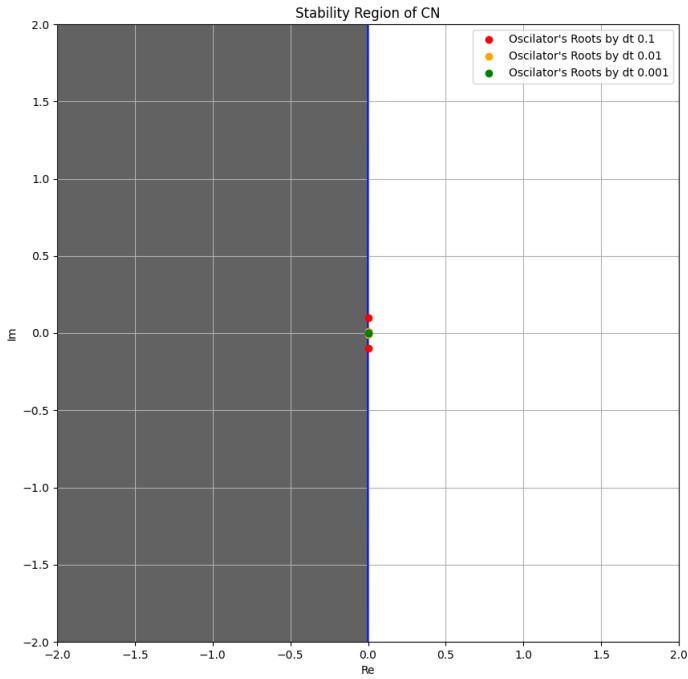


(b) Región de estabilidad de Rk4

Figura 1.3: Resultados Runge-Kutta orden 4

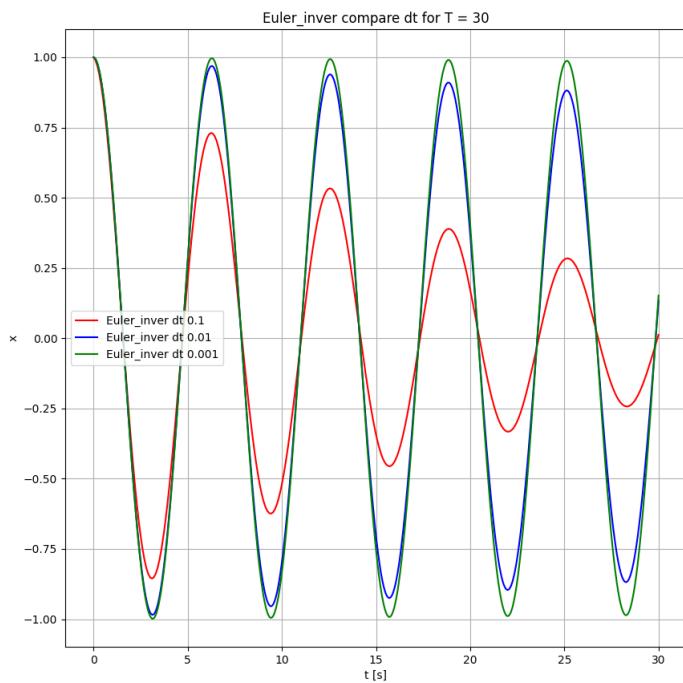


(a) Integración CN para diferentes Δt

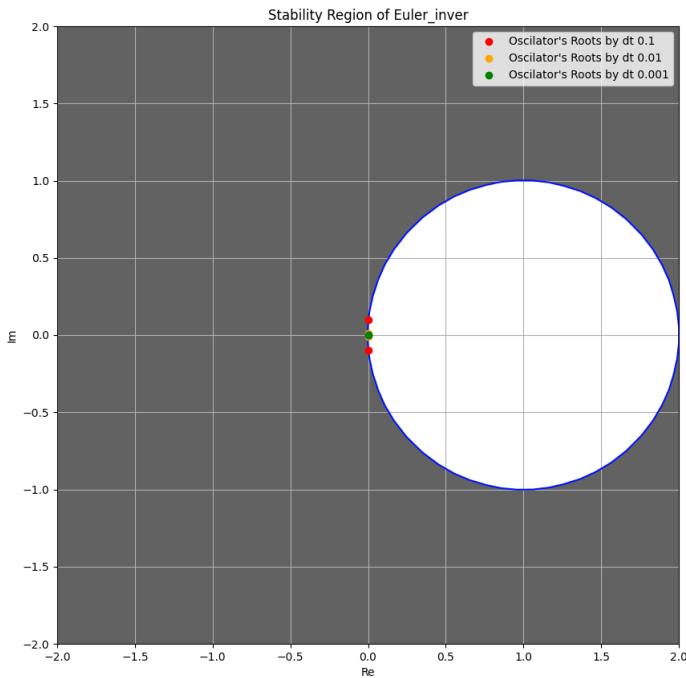


(b) Región de estabilidad de CN

Figura 1.4: Resultados Crank-Nicolson

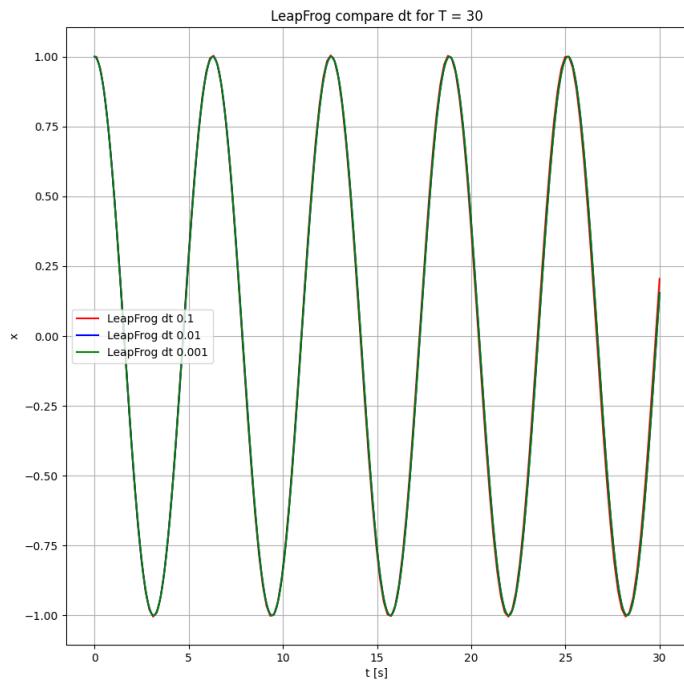


(a) Integración Euler inverso para diferentes Δt

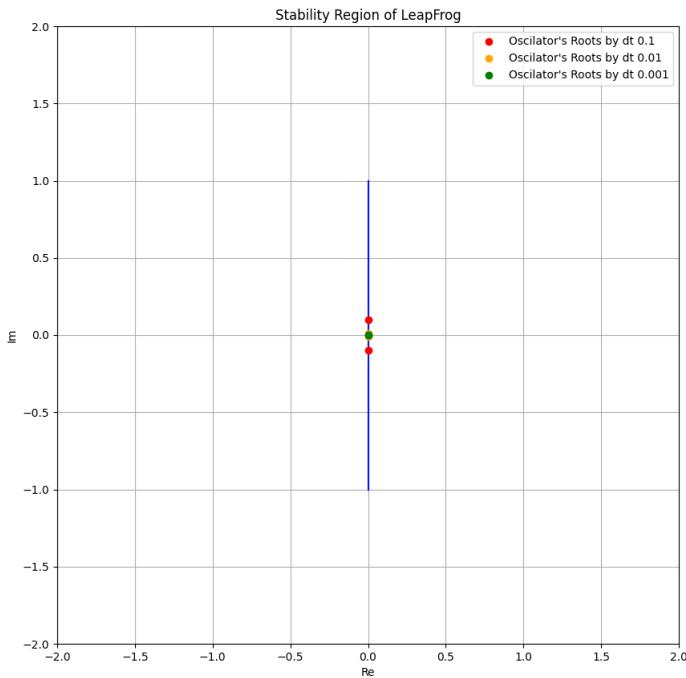


(b) Región de estabilidad de Euler inverso

Figura 1.5: Resultados Euler inverso



(a) Integración LeapFrog para diferentes Δt



(b) Región de estabilidad de LeapFrog

Figura 1.6: Resultados LeapFrog

2. Milestone 5

2.1. Introducción

El problema de los N-cuerpos trata de determinar los movimientos individuales de diferentes cuerpos astronómicos, los cuales interactúan entre sí según las leyes de la gravitación universal. La resolución de este problema concluye en la siguiente expresión:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{\|r_j - r_i\|^3} \quad (2.1.1)$$

A lo largo de la Sección 2 se describirá la programación realizada para conseguir resolver el problema de los N-cuerpos computacionalmente, partiendo de la estructura del software y analizando individualmente cada módulo programado.

2.2. Esquema de dependencia funcional

En la Figura 2.1 se expone el diagrama de dependencia funcional del *Milestone 5*. En el se puede observar que todas las dependencias discurren unidireccionalmente, cumpliendo con la programación *Top-Down*.

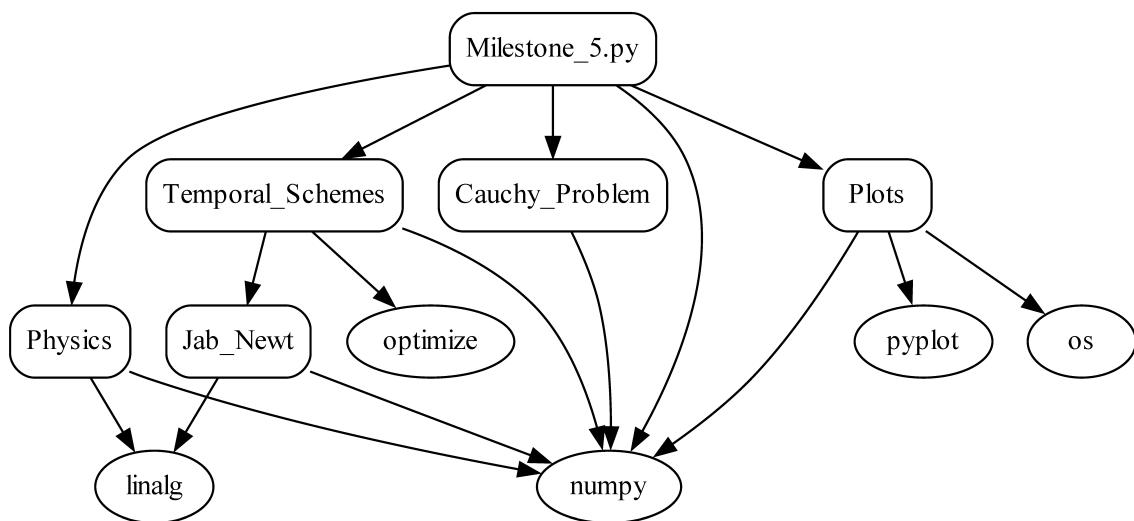


Figura 2.1: Esquema de dependencia del *Milestone 5*

2.3. Scripts

En primer lugar se encuentra el *main* de este software. Como se puede apreciar en el Listing 2.1, se definen las librerías y módulos introducidos. Cabe destacar que se siguen empleando los mismos módulos implementados desde el *Milestone 2*, habiéndose realizado pequeñas modificaciones a lo largo de los diferentes hitos. Tras ello, se inicializan las condiciones iniciales y se ensamblan en un vector U_0 . Tras definir el número de iteraciones y el tiempo de simulación, se realiza la simulación. A diferencia de otros *Milestones* ya no se introduce un *string* con el nombre del esquema temporal, se ha definido el nombre de las respectivas funciones de los esquemas temporales en las propias funciones. Del mismo modo en la línea 33 del código, se puede ver cómo se introduce el nombre asignado al esquema temporal *Runge-Kutta orden 4*.

```

1 from numpy import array, save, zeros, linspace, shape, reshape, transpose
2 from ODES.Cauchy_Problem import C_P
3 from Problems.Physics import N_B, split, join
4 from ODES.Temporal_Schemes import Euler, RK4, Crank_Nicolson,
   Inverse_Euler, LeapFrog
5 import Graf.Plots as plt
6
7 #Initial Conditions
8 (Nb, Nc) = (4,3) # Number of bodies and coordinates
9
10 r0 = zeros( (Nb, Nc) ) # Position Matrix
11 v0 = zeros( (Nb, Nc) ) # Velocity Matrix
12
13 r0[0,:] = [1,0,1]; r0[1,:] = [-1,0,-1]; r0[2, :] = [ 0, 1, 2 ]; r0[3, :]
   = [ -2, -1, 0 ] # Position
14 v0[0,:] = [0, 0.4, 0]; v0[1,:] = [0, -0.4, 0]; v0[2, :] = [ -0.4, 0., 0.
   ]; v0[3, :] = [ 0.4, 0., 0. ] # Velocity
15
16 # Join the initial conditions in a vector
17 U0 = join(r0, v0, Nc, Nb)
18
19 #Save Plots
20 Save = True # True Save the plots / False show the plots
21
22 #Iterations and times
23 N = 10000
24 T = 10
25 t = linspace(0,T,N+1) # Temporal Mesh
26
27 # Simulations
28 U = transpose( C_P(N_B, t, U0, RK4) )
29
30 # Separate the solutions in tensors
31 r = split(U)
32
33 plt.Plot_NBodies(r, t, T, 15/1000, RK4.__name__, Save) # x plot de move
   of the N_bodies

```

Listing 2.1: Script principal Milestone 5

Dentro de *Physics* se han definido las tres funciones empleadas en el *main*. Tal y como se puede apreciar en el Listing 2.2, las funciones *join* y *split* introducen realizan un *reshape*, tanto para ensamblar como desempaquetar la información de los diferentes *arrays*. Estas funciones se realizaron para conseguir mayor limpieza en el *main*.

```

1 from numpy import array, reshape, zeros, shape
2 from numpy.linalg import norm
3
4 #-----
5 # Kepler -----
6 #
7
8 def Kepler(U, t):
9
10    x = U[0]; y = U[1]; x_dot = U[2]; y_dot = U[3]
11    d = (x**2 + y**2)**1.5
12
13    return array( [ x_dot, y_dot, -x/d, -y/d ] )
14
15
16 #-----
17 # Linear Oscilator -----
18 #
19
20 def Linear_Oscilator(U,t):
21
22    return array([U[1], -U[0]])
23
24 #-----
25 # N_Bodies -----
26 #
27
28 def split(U):
29    Nc = 3
30    Nb = int(shape(U)[1] / (2*Nc))
31    N = shape(U)[0] - 1
32
33    Us = reshape( U, (N+1, Nb, Nc, 2) )
34
35    return reshape( Us[:, :, :, 0], (N+1, Nb, Nc) )
36
37 def join(r0, v0, Nc, Nb):
38    U0 = zeros(2*Nc*Nb)
39    U1 = reshape( U0, (Nb, Nc, 2) )
40    U1[:, :, 0] = r0
41    U1[:, :, 1] = v0
42    return U0
43
44 def N_B(U,t): # N-Bodies problem
45
46    Nc = 3
47    Nb = int(len(U) / (2*Nc))
48
49    Us = reshape( U, (Nb, Nc, 2) ) # Tensor Nb, Nc, (Position, Velocity)
50
51    r = reshape( Us[:, :, 0], (Nb, Nc) ) # Matrix Position

```

```

52     v = reshape( Us[:, :, 1], (Nb, Nc) ) # Matrix Velocity
53
54     F = zeros( len(U) )
55     Fs = reshape( F, (Nb, Nc, 2) ) # Tensor Nb, Nc, (Position, Velocity)
56
57     drdt = reshape( Fs[:, :, 0], (Nb, Nc) ) # Matrix Velocity
58     dvdt = reshape( Fs[:, :, 1], (Nb, Nc) ) # Matrix Acceleration
59
60     dvdt[:, :] = 0
61
62     for i in range(Nb):
63         drdt[i, :] = v[i, :]
64         for j in range(Nb):
65             if j != i:
66                 d = r[j, :] - r[i, :]
67                 dvdt[i, :] += d[:] / (norm(d)**3)
68
69     return F

```

Listing 2.2: Definición del problema de los N cuerpos

Por último, se encuentra en el módulo *Plots* la función *Plot_NBodies*, la cual permite el graficado de las diferentes figuras que se podrán observar. Como se puede ver en el Listing 1.3, dicha función recoge y plotea las diferentes órbitas. Del mismo modo que los anteriores hitos, se apoya en la función *Save_plot*, la cual permite elegir entre guardar o visualizar las diferentes figuras. Como ya se ha mencionado, debido a la filosofía de realizar una programación para que puedan realizarse todos los cálculos seguidos, esta función resulta muy útil para no tener que estar comprobando el proceso de cálculo del ordenador.

```

1 def Plot_NBodies(r, t, T, dt, T_S, Save):
2     fig, ax = plt.subplots( figsize = (10, 10) )
3     ax = plt.axes(projection = '3d')
4     N = shape(r)[1]
5     for i in range(N):
6         ax.plot(r[:, i, 0], r[:, i, 1], r[:, i, 2], label = "Orbit " + str(i+1))
7     ax.set_xlabel('x')
8     ax.set_ylabel('y')
9     ax.set_zlabel('z')
10    ax.set_title(T_S + "; T = " + str(T) + "; dt = " + str(dt))
11    ax.legend()
12    ax.grid()
13
14    file = T_S + "_dt_" + str(dt) + ".png"
15
16    Save_plot(Save, file)
17    def Save_plot(Save, file):
18
19        if not Save:
20            plt.show()
21
22    else:
23        ##Save Plots
24
25        path = os.path.join(os.getcwd(), 'Plots')
26

```

```

27     if not os.path.exists(path):
28         os.makedirs(path)
29
30     plt.savefig(os.path.join(path, file))

```

Listing 2.3: Plot de las figuras

Como se puede observar, todas las funciones descritas son de primera clase, pues en algunas de ellas algunos argumentos son otras funciones o devuelven funciones; y puras puesto que no son globales y no modifican argumentos de entrada.

2.4. Resultados

Se han realizado dos demostraciones del problema de los N cuerpos. la primera de ella se empleó para comprobar el correcto funcionamiento del código desarrollado.

Como se puede ver en las Figura 2.2, se obtiene órbitas estables alrededor del punto (0, 0, 0) para las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= 1, 0, 0; \quad \vec{v}_1 = 0, 0, 4, 0 \\
 \vec{r}_2 &= -1, 0, 0; \quad \vec{v}_2 = 0, -0, 4, 0 \\
 \vec{r}_3 &= 0, 1, 0; \quad \vec{v}_3 = -0, 4, 0, 0 \\
 \vec{r}_4 &= 0, -1, 0; \quad \vec{v}_4 = 0, 4, 0, 0
 \end{aligned}$$

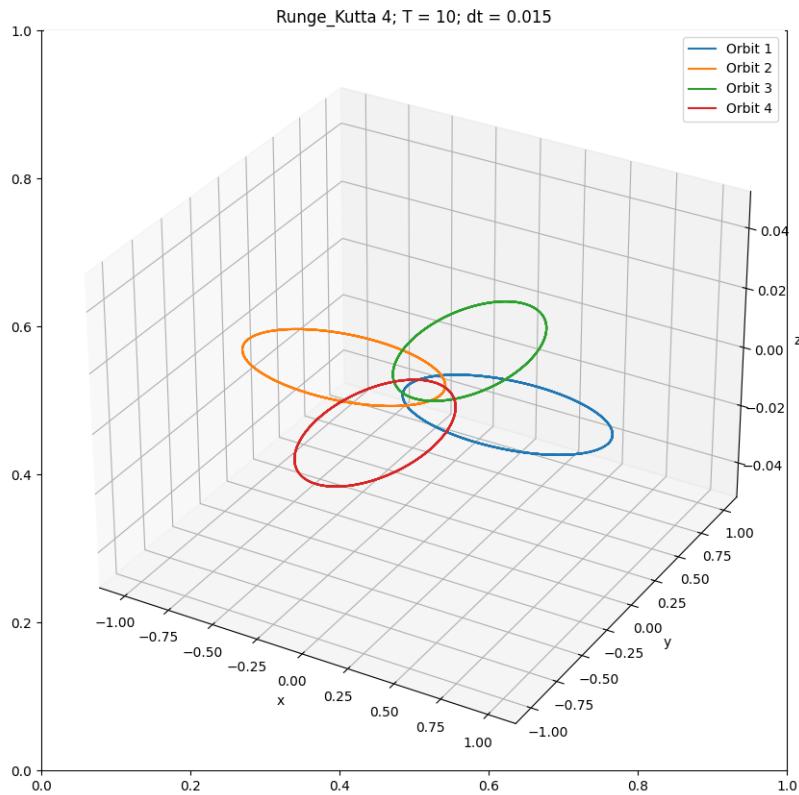
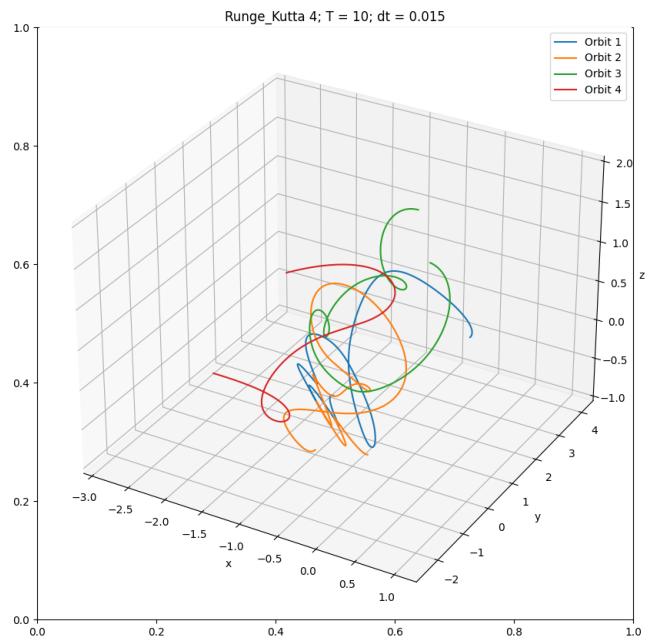


Figura 2.2: Órbitas estables

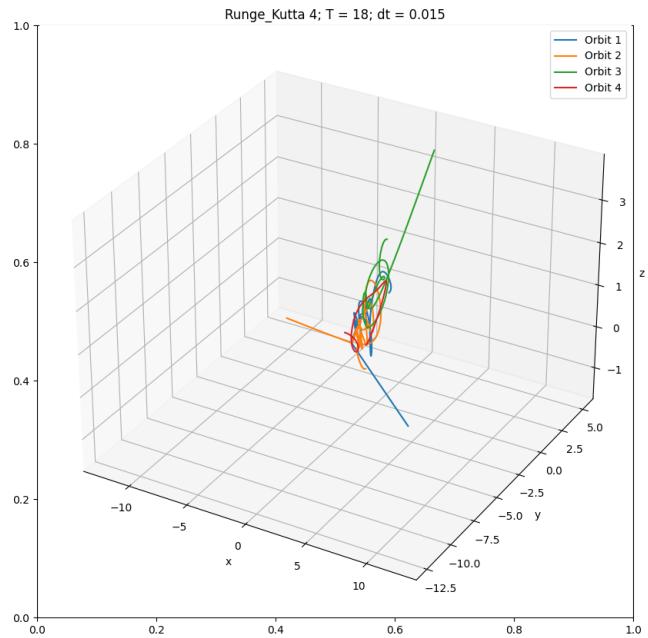
Comparada la buena programación del código se introducen otros cuatro cuerpos con valores iniciales diferentes.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 1, 0, 1; \vec{v}_1 = 0, 0, 4, 0 \\ \vec{r}_2 &= -1, 0, -1; \vec{v}_2 = 0, -0, 4, 0 \\ \vec{r}_3 &= 0, 1, 2; \vec{v}_3 = -0, 4, 0, 0 \\ \vec{r}_4 &= -2, -1, 0; \vec{v}_4 = 0, 4, 0, 0\end{aligned}$$

En la Figura 2.3 se puede observar las órbitas de cuatro cuerpos. Dichas órbitas son inestables, pues los movimientos de los mismos son erráticos. Si se simula en un tiempo cercano a $T = 18$ s, como se muestra en la Figura 2.3b, las órbitas se proyectan de forma lineal, divirgiendo el resultado.



(a) Simulación de $T = 10$ s



(b) Simulación de $T = 18$ s

Figura 2.3: Órbitas inestables

Por último, se simula el movimiento de dos cuerpos con las siguientes condiciones iniciales:

$$\vec{r}_1 = -0,5, -0,5, 0; \vec{v}_1 = 0, 0,5, 0,5$$

$$\vec{r}_2 = 0, 0,5, 0,5; \vec{v}_2 = 0, -0,5, 0,5$$

Dadas las condiciones iniciales, es de esperar un movimiento helicoidal hacia el arriba. Tal y como se puede visualizar en la Figura 2.4, dicha suposición es correcta. Los dos cuerpos realizan un movimiento estable alrededor de un punto intermedio a ellos.

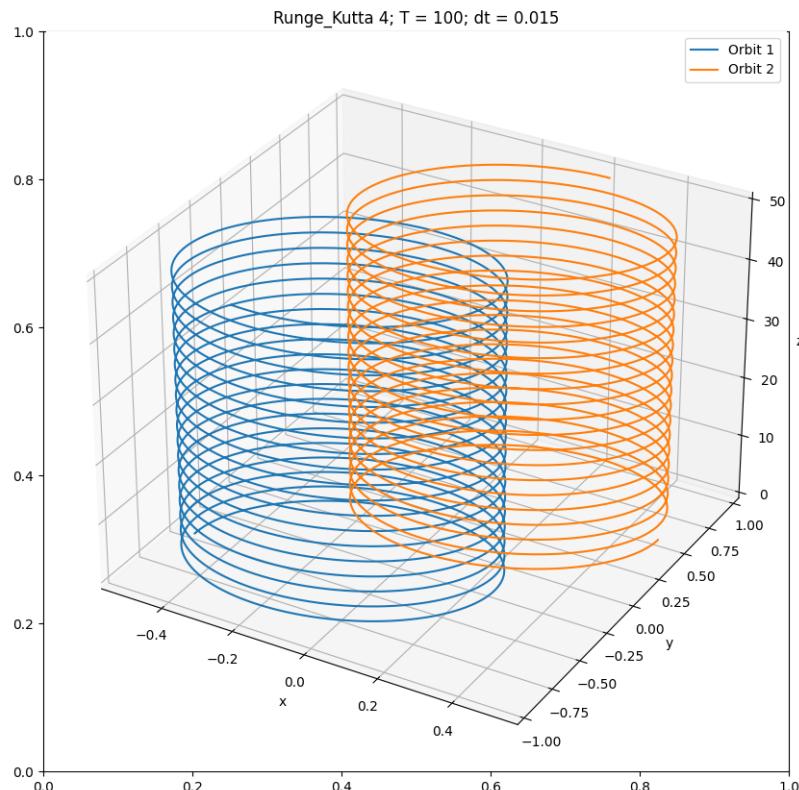


Figura 2.4: Movimiento helicoidal de dos cuerpos

2.5. Comentarios y posibles mejoras

Resulta muy complicado introducir valores que conlleven a una correcta integración del problema, teniendo que variar el tiempo de integración o las condiciones iniciales para conseguir unos resultados correctos, pues en el caso de la Figura 2.2, a pesar de ser órbitas estables, si la integración supera a 10 segundos, los resultados divergen.

A pesar del correcto funcionamiento de este software y de algunas mejoras implementadas, se pueden introducir mejoras, como puede ser un *decorator* que, a través de la programación de una función que contenta la simulación, se realice la graficación de las diferentes figuras.

3. Milestone 6

4. Introducción

El Objetivo principal de este hito es la programación de un Runge-Kutta embedido, el cual se define mediante de la siguiente forma:

$$U^{n+1} = u^n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i k_i k_i = F \left(U^n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} j_j, t_n + a \Delta t_n \right) \quad (4.0.1)$$

A su vez, se define el problema de los tres cuerpos restringido circular descrito por las ecuaciones de Arenstorf, las cuales determinan el problema para el sistema tierra luna. Este problema se define mediante las siguientes expresiones:

$$\dot{x} = v_x \quad (4.0.2)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (4.0.3)$$

$$\dot{v}_x = x + 2v_y - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\sqrt{[(x+\mu)^2 + y^2]^3}} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{\sqrt{[(x+\mu-1)^2 + y^2]^3}} \quad (4.0.4)$$

$$\dot{v}_y = y - 2v_x - \frac{(1-\mu)y}{\sqrt{[(x+\mu)^2 + y^2]^3}} - \frac{\mu y}{\sqrt{[(x+\mu-1)^2 + y^2]^3}} \quad (4.0.5)$$

Del mismo modo, se deben de determinar lo puntos de Langrange y calcular su estabilidad. Por último, se comprarán los resultados obtenido al calcular órbitas alrededor de los puntos de Lagrange mediante diferentes esquemas numéricos.

4.1. Esquema de dependencia funcional

Al igual que los anteriores hitos, la programación realizada para este hito cumple la filosofía de programación *Top-Down*, pues como se puede ver en la Figura 4.1, todo el flujo de dependencia discurre en diferentes niveles y hacia abajo. Del mismo modo, se puede ver que entre os módulos principales (*Cauchy_Problem*, *Temporal_Schemes*, *NB3_restrict*, *ERK* y *Plots*), siendo estos llamados desde el *main*. A su vez, estos módulos principales si que requieren de mismas módulos secundarios, como puede ser del módulo *optimize* de *Scipy*, pues es requerido para todos los esquemas temporales y para el problema restringido. Por último, se puede apreciar como todos los módulos son dependientes de la librería *Numpy*(*Linalg* es parte de esta librería).

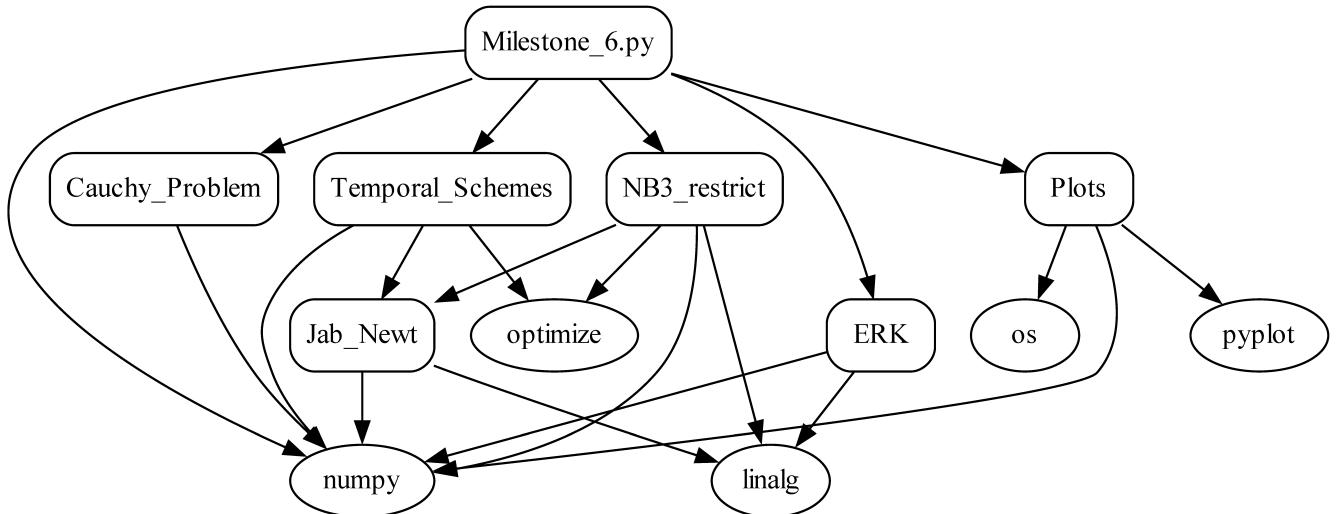


Figura 4.1: Esquema de dependencia funcional del Milestone 6

4.2. Scripts

Este módulo es el *main* del software desarrollado para este hito. En el Listing 4.1 se puede apreciar en primer lugar la importación de los diferentes módulos expuestos en la Figura 4.1. Tras la importación se encuentra el ya recurrente parámetro para guardar las figuras ploteadas y tras este la lista de esquemas numéricos. Como ya se ha mencionado, la programación de todos estos hitos está orientada a realizar scripts que, tras realizar una prueba para verificar su correcto desempeño, se introduzcan los diferentes parámetros y se realicen todos los cálculos sucesivamente, pues en casos de cálculos con esquemas numéricos como Crank-Nicolson o Euler inverso, el tiempo de computación es bastante elevado.

Posteriormente se introduce la distancia tierra-luna, se inicializan los parámetros que definen la malla de integración y las condiciones iniciales de los puntos de Lagrange. Es de extrema importancia introducir unas condiciones iniciales correctas para un buen cálculo de los puntos de Lagrange. Se calculan dichos puntos y se verifica su estabilidad. Tras ello, se calculan las diferentes órbitas a través del problema de Cauchy y se plotean. Para poder obtener órbitas desde esos puntos se requiere una pequeña perturbación que posibilite el comienzo de las órbitas, pues aunque sean algunos puntos inestables, no dejan de ser posiciones de equilibrio, por lo que si no se perturba no se podrá obtener ninguna órbita.

Cabe destacar que, aunque las condiciones iniciales se estén introduciendo en filas a diferencia de otros hitos, la función `C_P` ya redimensiona oportunamente dicho vector para introducirlo de forma apropiada en el cálculo. Se devuelven los resultados introducidos en columnas, dato a tener en cuenta para un procesamiento adecuado de los datos. De igual modo, se pueden observar una función wrappeadas. Tal y como se comentó en clase, esto se

debe a la necesidad de introducir en el problema de Chauchy una función con dos variables. Por ello, se transforma el problema restringido en un problema de dos variables, U y t.

Por último, destacar que el esquema temporal de Runge-Kutta embebido se ha decidido programarlo en un módulo diferente al resto de parámetros esquemas temporales por requerir de diferentes funciones bastante extensas.

```

1 from numpy import array, save, zeros, linspace, shape, reshape, around
2 from ODES.Cauchy_Problem import C_P
3 from Problems.NB3_restrict import RBP, Lagrange_points, stb_Lp
4 from ODES.Temporal_Schemes import Euler, RK4, Crank_Nicolson,
   Inverse_Euler, LeapFrog
5 from ODES.ERK import ERK_sheme
6 import Graf.Plots as plt
7
8 # Save plot
9 Save = False
10
11 # Temporal_Scheme
12
13 T_S = [Euler, RK4, LeapFrog, ERK_sheme, Crank_Nicolson, Inverse_Euler,
   ERK_sheme]
14
15 # Data of the system
16 mu_earth_Moon = 1.2151e-2
17
18 # Initialitation of the integration mesh
19 N = 10000
20 t = linspace(0, 100, N)
21
22 # Initial Conditions for interpolation
23 U0 = zeros( [5,4] ) # Number of Lagrange points and coordiantes
24
25 U0[0,:] = [0.8, 0.6, 0 , 0]
26 U0[1,:] = [0.8, -0.6, 0, 0]
27 U0[2,:] = [-0.1, 0, 0, 0]
28 U0[3,:] = [0.1, 0, 0, 0]
29 U0[4,:] = [1.01, 0, 0, 0]
30
31 L_p = Lagrange_Points(U0, shape(U0)[0], mu_earth_Moon)
32 print("\n" + str(L_p) + "\n")
33
34 #Stability of Lagrande Points
35 L_p_stb = zeros( 4 )
36
37 for i in range( shape(U0)[0] ):
38     L_p_stb[:2] = L_p[i, :]
39     stb = around( stb_Lp(L_p_stb, mu_earth_Moon), 5 )
40     print(str(stb) + "\n")
41
42 #Lagrange Point's Orbits
43
44 U_DLPO = zeros( [shape(U0)[0], 4] )
45
46 eps = 1e-4 # perturbation to initiate movement
47

```

```

48 for i in range( shape(U0)[0] ):
49     U_OLPO[i, :2] = L_p[i, :] + eps
50     U_OLPO[i, 2:] = eps
51
52 def F(U,t):
53     return RBP(U, t, mu_earth_Moon)
54
55 for j in range( len(T_S) ):
56     for i in range( shape(U0)[0] ):
57         U_LP = C_P(F, t, U_OLPO[i,:], T_S[j]) # introduce lines and
58     return in rows
      plt.Plot_LPO(U_LP, L_p, mu_earth_Moon, T_S[j], i, Save)

```

Listing 4.1: Script principal Milestone 6

Continuando con el esquema temporal de Runge-Kutta embebido (Listing 4.2), se sigue la programación que se puede obtener en [2]. Como modificación de este código, solo se ha dispuesto de una matriz de Butcher, por lo que en dicha función no se introduce ningún parámetro.

```

1 from numpy.linalg import norm
2 from numpy import zeros, matmul, linspace
3
4 def ERK_sheme(U1 , dt, t, F):
5     ERK_sheme.__name__ = "ERK"
6
7     tolerance = 1e-10
8
9     V1 = RK_scheme("First", U1, t, dt, F)
10    V2 = RK_scheme("Second", U1, t, dt, F)
11
12    (a, b, bs, c, q, Ne) = Butcher_array()
13
14    h = min( dt, Step_size(V1 - V2, tolerance, min(q), dt) )
15
16    N = int( dt / h ) + 1
17    h = dt / N
18
19    V1 = U1; V2 = U1
20
21    for i in range(N):
22        time = t + i * dt / N
23        V1 = V2
24        V2 = RK_scheme("First", V1, time, h, F)
25
26    U2 = V2
27
28    ierr = 0
29
30    return U2
31
32 def RK_scheme(tag, U1, t, dt, F):
33
34     (a, b, bs, c, q, Ne) = Butcher_array()
35
36     N = len(U1)
37     k = zeros( [Ne, N] )

```

```

38
39     k[0,:] = F( U1, t + c[0]*dt )
40
41
42     if tag == "First":
43
44         for i in range(1,Ne):
45             Up = U1
46
47             for j in range(i):
48                 Up = Up + dt * a[i,j]*k[j,:]
49
50             k[i,:] = F( Up, t + c[i]*dt )
51
52     U2 = U1 + dt * matmul(b,k)
53
54     elif tag == "Second":
55
56         for i in range(1,Ne):
57             Up = U1
58
59             for j in range(i):
60                 Up = Up + dt * a[i,j]*k[j,:]
61
62             k[i,:] = F(Up, t + c[i] * dt)
63
64     U2 = U1 + dt * matmul(bs,k)
65
66     return U2
67
68 def Step_size(dU, tolerance, q, dt):
69
70     if( norm(dU) > tolerance ):
71         size = dt *( tolerance / norm(dU) )** ( 1 / ( q + 1 ) ) #
Step_size
72     else:
73         size = dt # Step_size
74
75     return size
76
77 def Butcher_array():
78     q = [5,4]
79     Ne = 7
80
81     a = zeros( [Ne, Ne-1] )
82     b = zeros( [Ne] )
83     bs = zeros( [Ne] )
84     c = zeros( [Ne] )
85
86     c[:] = [ 0., 1./5, 3./10, 4./5, 8./9, 1., 1. ]
87
88     a[0,:] = [ 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0. ]
89     a[1,:] = [ 0., 1./5, 0., 0., 0., 0., 0. ]

```

```

90      a[2,:] = [       3./40 ,         9./40 ,          0. ,        0. ,
91                  0. ,        0. ]
92      a[3,:] = [      44./45 ,       -56./15 ,        32./9 ,        0. ,
93                  0. ,        0. ]
94      a[4,:] = [ 19372./6561 , -25360./2187 ,   64448./6561 , -212./729 ,
95                  0. ,        0. ]
96      a[5,:] = [ 9017./3168 ,      -355./33 ,     46732./5247 ,    49./176 ,
97      -5103./18656 ,        0. ]
98      a[6,:] = [      35./384 ,          0. ,     500./1113 ,    125./192 ,
99      -2187./6784 ,     11./84 ]
100
101      b[:] = [ 35./384 ,    0. ,     500./1113 ,    125./192 , -2187./6784 ,
102      11./84 ,        0. ]
103      bs[:] = [5179./57600 , 0. , 7571./16695 , 393./640 , -92097./339200 ,
104      187./2100 , 1./40 ]
105
106      return (a, b, bs, c, q, Ne)

```

Listing 4.2: Runge-Kutta embedido

Continuando con el problema restringido definido mediante las Expresiones 4.0.2, se realiza el código que se puede observar en el Listing 4.3. Del mismo modo que en caso anterior, esta programación se apoya en [2]. Se puede observar que el cálculo de la estabilidad de los puntos de Lagrange se realiza mediante el análisis de la matriz Jacobiana, tal como se explico en la parte teórica de la asignatura. Aquellos sistemas con autovalores negativos serán estables.

```

28     FX = RBP(X, 0 , mu)
29     return FX[2:4]
30
31     for i in range(N_LP):
32         LP[i,:] = fsolve( F, U0[i,:2] )
33
34     return LP
35
36 def stb_Lp(U_0, mu):
37
38     def F(Y):
39         return RBP(Y, 0 , mu)
40
41     J = Jacobiano(F, U_0)
42
43     Autovalor, autovector = eig(J)
44
45     return Autovalor

```

Listing 4.3: Problema restringido

Por último, se realiza añade otra función que grafica los puntos lagrangianos y las órbitas calculadas alrededor de los mismo. Como se puede ver en el Listing 4.4, se realizan dos difuras, la primera de ella para todas las órbitas y la segunda de ellas realiza figuras centradas en los puntos L4 y L5, los cuales al ser estables requieren una observación más cercana, como se podrán observar en la Sección 4.3.

```

1 def Plot_LPO(U, L_P, mu, T_S, j, Save):
2
3     LP = ["L4", "L5", "L3", "L1", "L2"]
4
5     fig, ax = plt.subplots( figsize = (10, 10) )
6
7     for i in range( len(L_P) ):
8         ax.plot( L_P[i, 0], L_P [i, 1], 'o', label = LP[i] )
9
10    ax.plot( U[0,:], U[1,:], color = 'b', label = "Orbit" )
11    ax.set_xlabel("x")
12    ax.set_ylabel("y")
13    ax.set_title("Lagrange Points of Earth-Moon System and Orbit arround"
14                 " + LP[j]")
15    plt.legend()
16    ax.grid()
17
18    name = T_S.__name__
19    file = name + "_Lagrange Point_" + str(j) + ".png"
20
21    Save_plot(Save, file)
22
23    if LP[j] == "L4" or LP[j] == "L5":
24        fig, ay = plt.subplots( figsize = (7,7) )
25        ay.plot( L_P[j, 0], L_P [j, 1], 'o', label = LP[j] )
26        ay.plot( U[0,:], U[1,:], color = 'b', label = "Orbit" )
27        ay.set_xlabel("x")
28        ay.set_ylabel("y")
29        ay.set_title("Orbit arround" + LP[j])

```

```

29     plt.legend()
30     ay.grid()
31
32     name = T_S.__name__
33     file = name + "_Lagrange_Point_Zoom_" +str(j) +".png"
34     Save_plot(Save, file)

```

Listing 4.4: Plot del problema restringido

4.3. Resultados

En esta Sección se mostrarán los resultados obtenidos en simulaciones con 10000 iteraciones y un tiempo de 100 segundos.

Puntos de Lagrange sistema Tierra-Luna

En primer lugar, tras el cálculo de los puntos de Lagrange y el análisis del la matriz Jacobiana particularizada en cada punto de Lagrange, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.1.

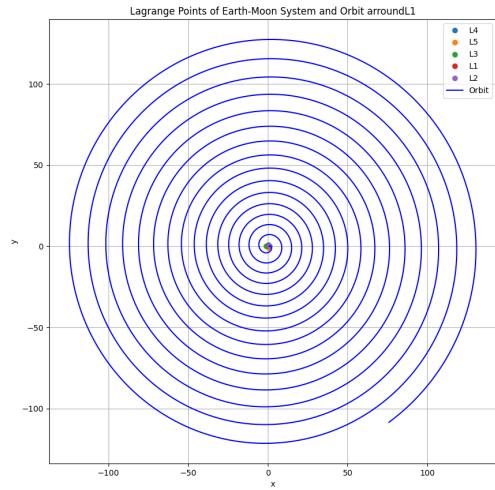
Tabla 4.1: Puntos de Lagrange Sistema Tierra-Luna

Puntos de Lagrange	Coordenada X	Coordenada Y	Estabilidad
L1	0.83691309	0	Inestable
L2	1.15568376	0	Inestable
L3	-1.00506282	0	Inestable
L4	0.487849	0.8660254	Estable
L5	0.487849	-0.8660254	Estable

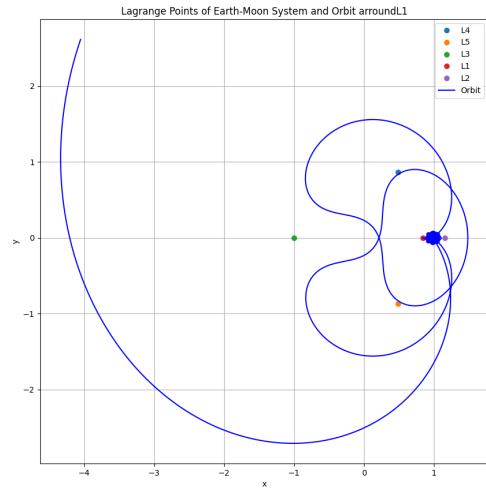
Órbitas entorno a los puntos de Lagrange

Una vez definidos los puntos Lagrangianos del sistema Tierra-Luna, se calculan una serie de órbitas a través de diferentes esquemas numéricos. Para una mejor comparación, la perturbación introducida en las órbitas siempre es la misma: $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

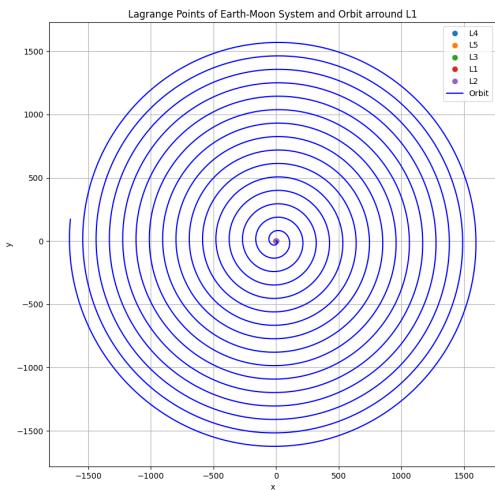
En primer lugar, en la Figura 4.2 se presentan los diferentes resultados obtenidos para órbitas en torno L1. Como se puede observar, a excepción de Runge-Kutta 4 o Runge-Kutta embedido, se obtienen malas convergencias de órbitas entorno a este punto. Comparando las Figuras 4.2b y 4.2f, se puede observar que para RK4 el resultado termina divergiendo, mientras que para el embedido no. Se puede ver que el punto L1 es un punto inestable, tal y como se refleja en la Tabla 4.1.



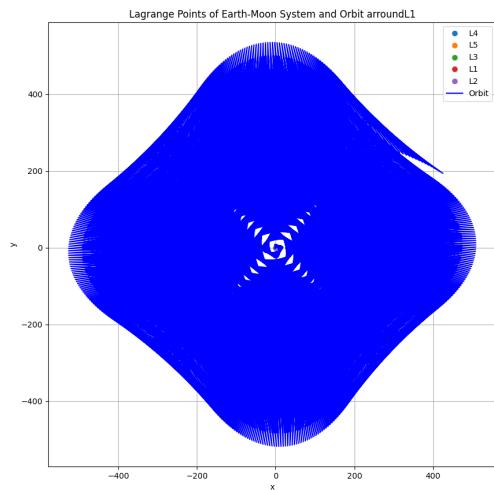
(a) Euler



(b) RK4

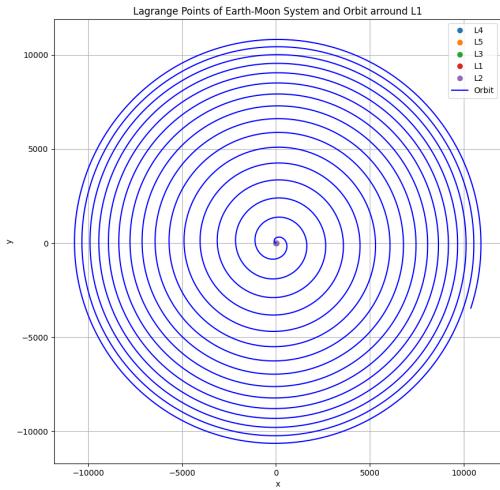


(c) Crank-Nicolson

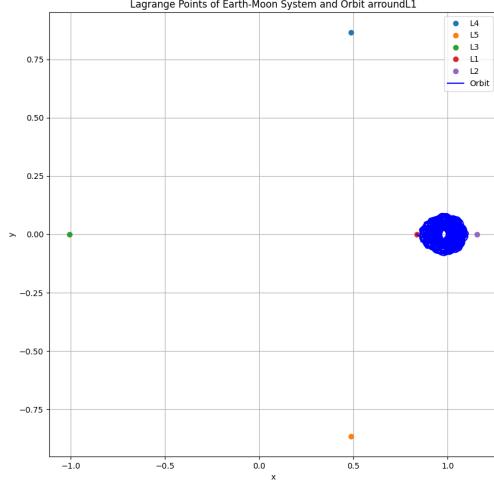


(d) LeapFrog

Figura 4.2: Órbitas entorno a L1



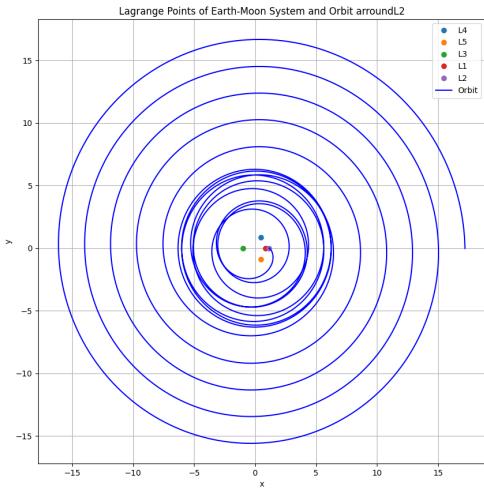
(e) Euler inverso



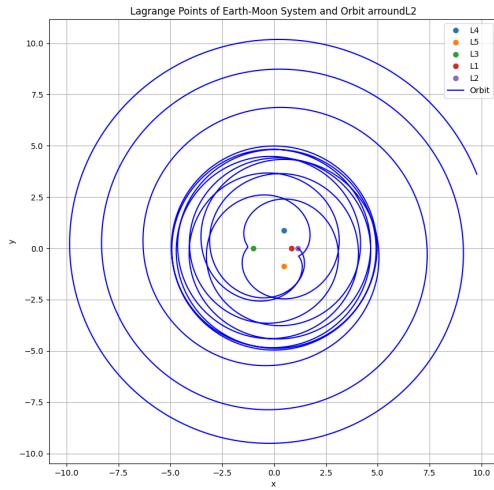
(f) ERK

Figura 4.2: Órbitas entorno a L1

Continuando con el punto L2, mostrado en el Figura 4.3, se observa que tanto RK4, como C-N o ERK obtienen resultados que terminan divergiendo. En el caso de los esquemas temporales de Euler o LeapFrog no se obtienen buenos resultados. Se puede ver que el punto L2 es un punto inestable, tal y como se refleja en la Tabla 4.1.

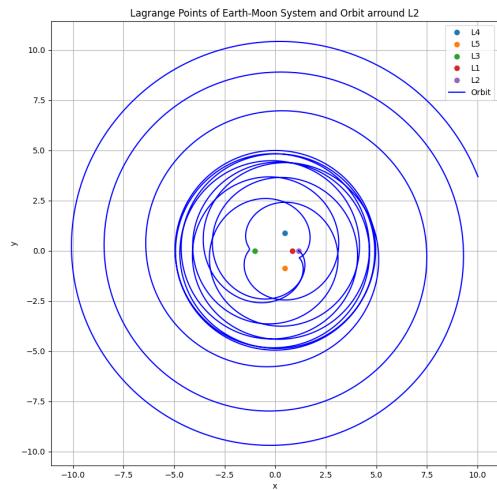


(a) Euler

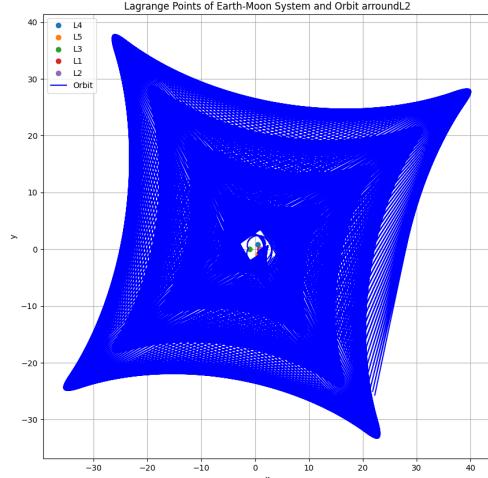


(b) RK4

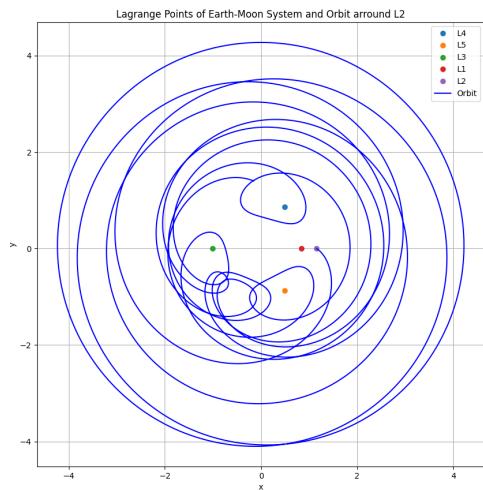
Figura 4.3: Órbitas entorno a L2



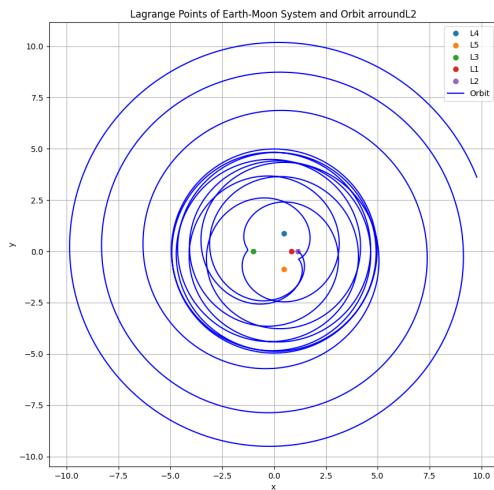
(c) Crank-Nicolson



(d) LeapFrog



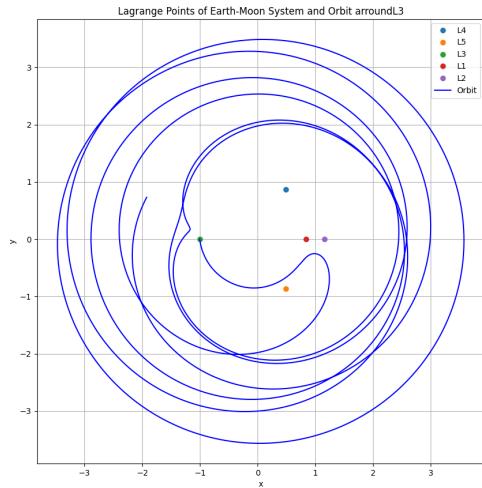
(e) Euler inverso



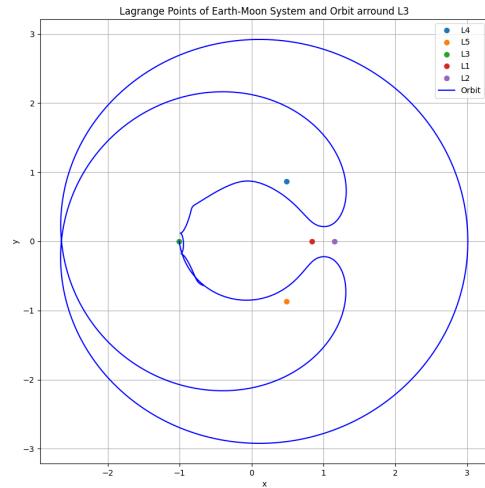
(f) ERK

Figura 4.3: Órbitas entorno a L2

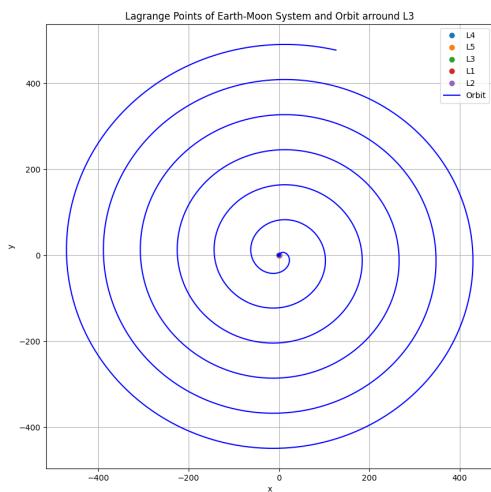
Continuando con los resultados en L3 (Figura 4.4, se puede observar que los resultados más buenos son los correspondientes a los métodos RK4 y ERK, Figuras 4.4b y 4.4f respectivamente. Estas órbitas son fácilmente comprobables, pues a través del punto L3 se puede realizar cambios de órbitas, pasando del interior al exterior y viceversa. Se puede ver que el punto L3 también es un punto inestable, tal y como se refleja en la Tabla 4.1.



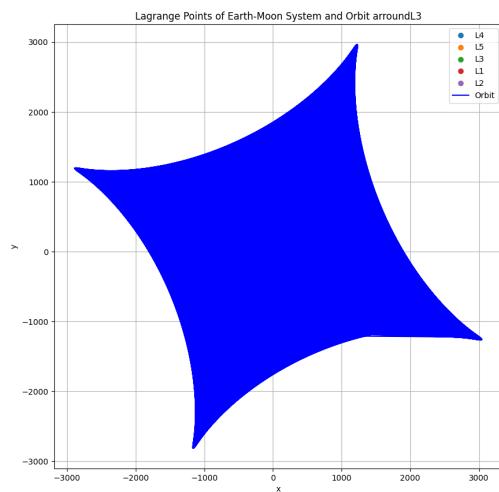
(a) Euler



(b) RK4

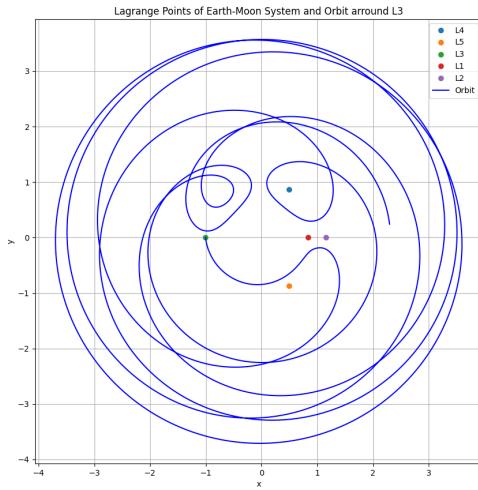


(c) Crank-Nicolson

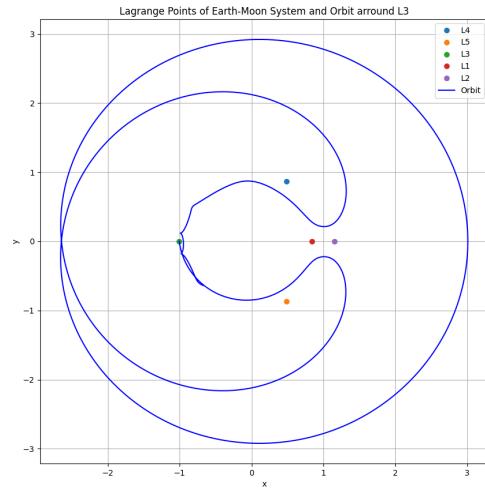


(d) LeapFrog

Figura 4.4: Órbitas entorno a L3



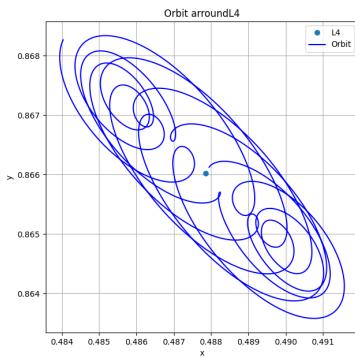
(e) Euler inverso



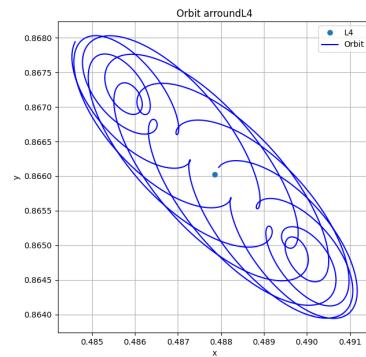
(f) ERK

Figura 4.4: Órbitas entorno a L3

Continuando con los Puntos L4 y L5 (Figuras 4.5 y 4.6), se puede observar que, todos los esquemas numéricos tienen una buena convergencia, aportando resultados similares. Como ya se mencionó en la Tabla 4.1, los puntos L4 y L5 son puntos estables. Estos resultados corroboran dicha afirmación.



(a) Euler



(b) RK4

Figura 4.5: Órbitas entorno a L4

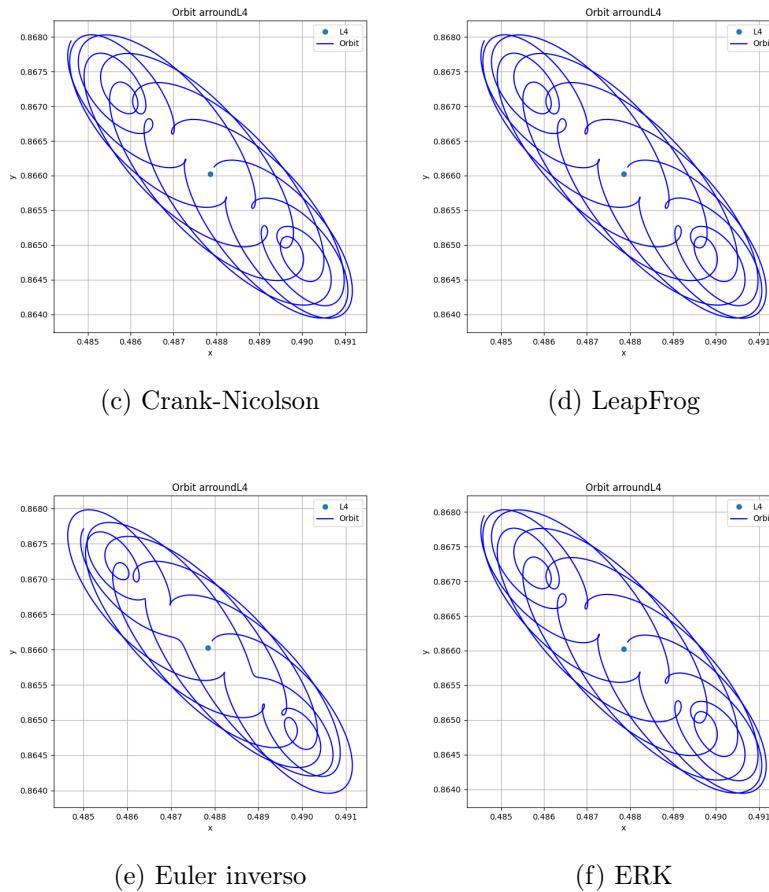


Figura 4.5: Órbitas entorno a L4

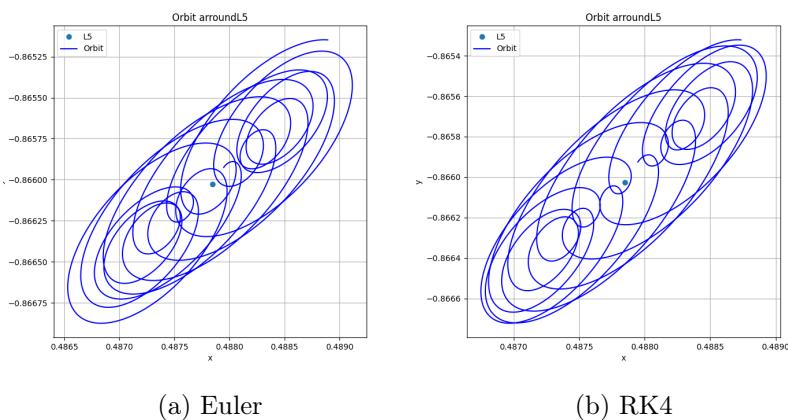


Figura 4.6: Órbitas entorno a L5

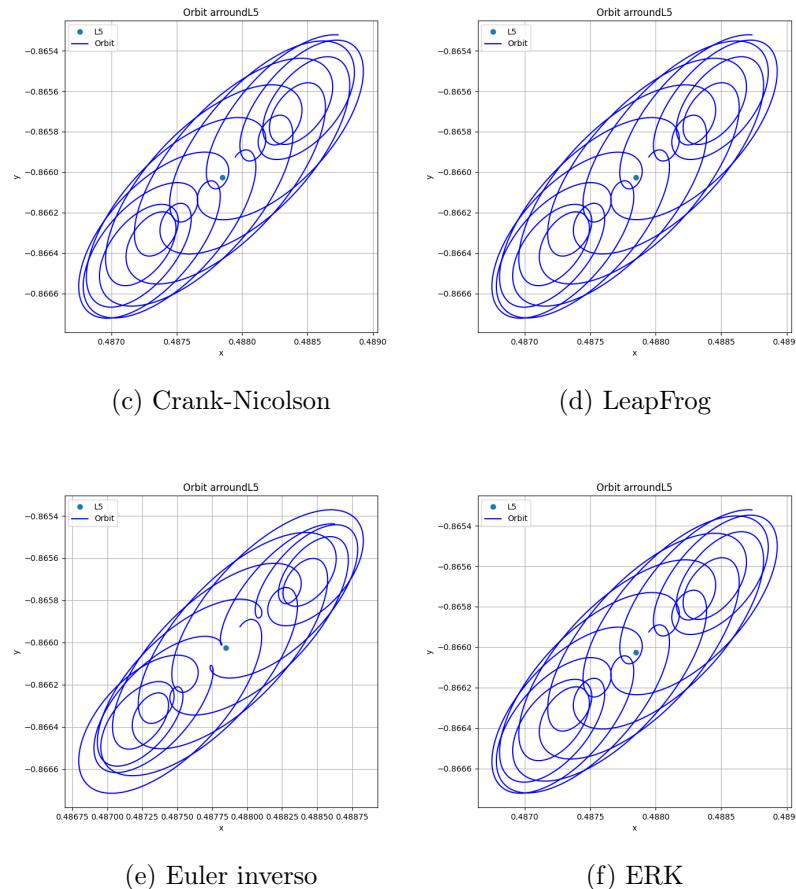


Figura 4.6: Órbitas entorno a L5

4.4. Comentarios y posibles mejoras

Cabe destacar la extremada sensibilidad de los resultados a la perturbación introducida, pues si es demasiado grande, los resultados no son buenos, y de forma análoga si son demasiado pequeños.

El coste computacional es mayor que en los hitos 4 y 5, por lo que se podría implementar un procesamiento en paralelo reducir el tiempo de computación. Del mismo modo, se podrían introducir *decorators* que permitan graficar todas las figuras y también se podrían emplear *Kwarqs* para no depender del posicionamiento de los diferentes parámetros.

Referencias

- [1] Miguel Ángel Rapado Tamarit Juan A. Hernández Ramos. *Advanced Programming for Numerical Calculations: Climbing Python & Fortran*.
- [2] Juan A. Hernández Ramos; Javier Escoto López. *How to learn Applied Mathematics through modern FORTRAN*.