



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Máster Universitario en Sistemas Espaciales

# Milestone 5: N-body problem

**Ampliación de matemáticas 1**

**2 de diciembre de 2022**

**Autor:**

Tomás Ley Oliver

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Problema de los N-cuerpos</b>	<b>3</b>
2.1. Discretización	3
2.2. Resultados	3
2 Cuerpos	3
3 Cuerpos	4
4 Cuerpos	5
<b>3. Actualización de módulos y estructuración del código</b>	<b>6</b>
3.1. Main	6
3.2. Physics	6
3.3. Estructura del código	6

## 1. Introducción

El objetivo de este hito es estudiar y resolver el problema de los N cuerpos. Primero se expondrá la teoría de este problema, después se analizarán los resultados de distintos cuerpos, y finalmente se comentarán los cambios realizados a los módulos utilizados.

## 2. Problema de los N-cuerpos

El problema de los N cuerpos analiza las interacciones gravitatorias entre N puntos de masa  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) en un sistema de referencia inercial. Las fuerzas que experimentan estos cuerpos vienen definidas por la fórmula:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}$$

De esta ecuación diferencial se obtiene el vector de estado  $\mathbf{U}$ , formado por las componentes de posición y velocidad de cada partícula.

### 2.1. Discretización

Para la discretización del oscilador armónico se ha utilizado un tiempo total de integración adimensional,  $T = 20$ , y un diferencial de tiempo,  $\Delta t = 0.01$ , con el objetivo de obtener un tiempo de integración lo suficientemente largo como para poder observar la evolución de los distintos cuerpos.

El cálculo numérico de este problema se ha realizado mediante el esquema *Runge-Kutta* de cuarto orden, y se han analizado los problemas de 2, 3 y 4 cuerpos.

### 2.2. Resultados

Los resultados del problema de los N cuerpos dependen estrechamente de las condiciones iniciales escogidas, ya que, si los cuerpos se aproximan hasta distancias cercanas a cero, las fuerzas entre ellos tenderán a infinito y los resultados obtenidos no serán acertados.

#### 2 Cuerpos

Las condiciones iniciales escogidas han sido:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2.1. Se puede observar como los cuerpos orbitan entre ellos.

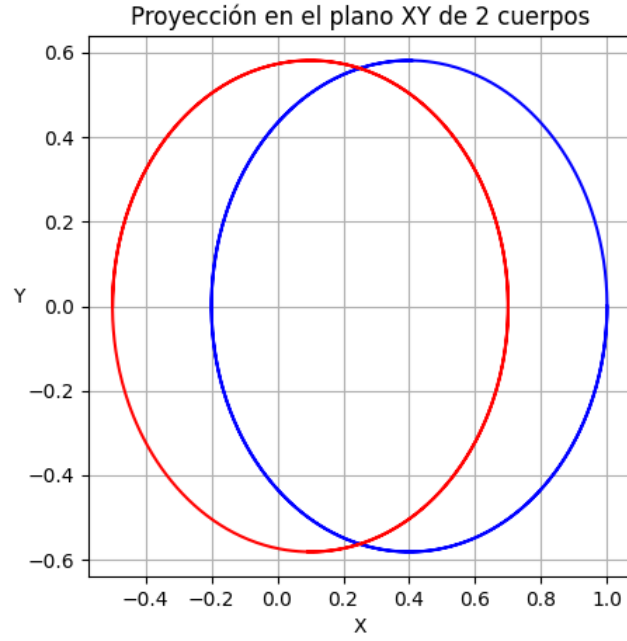


Figura 2.1: Resultados del problema de 2 cuerpos

### 3 Cuerpos

Las condiciones iniciales escogidas han sido:

$$r_1 = \begin{Bmatrix} 5/11 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; v_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad r_2 = \begin{Bmatrix} -2.5/11 \\ 0.39 \\ 0 \end{Bmatrix}; v_2 = \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/22 \\ -0.5/11 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$r_3 = \begin{Bmatrix} -2.5/11 \\ -0.39 \\ 0 \end{Bmatrix}; v_3 = \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/22 \\ -0.5/11 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2.2. Se puede observar cómo los cuerpos orbitan entre ellos.

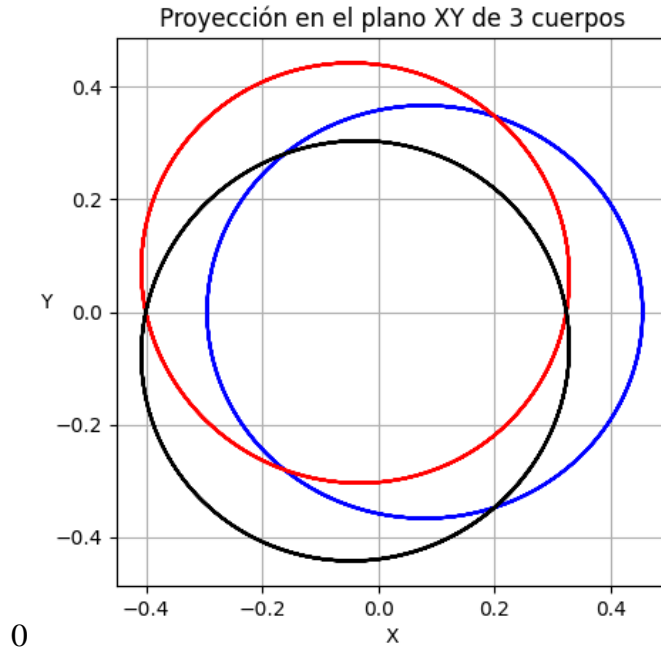


Figura 2.2: Resultados del problema de 3 cuerpos

Estos valores iniciales se han escogido para obtener unas órbitas triqueta, llamadas así por la forma que dibujan las estelas de las órbitas.

## 4 Cuerpos

Las condiciones iniciales escogidas han sido:

$$\begin{aligned} r_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; v_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_2 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r_3 &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_4 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 2.3 y 2.4.

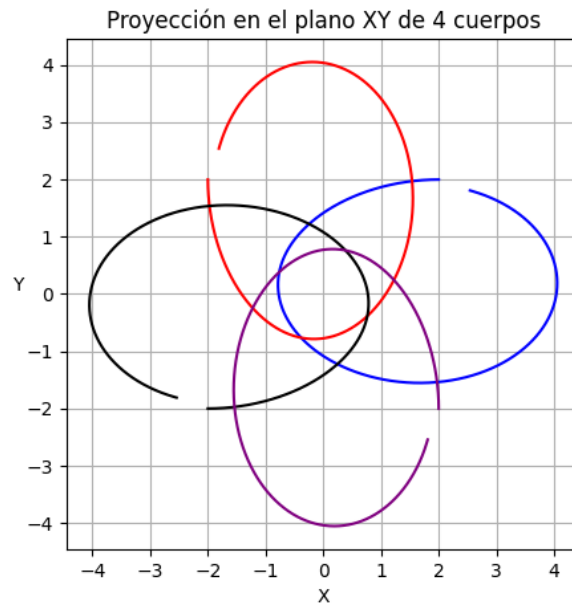


Figura 2.3: Resultados del problema de 4 cuerpos proyectados en el plano XY

4 cuerpos con metodo Runge-Kutta 4 y dt = 0.01

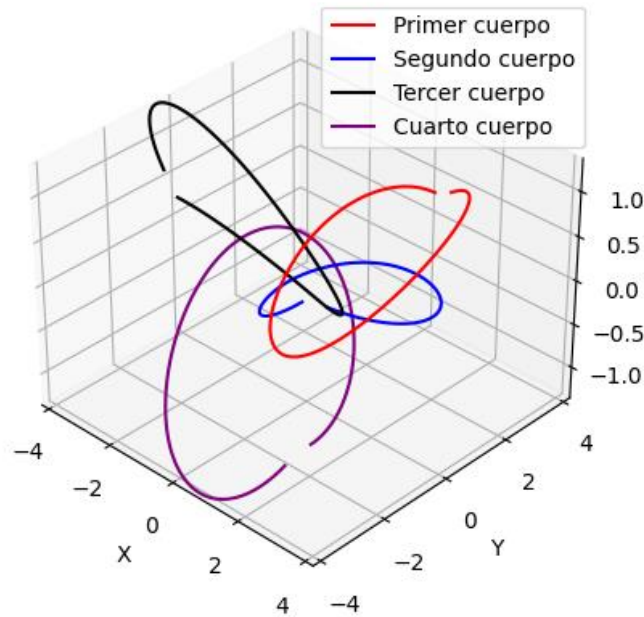


Figura 2.4: Resultados del problema de 4 cuerpos

### 3. Actualización de módulos y estructuración del código

Para resolver esta práctica se han actualizado los módulos utilizados en hitos anteriores.

#### 3.1. Main

Este archivo incluye las condiciones iniciales del problema, la discretización temporal y la definición del problema. Esto ya se ha visto en anteriores hitos, por lo que no se entrará en detalles.

#### 3.2. Physics

Se ha añadido la función de los N cuerpos. Esta función aprovecha la herramienta de los *punteros*, ya que es necesario tratar por separado las posiciones y las velocidades de los cuerpos. De esta manera la extensión del programa se reduce considerablemente ya que no se tiene que diferenciar cada componente del vector de estado.

```
r = reshape(Us[:, :, 0], (Nb, Nc))
v = reshape(Us[:, :, 1], (Nb, Nc))

drdt = reshape(Fs[:, :, 0], (Nb, Nc))
dvdt = reshape(Fs[:, :, 1], (Nb, Nc))
```

También se ha creado una función de condiciones iniciales para distintos números de cuerpos.

```
def initial_conditions_Nbody(Nb):
    if Nb == 2: ...
    elif Nb == 3: ...
    elif Nb == 4: ...
    return r, v
```

#### 3.3. Estructura del código

Se ha incluido este gráfico para exponer las dependencias entre los distintos módulos del código.

