



Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Máster Universitario en Sistemas Espaciales

Milestone II Report

Ampliación de Matemáticas I

28 de septiembre de 2022

Autora:

■ Rosa Martínez Rubiella

1. Introducción

En este segundo Hito, se añaden a los esquemas temporales explícitos utilizados para resolver el problema de la órbita Kepleriana dos de carácter implícito. Tanto el método de **Crank-Nicolson** como el **Euler Inverso** requieren resolver una ecuación que contiene el paso de tiempo siguiente en dos términos diferentes de la misma. Para ello, se utiliza la función **fsolve**; y, además, se implementa todo el código de forma escalonada. Es decir, se crean funciones tanto para los esquemas temporales como para la función de fuerza de Kepler, así como para el problema de Cauchy. Esto nos permite tener un código más claro y funcional.

2. Resultados

De forma análoga al documento anterior, se utiliza un tiempo de simulación total de 50 segundos para todos los esquemas temporales. De esta forma se pretende realizar una comparación para diferentes intervalos de integración **dt** entre los diferentes esquemas numéricos. El método de Crank-Nicolson es de orden 2, por lo que se prevén resultados con un error menor a los del Euler. Además, se añade al final del documento una comparación de las energías específicas de estos métodos para cada caso, ya que siempre deberían conservarse. (**Figura 5**)

2.1. $N = 200$

En primer lugar analizamos los resultados para un paso de integración bastante grande ($dt = 0,25$), es decir, con un número reducido de puntos de integración. Mientras que la aproximación que realiza el Crank-Nicolson parece bastante similar a la solución analítica (al igual que para el Runge-Kutta), el método de Euler Inverso tiene un comportamiento bastante errático durante los primeros pasos de integración ya que simula una órbita de tamaño mitad a la buscada (pierde energía rápidamente y, a continuación, se conserva con pequeñas fluctuaciones). (**Figura 1**)

Como ya se comentó en el primer documento y se puede observar en la **Figura 5**, la energía específica de los métodos de Euler no se mantiene constante, si no que diverge mucho en los primeros momentos de la simulación. Sin embargo, tanto el método de Runge-Kutta como el de Crank-Nicolson mantienen dicha energía constante, son conservativos.

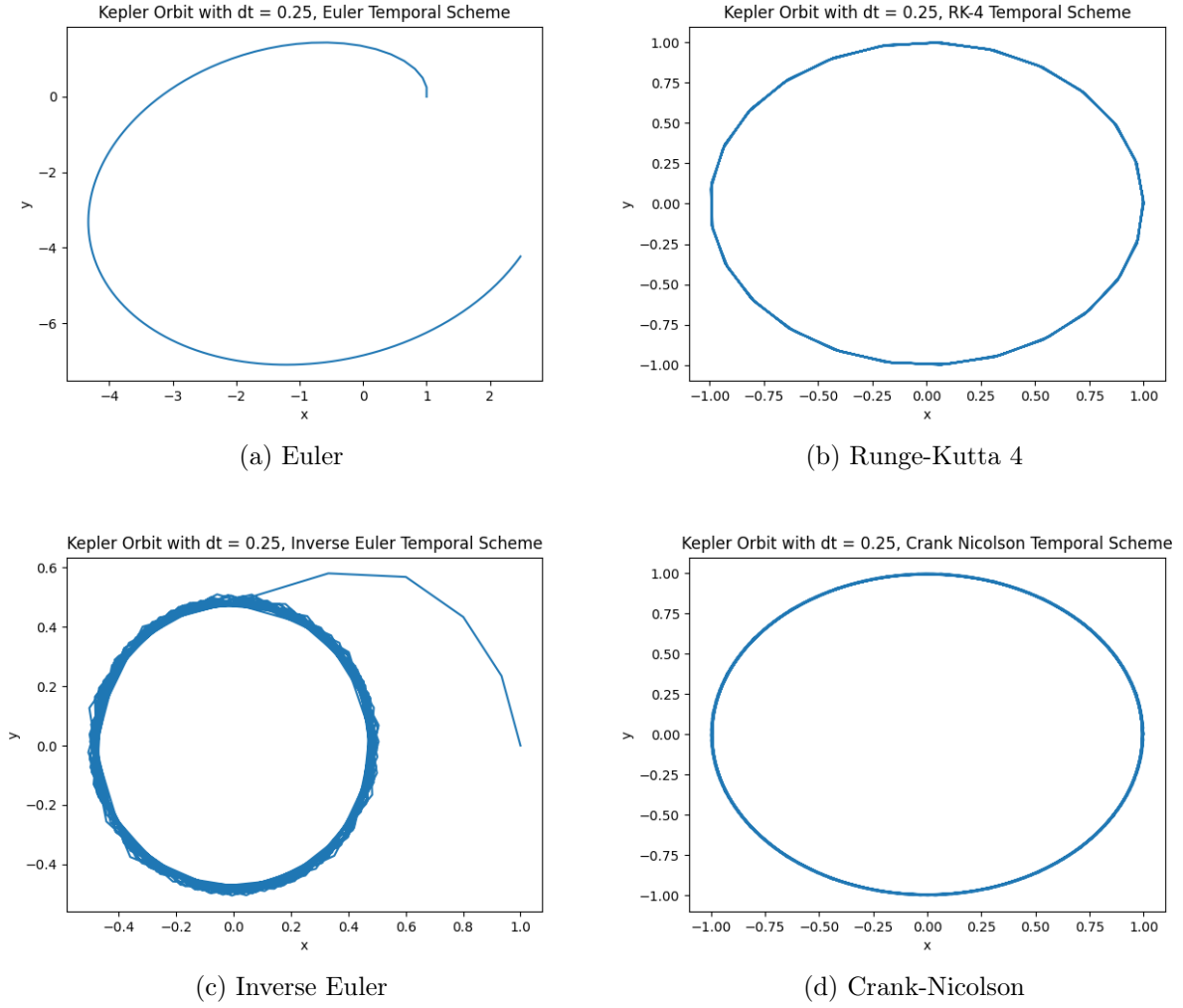


Figura 1: Kepler Problem, $N = 200$, $t = 50$

2.2. $N = 500$

Para el caso de pasos de integración de amplitud $dt = 0,1$, el método de Euler Inverso presenta una tendencia a infinito. Esto se produce porque la solución converge a $(0,0)$ en un punto de integración, por lo que aparecen indeterminaciones que tienden a infinito en el siguiente paso (**Figura 2**). Por otro lado, en la **Figura 5** se puede apreciar el pico que produce la energía específica de la órbita en dicho instante y su posterior asíntota a valor nulo.

En cuanto al resto de métodos, todos mantienen el comportamiento esperado, ya analizado con anterioridad.

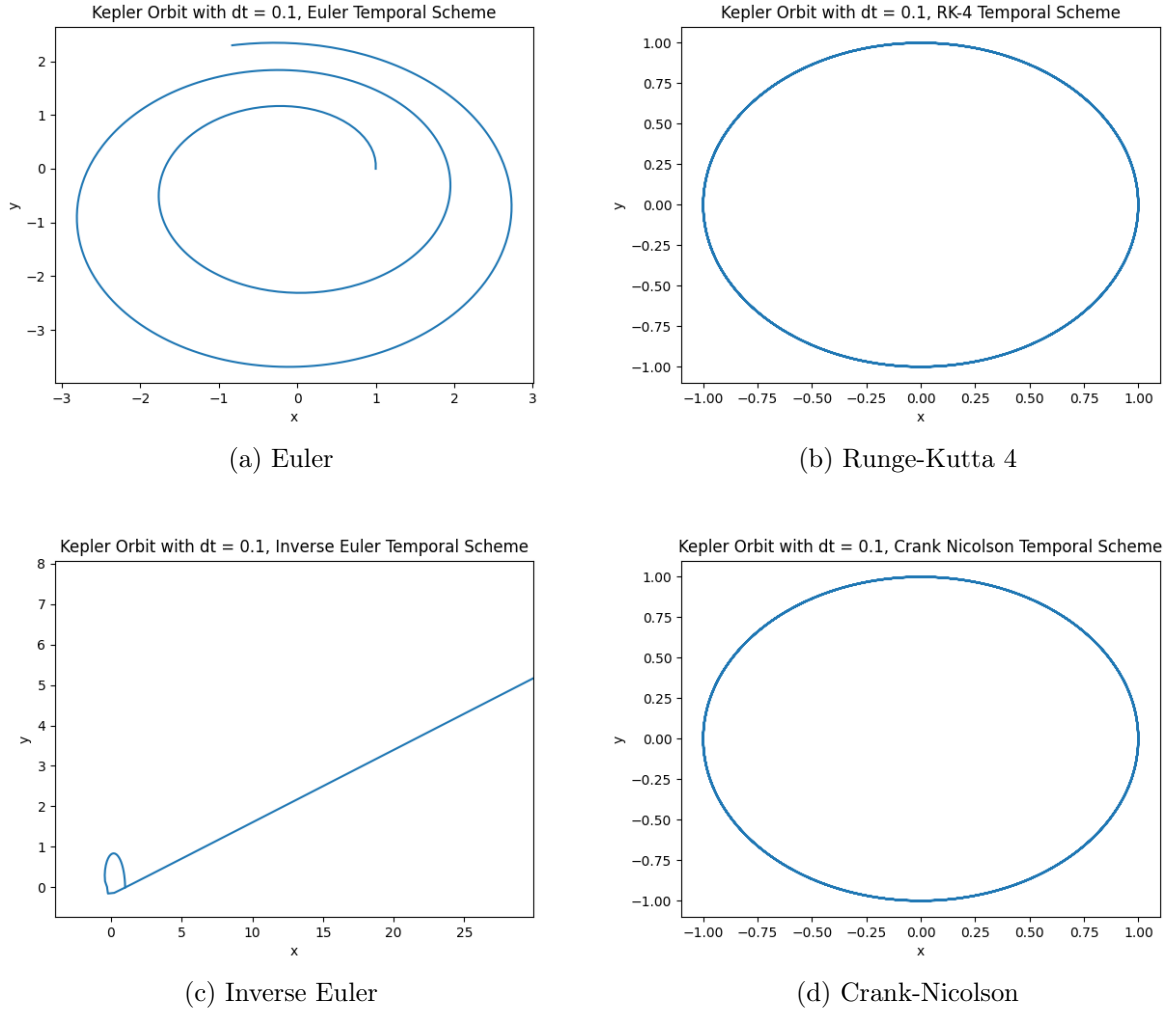


Figura 2: Kepler Problem, $N = 500$, $t = 50$

2.3. $N = 5000$

En este caso, mientras que el método de Crank-Nicolson mantiene una muy buena precisión de aproximación respecto a la solución analítica, el Euler-Inverso pierde energía de manera casi-lineal hasta caer bruscamente en las inmediaciones de la posición $(0,0)$. Es esta región la iteración no prospera de manera adecuada, y queda estancada. (**Figura 3**)

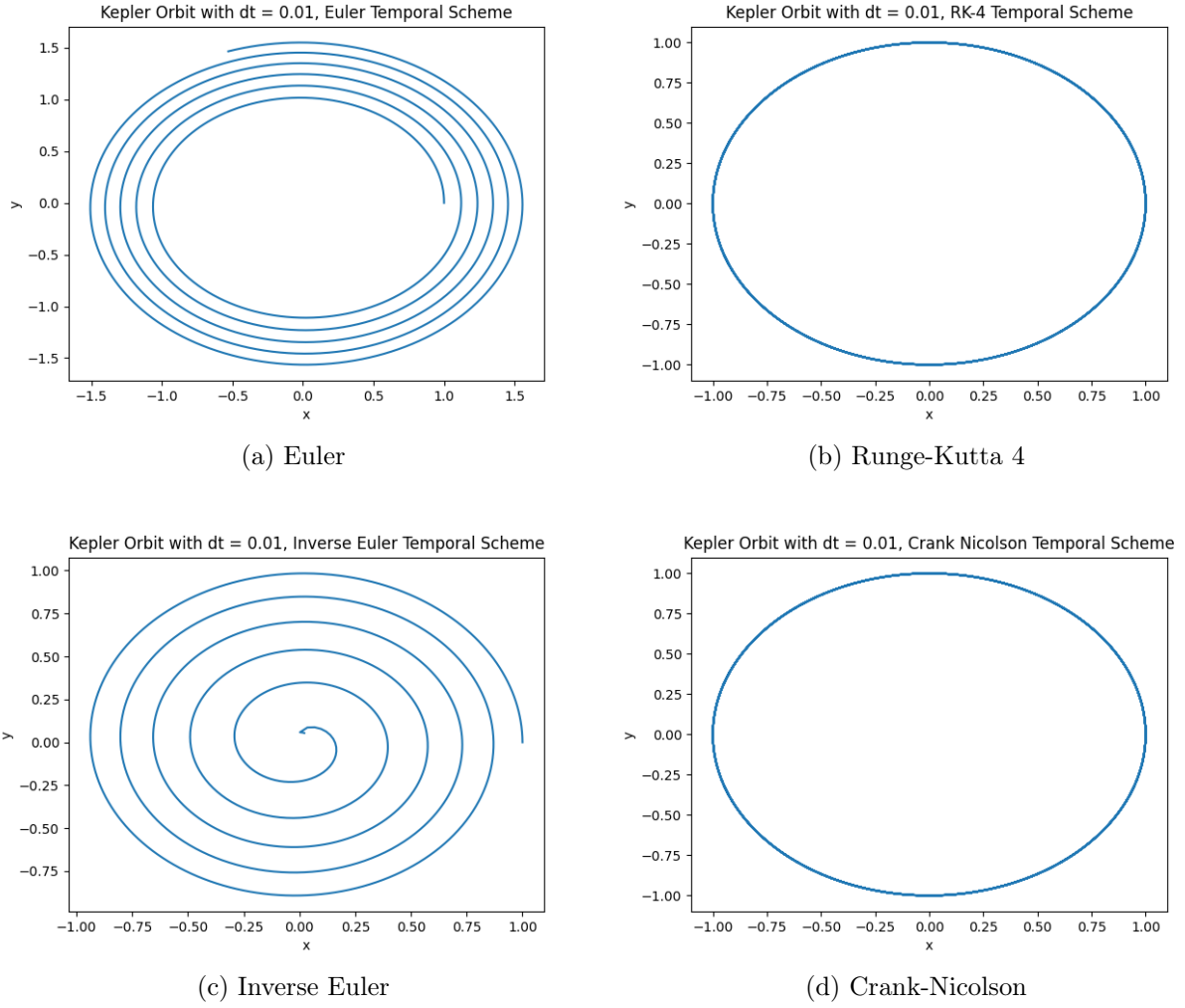
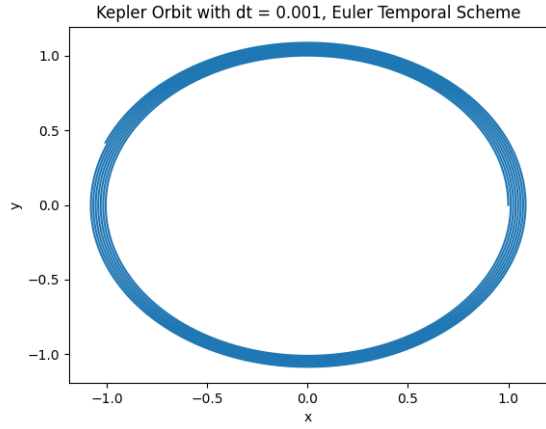


Figura 3: Kepler Problem, $N = 5000$, $t = 50$

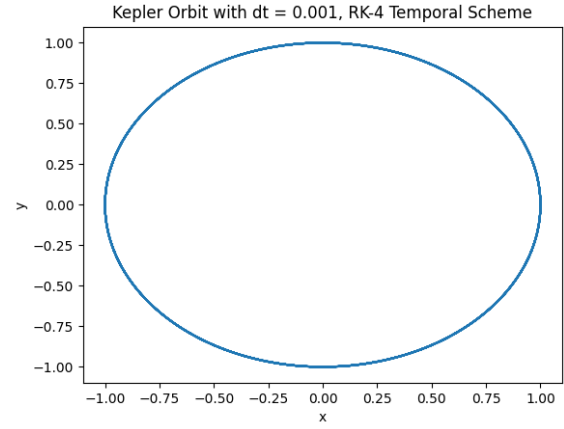
2.4. $N = 50000$

Por último, se incrementa todavía más el número de puntos para poder alcanzar una solución más precisa del método de Euler Inverso. En este caso, el paso de integración es lo suficientemente pequeño como para poder simular una órbita más coherente. Para el número de puntos seleccionado, tanto el Euler explícito como el implícito tienen una solución aproximada parecida, mientras que las soluciones de el Runge-Kutta y Crank-Nicolson se mantienen prácticamente iguales. (**Figura 4**)

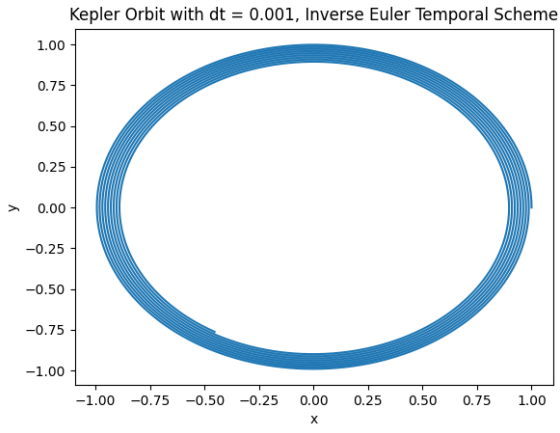
De la **Figura 5** se observa cómo las energías específicas de estas órbitas son mucho más constantes que en casos anteriores (escala del eje menor).



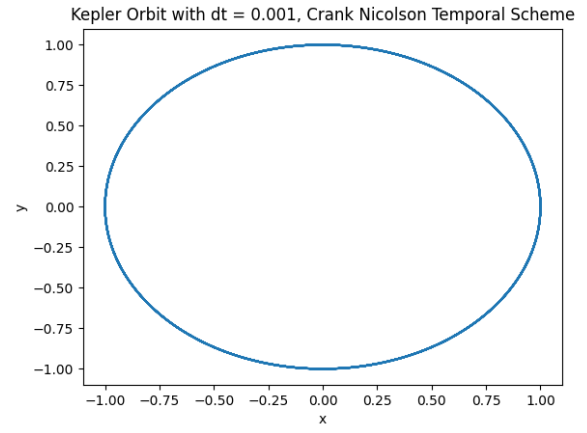
(a) Euler



(b) Runge-Kutta 4

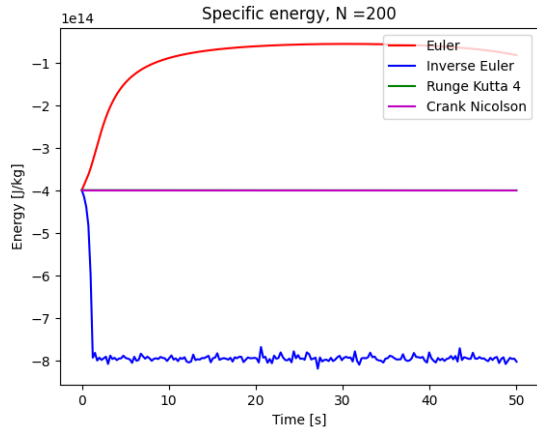


(c) Inverse Euler

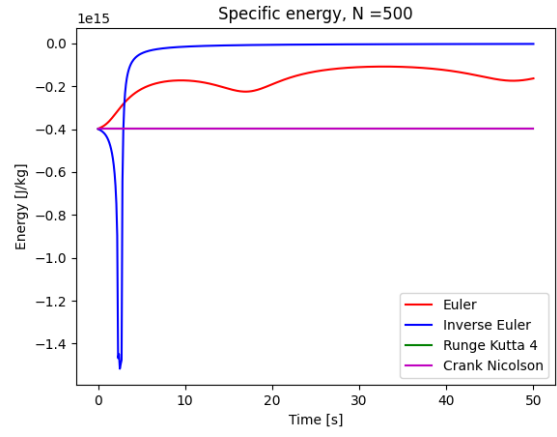


(d) Crank-Nicolson

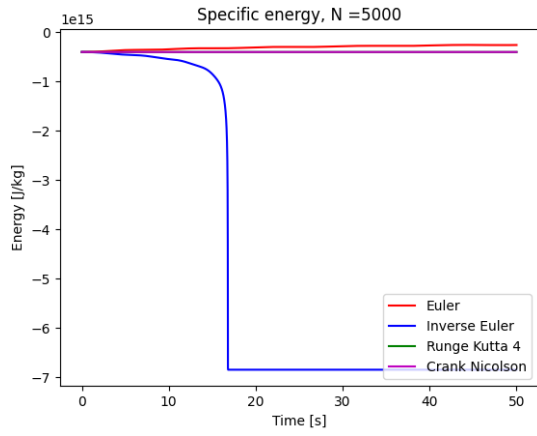
Figura 4: Kepler Problem, $N= 50000$, $t= 50$



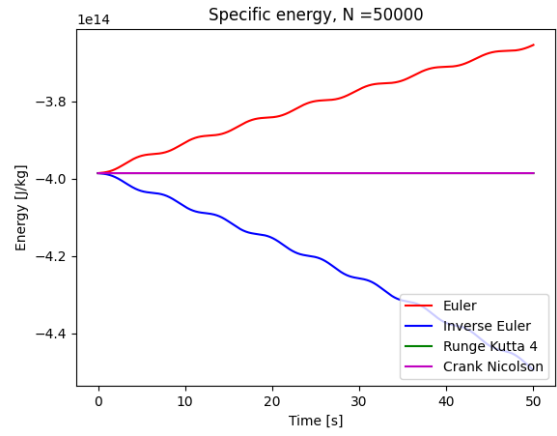
(a) N=200



(b) N=500



(c) N=5000



(d) N=50000

Figure 5: Specific energy, Kepler orbit approximation