


Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

**Máster Universitario en Sistemas Espaciales**

# Milestone V Report

**Ampliación de Matemáticas I**

**15 de noviembre de 2022**

**Autora:**

- Rosa Martínez Rubiella

# 1. Introducción

En este hito se integra numéricamente el problema de los N cuerpos, donde se analiza la evolución dinámica de N masas puntuales, que interactúan entre sí mediante fuerzas gravitatorias. Primero se analiza dicho problema y se representan, como ejemplo, los resultados de ciertas simulaciones. A continuación, se analiza el código implementado para dicha resolución, para terminar con unas conclusiones y sugerencias.

# 2. El problema de los N cuerpos

Para formular el problema de los N cuerpos hay que tener en cuenta las fuerzas gravitatorias que producen todos los cuerpos involucrados. De esta forma se tiene:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1, i\neq j}^{N} m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{||\vec{r}_j - \vec{r}_i||^3}$$

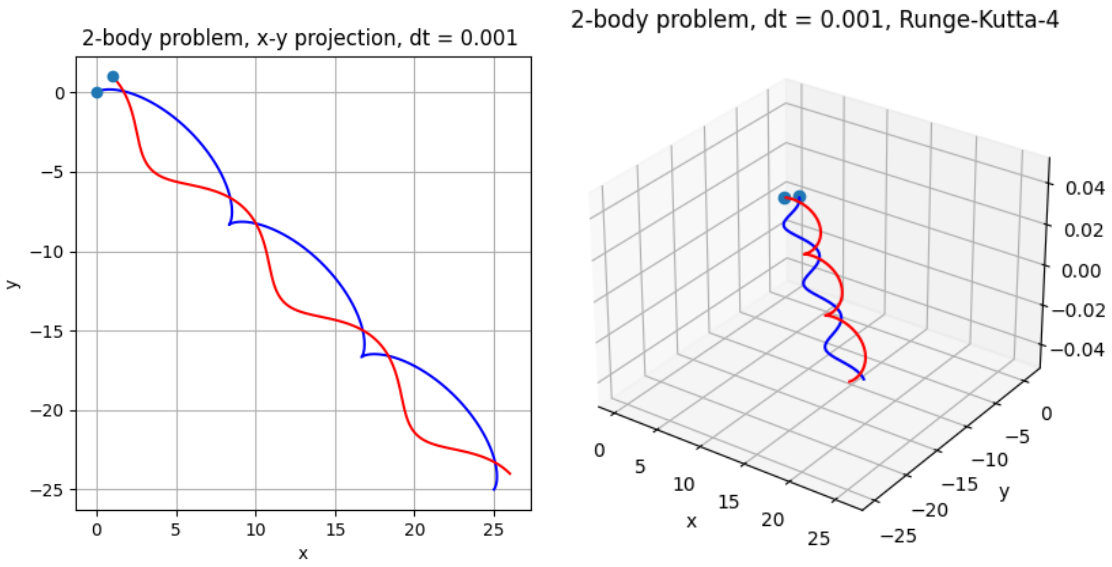
con $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, i = 1...N

De esta forma se tiene una ecuación diferencial, que se traduce a un vector de estado U, cuyas componentes están formadas por las coordenadas de posición y velocidad de cada cuerpo en el espacio tridimensional.

Primero, se realiza una simulación con dos cuerpos que se mueven únicamente en el plano. Sus condiciones iniciales serán

$$\vec{r}_1 = \{0,0,0\}, \quad \vec{r}_2 = \{1,1,0\}, \quad \vec{v}_1 = \{0,0,0\} \quad y \quad \vec{v}_2 = \{1,0,0\}$$

Se utiliza un esquema de integración Runge-Kutta-4, con un paso de integración $\Delta t = 0{,}01s$ y un tiempo de simulación de 50 segundos. Como era de esperar, el movimiento de los dos cuerpos se conserva dentro del plano x-y (**Figura 1**).




(a) Proyección en el eje x-y

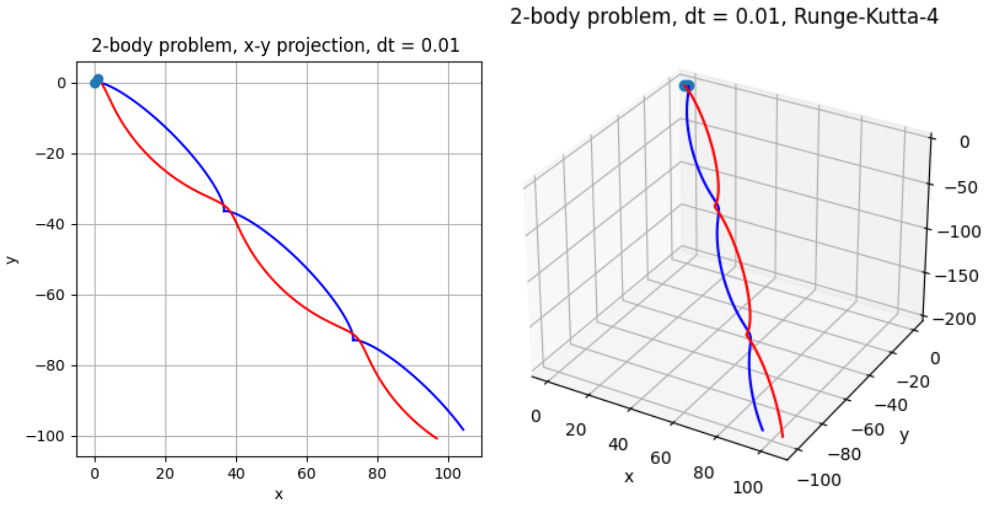
(b) Vista 3D del movimiento

Figura 1: 2-body problem, plane movement

Si ahora, uno de los cuerpos se sale del plano, variando las condiciones iniciales a :

$$\vec{r}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{r}_2 = \{1, 1, 0\}, \quad \vec{v}_1 = \{0, 0, -1\} \quad y \quad \vec{v}_2 = \{1, -1, -1\}$$

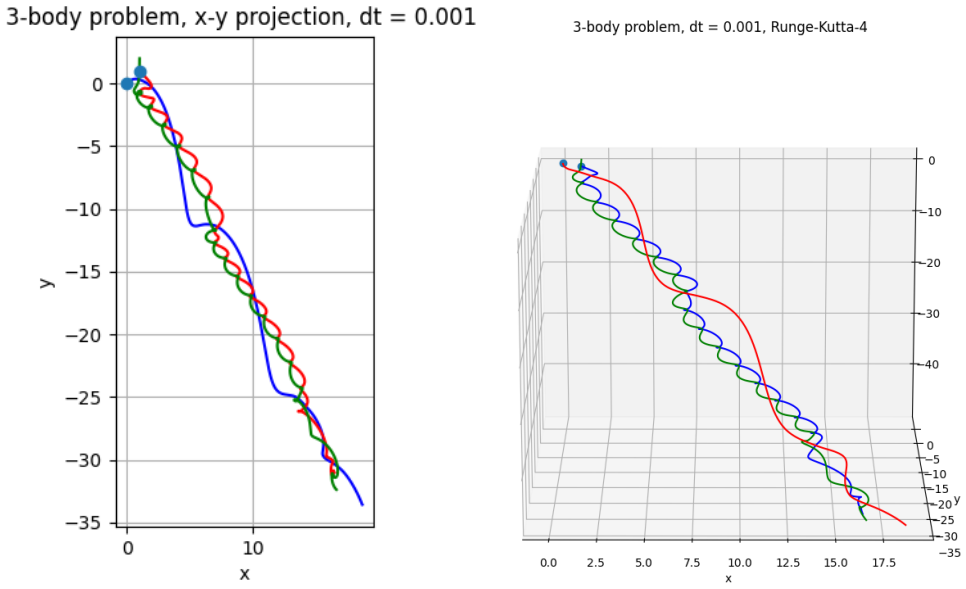
Se realiza una simulación de 200 segundos para observar bien la evaluación temporal. En este caso, ambos cuerpos salen del plano e interactúan entre sí **Figura 2**.




(a) Proyección en el eje x-y (b) Vista 3D del movimiento

Figura 2: 2-body problem, 3D movement

De la misma forma, se añaden más cuerpos al sistema. En la **Figura 3** se muestra una simulación con 3 cuerpos, que forman una secuencia de orbitación entre bastante ordenada, con formas helicoidales. Sin embargo, cambiando las condiciones iniciales del sistema, se puede llegar a sistemas complejos muy caóticos como el de la **Figura 4**.




(a) Proyección en el eje x-y (b) Vista 3D del movimiento

Figura 3: 3-body problem, 3D movement

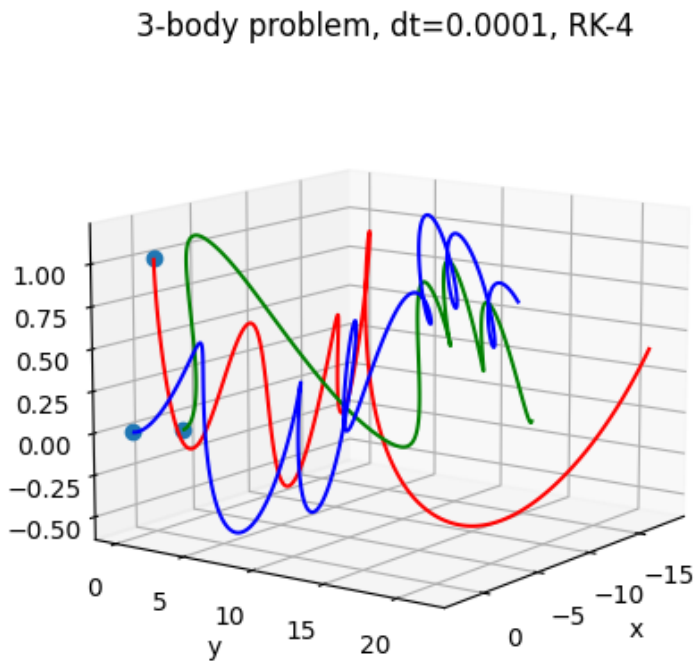
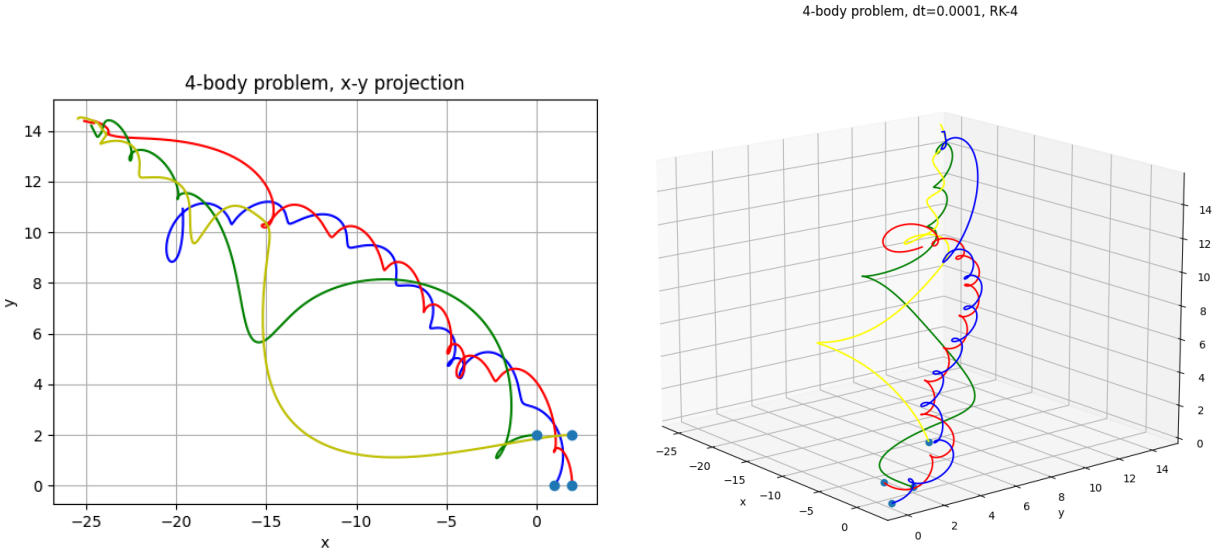



Figura 4: 3-body problem, chaotic movement

Al aumentar más el número de cuerpos en el sistema, se obtienen evoluciones dinámicas complejas. Se representa un ejemplo con 4 cuerpos en la **Figura 5**. Todos estos ejemplos, como se simulan de manera adimensional presentan la hipótesis de que todos los cuerpos cuentan con la misma masa puntual.




(a) Proyección en el eje x-y

(b) Vista 3D del movimiento

Figura 5: 4-body problem, 3D movement

# 3. Code Review

Se ha incluido un nuevo módulo dentro de la carpeta de problemas en ODEs llamado N-body. De esta forma se integra el problema utilizando la misma metodología que anteriormente. El módulo ejecutor llama al módulo del problema de Cauchy, que a su vez llama al módulo de esquemas temporales y al módulo de las ODEs. Si el esquema temporal fuera implícito, entrarían el juego el módulo de resolución de sistemas lineales y de cálculo algebraico (para resolver el método Newton). Esto queda resumido en el siguiente esquema de bloques (**Figura 6**). A continuación se muestra y comenta el código empleado tanto en el módulo N-body.

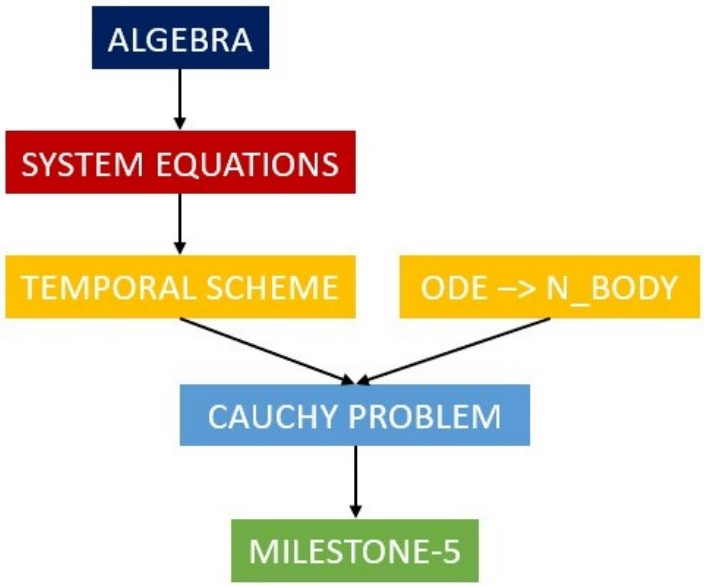



Figura 6: Code structure scheme

```
1
2 from numpy import zeros, reshape
3 from numpy.linalg import norm
4
5
6 def F_N_body(U,t):
7     (Nb, Nc) = (3, 3) # Numero de cuerpos y coordenadas
8     Us = reshape(U, (Nb, Nc, 2)) # Us es un puntero de U, forma un
    tensor con la posici n y la velocidad de las particulas
9
10     r = reshape(Us[:, :, 0], (Nb, Nc)) # Matriz con la posicion de los
    diferentes cuerpos en un instante de tiempo
11     v = reshape(Us[:, :, 1], (Nb, Nc)) # Matriz con la velocidad de los
    diferentes cuerpos en un instante de tiempo
12
13     F = zeros(len(U))
14     Fs = reshape(F, (Nb, Nc, 2)) # Fs es un puntero de F, pero en vez de
    ser un vector, es un tensor que contiene la velocidad y aceleracion
    de las part culas
15
16     drdt = reshape(Fs[:, :, 0], (Nb, Nc)) # Matriz con la velocidad de
    los cuerpos en un instante de tiempo
```

```
17      dvdt = reshape(Fs[:, :, 1], (Nb, Nc)) # Matriz con la aceleracion de
        los cuerpos en un instante de tiempo
18
19      dvdt[:,:] = 0 # Hay que utilizar los dos puntos para que funcione
        bien el puntero
20
21      for i in range(Nb):
22
23          drdt[i,:] = v[i,:] # Se almacenan las velocidades en drdt, que
            como es un puntero de Fs, que a su vez es un puntero de F, almacena
            los datos en dicho vector
24
25          for j in range(Nb):
26
27              if j != i:
28
29                  d = r[j, :] - r[i, :]
30                  dvdt[i,:] = dvdt[i,:] + d[:]/(norm(d)**3) # Se hace lo
                    mismo para las aceleraciones, dvdt es puntero de Fs, que es puntero
                    de F
31
32      return F
```

Listing 1: N-body problem module

# 4. Conclusiones y sugerencias

En un estudio futuro se podría añadir el factor de masa a cada cuerpo, generando una fuerza gravitatoria mayor alrededor de ciertos cuerpos. De esta forma es posible simular el problema de las órbitas Keplerianas, así como el problema de los tres cuerpos restringido.

Me ha resultado complicado encontrar condiciones iniciales que tuvieran resultados "vistosos"para más de 4 cuerpos. Ya que, en muchos casos, acababan divergiendo.