Asignatura : Cálculo Numérico
Grado en Ingeniería Aeroespacial - ETSIAE

Hitos semanales :

- **Hito 1 :**
  Calcular el interpolante de Lagrange global con N+1 puntos

  $$\{x_j = -1 + 2j/N, \qquad j = 0, \ldots, N\},$$

  para las siguientes funciones:

  $$f_1(x) = \sin(\pi x),$$

  $$f_2(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

  Para este problema, analizar las diferencias entre la interpolación de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y el origen de las mismas en función de N y de la función a interpolar:

  - Regularidad de la función a interpolar.
  - Error de truncamiento.
  - Condicionamiento del problema.

  Se pide dibujar y discutir los siguientes resultados:

  1. La función y su interpolante superpuestos en la misma gráfica y para diferentes valores de N.
  2. El error de interpolación en función de x.
  3. La función $\pi_{N+1}(x)$ y la función de Lebesgue $\lambda_N(x)$ del error de interpolación.
  4. La derivada n-ésima de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en función de x.
  5. Explicar los resultados obtenidos cuando se interpola con $N = 10$.
  6. Explicar los resultados obtenidos cuando se interpola con $N = 64$.

- **Hito 2A :** Calcular el interpolante de Lagrange para los N+1 puntos siguientes:
  - Ceros de Chebyshev o puntos Chebyshev-Gauss.
  $$x_j = \cos\left[\frac{(2j+1)\pi}{2N+2}\right], \qquad j = 0, \dots, N.$$
  - Extremos de Chebyshev o puntos Chebyshev-Gauss-Lobatto.
  $$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \qquad j = 0, \dots, N.$$

  Para las siguientes funciones:
  $$f_1(x) = \sin(\pi x),$$
  $$f_2(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

  Se pide analizar las diferencias entre la interpolación de $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Explicar la solución del problema en relación a:
  - Regularidad de la función a interpolar.
  - Error de truncamiento.
  - Condicionamiento del problema.

  Se pide dibujar y discutir los siguientes resultados:
  1. La función y su interpolante superpuestos en la misma gráfica y para diferentes valores de N.
  2. El error de interpolación en función de x.
  3. La función $\pi_{N+1}(x)$ y la función de Lebesgue $\lambda_N(x)$ del error de interpolación.
  4. La derivada n-ésima de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en función de x.
  5. Explicar los resultados obtenidos cuando se interpola con $N = 10$.
  6. Explicar los resultados obtenidos cuando se interpola con $N = 64$.

- **Hito 2B :** Calcular la serie truncada y la serie discreta o interpolante de Chebyshev siguientes:
  $$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{c}_k \, T_k(x), \qquad I_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k \, T_k(x),$$
  para la función $f(x) = \cos(\pi x)$. Se pide:
  1. Obtener analíticamente el coeficiente genérico $\hat{c}_m$ de la serie truncada.
  2. Expresión que permite obtener los coeficientes $\tilde{c}_m$ de la serie discreta basada en los extremos de Chebyshev.
  3. Representar $\hat{c}_m$ y $\tilde{c}_m$ frente a m.
  4. Dibujar el interpolante de Lagrange con $N = 4$ y compararlo con la serie discreta calculada mediante los coeficientes $\tilde{c}_m$ y explicar los resultados.
  5. Pintar para N = 10 el error de la serie truncada y el de la serie discreta en función de x.
  6. Explicar el error de aliasing a través la diferencia entre $\tilde{c}_m$ y $\hat{c}_m$.

- **Hito 3 :**

  Obtener las fórmulas para las derivadas primera y segunda centrada y descentrada con tres puntos $q = 2$ y con cinco puntos $q = 4$ en mallas equiespaciadas mediante una interpolación de Lagrange.

  Se pide dibujar y discutir los siguientes resultados para

  1. La derivada primera de $\pi_{N+1}(x)$ en función de x.
  2. La derivada segunda de $\pi_{N+1}(x)$ en función de x.
  3. La derivada primera de $\lambda_N(x)$ en función de x.
  4. La derivada segunda de $\lambda_N(x)$ en función de x.

  Explicar como intervienen los resultados anteriores en:

  - Regularidad de la función a interpolar.
  - Error de truncamiento.
  - Error de redondeo.

- **Hito 4 :**

  Interpolación continua a trozos. Considerar las fórmulas anteriores con cinco puntos $q = 4$ y con tres puntos $q = 2$ con un espaciado Δx constante. Calcular numéricamente el error de truncamiento (R_N) y el error de redondeo (R_L) que se cometen al aproximar la derivada segunda con las fórmulas obtenidas y discutir el valor de Δx_m que minimiza el error total

  $$E_N = R_N + R_L,$$

  y el valor del error mínimo. Utilizando la función $f(x) = \cos(\pi x) + \epsilon(x)$, donde $\epsilon(x)$ es una perturbación aleatoria con $|\epsilon(x)| \leq \epsilon_0$, Dibujar el error en los puntos $x = -1$ y $x = 0$ para diferentes valores de Δx en escala logarítmica. Dibujar y discutir los resultados para diferentes valores de $\epsilon_0 = 10^{-6}, 10^{-3}, 10^{-1}$.

  1. El error de la derivada primera en $x = -1$ en función de Δx.
  2. El error de la derivada primera en $x = 0$ en función de Δx.
  3. El error de la derivada segunda en $x = -1$ en función de Δx.
  4. El error de la derivada segunda en $x = 0$ en función de Δx.

- **Hito 5 :**

  Discretizar espacialmente el operador espacial y las condiciones de contorno del siguiente problema de contorno:

  $$y'' + e^{-x^2} y' - y = 100\ \sin(\pi x)\ \sin(5\pi x), \qquad x \in [-1, 1], \qquad y(-1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

  Para este problema se pide:

  1. Discretizarlo con una aproximación de segundo orden y escribir el sistema de ecuaciones resultante mediante fórmulas de diferencias finitas centradas y descentradas.
  2. Resolverlo numéricamente mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones.

  Dibujar los resultados obtenidos.

- **Hito 6 :**
  Elegir un esquema numérico para la discretización temporal tipo Runge–Kutta o tipo Predictor–Corrector basado en parejas Adams. Integrar temporalmente las ecuaciones del oscilador:
  $$\ddot{x} + \sin(x) = \cos(2t)$$
  eligiendo las condiciones iniciales y discutiendo el arranque de las condiciones iniciales. Para este problema, se pide:

  1. Discretizar el problema temporalmente y escribir el sistema de ecuaciones en diferencias resultante.
  2. Integrar numéricamente el sistema anterior para distintos valores de Δt poniendo de manifiesto la estabilidad de la solución resultante.
  3. Pintar la región de estabilidad absoluta.
  4. Discutir y probar la estabilidad en función de Δt.

  Dibujar los resultados obtenidos.

- **Hito 7:**
  Integración de la la ecuación del calor en un dominio unidimensional con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

  1. Uilizar diferencias finitas de segundo orden para la semidiscretización espacial y un esquema Euler para la discretzación temporal.
  2. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante una vez realizada la semidiscretización espacial.
  3. Calcular los autovalores del operador espacial discretizado y compararlos con los autovalores exactos del operador diferencial.
  4. Pintar la región de estabilidad absoluta junto con los autovalores por Δt de estabilidad de la ecuación del calor.
  5. Calcular la abscisa espectral.
  6. Calcular el radio espectral y verificar el resultado mediante la región de estabilidad absoluta y los autovalores superpuestos.
  7. Estabilidad de la solución numérica en función del paso de integración elegido. Gráfico una solución inestable.
  8. Calcular el error de truncamiento del operador espacial discretizado mediante la extrapolación de Richardson.

- **Hito 8 :**
  Simulación numérica del problema elegido. Con objeto de exponer con claridad la simulación realizada se discutirán:

  1. La física simulada y los resultados gráficos obtenidos.
  2. El modelo matemático junto con sus condiciones iniciales y de contorno.
  3. La semidiscretización espacial y temporal adoptadas y representación gráfica de los errores obtenidos.