esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 [X] 2 [ ] Session : Principale [ ] Rattrapage [X]

Module: Mathématiques de base 3
Enseignant(s): UP-Maths
Classe(s): 2TIC,2EMA,2GC
Documents autorisés: OUI [ ] NON [X] Nombre de pages: 2
Calculatrice autorisée: OUI [X] NON [ ] Internet autorisée: OUI [ ] NON [X]
Date: 17/06/2019 Heure: 13h00 Durée : 1h30min

Exercice 1:

On cherche la solution y de l'équation différentielle:

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = t^2 e^{-t}$$

On désigne par (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1) **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E).**
2) **Trouver une solution particuliére de (E) de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$, avec $Q(t)$ est un polynôme de degré 2.**
3) **Donner la forme générale des solutions de (E).**

Exercice 2:

On considère la forme quadratique

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \end{array}$$

.

1) **Déterminer l'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.**
2) **Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.**
3) **Déterminer le rang de q.**
4) **q est-elle non dégénérée? Justifier votre réponse.**
5) **Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss.**
6) **En déduire la signature de q.**
7) **Montrer que q est définie positive.**
8) **φ est-elle un produit scalaire? Justifier votre réponse.**

Exercice 3:

Soit la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est égal à

$$P_A(X) = (1-X)^2(2-X)$$

.

2) Donner les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicités.

3) Montrer que $E_2 = Ker(A-2I_3) = vect\{V_1 = (1,0,1)\}$ et $E_1 = Ker(A-I_3) = vect\{V_2 = (1,1,0)\}$

4) On donne $V_3 = (0,0,1)$.

a) Montrer que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les scalaire α et β telle que $AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + V_3$.

c) Déduire une matrice P inversible et T triangulaire supérieur telle que $A = PTP^{-1}$.

5) On cherche à calculer les puissance de A^n pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N matrice nilpotente.

b) Vérifier que $ND = DN$ et déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considére la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1) Calculer les dérivées partielles premières de f.

2) Déterminer les points critiques de f.

3) Calculer la matrice Hessienne de f.

4) Donner la nature des points critiques.

Bon travail