esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ☒ 2 ☐ Session : Principale ☐ Rattrapage ☒

Module: Mathématiques de base 3
Enseignant(s): UP-Maths
Classe(s): 2TIC,2EMA,2GC
Documents autorisés: OUI ☐ NON ☒ — Nombre de pages: 2
Calculatrice autorisée: OUI ☒ NON ☐ — Internet autorisée: OUI ☐ NON ☒
Date: 17/06/2019 — Heure: 13h00 — Durée : 1h30min

EXAMEN + Correction

Exercice 1 :(3 points)

On cherche la solution y de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 3y' + 2y = t^2 e^{-t}$$

On désigne par (E_0) l'équation homogène associée à (E)

1. **(1 points)** Résoudre l'équation homogène (E_0) associé à (E)

$$(E_0) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

On résout $r^2 - 3r + 2 = 0, \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$
La solution homogène est de la forme $y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

2. **(1.5 points)** Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$, avec Q est un polynôme de degré 2.

$g(t) = t^2 e^{-t} = P(t)e^{kt}$ avec $P(t) = t^2$, $deg(P) = 2$ et $k = -1 \neq r_1, r_2$
Alors la solution particulière est de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$ telle que $deg(Q) = deg(P) = 2$
y_p est une solution de (E), on a donc $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = t^2 e^{-t}$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= Q(t)e^{-t} \\ y_p'(t) &= Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t} = (Q'(t) - Q(t))e^{-t} \\ y_p''(t) &= (Q''(t) - Q'(t))e^{-t} - (Q'(t) - Q(t))e^{-t} = (Q''(t) - 2Q'(t) + Q(t))e^{-t} \end{aligned}$$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = t^2 e^{-t} \Rightarrow Q''(t) - 5Q'(t) + 6Q(t) = t^2$$

Q est un polynôme de degré 2 alors il est de la forme $Q(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} 6a &= 1 \\ 2a - 5b + 6c &= 0 \\ -10a + 6b &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{6} \\ b &= \frac{5}{18} \\ c &= \frac{19}{18} \end{cases}$$

$y_p(t) = Q(t)e^{-t} = (\frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{18}t + \frac{19}{18})e^{-t} = \frac{1}{18}(3t^2 + 5t + 19)e^{-t}$

3. **(0.5 points)** Donner la forme générale des solutions de (E)

Les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{1}{18}(3t^2 + 5t + 19)e^{-t}$$

Exercice 2 :(5.5 points)

On considère la forme quadratique

$$\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. **(1 points)** Déterminer l'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   L'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2 + x_3y_3$$

.

2. **(0.5 points)** Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **(1 points)** Déterminer le rang de q.

   Le rang de q est le rang de la matrice M_φ. On calcule le déterminant de M_φ on trouve $det(M_\varphi) = 1$ différent de 0, d'où le rang de M_φ est égale à 3.
4. **(0.5 points)** q est-elle non dégénérée ? Justifier votre réponse.

   q est non dégénérée car : $dim(ker(\varphi)) = 0$ d'où φ est non dégénérée donc q est non dégénérée.
5. **(1 points)** Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss.

   La Décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss est la suivante :

$$q((x_1, x_2, x_3)) \quad = \quad 2(x_1 + x_2)^2 + \frac{x_2^2}{2} + x_3^2$$

6. **(0.5 points)** En déduire la signature de q.

   La signature de q est (3,0).
7. **(0.5 points)** Montrer que q est définie positive.

   q est définie positive en effet d'après la signature de q sa matrice admet trois valeurs propres strictement positves.
8. **(0.5 points)** φ est-elle un produit scalaire ? Justifier votre réponse.

   φ est pas un produit scalaire car c'est une forme bilinéaire symétrique
   et $\varphi((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = q((x_1, x_2, x_3))$ est définie positive d'après la question précédante.

Exercice 3 :(7.5 points)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **(1 points)** Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est égal à

$$P_A(X) = (1-X)^2(2-X)$$

$P_A(X) = (1-X)^2(2-X)$

2. **(0.5 points)** Donner les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicités.

$Sp(A) = \{1, 2\}$ avec $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$

3. **(1 points)** Montrer que $E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = vect\{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = vect\{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$E_1 = \{V \in \mathbb{R}^3; AV = V\}$,

$$\text{Si } V \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad AV = V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad V \in vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. On donne $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) **(1 points)** Montrer que $(V_1; V_2; V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(V_1, V_2, V_3) est famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(b) **(1 points)** Déterminer les scalaires α et β tels que $AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + V_3$

$$AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + V_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha + 1 = 1 \quad . \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 1.$$

(c) **(1 points)** Déduire une matrice P inversible et T triangulaire supérieur telle que $A = PTP^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. On cherche à calculer les puissances de A^n pour tout $n \geq 0$.

(a) **(0.5 points)** Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N matrice nilpotente.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

(b) **(0.5 points)** Vérifier que $ND = DN$ et déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T^n = (N + D)^n = D^n + nND^{n-1}$$

(c) **(1 points)** Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PT^nP^{-1} = P(D^n + nND^{n-1})P^{-1}$$

Exercice 4 :(4 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1. **(1 points)** Calculer les dérivées partielles premières de f.

   Les dérivées partielles de f sont :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$$

2. **(1 points)** Déterminer les points critiques de f.

   f admet deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$

3. **(1 points)** Calculer la matrice **H**essienne de f.

   $$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

4. **(1 points)** Donner la nature des points critiques.

   $det(H_f(0, 0)) = -9 < 0$, alors le point $(0, 0)$ est un point selle.
   $det(H_f(1, 1)) = 27 > 0$ et $tr(H_f(1, 1)) = 12 > 0$, alors le point $(1, 1)$ est un minimum local.