esprit — Se former autrement	**EXAMEN** **Semestre :** 1 ■ 2 ☐ **Session :** Principale ■ Rattrapage ☐

Module : Mathématique de base 3
Enseignant(s) : UP-Maths
Classe(s): 2A ,2P
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ **Nombre de pages :** 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ **Internet autorisée :** OUI ☐ NON ■
Date : 12/01/2019 **Heure :** 11h **Durée :** 1h30min

NB : Tous les calculs et toutes les étapes de raisonnements doivent figurer clairement sur votre copie.

Exercice 1 :(2 points)

On cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - y = 2.e^{-t}$$

On désigne par (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1. Résoudre l'équation différentielle homogène E_0 associée à (E). (0.5 point)
2. Trouver une solution particulière de (E).(1 point)
3. Donner la forme générale des solutions de (E).(0.5 point)

Exercice 2 :(5.5 points)

On considère la forme quadratique

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

1. Déterminer l'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.(1 point)
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.(0.5 point)
3. Déterminer le rang de q. (1 point)
4. q est-elle non dégénérée ? Justifier votre réponse.(0.5 point)
5. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss.(1 point)
6. En déduire la signature de q.(0.5 point)
7. Montrer que q est positive et n'est pas définie.(0.5 point)
8. φ est-elle un produit scalaire ? Justifier votre réponse.(0.5 point)

Exercice 3 :(4.5 points)

On considére la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.(1 point)
2. Déterminer les points critiques de f. (1 point)
3. Calculer la matrice Hessienne de f.(0.5 point)
4. Donner la nature des points critiques de f.(1 point)
5. On considère la fonction g définie par :

$$g(x,y) = 2\exp(2x) + 2\exp(2y) + 2\exp(x+y) - \exp(x) - \exp(y)$$

Déduire que g admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.(1 point)

Exercice 4 :(8 points)

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice identité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note P_A le polynôme caractéristique de A défini par $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3)$.

1. Montrer que : $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.(1 point)
2. On pose : $u_1 = (-1,1,-1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$.
   Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de A.(1.5 points)
3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.(0.5 point)
4. Calculer P^{-1}.(1 point)
5. Montrer que : $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.(1 point) .
6. En déduire que A est diagonalisable.(0.5 point)
7. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.(1 point)
8. On considère les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + 3z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.(0.5 point)
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $X_n = A^n X_0$.(0.5 point)
   (c) Déterminer alors x_n, y_n et z_n en fonction de n.(0.5 point)

Bon travail