esprit — Se former autrement	**EXAMEN** **Semestre :** 1 ■ 2 □ **Session :** Principale ■ Rattrapage □

Module : Mathématique de base 3
Enseignant(s) : UP-Maths
Classe(s): 2A ,2P
Documents autorisés : OUI □ NON ■ **Nombre de pages :** 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON □ **Internet autorisée :** OUI □ NON ■
Date : 12/01/2019 **Heure :** 11h **Durée :** 1h30min

EXAMEN + Correction

Exercice 1 :(2 points)

On cherche la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - y = 2.e^{-t}$$

On désigne par (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1. Résoudre l'équation différentielle homogène E_0 associée à (E). (0.5 point)

$$(E_0) : \quad y"(t) - y(t) = 0$$

Calculer r solution de $(*)$ $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$. La solution homogène

$$y_0(t) = C_1.e^{-t} + C_2.e^{t}$$

2. Trouver une solution particulière de (E).(1 point)
-1 est une racine simple de $(*)$ alors

$$y_p(t) = (at + b).e^{-t}$$

y_p est solution de (E)

$$\left.\begin{array}{rcl} y_p'(t) & = & (-at + b + a).e^{-t} \\ y_p"(t) & = & -2.a.e^{-t} + y_p(t) \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1$$

On a alors

$$y_p(t) = (-t + b).e^{-t}$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E).(0.5 point)

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = (-t + b).e^{-t} + C_1.e^{-t} + C_2.e^{t}$$

Exercice 2 :(5.5 points)

On considère la forme quadratique

$$\begin{array}{rccl} q: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2 \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ avec $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

1. Déterminer l'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.(1 point)
   L'expression de la forme polaire φ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :
   $$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1-x_1y_2-y_1x_2-x_1y_3-y_1x_3+x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_3$$
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.(0.5 point)
   La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :
   $$M_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer le rang de q. (1 point)
   Le rang de q est le rang de la matrice M_φ, en effet en faisant les opérations suivantes pour la matrice M_φ :
   $$L_2 \leftarrow L_2+L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_1,$$
   ainsi on trouve que le rang de M_φ est égale à 1.
4. q est-elle non dégénérée ? Justifier votre réponse.(0.5 point)
   $dim(ker(\varphi))=2(rg(\varphi)=1)$ d'où φ est dégénérée donc q est dégénérée.
5. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss.(1 point)
   La Décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss est la suivante :
   $$\begin{array}{rcl} q((x_1,x_2,x_3)) & = & x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2, \\ & = & (x_1-(x_2+x_3))^2-(x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2, \\ & = & (x_1-(x_2+x_3))^2. \end{array}$$
6. En déduire la signature de q.(0.5 point)
   La signature de q est $(1,0)$.
7. Montrer que q est positive et n'est pas définie.(0.5 point)
   q est positive en effet d'après la signature de q sa matrice admet trois valeurs propres positves et n'est pas définie car sa matrice admet des valeurs propres nulles.
8. φ est-elle un produit scalaire ? Justifier votre réponse.(0.5 point)
   φ n'est pas un produit scalaire car $\varphi((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3))=q((x_1,x_2,x_3))$ n'est pas définie positive d'après la question précédante.

Exercice 3 :(4.5 points)

On considére la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-x-y$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.(1 point)
   Les dérivées partielles de f sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x+2y-1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y+2x-1\end{aligned}$$

2. Déterminer les points critiques de f. (1 point)
   f admet un seul point critique : $(\frac{1}{6},\frac{1}{6})$
3. Calculer la matrice Hessienne de f.(0.5 point)

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$$

4. Donner la nature des points critiques de f.(1 point)

$$\left\{\begin{array}{lll} det(H_f(x,y)) & = 16-4=12 & >0\\ tr(H_f(x,y)) & = 4+4=8 & >0\end{array}\right. \Rightarrow \quad f \text{ admet un minimum local au point } (\frac{1}{6},\frac{1}{6})$$

5. On considère la fonction g définie par :

$$g(x,y)=2\exp(2x)+2\exp(2y)+2\exp(x+y)-\exp(x)-\exp(y)$$

   Déduire que g admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.(1 point)

$$g(x,y)=f(e^x,e^y)\Rightarrow \min_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y)=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(e^x,e^y)$$

   On pose $X=e^x, Y=e^y \Rightarrow \displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y)=\min_{(X,Y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(X,Y)$

   Or $\displaystyle\min_{(X,Y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(X,Y)$ est atteint au point $(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) \quad \Rightarrow \displaystyle\min_{(x,y)\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y)$ est atteint au point $(\ln(\frac{1}{6}),\ln(\frac{1}{6}))$

Exercice 4 :(8 points)

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ avec $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$ et la matrice identité $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On note P_A le polynôme caractéristique de A défini par $P_A(\lambda)=det(A-\lambda I_3)$.

1. Montrer que : $P_A(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.(1 point)
   Le calcul donne

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&1\\-1&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

2. On pose : $u_1=(-1,1,-1)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(1,1,1)$ et $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3)$.
   Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de A.(1.5 points)

   . $\mathcal{C}$ est une famille génératrice

. $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$ ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est libre

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ est une base.

. $A.u_1 = u_1$, $A.u_2 = 2u_2$ et $A.u_3 = 3u_3$,

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de A.

3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.(0.5 point)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer P^{-1}.(1 point)

On a

$$\begin{cases} u_1 &= -e_1 + e_2 - e_3 \\ u_2 &= e_1 + e_2 \\ u_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 &= -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ e_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \\ e_3 &= -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + u_3 \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que : $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.(1 point)

$$PDP^{-1} = P(DP^{-1}) = P\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = A$$

6. En déduire que A est diagonalisable.(0.5 point)

Il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible tel que $A = PDP^{-1}$, alors la matrice A est diagonalisable.

7. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.(1 point)

On montre facilement par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. Le calcul donne

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} & \frac{-1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n - 2^n \\ \frac{-1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n - 2^n \\ \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{-1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix}$$

8. On considère les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + 3z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.(0.5 point)

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X_n = AX_n$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $X_n = A^n X_0$.(0.5 point)

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*, X_n = A^n X_0$

(c) Déterminer alors x_n, y_n et z_n en fonction de n.(0.5 point)

On a

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} & \frac{-1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n - 2^n \\ \frac{-1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n - 2^n \\ \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{-1}{2} + \frac{3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2^{n+1} - 3^n$, $y_n = 2^{n+1} - 3^n$ et $z_n = -3^n$