TD2 : Diagonalisation des matrices

Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2021 / 2022**

Exercice 1 :

Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $V_1,\ V_2\ \in \mathbb{R}^3$, définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A.\,V_1$ et $A.\,V_2$.
2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.
3. En déduire que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.
4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
5. Déterminer un vecteur V_3 tel que $A.\,V_3 = (0,0,0)$.
6. Diagonaliser la matrice A.

Exercice 2 :

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On prend $m = 2$.
   (a) Diagonaliser la matrice A.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Exercice 3 :

On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme :

$$X'(t) = A.\, X(t), \text{ avec } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs ordres de multiplicité.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles ques :

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

6. On pose $Y = P^{-1}\, X$.
   (a) Montrer que Y satisfait un système différentiel (S') que l'on déterminera.
   (b) Résoudre le système (S').
   (c) Déduire la solution du système (S).