Punto # 1

Encontrar la TF en forma exponencial y geométrica para la señal $x(t) = |A\cos(2\pi f_0 t)|^2$ con $t \in [-1/2f_0, \frac{1}{2f_0}]$ con $A, f_0 \in \mathbb{R}^+$

Realice las simulaciones para graficar el espectro de Fourier del ejercicio 1 (magnitud y fase como diagrama de bode en decibelios), y presente el error relativo y la señal reconstruida para $N = \{1, 2, .. 50\}$

Solución

$$x(t) = |A\cos(2\pi f_0 t)|^2 \qquad t \in \left[-\frac{1}{2f_0}, \frac{1}{2f_0}\right]$$

simplificando la señal tenemos:

$$x(t) = A^2\cos^2(2\pi f_0 t)$$

Como:

$$\cos^2(x) = 1 + \frac{\cos(2x)}{2}$$

Entonces:

$$x(t) = A^2\left(1 + \frac{\cos(2(2\pi f_0 t))}{2}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t)}$$

La serie de Fourier en su forma trigonométrica:

- $\hat{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$
- $T = t_F - t_i = \frac{1}{2f_0} - \left(-\frac{1}{2f_0}\right) = \frac{1}{2f_0} + \frac{1}{2f_0} = \frac{1}{f_0}$
- ω_0 bases $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{f_0}} = \boxed{2\pi f_0}$

Buscando 'a_0:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, dt \quad \text{por tanto:}$$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{f_0}} \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right] dt$$

$$a_0 = F_0 \left[\underbrace{\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2}\, dt}_{①} + \underbrace{\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t)\, dt}_{②} \right]$$

① $$\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2}\, dt = \frac{A^2}{2} t \Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} = \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{2f_0} - \left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right) = \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{f_0}\right) = \boxed{\frac{A^2}{2f_0}}$$

② $$\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t)\, dt = \frac{A^2}{2} \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \cos(4\pi f_0 t)\, dt$$

cambio de variable:

$u = 4\pi f_0 t$

$du = 4\pi f_0\, dt \rightarrow dt = \frac{du}{4\pi f_0}$

$$\frac{A^2}{2} \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \cos(u) \frac{du}{4\pi f_0} = \frac{A^2}{8\pi f_0} \operatorname{Sen}(4\pi f_0 t) \Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0}$$

$$\frac{A^2}{8\pi f_0}\left(\operatorname{Sen}\left(\cancel{4\pi f_0\left(\frac{1}{2f_0}\right)}\right)-\operatorname{Sen}\left(\cancel{4\pi f_0\left(-\frac{1}{2f_0}\right)}\right)\right)$$

Por lo tanto:

$$a_0 = F_0\left[\frac{A^2}{2f_0}+0\right] = \frac{A^2}{2}$$

Ahora Buscando $a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$

Remplazando tenemos:

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{f_0}}\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\left[\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right]\cos\{n.2\pi f_0 t\}\,dt$$

$$a_n = \underbrace{2f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\frac{A^2}{2}\cos(n2\pi f_0 t)\,dt}_{①} + \underbrace{\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t)\cos(n2\pi f_0 t)\,dt}_{②}$$

Resolviendo ① para a_n

$$1)_0\; 2f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\frac{A^2}{2}\cos(n2\pi f_0 t)\,dt = A^2 f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\cos(n2\pi f_0 t)\,dt$$

haciendo:

$u' = n2\pi f_0 t$

$du' = n2\pi f_0\,dt$

$dt = \frac{du'}{n2\pi f_0}$

$$A^2 f_0 \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \cos(u') \cdot \frac{du'}{n2\pi f_0} = \frac{A^2}{n2\pi} \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \cos(u')\, du'$$

$$\frac{A^2}{2\pi n} \operatorname{Sen}(n2\pi f_0 t) \Big|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} = \frac{A^2}{2\pi n}\left(\operatorname{Sen}\left(n2\pi f_0\left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \operatorname{Sen}\left(n2\pi f_0\left(\frac{-1}{2f_0}\right)\right)\right)$$

$$\frac{A^2}{2\pi n}\left(\operatorname{Sen}(\pi n) - \operatorname{Sen}(-\pi n)\right)$$

▷ Por simetria

$(-\operatorname{Sen}(x) = \operatorname{Sen}(-x)$

$$\frac{A^2}{2\pi n}\left(\operatorname{Sen}(\pi n) - (-\operatorname{Sen}(\pi n))\right) = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)}{n\pi}$$

Ahora resolviendo ② para a_n: tenemos:

$$② \; 2f_0 \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t) \cdot \cos(n2\pi f_0 t)\, dt$$

Utilizando propiedad trigonometrica:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)}{2} + \frac{\cos(x+y)}{2}$$

Entonces:

$$\frac{A^2 f_0}{2}\left[\underbrace{\int_{t_i}^{t_F} \cos(2\pi f_0 [2-n]\, t)\, dt}_{*} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_F} \cos(2\pi f_0 [2+n]\, t)\, dt}_{**}\right]$$

Resolviendo * de a_n tenemos:

$$*) \int_{t_i}^{t_F} \cos(2\pi f_0 [2-n] t)\, dt = \left. \frac{\operatorname{Sen}(2\pi f_0 [2-n] t)}{2\pi f_0 [2-n]} \right|_{t_i}^{t_F}$$

$$\frac{1}{2\pi f_0 [2-n]} \left[\operatorname{Sen}\left(2\pi f_0 [2-n] \left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \operatorname{Sen}\left(2\pi f_0 [2-n] \left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right) \right]$$

$$\frac{1}{2\pi f_0 [2-n]} \left[\operatorname{Sen}[2\pi - n\pi] - \operatorname{Sen}(-(2\pi - n\pi)) \right]$$

teniendo en cuenta que:
$-\operatorname{Sen}(x) = \operatorname{Sen}(-x)$

$$\frac{1}{2\pi f_0 [2-n]} \left[\operatorname{Sen}[2\pi - n\pi) + \operatorname{Sen}(2\pi - n\pi)) \right] = \frac{\operatorname{Sen}(2\pi - n\pi)}{\pi f_0 (2-n)}$$

Por la propiedad de: $\operatorname{Sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{Sen}(y) = \operatorname{Sen}(x \pm y)$

$$\frac{1}{\pi f_0 [2-n]} \left[\operatorname{Sen}(2\pi) \cancelto{0}{\cos(n\pi)} - \cancelto{1}{\cos(2\pi)} \operatorname{Sen}(n\pi) \right]$$

$$\frac{1}{\pi f_0 (2-n)} \left[-\operatorname{Sen}(n\pi) \right] = \boxed{\frac{-\operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi f_0 (2-n)}}$$

Resolviendo ** de a_n tenemos:

$$**) \int_{t_i}^{t_F} \cos(2\pi f_0 [2+n]\, t)\, dt = \left.\frac{\operatorname{Sen}(2\pi f_0 [2+n]\, t)}{2\pi f_0 [2+n]}\right|_{t_i}^{t_F}$$

$$\frac{1}{2\pi f_0 (2+n)}\left[\operatorname{Sen}\left(2\pi f_0 (2+n)\left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \operatorname{Sen}\left(2\pi f_0 (2+n)\left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi f_0 [2+n]}\left[\operatorname{Sen}(2\pi + n\pi) + \operatorname{Sen}(2\pi + n\pi)\right] = \frac{\operatorname{Sen}(2\pi + n\pi)}{\pi f_0 (2+n)}$$

$$\frac{1}{\pi f_0 (2+n)}\left[\operatorname{Sen}(2\pi)\cancel{\operatorname{Cos}(n\pi)}^{0} + \operatorname{Sen}(n\pi)\cancel{\operatorname{Cos}(2\pi)}^{1}\right] = \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi f_0 [2+n]}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{A^2 f_0}{2}\left[\frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi f_0 (2+n)} - \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi f_0 (2-n)}\right] = \frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{2+n} - \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{2-n}\right]$$

$$\frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{n+2} + \frac{\operatorname{Sen}(n\pi)}{n-2}\right] = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)}{2\pi}\left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right]$$

$$\frac{A^2 \operatorname{Sn}(n\pi)}{2\pi}\left[\frac{n-2+n+2}{(n+2)(n-2)}\right] = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)}{2\pi}\left[\frac{2n}{n^2-4}\right] = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)\, n}{\pi (n^2-4)}$$

Por lo tanto:

$$a_n = \frac{A^2 \operatorname{Sn}(n\pi)}{n\pi} + \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)\, n}{\pi (n^2-4)}$$

$$a_n = \frac{A^2 \operatorname{Sin}(n\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{n} + \frac{n}{(n^2+4)}\right] = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi}\left[\frac{n-4+n^2}{n(n^2-4)}\right]$$

$$a_n = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)}{\pi} \left[\frac{2n^2 - 4}{n(n^2-4)} \right] = \frac{2A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n (n^2-4)}$$

la señal puede ser reconstruida con $\operatorname{Cos}(n 2\pi f_0 t)$

Buscando el b_n.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \operatorname{Sen}(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\frac{1}{f_0}} \int_{t_1}^{t_F} \left[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \operatorname{Cos}(4\pi f_0 t) \right] \operatorname{Sen}(n 2\pi f_0 t)\, dt$$

$$b_n = \underbrace{2 f_0 \int_{t_1}^{t_F} \frac{A^2}{2} \operatorname{Sen}(n 2\pi f_0 t)\, dt}_{1'} + \underbrace{2 f_0 \frac{A^2}{2} \int_{t_1}^{t_F} \operatorname{Cos}(4\pi f_0 t) \operatorname{Sen}(n 2\pi f_0 t)\, dt}_{2'}$$

Resolviendo 1' para b_n:

$$2 f_0 \int_{t_1}^{t_F} \frac{A^2}{2} \operatorname{Sen}(2\pi n f_0 t)\, dt = -\frac{A^2 f_0 \cos(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0} \Bigg|_{t_1}^{t_F}$$

$$-\frac{A^2}{n 2\pi} \left[\operatorname{Cos}\left(2\pi n f_0 \left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \operatorname{Cos}\left(2\pi n f_0 \left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right) \right]$$

teniendo en cuenta

$$\boxed{\cos(x) = \cos(-x)}$$

$$-\frac{A^2}{n 2\pi} \left[\cos(\pi n) - \cos(\pi n) \right] = 0$$

Resolviendo ② para b_n:

$$2f_0 \int_{t_i}^{t_F} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t) \operatorname{Sen}(n 2\pi f_0 t)\, dt$$

Por la propiedad trigonometrica :

$$\cos(x)\operatorname{Sen}(y) = \frac{\operatorname{Sen}(x+y)}{2} - \frac{\operatorname{Sen}(x-y)}{2}$$

Entonces:

$$A^2 f_0 \int_{t_i}^{t_F} \frac{\operatorname{Sen}((4\pi f_0 + n 2\pi f_0) t)}{2} - \frac{\operatorname{Sen}((4\pi f_0 - n 2\pi f_0) t)}{2}\, dt$$

$$\frac{A^2 f_0}{2} \cdot \Bigg[\underbrace{\int_{t_i}^{t_F} \operatorname{Sen}[2\pi f_0 (2+n) t]}_{①''} - \underbrace{\operatorname{Sen}[2\pi f_0 (2-n) t)\, dt}_{②''} \Bigg]$$

Resolviendo ①'' para b_n:

$$①'' \int_{t_i}^{t_F} \operatorname{Sen}[2\pi f_0 (2+n) t]\, dt = \frac{-\cos[2\pi f_0 (2+n) t]}{2\pi f_0 (2+n)} \Bigg|_{t_F}^{t_i}$$

teniendo en cuenta que:
$\cos(x) = \cos(-x)$

$$-\frac{1}{2\pi f_0 (2+n)} \left[\cos\left(2\pi f_0 (2+n)\left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \cos\left(2\pi f_0 (2+n)\left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right) \right]$$

$$-\frac{1}{2\pi f_0 (2+n)} \left[\cos(2\pi + n\pi) - \cos(-(2\pi + n\pi)) \right] = 0$$

Resolviendo ②'' para b_n:

$$\int_{t_i}^{t_F} \text{Sen}(2\pi f_0 (2-n)t)\,dt = -\frac{\text{Cos}(2\pi f_0(2-n)t)}{2\pi f_0(2-n)}\Bigg|_{t_i}^{t_F}$$

$$-\frac{1}{2\pi f_0(2-n)}\left[\cos\left(2\pi f_0(2-n)\left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \text{Cos}\left(2\pi f_0(2-n)\left(\frac{-1}{2f_0}\right)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2\pi f_0(2-n)}\left[\cos(2\pi - n\pi) - \cos(-(2\pi - n\pi))\right] = \boxed{0}$$

Por lo que tenemos que $b_n = 0$, esto indica que la señal no puede ser reconstruida con la base senoidal o sen $(n 2\pi F_0 t)$

Ahora tenemos

$$a_n = \frac{2A^2\,\text{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n(n^2-4)}$$

si $n \in \mathbb{Z}$, hay discontinuidades en $(0, 2, -2)$ entonces, vamos a evaluar la tendencia en esos puntos.

Para $n=0$ tenemos que:

$$\lim_{n\to 0} \frac{(2A^2\,\text{Sen}(n\pi)(n^2-2))}{(\pi n(n^2-4))} = \frac{0}{0} \to \infty$$ usamos l'hopital para evitar la indeterminación

$$\lim_{n\to 0} \frac{\partial/\partial n\,(2A^2\,\text{Sen}(n\pi)(n^2-2))}{\partial/\partial n\,(\pi n(n^2-4))}$$ calculando cada derivada por separado tenemos que:

$$* \frac{\partial}{\partial n}\left(2A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)\right) = 2A^2\left(\pi \cos(n\pi)(n^2-2) + 2n \operatorname{Sen}(n\pi)\right)$$

$$\lim_{n\to 0} 2A^2\left(\pi \cancel{\cos(n\pi)}^{\to 1}(n^2-2) + 2n \left(\cancel{\operatorname{Sen}(n\pi)}^{\to 0}\right)\right) = \boxed{-4\pi A^2}$$

$$* \frac{\partial}{\partial n}\left(\pi n(n^2-4)\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\pi n^3 - 4\pi n\right) = 3\pi n^2 - 4\pi$$

$$\lim_{n\to 0} \left(\cancel{3\pi n^2}^{\to 0} - 4\pi\right) = -4\pi$$

Entonces:

$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{-4\pi A^2}{-4\pi} = \boxed{A^2 \quad \text{para} \quad n=0}\right.$$

Ahora para $n=2$ tenemos:

$$\lim_{n\to 2} \frac{2A^2\left(\pi \cancel{\cos(n\pi)}^{\to 1}(n^2-2) + 2n \cancel{\operatorname{Sen}}^{\to 0}(n\pi)\right)}{3\pi n^2 - 4\pi} = \frac{2A^2 \cdot 2\pi}{8\pi} = \frac{A^2}{2}$$

Para $n=-2$ tenemos:

$$\lim_{n\to -2} \frac{2A^2\left(\pi \cancel{\cos(n\pi)}^{\to 1}(n^2-2) + 2n \cancel{\operatorname{Sen}}^{\to 0}(n\pi)\right)}{2\pi n^2 - 4\pi} = \frac{2A^2 \cdot 2\pi}{8\pi} = \frac{A^2}{2}$$

Finalmente tenemos que:

$$a_n = \begin{cases} 0 \;, & si \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{excepto } \{0,-2,2\} \\ \frac{A^2}{2} \;, & si \quad n = [2,-2] \\ A^2 \;, & si \quad n = 0 \end{cases}$$

la serie de Fourier de $\hat{x}(t)$ es:

$$\hat{X}(t) = \frac{A^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n(n^2-4)} \cdot \cos(n 2\pi f_0 t)$$

Reconstruyendo la señal a travez de la serie tenemos:

$$\hat{X}(t) = \frac{A^2}{2} + \underset{(n=1)}{0} + \underset{(n=2)}{\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t)} + \underset{(n=3)}{0} + \underset{(n=4)}{0} + \ldots\ldots$$

$$\hat{X}(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t)$$ $\rightarrow$ Señal reconstruida a partir de la Serie de Fourier.

Ahora vamos a buscar la serie exponencial compleja de Fourier para la señal $x(t)$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

Pasando de la serie trigonometrica a la serie exponencial de Fourier.

$$\circ\ C_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \qquad \therefore\ C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2}$$

$$\circ\ C_2 = \frac{\frac{A^2}{2} - j0}{2} = \frac{A^2}{4}$$

Recordemos que:
$C_n = 0$ cuando $n \neq \{-2, 2, 0\}$

$$\circ\ C_{-2} = \frac{\frac{A^2}{2} - j0}{2} = \frac{A^2}{4}$$

$$\circ\ C_n = \frac{\left[\frac{2A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n (n^2-4)}\right] - j0}{2} = \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n (n^2-4)}$$

Por tanto la serie exponencial compleja es:

$$\boxed{\bullet\ \hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A^2 \operatorname{Sen}(n\pi)(n^2-2)}{\pi n (n^2-4)} e^{jn2\pi f_0 t}}$$

Reconstruyendo la señal a partir de la serie compleja

$$\underset{(n=-4)}{\ldots 0} + \underset{(n=-3)}{0} + \underset{(n=-2)}{\frac{A^2}{4} e^{j-4\pi f_0 t}} + \underset{(n=-1)}{0} + \underset{(n=0)}{\frac{A^2}{2} e^{j0}} + \underset{(n=1)}{0} + \underset{(n=2)}{\frac{A^2}{4} e^{j4\pi f_0 t}} + \underset{(n=3)}{0}$$

$$= \frac{A^2}{4} e^{-j4\pi f_0 t} + \frac{A^2}{2} \cancel{e^{j0}}^{\,1} + \frac{A^2}{4} e^{j4\pi f_0 t}$$

Teniendo en cuenta la identidad de euler : $e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm \mathrm{Sen}(\alpha)$

$$\frac{A^2}{4} e^{-j4\pi f_0 t} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4} e^{j4\pi f_0 t}$$

$$\frac{A^2}{4}\left[\cos(4\pi f_0 t) - j\,\mathrm{Sen}(4\pi f_0 t)\right] + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4}\left[\cos(4\pi f_0 t) + j\,\mathrm{Sen}(4\pi f_0 t)\right]$$

$$\frac{A^2}{4}\left[\cos(4\pi f_0 t) - j\,\mathrm{Sen}(4\pi f_0 t + \cos(4\pi f_0 t) + j\,\mathrm{Sen}(4\pi f_0 t)\right] + \frac{A^2}{2}$$

$$\frac{A^2}{4}\left[2\cos(4\pi f_0 t)\right] + \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t) \quad \text{Reconstrucción}$$

Buscando el error relativo:

$$E_r[\%] = \frac{\bar{P}_e}{\bar{P}_x} \cdot 100\% = \left[1 - \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 P_n}{\bar{P}_x}\right] \cdot 100[\%]$$

$$P_n = \frac{1}{T}\int_T |\phi_n(t)|^2\, dt = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_0}\right)}\int_{t_1}^{t_F} |e^{jn2\pi f_0 t}|^2\, dt$$

$$P_n = f_0 \int_{t_1}^{t_F} e^{jn2\pi f_0 t}\left(e^{jn2\pi f_0 t}\right)^* dt$$

$$P_n = f_0 \int_{t_1}^{t_F} e^{jn2\pi f_0 t} e^{-jn2\pi f_0 t}\, dt$$

$$P_n = f_0 \int_{t_1}^{t_F} e^{(\cancel{jn2\pi f_0 t - jn2\pi f_0 t})^{\to 0}}\, dt$$

$$P_n = f_0 \int_{t_1}^{t_F} 1 \, dt = f_0 [t_F - t_1] = f_0 \left[\frac{1}{2f_0} - \left(-\frac{1}{2f_0} \right) \right] = \cancel{f_0} \left[\frac{1}{\cancel{f_0}} \right] = \boxed{1}$$

$$\bar{P}_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 \, dt$$

$$\bar{P}_x = \frac{1}{\frac{1}{f_0}} \int_{t_1}^{t_F} \left| \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right|^2 dt$$

$$P_x = f_0 \int_{t_1}^{t_F} \frac{A^2}{2} \left(1 + \cos 4\pi f_0 t \right) dt = f_0 \int_{t_1}^{t_F} \left[\frac{A^2}{4} \left(1 + \cos(4\pi f_0 t) \right)^2 \right] dt$$

$$P_x = \frac{A^4 f_0}{4} \int_{t_1}^{t_F} (1 + 4\pi f_0 t))^2 \, dt = \frac{A^4 f_0}{4} \int_{t_1}^{t_F} 1 + 2\cos(4\pi f_0 t) + \cos^2(4\pi f_0 t) \, dt$$

$$P_x = \frac{A^4 f_0}{4} \Bigg[\underbrace{\int_{t_1}^{t_F} 1 \, dt}_{1} + \underbrace{2 \int_{t_1}^{t_F} \cos(4\pi f_0 t) \, dt}_{2} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_F} \cos^2(4\pi f_0 t}_{3}$$

Resolviendo 1 para P_x:

$$1 \quad \int_{t_1}^{t_F} dt = t \Big|_{t_1}^{t_F} = \left[\frac{1}{2f_0} - \left(-\frac{1}{2f_0} \right) \right] = \left[\frac{1}{2f_0} + \frac{1}{2f_0} \right] = \boxed{\frac{1}{f_0}}$$

$$2 \quad 2 \int_{t_1}^{t_F} \cos(4\pi f_0 t) \, dt = \frac{2 \operatorname{sen}(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \Bigg|_{t_1}^{t_F} = \frac{\operatorname{sen}(4\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \Bigg|_{t_i}^{t_F}$$

$$\frac{1}{2\pi f_0} \left[\operatorname{sen}\left(4\pi f_0 \left(\frac{1}{2f_0} \right) \right) - \operatorname{sen}\left(4\pi f_0 \left(-\frac{1}{2f_0} \right) \right) \right]$$

Propiedad
$-\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$\frac{1}{2\pi f_0}\left[\cancel{\operatorname{Sen}(2\pi)}^{0} + \cancel{\operatorname{Sen}(2\pi)}^{0}\right] = \boxed{0}$$

(3) $$\int_{t_i}^{t_F} \operatorname{Cos}^2(4\pi f_0 t)\,dt = \int_{t_i}^{t_F} \frac{1+\operatorname{Cos}(2\cdot 4\pi f_0 t)}{2}\,dt = \int_{t_i}^{t_F}$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{t_i}^{t_F} dt + \int_{t_i}^{t_F} \operatorname{Cos}(8\pi f_0 t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\left[t\Big|_{t_i}^{t_F} + \frac{\operatorname{Sen}(8\pi f_0 t)}{8\pi f_0}\Big|_{t_i}^{t_F}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2f_0} - \left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right) + \frac{1}{8\pi f_0}\left[\operatorname{Sen}\left(8\pi f_0\left(\frac{1}{2f_0}\right)\right) - \operatorname{Sen}\left(8\pi f_0\left(-\frac{1}{2f_0}\right)\right)\right]\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_0} + \frac{1}{8\pi f_0}\left[\cancel{\operatorname{Sen}(4\pi)}^{0} + \cancel{\operatorname{Sen}(4\pi)}^{0}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_0}\right] = \boxed{\frac{1}{2f_0}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{A^4 f_0}{4}\left[\frac{1}{f_0} + \frac{1}{2f_0}\right] = \frac{A^4 f_0}{4}\left[\frac{3}{2f_0}\right] = \frac{3A^4}{8} = P_x$$

Entonces

$$E_r[\%] = \left[1 - \frac{|C_{-2}|^2 + |C_0|^2 + |C_2|^2}{P_x}\right]^2 \cdot 100[\%]$$

$$|C_{-2}|^2 = \left[\frac{A^2}{4}\right]^2 = \frac{A^4}{16} \quad ; \quad |C_2|^2 = \left[\frac{A^2}{4}\right]^2 = \boxed{\frac{A^4}{16}}$$

$$|C_0|^2 = \left[\frac{A^2}{2}\right]^2 = \boxed{\frac{A^4}{4}}$$

Por lo tanto:

$$E_r[\%] = \left[1 - \frac{\left(\frac{A^4}{16} + \frac{A^4}{4} + \frac{A^4}{16} \right)}{\frac{3A^4}{8}} \right] \cdot 100\,[\%]$$

$$E_r[\%] = \left[1 - \cancelto{1}{\frac{\frac{3A^4}{8}}{\frac{3A^4}{8}}} \right] \cdot 100\,[\%]$$

$$E_r[\%] = [1-1] \cdot 100\,[\%]$$

$$\boxed{E_r[\%] = 0\ \%}$$ Error relativo.

Pregunta #2.

Señal portadora : $c(t) = A_c \operatorname{Sen}(2\pi F_c t)$ con $A_c, F_c \in \mathbb{R}$

Señal mensaje : $m(t) \in \mathbb{R}$

Encuentre el espectro en frecuencia de la señal modulada en amplitud (AM)

$$y(t) = \left(1 + \frac{m(t)}{A_c}\right) c(t)$$

solución

Encontrando la TF de la señal modulada.

$$Y(\omega) = F\{y(t)\} = F\left\{\left(1 + \frac{m(t)}{A_c}\right) c(t)\right\}$$

la transformada de fourier es lineal entonces podemos hacer lo siguiente: y $\frac{1}{A_c}$ es constante:

$$Y(\omega) = F\{c(t)\} + \frac{1}{A_c} F\{m(t)\, c(t)\}$$

utilizando tablas de fourier tenemos:

$$C(\omega) = A_c\, F\{\operatorname{Sen}(2\pi F_c t)\}$$

reescribiendo el $\operatorname{sen}(2\pi F_c t)$ tenemos

$$C(\omega) = A_c\, F\left\{\frac{e^{2\pi F_c t} - e^{-2\pi F_c t}}{2j}\right\}$$

la transformada de Fourier de $\operatorname{Sen}(2\pi F t)$ es la suma de las transformadas de los terminos individuales.

De la tabla tenemos que:

$$e^{j\omega_0 t} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

En nuestro caso $\omega_0 = 2\pi F_c$ entonces:

$$e^{j2\pi F_c t} = 2\pi\,\delta(\omega - 2\pi F_c)$$

$$e^{-j2\pi F_c t} = 2\pi\,\delta(\omega + 2\pi F_c)$$

entonces:

$$C(\omega) = A_c\left[\frac{2\pi\,\delta(\omega-2\pi F_c)+2\pi\,\delta(\omega+2\pi F_c)}{2j}\right]$$

$$C(\omega) = \frac{A_c\,\cancel{2}\pi}{\cancel{2}j}\left[\delta(\omega-2\pi F_c + \delta(\omega+2\pi F_c)\right]$$

$$\boxed{C(\omega) = \frac{A_c\pi}{j}\left[\delta(\omega-2\pi F_c + \delta(\omega+2\pi F_c)\right]}$$

transformada de fourier de $c(t)$

Ahora vamos a buscar

$$\frac{1}{A_c} F\left\{ m(t)\, c(t) \right\} = \frac{1}{A_c} F\left\{ m(t)\, A_c \operatorname{Sen}(2\pi F_c t) \right\}$$

A_c es constante para la TF. entonces:

$$F\left\{ m(t) \operatorname{Sen}(2\pi F_c t) \right\}$$

$$F\left\{ \frac{m(t) e^{j2\pi F_c t} - m(t) e^{-j2\pi F_c t}}{2j} \right\}$$

De la tabla de TF tenemos:

$$F\left\{ x(t) e^{\pm j w_0 t} \right\} = X(w \mp w_0)$$

En nuestro caso $w_0 = 2\pi F_c$ entonces tenemos:

$$\frac{1}{2j} F\left\{ m(t) e^{j2\pi F_c t} \right\} - F\left\{ m(t) e^{-j2\pi F_c t} \right\}$$

$$\boxed{\frac{1}{2j}\left[M(w - 2\pi F_c) - M(w + 2\pi F_c) \right]}$$

la TF es lineal por eso podemos distribuir la TF

Finalmente tenemos que la TF de la señal modulada en amplitud:

$$\boxed{Y(w) = \frac{A_c \pi}{j}\left(\delta(w - 2\pi F_c) - \delta(w + 2\pi F_c) \right) + \frac{1}{2j}\left(M(w - 2\pi F_c) \ldots\ldots \ldots - M(w + 2\pi F_c) \right).}$$

Punto #3.

Consulte en que consiste la distorción total de armonicos. (total armonic distortion - (THD)) y el factor de potencia en un circuito electrico. Como puede calcularse el THD desde la FFT? Como puede calcularse la distorcion del factor de potencia con base en el THD.?

Solución.

* Distorción total de armonicos.

Es una medida usada para describir el grado de distorción que sufre una señal cuando se introduce a un sistema no lineal como amplificador.
mide la cantidad del contenido armonico no deseado que se agrego a la señal original

* Conseptos clave.

▷ Señal fundamental: Señal original de entrada que generalmente tiene una frecuencia especifica

▷ Armonicos: Son señales cuyas frecuencias son multiplos enteros de la frecuencia fundamental. En un sistema ideal, no deberia haber armonicos adicionales.

▷ Distorción: la frecuencia de armonicos adicionales en la señal de salida, significa que la señal ha sido distorcionada por el sistema

Calculo del THD.

Se calcula como la relación entre la suma de las potencias de todos los armonicos (a parte del segundo) y la potencia de la señal fundamental

$$THD_o = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots}}{V_1} \times 100\%$$

- V_1 = Amplitud de la señal fundamental (Primer armonico)
- V_2, V_3, V_4 = Amplitudes de los armonicos superiores.

Factor de potencia en un circuito electrico.

Medida de que tan eficientemente se utiliza la energia electrica, está relacionado con la diferencia entre la potencia real (utilizada para realizar trabajo util) y la potencia aparente (potencia total entregada al circuito). En terminos simples.

El factor de potencia mide cuanta de la energia suministrada se convierte en trabajo util.

Componentes clave.

Potencia real: Energia utilizada para realizar trabajo util.

Potencia aparente: Potencia total entregada al circuito.

Potencia reactiva: Potencia que no realiza trabajo util, pero es necesario para crear y mantener los campos electromagneticos en elementos almacenadores de energia

Factor de potencia.

Se define como la razón entre la potencia real y la potencia aparente.

$$fP = \frac{P}{S}$$

el FP es un numero sin unidades que varia entre 0 y 1 en sistemas (AC) se define como

$$FP = \cos(\theta)$$

Como puede calcularse el THD desde la FFT?

El THD se puede calcular utilizando la FFT para convertir una señal en el dominio de la frecuencia.

A partir de la FFT, identificas la frecuencia fundamental y los armonicos (multiplos de la fundamental) y obtienes sus amplitudes

Pasos.

1. Realizar la FFT de la señal para obtener su espectro en frecuencias
2. Identificar la amplitud de la frecuencia fundamental y la de los armonicos
3. Calcular el THD utilizando:

$$THD = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \ldots}}{A_1}$$

Donde

A_1, es la amplitud de la fundamental

$A_2, A_3, \ldots$ son las amplitudes de los armonicos.

Como calcular la distorción del factor de potencia con base al THD.

El factor de potencia total se calcula considerando el desface y la distorción armonica (THD) la formula es:

$$FP_{total} = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 + THD^2}}$$

Donde:

- $\cos(\theta)$ es el factor de potencia de desplazamiento (debido al desfase entre corriente y voltaje.)
- THD es la distorción total de armonicos

Un THD alto, reduce el factor de potencia total, afectando la eficiencia del sistema.