Parcial . 1. señales y sistemas 2024-2

Punto (1).

Halla frecuencia de cada señal $x(t) = 0,3\cos(1000\pi t - \pi/4) + 0,6 \operatorname{sen}(2000\pi t$
$+ 0.1\cos(11000\pi t - \pi)$

$W_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow F_1 = \dfrac{W_1}{2\pi} \Rightarrow F_1 = \dfrac{1000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 500$ Hz

$W_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow F_2 = \dfrac{W_2}{2\pi} \Rightarrow F_2 = \dfrac{2000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 1000$ Hz

$W_3 = 2\pi f_3 \Rightarrow F_3 = \dfrac{W_3}{2\pi} \Rightarrow = \dfrac{11000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 5500$ Hz

tenemos

$F_1 = 500$ Hz , $F_2 = 1000$ Hz , $F_3 = 5500$ Hz

verificar si F_s es apropiado por Nyquist:

$F_s \geq 2 f_{max} (f_1, f_2, F_3)$

El muestreador dado es de 5000 Hz y la frecuencia maxima presente en la señal es $F_{max} = 5500$ Hz

Por lo tanto:

$F_s \geq 2 F_{max}$

$5000 \text{ Hz} \geq 2(5500) \text{ Hz}$

$5000 \text{ Hz} \geq 11.000 \text{ Hz}$

Concluimos que el teorema no se cumple:

Discretizando la señal, así el teorema no se cumpla:

$t = nT_s \Rightarrow t = \frac{n}{f_s}$ Entonces

$$x[n] = 0.3\cos\left(1000\pi \cdot \frac{n}{5000} - \frac{\pi}{4}\right) + 0.6\,\text{Sen}\left(2000\pi \cdot \frac{n}{5000}\right)$$

$$+ 0.1\cos\left(11000\pi \cdot \frac{n}{5000} - \pi\right)$$

$$\underbrace{x[n] = 0{,}3\cos\left(\frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}6\,\text{Sen}\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 0.1\cos\left(\frac{11}{5}\pi n - \pi\right)}_{\text{señal discreta.}}$$

- Buscando las frecuencias en discreto (Ω) y verificamos si $\in [-\pi, \pi]$

$\Omega_1 = \frac{\pi}{5} \in [-\pi, \pi]$

$\Omega_1 = \frac{2}{5}\pi \in [-\pi, \pi]$

$\Omega_3 = \frac{11}{5}\pi \notin [-\pi, \pi]$

Por lo tanto Ω_3 en una copia (Aliasing) procedemos a restar vueltas completas a Ω_3.

$$\Omega_3 = \frac{11\pi}{5} - 2\pi = \frac{1}{5}\pi \in [-\pi, \pi]$$

una vez corregido, la señal discretizada es:

$$X[n] = 0{,}3 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}6 \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 0{,}1 \operatorname{Cos}\left(\frac{n}{5}\pi - \pi\right)$$

• Ahora vamos a comprobar la discretización hallando las frecuencias originales

$$\Omega_{orig} = 2\pi \frac{f_{orig}}{F_s} \quad , \quad F_{orig} = \frac{\Omega_{orig} \cdot F_s}{2\pi}$$

$$F_1 \text{ original} = \frac{\pi/5 \cdot 5000}{2\pi} = \frac{\pi/5 \cdot 5000 \text{ HZ}}{2\pi} = 500 \text{ HZ}$$

$$F_2 \text{ original} = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 5000 \text{ HZ}}{2\pi} = 1000 \text{ HZ}$$

$$F_3 \text{ original} = \frac{\pi/5 \, (5000)}{2\pi} = 500 \text{ HZ}$$

Como F_3 original no coincide con F_3, entonces el conversor analogo no es el apropiado.

Proponiendo un nuevo $F_s = 110{,}000$

Como:

$F_s \geq 10.000$ HZ

Así la señal en discreto es:

$$x[n] = 0{,}3 \operatorname{Cos}\left(1000\pi \frac{n}{110.000} - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}6 \operatorname{Sen}\left(2000\pi \frac{n}{110.000}\right) + 0{,}1 \operatorname{Cos}\left(\frac{11000\pi n}{110.000} - \pi\right)$$

Ec. 2.

$$x[n] = 0{,}3 \cos\left(\frac{\pi n}{110} - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}6 \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi n}{55}\right) + 0{,}1 \cos\left(\frac{\pi}{10} n - \pi\right)$$

Buscando nuevamente frecuencias de la nueva señal discreta.

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{110} \quad \in [-\pi, \pi]$$

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{55} \quad \in [-\pi, \pi]$$

$$\Omega_3 = \frac{\pi}{10} \quad \in [-\pi, \pi]$$

• Buscando frecuencias originales

$$F_1 = \frac{\Omega_1 F_s}{2\pi} = \frac{\pi/10\,(110.000)}{2\pi} = 500 \text{ Hz}$$

$$F_2 = \frac{\Omega_2 F_s}{2\pi} = \frac{\pi/55\,(110.000)}{2\pi} = 1000 \text{ Hz}$$

$$F_3 = \frac{\Omega_3 F_s}{2\pi} = \frac{\pi/10\,(110.000)}{2\pi} = 5500 \text{ Hz}$$

Entonces F_s es apropiado, ya que las frecuencias en continuo son las mismas con $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Por lo tanto:

$$x[n] = 0{,}3 \cos\left[\frac{\pi n}{110} - \frac{\pi}{4}\right] + 0{,}6\left[\frac{\pi n}{55}\right] + 0{,}1 \cos\left[\frac{\pi n}{10} - \pi\right)$$

Vamos a comprobar si las señales son cuasiperiódicas para poder simular.

$\omega_1 = 1000\pi$, $\omega_2 = 2000\pi$, $\omega_3 = 11000\pi$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1000\pi}{2000\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{1000\pi}{11.000\pi} = \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{2000\pi}{11000\pi} = \frac{2}{11} \in \mathbb{Q}$$

- Como $\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\omega_1}{\omega_3}, \frac{\omega_2}{\omega_3} \in \mathbb{Q}$ entonces $x(t)$ es una señal

cuasiperiódica.

- Buscando (T) para simular. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500} [s]$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2000\pi} = \frac{1}{1000} [s]$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500} [s]$$

$$T = \pm k T_1 = \pm r T_2 = \pm l T_3 \qquad k, r, l \in \mathbb{Z}$$

Pn 3.

$$T = k\frac{1}{500} = r\frac{1}{1000} = l\frac{1}{5500}$$

$$T = \frac{k}{500} = \frac{r}{1000} = \frac{l}{5500} \quad \times 11000 \quad mcm(T_1, T_2, T_3)$$

$$11000\,T = 22k = 11r = 2l$$

22	11	2	11
2	1	1	2
1			

$11 > 22$

Entonces:

$$11000\,T = 22$$

$$T = \frac{22}{11000}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{500}}$$

T apropiado para simulación