Universidad Autónoma de Madrid
Grado en Física
Computación I

Cálculo de eclipses

Autores:
Laura Barrón Portela
Jaime Bruno Gómez
Pedro Donoso Cubillo

Abril 2022

Índice

1. Motivación

2. Objetivo

El objetivo con el que se lleva a cabo el proyecto es realizar un programa en MATLAB que calcule los momentos durante un período de tiempo determinado en los que se producen eclipses solares y lunares en la Tierra, así como su duración.

3. Introducción

Un eclipse es un tipo de sizigia, es decir, la alineación de tres o más astros. Concretamente consiste en la ocultación transitoria, total o parcial, de un astro debida a la interposición de otro astro o al paso del primero por la sombra proyectada por otro.

En la Tierra se dan eclipses solares y lunares, que ocurren cuando la Luna y el Sol se alinean con ella. No obstante, la sombra de un satélite proyectada sobre la Tierra también podría producir un eclipse.

3.1. Eclipse solar

Un eclipse solar es un evento astronómico que se produce cuando la Luna se interpone entre la Tierra y el Sol, proyectando su sombra sobre una porción de la superficie terrestre. Esto solo ocurre durante una luna nueva y cuando la Luna está muy próxima al plano de la eclíptica, que es la línea curva por donde transcurre el Sol alrededor de la Tierra, desde el punto de vista de esta última (Fig.1).

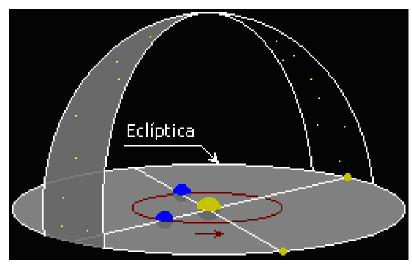


Figura 1: Representación del plano de la eclíptica.

Estos eclipses pueden ocurrir de tres maneras:

- **Eclipse solar parcial**: La Luna no llega a ocultar por completo la luz solar, por lo que puede percibirse como una media Luna brillante. La sombra de la Luna se divide en dos regiones, umbra (oscuridad total) y penumbra (sombra parcial entre los espacios completamente oscuros y los iluminados).

- **Eclipse solar anular**: La Luna no a oculta el Sol totalmente, sino que tapa su centro dejando reflejar el borde del Sol. Para que esto ocurra la Luna tiene que estar un poco mas lejos y el Sol más cerca de la Tierra. Este eclipse se deja ver como un anillo, aunque en la Tierra se percibirá como un eclipse parcial.

- **Eclipse solar total**: Se produce cuando la Luna bloquea completamente la luz solar en una zona de la Tierra durante un determinado instante de tiempo. Para que tenga lugar es necesario que la Luna se sitúe en los llamados nodos lunares, que son puntos en su órbita en los cuales entra en contacto con la órbita de la Tierra alrededor del Sol, ya que el plano de la órbita de la Luna está inclinado unos 5º respecto al plano de la órbita de la Tierra. De este modo, se verá un eclipse total desde la superficie terrestre que se sitúe en el cono de sombra lunar (umbra), mientras que se verá parcial a sus alrededores (donde se encuentre la penumbra). Esto viene ilustrado en la figura 2.

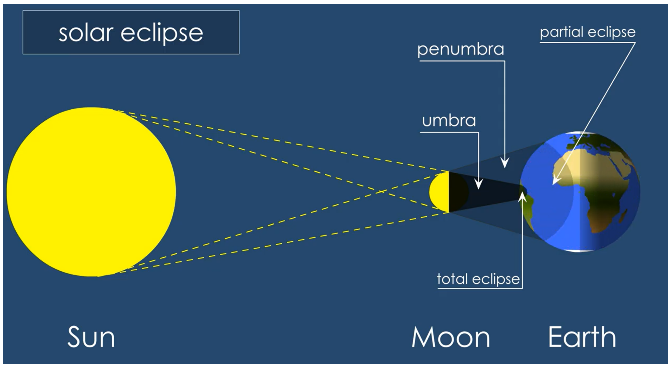


Figura 2: Representación de un eclipse total y parcial al mismo tiempo en diferentes áreas de la superficie terrestre.

3.2. Eclipse lunar

Por su parte, para que este tipo de eclipse suceda, es la Tierra la que debe interponerse entre el Sol y la Luna. Así, generará un cono de sombra sobre la Luna, oscureciéndola. También puede verse de un tono rojizo, por la proyección de la atmósfera terrestre en la Luna.

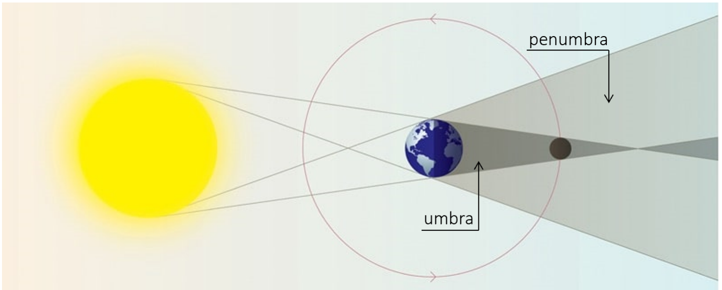


Figura 3: Representación de un eclipse lunar total.

Al igual que en el eclipse solar, los tres cuerpos (Sol, Tierra, Luna) deben estar alineados, pero a diferencia de él, el eclipse lunar solo puede ocurrir en la fase de luna llena, de tal manera que la Tierra bloquee los rayos de luz procedentes del Sol. Por otra parte, mientras los eclipses solares solo son vistos desde una parte concreta de la Tierra, los lunares pueden apreciarse desde cualquier punto de la misma en el que sea de noche.

También existen tres tipos de eclipse lunar:

- **Eclipse lunar penumbral**: se produce cuando la luna se sitúa parcial o totalmente (más infrecuente) en la penumbra generada por la Tierra. El resultado es la percepción desde la Tierra de una superficie lunar ligeramente oscurecida.
- **Eclipse lunar parcial**: este caso ocurre si la luna se ubica de manera parcial en la zona de umbra que genera la Tierra.
- **Eclipse lunar total**: tiene lugar cuando la Luna se sitúa por completo en la zona umbral. En este tipo de eclipse se ve la luna de color rojizo.

3.3. Predicción de eclipses

Existen dos formas de predecir eclipses. La primera es más antigua, y consiste en anotar las repeticiones cíclicas de cada eclipse. Tras cada ciclo se produce una situación orbital parecida, por lo que tienen lugar eclipses muy similares.

La segunda forma, más precisa, es posible gracias a la aparición de la informática, y es la que se lleva a cabo en este proyecto. Consiste en calcular las trayectorias del Sol, la Tierra y la Luna a lo largo del tiempo y predecir las posiciones de los cuerpos en los que la Tierra proyecte su sombra sobre la Luna, y viceversa.

4. Fundamento teórico

Basándonos en la introducción sobre los eclipses solares y lunares, en esta sección se va a describir el procedimiento seguido para determinar la condición que indica si hay o no eclipse.

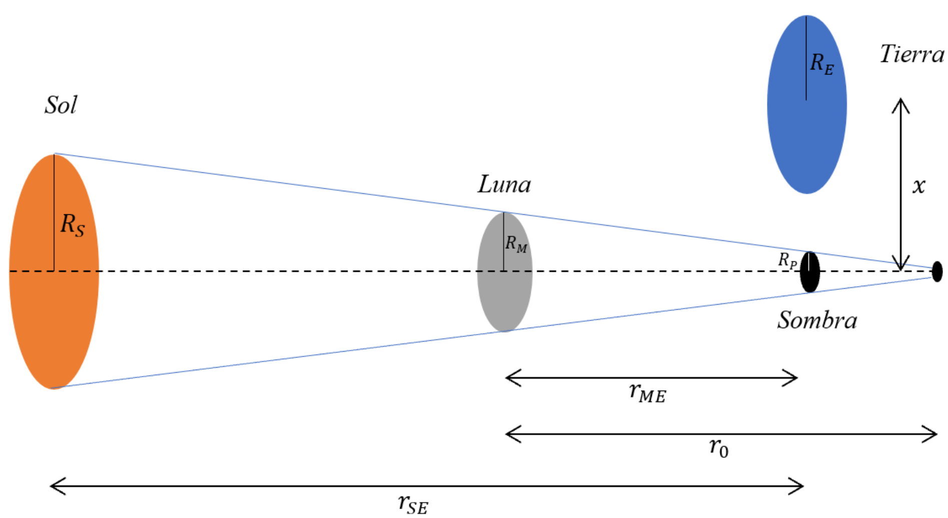
La condición que debe darse para que tenga lugar un eclipse puede definirse como:

$$x < R_E + R_p \tag{1}$$

en el caso del eclipse solar o como

$$x < R_M + R_p \tag{2}$$

en el caso del lunar. A continuación se definen las variables usadas en ambas relaciones.



(a) Esquema.

R_S: Radio del Sol	r_{SE}: Distancia Sol − Tierra
R_M: Radio de la Luna	r_{ME}: Distancia Luna − Tierra
R_E: Radio de la Tierra	r_0: Distancia Luna − Vértice del cono de sombra
R_P: Radio de la sombra	x: Distancia centro Tierra − eje discontinuo

(b) Leyenda.

Figura 4: Representación de las distancias necesarias en el sistema Sol-Luna-Tierra (eclipse solar).

Podemos explicar 1 observando la figura 4. Vemos que si la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la sombra que la Luna produciría en ella si Sol, Luna y Tierra estuvieran alineadas (x) es más pequeña que la suma del radio de la Tierra (R_E) y el de dicha sombra (R_p), entonces la sobra se proyectará en la superficie de la Tierra, y por tanto, tendrá lugar un eclipse solar. La explicación de 2 es análoga, cambiando en la figura las posiciones de la Luna y la Tierra, de modo que el eclipse que se de sea lunar.

Sin embargo, los parámetros x y R_p empleados en ambas condiciones, no se hallan directamente como se hace con los radios R_E y R_M. Para calcularlos, nos hemos apoyado en la geometría analítica de nuestro sistema Sol-Tierra-Luna. Debido a las grandes distancias podemos aproximar las esferas como discos paralelos entre sí. En base a ello usaremos el teorema de Tales.

Por definición: *'El teorema de Tales es una ley de la geometría que nos indica que si se traza una línea paralela a cualquiera de los lados de un triángulo tendremos como resultado un triángulo semejante el triángulo original'*[1].

Aplicamos este teorema a nuestro sistema. Así hallaremos el parámetro r_0 que nos permitirá calcular R_p, necesario para 1 y 2.

Lo hacemos primero para el caso de un eclipse solar (Fig.4a). Nos queda:

$$\frac{R_M}{r_{0,s}} = \frac{R_S}{r_{ES} + (r_{0,s} - r_{ME)}},$$

que perfectamente podemos aproximar a

$$\frac{R_M}{r_{0,s}} = \frac{R_S}{r_{ES}},$$

dado que la distancia $r_0 - r_{ME}$ es muy pequeña comparada con r_{ES}. Además, así se nos simplifican los cálculos. Despejamos r_0 y obtenemos

$$r_{0,s} = \frac{R_M}{R_S} r_{ES}. \tag{3}$$

Volvemos a aplicar el teorema de Tales al sistema y obtenemos la relación

$$\frac{R_p}{r_0 - r_{ME}} = \frac{R_M}{r_0},$$

que involucra R_p, el parámetro que buscamos. Sustituimos la expresión de r_0 hallada en 3 y despejamos R_p:

$$R_{p,s} = R_M - R_S \frac{r_{EM}}{r_{ES}}. \tag{4}$$

Dado que para que se produzca un eclipse lunar lo único que debe cambiar en el esquema representado en la figura 4 son las posiciones de la Tierra y la Luna, la fórmula para R_p en este caso será análoga:

$$R_{p,l} = R_E - R_S \frac{r_{EM}}{r_{ES}}. \tag{5}$$

Por último, debemos conocer el valor de x para poder usar las condiciones establecidas en nuestro programa. Igual que antes, hallaremos la variable en función de la geometría del sistema. Otra vez, hallamos la fórmula para el caso del eclipse solar.

Primero, empleando la definición del producto escalar y observando la figura 5, llegamos a que

$$r_{\vec{SE}} \cdot r_{\vec{SM}} = |r_{SE}||r_{SM}| \cos\theta,$$

donde hemos llamado θ al ángulo formado por r_{SE} y r_{SM}. De ahí despejamos θ y nos queda

$$\theta = \arccos \frac{r_{SE} \cdot r_{SM}}{|r_{SE}||r_{SM}|}. \tag{6}$$

En base a esto, podemos calcular x de la siguiente manera:

$$x_s = |r_{SE}| \operatorname{sen}\theta, \tag{7}$$

donde sustituimos θ obtenido en 6.

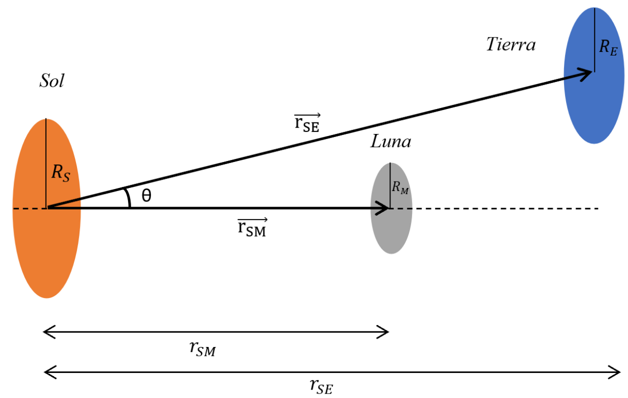


Figura 5: Representación de las distancias necesarias en el sistema Sol-Luna-Tierra para hallar la dstancia x (caso eclipse solar).

Por su parte, en el caso de los eclipses lunares el ángulo entre r_{SE} y r_{SM} será, obviamente, el mismo. Sí cambia X, que queda definido de esta forma

$$x_l = |r_{SM}| \operatorname{sen}\theta. \tag{8}$$

De esta manera, se han hallado satisfactoriamente x y R_P tanto para el caso de eclipses solares (1) como para lunares (2).

5. Programas computacionales

Para hacer posible la predicción de eclipses solares anulares y totales y de eclipses lunares totales, han sido necesarios una serie de programas computacionales, que se han realizado empleando la herramienta MATLAB.

5.1. Gravity.m

Este programa calcula la fuerza gravitacional entre varias masas.

Basta con introducir la masa de las partículas entre las que se quiera calcular la fuerza, y una matriz que incluya las posiciones de todas ellas. Así, se calcula dicha fuerza entre todas las partículas mediante un bucle en el que se emplea la fórmula de la fuerza gravitatoria:

$$\vec{F_g} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r},$$

donde m_1 y m_2 son las masas entre las que se calcula la fuerza, r la distancia entre las mismas y $\vec{u_r}$ el vector unitario que indica la dirección de la fuerza.

Este programa es necesario para hacer que el de verlet funcione, ya que requiere de una fuerza, una velocidad y una trayectoria. A su vez, Verlet.m hará posible el funcionamiento de SolarSystem.m, absolutamente necesario para llevar a cabo el proyecto.

5.2. Verlet.m

Este programa devuelve la trayectoria de los cuerpos siempre que se conozca una fuerza, su masa, la posición y velocidad iniciales, el intervalo de integración y el tiempo final del mismo. Para ello resuelve la ecuación fundamental de Newton: $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ usando el método de Verlet, para un número de partículas np en un número de dimensiones nd.

El método de Verlet itera el algoritmo de Verlet para integrar las trayectorias de los cuerpos.

5.3. SolarSystem.m

Este programa calcula la trayectoria del cuerpo que se seleccione en un intervalo de tiempo determinado. Para ello, deben introducirse los parámetros $t1$ y $t2$, que son el tiempo inicial y el final en días del intervalo, y dt, el tiempo de integración del mismo, también en días.

Primero, a cada cuerpo involucrado se le adjudica un número y se le asocian tres matrices 3×1, para los ángulos de ascensión y declinación del cuerpo y para la distancia a la Tierra. Estos datos se recuperan de `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/sun_en.cgi` para el Sol, `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/planet_en.cgi` para la Tierra y `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/moon_en.cgi` para la Luna.

El Sol es el primer cuerpo: $nb = 1$. Se crean las tres matrices, y en ellas, en la primera fila se escribe el valor del ángulo (en grados $^\circ$ minutos $'$ y segundos $''$) o la distancia (en unidades astronómicas) correspondiente para un tiempo inciaial $t0$ menos un intervalo de tiempo $dt0$; en la segunda los valores para $t0$ y en la tercera para $t0 + dt0$. Se elige $t0 = 0$ y $dt0 = 3h$.

Se hace lo mismo para la Tierra $nb = 2$ y para la Luna $nb = 3$. Puesto que los valores se toman considerando la Tierra en el origen de coordenadas, las tres matrices de este cuerpo serán matrices de ceros.

A continuación, el programa determina para cada cuerpo a partir de sus matrices de ascensión, declinación y distancia la posición $r0$ y la velocidad $v0$ iniciales para cada uno como vectores de tres dimensiones. Para ello, pasa de las coordenadas definidas por los ángulos y la distancia metidos al programa a coordenadas cartesianas, a partir de los cuales obtiene $r0$ y $v0$.

Por otra parte, lo que buscamos es representar el sistema solar con el Sol en su centro, sitiuación que aproximamos situando el centro de masas del sistema solar (aproximadamente el Sol) en el origen de coordenadas. Para ello calculamos la posición y la velocidad en el centro de masas con sus fórmulas:

$$r_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{M_{total}}, v_{CM} = \frac{\sum m_i v_i}{M_{total}}.$$

También calculamos la posición y la velocidad iniciales de los tres cuerpos con respecto a los del centro de masas por medio de un bucle.

Ahora que hemos hallado la fuerza (con Gravity.m) y la posición y velocidades iniciales, podemos usar Verlet.m. Así, llamamos a Gravity.m y llamamos a la fuerza myforce. En nuestro proyecto, siempre consideraremos $t1 = t0$, por lo que $r1 = r0$ y $r2 = r0$. Finalmente, el programa llama a Verlet.m, que nos dará la trayectoria de los cuerpos $nb = 1, 2, 3$, es decir, Sol, Tierra y Luna entre los tiempos $t1$ y $t2$.

5.4. Eclipse.m

Este programa será el definitivo, el que indique si hay eclipse o no en un intervalo de tiempo impuesto, y en caso de haberlo, señala si es solar o lunar y el intervalo de tiempo en horas y minutos en el que se produce.

Primero se introducen los datos iniciales: $t1$, $t2$, dt y los radios del Sol, la Tierra y la Luna en unidades astronómicas. Se crea un vector fila R con los tres radios.

Después llamamos a SolarSystem.m para encontrar las trayectorias de los tres cuerpos, a los que llamaremos rs, trayectoria del Sol; rt, trayectoria de la Tierra; y rm, trayectoria de la Luna.

A continuación, restando trayectorias se calculan las distancias entre cuerpos que serán necesarias, es decir, las que aparecen en las fórmulas 4, 5, 7 y 8: r_{SE}, r_{SM} y r_{ME}. Se crea un bucle para pasar a valor absoluto estas distancias para cada tiempo.

Entonces, pasamos a hacer uso de las fórmulas halladas en el fundamento teórico y calculamos el radio de la sombra R_p y la distancia x para cada tipo de eclipse. Así, creamos un bucle que calcule para cada tiempo el ángulo θ, la distancia x y el radio de la sombra.

Para diferenciar cuando habrá eclipse solar o lunar definimos las matrices [se]: matriz de tiempos en los que ocurre eclipse solar y [le]:matriz de tiempos en los que ocurre eclipse lunar.

Aplicamos un bucle 'for' en el que la condición para que haya eclipse solar es: $xes(i,:) < Ros(i,:) + Rtrsta(i,:) > rsma(i,:)$. Esto quiere decir que se tiene que cumplir tanto que la distancia desde la Tierra a la sombra sea menor que la suma de los radios de la sombra y la Tierra, como que la distancia del Sol a la Tierra sea mayor que la distancia del Sol a la Luna. Para que haya eclipse lunar será: $xel(i,:) < Rol(i,:) + Rmrsta(i,:) < rsma(i,:)$. En este caso se tiene que cumplir que la distancia desde la Luna a la sombra sea menor que la suma de los radios de ambos, y que la distancia del Sol a la Tierra sea menor que la distancia del Sol a la Luna.

El programa no solo nos dice cuando habrá eclipse solar o lunar, si no que también es ejecutable cuando no ocurre ningún eclipse. Para ello definimos previamente las matrices: se=[0] y le= [0]. En caso de que el número de elementos de se y/o le sea 0, habrá 'error': No se producirá eclipse solar o lunar. Una vez tenemos las matrices [se] y [le], determinamos cuando empieza cada eclipse. Para ellos usamos la función 'circshift' de MATLAB. 'Circshift' desplaza los términos de una matriz una posición más abajo y suma una unidad a cada término.

Llamamos 'A' a la matriz resultado que nos ofrece 'circshift'. En este momento aplicamos la función 'find' para buscar donde las matrices se y A son distintas. Esto nos da como resutado una matriz $[A_1]$ cuyas componentes son las posiciones en se en las que empieza un nuevo eclipse. Se realiza lo mismo con [le], $[B]$ y $[B_1\ ]$.

Para que el programa refleje cuando ocurren los eclipses en la ventana de comandos primero buscamos el día y la hora exacta a la que empieza el eclipse. Antes de nada, transformamos el tiempo inicial de las trayectorias a minutos. A partir de ahí utilizamos la función 'fix' y simultáneamente transformamos esos minutos en años. La función 'fix' hace que MATLAB coja hasta las unidades en un número decimal. Por ejemplo, en el número 7.81, cogería el 7 y de ahí obtenemos los años. El resto de ese número (0.81), se encarga de cogerlo la función 'mod'. Se vuelve a aplicar 'fix' y se obtienen los meses, y de nuevo usamos 'mod'. Este método se repite hasta obtener los minutos.

La fecha del eclipse se reflejará en la ventana de comandos gracias a la función 'fprintf', la que expresará que hay eclipse en la fecha correspondiente si el número de elementos de [se] es mayor que 0, y que no lo hay cuando el número de elementos es 0, como se ha explicado previamente. La matriz que agrupaba las posiciones de la matriz [se] en las que empieza un nuevo eclipse era $[A_1]$.

Definimos un bucle ‘for’ en el que la variable ‘j’ tome valores desde el 1, al número de elementos de $[A_1]$, y ‘j’ sea menor que ese número de elementos. ‘time 1’ será una matriz con un solo término, y ese término será cuando empiece el último de los eclipses que haya calculado, y se hallará simplemente evaluando [se] en $[A_1]$. ‘time 2’ es igual, pero en este caso con el término en el que acaba el eclipse, y se hallará evaluando [se] en el siguiente término de $[A_1]$ (este sería el término en el que empieza el siguiente eclipse) y luego restando una unidad (obteniendo así cuando acaba el eclipse anterior). Utilizando las funciones ‘fix’ y’mod’ obtenemos la fecha exacta en la que empieza el eclipse.

Es importante saber que el programa nos da el tiempo que ha pasado a partir del t0 que nosotros hemos ajustado para que ocurra el eclipse. Es decir, no te da la fecha que buscamos, sino los años/meses que han pasado desde el t0. Por ello añadimos a la fecha inicial ese tiempo trasncurrido. De esta manera se corre el riesgo de que el programa se pase de año, mes, día, hora o minuto y de una fecha incorrecta. Es por ello que realizamos otro código en el que si ocurre eso, el programa elimina lo que se ha pasado y le suma una unidad a la cantidad que le debe. Por ejemplo, si el eclipse ocurre en el segundo 76, el programa le resta 60 segundos a esa cantidad y le suma 1 minuto, transformando así el segundo 76 en 1 minuto y 16 segundos.

Para obtener la fecha exacta en la que acaba el eclipse realizamos este mismo método y esta misma corrección.

Por último, para que en la ventana de comandos puedan aparecer horas tales como 19:07, es decir, con números de menos de dos dígitos y que aparezca un cero delante, hay que hacer un pequeño arreglo. Para ello programamos un bucle con todas las combinaciones posibles que hace que si por ejemplo la hora del eclipse es menor que 10 (tiene solo un dígito), el programa le añade un cero delante.

Este procedimiento nos da todos los eclipses que el programa haya calculado excepto el último, pues en el bucle ‘for’ habíamos condicionado a la variable ‘j’ como menor que el número de elementos de $[A_1]$.

Para el último eclipse no hay más que obligar que j sea justamente igual al número de elementos de $[A_1]$. Así ‘time1’ (matriz con el término en el que empieza el último eclipse), será la matriz [se] evaluada en $[A_1]$, y ‘time2’ será justo el último término de [se]. Una vez tenemos ‘time1’ y ‘time2’ aplicamos el mismo método y corrección que para los anteriores eclipses, y así el programa reflejaría también el último eclipse en la ventana de comandos.

Todo esto se vuelve a repetir para los eclipses lunares, con las matrices [le] y $[B_1]$.

Para crear el Sol, la Tierra y la Luna y poder graficarlos primero ajustamos sus trayectorias gracias al programa ‘solarSystem.m’, y luego creamos las esferas correspondientes con la función ‘sphere’ de MATLAB. Esta función nos da esferas de radio 1, así que, para ajustar las gráficas a escala, multiplicamos dichas esferas por los radios reales de los cuerpos.

6. Discusión de los resultados

Gráficas para ver que tiene sentido Comparar con los datos de la NASA

7. Conclusión

Referencias

[1] https://economipedia.com/definiciones/teorema-de-tales.html