2. Análisis de Quine. Verificar tautologías y reglas

En esta sesión se van a ver modos de cálculo de los valores de verdad de las proposiciones diferentes de la ejecución directa de sus tablas completas, que puede ser algo monótono y largo.

Análisis de Quine

Realizar el análisis de Quine[1] de una proposición $P = P(p, q, r, \ldots)$ es otra manera de disponer el cálculo de sus valores de verdad. Se procede eliminando sucesivamente las 'variables' mediante un cálculo funcional en el que se admite la aparición de 1 y 0 en la expresión de las proposiciones.

Lo que significa eliminar una variable se aprecia en los siguientes ejemplos:

Sea la proposición $P = (p \to q) \wedge (\neg q \to p)$. Eliminar la variable p en esta proposición P significa calcular los valores que toma P en cada uno de los dos valores posibles de p. Estos valores serán proposiciones más cortas:
$P(1, q) = q$ y $P(0, q) = q$ (¡Qué casualidad! ¿Por qué?).

A continuación se muestra el cálculo de Quine de la proposición 1, el primer cálculo que se realiza es $P(1, q)$ y $P(0, q)$.

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">1 p 0</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">q</td><td colspan="2" align="center">q</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">1 q 0</td><td colspan="2" align="center">1 q 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

La última fila de la tabla anterior representa la función de verdad de la proposición P.

Repitamos el proceso para la proposición $Q = ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \to (q \leftrightarrow r)$ que tiene tres átomos.

Eliminamos de modo ordenado primero p, después q y finalmente r. De nuevo la última fila representa la tabla de verdad de la proposición Q.

[1] W. V. Quine (1908-2000), lógico norteamericano.

<table>
<tr><td colspan="8">1 p 0</td></tr>
<tr><td colspan="4">$q \to (q \leftrightarrow r)$</td><td colspan="4">$\neg r \to (q \leftrightarrow r)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">1 q 0</td><td colspan="4">1 q 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">r</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">r</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Verificar tautologías

Se trata de comprobar si una proposición dada es o no una tautología. La manera directa de hacerlo es escribir su tabla y ver si bajo el conector raíz da el valor 1 en todas las filas. Esto es largo, pero hay un **método inverso** que puede ser mucho más eficaz en bastantes casos.

Se trata de probar que es imposible que de la tabla resulte el valor 0.

Para ello se supone que diera 0 y se reconstruye marcha atrás la fila de la tabla, hasta llegar a uno de estas dos situaciones posibles:

- Existen valores que dan 0, entonces la proposición NO es tautología.
- Se llega a una situación absurda, entonces SÍ es una tautología.

El procedimiento funciona óptimo con los conectores que tienen en su tabla un único valor final 0 (disyunción y condicional). Con otros puede ser necesario realizar varios casos.

Por ejemplo para probar que el axioma HB9 (de la hoja de tautologías):

Suponemos que $(P \to Q) \to ((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R)) = 0$. De aquí se sigue que $(P \to Q) = 1$ y $((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R)) = 0$. Por lo tanto, $(P \to R) = 1$ y $(P \to (Q \wedge R)) = 0$. Entonces, o bien $P = 1$, $Q = 0$, o bien $P = 1, R = 0$. Esto contradice que $(P \to Q) = 1$ o, en su caso, $(P \to R) = 1$). Esta contradicción viene de suponer que se alcanza el valor 0. Luego HB9 siempre vale 1 y es una tautología.

Queremos probar que $(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ es una tautología.

Supongamos que $((p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))) = 0$. Esto implica que $(p \vee (q \wedge r)) = 1$ y $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) = 0$. Así que $(p \vee q) = 0$ o $(p \vee r) = 0$. Pero en ambos casos, se obtiene que $(p \vee (q \wedge r)) = 0$ lo que contradice $(p \vee (q \wedge r)) = 1$.

El llegar a este absurdo implica que la proposición es una tautología.

En la "Hoja de tautologías" hay una gran cantidad de ellas con las que practicar hasta adquirir soltura con el procedimiento.

Verificar reglas (consecuencias semánticas)

Tomemos como ejemplo la *regla de casos*

$$\text{(RC)}\qquad \begin{array}{c} P \vee Q \\ P \to R \\ Q \to R \\ \hline R \end{array}$$

Que (RC) sea una *regla* $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ quiere decir lo siguiente:

si las premisas son verdaderas entonces la conclusión es verdadera.

Utilizando la terminología de consecuencia semántica (o modelar). Que (RC) sea una *regla* es lo mismo que decir que R sea una consecuencia semántica de $\Gamma = \{P \vee Q, P \to R, Q \to R\}$. Es decir que se verifique la relación:

$$\Gamma = \{P \vee Q, P \to R, Q \to R\} \models R.$$

Hay que recordar que afirmar que (RC) es una regla tiene el mismo significado que afirmar que la siguiente proposición, conjunción de las premisas condicional la conclusión,

$$((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R)) \to R,$$

es una tautología. De modo que las reglas no son sino un tipo especial de tautologías colocadas en una disposición especial según el modo habitual de argumentar.

Esto se puede verificar haciendo la tabla de verdad conjunta de premisas y conclusiones y comprobando que cuando las tres premisas valen 1 (filas primera, tercera y quinta) también es $R = 1$. Si no sucediera esto, el esquema propuesto no sería una regla.

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$P \to R$	$Q \to R$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Igual que para verificar tautologías hay un **método inverso**, lo hay también para verificar reglas. Consiste en tomar la definición en forma contrarrecíproca:

si la conclusión es falsa entonces alguna premisa es falsa.

Para (RC): Si $R = 0$ entonces las premisas son $P \vee Q$, $P \to 0$, $Q \to 0$. Si $P = Q = 0$ entonces es falsa la primera, y si $P = 1$ o bien $Q = 1$ entonces es falsa la segunda o la tercera; en cualquiera de los casos posibles una de las tres premisas es falsa.

EJERCICIOS RESUELTOS DE LA SEGUNDA SESIÓN

Ejercicio 1. *Realizar el análisis de Quine de las siguientes proposiciones:*

1. $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$
2. $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
3. $\neg[(p \rightarrow r) \wedge q)]$
4. $[(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow r)] \rightarrow [\neg[(p \rightarrow r) \wedge q)]]$

Ejercicio 2. *Verificar si las siguientes proposiciones son tautologías:*

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow Q))$ [Si vale 0, será $P = Q = 1$ y $(P \rightarrow Q) = 0$, absurdo].
2. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \wedge (P \rightarrow Q))$ y su recíproca $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \wedge Q)$.
3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)))$.
4. $(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ [Hacer casos $P = 1, 0$].
5. $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$ [Si vale 0 será $P = Q = 1$, compatible con $R = 0$].

Ejercicio 3. *Analizar si las siguientes reglas son o no válidas:*

1. a) $\dfrac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{(P \wedge Q) \rightarrow R}$ b) $\dfrac{(P \wedge Q) \rightarrow R}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$

2. a) $\dfrac{P \rightarrow Q}{\neg(P \wedge \neg Q)}$ b) $\dfrac{\neg(P \wedge \neg Q)}{P \rightarrow Q}$

3. a) $\dfrac{\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \neg(P \vee R) \rightarrow S \end{array}}{(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg S \rightarrow R)}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S) \\ S \rightarrow (Q \wedge T) \\ S \wedge T \end{array}}{P \rightarrow (Q \wedge R)}$

4. a) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \vee Q) \wedge (R \rightarrow S) \\ (Q \wedge S) \rightarrow T \\ \neg T \end{array}}{R \rightarrow P}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \\ (Q \wedge S) \rightarrow \neg T \\ T \end{array}}{\neg P \vee \neg R}$

Solución del Ejercicio 1.

La primera proposición ya ha sido estudiada. Ahora, se trata de realizar el análisis de Quine de la proposición:

$(q \to p) \wedge (\neg p \to r)$

Si $p = 1$, $(q \to p) \wedge (\neg p \to r) \equiv 1$.

Si $p = 0$, $(q \to p) \wedge (\neg p \to r) \equiv \neg q \wedge r$

<table>
<tr><td colspan="8">1 p 0</td></tr>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="4">$\neg q \wedge r$</td></tr>
<tr><td colspan="4">1 q 0</td><td colspan="4">1 q 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">r</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Para la tercera proposición se obtiene lo siguiente:

$\neg[(p \to r) \wedge q)]$

Para $p = 1$, se tiene $\neg[(p \to r) \wedge q)] \equiv \neg[(1 \to r) \wedge q)] \equiv \neg[r \wedge q)] \equiv \neg r \vee \neg q$

Para $p = 0$, se tiene $\neg[(p \to r) \wedge q)] \equiv \neg[(0 \to r) \wedge q)] \equiv \neg[1 \wedge q)] \equiv \neg q$

<table>
<tr><td colspan="8">1 p 0</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg r \vee \neg q$</td><td colspan="4">$\neg q$</td></tr>
<tr><td colspan="4">1 q 0</td><td colspan="4">1 q 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg r$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td><td colspan="2">1 r 0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Para la cuarta proposición:

$[(q \to p) \wedge (\neg p \to r)] \to [\neg[(p \to r) \wedge q)]]$

Para $p = 1$, $[(q \to 1) \wedge (0 \to r)] \to [\neg[(1 \to r) \wedge q)]] \equiv 1 \to [\neg[r \wedge q)]] \equiv \neg[r \wedge q \equiv \neg r \vee \neg q$

Para $p = 0$, $[(q \to 0) \wedge (1 \to r)] \to [\neg[(0 \to r) \wedge q)]] \equiv (\neg q \wedge r) \to [\neg[1 \wedge q)]] \equiv (\neg q \wedge r) \to \neg q \equiv (q \vee \neg r) \vee \neg q \equiv 1$

Ahora la tabla de Quine se realiza con facilidad.

<table>
<tr><td colspan="8">$1 \quad p \quad 0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg r \vee \neg q$</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><td colspan="4">$1 \quad q \quad 0$</td><td colspan="4">$1 \quad q \quad 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg r$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1 \quad r \quad 0$</td><td colspan="2">$1 \quad r \quad 0$</td><td colspan="2">$1 \quad r \quad 0$</td><td colspan="2">$1 \quad r \quad 0$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Solución del Ejercicio 2

La solución de 2.1 está en el propio enunciado.

Para 2.2, suponemos que $((P \wedge Q) \to (P \wedge (P \to Q))) = 0$. Entonces, $(P \wedge Q) = 1$ y $(P \wedge (P \to Q)) = 0$. Por lo tanto $P = 1$, $Q = 1$. Luego $(P \wedge (P \to Q)) = 1$. El haber llegado a este absurdo, implica que $(P \wedge Q) \to (P \wedge (P \to Q))$ es una taulología.

Para ver el recíproco de 2.2, supongamos que $((P \wedge (P \to Q)) \to (P \wedge Q)) = 0$. Entonces, $(P \wedge (P \to Q)) = 1$ y $(P \wedge Q) = 0$. Luego $P = 1$, $Q = 1$. Por lo tanto $(P \wedge Q) = 1$. El haber llegado a este absurdo, implica que$((P \wedge (P \to Q)) \to (P \wedge Q)))$ es una taulología.

Para verificar 2.3, supongamos que existen algunos valores de P, Q, R que anulan la proposición $(P \to Q) \to ((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R))) = 0$. Entonces, $(P \to Q) = 1$ y $((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R))) = 0$. Por lo tanto, $(P \to R) = 1$ y $(P \to (Q \wedge R)) = 0$. Esto implica que, $P = 1$. Así que $P = 1$, $(P \to Q) = 1$ y $(P \to R) = 1$. Entonces, $P = Q = R = 1$. Por lo tanto, $(P \to (Q \wedge R)) = 1$ y $(P \to (Q \wedge R)) = 0$. Este absurdo, viene de suponer que para existen algunos valores de P, Q, R que hacen que $(P \to Q) \to ((P \to R) \to (P \to (Q \wedge R))) = 0$. Como no es cierto que existan algunos valores que anulan la proposición se sigue que para todos los posibles valores de P, Q, R la proposición vale 1. Luego es una tautología.

NOTA: La demostración anterior es un ejemplo de deducción natural con cálculo de predicados. En las fórmulas anteriores, los cuantificadores se han escrito con palabras y en vez de poner cada deducción en una línea nueva, las deducciones se han encadenado, con palabras como "Entonces, Por lo tanto, etc.". Es decir estamos utilizando deducción natural del cálculo de predicados para probar propiedades de proposiciones, es este caso, la de verificar si una proposición es o no es una tautología.

Para verificar 2.4, vamos a probarlo mediante deducciónes con expresiones típicas del cálculo de predicados en la que las fórmulas se escriben con cierta informalidad ya que vamos mezclando trozos de fórmula con palabras de lenguaje usual.

Nuestro objetivo es probar que para cualquier valor de P, Q, R se tiene que $(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = 1$.

Sabemos que la siguiente fórmula es verdadera para posibles valores de un átomo.

$P = 0$ o $P = 1$.

Supongamos que se verifica la primera posibilidad

$P = 0$. Entonces,

$(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = (Q \wedge R) \to (Q \wedge R) = 1$.

Supongamos que ahora se verifica la segunda posibilidad.

$P = 1$. Entonces,

$(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = 1 \to 1 = 1$

Así que tanto si se verifica la primera como la segunda posibilidad siempre sale 1. Entonces (regla de los casos),

para cualquier valor de los átomos P, Q, R se cumple el objetivo

de que $(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = 1$.

Ahora vamos a dar otra demostración mediante el procedimiento de reducción al absurdo. En las siguientes líneas no se dan muchas explicaciones, pero se van realizado deducciones hasta llegar a un absurdo. La conclusión final es que la negación de lo supuesto es verdadera.

Supongamos que: $(P \vee (Q \wedge R)) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = 0$.

$(P \vee (Q \wedge R)) = 1$ y $((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) = 0$

$(P \vee Q) = 0$ y $(P \vee R) = 0$

$P = Q = R = 0$.

$(P \vee (Q \wedge R)) = 1$ y $(P \vee (Q \wedge R)) = 1$ Absurdo.

Finalmente, señalamos que la solución de 2.5 está incluida en el propio enunciado.

Solución del Ejercicio 3

Del ejercicio 3, las partes 3.1 y 3.2 no tienen dificultad.

Ahora, se trata de verificar si el siguiente esquema (3.3.a) es una regla.

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ \neg(P \vee R) \to S \\ \hline ((P \wedge Q) \to R) \to (\neg S \to R) \end{array}$$

Si la conclusión es falsa, entonces $R = S = 0$ y además o bien $P = 0$ o bien $Q = 0$. Por anularse R y S las premisas quedan de la forma $P \to Q$ y $\neg P \to 0$; cuando sea $P = 0$ será falsa la segunda; cuando sea $Q = 0$ tomarán la forma $P \to 0$ y $\neg P \to 0$ una de las cuales se ha de anular según los valores 1, 0 que tome P. Verificado pues que se trata de una regla.

Para el esquema 3.3.b:

$$\begin{array}{c} (P \wedge Q) \to (R \wedge S) \\ S \to (Q \wedge T) \\ S \wedge T \\ \hline P \to (Q \wedge R) \end{array}$$

Si la conclusión es falsa, entonces $P = 1$ y además o bien $Q = 0$ o bien $R = 0$. Caso $(P, Q) = (1, 0)$: la primera premisa vale 1 y las otras dos quedan de la forma $S \to 0$ y $S \wedge T$, una de las cuales siempre será falsa según los valores de S. Caso $(P, R) = (1, 0)$: la primera premisa queda de la forma $Q \to 0$ y las otras dos no se alteran. Si $Q = 1$ la primera es falsa y si $Q = 0$ la segunda y la tercera quedan como en el caso anterior. Verificado pues que se trata de una regla.

Si queremos saber previamente si 3.4.a y 3.4.b son o no reglas si se quiere se puede utilizar el predicado

```
es_consecuencia
```

de aridad 2 del programa lp.pl. de lógica proposicional realizado en prácticas de programación lógica. Incluimos a continuación las respuestas que nos da el programa:

```
| ?- es_consecuencia([ (q o p) y (r im s),(q y s) im t, no t], r im p).

yes

| ?- es_consecuencia([ (p im q) y (r im s),(q y s) im no t,  t],
no p  o no r).

(1 ms) yes
```

De este modo conocemos previamente el resultado de que efectivamente son reglas. Para verificar 3.4.a

$$\begin{array}{c} (P \vee Q) \wedge (R \to S) \\ (Q \wedge S) \to T \\ \neg T \\ \hline R \to P \end{array}$$

Suponemos que $(R \to P) = 0$. Entonces $R = 1$ y $P = 0$.

$$\begin{array}{c} (0 \vee Q) \wedge (1 \to S) \\ (Q \wedge S) \to T \\ (\neg T) = 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Así que $T = 0$.

$$\begin{array}{c} (0 \vee Q) \wedge (1 \to S) \\ (Q \wedge S) \to 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Entonces $Q = 0$ o $S = 0$.

En ambos casos, $(0 \vee Q) \wedge (1 \to S) = 0$. Absurdo.

Si en el esquema 3.4.b suponemos que las premisas son verdad y la consecuencia es falsa

$$\begin{array}{c} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ (Q \wedge S) \to \neg T \\ T \\ \hline \neg P \vee \neg R \end{array}$$

Se tiene que $(\neg P \vee \neg R) = 0$. Luego $P = R = 1$.

Si $1 = (P \to Q) \wedge (R \to S) = (1 \to Q) \wedge (1 \to S)$, entonces $Q = S = 1$. Por lo tanto,

$1 = (Q \wedge S) \to \neg T = 1 \to \neg T$. Esto implica que $T = 0$.

Absurdo.

TAREA DE LA SEGUNDA SESIÓN

Ejercicio 1. *Realizar el análisis de Quine de las siguientes proposiciones:*

1. $(q \leftrightarrow r) \to ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$
2. $(q \leftrightarrow r) \vee (\neg p \to r)$
3. $\neg[\neg(p \to r) \wedge q)]$
4. $[\neg[(p \to r) \wedge q]] \to [(q \to p) \wedge (\neg p \to r)]$

Ejercicio 2. *Verificar si las siguientes proposiciones son tautologías:*

1. $(b \to c) \to ((a \to c) \to ((b \to c) \to (a \to c)))$
2. $((b \to c) \wedge (a \to c)) \to ((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c)))$ y su recíproca $((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) \to ((b \to c) \wedge (a \to c))$.
3. $(B \to C) \to ((B \to A) \to (B \to (C \wedge A)))$.
4. $(B \vee (C \wedge A)) \to ((B \vee C) \wedge (B \vee A))$
5. $B \to (C \to (B \to A))$

Ejercicio 3. *Analizar si los siguientes esquemas son o no válidos:*

1. a) $\dfrac{(b \to c) \to (Q \to R)}{(P \wedge Q) \to R}$ b) $\dfrac{((b \to c) \wedge Q) \to R}{(a \to c) \to (Q \to R)}$

2. a) $\dfrac{(b \to c) \to Q}{((b \to c) \wedge Q)}$ b) $\dfrac{((b \to c) \wedge Q)}{(b \to c) \to Q}$

3. a) $\dfrac{\begin{array}{c} P \to (a \to c) \\ \neg(P \vee R) \to S \end{array}}{(P \wedge (a \to c) \to R) \to (\neg S \to R)}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \wedge (a \to c)) \to (R \wedge S) \\ S \to ((a \to c) \wedge T) \\ S \wedge T \end{array}}{P \to ((a \to c) \wedge R)}$

4. a) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \vee Q) \wedge ((a \to b) \to S) \\ (Q \wedge S) \to T \\ \neg T \end{array}}{(a \to b) \to P}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} (P \to Q) \wedge ((a \to b) \to S) \\ (Q \wedge S) \to \neg T \\ T \end{array}}{\neg P \vee \neg(a \to b)}$

Solución del Ejercicio 1.
El análisis de Quine de la primera proposición es el siguiente:
$A = (q \leftrightarrow r) \to ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)))$
Si $p = 1$, $A(1, q, r) \equiv (q \leftrightarrow r) \to q$.
Si $p = 0$, $A(=, q, r) \equiv (q \leftrightarrow r) \to ((0 \wedge q) \vee (1 \wedge \neg r)))r \equiv (q \leftrightarrow r) \to \neg r$

1 p 0							
$(q \leftrightarrow r) \to q$	$(q \leftrightarrow r) \to \neg r$						
1 q 0	1 q 0						
1	r	$\neg r$	1				
1 r 0	1 r 0	1 r 0	1 r 0				
1	1	1	0	0	1	1	1

El análisis de Quine de la segunda proposición es el siguiente:
$B = (q \leftrightarrow r) \vee (\neg p \to r)$
Si $p = 1$, $B(1, q, r) \equiv (q \leftrightarrow r) \vee (0 \to r) \equiv 1$.
Si $p = 0$, $B(0, q, r) \equiv q \leftrightarrow r) \vee (1 \to r) \equiv (q \leftrightarrow r) \vee (1 \to r) \equiv q \leftrightarrow r) \vee r$

1 p 0							
1	$q \leftrightarrow r) \vee r$						
1 q 0	1 q 0						
1	1	r	1				
1 r 0	1 r 0	1 r 0	1 r 0				
1	1	1	1	1	0	1	1

Para la tercera proposición se obtiene lo siguiente:
$C = \neg[\neg(p \to r) \wedge q)]$
Para $p = 1$, se tiene $C(1, q, r) \equiv \neg[\neg(p \to r) \wedge q)] \equiv \neg[\neg(1 \to r) \wedge q)] \equiv \neg[\neg r \wedge q)] \equiv r \vee \neg q$
Para $p = 0$, se tiene $C(0, q, r) \equiv \neg[\neg(0 \to r) \wedge q) \equiv \neg[0 \wedge q) \equiv 1$

1 p 0							
$r \vee \neg q$	1						
1 q 0	1 q 0						
r	1	1	1				
1 r 0	1 r 0	1 r 0	1 r 0				
1	0	1	1	1	1	1	1

Para la cuarta proposición:

$D = [\neg[(p \to r) \wedge q]] \to [(q \to p) \wedge (\neg p \to r)]$

Para $p = 1$, $D(1, q, r) =\equiv [\neg[(1 \to r) \wedge q]] \to [(q \to 1) \wedge (0 \to r)] \equiv [\neg[r \wedge q)]] \to 1 \equiv 1$

Para $p = 0$, $D(0, q, r) =\equiv [\neg[(0 \to r) \wedge q]] \to [(q \to 0) \wedge (1 \to r)] \equiv [\neg[1 \wedge q]] \to [\neg q \wedge r] \equiv \neg q \to (\neg q \wedge r)$

Ahora la tabla de Quine se realiza con facilidad.

<table>
<tr><td colspan="8" align="center">1 p 0</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">1</td><td colspan="4" align="center">$\neg q \to (\neg q \wedge r)$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">1 q 0</td><td colspan="4" align="center">1 q 0</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">1</td><td colspan="2" align="center">1</td><td colspan="2" align="center">1</td><td colspan="2" align="center">r</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">1 r 0</td><td colspan="2" align="center">1 r 0</td><td colspan="2" align="center">1 r 0</td><td colspan="2" align="center">1 r 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Solución del Ejercicio 2

La solución de 2.1 es inmediata.

Para 2.2, suponemos que $(((b \to c) \wedge (a \to c)) \to ((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c)))) = 0$. Entonces, $((b \to c) \wedge (a \to c)) = 1$ y $((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) = 0$. Por lo tanto $(b \to c) = 1$, $(a \to c) = 1$. Luego $((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) = 1$. El haber llegado a este absurdo, implica que $((b \to c) \wedge (a \to c)) \to ((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c)))$ es una taulología.

Para ver el recíproco de 2.2, supongamos que $(((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) \to ((b \to c) \wedge (a \to c))) = 0$. Entonces, $((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) = 1$ y $((b \to c) \wedge (a \to c)) = 0$. Luego $(b \to c) = 1$, $(a \to c) = 1$. Por lo tanto $((b \to c) \wedge (a \to c)) = 1$. El haber llegado a este absurdo, implica que$(((b \to c) \wedge ((b \to c) \to (a \to c))) \to ((b \to c) \wedge (a \to c))))$ es una taulología.

Para verificar 2.3, supongamos que existen algunos valores de B, C, A que anulan la proposición $(B \to C) \to ((B \to A) \to (B \to (C \wedge A))) = 0$. Entonces, $(B \to C) = 1$ y $((B \to A) \to (B \to (C \wedge A))) = 0$. Por lo tanto, $(B \to A) = 1$ y $(B \to (C \wedge A)) = 0$. Esto implica que, $B = 1$. Así que $B = 1$, $(B \to C) = 1$ y $(B \to A) = 1$. Entonces, $B = C = A = 1$. Por lo tanto, $(B \to (C \wedge A)) = 1$ y $(B \to (C \wedge A)) = 0$. Este absurdo, viene de suponer que para existen algunos valores de B, C, A que hacen que $(B \to C) \to ((B \to A) \to (B \to (C \wedge A))) = 0$. Como no es cierto que existan algunos valores que anulan la proposición se sigue que para todos los posibles valores de B, C, A la proposición vale 1. Luego es una tautología.

NOTA: La demostración anterior es un ejemplo de deducción natural con cálculo de predicados. En las fórmulas anteriores, los cuantificadores se han escrito con palabras y en vez de poner cada deducción en una línea nueva, las deducciones se han encadenado, con palabras como "Entonces, Por lo tanto, etc.". Es decir estamos utilizando deducción natural del cálculo de predicados para probar propiedades de proposiciones, en este caso, la de verificar si una proposición es o no es una tautología.

Para verificar 2.4, vamos a probarlo mediante deducciónes con expresiones típicas del cálculo de predicados en la que las fórmulas se escriben con cierta informalidad ya que vamos mezclando trozos de fórmula con palabras de lenguaje usual.

Nuestro objetivo es probar que para cualquier valor de B, C, A se tiene que $(B \vee (C \wedge A)) \rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = 1$.

Sabemos que la siguiente fórmula es verdadera para posibles valores de un átomo.

$B = 0$ o $B = 1$.

Supongamos que se verifica la primera posibilidad

$B = 0$. Entonces,

$(B \vee (C \wedge A)) \rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = (C \wedge A) \rightarrow (C \wedge A) = 1$.

Supongamos que ahora se verifica la segunda posibilidad.

$B = 1$. Entonces,

$(B \vee (C \wedge A)) \rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = 1 \rightarrow 1 = 1$

Así que tanto si se verifica la primera como la segunda posibilidad siempre sale 1. Entonces (regla de los casos),

para cualquier valor de los átomos B, C, A se cumple el objetivo

de que $(B \vee (C \wedge A)) \rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = 1$.

Ahora vamos a dar otra demostración mediante el procedimiento de reducción al absurdo. En las siguientes líneas no se dan muchas explicaciones, pero se van realizado deducciones hasta llegar a un absurdo. La conclusión final es que la negación de lo supuesto es verdadera.

Supongamos que: $(B \vee (C \wedge A)) \rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = 0$.

$(B \vee (C \wedge A)) = 1$ y $((B \vee C) \wedge (B \vee A)) = 0$

$(B \vee C) = 0$ y $(B \vee A) = 0$

$B = C = A = 0$.

$(B \vee (C \wedge A)) = 1$ y $(B \vee (C \wedge A)) = 1$ Absurdo.

Finalmente, señalamos que la solución de 2.5 es inmediata. Es este caso se tiene que no es una tautología.

Solución del Ejercicio 3

Si queremos saber previamente si son o no reglas si se quiere se puede utilizar el predicado

```
es_consecuencia
```

de aridad 2 del programa lp.pl. de lógica proposicional realizado en prácticas de programación lógica. Incluimos a continuación las respuestas que nos da el programa, pero hemos modificado la letras mayúsculas por otras equivalentes que empiezan por minúscula para que prolog no las interprete como variables:

3.1 a) $\dfrac{(b \to c) \to (Q \to R)}{(P \wedge Q) \to R}$

```
| ?- es_consecuencia( [(b im c) im (qQ im rR)], pP y qQ im rR).
(1 ms) no
```

Si suponemos que $(P \wedge Q) \to R = 0$, se tiene que $R = 0$, $P = 1$ y $Q = 1$. Entonces, $(b \to c) \to (Q \to R) = (b \to c) \to 0$. Pero, por ejemplo, para $b = 1 = c$ se tiene que $(b \to c) \to (Q \to R) = 1$ y $(P \wedge Q) \to R = 0$. Luego no es una regla.

3.1 b) $\dfrac{((b \to c) \wedge Q) \to R}{(a \to c) \to (Q \to R)}$

```
| ?- es_consecuencia( [((b im c) y qQ) im rR], (a im c) im (qQ im rR)).
no
```

Supongamos que $(a \to c) \to (Q \to R) = 0$. Entonces $(a \to c) = 1$, $Q = 1$ y $R = 0$.

Entonces, $((b \to c) \wedge Q) \to R = (b \to c) \to 0 = b \wedge \neg c$,

Por ejemplo, para $b = 0$, $a = 1 = c$, se tiene que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Luego no es una regla.

3.2 a) $\dfrac{(b \to c) \to Q}{((b \to c) \wedge Q)}$

```
| ?- es_consecuencia( [(b im c) im qQ], (b im c) y  qQ).
no
```

Tomemos $b = 1$, $c = 0$, $Q = 0$. Para esta interpretación el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Luego no es una regla.

3.2 b) $\dfrac{((b \to c) \wedge Q)}{(b \to c) \to Q}$

```
| ?- es_consecuencia( [(b im c) y qQ],(b im c) im qQ).
yes
```

Supongamos que $(b \to c) \to Q = 0$. Entonces $(b \to c) = 1$ y $Q = 0$.

Entonces, $((b \to c) \wedge Q) = 1 \wedge 0 = 0$.

Todo contramodelo de la consecuencia es contramodelo de la premisa. Por lo tanto, es una regla.

3.3 a) $\dfrac{\begin{array}{c} P \to (a \to c) \\ \neg(P \vee R) \to S \end{array}}{(P \wedge (a \to c) \to R) \to (\neg S \to R)}$

```
| ?- es_consecuencia( [pP im (a im c),no(pP o rR)im sS],
(pP y (a im c) im rR) im (no sS im rR)).
(1 ms) yes
```

Supongamos que $(P \wedge (a \to c) \to R) \to (\neg S \to R) = 0$. Entonces, $(P \wedge (a \to c) \to R) = 1$ y $(\neg S \to R) = 0$. Por lo tanto, $S = 0 = R$. Por lo tanto, $(P \wedge (a \to c) \to 0) = 1$. Esto implica que $P = 1$ y $(a \to c) = 0$.

Para la primera premisa tenemos:

$P \to (a \to c) = 1 \to 0 = 0$. Por lo tanto, todo contramodelo del consecuente es un contramodelo del primer antecedente. Luego se trata de una regla.

3.3 b) $$\begin{array}{c} (P \wedge (a \to c)) \to (R \wedge S) \\ S \to ((a \to c) \wedge T) \\ S \wedge T \\ \hline P \to ((a \to c) \wedge R) \end{array}$$

```
| ?- es_consecuencia( [(pP y (a im c)) im (rR y sS), sS im ((a im c) y tT),
sS y tT],pP im ( (a im c) y rR)).
(2 ms) yes
```

Supongamos que $P \to ((a \to c) \wedge R) = 0$. Entonces $P = 1$, $(a \to c) = 0$ y $R = 0$.

Si todas la premisas son verdaderas, se tiene que $S = 1$, $T = 1$ y $S \to ((a \to c) \wedge T) = 1$. Por lo tanto $(a \to c) = 1$. Lo que contradice que $(a \to c) = 0$. Luego, es una regla.

3.4 a) $$\begin{array}{c} (P \vee Q) \wedge ((a \to b) \to S) \\ (Q \wedge S) \to T \\ \neg T \\ \hline (a \to b) \to P \end{array}$$

```
| ?- es_consecuencia( [(pP o qQ) y ((a im b) im sS), qQ y sS im tT, no tT],
(a im b) im pP).
(2 ms) yes
```

Supongamos que $(a \to b) \to P = 0$. Entonces, $(a \to b) = 1$ y $P = 0$.

Si los antecedentes son verdaderos, se tiene:

$1 = (P \vee Q) \wedge ((a \to b) \to S) = Q \wedge S$. Así que $1 = (Q \wedge S) \to T = 1 \to T = T$. Lo que contradice que $\neg T = 1$.

Por lo tanto, es una regla.

3.4 b) $$\begin{array}{c} (P \to Q) \wedge ((a \to b) \to S) \\ (Q \wedge S) \to \neg T \\ T \\ \hline \neg P \vee \neg(a \to b) \end{array}$$

```
| ?- es_consecuencia( [(pP im qQ) y ((a im b) im sS), qQ y sS im no tT, tT],no pP o
(2 ms) yes
```

Supongamos que $\neg P \vee \neg(a \to b) = 0$. Entonces, $P = 1$ y $(a \to b) = 1$.
Supongamos que las premisas son verdaderas.
$1 = (P \to Q) \wedge ((a \to b) \to S) = Q \wedge S$. Entonces,
$1 = (Q \wedge S) \to \neg T = \neg T$. Esto contradice que $1 = T$.
Por lo tanto, se trata de una regla.