Ejercicios 2

① Calcula en términos de λ la dimensión de la siguiente clausura lineal
$$\text{Gen}\{(1,\lambda,-1,2),(2,-1,\lambda,5),(1,10,-6,\lambda)\}$$

La dimensión de la clausura coincide con el rango de la matriz formada por los generadores.

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-2),\ F_{31}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 5-2\lambda \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} \underset{F_3(21)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 5-2\lambda \\ 0 & 21\lambda-210 & 105 & 42-21\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{F_{32}(\lambda-10)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 5-2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda-15 & -2\lambda^2+4\lambda-8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 5-2\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+5)(\lambda-3) & -2\lambda^2+4\lambda-8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2+2\lambda-15=(\lambda+5)(\lambda-3).$$

Si $\lambda\neq-5,3$ entonces $(\lambda+5)(\lambda-3)\neq0$ es pivote.

Si $\lambda=-5$ ó $\lambda=3$. entonces. $-2\lambda^2+4\lambda-8\neq0$ es pivote

$\therefore$ $\dim \text{Gen}\{(1,\lambda,-1,2),(2,-1,\lambda,5),(1,10,-6,\lambda)\}=3$.

② Demuestra que.

$$|T_5| = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^4(a+4b).$$

Sumando a la 1ª fila las demás

$$|T_5| = \begin{vmatrix} a+4b & a+4b & a+4b & a+4b & a+4b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix}$$

restando b veces la fila 1

$$= (a+4b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+4b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+4b) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+4b)(a-b)^4$$

Desarrollar 1ª columna

③ Generaliza el ejercicio anterior y demuestra que.

$$|T_n| = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$$

Seguimos el mismo procedimiento. Sumando a la 1ª fila las demás queda $a+(n-1)b$ en cada entrada de la 1ª fila. Lo sacamos del determinante y así

$$|T_n| = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & & b & a \end{vmatrix} \overset{\text{restando b veces la 1ª fila a las demás}}{=} (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \cdots & & & & a-b \end{vmatrix}$$

desarrollar 1ª columna

$$= (a+(n-1)b)\underbrace{\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a-b \end{vmatrix}}_{n-1} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$$

④ Demuestra que.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Sumamos a la 1ª fila las demás y queda $1+a_1+\cdots+a_n$ en cada entrada de la 1ª fila. Lo sacamos fuera del determinante, quedando

$$(1+a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1+a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & & \\ a_n & a_n & \cdots & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

restar 1ª columna a las demás

$$= (1+a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & & \vdots \\ a_3 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\cdots+a_n$$

ceros encima de la diagonal

⑤ Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcula $\det(A^3B^2)$ y $\det(A^2B^{-5})$

Por supuesto que <u>NO</u> hay que hacer las operaciones A^3B^2 y A^2B^{-5}.
Usaremos que.

$$|A^3B^2| = |A|^3\,|B|^2 \qquad y \qquad |A^2B^{-5}| = |A|^2\,|B|^{-5}$$

Calculamos. $|A| = ad - bc$ y $|B| = 2$. Así

$$\det(A^3B^2) = 4(ad-bc)^3 \quad , \quad \det(A^2B^{-5}) = \frac{(ad-bc)^2}{32}$$

6 Demuestra que si una matriz cuadrada tiene todos sus elementos de debajo de la diagonal nulos y es invertible entonces su inversa también tiene nulos los elementos de debajo de la diagonal principal.

Recordar que. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$. El elemento (i,j) de $\mathrm{adj}(A)$ es

A_{ji}. Así que hay que demostrar que si $i>j$ entonces $A_{ji}=0$.

Sea $A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A_{ji} = (-1)^{j+i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & a_{jj} & & & & \\ & & & \ddots & a_{ii} & & \\ & & & & & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} j \\ \\ i \end{array}$

ya que hay que eliminar la fila j y la columna i.

Desarrollando reiteradamente por la 1ª columna

$$A_{ji} = (-1)^{j+i} a_{11} \cdots a_{j-1\,j-1} \begin{vmatrix} a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ & \ddots & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Haciendo lo mismo usando la última columna

$$A_{ji} = (-1)^{j+i} a_{11} \cdots a_{j-1\,j-1}\, a_{i+1\,i+1} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} a_{jj} & \cdots & a_{ji} \\ & \ddots & \\ & & a_{ii} \end{vmatrix}$$

pero ahora se ve claramente que $\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{j\,j+1} & \cdots & a_{ji} \\ 0 & a_{j+1\,j+1} & \cdots & a_{j+1\,i} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} \end{vmatrix} = 0$

Así $A_{ji}=0$. si $i>j$