EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º–GM / GII) —19-Mayo-2012

Nombre:

Titulación: □ GM — □ GII

Los alumnos que en la prueba del 20/21 de Marzo tengan una calificación mayor o igual a 1 punto, pueden dejar de contestar, si así lo desean, las 10 primeras preguntas. El test vale 3=1+2 puntos. Tiempo 30 minutos. Cada respuesta acertada suma 0,1 puntos y si es incorrecta resta 0,1 puntos (en caso de duda es mejor no contestar). La nota mínima de test es 0 puntos. Para contestar una cuestión señala el cuadro correspondiente con una cruz. Para anular una respuesta pon un pequeño círculo encima de la cruz.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V										
F										

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
V										
F										

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
V										
F										

1. La propocición $(p \oplus q) \oplus r$ es equivalente a $p \oplus (q \oplus r)$

   FALSA

2. Puesto que $P \wedge (Q \vee R) \models (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ y también $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \models P \wedge (Q \vee R)$, entonces se tiene que $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

   VERDADERA

3. Sea $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$ un alfabeto de tres letras. Tomemos

   $$S = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

   subconjunto de $2 \times 2 \times 2 \cong 2^{\mathcal{A}}$. Entonces S es el conjunto de modelos de la proposición $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

   VERDADERA

4. Sea $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$ un alfabeto de tres letras. Tomemos

   $$S = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

   subconjunto de $2 \times 2 \times 2 \cong 2^{\mathcal{A}}$. Entonces S es el conjunto de contramodelos de la proposición $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

   FALSA

5. Sean $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. El subconjunto de $2^{\mathcal{A}}$ formado por los modelos de $P \vee Q$ es la unión del subconjunto de los modelos de P y el subconjunto de los modelos de Q.

   VERDADERA

6. Sean $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. El subconjunto de $2^{\mathcal{A}}$ formado por los modelos de $P \to Q$ es la unión del subconjunto de los contramodelos de P y el subconjunto de los modelos de Q.

   VERDADERA

7. Sea X un conjunto finito. Si el cardinal $|X| \neq 2^n$, entonces 2^X tiene una estructura de algebra de Boole libre.

   FALSA

8. Sea B una álgebra de Boole y supongamos que $x, y \in B$. Entonces, $x \leq y$ si y sólo si $x \to y = 1$.

   VERDADERA

9. En un algebra de Boole pueden existir elementos $x, y \in B$ para los cuales $\neg(x \vee y) \neq \neg x \wedge \neg y$.

   FALSO

10. Sea $\Gamma = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un conjunto de premisas con $n \geq 1$ y sea Q una posible consecuencia. Sea $\mathcal{A}$ el menor alfabeto que contiene a los átomos de $\{P_1, \cdots, P_n, Q\}$ y denotemos por $\mathrm{mod}(P)$ el conjunto de los modelos de una proposición P generada por el alfabeto $\mathcal{A}$. Entonces, $\Gamma \models Q$ si y sólo si se verifica la siguiente relación de igualdad

$$\mathrm{mod}(P_1) \cup \cdots \cup \mathrm{mod}(P_n) = \mathrm{mod}(Q).$$

FALSO

11. Sea $\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. Si Γ contiene un subconjunto finito contradictorio, entonces Γ es contradictorio.

VERDADERA

12. Sea $\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ un alfabeto finito. Si Γ es un conjunto de cláusulas que no es estable y no es nulo, entonces Γ no es contradictorio.

FALSO

Para las cuestiones 13–19 se consideran los siguientes alfabetos e interpretación: Un conjunto de variables $\mathcal{V} = \{x, y\}$, un conjunto de constantes $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y un conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, tal que f tiene aridad 1 y g, h tienen aridad 2. Consideremos también un conjunto de predicados $\mathcal{P} = \{A, B\}$, de modo que A tiene aridad 1 y B tiene aridad 2. Tomemos una interpretación I que tenga como dominio los números enteros $X = \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ e interpretemos los alfabetos anteriores del modo siguiente: $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 1$, $\bar{c} = 11$, $\bar{f} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\bar{f}(x) = -x$, $\bar{g} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\bar{g}(x, y) = x + y$, $\bar{h} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\bar{h}(x, y) = x \cdot y$. Para las propiedades se consideran los subconjuntos: $\bar{A} = \{u \in \mathbb{Z} | u \text{ es multiplo de } 11\}$ y $\bar{B} = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | u = -v\}$.

13. En la interpretación I anterior, para cualquier valoración de variables $\nu \colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ se verifica:

$$\bar{g}(\nu(x), \bar{h}(\nu(y), \bar{b})) = \bar{h}(\bar{g}(\nu(x), \nu(y)), \bar{g}(\nu(x), \bar{b}))$$

FALSO

14. En la interpretación I anterior, existe una valoración de variables $\nu \colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ que verifica:

$$\bar{g}(\nu(x), \bar{h}(\nu(y), \bar{b})) = \bar{h}(\bar{g}(\nu(x), \nu(y)), \bar{g}(\nu(x), \bar{b}))$$

VERDADERA

15. En la interpretación I anterior, para cualquier valoración de variables $\nu \colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ se verifica: $(I, \nu) \models A(x)$ si y sólo si $(I, \nu) \models \exists y B(f(x), h(c, y))$.

VERDADERA

16. En la interpretación I anterior, B se interpreta como una relación binaria que es simétrica, pero no es reflexiva.

    VERDADERA

17. En la interpretación I anterior, se satisface la siguiente formula

    $$\forall x(B(x,x) \to (x = a).)$$

    VERDADERA

18. Utilizando el alfabeto anterior se tiene que la fórmula

    $$B(x,x) \to A(x)$$

    es proposicional y tiene forma tautológica.

    FALSA

19. Utilizando el alfabeto anterior se tiene que la expresión

    $$B(\neg x, f(x))$$

    es una fórmula del cálculo de predicados.

    FALSA

20. Toda fórmula que es una ley lógica tiene forma tautológica.

    FALSA

21. La siguiente fórmula (notar que tiene cuantificadores) $\forall x A(x) \vee \neg \forall x A(x)$ no tiene forma tautológica.

    FALSA

22. La siguiente fórmula

    $$\neg \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))$$

    es una ley lógica.

    FALSA

23. El dominio de un modelo de la siguiente fórmula

    $$\exists x \exists y(R(x,x) \wedge \neg R(y,y))$$

    tiene más de un elemento.

    VERDADERA

24. Sea F una fórmula del cálculo de predicados. Si para toda interpretación I con dominio X y para toda valoración $v\colon \mathcal{V} \to X$, (I, v) satisface F, entonces F es una ley lógica.

    VERDADERO

25. En la fórmula
$$\exists x(R(x, y) \wedge \forall y \neg P(g(y, y), x))$$
    no aparecen variables libres.

    FALSA

26. El término $t = f(y)$ está libre para x en la fórmula $\exists y A(x, y)$.

    FALSO

27. La fómula
$$\forall x \exists y A(x, y) \to \exists y A(y, y)$$
    es una ley lógica.

    FALSO

28. Sea P una fórmula y x una variable. Entonces, $\neg \forall x P \equiv \exists x \neg P$.

    VERDADERO

29. Sea $P(x)$ una fórmula donde P es un símbolo de predicado con aridad 1 y sea a un símbolo de constante. Entonces, $\exists x P(x) \to P(a)$ es una ley lógica.

    FALSO

30. Sea $A(x, y)$ una fórmula donde A es un símbolo de predicado con aridad 2 y sea f un símbolo de función de aridad 1. Entonces, $\forall x \exists y A(x, y)$ es consistente si y sólo si $A(x, f(x))$ es consistente.

    VERDADERO

EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º –GM / GII) —19-Mayo-12

Nombre:

Titulación: □ **GM** — □ **GII**

Problemas (1+4=5 puntos en total)

Los alumnos que hayan obtenido en la prueba realizada el 20/21 de Marzo una calificación superior a 1, pueden dejar de hacer, si así lo desean, el primer problema.

P1 (**1 punto**) Considerar la proposición $P = (p \oplus q) \to r$.

a) Dar la forma normal conjuntiva de P

b) Dar la forma normal disjuntiva de P

c) Encontrar una proposicion Q tal que $P \vee Q$ no sea una tautología y $P \wedge Q$ sea una contradicción.

	Indicar las respuestas del problema P1 en la siguiente tabla:
a) FNC:	$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
b) FND:	$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
c) Q:	Soluciones: $Q_1 = \neg p \wedge q \wedge \neg r \quad Q_2 = p \wedge \neg q \wedge \neg r \quad Q_3 =$una contradicción

Solución:

$(p \oplus q) \to r \equiv \neg(p \oplus q) \vee r \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee r \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Luego el conjunto de contramodelos de P es

$\{(0,1,0),(1,0,0)\}$

Es decir, los modelos de P son

$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Así que la forma normal disyuntiva es

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Existen tres soluciones no equivalentes

$Q_1 = \neg p \wedge q \wedge \neg r$

$Q_2 = p \wedge \neg q \wedge \neg r$

$Q_3 =$una contradicción

Notemos que mod$(Q_1) \cap$ mod$(P) = \emptyset$ y mod $(Q_1) \cup$mod$(P) \neq 2 \times 2 \times 2$. Análogamente para Q_2).

P2 (**2 puntos)** Considerar el siguiente esquema de inferencia:

$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \to (Q(x) \land R(x))] \\ \forall x[(\neg S(x) \land T(x)) \to O(x)] \\ \forall x[H(x) \to (A(x) \land B(x))] \\ \forall x[\neg P(x) \to (\neg S(x) \land T(x))] \\ \forall x[(A(x) \land B(x)) \to \neg O(x)] \\ \hline \forall x[H(x) \to (Q(x) \land R(x))] \end{array}$$

(a) Calcular la forma prenexa clausal de las premisas, de la conclusión y de la negación de la conclusión.

(b) Validar por resolución el esquema de inferencia

Solución:

(a) La forma prenexa de la conclusión es la siguiente: $\forall x[H(x) \to (Q(x) \land R(x))] \equiv \forall x[\neg H(x) \lor (Q(x) \land R(x))] \equiv \forall x[(\neg H(x) \lor Q(x)) \land (\neg H(x) \lor R(x))] \equiv (\neg H(x) \lor Q(x)) \land (\neg H(x) \lor R(x))$

La formas prenexas de las premisas y de la negación de la conclusión son las siguientes, que además se han continuado hasta su Skolemización:

$\forall x[P(x) \to (Q(x) \land R(x))] \equiv \forall x[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg P(x) \lor R(x))] \equiv_r (\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg P(x) \lor R(x))$

$\forall x[(\neg S(x) \land T(x)) \to O(x)] \equiv \forall x(S(x) \lor \neg T(x) \lor O(x)) \equiv_r S(x) \lor \neg T(x) \lor O(x)$

$\forall x[H(x) \to (A(x) \land B(x))] \equiv \forall x[(\neg H(x) \lor A(x)) \land (\neg H(x) \lor B(x))] \equiv_r (\neg H(x) \lor A(x)) \land (\neg H(x) \lor B(x))$

$\forall x[\neg P(x) \to (\neg S(x) \land T(x))] \equiv \forall x[[(P(x) \lor \neg S(x)) \land (P(x) \lor T(x))] \equiv_r (P(x) \lor \neg S(x)) \land (P(x) \lor T(x))$

$\forall x[(A(x) \land B(x)) \to \neg O(x)] \equiv \forall x[\neg A(x) \lor \neg B(x) \lor \neg O(x)] \equiv_r \neg A(x) \lor \neg B(x) \lor \neg O(x)$

$\forall x[H(x) \to (Q(x) \land R(x))] \equiv \forall x[(\neg H(x) \lor Q(x)) \land (\neg H(x) \lor R(x)))] \equiv_r (\neg H(x) \lor Q(x)) \land (\neg H(x) \lor R(x)))$

$\neg \forall x[H(x) \to (Q(x) \land R(x))] \equiv \exists x \neg [H(x) \lor (Q(x) \land R(x))] \equiv \exists x(\neg H(x) \land (\neg Q(x) \lor \neg R(x))) \equiv_r H(a) \land (\neg Q(a) \lor \neg R(a))$

b) Una resolución que lleva a 0 es la siguiente:

1.	$\neg P(x) \vee Q(x)$	
2.	$\neg P(x) \vee R(x)$	
3.	$S(x) \vee \neg T(x) \vee O(x)$	
4.	$\neg H(x) \vee A(x)$	
5.	$\neg H(x) \vee B(x)$	
6.	$P(x) \vee \neg S(x)$	
7.	$P(x) \vee T(x)$	
8.	$\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee \neg O(x)$	
9.	$H(a)$	
10.	$\neg Q(a) \vee \neg R(a)$	
11.	$Q(x) \vee \neg S(x)$	RR(1,6)
12.	$O(x) \vee Q(x) \vee \neg T(x)$	RR(3,11)
13.	$O(x) \vee P(x) \vee Q(x)$	RR(7,12)
14.	$O(x) \vee Q(x)$	RR(1,13)
15.	$Q(x) \vee \neg A(x) \vee \neg B(x)$	RR(8,14)
16.	$Q(x) \vee \neg B(x) \vee \neg H(x)$	RR(4,15)
17.	$Q(x) \vee \neg H(x)$	RR(5,16)
18.	$Q(a)$	RR(9,17)
19.	$\neg R(a)$	RR(10,18)
20.	$\neg P(a)$	RR(2,19)
21.	$\neg S(a)$	RR(6,20)
22.	$O(a) \vee \neg T(a)$	RR(3,21)
23.	$O(a) \vee P(a)$	RR(7,22)
24.	$O(a)$	RR(20,23)
25.	$\neg A(a) \vee \neg B(a)$	RR(8,24)
26.	$\neg A(a) \vee \neg H(a)$	RR(5,25)
27.	$\neg H(a)$	RR(4,26)
28.	0	RR(9,27)

P3 **(2 puntos)** Utilizar deducción natural para probar la siguientes leyes lógicas

$$\neg \forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$$

$$\exists x \neg P(x) \to \neg \forall x P(x)$$

Solución:

1. | $\neg \forall x P(x)$ Supuesto

2. || $\neg \exists x \neg P(x)$ Supuesto

3. ||| $\neg P(a)$ Supuesto

4 ||| $\exists x \neg P(x)$ IE(3)

5. ||| $\exists x \neg P(x) \wedge \neg \exists x \neg P(x)$ IC(4,2)

6. || $\neg\neg P(a)$ IN 3–5

7. || $P(a)$ EN 6

8. $||$ $\forall x P(x)$ IU 7

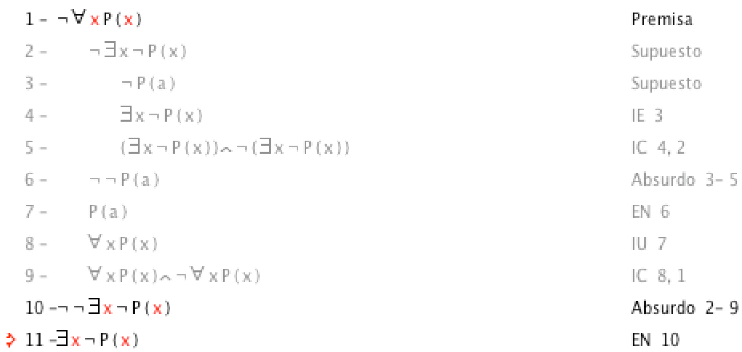
9. $||$ $\forall x P(x) \wedge \neg \forall x P(x)$ IC 8, 1

10. $|$ $\neg\neg\exists x \neg P(x)$ IN 2–9

11. $|$ $\exists x \neg P(x)$ EN 10

12. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$ TD 1–11

Utilizando ADN (salvo TD) se obtiene la imagen



1. $|$ $\exists x \neg P(x)$ Supuesto

2. $||$ $\neg P(a)$ Supuesto

3. $|||$ $\forall x P(x)$ Supuesto

4. $|||$ $P(a)$ EU 3

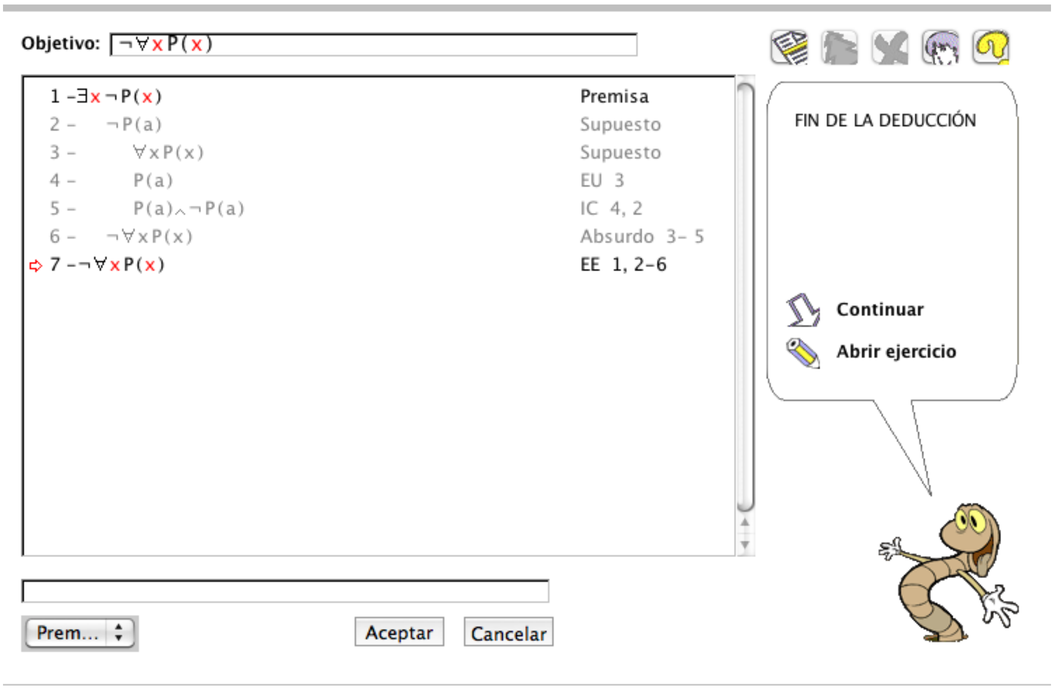
5. $|||$ $P(a) \wedge \neg P(a)$ IC 4, 2

6. $||$ $\neg \forall x P(x)$ IN 3–5

7. $|$ $\neg \forall x P(x)$ EE 1, 2—6

8. $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$ TD 1–7

Utilizando ADN (salvo aplicar TD) se obtiene la imagen


Objetivo: ¬∀xP(x)
1 -∃x¬P(x) Premisa
2 - ¬P(a) Supuesto
3 - ∀xP(x) Supuesto
4 - P(a) EU 3
5 - P(a)∧¬P(a) IC 4, 2
6 - ¬∀xP(x) Absurdo 3- 5
7 -¬∀xP(x) EE 1, 2-6
FIN DE LA DEDUCCIÓN
Continuar
Abrir ejercicio
Prem...
Aceptar
Cancelar

Deducción natural de proposiciones

Las *reglas primitivas de la deducción natural* son las siguientes:

$$\text{(MP)} \quad \frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q} \qquad \qquad \text{(RE}\neg\neg\text{)} \quad \frac{\neg\neg P}{P}$$

$$\text{(RI}\wedge\text{)} \quad \frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \qquad \text{(RE}\wedge\text{)} \quad \frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{(RE}\wedge\text{)} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

$$\text{(RI}\vee\text{)} \quad \frac{P}{P \vee Q} \qquad \qquad \text{(RI}\vee\text{)} \quad \frac{P}{Q \vee P}$$

La *deducción natural* de una conclusión a partir de un conjunto de premisas ($\Gamma \vdash Q$) utiliza las reglas primitivas anteriores y estos tres *procedimientos primitivos*:

- *Teorema de la deducción.* Se tiene una deducción $\Gamma \vdash P \to Q$ si se hace la deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$. En esquema:

$$\text{(TD)} \quad \frac{P \vdash Q}{P \to Q}$$

- *Reducción al absurdo.* Se tiene una deducción $\Gamma \vdash \neg P$ si se hace una deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q \wedge \neg Q$[1]. En esquema:

$$\text{(RA)} \quad \frac{P \vdash Q \wedge \neg Q}{\neg P} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \vdash Q \\ P \vdash \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

- *Prueba por casos.* Se tiene la deducción $\Gamma \vdash R$ si se tiene $P \vee Q$ y se hacen las deducciones $\Gamma \cup \{P\} \vdash R$ y $\Gamma \cup \{Q\} \vdash R$. En esquema:

$$\text{(PC)} \quad \frac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \vdash R \\ Q \vdash R \end{array}}{R}$$

[1]En virtud de las reglas de introducción y eliminación de la conjunción, esto es equivalente a hacer las dos deducciones $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ y $\Gamma \cup \{P\} \vdash \neg Q$.

Deducción natural de predicados

Recordemos las *reglas primitivas de la deducción natural* con proposiciones, que siguen siendo válidas cuando las letras P, Q son fórmulas de la lógica de predicados. Se añaden además como nuevas reglas primitivas: La regla de *generalización* o de *introducción del cuantificador universal*

$$(\text{RG, RI}\forall) \qquad \frac{P(x)}{(\forall x)P(x)}$$

La regla de *particularización* o de *eliminación del cuantificador universal*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$», que recordamos en el esquema poniendo la indicación «c.c.» como abreviatura de «con condiciones»:

$$(\text{RP, RE}\forall) \qquad \frac{(\forall x)P(x)}{P(t|x)\ (\text{c.c.})}$$

La regla de *introducción del cuantificador existencial*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$»:

$$(\text{RI}\exists) \qquad \frac{P(t|x)\ (\text{c.c.})}{(\exists x)P(x)}$$

Y los siguientes *procedimientos primitivos*:

Teorema de la deducción. Se tiene una deducción $\Gamma \vdash P \to Q$ si se hace la deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ sin utilizar la regla de generalización respecto a una variable que aparezca libre en P. En el esquema indicamos «c.c.» como abreviatura de «con condiciones» :

$$(\text{TD}) \qquad \frac{P \vdash Q\ (\text{c.c.})}{P \to Q}$$

Reducción al absurdo. Se tiene una deducción $\Gamma \vdash \neg P$ si se hace una deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q \land \neg Q$ sin utilizar la regla de generalización respecto a una variable que aparezca libre en P. En esquema:

$$(\text{RA}) \qquad \frac{P \vdash Q \land \neg Q\ (\text{c.c.})}{\neg P} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \vdash Q\ (\text{c.c.}) \\ P \vdash \neg Q\ (\text{c.c.}) \end{array}}{\neg P}$$

Prueba por casos. Igual que en lógica de proposiciones. *Prueba por elección.* Se tiene la deducción $\Gamma \vdash R$ si se tiene $(\exists x)P(x)$ y se hace una deducción $\Gamma \cup \{P(a)\} \vdash R$ siendo a una constante que no aparece en R. En esquema:

$$(\text{PE}) \qquad \frac{\begin{array}{c} (\exists x)P(x) \\ P(a) \vdash R\ (\text{c.c.}) \end{array}}{R}$$

Deducción natural con fórmulas cerradas