**Soluciones a las preguntas del examen de la primera convocatoria**

**1.** Hay que estudiar la convergencia de dos series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ es convergente por el criterio de Leibniz, ya que $1/\sqrt{n^2+1}$ es una sucesión decreciente que tiende a 0.

b) Sin embargo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ no converge (es decir, la serie anterior no es absolutamente convergente), como vemos por paso al límite: sabemos que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, y

$$\frac{1/\sqrt{n^2+1}}{1/n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

**2.** Debemos calcular (se usarán más adelante) los valores $a$ y $b$ que siguen:

Primero, $a = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1!+2!+\cdots+n!}$. Por Stolz

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n!-(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right),$$

luego $a = 1$.

Por otro lado $b = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log x - \log \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$. Usaremos sucesivamente las equivalencias del coseno y del logaritmo para obtener

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to 0} \frac{\log \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} - 1}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x-\operatorname{sen} x)}{x^2 \operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2(x-\operatorname{sen} x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3/6}{x^3}\,; \end{aligned}$$

en la segunda línea hemos aplicado que $\operatorname{sen} x \sim x$ y que $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$ cuando $x \to 0$ (por Young), aunque también podríamos haber seguido por L'Hospital.

Por tanto $b = \dfrac{1}{3}$.

**3.** Se define $p(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$. Primero hay que hallar sus raíces. Es fácil por Ruffini, sobre todo si vemos que 1 es una raíz porque los coeficientes suman 0; de hecho se ve que es una raíz doble, y que las otras dos (simples) son 2 y 3, de forma que

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)\,.$$

Salvo para $x = 1$ el signo de $(x-1)^2$ es positivo, y basta tener en cuenta los de los otros dos factores para deducir que $p(x)$ es positivo si $x \in (-\infty,1)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$

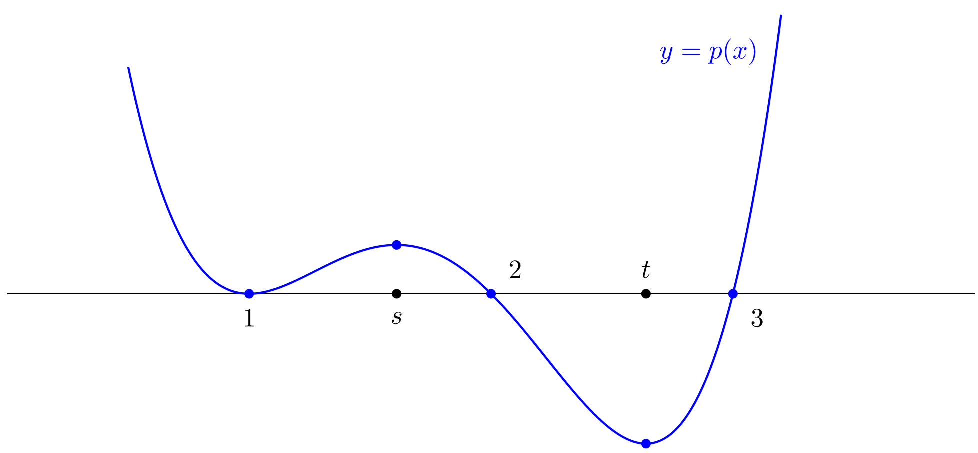
y es negativo si $x \in (2,3)$. Se nos pide hallar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R};\ p(x) \leq 0\}$, y por lo dicho antes la respuesta es

$$A = \{1\} \cup [2,3]\,.$$

También se pide estudiar el crecimiento y extremos de $p$. Se trata de una función continua y derivable en toda la recta real, lo que justifica que lo estudiemos mediante su derivada como sigue: La derivada en cada punto es $p'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 = (x-1)(4x^2 - 17x + 17)$. Calculamos las raíces del segundo factor (de grado 2) y vemos que son $s = \dfrac{17 - \sqrt{17}}{8}$ y $t = \dfrac{17 + \sqrt{17}}{8}$, de forma que $p'(x) = 4(x-1)(x-s)(x-t)$. Notemos que $1 < s < t$, de modo que $p'$ es negativa en $(-\infty, 1)$ y en $(s,t)$ y positiva en $(1,s)$ y $(t, +\infty)$.

Es decir, $p$ es decreciente en $(-\infty, 1]$ y en $[s,t]$, y es creciente en $[1,s]$ y en $[t, +\infty)$. Por tanto $p$ tiene mínimos relativos en 1 y en $t$, y máximo relativo en $s$, y esos son todos sus extremos. Como los límites de $p$ en $\pm\infty$ son $+\infty$ vemos que $s$ no es máximo absoluto. Por último, como $p$ es negativa sólo en $[2,3]$, su mínimo en dicho intervalo es el mínimo absoluto en todo $\mathbb{R}$, y debe ser uno de los dos mínimos relativos que tiene, es decir $t$.

Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta todo lo dicho hasta aquí:




**4.** Tenemos que obtener el desarrollo en serie de potencias de $(x-1)$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$. Para ello ponemos

$$f(x) = \frac{1}{3 + 2(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3}(x-1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n} (x-1)^n\,,$$

y la igualdad vale si $\left|\frac{2}{3}(x-1)\right| < 1$ (y en caso contrario no, porque la serie no converge), o sea si $|x-1| < \frac{3}{2}$, luego el radio de convergencia es $3/2$ y el intervalo en el que el desarrollo es válido es $(-1/2, 5/2)$.

Se pregunta por el valor de $f^{(1000)}(1)$. Sabemos que el coeficiente $n-$ésimo del desarrollo es $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$, luego

$$f^{(1000)}(1) = 1000!\,\frac{1}{3}\,(-1)^{1000}\,\frac{2^{1000}}{3^{1000}} = \frac{2^{1000}}{3^{1001}}\,1000!\,.$$

**5.** a) Hay que sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+3}$.

Como $n^2-4n+3 = (n-3)(n-1)$, para dos valores $A$ y $B$ a determinar tendremos que $\dfrac{1}{n^2-4n+3} = \dfrac{A}{n-3} + \dfrac{B}{n-1}$. Se obtiene rápidamente que $A = 1/2$ y $B = -1/2$, es decir

$$\frac{1}{n^2-4n+3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\Big).$$

Entonces, para cada $N > 4$ la suma parcial hasta $N$ es

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n^2-4n+3} &= \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{N}\Big(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-3} - \sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n-1}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdots + \frac{1}{N-3}\Big) - \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1}\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\Big) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

luego $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+3} = \frac{3}{4}$.

b) Ahora se trata de calcular $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

La misma descomposición en fracciones simples que hemos usado antes permite escribir, para cada $R > 4$,

$$\begin{aligned}\int_4^R \frac{dx}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{2}\int_4^R \Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log(x-3) - \log(x-1)\Big]_4^R\\ &= \frac{1}{2}\Big[\log\frac{x-3}{x-1}\Big]_4^R = \frac{1}{2}\,\log\frac{R-3}{R-1} - \frac{1}{2}\,\log\frac{1}{3} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = \frac{\log 3}{2},\end{aligned}$$

así que $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3} = \frac{\log 3}{2}$.

c) Por último, se pide el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Ahora completamos cuadrados, $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$, y entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}} \\
&= \Big[\log\big|x-2+\sqrt{(x-2)^2-1}\big|\Big]_{-1}^{0} \\
&= \log(2-\sqrt{3})-\log(3-\sqrt{8})\,.
\end{aligned}$$

**6.** Se trata de representar en un mismo dibujo tres conjuntos de números complejos:

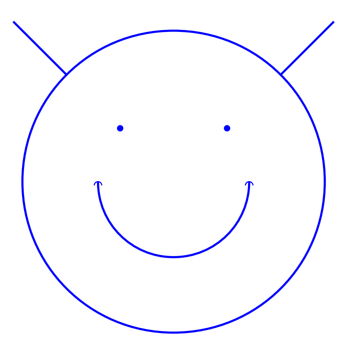
Por un lado $\{z\in\mathbb{C};\ |z|=a\ \text{ y }\ \operatorname{Im} z<0\}$ donde $a$ es el de la pregunta 2, es decir $a=1$; es la semicircunferencia inferior de centro el origen y radio 1, excluyendo sus extremos 1 y $-1$.

Por otro lado $\{z\in\mathbb{C};\ |z|=6\,b\,\}$ con $b$ el de la pregunta 2, o sea $b=1/3$; es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

Finalmente $\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z^2=0,\ \operatorname{Im} z>0\ \text{ y }\ |z|\in A\}$, siendo $A$ el conjunto de la pregunta 3, $A=\{1\}\cup[2,3]$:

si $z=\alpha+\beta i$ con $\alpha$ y $\beta$ reales, $z^2=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta$ tiene parte real nula si y sólo si $\alpha^2=\beta^2$, que es lo mismo que decir $\alpha=\pm\beta$. Los puntos del plano complejo cuyo cuadrado tiene parte real nula son entonces los de las dos bisectrices de los cuadrantes habituales (las rectas en $\mathbb{R}^2$ $y=x$ y $y=-x$). De todos esos puntos, nos interesan solamente los que tienen parte imaginaria positiva y su módulo es o bien 1 o bien un valor de $[2,3]$.

En definitiva, el dibujo que se pide es el siguiente:



(el primer conjunto es la boca, el segundo es el contorno de la cara y el tercero forma los ojos y las antenas).