C.2.3 Primera prueba escrita

He agrupado los modelos propuestos en la prueba corta porque el tercer ejercicio es similar en todos. Puede haber errores de cuentas en la resolución de los ejercicios. Hay otros métodos y razonamientos alternativos que se pueden usar (sobre todo en las preguntas de verdadero ó falso).

Prueba Corta-A-C: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Fecha: 25 de octubre de 2012

---

1. [9] A-Define vector combinación lineal de la familia de vectores $F = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$. Describe un método que te permita concluir que un vector no es combinación lineal de la familia F.

   Definición 3.2.6: Un vector $\vec{u}$ se dice combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$, si se puede exppresar en la forma $\vec{u} = t_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + t_p \cdot \vec{v_p}$ donde $t_1, \ldots, t_p$ son escalares, llamados pesos de la combinación lineal.

   Método: Para saber si un vector $\vec{u}$ es combinación lineal de la familia F, construimos la matriz $A = [\vec{v_1} \ \ldots \ \vec{v_p}]$ cuyas columnas son los vectores de F. Resolvemos el sistema lineal de matriz ampliada $(A \mid \vec{u})$. Si este sistema es compatible, $\vec{u}$ es combinación lineal; si es incompatible, no lo es.

   C-Define base y dimensión de un subespecio S de $\mathbb{R}^n$ (recuerda: la definición debe incluir las definiciones de los conceptos intermedios). Pon un ejemplo de una familia de vectores que no sea base de $\mathbb{R}^3$ (justificando de forma clara que no lo es).

   Definición 2.4.11: El conjunto $F = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}$ es base de S sii $S = Gen\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}$ y es F una familia libre. La dimensión de S es el número de elementos que hay en una cualquiera de sus bases.

   - $Gen\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\} = \{t_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + t_p \cdot \vec{v_p} : t_i \in \mathbb{R}\}$ (conjunto formado por todas las combinaciones lineales de de los vectores de F).
   - F libre: si la única solución de la ecuación vectorial real $\vec{0} = x_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + x_p \cdot \vec{v_p}$ (x_i escalares) es $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

[9] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

Ejemplo: Hay muchos, como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, cualquier base de este espacio debe tener tres elementos. Por tanto, un conjunto formado por uno ó dos vectores no lo es. Entre otros el conjunto $\{(1,0,0)\}$ no es base.

2. A-Verdadero ó falso: Si la familia de vectores $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^n$ es libre y $A = [u\ v\ w]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores dados, el sistema $AX = b$ es compatible determinado para cualquier vector b que esté en el subespacio generado por $\{u, v, w\}$.

   Verdadero: Como b está en $Gen\{u, v, w\}$, b es de la forma $b = t_1 \cdot u + t_2 \cdot v + t_3 \cdot w$ para algunos escalares $t_i \in \mathbb{R}$. Esto equivale a que la 3-tupla (t_1, t_2, t_3)l es solución de a ecuacíń vectorial

$$b = x_1 \cdot u + x_2 \cdot v + x_3 \cdot w = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

   por tanto el sistema $AX = b$ es compatible. Además es determinado ya que. al ser la familia $\{u, v, w\}$ es libre, la forma escalonada de A tiene exactamente 3 pivotes y coincide con el número de indeterminadas, luego no hay variables libres y la solución es única.

   C-Verdadero ó falso: un sistema de $n+1$ ecuaciones y n indeterminadas tal que el rango de su matriz ampliada sea $n+1$ puede ser compatible indeterminado.

   Falso: La matriz A asociada al sistema es de orden $(n+1) \times n$ y la ampliada $(A \mid b)$ de orden $(n+1) \times (n+1)$. Como el rango de la matriz ampliada es $n+1$, la forma escalonada de esta matriz debe tener exactamente $n+1$ pivotes. Como A tiene n columnas, A tiene, a lo más, n pivotes (en este caso debe tener exactamente n, luego A tiene rango distinto a la matriz ampliada). Por tanto, en la última fila de la ampliada encontramos un pivote en su última entrada. Por tanto el sistema es siempre incompatible.

3. A-Para la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por la expresión general: $T((x, y, z)) = (2x - y - z, -x + 3y + z, -x - 2y, x + 2y)$, calcula:

   a) la matriz canónica de T;

   b) una base y la dimensión del núcleo de T;

   c) una base y la dimensión del conjunto imagen de T;

d) los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, \alpha, 1, \beta)$ esté la imagen de T.

Con la información obtenida, clasifica la aplicación T. **Hasta aquí se pueden obtener 6 puntos**. La siguiente pregunta os dará **1 punto adicional:** Construye todas las aplicaciones inyectivas $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tales que $f(e_1 + e_2) = T(e_1)$ y $f(e_1 - e_2) = T(e_2)$, los vectores e_1, e_2 son los dos primeros vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Prueba Corta-B-D: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
Fecha: 25 de octubre de 2012

1. [10]B-Define subespacio S del n-espacio real $\mathbb{R}^n$. Pon un ejemplo de subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 (justificando de forma clara que lo es).

   Definición 2.4.1: Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ se dice **subespacio** si satisfacae las siguientes propiedades:

   a) El vector nulo, $\vec{0}$ está en S.
   b) Para cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ de S, el vector $\vec{u} + \vec{v}$ también está en S.
   c) Para cada vector $\vec{u}$ de S y cada escalar t de $\mathbb{R}$, el vector $t\vec{u}$ está en S.

   Ejemplo Basta con tomar una familia libre de dos vectores de R^n y considerar el subespecie que genera. De este modo, si tomamos un par de vectores de la base canónica, fijemos $\{e_1, e_2\}$, la familia es libre por formar parte de una base (ó simplemente contando pivotes en la matriz de columnas $[e_1 \ e_2]$). Tomamos $S = Gen\{e_1, e_2\}$ y tenemos un subespecio con base $\{e_1, e_2\}$ (la familia es libre y lo genera), luego de dimensión (nḿuero de elementos de unabase cualquiera) 2.

   D-Define familia libre. Para la familia de vectores $F = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ de $\mathbb{R}^n$, explica un método que te permita concluir que la familia es ligada.

   Definición 3.3.1.

   Método: Para concluir si la familia F es ligada, construimos la matriz $A = [\vec{v_1} \ \ldots \ \vec{v_p}]$ cuyas columnas son los vectores de F. Resolvemos el sistema lineal homogénero $AX = 0$. Si este sistema es compatible indeterminado, la familia es ligada; en otro caso (compatible determinado), la familia es libre.

2. B-Prueba que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, $T(u_1) = v_1, T(u_2) = v_2$ y la familia de vectores $\{v_1, v_2\}$ es l.i., también lo es la familia $\{u_1, u_2\}$.

[10]Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

Para probar la afirmación, comprobamos que $\{u_1, u_2\}$ satisface las condiciones de la definición de familia l.i. Partimos de una ecuación vectorial de la forma: $0 = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2$. Calculamos imágenes de los vectores en la expresión previa sabiendo que $T(0) = 0$ y usando las propiedades de aplicación (las indeterminadas x_i representan números reales):

$$0 = T(0) = T(x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2) = x_1 \cdot T(u_1) + x_2 \cdot T(u_2) = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2$$

y, como la familia $\{v_1, v_2\}$ es l.i., la única posibilidad es que $x_1 = x_2 = 0$, lo que demuestra que $\{u_1, u_2\}$ también es l.i.

D-Prueba que si los vectores u, v, w de $\mathbb{R}^n$ cumplen la ecuación vectorial: $3u - 5v - \frac{1}{2}w = 0$, el sistema $AX = w$ donde $A = [u\ v]$ es la matriz de columnas los vectores u, v es compatible.

En efecto, la expresión vectorial $3u - 5v - \frac{1}{2}w = 0$, es equivalente a $3u - 5v = \frac{1}{2}w$ y a $6u - 10v = w$. Por tanto, la 2-tupla $(6, -10)$ es solución del sistema lineal de n ecuaciones y dos indeterminadas $AX = w$, por tanto el sistema es compatible.

3. B-Para la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por la expresión general: $T((x, y, z, t)) = (x + 2y - z - t, 2x - y + 3z - 2t, -y + z)$, calcula:

   a) la matriz canónica de T;

   b) una base y la dimensión del núcleo de T;

   c) una base y la dimensión del conjunto imagen de T;

   d) los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el vector $(\alpha, 1, \beta)$ no esté la imagen de T.

   Con la información obtenida, clasifica la aplicación T. **Hasta aquí se pueden obtener 6 puntos**. La siguiente pregunta os dará **1 punto adicional:** Construye todas las aplicaciones inyectivas $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tales que $f(e_1 + e_2) = T(e_1)$, $f(e_1 - e_2) = T(e_2)$ y $f(e_4) = T(e_4)$, los vectores e_1, e_2, e_4 son los dos primeros vectores y el último de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   Solución: a)- Escribimos la expresión general en forma de vector columna y descomponemos en suma y producto por escalar de vectores:

$$\begin{pmatrix} x + 2y - z - t \\ 2x - y + 3z - 2t \\ -y + z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

así,

$$T((x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

La matriz canónica es la matriz 3×3 que aparece en la expresión matricial anterior. La otra posibilidad es calcular los vectores $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,2,0)$, $T(e_2) = T((0,1,0)) = (2,-1,-1)$ y $T(e_3) = T((0,0,1)) = (-1,3,1)$. La matriz canónica es la que tiene por columnas los vectores previos, esto es: $A = [T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)]$.

b)- El núcleo de T es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, variables x, y, z, t. Para encontrarlas, escalonamos la matriz A (uno de los muchos escalonamientos que se pueden hacer):

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto nos indica que el sistema es compatible indeterminado (z, t variables libres) equivalente al de ecuaciones $x+2y-z-t=0$ y $-y+z=0$, luego el conjunto de soluciones es de la forma: $(-z+t, z, z, t)$. Descibimos el conjunto de soluciones en forma paramĺetrica:

$$Ker\,T = \{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R}\} = Gen\{(-1,1,1,0), (1,0,0,1)\}.$$

Una base de $Ker\,T$ es un conjunto formado por vectores l.i. de entre los que generan. En este caso, la familia $\{(-1,1,1,0), (1,0,0,1)\}$ es generadora y libre (los vectores dispuestos en columna forman una matriz con dos pivotes); la familia de ambos vectores es base y la dimensión del núcleo es por tanto 2.

c)-La imagen de T se puede describir como el subespacie generado por las columnas de la matriz A. Así, $Im\,T = Gen\{(1,2,0), (2,-1,-1), (-1,3,1), (-1,-2,0)\}$. Por al apartado b), el escalonamiento de A nos dice que los dos primeros vectores son libres (hay dos pivotes) y el tercer y el cuarto vector son combinación de los anteriores. De este modo, $Im\,T = Gen\{(1,2,0), (2,-1,-1)\}$ y el conjunto $\{(1,2,0), (2,-1,-1)\}$ es una base de la imagen que, por tanto, tiene dimensión 2.

d)-Para que el vector $v = (\alpha, 1, \beta)$ no esté la imagen de T hay que estudiar el sistema lineal (con parámetros α, β) de matriz ampliada $(A \mid v)$. Escalonamos la matriz ampliada (uno de los muchos escalonamientos que se pueden hacer):

$$(A \mid v) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \mid & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \mid & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 1-2\alpha-5\beta \end{pmatrix}$$

esto nos indica que el sistema será incompatible si y solamente $1 - 2\alpha - 5\beta \neq 0$. Por tanto, los vectores de la forma $(\alpha, 1, \beta)$ tales que $1 - 2\alpha - 5\beta \neq 0$ no están en la imagen de T.

Clasificación de T: No es inyectiva porque el núcleo tiene dimensión 2 y es no nulo. No es suprayectiva porque la imagen tiene dimensión 2 y, por tanto $Im\, T \neq \mathbb{R}^3$ que tiene dimensión 3. Tampoco es biyectiva.

Pregunta 3-ejercicio adicional:

Solución corta razonada: Las aplicaciones lineales f que nos piden son de la forma $f = T_B$ con $B = [f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)\ f(e_4)]$ matriz 3×4, que es la matriz canónica que determina f. Para que f sea inyectiva, es necesario que el núcleo sea el subespecio nulo, luego su dimensión debe ser cero. Esto equivale a decir que el sistema homogéneo $BX = 0$ en las variables x, y, z, t tenga la trivial como única solución, esto es, sea compatible determinado. Observamos que la matriz B tiene 3 filas, luego una vez escalonada a lo más tiene 3 pivotes y, como tenemos 4 variables, el sistema presenta variables libres luego siempre será compatible indeterminado. Por tanto, no hay ninguna aplicación que cumpla los requisitos pedidos, puesto que todas las que encontremos serán no inyectivas.

Solución metodológica:Las aplicaciones lineales f que nos piden son de la forma $f = T_B$ con $B = [f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)]$, que es la matriz canónica que determina f. Por tanto, es suficiente con calcular $f(e_i)$. De las condiciones que debe de cumplir f y usando las propiedades de las aplicaciones lineales, tenemos: $f(e_1) + f(e_2) = T(e_1) = (1, 2, 0)$, $f(e_1) - f(e_2) = T(e_2) = (2, -1, -1)$ y $f(e_4) = (-1, -2, 0)$. Sumando las dos primeras ecuaciones tenemos que $2f(e_1) = (3, 1, -1)$, luego $f(e_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$. Restando a la primera la segunda tenemos $2f(e_2) = (-1, 3, 1)$, luego $f(e_2) = (\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Como no hay más condiciones, la imagen del vector e_3 puede ser cualquier cosa, luego $f(e_3) = (a, b, c)$.

De este modo, f viene dada por la matriz canónica:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & a & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & b & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Falta imponer la condición de que f sea inyectiva, esto es, que el núcleo de f sea nulo. Esto es equivalente a que el sistema homogéneo $BX = 0$, variables x, y, z, t tenga la trivial como única solución. Escalonamos B para discutir el sistema (uno de los posibles escalonamientos):

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2b & 4 \\ 0 & 4 & 2b - c & 4 \\ 0 & 0 & 2a - 10c - 4b & -12 \end{pmatrix},$$

lo que nos permite concluir que el sistema es siempre compatible indeterminado (con 1 ó 2 variables libres), por lo que no existe ninguna aplicación que cumpla las condiciones pedidas.