EJERCICIOS VARIOS DE LA HOJA 1.

1. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si a^2 es un número par, también lo es a, $a \in \mathbb{N}$.

   (b) $\sqrt{5}$ es un número irracional.

- Para resolver al apartado a):

Solución: Probamos el contrapositivo: si n es par entonces n^2 es par. Supongamos que n es par, entonces por definición $n = 2k$ para algún entero k. Elevando al cuadrado se obtiene

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Pero $\ell = 2k^2$ es entero, por lo tanto $n^2 = 2\ell$ es par. ∎

- Para resolver el apartado b):

Mejor respuesta: Supongo raiz de 5 racional
raiz de 5=a/b (fracción irreducible) a y b no tienen factores en común
elevo ambos miembros al cuadrado
5=a^2/b^2
a^2=5b^2 (1)
si a^2 es múltiplo de 5, entonces a es múltiplo de 5
a=5k
a^2=25k^2 reemplazando en (1)
25k^2 =5b^2
5k^2 = b^2
b^2 es múltiplo de 5 entonces b es múltiplo de 5
entonces a y b tienen a 5 como factor común. Esto es un absurdo que vino de suponer que raiz de 5 es racional

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

$$\boxed{\text{(a)}\quad \frac{2x-1}{3x+2} \le 1}$$

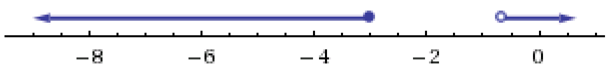
$$\frac{(2x-1)}{3x+2} - 1 \le 0 \rightarrow \frac{(2x-1)-(3x+2)}{3x+2} \le 0$$

$$\frac{-x-3}{3x+2} \le 0 \rightarrow \frac{-(x+3)}{3\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)} \le 0$$

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		-3		$-\frac{2}{3}$	
(-1)	−		−		−
$(x+3)$	−	●	+		+
$(x+2/3)$	−		−	○	+
$(+3)$	+		+		+
$\frac{-(x+3)}{3\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)}$	−	●	+	○	−

- La solución es:

$x \le -3,\ \ x > -\frac{2}{3}$ $(-\infty,-3] \cup \left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$	

- Cuando una inecuación con valor absoluto aparece el signo “>” se elige cómo solución la suma de las soluciones que satisfagan las inecuaciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

$$\text{(b)}\quad x - |x| > 2$$

$$-2 > x - x < +2 \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a}: -2 > 0 \\ y \\ Condición\ \ 2^{a}: 0 > +2 \end{cases}$$

- Por lo tanto, la solución de la inecuación será la unión de ambas soluciones:

$$S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

- Cuando una inecuación con valor absoluto aparece el signo “>” se elige cómo solución la suma de las soluciones que satisfagan las inecuaciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

$$\text{(c)}\quad |x^2 - x| + x > 1$$

- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$-1 > (x^2 - x) + x > +1 \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -1 > x^2 - x + x \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x^2 - x + x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow 0 > x^2 + 1 \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x^2 - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow 0 > x^2 + 1 \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow (x-1)\cdot(x+1) > 0 \end{cases}$$

- Para resolver inecuaciones de segundo grado se factoriza, se buscan las raíces de los binomios y se organiza la información en tablas.

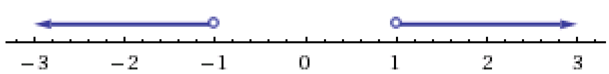
Condición 1^{a}: $0 > x^2 + 1$	Condición 2^{a}: $x^2 - 1 > 0$
(ver tabla 1)	(ver tabla 2)
S_1: No solución.	$S_2 : (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$

	$-\infty$	∞
$x^2 + 1$	+	

		-1		$+1$	
$(x-1)$	−		−	○	+
$(x+1)$	−	○	+		+
(x^2-1)	+	○	−	○	+

- Por lo tanto, la solución de la inecuación será la unión de ambas soluciones:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$$

$x < -1, \quad x > +1$ $(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$	

- Cuando en la inecuación con valor absoluto aparece el signo “<” se elige cómo solución la intersección de las soluciones que satisfagan las condiciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

$$\boxed{\text{(d)}\ \ x+|x|<1}$$

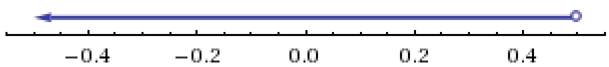
- Aislando el valor absoluto:

$$|x|<1-x$$

$$-1+x<x<1-x \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a}: -1<0 \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a}: 2x<+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a}: -1<0 \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a}: x<+\frac{1}{2} \end{cases}$$

- La solución es cualquier conjunto de números que resuelva ambas inecuaciones a la vez, es decir, la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones.

$$S=S_1 \cap S_2 = \Re \cap \left(-\infty,+\frac{1}{2}\right)$$

$x<+\frac{1}{2}$ $\left(-\infty,+\frac{1}{2}\right)$	

$$\text{(e)}\quad \frac{x-1}{x+1} > 2$$

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

$$\frac{x-1}{x+1} - 2 > 0 \rightarrow \frac{(x-1)-2\cdot(x+1)}{x+1} > 0$$

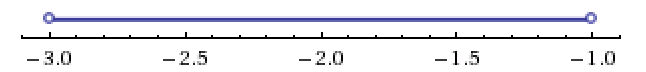
$$\frac{x-1-2x-2}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{-x-3}{x+1} > 0$$

$$\frac{-1\cdot(x+3)}{x+1} > 0$$

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		-3		-1	
(-1)	−		−		−
$(x+3)$	−	○	+		+
$(x+1)$	−		−	○	+
$\frac{-1\cdot(x+3)}{x+1}$	−	○	+	○	−

- La solución es:

$-3 < x < -1$ $(-3,-1)$	

$$\boxed{\text{(f)} \quad \frac{a|x|+1}{x} < 1}$$

- Cuando en la inecuación con valor absoluto aparece el signo “<” se elige cómo solución la intersección de las soluciones que satisfagan las condiciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

- En primer lugar se buscan las <u>soluciones con valores de x positivos, x > 0</u>:

$$\frac{a \cdot x + 1}{x} < 1 \rightarrow a \cdot x + 1 < x \rightarrow 1 < (1-a) \cdot x$$

$$Si\ \ 1-a > 0 \rightarrow a < +1 \ \ y \ \ x > 0 \rightarrow \frac{1}{1-a} < x \ \ y \ \ x > 0 \rightarrow Solución : x \in \left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$$

$$Si\ \ 1-a \leq 0 \rightarrow a \geq +1 \ \ y \ \ x > 0 \rightarrow No\ existen\ soluciones\ positivas.$$

- En segundo lugar se buscan las <u>soluciones con valores de x negativos, x < 0</u>:

$$\frac{1 - a \cdot x}{x} < 1 \rightarrow 1 - a \cdot x > x \rightarrow 1 > x + a \cdot x \rightarrow 1 > (1+a) \cdot x$$

$$Si\ \ a+1 \geq 0 \rightarrow a \geq -1 \ \ y \ \ x < 0 \rightarrow Solución : x \in (-\infty,\ 0)$$

$$Si\ \ a+1 < 0 \rightarrow a < -1 \ \ y \ \ x < 0 \rightarrow x > \frac{1}{a+1} \ \ y \ \ x < 0 \rightarrow Solución : x \in \left(\frac{1}{a+1},\ 0\right)$$

- Por lo tanto, la solución en función de los valores de a:

$$Solucion\ \ si\ \ a < -1 \rightarrow x \in \left(\frac{1}{a+1},\ 0\right) \cup \left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$$

$$Solución\ \ si\ \ -1 \leq a \leq 1 \rightarrow x \in (-\infty,\ 0) \cup \left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$$

$$Solucón\ \ si\ \ a > +1 \rightarrow x \in (-\infty,\ 0)$$

- Cuando en la inecuación con valor absoluto aparece el signo “<” se elige cómo solución la intersección de las soluciones que satisfagan las condiciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

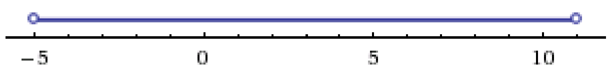
$$\boxed{(g)\ \ |x-3|<8}$$

- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$-8<x-3<+8 \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -8<x-3 \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x-3<+8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -5<x \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a}\ x<11 \end{cases}$$

- La solución es cualquier conjunto de números que resuelva ambas inecuaciones a la vez, es decir, la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones.

$$S=S_1 \cap S_2=(-5,+11)$$

$-5<x<+11$ $(-5,+11)$	

$\boxed{\text{(h)}\ \ |x+5| \ge 4}$

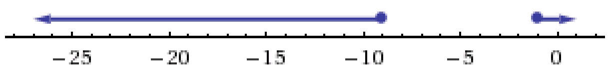
- Cuando una inecuación con valor absoluto aparece el signo “>” se elige cómo solución la suma de las soluciones que satisfagan las inecuaciones que se vayan analizando en el desarrollo de ejercicio.

- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$-4 \ge x+5 \ge +4 \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -4 \ge x+5 \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x+5 \ge +4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -9 \ge x \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x \ge -1 \end{cases}$$

- Por lo tanto, la solución de la inecuación será la unión de ambas soluciones:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-9) \cup (-1,+\infty)$$

$x \le -9,\ \ x \ge -1$ $(-\infty,-9)\cup(-1,+\infty)$	

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica, se opera, se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

$$\text{(i)}\quad 1-\frac{x}{2}>\frac{1}{1+x}$$

$$1-\frac{x}{2}-\frac{1}{1+x}>0 \rightarrow \frac{2\cdot(1+x)-x\cdot(1+x)-2}{2\cdot(1+x)}>0$$

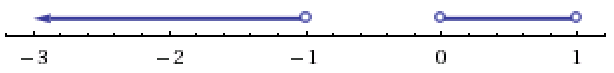
$$\frac{2+2x-x-x^2-2}{2\cdot(1+x)}>0 \rightarrow \frac{-x^2+x}{2\cdot(1+x)}>0$$

$$\frac{(-1)\cdot x\cdot(x-1)}{2\cdot(x+1)}>0$$

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		-1		0		+1	
(-1)	−		−		−		−
(x)	−		−	○	+		+
$(x-1)$	−		−		−	○	+
2	+		+		+		+
$(x+1)$	−	○	+		+		+
$\frac{(-1)\cdot x\cdot(x-1)}{2\cdot(x+1)}$	+	○	−	○	+	○	−

- La solución es:

$x<-1,\ 0<x<+1$ $(-\infty,-1)\cup(0,+1)$	

$$\boxed{(j)\ \ |3 - x^{-1}| < 1}$$

- Cuando en la inecuación con valor absoluto aparece el signo “<” se elige cómo solución la intersección de las soluciones que satisfagan las condiciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

$$\left|3-\frac{1}{x}\right|<1 \to \left|\frac{3x-1}{x}\right|<1$$

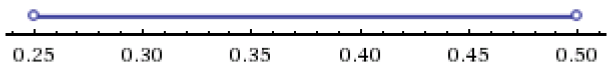
- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$-1<\frac{3x-1}{x}<+1 \to \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \to -1<\dfrac{3x-1}{x} \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a} \to \dfrac{3x-1}{x}<+1 \end{cases} \to \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \to -x<3x-1 \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a} \to 3x-1<+x \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \to +1<4x \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a} \to 2x<+1 \end{cases} \to \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \to \dfrac{+1}{4}<x \\ a\ \ la\ \ vez\ \ que \\ Condición\ \ 2^{a} \to x<\dfrac{+1}{2} \end{cases}$$

- Por lo tanto, la solución de la inecuación será la intersección de ambas soluciones:

$$S=S_1 \cap S_2=\left(-\infty,\frac{+1}{2}\right)\cap\left(\frac{+1}{4},+\infty\right)$$

$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$	

$(k)\ \ |x+4| \geq 7$

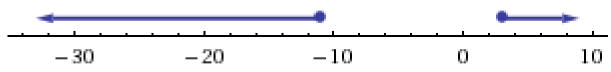
- Cuando una inecuación con valor absoluto aparece el signo “>” se elige cómo solución la suma de las soluciones que satisfagan las inecuaciones que se vayan analizando en el desarrollo de ejercicio.

- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$-7 \geq x+4 \geq +7 \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -7 \geq x+4 \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x+4 \geq +7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Condición\ \ 1^{a} \rightarrow -11 \geq x \\ y \\ Condición\ \ 2^{a} \rightarrow x \geq +3 \end{cases}$$

- Por lo tanto, la solución de la inecuación será la unión de ambas soluciones:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-11] \cup [+3,+\infty)$$

$x \leq -11,\ \ x \geq +3$ $(-\infty,-11] \cup [+3,+\infty)$	

$$(1)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$$

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica se opera, se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

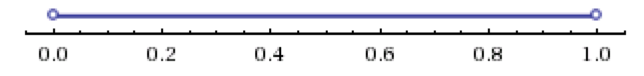
$$\frac{(1-x)+x}{x\cdot(1-x)} > 0 \rightarrow \frac{1}{-x\cdot(x-1)} > 0$$

$$\frac{-1}{x\cdot(x-1)} > 0$$

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		0		+1	
(-1)	−		−		−
(x)	−	0	+		+
$(x-1)$	−		−	0	+
$\frac{-1}{x\cdot(x-1)}$	−		+		−

- La solución es:

$0 < x < +1$ $(0,\ +1)$	

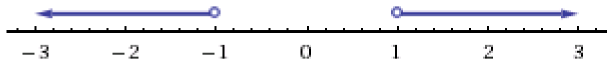
$$\boxed{(m)\ \frac{x-1}{x+1} > 0}$$

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica se opera, se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		-1		+1	
$(x-1)$	−		−	o	+
$(x+1)$	−	o	+		+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	o	−	o	+

- La solución es:

$x < -1, \quad x > +1$ $(-\infty,\ -1) \cup (+1, +\infty)$	

- Para resolver la siguiente desigualdad algebraica se factoriza y se buscan las raíces de cada binomio.

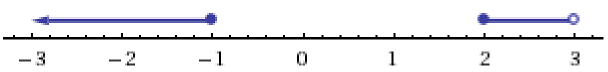
$$\boxed{(\text{o}) \quad \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} \leq 0}$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{x-3} \leq 0$$

- Se organiza toda la información en una tabla y se estudia el signo:

		-1		+2		+3	
$(x+1)$	−	•	+		+		+
$(x-2)$	−		−	•	+		+
$(x-3)$	−		−		−	○	+
$\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{x-3}$	−	•	+	•	−	○	+

- La solución es:

$x \leq -1,\ 2 \leq x < 3$ $(-\infty,-1] \cup [+2,+3)$	

- Cuando una inecuación con valor absoluto aparece el signo “<” se elige cómo solución la intersección de las soluciones que satisfagan las inecuaciones que se vayan analizando durante el desarrollo del ejercicio.

$$\boxed{\text{(r)}\ \ |3x+5|+x\leq 0.}$$

$$|3x+5|\leq -x$$

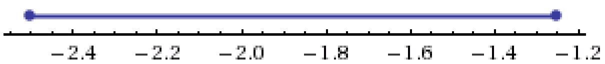
- Para resolver la siguiente desigualdad con valor absoluto se plantean las siguientes condiciones:

$$+x\leq(3x+5)\leq -x\rightarrow\begin{cases}Condición\ \ 1^{a}\rightarrow x\leq 3x+5\\ a\ \ la\ \ vez\ \ que\\ Condición\ \ 2^{a}\rightarrow 3x+5\leq -x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Condición\ \ 1^{a}\rightarrow -5\leq 2x\\ a\ \ la\ \ vez\ \ que\\ Condición\ \ 2^{a}\rightarrow 4x\leq -5\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}Condición\ \ 1^{a}\rightarrow \dfrac{-5}{2}\leq x\\ a\ \ la\ \ vez\ \ que\\ Condición\ \ 2^{a}\rightarrow x\leq\dfrac{-5}{4}\end{cases}$$

- La solución es cualquier conjunto de números que resuelva ambas inecuaciones a la vez, es decir, la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones.

$$S=S_1\cap S_2=\left[-\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right]$$

$-\frac{5}{2}\leq x\leq -\frac{5}{4}$ $\left[-\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right]$	

- Resolver la siguiente ecuación polinómica:

$$\boxed{\text{(c)}\ x^3 + 5x^2 + 6x = 0.}$$

- Como no tiene término independiente se saca factor común tantas x cómo tenga el monomio de menor grado:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = x \cdot (x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$\textit{Solución} : x_1 = 0$$

- Se resuelve el polinomio de 2º grado:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_2 = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

- El polinomio tiene 3 raíces simples: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ y $x_3 = -3$.

7. Probar aplicando inducción las siguientes igualdades:

b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- Para comprobar por inducción que una igualdad P (n) es cierta debe cumplirse:

  a) P (1) es cierto.
  b) P (n + 1) es cierto, suponiendo que P (n) es cierto.

- Comprobación de que P (1) se cumple:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$
$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6}$$
$$1 = 1$$

- Suponiendo que P (n) es cierto, comprobar q P (n + 1) también lo es:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2 \cdot (n+1)+1)}{6}$$
$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)^2}{6} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}$$
$$n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1) = (n+2) \cdot (2n+3)$$
$$2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 3n + 4n + 6$$
$$2n^2 + 7n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$$

- Por lo tanto es cierta la igualdad.

9. Probar la fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- Se van desarrollando las potencias del binomio (a + b):

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- El resultado de cada potencia es un polinomio. Si se observan los coeficientes de cada polinomio se puede construir la siguiente secuencia, conocida como el **triángulo de Tartaglia**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

- Algunas de las características de esta secuencia de números son:

a) Cada fila empieza y terminan por el número 1.

b) Los números aparecen de forma simétrica de tal forma que el primero es igual al último, el segundo al penúltimo… etc.

c) Cada número es suma de los dos que tiene encima.

- Dichas propiedades pueden expresarse mediante **números combinatorios**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

- El valor de cada número combinatorio puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}$$

- Si ahora nos fijamos en los exponentes de las partes literales de los polinomios del primer apartado, “a” y “b”, de los polinomios que resultan de elevar el binomio (a + b) a las diferentes potencias, se observa que el grado de “a” va disminuyendo de n hasta cero, mientras que el grado de “b” se comporta de manera inversa. Así, todo esto podría expresarse como:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

- Al tratarse de una suma de n términos, de forma abreviada se puede escribir:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

- Esta expresión es conocida como el **binomio de Newton**.
- Esta fórmula se demuestra por el **método de inducción**, para n = 1:

$$(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i = \binom{1}{0}ab^0 + \binom{1}{1}a^0b = a+b$$

- Suponer que se cumple para n = k:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

- Para n = k + 1:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i$$

- Teniendo en cuenta que: $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

$$= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1}$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^{k-(i-1)}b^i$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^i + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]a^{k+1-i}b^i + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i.$$

- Válido para todo “n” entero y positivo.

10. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$. Probar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- **Serie de Fibonacci** → $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$ para todo n > ó = que 2.

- Suponiendo que $F_0 = 0$, los primeros términos de esta serie son:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	$\cdots$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	$\cdots$

- Se puede observar el comportamiento de la serie F_N cuando N → ∞. Resulta curioso estudiar a cuánto tiende el cociente entre dos términos consecutivos:

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	$\cdots$
1	2	1,5000	1,6666	1,6000	1,6250	1,6153	1,6190	1,6176	1,6181	1,6179	$\cdots$

- El comportamiento en el infinito del cociente F_N / F_{N-1}, que parece ser una constante "x" entorno al 1'61…. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x$$

- Si esta tendencia es cierta…. ¿Cuál es ese número "x"? La serie de Fibonacci cumple que toso término es la suma de los dos anteriores: $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$, luego:

$$\underbrace{F_N = F_{N-1} + F_{N-2} \rightarrow \frac{F_N}{F_{N-1}} = \frac{F_{N-1}}{F_{N-1}} + \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}}}$$

$$\frac{F_N}{F_{N-1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{F_{N-1}}{F_{N-2}}}$$

- Si estudiamos el límite infinitesimal de esa expresión equivalente (Nota: No olvidar que el cociente entre dos términos consecutivos de la serie tiende a "x"), el número "x" debe de cumplir:

$$Lim_{x\to\infty} \frac{F_N}{F_{N-1}} = Lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\dfrac{F_{N-1}}{F_{N-2}}}\right) = 1 + \frac{1}{x}$$

- Por lo tanto se deduce que el número "x" debe de cumplir la siguiente relación, llamada ecuación característica de la serie:

$$x = 1 + \frac{1}{x}\,; \quad \text{o en otras palabras, que} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

- Las soluciones de esa ecuación de segundo grado son las dos números reales:

$$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ x_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

- De las dos soluciones sólo x_1 coincide con la tendencia hacia el infinito del cociente entre dos términos consecutivos de la serie de Fibonacci (x_2 es un nº negativo).

- Por una parte, la serie de Fibonacci puede ser expresada:

$$\begin{cases} F_N = F_N - 1 + F_{N-2} \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

- Por otra parte, se cumple que el término enésimo (F_N) tiene que ser una combinación lineal de las soluciones de la ecuación característica:

$$F_N = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Donde C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales (valor de F_0 y F_1):

$$\begin{cases} F_N = C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ F_0 = 0 \rightarrow C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 = 0 \\ F_1 = 1 \rightarrow C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

- Resolviendo lo anterior se llega a la siguiente conclusión:

$$c_1 = -c_2 \Rightarrow c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - c_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Sustituyendo en la ecuación del término general de la serie (F_N) se obtiene:

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}$$

12. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, hallar:

a) $z_1 + z_2$. b) $z_1 - z_2$. c) $z_1 \cdot z_2$. d) z_1/z_2.

- La suma de dos complejos:

$$z_1 + z_2 = (2+i) + (3-2i) = (2+3) + (i-2i) = 5 - 1 \cdot i = 5 - i$$

- La resta de dos números complejos:

$$z_1 - z_2 = (2+i) + (3-2i) = (2-3) + (i+2i) = -1 + 3 \cdot i$$

- El producto de dos números complejos en forma binómica:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+i) \cdot (3-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i - 2 \cdot (-1) = 8 - i$$

- El cociente de dos números complejos en forma binómica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+i)}{(3-2i)} = \frac{(2+i)}{(3-2i)} \cdot \frac{(3+2i)}{(3+2i)} = \frac{6+4i+3i+2i^2}{3^2 - 4i^2} = \frac{6+7i+2 \cdot (-1)}{9 - 4 \cdot (-1)} = \frac{4+7i}{13}$$

14. Dados los números complejos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + 6i$, determinar el número x que verifica cada una de las igualdades siguientes:

(a) $z_1 + x = z_2$; (b) $z_1^2 x = 1$; (d) $z_2 x = z_1$.

- Apartado a):

$$x = z_2 - z_1 = (3+6i) - (2-i) = (3-2) + (6i + i) = 1 + 7i$$

- Apartado b):

$$x = \frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{(2-i)\cdot(2-i)} = \frac{1}{4-4i+i^2} = \frac{1}{4-4i-1} =$$

$$x == \frac{1}{3-4i} = \frac{(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \frac{(3+4i)}{3^2-4^2\cdot i^2} =$$

$$x = \frac{(3+4i)}{3^2-4^2\cdot(-1)} = \frac{(3+4i)}{3^2+4^2\cdot} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

- Apartado d):

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{3+6i} = \frac{(2-i)\cdot(3-6i)}{(3+6i)\cdot(3-6i)} = \frac{6-12i-3i-6i^2}{3^2-6^2\cdot i^2} =$$

$$x = \frac{6-15i-6\cdot(-1)}{3^2-6^2\cdot(-1)} = \frac{-15i}{3^2+6^2} = \frac{-15i}{45} = \frac{-i}{3}$$

16. Sea P un polinomio de grado 4 con coeficientes reales.

(a) Si 1 es raíz de P, ¿cuántas raíces complejas puede tener?

(b) Si $3i$ y $2-3i$ son raíces complejas de P, ¿cuáles son las otras dos raíces?

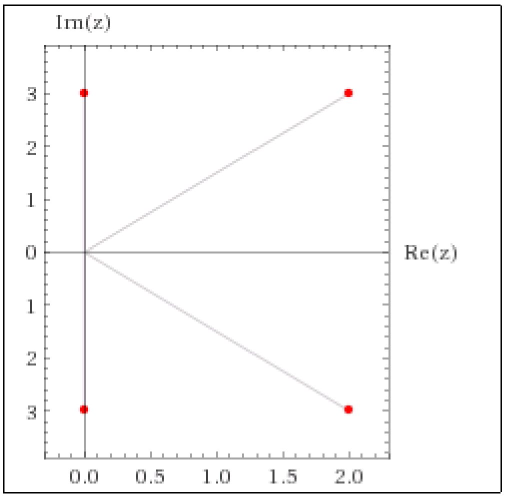
- Apartado a):

Según el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 4 tiene 4 raíces entre reales y complejas. Teniendo en cuenta que x = 1 es raíz del polinomio P (z) y que éste tiene todos sus coeficientes reales, se puede deducir que tendrá dos raíces complejas ya que se cumple que si un nº complejo es raíz de un polinomio, también lo es su conjugado.

- Apartado b):

Si un nº complejo es raíz de un polinomio P (z), y éste tiene todos sus coeficientes reales, también lo será raíz del polinomio el nº complejo conjugado, así que las raíces del polinomio P (z) son:

$$Raíces:\begin{cases} z_1 = 3i \quad \rightarrow z_2 = \overline{z_1} = -3i \\ z_3 = 2-3i \rightarrow z_4 = \overline{z_3} = 2+3i \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} P(z) = (z-3i)\cdot(z+3i)\cdot(z-(2-3i))\cdot(z-(2+3i)) \\ P(z) = z^4 - 4z^3 + 22z^2 - 36z + 117 \end{array}$$



17. Dado el número complejo $z = 1 - i$, escribirlo en forma trigonométrica y exponencial.

- Un número complejo en forma binómica consta de un módulo R, y de un argumento φ:

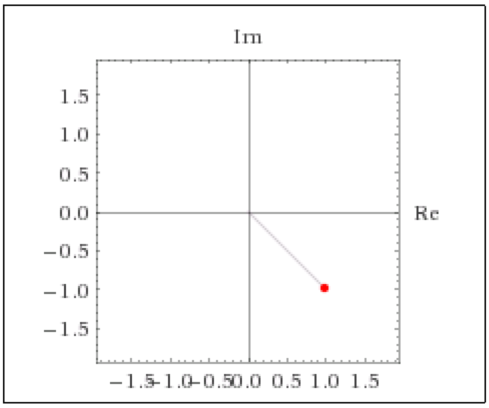
$$z = a + bi \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases} \rightarrow z = R_\varphi$$

- Para escribir un número en forma exponencial:

$$z = R \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

- Por lo tanto:

$$z = 1 - i \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{-1}{+1}\right) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z = \sqrt{2}_{\frac{-\pi}{4}} \rightarrow z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{-\pi}{4} i}$$



18. Determinar el módulo, el argumento, la forma exponencial y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

(a) $2+2i$; (g) $\sqrt{3}+i$.
(b) $-2+2i$;

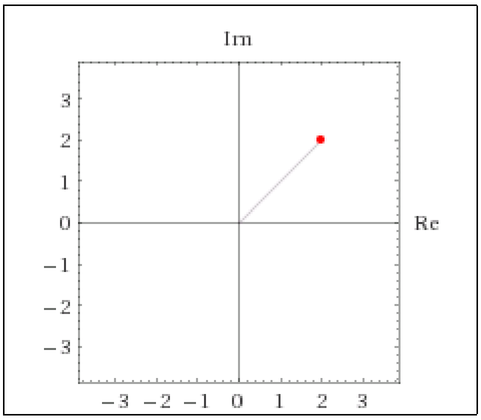
- Un número complejo en forma binómica consta de un módulo R, y de un argumento φ:

$$z = a+bi \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases} \rightarrow z = R_{\varphi}$$

- Para escribir un número en forma exponencial:

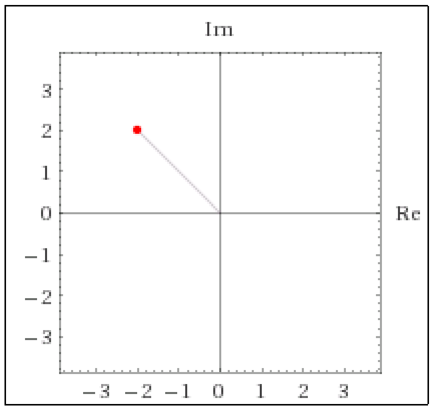
$$z = R \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

- Para el apartado a):



$$z = 2+2i \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{2}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z = 2\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \rightarrow z = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$$

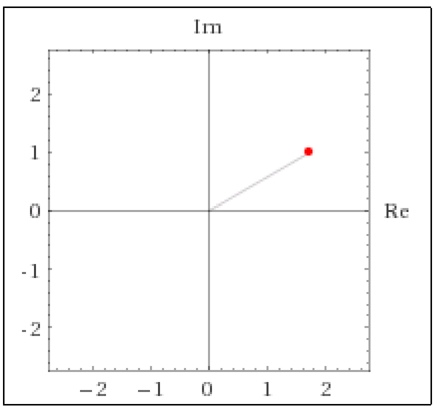
- Para el apartado b):



$$z = -2+2i \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{2}{-2}\right) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}} \rightarrow z = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

- Para el apartado g):

$$z = \sqrt{3}+i \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2 \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow z = 2_{\frac{\pi}{6}} \rightarrow z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$$



19. La suma de dos números complejos z_1 y z_2 es $2 + 4i$. La parte real de z_2 es -1 y el cociente z_1/z_2 es imaginario puro. Hallarlos.

- En primer lugar se supone que $z_1 = a + b \cdot i$ y que $z_2 = c + d \cdot i$. Se van planteando las condiciones del problema con la finalidad de formar un sistema de ecuaciones con ellas y despejar las incógnitas

- La suma de $z_1 + z_2$:

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i = 2 + 4i \rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ b + d = 4 \end{cases}$$

- La parte real de $z_2 = -1$:

$$z_2 = c + d \cdot i = -1 + d \cdot i \rightarrow \{ c = -1$$

- El cociente z_1/z_2 es imaginario puro:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{(a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)}{(c + d \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)} = \frac{ac - ad \cdot i + bc \cdot i - bd \cdot i^2}{c^2 - d^2 \cdot i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + (bc - ad) \cdot i - bd \cdot (-1)}{c^2 - d^2 \cdot (-1)} = \frac{ac + (bc - ad) \cdot i + bd}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \rightarrow \text{Imaginario puro} \rightarrow \{ \text{ac} + \text{bd} = 0$$

- Las condiciones a cumplir son:

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ b + d = 4 \\ c = -1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 1 = 2 \\ b + d = 4 \\ -a + bd = 0 \\ c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1 \\ \left. \begin{matrix} b = 4 - d \\ bd = 3 \end{matrix} \right\} \rightarrow d = \dfrac{3}{b} \rightarrow \begin{matrix} b = 4 - \dfrac{3}{b} \\ b^2 = 4b - 3 \\ b^2 - 4b + 3 = 0 \end{matrix} \\ \end{cases}$$

- Se resuelve la ecuación:

$$b = \frac{+4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} b_1 = \dfrac{+4 + 2}{2} = +3 \\ b_2 = \dfrac{+4 - 2}{2} = +13 \end{cases}$$

- Por lo tanto, las soluciones son:

$$b = +3 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 3 + 3i \\ z_2 = -1 + 1i \end{cases} \quad b = 1 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 3 + 1i \\ z_2 = -1 + 3i \end{cases}$$

22. Resolver las ecuaciones

(b) $z^4+1=0$; (d) $z^6-1=0$.

- Apartado b):
- Se plantea la ecuación y se resuelve. Tener en cuenta que una raíz enésima tienen tantas soluciones como el índice de la raíz:

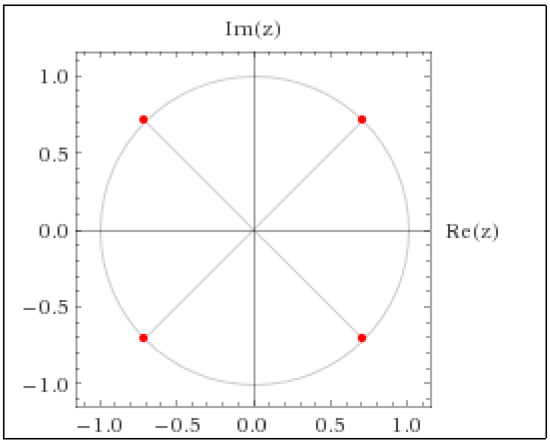
$$z^4+1=0 \rightarrow z^4=-1 \rightarrow z=\sqrt[4]{-1}$$

- Para calcular las cuatro soluciones el nº se pasa a forma polar:

$$-1+0i \rightarrow \begin{cases} R=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1 \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)=arctg\left(\dfrac{0}{-1}\right)=180^o \end{cases} \rightarrow 1_{180^o}$$

- Las raíces son:

$$\sqrt[4]{1_{180^o}}=\left(\sqrt[4]{1}\right)_\theta \rightarrow \theta = \begin{cases} \theta_1=\dfrac{180^o}{4}=45^o \rightarrow z_1=1_{45^o} \\ \theta_2=\theta_1+\dfrac{360^o}{4} \rightarrow z_2=1_{135^o} \\ \theta_3=\theta_2+\dfrac{360^o}{4} \rightarrow z_3=1_{225^o} \\ \theta_4=\theta_3+\dfrac{360^o}{4} \rightarrow z_4=1_{315^o} \end{cases}$$



- Apartado d):
- Se plantea la ecuación y se resuelve. Tener en cuenta que una raíz enésima tienen tantas soluciones como el índice de la raíz:

$$z^6-1=0 \rightarrow z^6=1 \rightarrow z=\sqrt[6]{1}$$

- Para calcular las seis soluciones el nº se pasa a forma polar:

$$1+0i \rightarrow \begin{cases} R=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1 \\ \varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)=arctg\left(\dfrac{0}{1}\right)=0^o \end{cases} \rightarrow 1_{0^o}$$

- Las raíces son:

$$\sqrt[6]{1_{0^\circ}} = \left(\sqrt[6]{1}\right)_\theta \rightarrow \theta = \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{0^\circ}{6} = 0^\circ \rightarrow z_1 = 1_{0^\circ} \\ \theta_2 = \theta_1 + \dfrac{360^\circ}{6} \rightarrow z_2 = 1_{60^\circ} \\ \theta_3 = \theta_2 + \dfrac{360^\circ}{6} \rightarrow z_3 = 1_{120^\circ} \\ \theta_4 = \theta_3 + \dfrac{360^\circ}{6} \rightarrow z_4 = 1_{180^\circ} \\ \theta_5 = \theta_4 + \dfrac{360^\circ}{6} \rightarrow z_5 = 1_{240^\circ} \\ \theta_6 = \theta_5 + \dfrac{360^\circ}{6} \rightarrow z_6 = 1_{300^\circ} \end{cases}$$