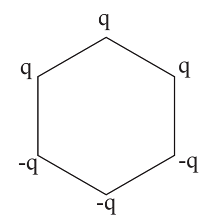
Campo eléctrico y potencial

1.- Cuatro cargas puntuales de igual magnitud, $3 \times 10^{-6}\ C$, están colocadas en las esquinas de un cuadrado de 40 cm de lado. Dos de ellas, diagonalmente opuestas, son positivas y las otras dos negativas. Hallar la fuerza sobre cada carga negativa.

Solución: $F = 0.45\ N$, dirigida hacia el centro del cuadrado sobre la diagonal que une las cargas negativas.

2.- Tomemos la configuración de cargas dada en el problema anterior. Determinar el campo eléctrico en: a) el centro del cuadrado; b) en cada una de las cuatro esquinas.

Solución: a) Cero; b) $E \approx 1.54 \times 10^5\ N/C$, dirigido sobre la diagonal del cuadrado y con sentido hacia afuera (dentro) en los vértices con carga negativa (positiva).



3.- Calcular el campo eléctrico creado en el centro del hexágono regular de la figura. Lado del hexágono 10 cm; $q = 10^{-5}\ C$.

Solución: $E = 36 \times 10^6\ N/C$ y está dirigido verticalmente hacia abajo.

4.- Dos esferas muy pequeñas de 10 g de masa y cargadas positivamente con la misma carga, se encuentran los extremos de dos hilos de seda de 1 m de longitud y suspendidas del mismo punto. Si el ángulo que forman con la vertical es de 30^o en la posición de equilibrio, se pide: a) Calcular el valor de la tensión de los hilos en la posición de equilibrio. b) Determinar la carga Q de cada esfera. c) Si se desea que, al desaparecer una carga, la otra permanezca en la posición de equilibrio, calcular el campo eléctrico que es necesario aplicar.

Solución: a) $T = 0.11\ N$, b) $Q = 2.5 \times 10^{-6}\ C$, c) $E = 22000\ N/C$.

5.- Dos cargas puntuales positivas de igual magnitud, $q_1 = q_2 = q$, están localizadas en $x_{1,2} = \pm d$. Una tercera carga $q_3 = Q$ de masa m está situada en el origen de coordenadas y restringida a moverse a largo del eje x. Si la carga se desplaza ligeramente del origen y se deja libre, calcular el periodo τ de la oscilacin de la carga q_3.

Solución: $\tau = \pi\sqrt{\frac{md^3}{KqQ}}$.

6.- Sea un segmento recto de longitud L y carga total Q uniformemente distribuida ($\lambda = Q/L \equiv constante$). a) Calcular el campo eléctrico $\mathbf{E}$ creado por esta distribución en los puntos R del plano perpendicular al segmento que atraviesa su centro; b) demostrar que cuando $R >> L$ la expresión obtenida en la parte a) se aproxima a la de una carga puntual Q colocada en el centro del segmento; c) obtener la expresión del campo eléctrico $\mathbf{E}$ cuando se tiene una carga lineal infinita o para puntos R muy cercanos a la distribución ($R << L$); d) hacer una representación gráfica de las anteriores expresiones y estudiar su validez. Usar *Mathematica* o *Sage* para efectuar las integrales y las representaciones gráficas.

Solución: a) $\mathbf{E} = kQ/R(R^2 + L^2/4)^{1/2}\ \widehat{\mathbf{k}}$

7.- Calcular la fuerza que ejerce una varilla de longitud L, uniformemente cargada con una carga total Q, sobre una partícula de carga q situada en la misma línea de la varilla y a una distancia x de su centro. Hacer una representación gráfica de la expresión de la fuerza. Usar *Mathematica* o *Sage* para efectuar las integrales y la representació gráfica.

Solución: $\mathbf{F} = 4kQq/(4x^2 - L^2)\ \widehat{\mathbf{i}}$.

8.- Un conductor circular (anillo) de radio R está uniformemente cargado con una carga total Q. a) Calcular el campo eléctrico $\mathbf{E}$ creado por esta distribución en los puntos z del eje perpendicular al anillo que atraviesa su centro; b) demostrar que cuando $R << z$ la expresión obtenida en la parte a) se aproxima a la de una carga puntual Q colocada en el centro del anillo; c) hacer una representación gráfica de las anteriores expresiones y estudiar su validez. Usar *Mathematica* o *Sage* para efectuar las integrales y las representaciones gráficas.

Solución: a) $\mathbf{E} = kQz/(R^2 + z^2)^{3/2}\,\widehat{\mathbf{k}}$

9.- Sea una lámina muy grande (podemos considerarla un plano infinito) uniformemente cargada con una carga por unidad de superficie constante σ. a) Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio; b) hacer una representación gráfica del campo eléctrico.

Solución: a) El módulo del campo viene dado por $E = \sigma/2\epsilon_o$.

10.- Sea una lámina muy grande (podemos considerarla un plano infinito) de grosor a uniformemente cargada con una carga por unidad de volumen constante ρ. a) Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio; b) hacer una representación gráfica del campo eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) Siendo z un eje perpendicular a la lámina, el módulo del campo viene dado por: $E = a\rho/2\epsilon_o$ para $z \geq a/2$, $E = -a\rho/2\epsilon_o$ para $z \leq -a/2$ y $E = z\rho/\epsilon_o$ para $-a/2 \leq z \leq a/2$.

11.- a) Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por una corteza esférica de radio R y carga total Q; b) hacer una representación gráfica del campo eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) El módulo del campo viene dado por: $E = Q/4\pi\epsilon_o r^2$ para $r \geq R$, $E = 0$ para $r < R$.

12.- Hallar el campo eléctrico en cualquier punto del espacio creado por una corteza cilíndrica de radio R infinitamente larga y cuya densidad superficial de carga es σ constante. Hacer una representación gráfica del campo eléctrico usando *Mathematica* o *Sage*.

Solución: a) El módulo del campo viene dado por: $E = \sigma R/\epsilon_o r$ para $r \geq R$, $E = 0$ para $r < R$.

13.- Determinar el campo eléctrico (a) fuera y (b) dentro creado por una esfera sólida de radio R y carga total Q distribuida uniformemente por toda la esfera con densidad volúmica de carga $\rho = Q/v$, siendo $v = 4\pi R^3/3$ el volumen de la esfera; c) hacer una representación gráfica del campo eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) El módulo del campo fuera viene dado por: $E = Q/4\pi\epsilon_o r^2$; b) El módulo del campo dentro viene dado por: $E = Q\ r/4\pi\epsilon_o R^3$.

14.- Determinar el campo eléctrico (a) fuera y (b) dentro creado por un cilindro sólido de radio R infinitamente largo y con carga distribuida uniformemente con densidad volúmica de carga ρ; c) hacer una representación gráfica del campo eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) El módulo del campo fuera viene dado por: $E = \rho R^2/2\epsilon_o r$; b) El módulo del campo dentro viene dado por: $E = \rho r/2\epsilon_o$.

15.- Determinar el campo eléctrico creado por una carga lineal infinitamente larga de densidad lineal de carga uniforme λ; b) hacer una representación gráfica del campo eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) Siendo r la distancia a la distribución, el módulo del campo viene dado por: $E = \lambda/2\pi\epsilon_o r$.

16.- Tomemos la configuración de cargas dada en el problema 1. Determinar el potencial eléctrico V en: a) el centro del cuadrado; b) en cada una de las cuatro esquinas.

Solución: a) Cero; b) $V \approx 87270\ V$, en los vértices con carga negativa y $V \approx -87270\ V$ en los vértices con carga positiva.

17.- Un conductor circular (anillo) de radio R está uniformemente cargado con una carga total Q. a) Calcular el potencial eléctrico V creado por esta distribución en los puntos z del eje perpendicular al anillo que atraviesa su centro; b) demostrar que cuando $R << z$ la expresión obtenida en la parte a) se aproxima a la de una carga puntual Q colocada en el centro del anillo; c) hacer una representación gráfica de las anteriores expresiones y estudiar su validez. Usar *Mathematica* o *Sage* para las representaciones gráficas.

Solución: a) $V = kQ/(R^2 + z^2)^{1/2}$

18.- Sea un plano infinito uniformemente cargado con una carga por unidad de superficie constante σ. a) Hallar el potencial eléctrico en cualquier punto z del espacio a una distancia z del plano; b) hacer una representación gráfica del potencial eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) $V(z) = V_o - \sigma|z|/2\epsilon_o$, donde V_o es una constante arbitraria en $z = 0$.

19.- a) Hallar el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio creado por una corteza esférica de radio R y carga total Q; b) hacer una representación gráfica del potencial eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) $V(r) = kQ/r$ para $r > R$, $V(r) = kQ/R$ para $r < R$.

20.- Determinar el potencial eléctrico (a) fuera y (b) dentro creado por una esfera sólida de radio R y carga total Q distribuida uniformemente por toda la esfera con densidad volúmica de carga $\rho = Q/v$, siendo $v = 4\pi R^3/3$ el volumen de la esfera; c) hacer una representación gráfica del potencial eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) $V(r) = kQ/r$ para $r > R$; b) $V(r) = kQ(3R^2 - r^2)/2R^3$ para $r < R$.

21.- Sea un conductor esférico hueco descargado de radio interno a y radio externo b. En el centro del conductor esférico existe una carga puntual $Q > 0$. a) Determinar el potencial eléctrico $V(r)$ en cualquier punto; b) hacer una representación gráfica del potencial eléctrico. Usar *Mathematica* o *Sage* para la representación gráfica.

Solución: a) $V(r) = kQ/r$ para $r \geq b$; b) $V(r) = kQ/b$ para $a \leq r \leq b$ y $V(r) = kQ/r - kQ/a + kQ/b$ para $r \leq a$.

22.- Dos conductores esféricos A y B, de 10 cm de radio cada uno, están colocados de modo que sus centros distan 1 m. Si se da a la esfera A una carga de $3 \times 10^{-8}\ C$ y a B otra de $6 \times 10^{-8}\ C$, calcular el potencial eléctrico de cada una.

Solución: $V_A = 3300\ voltios$, $V_B = 5700\ voltios$.

23.- Supongamos que pasa carga eléctrica desde una esfera conductora A de radio 1 cm, sostenida por un soporte aislador, a otra esfera B de radio 10 cm sostenida de igual modo, efectuándose la conexión mediante un hilo fino en el que se puede despreciar la carga que queda sobre él. Si se da inicialmente a la esfera más pequeña una carga de $10^{-8}\ C$. a) Calcular la carga sobre cada esfera. b) Calcular la densidad superficial de carga de cada esfera. Suponer que ambas esferas se encuentran muy alejadas entre sí.

Solución: a) $Q_A = 9.09 \times 10^{-10}\ C$, $\quad Q_B = 9.1 \times 10^{-9}\ C$, $\quad$ b) $\sigma_A = 7.23 \times 10^{-7}\ C/m^2$, $\sigma_B = 7.24 \times 10^{-8}\ C/m^2$.

24.- Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado de lado L. Cuatro cargas puntuales q iguales se encuentran inicialmente en reposo y separadas entre sí una distancia muy grande. Calcular el trabajo total W necesario para colocar cada una de las cargas en un vértice del cuadrado.

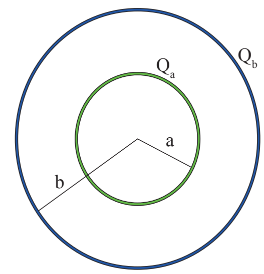
Solución: $W = (4 + \sqrt{2})kq^2/L$

25.- En los vértices de un cuadrado de lado $L = 2 \times 10^{-9}\ m$ se colocan cuatro protones. Otro protón está inicialmente sobre la perpendicular al cuadrado por su centro, a una distancia de $2 \times 10^{-9}\ m$. a) Hallar la velocidad inicial mínima que necesita el protón para llegar al centro del cuadrado. b) Calcular sus aceleraciones inicial y final. c) Describir el movimiento en el caso de que la velocidad inicial sea mayor o menor que la encontrada en (a).

Solución: a) $v_{min} = 18153.2\ m/s$, b) $a_{inicial} = 7.53 \times 10^{16}\ m/s^2$, $a_{final} = 0\ m/s^2$.

Problemas de Examen

26.- Se dispone de dos cortezas esféricas cargadas no conductoras y concéntricas de radios a y b. La carga de cada una de ellas es $Q_a = Q$ y $Q_b = -2\ Q$, respectivamente. Siendo $\widehat{\mathbf{r}}$ el vector unitario según la dirección radial, el campo eléctrico $\mathbf{E} = E\ \widehat{\mathbf{r}}$ creado por las esferas viene dado por:



a) $E = 0$ si $r < a$, $E = \frac{kQ}{r^2}$ si $a < r < b$, $E = \frac{-kQ}{r^2}$ si $r > b$

b) $E = 0$ si $r < a$, $E = \frac{-kQ}{r^2}$ si $a < r < b$, $E = \frac{-kQ}{r^2}$ si $r > b$

c) $E = 0$ si $r < a$, $E = \frac{kQ}{r^2}$ si $a < r < b$, $E = \frac{-2kQ}{r^2}$ si $r > b$

d) $E = 0$ si $r < a$, $E = \frac{-kQ}{r^2}$ si $a < r < b$, $E = \frac{2kQ}{r^2}$ si $r > b$

27.- Una partícula de carga Q está localizada en el punto $x = -a$. Teniendo en cuenta que por el Teorema de Conservación de la Energía, en cualquier instante la suma de sus energías potencial y cinética es constante, determinar la velocidad inicial mínima v que se necesita dar a una partícula de masa m y carga Q para llevarla desde el infinito hasta $x = a$ es:

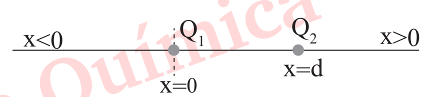
a) $v = \sqrt{\frac{-kQ^2}{ma}}$

b) $v = \sqrt{\frac{kQ^2}{ma}}$

c) $v = \sqrt{\frac{2kQ^2}{ma}}$

d) $v = \sqrt{\frac{-2kQ^2}{ma}}$

28.- Dos cargas puntuales $Q_1 = -Q$ y $Q_2 = 2\ Q$ están situadas sobre el eje x y separadas una distancia $d = \sqrt{2}\ m$, según indica la figura. El campo eléctrico total que crean estas cargas en el eje x es nulo en los puntos:



a) Únicamente en $x = -2 - \sqrt{2}\ m$

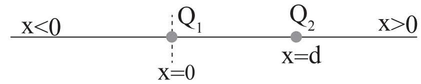
b) En $x = -2 - \sqrt{2}\ m$ y en $x = 2 - \sqrt{2}\ m$

c) Únicamente en $x = 2 - \sqrt{2}\ m$

d) Únicamente en $x = 2 + \sqrt{2}\ m$

e) En ningún punto del eje x el campo eléctrico total puede ser nulo

29.- Dos cargas puntuales $Q_1 = -Q$ y $Q_2 = 2\ Q$ están situadas sobre el eje x y separadas una distancia $d = \sqrt{2}\ m$, según indica la figura. El potencial eléctrico total que crean estas cargas en el eje x es nulo en los puntos:



a) En ningún punto del eje x el potencial eléctrico total puede ser nulo

b) En $x = \sqrt{2}/3\ m$ y en $x = -\sqrt{2}\ m$

c) Únicamente en $x = -\sqrt{2}\ m$

d) Únicamente en $x = 2\sqrt{2}\ m$

30.- Una esfera conductora cargada con carga $q = 200\ \mu C$ tiene radio $a = 1$ cm y está centrada en el origen de coordenadas. Con velocidad $v_o = 2 \times 10^3$ m/s y desde una distancia inicial al centro de la esfera r_o muy grande ($r_o \to \infty$), se lanza hacia el centro de la esfera una carga puntual $q_o = 100\ \mu C$ de masa $m = 1$ g. La distancia mínima r_m que la carga q_o logra acercarse a la esfera es:

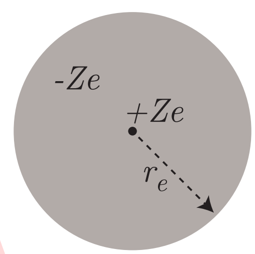
a) $r_m = 10$ cm.

b) La carga q_o choca contra la esfera.

c) $r_m = 31$ cm.

d) $r_m = 9$ cm.

31.- Entre 1907 y 1919, Ernest Rutherford dirigió experimentos que establecieron una moderna visión de los átomos. Siendo e la carga eléctrica elemental positiva, representó un átomo de número atómico Z como una partícula con carga positiva $+Ze$ (el núcleo) en el centro de una distribución esférica uniforme con carga negativa total $-Ze$ y radio r_e (los electrones). Según este modelo, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ que crea esta districubución a una distancia r del centro es radial y su módulo E es:



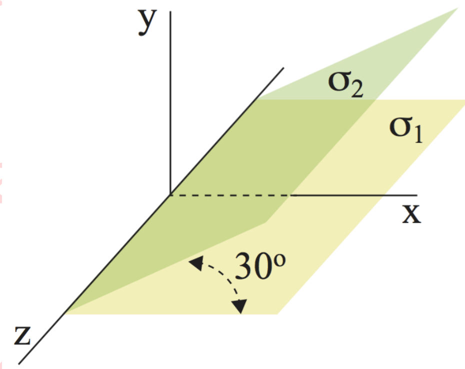
a) $E = 0$ si $r > r_e$, $E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_e^3})$ si $r < r_e$

b) $E = 0$ si $r > r_e$, $E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_e^2})$ si $r < r_e$

c) $E = 0$ si $r > r_e$, $E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}$ si $r < r_e$

d) $E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r-r_e)^2})$ si $r > 0$

32.- Un plano infinito de carga situado en el plano de coordenadas xz tiene una densidad superficial de carga uniforme $\sigma_1 = 65$ pC/m^2. Un segundo plano infinito tiene una densidad superficial de carga uniforme $\sigma_2 = 45$ pC/m^2 corta el plano xz en el eje z formando un ángulo de 30^o con el plano xz. El campo eléctrico $\vec{E}$ en el plano xy en el punto $x = 6$ m, $y = 2$ m es:



a) $\vec{E} = (1.27\ \mathbf{i} + 1.47\ \mathbf{j})$ N/C

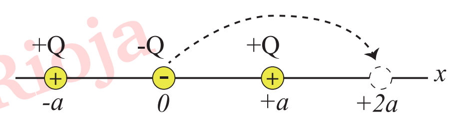
b) $\vec{E} = (2.20\ \mathbf{i} + 2.40\ \mathbf{j})$ N/C

c) $\vec{E} = (1.27\ \mathbf{i} - 1.47\ \mathbf{j})$ N/C

d) $\vec{E} = (2.20\ \mathbf{i} + 4.94\ \mathbf{j})$ N/C

Dato: Permitividad eléctrica $\varepsilon \approx 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.

33.- Tres cargas puntuales están situadas sobre el eje x según indica la figura. El trabajo W que es necesario realizar para desplazar la carga $-Q$ desde el origen hasta el punto $x = 2a$ es:



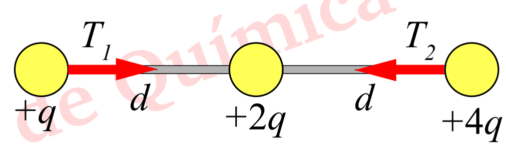
a) $W = \frac{2kQ}{3a}$

b) $W = \frac{2kQ^2}{3a}$

c) $W = -\frac{2kQ^2}{3a}$

d) $W = \frac{2kQ^2}{3a^2}$

34.- Tres cargas, $+q$, $+2q$ y $+4q$, están unidas por cuerdas del modo indicado en la figura. Las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas son:



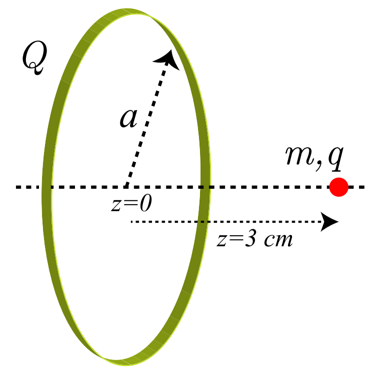
a) $T_1 = 2\dfrac{Kq^2}{d^2}, \quad T_2 = 8\dfrac{Kq^2}{d^2}$

b) $T_1 = \dfrac{Kq^2}{d^2}, \quad T_2 = 7\dfrac{Kq^2}{d^2}$

c) $T_1 = 2\dfrac{Kq^2}{d^2}, \quad T_2 = 2\dfrac{Kq^2}{d^2}$

d) $T_1 = 3\dfrac{Kq^2}{d^2}, \quad T_2 = 9\dfrac{Kq^2}{d^2}$

35.- Un anillo de radio $a = 4$ cm está situado en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El anillo posee una carga uniforme de $Q = 8$ nC. Un partícula de masa $m = 6 \times 10^{-3}$ g y carga $q_o = 5$ nC se situa en el punto $z = 3$ cm del eje del anillo y se deja en libertad. Despreciando los efectos de la gravedad, la velocidad v_f de la carga cuando se encuentre a gran distancia del anillo será:



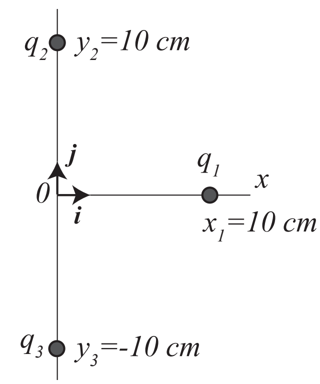
a) $v_f \approx 3.65$ m/s

b) $v_f \approx 0.69$ m/s

c) $v_f \approx 1.55$ m/s

d) $v_f = 2$ m/s

36.- Una carga puntual $q_1 = -1$ μC está situada en el eje x a una distancia $x_1 = 10$ cm del origen de coordenadas. Dos cargas puntuales $q_2 = -1$ μC y $q_3 = 1$ μC se encuentran fijas sobre el eje y en los puntos $y_{2,3} = \pm 10$ cm, respectivamente. La fuerza total $\mathbf{F}$ que ejercen las cargas q_2 y q_3 sobre q_1 es:



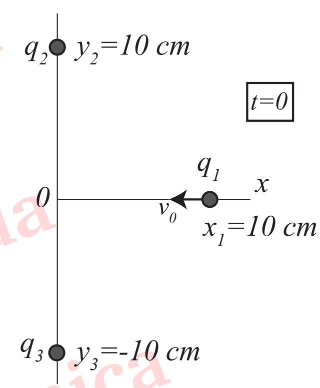
a) $\mathbf{F} \approx -0.64\ \mathbf{j}$ N

b) $\mathbf{F} \approx 0.64\ \mathbf{j}$ N

c) $\mathbf{F} \approx -0.64\ \mathbf{i}$ N

d) $\mathbf{F} \approx 0.64\ \mathbf{i}$ N

37.- En un cierto instante $t = 0$, la carga puntual $q_1 = 1$ nC y masa $m = 1$ g se encuentra a una distancia $x_1 = 10$ cm del origen de coordenadas y tiene una velocidad $v_0 = 2$ cm/s según el dibujo. Dos cargas puntuales iguales $q_2 = q_3 = 1$ nC se encuentran fijas sobre el eje y en los puntos $y_{2,3} = \pm 10$ cm. Teniendo en cuenta que, por el Teorema de Conservación de la Energía, en cualquier instante la suma de las energía potencial y cinética de la carga q_1 es constante, la velocidad v_f de q_1 cuando pasa por el origen de coordenadas es:



a) La carga q_1 nunca alcanza el origen de coordenadas.

b) $v_f \approx 0.017$ m/s.

c) $v_f \approx 0.022$ m/s.

d) $v_f \approx 0.047$ m/s.

Formulario

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}} + cte$$