1. Encuentra ecuaciones implícitas del conjunto

$$(1,0,0,\lambda)+\text{Gen}\{(0,-1,1,-1),(-1,-\lambda,\lambda,-\lambda),(2,0,0,0)\}$$

Se puede aplicar el método visto en clase tal cual

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & x-1 \\ -1 & -\lambda & 0 & y-0 \\ 1 & \lambda & 0 & z-0 \\ -1 & -\lambda & 0 & t-\lambda \end{array}\right] \underset{\substack{F_{23}(1) \\ F_{43}(1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & y+z \\ 1 & \lambda & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t+z-\lambda \end{array}\right] \underset{\substack{\text{ordenar} \\ \text{filas}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & z \\ 0 & -1 & 2 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{y+z} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{t+z-\lambda} \end{array}\right]$$

Los (x,y,z,t) que hacen el sistema compatible son los que cumplen.

$$\boxed{y+z=0 \quad , \quad t+z-\lambda=0}$$

$\therefore$ esas son las ecuaciones implícitas.

② Encuentra justificadamente los valores de λ para los cuales puedes extraer vectores del conjunto C_1 y completarlos hasta una base de $\mathbb{R}^4$ usando vectores de C_2, donde

$$C_1 = \{(1,0,0,\lambda),(0,\lambda,1,\lambda),(0,-\lambda,-1,0)\}$$

$$C_2 = \{(1,\lambda,1,2\lambda),(1,-2\lambda,-2,-\lambda),(\lambda,0,0,-1),(0,1,\lambda,0)\}$$

Lo que nos dice el enunciado (piénsalo) es que encontremos los valores de λ para los cuales $C_1 \cup C_2$ contiene una base de $\mathbb{R}^4$ (es decir, es generador). Usamos el algoritmo visto en clase para extraer bases.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda & -2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 & 2\lambda & -\lambda & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{23}(-\lambda),\ F_{41}(-\lambda)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda & -2\lambda & -1-\lambda^2 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{43}(-\lambda)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1-\lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \underset{\text{reordenar filas}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1-\lambda^2 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ entonces queda
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la base estaría formada por el primer y segundo vector de C_1 junto con el tercero y cuarto de C_2

Si $\lambda = \pm 1$ entonces queda
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
y no podemos encontrar base.

Si $\lambda \neq 0, \pm 1$ podemos escoger los tres primeros de C_1 y el último de C_2.

③ Encuentra los valores de λ que hacen cierta la igualdad

$$\text{Gen}\{(1,1,-1),(4,-2,2)\} = \text{Gen}\{(0,\lambda,-1),(1,0,0)\}.$$

Existen muchas formas de resolver el ejercicio. Sea $S := \text{Gen}\{(1,1,-1),(4,-2,2)\}$
Para ser iguales es necesario que. $(0,\lambda,-1)$, $(1,0,0)$ pertenezcan a S.
Comprobamos las condiciones para que esto ocurra.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{23}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{31}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

Esto nos dice que $(1,0,0) \in S$ pero que $(0,\lambda,-1) \in S \iff \lambda = 1$.

Por tanto, el único valor posible de λ que podría hacer cierta la igualdad del enunciado es $\lambda = 1$.

Veamos que realmente $\lambda=1$ sí hace cierta la igualdad. Como

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2 = \text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\dim \text{Gen}\{(1,1,-1),(4,-2,2)\} = 2 = \dim \text{Gen}\{(0,1,-1),(1,0,0)\}$$

Puesto que hemos visto que $\text{Gen}\{(0,1,-1),(1,0,0)\} \subseteq \text{Gen}\{(1,1,-1),(4,-2,2)\}$ entonces, al tener la misma dimensión, son iguales. Así

$$\boxed{\text{solución: } \lambda = 1}$$

Otra forma: escalonar hasta dejar una matriz reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\lambda \end{bmatrix} & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dos conjuntos de vectores definen la misma clausura si y solo si las dos matrices cuyas filas son esos vectores son equivalentes por filas. Esto equivale a que la forma escalonada reducida de ambas matrices sea la misma.

La matriz en rojo es una de las dos formas escalonadas reducidas, mientras que la azul es la otra. La matriz roja coincide con la azul $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lambda = 1.}$

(4) Demuestra que si A es una matriz de orden $n\times n$ entonces $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$!

Recuerda que $A\cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$.

Si $\det(A)=0$ entonces
$$\begin{cases} A=0 \Rightarrow \operatorname{adj}(A)=0 \Rightarrow \det(\operatorname{adj}(A))=0=\det(A)^{n-1} \checkmark \\ \text{ó} \\ A\neq 0 \underset{A\cdot \operatorname{adj}(A)=0}{\Longrightarrow} \operatorname{adj}(A) \text{ no es invertible} \Rightarrow \det(\operatorname{adj}(A))=0 \Rightarrow \\ \det(\operatorname{adj}(A))=0=\det(A)^{n-1} \checkmark \end{cases}$$

Si $\det(A)\neq 0$ entonces, tomando determinantes,

$$\det\left(A\cdot \operatorname{adj}(A)\right) = \begin{cases} \det(\det(A) I_n) = \det(A)^n \\ \text{y} \\ \det(A)\cdot\det(\operatorname{adj}(A)) \end{cases} \underset{\det(A)\neq 0}{\Rightarrow} \det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1} \checkmark$$

5. Estudia los valores de λ que hacen compatible determinado el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda-1)x + (\lambda-2)y - (2\lambda+2)z = -2 \\ (-2\lambda+2)x + (-\lambda+2)y = -3\lambda+1 \\ (\lambda-2)y - (2\lambda+2)z = -\lambda-1 \end{array}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & \lambda-2 & -(2\lambda+2) & -2 \\ -2\lambda+2 & -\lambda+2 & 0 & -3\lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & -(2\lambda+2) & -\lambda-1 \end{array}\right] \underset{F_{13}(-1),\, F_{23}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ -2\lambda+2 & 0 & -(2\lambda+2) & -4\lambda \\ 0 & \lambda-2 & -(2\lambda+2) & -\lambda-1 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_{21}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -(2\lambda+2) & -(2\lambda+2) \\ 0 & \lambda-2 & -(2\lambda+2) & -\lambda-1 \end{array}\right] \underset{F_{32}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -(2\lambda+2) & -(2\lambda+2) \\ 0 & \lambda-2 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -(2\lambda+2) & -(2\lambda+2) \end{array}\right] \therefore$$

Si $\lambda \in \{1,2,-1\}$ el sistema no será compatible determinado (de hecho, para $\lambda=\pm 1$ es compatible indeterminado, y para $\lambda=2$ es incompatible. Si $\lambda \notin \{1,2,-1\}$ el sistema es compatible determinado ya que se tendrían 3 pivotes.

$$\boxed{\text{Solución } \lambda \notin \{1,2,-1\}.}$$

6. Encuentra la relación de recurrencia para calcular el determinante D_n, en términos de D_{n-1} y D_{n-2}, de la matriz de orden $n\times n$.

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

desarrollar por 1ª fila

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n} \overset{\downarrow}{=}$$

$$2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} - \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1}$$

desarrollar 2º determinante por 1ª fila.

$$\overset{\downarrow}{=} 2D_{n-1} - \lambda(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2} = 2D_{n-1} + \lambda D_{n-2}.$$

$$\therefore \boxed{D_n = 2D_{n-1} + \lambda D_{n-2}.}$$

Hacemos alguna comprobación

$$D_1 = |2| = 2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+\lambda$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8+2\lambda+2\lambda = \underline{8+4\lambda} = 2(4+\lambda) + \lambda(2) = 2D_2 + \lambda D_1 \checkmark$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda & 2\lambda \\ 0 & -1 & 2 & \lambda+4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda+4 & 4\lambda \\ -1 & 2 & 2\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 4\lambda \\ -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2+16+12\lambda = 2(8+4\lambda)+\lambda(4+\lambda)$$

$$= 2D_3 + \lambda D_2 \checkmark$$

(7) Demuestra, sin desarrollar el determinante, que.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

Basta observar que. $\operatorname{sen}(\alpha+\delta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\delta) + \operatorname{sen}(\delta)\cos(\alpha)$. . $\therefore$ si a la tercera columna le restamos la 1ª multiplicada por $\cos(\delta)$ y la segunda multiplicada por $\operatorname{sen}(\delta)$ entonces la nueva tercera columna sería nula $\therefore$ el determinante es 0.