AUTO-EVALUACÓN DE LÓGICA (1º-GM/GII)

Semana 35, 2020

(3 puntos) Señalar e indicar la única respuesta correcta de las tres posibles (a), (b) y (c) de cada cuestión del siguiente test en el cuadro correspondiente de la tabla de respuestas.

1. La cadena de símbolos $(p \vee q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q)$ formada a partir del alfabeto $\mathcal{A} = \{p, q\}$

   (a) Es una proposición bien formulada

   (b) No es una proposición bien formulada

   (c) No se puede saber

   Solución: (b)

2. Sabiendo que $\bar{v}((p \rightarrow q) \rightarrow p) = 0$. ¿Qué puede asegurarse de $v(p)$?

   (a) $v(p) = 1$

   (b) $v(p) = 0$

   (c) $v(p)$ puede valer 0 ó 1

   Solución: (b)

3. La proposición $p \wedge \neg p$ es una

   (a) tautología

   (b) contradicción

   (c) contingencia

   Solución: (b)

4. La proposición $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es una

   (a) contradicción

   (b) tautología

   (c) contingencia

   Solución: (b)

5. La proposición $(q \rightarrow r) \rightarrow \neg(q \vee r)$ es una

   (a) contradicción

   (b) tautología

   (c) contingencia

   Solución: (c)

6. Una forma coclausal de la proposición $\neg((p \to q) \to r)$ es

   (a) $(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$

   (b) $(\neg q \vee q) \wedge \neg r$

   (c) $(p \wedge \neg q) \vee r$

   Solución: (a)

7. Sea A una álgebra de Boole. Entonces,

   (a) Existe $x \in A$ tal que $0 \neq x \neq 1$

   (b) A puede ser vacía

   (c) A puede tener infinitos elementos

   Solución: (c)

8. Sea A un álgebra de Boole y sean $x, y \in A$. Una de las propiedades de absorción asegura que:

   (a) $x \vee (x \wedge y) = y$

   (b) $x \vee (x \wedge y) = x$

   (c) $x \wedge (x \vee y) = (x \wedge x) \vee (x \wedge y)$

   Solución: (b)

9. Sea A un álgebra de Boole y sea $x \in A$, $x \neq 1$, entonces se cumple:

   (a) $x \wedge \neg x = 1$

   (b) $x \wedge \neg x = 0$

   (c) $x \wedge \neg x = \neg(x \wedge x)$

   Solución: (b)

10. Sea A un álgebra de Boole y sean $x, y \in A$, tales que $0 \neq x \neq 1$, $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$, entonces se cumple:

    (a) $y = 0$

    (b) $y = 1$

    (c) $y = \neg x$

    Solución: (c)

11. Sea A un álgebra de Boole libre. Entonces se cumple:

    (a) El cardinal de A siempre es de la forma $2^{(2^n)}$

    (b) El cardinal de A siempre es infinito

    (c) Si el cardinal de A es finito, entonces existe un entero no negativo n tal que el cardinal de A es igual a $2^{(2^n)}$

    Solución: (c)

12. Sea A un álgebra de Boole. Entonces se cumple:

    (a) A es siempre una álgebra de Boole libre

    (b) El cardinal de A siempre es infinito

    (c) No se verifican las afirmaciones anteriores

    Solución: (c)

13. Sea P una proposición. Entonces,

    (a) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $Q \models P$

    (b) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $P \models Q$

    (c) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $\{P, \neg Q\}$ es contradictorio.

    Solución: (a)

14. Sea P una tautología y Γ un conjunto de proposiciones. Entonces,

    (a) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \cup \{P\}$ es contradictorio

    (b) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es contradictorio

    (c) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \models P$

    Solución: (a)

15. Sean Γ y Σ dos conjuntos de proposiciones y P, Q dos proposiciones. Entonces, si $\Gamma \models P$ y $\Sigma \models Q$ se sigue que

    (a) $\Gamma \cup \Sigma \models P \vee Q$

    (b) $\Gamma \cap \Sigma \models P \wedge Q$

    (c) $(\Gamma \cap \Sigma) \cup \{\neg P \vee \neg Q\}$ es contradictorio

    Solución: (a)

16. El esquema de inferencia: $\dfrac{P}{\neg\neg P}$

(a) es una regla de inferencia

(b) es una regla primitiva del sistema deductivo de Fitch

(c) es un procedimiento primitivo del sistema deductivo de Fitch

Solución: (a)

17. El esquema de inferencia: $\dfrac{P \wedge Q}{P}(\wedge E)$

(a) es una regla primitiva del sistema deductivo de Gentzen pero no del de Fitch

(b) es una regla primitiva del sistema deductivo de Fitch pero no del de Gentzen

(c) es una regla primitiva del sistema deductivo de Gentzen y también del de Fitch

Solución: (c)

18. En una deducción natural de Fitch se han aplicado reglas primitivas y el procedimiento de eliminación de una disyunción (regla de los casos) pero no se han aplicado los demás procedimientos. Entonces,

(a) se han introducido un número par de supuestos

(b) se han introducido un número impar de supuestos

(c) es posible que el número de supuestos haya sido nulo

Solución: (a)

19. El sistema axiomático de Lukasiewicz para el cálculo de proposiciones consta de de los axiomas siguientes:

(L1) $P \to (Q \to P)$

(L2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

(L3) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

Entonces se cumple:

(a) sobra el L3

(b) falta el axioma L4

(c) efectivamente esos son los axiomas

Solución: (c)

20. El una deducción mediante el sistema de Lukasiewicz en la que no se utilicen reglas derivadas, ademas de los axiomas se puede aplicar:

    (a) Modus ponens

    (b) Modus tollens

    (c) La regla de resolución

    Solución: (a)

    Consideremos el conjunto de variables $\{x, y\}$, de constantes $\{a\}$ y de funciones $\{f, g\}$, con aridades $\mathrm{ar}(f) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = 2$.

21. La expresión $g(g(f(x), a), f(y))$ es

    (a) un término

    (b) una fórmula atómica

    (c) una fórmula proposicional

    Solución: (a)

22. Consideremos el predicado A de aridad 1. La expresión $A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

    (a) un término

    (b) una fórmula atómica

    (c) una fórmula proposicional no atómica

    Solución: (b)

23. La expresión $\exists x \exists y A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

    (a) una fórmula que no es proposicional

    (b) una fórmula atómica

    (c) una fórmula proposicional no atómica

    Solución: (a)

24. Si tomamos como dominio de una interpretación I los números enteros, y tomamos $\bar{a} = 0$, $\bar{f}(z) = -z$, $\bar{g}(z, z') = z + z'$. Para la valoración $v(x) = 1$, $v(y) = -1$, se tiene que

    (a) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y))) = -2$

    (b) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y))) = 0$

    (c) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y)))$ es distinto de los anteriores valores

    Solución: (b)

25. Si tomamos como dominio de una interpretación I los números enteros, $\bar{a} = 0$, $\bar{f}(z) = -z$, $\bar{g}(z, z') = z + z'$ y $\bar{A} = \{z \in \mathbb{Z} | \exists u \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = u + u\}$. Para la valoración $v(x) = 0$, $v(y) = 1$, se tiene que

(a) $(I, v) \models A(g(g(f(x), a), f(y)))$

(b) $I \models A(g(g(f(x), a), f(y)))$

(c) $I \models \exists x \exists y A(g(g(f(x), a), f(y)))$

Solución: (c)

26. La fórmula $F = A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

    (a) una ley lógica

    (b) Para toda interpretación y valoración (I, v), se tiene que $(I, v) \not\models F$

    (c) Existe una interpretación y una valoración (I, v) tal que $(I, v) \models F$

    Solución: (c)

27. La fórmula $G = \forall x A(x) \vee \forall x \neg A(x)$ verifica:

    (a) Es una ley lógica

    (b) Para toda interpretación y valoración (I, v), se tiene que $(I, v) \not\models G$

    (c) Existe una interpretación I tal que para toda valoración v, se tiene que $(I, v) \models G$

    Solución: (c)

28. En la fórmula $\exists x R(x, y) \vee \forall y A(y)$ todas las apariciones de la variable y son

    (a) libres

    (b) libres y ligadas

    (c) libres o ligadas

    Solución: (c)

29. Considerar la fórmula $F = \exists y A(x, u, y)$ y el término $t = f(y, u)$. Entonces,

    (a) el término t está libre para la variable x en la fórmula F

    (b) el término t está libre para la variable u en la fórmula F

    (c) el término t no está libre para la variable x en la fórmula F

    Solución: (c)

30. Consideremos las fórmulas $F = \forall x(P(x) \to Q(x))$, $G = \exists x Q(x)$. Entonces se verifica:

    (a) $F \models G$

    (b) $G \models F$

    (c) Ninguna las otras dos opciones

    Solución: (c)

AUTO-EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º-GM/GII)
Semana 35, 2020

Problemas

1.- (**2 puntos**) Considerar la proposición $P = (p \oplus q) \leftrightarrow r$, y el alfabeto $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$.

a) Dar la forma normal conjuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

b) Dar la forma normal disyuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

c) Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga dos modelos, Y tenga dos modelos, $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología.

Una solución:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv ((p \oplus q) \to r) \wedge (r \to (p \oplus q))$

$(p \oplus q) \to r \equiv \neg(p \oplus q) \vee r \equiv (p \leftrightarrow q) \vee r \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee r \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$r \to (p \oplus q) \equiv \neg r \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg r \vee ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Entonces

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto los contramodelos de P son $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los modelos de P son $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,0)\}$ que determinan la forma disyuntiva normal

$P \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de P para $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología; es decir que $X \vee Y \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Para que X, Y tengan dos modelos y $X \wedge Y$ sean una contradicción tengo esencialmente tres soluciones

$X_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r), \quad Y_1 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o

$X_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r), \quad Y_2 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o bien

$X_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r), \quad Y_3 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

2.- (**2 puntos**) Utilizar el método de resolución para probar que el siguiente esquema de inferencia es una regla de inferencia.

$$\begin{array}{l} M(r) \\ \forall x(M(x) \to (M(p(x)) \vee M(m(x)))) \\ \forall x(A(x,p(x)) \wedge A(x,m(x))) \\ \hline \exists x \exists y(A(x,y) \wedge M(y)) \end{array}$$

Una solución:

En primer lugar busquemos las cláusulas asociadas:

(1) $M(r)$ ya es una cláusula.

(2) $\forall x(M(x) \rightarrow (M(p(x)) \vee M(m(x)))) \equiv \forall x(\neg M(x) \vee (M(p(x)) \vee M(m(x)))) \equiv \neg M(x) \vee M(p(x)) \vee M(m(x))$

(3) $\forall x(A(x,p(x)) \wedge A(x,m(x))) \equiv A(x,p(x)) \wedge A(x,m(x))$

Negación del objetivo (O):

$\neg\exists x \exists y(A(x,y) \wedge M(y)) \equiv \forall x \forall y \neg(A(x,y) \wedge M(y)) \equiv \neg A(x,y) \vee \neg M(y)$

Las cláusulas obtenidas van de la fila 1 a la 5. A continuación se ha incluido una resolución.

1. $M(r)$ [cláusula de (1)]
2. $\neg M(x) \vee M(p(x)) \vee M(m(x))$ [cláusula de (2)]
3. $A(x,p(x))$ [cláusula de (3)]
4. $A(x,m(x))$ [cláusula de (3)]
5. $\neg A(x,y) \vee \neg M(y)$ [negación de (O)].
6. $\neg M(p(x))$ [3,5($p(x)|y$)].
7. $\neg M(m(x))$ [4,5($m(x)|y$)].
8. $\neg M(x)$ [2,6-7].
9. $\perp$ [1, 8 ($r|x$)]

Nota: En la resoluciones de este tipo hay que tener cuidado y no sustituir constantes por variables.

3.- (**2 puntos**) Determinar si el siguiente sistema de inferencia es una regla de inferencia y en el caso que sea una regla verificarla por deducción natural mediante el método de Fitch.

$$\begin{array}{c} C \vee A \\ Q \rightarrow \neg P \\ R \rightarrow A \\ A \rightarrow P \\ B \rightarrow Q \\ C \rightarrow R \\ \hline \neg B \end{array}$$

Una solución:

En primer lugar podemos verficar que es una regla por el método inverso.

Supongamos que $\neg B = 0$. Entonces $B = 1$. Ahora si alguna de las premisas: $Q \to \neg P$, $R \to A$, $A \to P$ $B \to Q$ $C \to R$ es falsa ya estaría probado. Si suponemos que todas son verdaderas se concluye que $Q = 1$, $P = 0$, $A = 0$, $C = 0$, $R = 0$. En este caso la primera premisa $C \vee A = 0$ es falsa. Por lo tanto, si la conclusión es falsa, alguna de las premisas también lo es. Por lo que se concluye que es una regla.

Incluimos a continuación una deducción natural mediante el método de Fitch.

Construct a proof for the argument: $C \vee A$, $Q \to \neg P$, $R \to A$, $A \to P$, $B \to Q$, $C \to R$ $\therefore$ $\neg B$

1	$C \vee A$	
2	$Q \to \neg P$	
3	$R \to A$	
4	$A \to P$	
5	$B \to Q$	
6	$C \to R$	
7	$\mid$ B	
8	$\mid$ Q	$\to$E 5, 7
9	$\mid$ $\neg P$	$\to$E 2, 8
10	$\mid \mid$ C	
11	$\mid \mid$ R	$\to$E 6, 10
12	$\mid \mid$ A	$\to$E 3, 11
13	$\mid \mid$ P	$\to$E 4, 12
14	$\mid \mid$ A	
15	$\mid \mid$ P	$\to$E 4, 14
16	$\mid$ P	$\vee$E, 1, 10–13, 14–15
17	$\mid$ $\bot$	$\neg$E 9, 16
18	$\neg B$	$\neg$I 7–17

NEW LINE NEW SUBPROOF

Congratulations! This proof is correct.