Prueba escrita – A: Espacios vectoriales generales y aplicaciones

Fecha: 17 de diciembre de 2018

1. Define, enuncia, demuestra o calcula según se pida y **siempre justificando de forma razonada tus respuestas**:

   (a) (1 pto) Enuncia las propiedades que satisface la operación producto por escalar en espacios vectoriales.

   (b) (1 pto) Completa o tacha lo que no proceda en el siguiente párrafo. (**Son 4 repuestas a dar** y no es necesario justificar. Cada respuesta acertada suma $0,25$ y **cada respuesta fallada resta**$-0,25$. Las siglas LI y LD significan Linealmente Independientes y Linealmente Dependientes.)

   > Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y α, β escalares de $\mathbb{F}$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ es una base de V, la dimensión de V es $(\ldots)$ y $p+1$ vectores de V son (LI/LD). Además, p vectores LI de V (generan/no generan) V y el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1 - v_2\, , \, v_2 - v_3\, , \, \ldots\, , \, v_{p-1} - v_p, \, \alpha v_{p-1} - \beta v_p\}$ es una base de V siempre que los escalares α y β cumplan la relación $(\ldots)$.

   (c) (1,5 ptos) Da la definición de aplicación inyectiva. Prueba que una aplicación lineal es inyectiva si y solamente si su núcleo es $\{\vec{0}\}$.

   (d) (1 pto.) Sea S el conjunto de matrices complejas 2×2 tales que las entradas de cada una de sus filas suman 0. Observa que S es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Calcula una base de S.

2. (2 ptos.) Consideramos el cambio de coordenadas dado por las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +2y & & = x' - 2z \\ x & -y & -z & = y' \\ & 2y & +z & = x + z' \end{array} \right.$$

   Si (x', y', z') representan las coordenadas en la base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ y (x, y, z) las coordenadas en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, expresa los vectores de la base $\mathcal{B}'$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

3. (3,5 ptos.) Sea F el subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ generado por la familia de vectores $\{1+x+\alpha x^2, 1-x^3\}$ y sea $G = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(0)x^3 + p''(1)(1+x^2) = 0\}$.

   (a) Calcula los valores del parámetro α para los que la dimensión del subespacio $F \cap G$ es exactamente 1.

   (b) Define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ de modo que $f(G) = F$, la dimensión del núcleo de f sea 1 y el vector $u = 1 - x + x^3$ esté en el conjunto imagen. Calcula la matriz coordenada de f tomando como bases inicial y final $\mathcal{B} = \{1, x^2, x, x^3\}$. (**Observa:** $f(G)$ es el subespacio generado por las imágenes de una base de G).

Prueba escrita – B: Espacios vectoriales generales y aplicaciones

Fecha: 17 de diciembre de 2018

1. Define, enuncia, demuestra o calcula según se pida y **siempre justificando de forma razonada tus respuestas**:

   (a) (1 pto) Enuncia las propiedades que satisface la operación suma en espacios vectoriales.

   (b) (1 pto) Completa o tacha lo que no proceda en el siguiente párrafo. (**Son 4 repuestas a dar** y no es necesario justificar. Cada respuesta acertada suma $0,25$ y **cada respuesta fallada resta** $-0,25$. Las siglas LI y LD significan Linealmente Independientes y Linealmente Dependientes.)

   > Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y α, β escalares de $\mathbb{F}$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ es una base de V, la dimensión de V es $(\ldots)$ y q vectores de V que generen V son (LI/LD). Además, $q-1$ vectores de V (generan/no generan) V y el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2\,,\ v_2 + v_3\,,\ \ldots\,,\ v_{p-1} + v_p,\ \alpha v_{p-1} + \beta v_p\}$ es una base de V siempre que los escalares α y β cumplan la relación $(\ldots)$.

   (c) (1,5 ptos.) Define núcleo de una aplicación lineal. Prueba que una aplicación lineal es inyectiva si y solamente si su núcleo es $\{\vec{0}\}$.

   (d) (1 pto.) Sea T el conjunto de matrices complejas 2×2 tales que las entradas de cada una de sus columnas suman 0. Observa que T es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Calcula una base de T.

2. (2 ptos.) Consideramos el cambio de coordenadas dado por las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_1 + y_1 = & & +y_2 & -y_3 \\ x_2 + y_2 = & 2y_1 & & +2y_3 \\ x_3 = & 2y_1 & -y_2 & +y_3 \end{array}\right.$$

   Si (x_1, x_2, x_3) representan las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y (y_1, y_2, y_3) las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$, expresa los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_2$.

3. (3,5 ptos.) Sea G el subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ generado por la familia de vectores $\{x^2 + x^3, \beta + x + x^2 - 2x^3\}$ y sea $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1)x^2 + p''(0)x = 0\}$.

   (a) Calcula los valores del parámetro β para los que la dimensión del subespacio $G \cap F$ es exactamente 1.

   (b) Define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ de modo que $f(F) = G$, la dimensión del núcleo de f sea 1 y el vector $u = 1 - x + x^3$ esté en el conjunto imagen. Calcula la matriz coordenada de f tomando como bases inicial y final $\mathcal{B} = \{x, 1, x^3, x^2\}$. (**Observa:** $f(F)$ es el subespacio generado por las imágenes de una base de F).