Prueba escrita – B: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
Fecha: 5 de noviembre de 2018 ORIGINAL

1. Define, enuncia, demuestra, da ejemplo o contraejemplo según se pida y **siempre justificando de forma razonada tus respuestas:**

   (a) (1,5 ptos.) Enuncia las propiedades que definen una aplicación lineal. Pon un ejemplo de una aplicación de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea lineal.

   (b) (2 ptos.) Define combinación lineal. Prueba que, si $\{u, v, w\}$ es una familia de vectores de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la relación $2u - 5v - \frac{3}{2}w = \vec{0}$, el sistema de ecuaciones $AX = v$ donde $A = [u\ w]$ es la matriz de orden $n \times 2$ cuyas columnas son u y w, es un sistema compatible.

   (c) (1,5 ptos.) Responde, nunca (luego es falsa), siempre (luego es verdadera), a veces (luego puede ser verdadera o falsa):

   (c1) Si $n < m$ y $f : \mathbb{R}^n \to R^m$ es lineal, entonces f es suprayectiva.

   (c2) Si $r < p$ y $F = \{v_1, \dots, v_r\}$ es una familia de vectores de $\mathbb{R}^p$, la familia F es libre.

2. (3 ptos.) Para el subespacio $S = \{(y+2z, x+4y+10z, 3x-y+4z, 2x+4z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, se pide

   (a) Calcula las ecuaciones implícitas, esto es, encuentra un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean los vectores de S.

   (b) Calcula un par de bases.

   (c) Comprueba si $v_1 = (0, 1, -1, 3)$ y $v_2 = (2, 7, -5, -2)$ pertenecen a S.

3. (2 ptos.) Sean $c, d \in \mathbb{R}$ y g la aplicación lineal descrita en los argumentos x, y, z como

$$g(x, y, z) = (x - y + 2z, -cx + y - cz - z, c^2x - y + (c^2 + 1)z).$$

   Si Si U_d es el subespacio generado por los vectores $(0, d+2, d^2+2d)$ y $(\frac{1}{2}, 1, 2)$, calcula los valores de c, d para los que U_d está contenido en el conjunto imagen de g.

PRUEBA ESCRITA B - SOLUCIONES

PREGUNTA 1

(a) • Una aplicación $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice lineal si satisface las propiedades:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo par de vectores $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$

2) $f(t\vec{u}) = t f(\vec{u})$ para cualquier escalar $t \in \mathbb{R}$ y cualquier vector $\vec{u}$

• Una aplicación no lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. No lo es porque, si fuera lineal $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) • Un vector $\vec{b}$ se dice combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ si existen escalares $t_1, t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ llamados pesos, de modo que $\vec{b}$ se expresa en la forma: $\vec{b} = t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + t_p \vec{v}_p$

• Reescribimos la ecuación vectorial $2\vec{u} - 5\vec{v} - \frac{3}{2}\vec{w} = \vec{0}$ en la forma equivalente: $\vec{v} = \frac{2}{5}\vec{u} - \frac{3}{10}\vec{w}$. Observemos que, el vector $\vec{v}$ es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$ con pesos $t_1 = \frac{2}{5}$ y $t_2 = -\frac{3}{10}$. La ecuación vectorial la podemos escribir en la forma matricial $\vec{v} = \frac{2}{5}\vec{u} - \frac{3}{10}\vec{w} = [\vec{u}\ \vec{w}]\begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/10 \end{pmatrix}$ y llamando $A = [\vec{u}\ \vec{w}]$ matriz $n \times 2$, tenemos que el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}$ tiene como solución $x = \frac{2}{5}$, $y = -3/10$, luego $AX = \vec{v}$ es un sistema compatible

(c) C1: $\boxed{\text{Nunca}}$ Por definición, la aplicación lineal f es suprayectiva si el conjunto imagen de f, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^m$. Si A es la matriz $m \times n$ canónica de f, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} A$, luego f será suprayectiva si y solamente si $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^m$. Esto equivale a decir que entre las columnas de A dispondremos de m vectores LI, pero el subespacio $\operatorname{Col} A$ está generado por n vectores y, como $n < m$, esto no puede ocurrir nunca.

c2: $\boxed{\text{A veces}}$ Si en la familia hay algún vector que es combinación lineal de otros ó contiene el vector $\vec{0}$, la familia no es libre. Pero como $r < p$ y los vectores $v_1, \dots, v_r$ los tenemos en $\mathbb{R}^p$, la matriz $A = [v_1, \dots, v_p]$ puede tener p pivotes en su forma reducida, lo que indicaría que la familia es libre

PREGUNTA 2 -

El subespacio S está dado en forma paramétrica y, usando las propiedades de suma y producto por escalar de $\mathbb{R}^4$, los elementos de S se pueden escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} y+z \\ x+4y+10z \\ 3x-y+4z \\ 2x+4z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ esto es, los vectores de S

son combinación lineal de la familia $\left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Por tanto, $S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{span}\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$

(a) Como los vectores (x,y,z,t) de S se describen como combinaciones lineales de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, las ecuaciones implícitas de S se obtienen al aplicar reducción gaussiana sobre la matriz $\left(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) = (A|b)$ imponiendo que el sistema que representa sea compatible:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & 10 & y \\ 3 & -1 & 4 & z \\ 2 & 0 & 4 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 4 & z \\ 2 & 0 & 4 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -13 & -26 & z-3y \\ 0 & -8 & -16 & t-2y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & z-3y+13x \\ 0 & 0 & 0 & t-2y+8x \end{array}\right]$$

Un sistema de ecuaciones (mínimas) que describe S es: $\begin{cases} z-3y+13x=0 \\ t-2y+8x=0 \end{cases}$

y S aparece como conjunto de soluciones de este sistema en la forma: $S = \{(x,y,z,t) \mid z-3y+13x=0,\ t-2y+8x=0\}$.

(b) Una base de S estará formada por una familia libre del sistema generador $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. La reducción del apartado (a) nos muestra que la familia $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es LI y que $\vec{w}$ es combinación lineal de ambos vectores: $w = 2u + 2v$. Por tanto $S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\}$

Luego $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es LI y genera S, como primera base $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

Ahora, la dimensión de S es 2 y $S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{span}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = $

$= \text{span}\langle \vec{u}, 2\vec{v} \rangle = \text{Gen}\{\vec{u}, 2\vec{v}\}$ luego $\{\vec{u}, 2\vec{v}\}$ genera S y formada por 2 vectores, esta familia es base de S por el Teorema de la base.

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

• (c) Para comprobar que los vectores v_1 y v_2 están en S', basta con verificar que satisfacen las ecuaciones implícitas que describen S'

$$z - 3y + 13x = 0 \quad (y) \quad t - 2y + 8x = 0 .$$

• $v_1 = (0, 1, -1, 3)$: $\quad 13\cdot 0 - 3\cdot 1 + (-1) = -4 \neq 0$, luego v_1 no está en S' (basta con que no se cumple una de ellas

• $v_2 = (2, 7, -5, -2)$:

$$13\cdot 2 - 3\cdot 7 + (-5) = 0 \quad (y) \quad 8\cdot 2 - 2\cdot 7 + (-2) = 0$$

luego v_2 está en S'.

PREGUNTA 3 -

Observamos que

$$g(x,y,z) = x\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ -(c+1) \\ c^2+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -c & 1 & -(c+1) \\ c^2 & -1 & c^2+1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$ Por tanto

$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, luego $g = T_A$ y A es la matriz canónica de g. Por tanto, el conjunto imagen de g es

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Col} A = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -(c+1) \\ c^2+1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observamos además que $\begin{pmatrix} 2 \\ -(c+1) \\ c^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego podemos eliminar este vector del conjunto generador y tenemos

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

El subespacio U_d estará contenido en el conjunto $\operatorname{Im} f$ si y solamente si los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ d+2 \\ d^2+2d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ están en $\operatorname{Im} g$. Esto equivale a decir que ambos vectores son combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ó equivalentemente, que los sistemas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ d+2 \\ d^2+2d \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

sean compatibles. Aplicamos reducción de Gauss simultánea sobre la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -c & 1 & d+2 \\ -1 & c^2 & 2 & d^2+2d \end{array}\right) \underset{\substack{f_2 \to f_2 + f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1-c & 3/2 & d+2 \\ 0 & c^2-1 & 3/2 & \underbrace{d^2+2d}_{d(d+2)} \end{array}\right) \underset{f_3 \to f_3 + (c+1) f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1-c & 3/2 & d+2 \\ 0 & 0 & 3/2(c+2) & \underbrace{d(d+2) + (d+2)(c+1)}_{(d+2)(d+c+1)} \end{array}\right)$$

• Para $c = 1$ $\quad$ $\operatorname{rg} B = 1$ y $\left(B \left| \begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right.\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{array}\right)$ luego $\operatorname{rg}\left(B \left| \begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right.\right) = 2$,
El sistema es incompatible

• Para $c \neq 1$, $\operatorname{rg} B = 2$ y ambos sistemas serán compatibles si y solamente si $\operatorname{rg}\left(B \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = 2 = \operatorname{rg}\left(B \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ d+2 \\ d^2+2d \end{matrix}\right)$. Esto equivale a que

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(c+2) = 0 \quad 5 \\ (d+2)(d+c+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -2 \text{ y} \\ \text{ó bien } d = -2 \text{ ó bien } d = -c-1 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN: U_d contenido en $\operatorname{Im} g \iff \begin{cases} c = -2 \text{ y } d = 1 \text{ ó bien} \\ c = d = -2 \end{cases}$