Soluciones a los ejercicios del examen del 26 de noviembre (versión 3)

1. Se trata de calcular el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\operatorname{sen}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\,.$$

y estudiar entonces el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

El límite es $1/2$: como $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por la equivalencia del seno

$$\sqrt{n}\,\operatorname{sen}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,.$$

Por tanto $\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1/(2\sqrt{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, es decir $\operatorname{sen}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Por el criterio de paso al límite, el carácter de la serie es el mismo que el de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $\sqrt{n} = n^{1/2}$ y $1/2 < 1$ concluimos que la serie diverge a $+\infty$.

2. Se pregunta sobre la función dada por

$$f(x) = \log(\log x - 1) - 3\log x + 3\,.$$

El dominio de f lo forman los puntos x tales que su logaritmo existe y es mayor que 1 (o sea, tales que existe el logaritmo de $(\log x - 1)$). Es decir, el dominio de f es el intervalo $(e, +\infty)$.

$\displaystyle\lim_{x\to e} f(x) = -\infty$, porque $-3\log x + 3 \to 0$ y $\log(\log x - 1) \to -\infty$.

El límite en $+\infty$ no es tan directo porque $\log(\log x - 1) \to +\infty$ y $3\log x \to +\infty$, luego tenemos una indeterminación $\infty - \infty$. La resolvemos poniendo

$$f(x) = \log(\log x - 1) - 3\log x + 3 = \log\frac{\log x - 1}{x^3} + 3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,$$

ya que como sabemos $\dfrac{\log x - 1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (si no lo sabemos aplicamos L'Hospital).

La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{x(\log x - 1)} - \frac{3}{x} = \frac{4 - 3\log x}{x(\log x - 1)}\,,$$

y como el denominador es positivo el signo de f' es el de $4 - 3\log x$: $f'(x) > 0$ si $\log x < 4/3$, o sea si $x < e^{4/3}$, y $f'(x) < 0$ si $x > e^{4/3}$, siendo $f'(e^{4/3}) = 0$.

Deducimos que f es creciente en $(e, e^{4/3}]$ y es decreciente en $[e^{4/3}, +\infty)$, con lo que alcanza su máximo absoluto en $x = e^{4/3}$.

El valor máximo es $f(e^{4/3}) = \log \frac{1}{3} - 1 = -\log 3 - 1 < 0$, luego f es negativa en todo su dominio y la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones.

Por último buscamos los puntos de inflexión, estudiando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{3(1 - \log x) + (3\log x - 4)\log x}{x^2(\log x - 1)^2} = \frac{3\log^2 x - 7\log x + 3}{x^2(\log x - 1)^2}\,.$$

El signo de $f''(x)$ es el de $3t^2 - 7t + 3$, donde $t = \log x \in (1, +\infty)$. Dicho polinomio se anula en $t = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}$ y en $t = \frac{7}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$, es negativo entre ambos valores y es positivo en el resto. Pero el primero de dichos valores es menor que 1, y entonces resulta que $f''(x) = 0$ si y sólo si $x = e^{\frac{7+\sqrt{13}}{6}}$, que es el único punto de inflexión de f (a su izquierda f es cóncava y a su derecha es convexa).