LÓGICA
ACTIVIDADES EN GRUPO REDUCIDO
SESIONES 5–6

7 de abril de 2020

Índice

QUINTA SESIÓN

1. Resolución con predicados

La resolución con predicados es similar a la resolución con proposiciones, se trata de un método algorítmico para verificar si un conjunto finito Γ de fórmulas es inconsistente. Tomando las premisas y la negación de la conclusión podremos por tanto verificar si un esquema de inferencia es o no una regla de deducción. No obstante, es previsible que el procedimiento sea un poco más complejo dada la complejidad mayor del lenguaje de predicados.

En estas notas de tipo práctico iremos introduciendo esta complejidad gradualmente.

1.1. (I) Fórmulas proposicionales

Empezaremos pues suponiendo que todas las fórmulas de Γ (o bien las premisas y la conclusión de una supuesta regla) son proposicionales, es decir, no contienen cuantificadores. Estas fórmulas las pondremos en forma clausal y obtendremos un conjunto de cláusulas formadas con fórmulas atómicas, a las que aplicaremos la regla de resolución, que es igual a la de proposiciones si se trata de fórmulas proposicionales cerradas (sin variables) pero tiene un importante grado de libertad cuando hay variables:

En las cláusulas con variables pueden efectuarse sustituciones de términos que faciliten la resolución.

Ejemplo 1: Para resolver con las cláusulas $\neg A(x) \vee B(x)$ y $A(a) \vee C(x, a)$, hacemos la sustitución $(a|x)$ en la primera obteniendo $\neg A(a) \vee B(a)$, cláusula que resuelve con la segunda dando $B(a) \vee C(x, a)$. Esta resolución la escribimos de una de estas formas:

$$\text{(RR)} \quad \frac{\begin{array}{c}\neg A(x) \vee B(x) \\ A(a) \vee C(x,a)\end{array}}{B(a) \vee C(x,a)} \qquad\qquad \begin{array}{lll} 1 & \neg A(x) \vee B(x) & \\ 2 & A(a) \vee C(x,a) & \\ 3 & B(a) \vee C(x,a) & (1(a|x), 2) \end{array}$$

Ejemplo 2: Las fórmulas atómicas $C(g(z), z)$ y $\neg C(y, a)$ forman un conjunto inconsistente. En efecto, con la sustitución $(a|z)$ en la primera y la sustitución $(g(a)|y)$ en la segunda se llega a la contradición.

Ejemplo 3: Como resolución de $\neg F(y, x) \vee C(y, x)$ y $F(b, a)$ resulta $C(b, a)$.

Como ejercicio se propone averiguar si la resolución dada a continuación es correcta, indicando en su caso las sustituciones necesarias para efectuar cada paso de resolución:

1	$\neg M(x) \vee I(x)$	5	$I(a)$	$(\dots)$
2	$\neg M(x) \vee \neg I(x) \vee B(x)$	6	$\neg I(a) \vee B(a)$	$(\dots)$
3	$M(a)$	7	$\neg I(a)$	$(\dots)$
4	$\neg B(a)$	8	$\perp$	$(\dots)$

1.2. (II): Fórmulas en forma prenexa

Las fórmulas en *forma prenexa* tienen todos sus cuantificadores al principio de la formula y el radio de acción final es por tanto una fórmula proposicional. Una forma proposicional también se considera que es una forma prenexa (sin cuantificadores). Una forma prenexa se dice clausal si su parte proposicional lo es. Dada una fórmula en forma prenexa se procede a hacerla clausal igual que se hizo con las proposiciones, solo que ahora en vez de manipular con letras se hace con fórmulas atómicas. La resolución se realiza finalmente con formas prenexas clausales.

Para resolver con fórmulas prenexas se procede en primer lugar a

eliminar los cuantificadores.

Distinguiremos varios casos con complejidad creciente:

Caso 1. Solo hay cuantificadores universales. Entonces los cuantificadores se eliminan sin más y se procede a la resolución.

Por ejemplo, en el siguiente esquema de inferencia se elimina el cuantificador universal y resulta un ejemplo de la regla de resolución:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(\neg E(x) \to \neg P(x)) \\ P(a) \\ \hline E(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \neg E(x) \to \neg P(x) \\ P(a) \\ \hline E(a) \end{array}$$

Como segundo ejemplo, verificar si el siguiente silogismo es una regla:

$$\begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(P(x) \to R(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x) \wedge Q(x)) \end{array}$$

En este caso, se obtiene la siguiente resolución:

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg P(x) \vee Q(x) & \\ 2. & \neg P(x) \vee R(x) & \\ 3. & \neg R(x) \vee \neg Q(x) & \\ \hline 4. & \neg P(x) \vee \neg R(x) & (1,3) \\ 5. & \neg P(x) \vee \neg Q(x) & (2,3) \\ 6. & \neg P(x) & (2,4) \end{array}$$

La resolución se ha saturado y en consecuencia el esquema anterior no es una regla.

Caso 2. Cuando los cuantificadores existenciales no acompañan a los universales en una misma fórmula. En este caso se eliminan los cuantificadores $(\exists x)$, $(\exists y)$, $(\exists z)$, etc. realizando en sus radios de acción sustituciones respectivas $(a|x)$, $(b|y)$, $(c|z)$, etc. Siempre se han de sustituir constantes distintas para variables distintas, y cada una de estas constantes tampoco debe coincidir con otras constantes presentes en las fórmulas.

Por ejemplo, si tenemos fórmulas $(\exists x)(\exists y)(A(x) \vee B(y))$, $(\exists x)C(x,b)$, eliminaremos los cuantificadores existenciales con sustituciones evidentes que nos dan $A(a) \vee B(c))$, $C(d,b)$.

Por ejemplo supongamos que hay que verifica la siguiente regla:

$$\begin{array}{l} (\forall x)[(P(x) \vee Q(x)) \to \neg R(x)] \\ (\forall x)(S(x) \to R(x)) \\ \hline (\forall x)[P(x) \to (\neg S(x) \vee T(x))] \end{array}$$

$(\forall x)[(P(x) \vee Q(x)) \to \neg R(x)] \equiv (\forall x)[(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg R(x)] \equiv (\forall x)[(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge (\neg Q(x)) \vee \neg R(x)]$

$(\forall x)(S(x) \to R(x)) \equiv (\forall x)(\neg S(x) \vee R(x))$

$\neg(\forall x)[P(x) \to (\neg S(x) \vee T(x))] \equiv (\exists x)\neg[P(x) \to (\neg S(x) \vee T(x))] \equiv (\exists x)[P(x) \wedge \neg(\neg S(x) \vee T(x))] \equiv (\exists x)[P(x) \wedge (S(x) \wedge \neg T(x))] \equiv_r [P(a) \wedge S(a) \wedge \neg T(a))]$

Por lo tanto tenemos la siguiente resolución:

1.	$\neg P(x) \vee \neg R(x)$	
2.	$\neg Q(x) \vee \neg R(x)$	
3.	$\neg S(x) \vee R(x)$	
4.	$P(a)$	
5.	$S(a)$	
6.	$\neg T(a)$	
7.	$R(a)$	$(3(a\|x),5)$
8.	$\neg P(a)$	$(1(a\|x),7)$
9.	$\perp$	(4,8)

Caso 3. En una misma fórmula los cuantificadores existenciales se presentan acompañados de cuantificadores universales. Entonces:

(i) A cada cuantificador existencial solo le afectan los cuantificadores universales que aparecen a su izquierda.

(ii) Se eliminan un cuantificador $(\exists x)$ que lleva a su izquierda cuantificadores $(\forall y)$, $(\forall z)$, etc. realizando en su radio de acción una sustitución $(f(y,z,\ldots)|x)$, etc. Siempre se han de sustituir funciones distintas para variables distintas, y cada una de estas funciones tampoco debe coincidir con otras presentes en las fórmulas.

(iii) Una vez eliminados los cuantificadores existenciales los cuantificadores universales que queden se eliminan sin más.

Veamos a modo de ejemplo los dos esquemas de inferencia referidos a las fórmulas prenexas de la alternancia de los cuantificadores con un predicado binario:

$$\frac{(\forall x)(\exists y)P(x,y)}{(\exists y)(\forall x)P(x,y)} \qquad\qquad \frac{(\exists y)(\forall x)P(x,y)}{(\forall x)(\exists y)P(x,y)}$$

Las fórmulas para resolución correspondientes a estos esquemas (premisa y negación de la conclusión) son respectivamente:

$$\begin{array}{ll} (\forall x)(\exists y)P(x,y) & \qquad (\exists y)(\forall x)P(x,y) \\ (\forall y)(\exists x)\neg P(x,y) & \qquad (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y) \end{array}$$

Aplicando la eliminación de cuantificadores resulta:

$$\begin{array}{ll} P(x,f(x)) & \qquad P(x,b) \\ \neg P(g(y),y) & \qquad \neg P(a,y) \end{array}$$

Se observa que por resolución de la segunda columna se sigue inmediatamente la contradicción, así que el esquema superior de la derecha es una regla. Por el contrario, el otro esquema no lo es porque a la izquierda nada se puede resolver siendo f, g funciones arbitrarias.

Un ejemplo concreto en el que se ve la no validez del esquema de la izquierda resulta tomando $\mathbb{N}$ como dominio de la interpretación y considerando que $P(x,y)$ es el predicado $x \leq y$. Este modelo satisface la premisa pero no satisface la concluisión. Conviene notar, no obstante, que pueden existir modelos de la premisa que verifiquen la conclusión del esquema.

Para ver que la columna de la izquierda no es un conjunto contradictorio podemos también podemos tomar el siguiente modelo $X = \{0,1\}$; $f\colon X \to X$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$; $g\colon X \to X$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y la relación $P = \{(0,1),(1,0)\}$. Notemos que para cualquier valor de x, $P(x,f(x))$ es verdadero y para cualquier valor de y $\neg P(g(y),y)$ es también verdadero. En consecuencia el conjunto $\{P(x,f(x)), \neg P(g(y),y)\}$ tiene al menos un modelo. Por lo tanto no es contradictorio.

Terminamos con el siguiente esquema que resulta que si que es una regla:

$$\frac{(\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x,z) \vee \neg B(y,x))}{(\forall x)(\exists z)(\forall y)(A(x,z) \vee \neg B(y,x))}$$

Para este caso, tenemos la siguiente resolución:

$$\begin{array}{lll} 1. & A(x,f(x,y)) \vee \neg B(y,x) & \\ 2. & \neg A(a,z)) & \\ 3. & B(g(z),z) & \\ \hline 4. & \neg B(y,a) & (1\ (a|x), 2\ (f(a,y)|z)) \\ 5. & \perp & (3(a|z),\ 4(g(a)|y)) \end{array}$$

EJERCIOS RESUELTOS DE LA QUINTA SESIÓN

Ejercicio 1. Para el siguiente esquema de inferencia:

$$\begin{array}{l}
(1)\forall x\forall y\forall z((\text{equidistante}(x,y,z) \wedge \text{equidistante}(y,z,x) \leftrightarrow \text{equilatero}(x,y,z))\\
(2)\forall x\forall y\forall z(\text{isosceles}(x,y,z) \rightarrow \text{equidistante}(x,y,z))\\
(3)\forall x\forall y\forall z(\text{anguloscongruentes}(x,y,z) \rightarrow \text{isosceles}(x,y,z))\\
(4)\text{anguloscongruentes}(a,b,c) \wedge \text{equidistante}(b,c,a)\\
(5)\text{anguloscongruentes}(d,e,f) \wedge \neg\text{equidistante}(e,d,f)\\
\hline
(\text{O})\ (\exists x\exists y\exists z \text{equilatero}(x,y,z)) \wedge (\exists x\exists y\exists z\neg\text{equilatero}(x,y,z))
\end{array}$$

(a) Encontrar un conjunto de cláusulas de las premisas y de la negación de la consecuencia.

(b) Utilizar el método de resolución para probar que el conjunto de cláusulas encontrado es contradictorio.

Nota: Una interpretación de esta regla de inferencia en el universo de los puntos de un plano, prueba que si se safisfacen las premisas, entonces existe un triángulo equilatero y existe otro triángulo que no es equilátero.

(a) Las cláusulas obtenidas van de la fila 1 a la 10. (b) A continuación se ha incluido una resolución.

1. equidistante$(x, y, z) \vee \neg$equilatero(x, y, z) [cláusula de (1)]
2. equidistante$(y, z, x) \vee \neg$equilatero(x, y, z) [cláusula de (1)]
3. $\neg$equidistante$(x, y, z)\vee\neg$equidistante$(y, z, x)\vee$equilatero(x, y, z) [cláusula de (1)]
4. $\neg$isosceles$(x, y, z) \vee$ equidistante(x, y, z) [cláusula de (2)]
5. $\neg$anguloscongruentes$(x, y, z) \vee$ isosceles(x, y, z) [cláusula de (3)]
6. anguloscongruentes(a, b, c) [cláusula de (4)]
7. equidistante(b, c, a) [cláusula de (4)]
8. anguloscongruentes(d, e, f) [cláusula de (5)]
9. $\neg$equidistante(e, d, f) [cláusula de (5)]
10. $\neg$equilatero$(x, y, z) \vee$ equilatero(u, v, w) [negación de (O)].
11. $\neg$anguloscongruentes$(x, y, z) \vee$ equidistante(x, y, z) [(4,5)].
12. isosceles(a, b, c) [5,6)].
13. equidistante(a, b, c) [4,12].
14. equilatero(a, b, c) [3,13-7)].

15. $\neg$equilatero(u, v, w) [10,13].

16. 0 [14,15].

Nota: Para la resolución anterior se ha tomado un cierto criterio para ir seleccionando las parejas, pero se puede llegar al conjunto nulo utilizando otras estrategias que pueden ser muy diferentes entre sí.

Ejercicio 2. Probar por resolución que el siguiente esquema es una regla de inferencia

$$\begin{array}{c} P(a,b) \\ P(b,c) \\ P(c,d) \\ \forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)) \to A(x,y)) \\ \forall x \forall y (\exists u (P(x,u) \wedge A(u,y)) \to B(x,y)) \\ \hline \exists x B(x,d) \end{array}$$

Solución:

Nota: La idea de este ejercicio viene de la práctica de prolog sobre progenitores, abuelos y bisabuelos (P, A, B)

$\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)) \to A(x,y))$
$\equiv_r \forall x \forall y (\neg \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)) \vee A(x,y))$
$\equiv_r \forall x \forall y \forall z (\neg P(x,z) \vee \neg P(z,y)) \vee A(x,y))$
$\equiv_r \neg P(x,z) \vee \neg P(z,y) \vee A(x,y)$
$\forall x \forall y (\exists u (P(x,u) \wedge A(u,y)) \to B(x,y))$
$\equiv_r \forall x \forall y (\neg \exists u (P(x,u) \wedge A(u,y)) \vee B(x,y))$
$\equiv_r \forall x \forall y \forall u (\neg P(x,u) \vee \neg A(u,y)) \vee B(x,y))$
$\equiv_r \neg P(x,u) \vee \neg A(u,y) \vee B(x,y)$
$\neg \exists x B(x,d) \equiv_r \forall x \neg B(x,d) \equiv_r \neg B(x,d)$

Una resolución puede ser la siguiente:

1. $P(a,b)$
2. $P(b,c)$
3. $P(c,d)$
4. $\neg P(x,z) \vee \neg P(z,y) \vee A(x,y)$
5. $\neg P(x,u) \vee \neg A(u,y) \vee B(x,y)$
6. $\neg B(x,d)$
7. $\neg P(x,c) \vee A(x,d)$ (3, 4)
8. $A(b,d)$ (2, 7)
9. $\neg A(b,y) \vee B(a,y)$ (1,5)
10. $B(a,d)$ (8,9)
11. $\perp$ (6,10)

Vamos a realizar la resolución tal como se ejecuta en prolog:

1. $P(a,b)$

2. $P(b, c)$
3. $P(c, d)$
4. $\neg P(x, z) \vee \neg P(z, y) \vee A(x, y)$
5. $\neg P(x, u) \vee \neg A(u, y) \vee B(x, y)$
6. $\neg B(x, d)$
7. $\neg P(x, u) \vee \neg A(u, d)$ $(5d|y, 6)$
8. $\neg P(x, u) \vee \neg P(u, z) \vee \neg P(z, d)$, $((4u|xd|y, 7)$
9. $\neg P(x, u) \vee \neg P(u, c)$ $(3, 8c|z)$
10. $\neg P(x, u)$, $(2, 9b|u)$
11. $\perp$, $(1, 10a|x)$

Es interesante observar que $x = a, u = b, z = c, y = d$ son los valores de las variables que aparecen en el output de la consola de prolog.

Ejercicio 3. Considerar las siguientes fórmulas del cálculo de predicados:

$$(\forall x)(P(x) \to Q) \to ((\exists x)P(x) \to Q)$$

$$((\exists x)P(x) \to Q) \to ((\forall x)(P(x) \to Q))$$

(a) Calcular la forma prenexa clausal
(b) Probar por resolución que son leyes lógicas
Solución:
(a) A continuanción calculamos una de las posibles formas prenexas de la primera fórmula
$(\forall x)(P(x) \to Q) \to ((\exists x)P(x) \to Q) \equiv$
$\neg[(\forall x)(P(x) \to Q)] \vee ((\exists x)P(x) \to Q)$
$\equiv [(\exists x)\neg(P(x) \to Q)] \vee (\neg[(\exists x)P(x)] \vee Q)$
$\equiv [(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q)] \vee ([(\forall x)\neg P(x)] \vee Q)$
$\equiv [(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q)] \vee ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q])$
$\equiv [(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q)] \vee ((\forall y)[\neg P(y) \vee Q])$
$\equiv (\exists x)((\forall y)([(P(x) \wedge \neg Q)] \vee [\neg P(y) \vee Q]))$
$\equiv (\exists x)(\forall y)([(P(x) \wedge \neg Q)] \vee [\neg P(y) \vee Q])$
$\equiv (\exists x)(\forall y)([(P(x) \vee \neg P(y) \vee Q] \wedge [\neg Q \vee \neg P(y) \vee Q])$
Para la segunda fórmula
$((\exists x)P(x) \to Q) \to ((\forall x)(P(x) \to Q))$
$\equiv \neg((\exists x)P(x) \to Q) \vee ((\forall x)(P(x) \to Q))$
$\equiv ([(\exists x)P(x)] \wedge \neg Q) \vee ((\forall x)(P(x) \to Q))$
$\equiv ((\exists x)[P(x)] \wedge \neg Q]) \vee ((\forall x)(\neg P(x) \vee Q))$
$\equiv ((\exists x)[P(x) \wedge \neg Q]) \vee ((\forall y)[\neg P(y) \vee Q])$
$\equiv (\exists x)[[P(x) \wedge \neg Q] \vee ((\forall y)(\neg P(y) \vee Q))]$
$\equiv (\exists x)[(\forall y)([P(x) \wedge \neg Q] \vee [\neg P(y) \vee Q])]$
$\equiv (\exists x)(\forall y)([(P(x) \vee \neg P(y) \vee Q] \wedge [\neg Q \vee \neg P(y) \vee Q])$

(b) Para ver que una fórmula es una ley lógica por resolución se considera la forma prenexa clausal de su negación, después el proceso se Skolem y finalmente al conjunto de cláusulas resultante se le aplica proceso de resolución

$\neg((\forall x)(P(x) \to Q) \to ((\exists x)P(x) \to Q)) \equiv (\forall x)(P(x) \to Q) \wedge \neg((\exists x)P(x) \to Q) \equiv (\forall x)(\neg P(x) \vee Q) \wedge ((\exists x)P(x) \wedge \neg Q) \equiv_r (\forall x)(\neg P(x) \vee Q) \wedge ((\exists z)P(z) \wedge \neg Q) \equiv_r (\exists z)((\forall x)(\neg P(x) \vee Q) \wedge (P(z) \wedge \neg Q)) \equiv_r (\exists z)(\forall x)((\neg P(x) \vee Q) \wedge P(z) \wedge \neg Q) \equiv_r (\neg P(x) \vee Q) \wedge P(a) \wedge \neg Q$

1. $\neg P(x) \vee Q$
2. $P(a)$
3. $\neg Q$
4. Q (1,2)
5. 0 (3,4)

$\neg((\exists x)P(x) \to Q) \to ((\forall x)(P(x) \to Q)) \equiv ((\exists x)P(x) \to Q) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \to Q) \equiv (\neg(\exists x)P(x) \vee Q) \wedge (\exists x)\neg(P(x) \to Q) \equiv ((\forall x)\neg P(x) \vee Q) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q) \equiv_r (\exists z)(\forall x)(\neg P(x) \vee Q) \wedge (P(z) \wedge \neg Q) \equiv_r (\neg P(x) \vee Q) \wedge (P(a) \wedge \neg Q)$

1. $\neg P(x) \vee Q$
2. $P(a)$
3. $\neg Q$
4. Q (1,2)
5. $\perp$ (3,4)

TAREA DE LA QUINTA SESIÓN

Ejercicio 1. Se proponen varios esquemas de inferencia para comprobar si son o no reglas de inferencia por el método de resolución:

$$\begin{array}{l}
(\forall x)[P(x) \to (F(x) \vee M(x))] \\
(\forall x)(F(x) \to C(x)) \\
(\forall x)(M(x) \to C(x)) \\
\hline
(\forall x)(P(x) \to C(x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\forall x)[(P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)] \\
(\exists x)(S(x) \wedge \neg R(x)) \\
\hline
(\exists x)[S(x) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x))]
\end{array}$$

Ejercicio 2. Considerar el siguiente esquema de inferencia:

$$\begin{array}{l}
\forall x[P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))] \\
\forall x[(\neg S(x) \wedge T(x)) \to O(x)] \\
\forall x[H(x) \to (A(x) \wedge B(x))] \\
\forall x[\neg P(x) \to (\neg S(x) \wedge T(x))] \\
\forall x[(A(x) \wedge B(x)) \to \neg O(x)] \\
\hline
\forall x[H(x) \to (Q(x) \wedge R(x))]
\end{array}$$

(a) Calcular la forma prenexa clausal de las premisas, de la conclusión y de la negación de la conclusión.

(b) Validar por resolución el esquema de inferencia

Ejercicio 3. Demostrar que los siguientes esquemas son reglas:

1. $\dfrac{(\forall x)(\exists y)(A(x) \vee B(y))}{(\exists y)(\forall x)(A(x) \vee B(y))}$

2. Repetir el ejercicio anterior cambiando el conector $\vee$ por $\wedge$.

3. $\dfrac{(\forall x)(\exists z)(\forall y)(A(x,z) \vee \neg B(y,x))}{(\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x,z) \vee \neg B(y,x))}$