Segunda Prueba-A: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 18 de diciembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [5][6]

1. **(1,25 puntos por apartado)** Responde a los distintos enunciados:

   (a) Define subespacio nulo y subespacio fila de una matriz A y describe la relación que hay entre sus dimensiones. Previa definición de familia ligada, completa y prueba la afirmación:

   > Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una familia ligada de vectores de V, cualquier familia L de vectores que contenga a S es una familia [*libre*/*ligada*].

   (b) Calcula una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, $T = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a + 2b - c = 0\}$ y amplía la base hasta una de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (c) ¿Qué subespacio asociado a una aplicación lineal f permite reconocer si es ó no inyectiva? Si $f : \mathbb{R}_p[x] \to M_q(\mathbb{R})$ es una aplicación lineal suprayectiva, prueba que $p + 1 - q^2 \geq 0$.

2. **(5,75 puntos)** Para las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ y $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ definidas en la forma general:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix} \quad y$$

$$g = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a-d) + (b-c)x + (b-c)x^2 + (a-d)x^3,$$

se pide:

- que calcules los núcleos de f y g y una base para cada uno;
- que compruebes si el conjunto imagen de f es igual al núcleo de g;

[5] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

[6] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios. En otro caso, la valoración podría ser reducida a la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

- que calcules los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el vector $2\mathbf{e}_{11} + \alpha\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21}\beta\mathbf{e}_{22})$ esté en la imagen de f;
- que calcules las ecuaciones implícitas del subespacio suma $Ker\, f + Im\, g$;
- que calcules la matriz coordenada de la composición $f \circ g : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ en las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{22}\}$ (inicial) y $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{12}\}$ (final).

Segunda Prueba-B: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 18 de diciembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [7][8]

1. **(1,25 puntos por apartado)** Responde a los distintos enunciados:

   (a) Enuncia el teorema de la base para un espacio vectorial V de dimensión n . Previa definición familia libre, completa y prueba la afirmación:

   Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una familia libre de vectores de V, cualquier subconjunto L de vectores de S es una familia [*libre/ligada*].

   debes definir todos los conceptos que aparezcan en el teorema de la base

   (b) Si V es un subespacio con base $\{u_1, u_2, u_3\}$, calcula los valores de α para los cuáles el conjunto $\{(1+\alpha)(u_1+u_2)+2u_3, u_1+\alpha u_2+u_3, (1-\alpha)(u_2+u_3)\}$ proporciona una base de V.

   (b) Prueba usando la definición que, para una matriz $A \in M_2(\mathbb{F})$ fija, la correspondencia $T : M_2(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ definida por $T(B) = AB - BA$ es una aplicación lineal. Si $A = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21}$, Calcula la matriz coordenada de T en la base canónica de las matrices 2×2 (en los espacios inicial y final).

2. **(5,75 puntos)** Para las aplicaciones lineales $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ y $g : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ definidas en la forma general:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a-d) + (b+c)x + (b+c)x^2 + (a-d)x^3 \quad y$$

$$g(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{pmatrix},$$

se pide:

- que calcules los núcleos de f y g y una base para cada uno;

[7] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

[8] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios. En otro caso, la valoración podría ser reducida a la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

- que calcules las preimágenes del vector $f^{-1}(1-x-x^2+x^3)$;
- que compruebes si el conjunto imagen de f y el núcleo de g coinciden;
- que calcules las ecuaciones implícitas del subespacio suma $Ker\, f + Im\, g$;
- que calcules la matriz coordenada de la composición $f \circ g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ en las bases $\mathcal{B} = \{1-x^3, x^3, x-x^2, x\}$ (inicial) y $\mathcal{C} = \{1+x^3, x, x+x^2, x^3\}$ (final).

Segunda Prueba-C: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 18 de diciembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [9][10]

1. **(1,25 puntos por apartado)** Responde a los distintos enunciados:

   (a) Enuncia las propiedades de la suma de vectores, $u+v$, de un espacio vectorial V. Calcula los valores de α, β para los cuáles el conjunto $F = \{p(x) : p(0) = \alpha, p'(0) = \beta\}$ forma un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ y calcula su dimensión (hay que justificar adecuadamente los casos que dan subespacio y los que no dan subespacio).

   (b) Calcula una base del subespacio T de $\mathbb{R}_3[x]$, $T = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a + 2b - c = 0\}$, y amplía la base hasta una de $\mathbb{R}_3[x]$.

   (c) Pon un ejemplo de aplicación lineal suprayectiva. Prueba que para cualquier natural n, las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ cuyo núcleo es 2-dimensional nunca son suprayectivas.

2. **(5,75 puntos)** Para las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ y $g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ definidas en la forma general:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 - a_3)(1 + x^3) + (a_1 + a_2)(x + x^2) \quad y$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a-d) + (b-c)x + (b-c)x^2 + (a-d)x^3,$$

   se pide:

   - que calcules los núcleos de f y g y una base para cada uno;
   - que compruebes si conjunto imagen de f coincide con el conjunto imagen de g;
   - que calcules las ecuaciones implícitas del subespacio suma $Ker\, f + Im\, g$;

[9]Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

[10]Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios. En otro caso, la valoración podría ser reducida a la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

- que calcules la matriz coordenada de la composición $f \circ g : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ en las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{12}\}$ (inicial) y $\mathcal{C} = \{1 - x^3, x, x - x^2, x^3\}$ (final)
- que calcules la imagen del vector $f(g(\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21} - \mathbf{e}_{22}))$ usando la expresión coordenada de la aplicación $f \circ g$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

PREGUNTA 1-A

(a) • Subespacio nulo de A: Nul A, conjunto de soluciones del sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_m$ si la matriz A es de orden $m \times n$

• Subespacio fila de A: Fil A, subespacio generado por los vectores fila de A, esto es, si A de orden $m \times n$

$Fil\, A = Gen\{u_1, \dots, u_m\} = \{t_1 u_1 + \dots + t_m u_m \mid t_i \in \mathbb{F}\}$ donde cada u_i es el vector de $\mathbb{F}^n$ que forma la fila i-ésima de A.

• Se tiene que, para A $m \times n$, $n = \dim Nul\, A + \dim Fil\, A$ ya que $\dim Fil\, A = \dim Col\, A$ siendo Col A el subespacio generado por las columnas de A

• Una familia $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de vectores de un $\mathbb{F}$-e.v. V se dice ligada si existen escalares $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{F}$ no todos nulos y tales que $\vec{0} = t_1\vec{v}_1 + \dots + t_n\vec{v}_n$.

Sea $L = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}, \dots, \vec{v}_k\}$ una familia de vectores que contiene a S, entonces:

$$t_1\vec{v}_1 + \dots + t_n\vec{v}_n + 0\cdot\vec{v}_{n+1} + \dots + 0\cdot\vec{v}_k = \vec{0}$$

es una combinación lineal con escalares $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = 0 = \dots = t_k$ algunos de los cuales es no nulo. Por tanto, la familia L es ligada

(b) $T = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid$ ~~a,b,c,d∈IR~~ $a + 2b - c = 0\}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

$= \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid c = a + 2b;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

$= \{ax^3 + bx^2 + (a+2b)x + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} =$

$= \{a(x^3 + x) + b(x^2 + 2x) + d\cdot 1 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} =$

$= Gen\{x^3 + x, x^2 + 2x, 1 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

Una base de T: $\{x^3 + x, x^2 + 2x, 1\}$ ya que genera T y es libre (lo comprobamos !! a la vuelta

La familia x^3+x, x^2+2x y 1 es l.i. ya que la ecuación vectorial $t_1(x^3+x)+t_2(x^2+2x)+t_3\cdot 1 = 0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\cdot 1$ nos indica que: $t_1=0$, $t_2=0$, $t_1+2t_2=0$, $t_3=0$ es su única solución (1) $\rightsquigarrow$ (ver resolución alternativa)

(c) El subespacio núcleo de $f: V \longrightarrow W$ es los vectores de V cuya imagen es el vector nulo de W, esto es:

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = \vec{0} \}$. Si el núcleo es el subespacio nulo, esto es, $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, entonces f es inyectiva

El Teorema de la dimensión para aplicaciones lineales nos dice que: $\dim \mathbb{R}_p[x] = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Como f es suprayectiva, ~~[ilegible]~~ $\operatorname{Im} f = M_q(\mathbb{R})$, luego $\dim \operatorname{Im} f = \dim M_q(\mathbb{R}) = q^2$. Así:

$$\dim \mathbb{R}_p[x] = p+1 = \dim \operatorname{Ker} f + q^2 \Longrightarrow p+1-q^2 = \dim \operatorname{Ker} f$$

y, como la dimensión de cualquier espacio vectorial es ≥ 0 tenemos que $p+1-q^2 \geq 0$.

Fin ejercicio (b): Ampliar a base de $\mathbb{R}_3[x]$. Mediante el isomorf° (1), el problema es equivalente a ampliar a base de $\mathbb{R}^4$ la familia libre: $\{u_1, u_2, u_3\}$. Utilizamos el método estándar $[u_3\, u_2\, u_1 \mid e_1\, e_2\, e_3\, e_4] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss}]{}$ (NO SE PUEDEN modificar COLUMNAS)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 2F_2 - F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(..) ampliamos usando la columna 5 que corresponde a $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así una base ampliada es $\{x^3+x, x^2+2x, 1, x\}$

---

(1) Mediante el isomorf° dado por la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$

$$\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\{x^3+x, x^2+2x, 1\}$ es l.i. si y solo si lo es la familia de vectores de $\mathbb{R}^4$ $\Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3} \Bigg\}$. La reducción gaussiana sobre la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ indica 3 pivotes, luego es libre en $\mathbb{R}^4$

PREGUNTA 2-A

- $\boxed{\text{Resolución directa aplicando definiciones.}}$

(a) Núcleos de f y g:

$\text{Ker } f = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \} =$

$= \{ a+bx+cx^2+dx^3 \mid \underset{a,b,c,d \in \mathbb{R}}{a-d=0,\ b+c=0} \}$ (núcleo definido por implícitas)

$= \{ a+bx-bx^2+ax^3 \mid a,b \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a(1+x^3)+b(x-x^2) \mid a,b \in \mathbb{R} \} = \text{Gen}\{1+x^3,\ x-x^2\}$

Además, $u_1 = 1+x^3$ y $u_2 = x-x^2$ son l.i.:

$\vec{0} = a(1+x^3)+b(x-x^2) = a+bx-bx^2+ax^3 \Longrightarrow a=b=0.$

Por tanto: $\{1+x^3,\ x-x^2\}$ es base de Ker f. (genera y es l.i.)

$\text{Ker } g = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid g(A) = 0\cdot 1+0\cdot x+0x^2+0\cdot x^3 \} =$

$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \underset{a,b,c,d \in \mathbb{R}}{a-d=0,\ b-c=0} \}$ (núcleo definido por implícitas)

$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \} = \{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Gen}\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$

Además, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son l.i.:

$\vec{0} = av_1 + bv_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow a=b=0.$

Por tanto, $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ es base de Ker g. (genera y es l.i.)

(b) $\text{Im } f = \text{Ker } g$

Calculamos $\text{Im } f = \{ f(p(x)) \mid p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \} = \{ \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \} =$ [reducción elemental de vectores q. generan]

$= \text{Gen}\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \} = \text{Ker } g$

(c) $\vec{u} = 2e_{11} + \alpha e_{12} + e_{21} + \beta e_{22} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \in \text{Im } f \Longleftrightarrow$ [definición]

$\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$ el sistema de

4 ecuaciones en las variables a, b, c y d y con parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es compatible : $\begin{cases} a-d=2 \\ b+c=\alpha \\ b+c=1 \\ a-d=\beta \end{cases}$. luego $\alpha=1$ y $\beta=2$

para que sea compatible. Recíprocamente : si $\alpha=1$ y $\beta=2$, el sistema $\begin{cases} a-d=2 \\ b+c=1 \end{cases}$ es compatible indeterminado (2 grados de libertad) con solución $a=2+d$, $b=1-c$ $\forall\, d, c \in \mathbb{R}$.

Por tanto :

$$\vec{u} \in \operatorname{Im} f \iff \alpha=1, \ \beta=2$$

y sus preimágenes son :

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \{ (2+d) + (1-c)x + cx^2 + dx^3 \mid d, c \in \mathbb{R} \}.$$

(d) Implícitas de $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

calculamos $\operatorname{Im} g = \left\{ g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \{ (a-d)1 + (b-c)x + (b-c)x^2 + (a-d)x^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a(1+x^3) + b(x+x^2) + c(-x-x^2) + d(-1-x^3) \} \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \} =$

$= \operatorname{Gen}\{ 1+x^3, \ x+x^2 \}$

Ahora, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g = \{ 1+x^3, \ x-x^2, \ 1+x^3, \ x+x^2 \} = \{ 1+x^3, \ x-x^2, \ x+x^2 \}$

$= \{ 1+x^3, \ x, \ x^2 \}$ ya que $\subseteq$) : es inmediato

$\supseteq$) : $x = \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)$; $x^2 = -\frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)$

Para encontrar las implícitas, usamos el isomorf° dado por la aplicación coordenada : $C_{\{1,x,x^2,x^3\}} : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$:

$a+bx+cx^2+dx^3 \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ que transforma $T = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ en el subespacio de $\mathbb{R}^4$: $\hat{T} = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Para el cálculo de implícitas, aplicamos reducción gaussiana a la matriz :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{d-a=0}$$ única ecuación. Así

$T = \{ a+bx+cx^2+dx^3 \mid d-a=0, \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$.

(e) Calculamos la forma general de $f \circ g : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$F = f \circ g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left(\underbrace{(a-d)}_{A} + \underbrace{(b-c)}_{B} x + \underbrace{(b-c)}_{C} x^2 + \underbrace{(a-d)}_{D} x^3 \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} A-D & B+C \\ B+C & A-D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(b-c) \\ 2(b-c) & 0 \end{pmatrix}$$. y observamos que

$$F(e_{11}+e_{22}) = F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad F(e_{12}) = F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(e_{12}+e_{21}) = F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } F(e_{22}) = F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $u_1 = e_{11}+e_{22}$, $u_2 = e_{12}$, $u_3 = e_{12}+e_{21}$ y $u_4 = e_{22}$

y $v_1 = e_{11} - e_{22}$, $v_2 = e_{22}$ $v_3 = e_{12} - e_{21}$ y $v_4 = e_{12}$

Como $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ base inicial y $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base final, $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\left[2v_4 - v_3\right] = 4v_4 - 2v_3 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tenemos que : $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(F) = \left[[F(u_1)]_{\mathcal{C}} \; [F(u_2)]_{\mathcal{C}} \; [F(u_3)]_{\mathcal{C}} \; [F(u_4)]_{\mathcal{C}} \right]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

- **Resolución metódica utilizando matrices coordenadas :**

Primero calculamos las matrices coordenadas de f y g en las bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$ $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\mathcal{C}_c = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. Para ello observamos que:

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}_c}(f) = \left[[f(1)]_{\mathcal{C}_c} \; [f(x)]_{\mathcal{C}_c} \; [f(x^2)]_{\mathcal{C}_c} \; [f(x^3)]_{\mathcal{C}_c} \right] = \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}_c} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}_c} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}_c} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}_c} \right]$$

luego $$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}_c}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = M_f$$

$$M_{\mathcal{C}_c}^{\mathcal{B}_c}(g) = \left[\left[g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \right] = \left[[1+x^3]_{\mathcal{B}_c} \; [x+x^2]_{\mathcal{B}_c} \; [-x-x^2]_{\mathcal{B}_c} \; [-1-x^3]_{\mathcal{B}_c} \right]$$

luego $$M_{\mathcal{C}_c}^{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = M_g$$

(1) $M_f \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$ $\text{Col } M_f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

$F_4 \to F_4 - F_1$
$F_3 \to F_3 - F_2$

$\text{Null } M_f: \quad x = t, \quad y = -z \quad t, z \in \mathbb{R} \quad \therefore$

$\text{Null } M_f = \left\{ \begin{pmatrix} t\\-z\\z\\t \end{pmatrix} \mid t, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $M_g \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ $\text{Col } M_g = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

$F_4 \to F_4 - F_1$
$F_3 \to F_3 - F_2$

$\text{Null } M_g: \quad x = t \quad y = z \quad t, z \in \mathbb{R} \quad \therefore$

$\text{Null } M_g = \left\{ \begin{pmatrix} t\\z\\z\\t \end{pmatrix} \mid t, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$

(a) Núcleos de f y g:

Como las matrices coordenadas vienen dadas mediante las bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$: $\{1, x, x^2, x^3\}$ y de $M_2(\mathbb{R})$: $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$

De $\text{Null } M_f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$, obtenemos que:

$$\text{Ker } f = \text{Gen}\{1 + x^3, -x + x^2\} = \{1 + x^3, x - x^2\}$$

y como $\dim \text{Col } M_f = 2$ (por escalonamiento gaussiano aparecen 2 pivotes) y $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$, llegamos a que $\dim \text{Ker } f = 2$. Por tanto $\{1 + x^3, -x + x^2\}$ es generador minimal, luego base de $\text{Ker } f$.

De $\text{Null } M_g = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$, obtenemos que:

$$\text{Ker } g = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y como $\dim \text{Col } M_g = 2$ (escalonamiento gaussiano, 2 pivotes) y $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, llegamos a que $\dim \text{Ker } f = 2$. Por tanto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es generador minimal, luego base de $\text{Ker } g$.

(b) $\text{Im } f = \text{Ker } g$

De $\text{Col } M_f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$ llegamos a que $\text{Im } f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ que, obviamente, coincide con $\text{Ker } g$, por tener el mismo sistema generador.

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f$

El problema es equivalente a que el vector

$[\vec{u}]_{e_c} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Col}\, M_f \iff$ el sistema $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{array}\right]$ sea

compatible determinado $\underset{\text{R. Gaussiana}}{\iff}$ el sistema $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right] \end{array}$ sea

compatible determinado $\iff$ $\alpha = 1$ y $\beta = 2$

En este caso, para calcular preimágenes debemos usar la expresión coordenada de f:

$$Y_{e_c} = M_f \cdot X_{B}$$

lo que obliga a resolver:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \beta \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \end{array} \underset{\alpha=1,\ \beta=2}{\equiv} \begin{cases} a = 2+d \\ b = 1-c \end{cases} \quad \forall\, d, c \in \mathbb{R}$$

luego $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \{ (2+d) + (1-c)x + cx^2 + dx^3 \ / \ d, c \in \mathbb{R} \}$

ALTERNATIVAMENTE:

Soluciones $\left[M_f \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$ = Solución particular + Null M_f

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \iff M_f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego: Soluciones $\left[M_f \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2+d \\ 1-c \\ c \\ d \end{pmatrix} \ / \ c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

y por tanto, $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \{ (2+d) + (1-c)x + cx^2 + dx^3 \ / \ d, c \in \mathbb{R} \}$

(d) Usando la aplicación

Usamos la aplicación coordenada $c_{\{1, x, x^2, x^3\}} : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$

que transforma $T = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g$ en el subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$\hat{T} = \mathrm{Null}\, M_f + \mathrm{Col}\, M_g = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(....) procedemos como en apartado (d) de la "resolución usando definiciones" y llegamos a que:

$$T = \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a - d = 0 , \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \}.$$

(e) Matriz coordenada de $f \circ g$ en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$:

El uso de esquemas complica el cálculo de esta matriz.
Se aconseja usar la definición de la misma para obtenerla, esto es:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f \circ g) = \left[\left[f\circ g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} \left[f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} \left[f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} \left[f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} \right]$$

dado que, (1) calcular imágenes de vectores es muy simple usando las definiciones explícitas de f y g. (2) La obtención de coordenadas queda reducida a la resolución de 4 sistemas ó a la discusión razonada sobre las mismas:

- $f\circ g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f(1 + x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

  $\therefore \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $f\circ g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(-1 - x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

luego $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f\circ g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Planteamiento por esquemas:

$$f\circ g : (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{B}) \longrightarrow (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{C})$$

Necesitamos calcular la matriz de la composición, que es producto de "adecuadas" matrices coordenadas para f y g.

$$(M_2(\mathbb{R}), \mathcal{B}) \xrightarrow[A]{g} (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \xrightarrow[B]{f} (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{C})$$

Como tenemos calculadas las matrices de f y g en las bases canónicas de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_3[x]$, procedemos siguiendo los pasos que detallamos:

Un procedimiento por esquemas:

(1) Calculamos la matriz de $f\circ g$ usando M_f y M_g
Recordamos que, esta matriz se calcula como producto enlazando adecuadamente las bases de llegada y partida.
Así:

$$f\circ g:\ (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c) \xrightarrow[M_g]{g} (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \xrightarrow[M_f]{f} (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c)$$

$$x \longmapsto M_g x \longmapsto \boxed{(M_f\cdot M_g)}\,x$$

Por tanto: $M_{\mathcal{e}_c}^{\mathcal{B}_c}(f\circ g) = M_f M_g$

(2) Calculamos ahora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{e}}(f\circ g)$ usando el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd}
(M_2(\mathbb{R}), \mathcal{B}) \arrow[r, "M", "f\circ g"'] \arrow[d, shift right, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}) \arrow[d, shift right, "Q"'] \\
(M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c) \arrow[r, "M_f M_g"'] \arrow[u, dashed, shift right, "P^{-1}"'] & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c) \arrow[u, shift right, "Q^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{e}_c \xleftarrow{P} \mathcal{B} \qquad \mathcal{e}_c \xleftarrow{Q} \mathcal{e}$$

- P: matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{e}_c$, luego

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Q: matriz de cambio de la base $\mathcal{e}$ a la base canónica $\mathcal{e}_c$, luego

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendiendo al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
f\circ g\ (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{B}) \arrow[r, "P"] \arrow[rrr, bend right, "M = Q^{-1} M_f M_g \cdot P"'] & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c) \arrow[r, "M_f M_g"] & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e}_c) \arrow[r, "Q^{-1}"] & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{e})
\end{tikzcd}$$

Calculamos Q^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_3 \\ F_4 \to F_4 + F_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \therefore\ Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, el producto $M = Q^{-1} M_f M_g P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

un segundo procedimiento por esquemas.

(1) calculamos A usando el esquema:

$$\begin{array}{ccc} (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{B}) & \xrightarrow[A]{g} & (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \\ P \big\downarrow \mathrm{Id} & & I_4 \big\uparrow \mathrm{Id} \big\downarrow I_4 \\ (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{E}_c) & \xrightarrow[M_g]{g} & (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \end{array} \quad \therefore \quad A = M_g \cdot P$$

$\mathcal{E}_c \xleftarrow{P} \mathcal{B}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) calculamos B usando el esquema

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) & \xrightarrow[B]{f} & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{E}) \\ I_4 \big\downarrow \mathrm{Id} & & Q^{-1} \big\uparrow \mathrm{Id} \big\downarrow Q \\ (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) & \xrightarrow[M_f]{f} & (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{E}_c) \end{array}$$

$B = Q^{-1} M_f$

$\mathcal{E} \xrightarrow{Q} \mathcal{E}_c$ luego

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Ahora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f \circ g) = B \cdot A = Q^{-1} \cdot M_f \cdot M_g \cdot P$.

se pueden plantear otros ....

PREGUNTA 1-B

(a) • Teorema de la base: Para un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ cuya dimensión sea n, tenemos que

(1) cualquier familia libre formada por n vectores es una base de V (esto implica que lo genera)

(2) cualquier familia que genere V formada por n vectores es una base de V (esto implica que es libre

Debes definir: Base, familia libre, familia generadora y dimensión del espacio vectorial V

• Una familia $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ se dice libre si la ecuación vectorial $x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ donde $x_1, \dots, x_n$ variables tiene como única $x_1 = \dots = x_n = 0$. Si L es un subconjunto de S supuesta(*) familia L, entonces $L = \{\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}\}$ con $v_{i_j} \in S$, $k \leq n$. es una familia libre ya que la ecuación vectorial

$$y_1 v_{i_1} + \dots + y_k v_{i_k} = \vec{0}$$

tiene como única solución $y_1 = \dots = y_k = \vec{0}$. En efecto: si hubiera una solución con algún $y_s \neq 0$ pongamos ~~entonces~~ $(y_1, \dots, y_k) = (s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ con $t_{i_s} \neq 0$, la n-tupla ~~la solución~~ $(t_1, \dots, t_n)$ con $t_{i_k} = s_{i_k}$ y $t_j = 0$ si $j \neq i_1, \dots, i_k$ proporcionaría una solución no trivial de $x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ por lo que S sería familia ligada, contradicción

---

(*) Hay otras muchas formas de argumentar la prueba que pasan por: considerar la definición de libre como "un vector no puede ponerse como combinación lineal de otros" ó usar, supuesto que V sea espacio de dimensión finita, un argumento basado en pivotes.

(b) Como $\{u_1, u_2, u_3\}$ es base de V, V es 3-dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Mediante el isomorf° dado por la aplicación coordenada $c_{\{u_1,u_2,u_3\}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^3$, $xu_1+yu_2+zu_3 \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $x,y,z \in \mathbb{F}$

el problema que nos plantean es equivalente a probar que la familia de vectores

$\{ u_1 = (1+\alpha)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\alpha\\2\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix}$

y $u_3 = (1-\alpha)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1-\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}$ es una base de $\mathbb{F}^3$, lo que equivale (por el Teorema de la base) a probar que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es familia libre. El procedimiento usual es construir la matriz A cuyas columnas son u_1, u_2, u_3 (no importa el orden) y aplicar Gauss hasta obtener una forma escalonada de A:

Si la forma escalonada tiene exactamente 3 pivotes, la familia <u>es libre</u>

Si tiene < 3 pivotes, es ligada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 1+\alpha \\ 1 & 1-\alpha & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha \end{pmatrix}$$

n° pivotes de $A = 3 \iff 1-\alpha \neq 0$ y $\alpha(\alpha-1) \neq 0$.

$\iff \alpha \neq 1, 0$.

n° pivotes de $A < 3 \iff \alpha = 1, 0$

Así: base $\iff \alpha \neq 1, 0$ y no base $\iff \alpha = 1, 0$.

(c) Definición de aplicación lineal

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\lambda \in \mathbb{F}$

define T

¡¡no usar A que es fijo y!!

En este caso: tomamos $u = B$, $v = C$ matrices 2×2 sobre $\mathbb{F}$

(1) $T(B+C) = A(B+C) - (B+C)A$ [usamos la definición de T]

$= AB + AC - (BA + CA)$ [usamos propiedades del producto de matrices $M_2(\mathbb{F})$]

$= \underbrace{AB - BA}_{T} + \underbrace{AC - CA}_{T}$ [lo mismo]

$= T(B) + T(C)$ [usamos la definición de T]

(2) $T(\lambda B) = A(\lambda B) - (\lambda B)A$ [usamos la definición de T]

$= \lambda(AB) - \lambda(BA)$ [usamos propiedades del producto de matrices por escalar]

$= \lambda(AB - BA)$ [lo mismo]

$= \lambda T(B)$ [usamos la definición de T]

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego la aplicación T queda definida por la siguiente expresión general:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz asociada en las bases canónicas $\left\{\begin{matrix}\text{inicial} \\ \text{final}\end{matrix}\right.$

$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

basta con calcular $T(e_{ij})$

$T(e_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(e_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T(e_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $T(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

y determinar $[T(e_{ij})]_{\mathcal{B}_c}$. $\mathcal{B}_c = \{e_{ij}\}$

Así:

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(T) = \Big[[T(e_{11})]_{\mathcal{B}_c}\ [T(e_{12})]_{\mathcal{B}_c}\ [T(e_{21})]_{\mathcal{B}_c}\ [T(e_{22})]_{\mathcal{B}_c} \Big]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

PREGUNTA 2-B

- $\boxed{\text{Resolución directa aplicando definiciones}}$

Planteamos las definiciones de núcleo e imágenes de ambas transformaciones hasta concluir sus subespacios generadores y bases que luego usaremos para responder a los distintos apartados del ejercicio

(1) $\text{Ker } f = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \overbrace{0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3}^{0_{\mathbb{R}_3[x]}} ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d) \cdot 1 + (b+c) \cdot x + (b+c) x^2 + (a-d) x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$
$a, b, c, d \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-d=0, \ b+c=0, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a=d, \ b=-c, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \begin{pmatrix} d & b \\ -b & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R} \} = \{ d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid d, b \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Gen} \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{u_2} \}$

y $\{u_1, u_2\}$ es <u>libre</u>: $\quad d \cdot u_1 + b u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow d = b = 0$

luego una base de Ker f es: $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \}$

(2) $\text{Im } f = \{ f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \} =$

$= \{ (a-d) 1 + (b+c) x + (b+c) x^2 + (a-d) x^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (a-d)(1+x^3) + (b+c)(x+x^2) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$

$\subseteq \{ p(1+x^3) + q(x+x^2) \mid p, q \in \mathbb{R} \} = \text{Gen} \{ 1+x^3, x+x^2 \}$

Ahora observamos que $p(1+x^3) + q(x+x^2) = (p-0)(1+x^3) + (q+0)(x+x^2)$

luego si tomamos $a=p$, $b=q$, $d=c=0$. Tenemos que el contenido previo es igualdad, luego

$\text{Im } f = \text{Gen} \{ \underbrace{1+x^3}_{v_1}, \underbrace{x+x^2}_{v_2} \}$ y es libre: $p v_1 + q v_2 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \Leftrightarrow p = q = 0$

(3) $\operatorname{Ker} g = \{ p(x) \in \mathbb{R}^3[x] \ / \ g(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \} =$

$= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \ / \ \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \} =$

$= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \ / \ a-d=0, \ b-c=0, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \{ a + bx + bx^2 + ax^3 \ / \ a,b \in \mathbb{R} \}$

$= \{ a(1+x^3) + b(x+x^2) \ / \ a,b \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Gen}\{ 1+x^3, \ x+x^2 \}$

y $\{1+x^3, \ x+x^2\}$ es libre: $a(1+x^3) + b(x+x^2) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \iff a=b=0$

POR TANTO $\{1+x^3, \ x+x^2\}$ es una base de $\operatorname{Ker} g$

(4) $\operatorname{Im} g = \{ g(p(x)) \ / \ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \} =$

$\{ g(a+bx+cx^2+dx^3) \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \} =$

$\{ \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{pmatrix} \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$

$= \operatorname{Gen}\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\omega_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\omega_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\omega_3 = -\omega_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\omega_4 = -\omega_1} \}$ [propiedades de reducción de subespacios generadores: podemos eliminar los que son combinación lineal de otros]

$= \operatorname{Gen}\{ \omega_1, \omega_2 \}$

Además, $a\omega_1 + b\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a=b=0$

luego la familia $\{\omega_1, \omega_2\}$ es libre y genera $\operatorname{Im} g$ $\therefore$ base.

(6) Observamos que

$$(f \circ g): \mathbb{R}_3[x] \xrightarrow{g} M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \mathbb{R}_3[x]$$

cumple que:

$$f \circ g\,(a+bx+cx^2+dx^3) = f\left(g(a+bx+cx^2+dx^3)\right) =$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{pmatrix}\right) = (a-d-(a-d))\cdot 1 + (b-c+b-c)x$$

$$+ (b-c+b-c)x^2 + (a-d-(a-d))x^3 =$$

$$= 2(b-c)x + 2(b-c)x^2$$

luego la expresión general para

$$f\circ g: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$a+bx+cx^2+dx^3 \longmapsto 2(b-c)x+2(b-c)x^2 =$$

$$= 2(b-c)(x+x^2)$$

RESPUESTAS A LOS APARTADOS DE LA PREGUNTA:

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ y, como la familia es libre, una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Gen}\{1+x^3, x+x^2\}$ y, como la familia es libre, una base de $\operatorname{Ker} g$ es $\{1+x^3, x+x^2\}$

(b) preimágenes del vector $u = 1-x-x^2+x^3$ para f

Buscamos las matrices $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tales que

$$f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = (a-d)\cdot 1 + (b+c)x + (b+c)x^2 + (a-d)x^3 = 1-x-x^2+x^3$$

lo que equivale a:

$$\begin{cases} a-d=1 \\ b+c=-1 \end{cases} \iff \begin{matrix} d=a-1 \\ c=-1-b \end{matrix} \iff \begin{matrix} a=1+d \\ b=-1-c \end{matrix}$$

luego $f^{-1}(u) = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\-1-b&a-1\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1+d&-1-c\\c&d\end{pmatrix} \mid d,c\in\mathbb{R}\right\}$

(c) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Gen}\{1+x^3, x+x^2\}$ y $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Gen}\{1+x^3, x+x^2\}$

ambos espacios están generados por la misma familia de vectores luego son iguales

(d) El subespacio $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ se obtiene como subespacio generado por la familia de vectores obtenida al unir una familia generadora de $\operatorname{Ker} f$ y otra que genere $\operatorname{Im} g$.

Así pues, si tomamos una base de cada uno de estos espacios, tenemos:

$$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Gen}\Big\{ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}^{w_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}^{w_2}}_{\text{base } \operatorname{Ker} f}, \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}^{w_3}, \overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}^{w_4}}_{\text{base } \operatorname{Im} f} \Big\}$$

Como $w_1 = w_3$, $\{w_1, w_2, w_4\}$ es un sistema generador para el subespacio suma. Para calcular las implícitas usamos el isomorfº dado por la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

que transforma el subespacio $\ker f + \operatorname{Im} g$ en $T = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y buscamos las implícitas de T por el método estándar de resolución del sistema de matriz ampliada (debe ser siempre compatible)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & y+z \\ 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}\right]$$

compatible $\forall x, y, z, t$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{t - x = 0}$ ecuación implícita

$\boxed{\text{Ahora}}$ tenemos que devolver la(-s) ecuación(-es) implícitas al reno natural $\ker f + \operatorname{Im} g$ (que ¡¡depende del isomorfº que hemos elegido!!) y tenemos:

$$\ker f + \operatorname{Im} g = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a = d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición por implícitas de la suma

ESTA ES LA RESPUESTA FINAL (cualquier otro dado es INCOMPLETA)

(e) Por definición, la matriz pedida es:

$$M_{\mathcal{B}}^{e}(f \circ g) = \left[[f \circ g(1-x^3)]_e \ [f \circ g(x^3)]_e \ [f \circ g(x - x^2)]_e \ [f \circ g(x)]_e \right]$$

Ahora, desde la forma general obtenida en el apartado (5) tenemos:

- $f \circ g(1-x^3) = \vec{0}$ ($b = c = 0$)
- $f \circ g(x^3) = \vec{0}$ ($b = c = 0$)
- $f \circ g(x - x^2) = 4(x + x^2)$ ($b = 1$, $c = -1$)
- $f \circ g(x) = 2(x + x^2)$ ($b = 1$, $c = 0$)

Las coordenadas, en cualquier base del vector $0_{\mathbb{R}_3[x]}$ son $\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ y $[4(x+x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0\\0\\4\\0 \end{bmatrix}$ $[2(x+x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0\\0\\2\\0 \end{bmatrix}$

luego $\boxed{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f\circ g) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&4&2\\0&0&0&0 \end{bmatrix}}$

- **Resolución metódica usando matrices coordenadas**

Hacemos los cálculos preliminares de matrices coordenadas, núcleos e imágenes de f y g. Después contestamos los distintos apartados.

(1) Matrices coordenadas en bases canónicas de $\mathbb{R}_3[x]$ y $M_2(\mathbb{R})$

ó bien usamos las definiciones.

¡¡necesario especificar!! ← $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_3[x]$: $\{1, x, x^2, x^3\}$; $\mathcal{B}_c$ de $M_2(\mathbb{R})$: $\{\begin{pmatrix} 1&0\\0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0\\1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0\\0&1 \end{pmatrix}\}$

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(f) = \left[\left[f\begin{pmatrix} 1&0\\0&0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[f\begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[f\begin{pmatrix} 0&0\\1&0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \left[f\begin{pmatrix} 0&0\\0&1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_c} \right]$$

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(g) = \left[[g(1)]_{\mathcal{B}_c} \; [g(x)]_{\mathcal{B}_c} \; [g(x^2)]_{\mathcal{B}_c} \; [g(x^3)]_{\mathcal{B}_c} \right]$$

ó bien usamos los isomorf^s dados por las base canónicas en matrices y polinomios

$$\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad\qquad M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$a+bx+cx^2+dx^3 \longmapsto \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix}$$

que nos permiten "transportar" f y g en las formas:

$$\hat{f} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a-d\\b+c\\b+c\\c-d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a-d \\ b-c \\ b-c \\ a-d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

esto ha de ser entendido en sus correspondientes zonas naturales : (

- Para f : iniciamos en $M_2(\mathbb{R})$ y acabamos en $\mathbb{R}_3[x]$
- Para g : iniciamos en $\mathbb{R}_3[x]$ y acabamos en $M_2(\mathbb{R})$

Así :

$$M_f = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{C}_c}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad M^{\mathcal{C}_c}_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = M_g$$

que son las mismas matrices que aparecen en la resolución del examen Tipo-A. Luego tenemos (como en A)

- $\text{Nul } M_f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ desde el escalonamiento:

  $\text{Col } M_f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\left[\quad M_f \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$

  que indica que $\dim \text{Col } M_f = 2$ (2 pivotes) y por el Teorema de la dimensión, $\dim \text{Null } M_f = 2$. Por tanto los subespacios generadores son base de cada espacio

- $\text{Nul } M_g = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\text{Col } M_g = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

desde el escalonamiento :

$$M_g \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que indica que $\dim \text{Col } M_g = 2$ (2 pivotes) y por Teorema de dimensión, $\dim \text{Nul } M_g = 2$

$\therefore$ Los subespacios generadores son base.

RESPONDEMOS A LOS DISTINTOS APARTADOS:

(a) <u>Base de Ker f</u>: es subespacio de $M_2(\mathbb{R})$, luego aplicando el isomorf. coordenada, una base del Ker f es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (obtenida de Nul M_f)

<u>Base de ~~Ker g~~</u>: es subespacio de ~~$\mathbb{R}_3[x]$~~ $M_2(\mathbb{R})$, luego una base de ~~Ker g~~ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Preimágenes de f para el vector $\vec{u} = 1 - x - x^2 + x^3$

calculamos $[\vec{u}]_{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y resolvemos el sistema

$$\left[M_f \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \;\; S \text{ compatible indeterminado}$$

Soluciones $x = t + 1 \qquad y = -1 - z \qquad z, t$ libres

Así, tenemos en $\mathbb{R}^4$ los vectores solución en la forma $\begin{pmatrix} t+1 \\ -1-z \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y, como las preimágenes por f están en $M_2(\mathbb{R})$

concluimos que $f^{-1}(u) = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 & -1-z \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; t, z \in \mathbb{R} \right\}$

(c) Im f es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$, luego una base para Im f es $\{1 + x^3,\ x + x^2\}$ (obtenida desde Col M_f)

Ker g es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$, luego una base para Ker g es $\{1 + x^3,\ x + x^2\}$

Ambos subespacios vienen dados por la misma base, luego son iguales

(d) Para calcular la matriz coordenada de la composición, procedemos de la siguiente forma:

(e) Usamos la aplicación coordenada $c_{\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

que transforma $T = \text{Ker } f + \text{Im } g$ en $\hat{T} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Reducimos el subconjunto generador $\hat{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y aplicamos procedimiento de implícitas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{array} \right] \Rightarrow d - a = 0$$

única ecuación. Devolvemos a $\boxed{\text{Ker } f + \text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; d - a = 0 \right\}}$

- Calculamos la matriz coordenada de la composición

$$f\circ g : (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \xrightarrow[M_g]{g} (M_2(\mathbb{R}), \mathcal{C}_c) \xrightarrow[M_f]{f} (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c)$$

y sabemos que:

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(f\circ g) = M_{\mathcal{C}_c}^{\mathcal{B}_c}(f) \cdot M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}_c}(g)$$

$$= M_f \cdot M_g =$$

- Calculamos ahora la $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f\circ g)$ usando el esquema siguiente:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}) \arrow[rr] \arrow[d, shift right, "P"'] & & (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{C}) \arrow[d, shift left, "Q"] \\
(\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \arrow[rr, "M_f \cdot M_g"'] \arrow[u, dotted, shift right, "P^{-1}"'] & & (\mathbb{R}_3[x], \mathcal{B}_c) \arrow[u, dotted, shift left, "Q^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

- P matriz del cambio de bases $\mathcal{B}_c \xleftarrow{P} \mathcal{B}$ $\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Q matriz del cambio de bases $\mathcal{B}_c \xleftarrow{Q} \mathcal{C}$ $\therefore$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz pedida es:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f\circ g) = Q^{-1} M_f M_g P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hay que calcular Q^{-1}

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & I_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \approx \cdots\cdots \left[\begin{array}{c|c} I_4 & Q^{-1} \end{array}\right]$$

y ejecutar correctamente el producto

PREGUNTA 1-C

(a) • Las 5 propiedades de la suma de e.v. son:

1. $u+v \in V$ para todo $u, v \in V$ (operación interna)
2. $u+v = v+u$ para todo $u, v \in V$ (conmutativa)
3. $(u+v)+w = u+(v+w)$ (asociativa)
4. Existe elemento neutro, llamado 0 : $u+0 = 0+u = u$ para todo $u \in V$
5. Existe elemento opuesto para cada vector: Dado $u \in V$ existe un vector (único) $-u$ t.q. $u+(-u) = (-u)+u = 0$.

• Observemos que F es un subconjunto de polinomios 3-truncados $ax^3+bx^2+cx+d = p(x)$ definidos por las ecuaciones

$p(0) = \alpha = d$ y $p'(0) = \beta = c$

de este modo podemos escribir

$F = \{ax^3+bx^2+cx+d \mid d = \alpha \quad c = \beta \ , a, b \in \mathbb{R}\}$

Para que F sea subespacio, el polinomio nulo debe estar en F luego: $0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \in F \iff \alpha = \beta = 0$

de donde si $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$ F no es subespacio $(\vec{0} \notin F)$

y cuando $\alpha = \beta = 0$ tenemos

$F = \{ax^3+bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{x^3, x^2\}$

F está generado por la familia de vectores $\{x^2, x^3\}$ luego es un subespacio. La familia es l.i.:

$ax^2+bx^3 = \vec{0} \rightarrow a = b = 0$

luego $\{x^2, x^3\}$ es una base de F de donde $\dim F = 2$

(b) T está definido por ecuaciones implícitas. Resolvemos $a+2b-c = 0$: $c = a+2b$ $a, b \in \mathbb{R}$ y expresamos T usando las soluciones

$T = \{ax^3+bx^2+(a+2b)x+d \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} =$

$= \{a(x^3+x)+b(x^2+2x)+d \cdot 1 \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{x^3+x, x^2+2x, 1\}$

La familia $\{x^3+x, x^2+2x, 1\}$ genera T y es l.i.:

$\vec{0} = a(x^3+x)+b(x^2+2x)+d \cdot 1 = ax^3+bx^2+(a+2b)x+d \implies$

$a = 0, \ b = 0, \ a+2b = 0, \ d = 0 \ \therefore \ a = b = d = 0.$

luego $\{x^3+x,\ x^2+2x,\ 1\}$ es una base de T. Para ampliar a base de $\mathbb{R}_3[x]$ hay que añadir un vector adicional. Lo podemos "elegir" de forma intuitiva, por ejemplo "x" y comprobar que $\{x^3+x,\ x^2+2x,\ 1,\ x\}$ es base probando que es l.i. en $\mathbb{R}_3[x]$. Mediante el isomorf° dado por la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ $\{1, x, x^2, x^3\}$ el problema de l.i. es equivalente a que

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ 1\ \ x\ \ x^2+2x\ \ x^3+x \end{array}$$

tenga rango 4 lo que es evidente.

El otro procedimiento, más algorítmico ampliar con una base de $\mathbb{R}^4$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y aplicar reducción gaussiana.

(c) Cualquier aplicación matricial $T_A: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con A matriz 3×4 y de rango $3 = \dim \mathbb{R}^3$; Tomar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

lo que nos proporciona $T_A: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z+t \\ z-t \end{pmatrix}$$

A probar: si $f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, lineal cumple que $\dim \ker f = 2$, entonces f no es suprayectiva.

En efecto: El Teorema de la dimensión aplicado a f dice que

$$\dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

luego $n+1 = 2 + \dim \operatorname{Im} f$, de donde $\dim \operatorname{Im} f = n+1-2 = n-1 \neq n$. Así, como $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\dim \operatorname{Im} f < \dim \mathbb{R}^n = n$, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^n$ y, por tanto, f no es suprayectiva

PREGUNTA 2-C:

ANÁLOGO DESARROLLO que en EXÁMENES DE TIPO A ó B.