Soluciones a los ejercicios del examen del 26 de noviembre (versión 1)

1. Se trata de calcular el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3}\,(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$$

y estudiar entonces el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$.

El límite es 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3}\,(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}) &= \sqrt{n^3}\;\frac{(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1})}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}\\ &= \sqrt{n^3}\;\frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \frac{2}{\sqrt{1+1/n^3}+\sqrt{1-1/n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+1} = 1\,.\end{aligned}$$

Por tanto $\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{1/\sqrt{n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, es decir $\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Por el criterio de paso al límite, la serie converge si y sólo si converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Como $\sqrt{n^3}=n^{3/2}$ y $3/2>1$ concluimos que la serie es convergente.

2. Se pregunta sobre la función dada por

$$f(x) = \log{(1+\log x)} - \log x + 1\,.$$

El dominio de f lo forman los puntos x tales que su logaritmo existe y es mayor que -1 (o sea, tales que existe el logaritmo de $(1+\log x)$). Es decir, el dominio de f es el intervalo $(e^{-1},+\infty)$, que también podemos escribir como $(1/e,+\infty)$.
$\displaystyle\lim_{x\to e^{-1}} f(x) = -\infty$, porque $-\log x+1\to 2$ y $\log{(1+\log x)}\to-\infty$.
El límite en $+\infty$ no es tan directo porque $\log{(1+\log x)}\to+\infty$ y $\log x\to+\infty$, luego tenemos una indeterminación $\infty-\infty$. La resolvemos poniendo

$$f(x) = \log{(1+\log x)} - \log x + 1 = \log\frac{1+\log x}{x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,$$

ya que como sabemos $\dfrac{1+\log x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (si no lo sabemos aplicamos L'Hospital).

La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+\log x)} - \frac{1}{x} = \frac{-\log x}{x(1+\log x)}\,,$$

y como el denominador es positivo el signo de f' es el de $-\log x$: $f'(x)>0$ si $x<1$ y $f'(x)<0$ si $x>1$, siendo $f'(1)=0$.

Deducimos que f es creciente en $(1/e, 1]$ y es decreciente en $[1, +\infty)$, con lo que alcanza su máximo absoluto en $x = 1$.

El valor máximo es $f(1) = 1 > 0$. Por los límites en los extremos y la monotonía en cada intervalo, resulta que hay un único punto en $(1/e, 1)$ en el que f vale 0, y otro en $(1, +\infty)$. Es decir, la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones.

Por último buscamos los puntos de inflexión, estudiando la derivada segunda:

$$f''(x) = -\frac{1 + \log x - (2 + \log x)\log x}{x^2(1 + \log x)^2} = \frac{\log^2 x + \log x - 1}{x^2(1 + \log x)^2}\,.$$

El signo de $f''(x)$ es el de $t^2 + t - 1$, donde $t = \log x \in (-1, +\infty)$. Dicho polinomio se anula en $t = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ y en $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, es negativo entre ambos valores y es positivo en el resto. Pero el primero de dichos valores es menor que -1, y entonces resulta que $f''(x) = 0$ si y sólo si $x = e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, que es el único punto de inflexión de f (a su izquierda f es cóncava y a su derecha es convexa).