Hoja 4

① Identifica qué espacios vectoriales son isomorfos entre sí y encuentra un isomorfismo entre ellos.

a) $\mathbb{R}^7$ e) $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$

b) $\mathbb{R}^{15}$ d) $M_{3,5}(\mathbb{R})$ g) $\mathbb{R}[x]_{\leq 14}$.

c) $M_3(\mathbb{R})$ f) $\mathbb{R}[x]_{\leq 8}$

Recordar que si V es un F-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B}$ es una base de V, la aplicación $C_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow F^n$, $v \longmapsto C_{\mathcal{B}}(v)$ es un isomorfismo.

Así, como sabemos por ejercicio hecho en clase

$\dim M_3(\mathbb{R}) = 9 \Longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}^9$

$\dim M_{3,5}(\mathbb{R}) = 15 \Longrightarrow M_{3,5}(\mathbb{R})$ " " a $\mathbb{R}^{15}$

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 6} = 7 \Longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 6}$ " " a $\mathbb{R}^7$

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 8} = 9 \Longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 8}$ " " a $\mathbb{R}^9$

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 14} = 15 \Longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 14}$ " " a $\mathbb{R}^{15}$

entonces, los espacios que están en el enunciado en la misma fila son isomorfos.

Si V y V' son F-espacios vectoriales isomorfos entonces existe un isomorfismo $f: V \longrightarrow V'$ y así $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 0 + \dim V'$ $\Rightarrow \dim V = \dim V'$. Por tanto, espacios en el enunciado en distintas filas no son isomorfos entre sí ya que no tienen la misma dimensión.

Isomorfismo entre $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$ y $\mathbb{R}^7$. Sea $\mathcal{B} := \{1, x, \dots, x^6\}$ base de $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}: \mathbb{R}[x]_{\leq 6} &\longrightarrow \mathbb{R}^7 \\ a_0 + a_1 x + \dots + a_6 x^6 &\longmapsto (a_0, a_1, \dots, a_6) \end{aligned}$$ es isomorfismo por teoría

Isomorfismo $\mathbb{R}[X]_{\leq 14}$ y $\mathbb{R}^{15}$: igual al caso anterior pero con $\mathcal{B} := \{1, x, \dots, x^{14}\}$.

Isomorfismo $M_{3,5}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{15}$: igual al anterior pero con $\mathcal{B}$ el conjunto de matrices con entradas 0 excepto en la posición (i,j) donde i recorre $\{1,2,3\}$ y j recorre $\{1,2,3,4,5\}$. Explícitamente

$$C_{\mathcal{B}} : M_{3,5}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{15}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} \longmapsto (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{14}, a_{15}).$$

Isomorfismo $M_3(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}[X]_{\leq 8}$. Recordar que dada una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de un F-espacio vectorial V, y $\{v_1', \dots, v_n'\} \subseteq V'$ entonces existe una única aplicación lineal $f: V \to V'$ t.q. $f(v_i) = v_i'$ $i = 1, \dots, n$. (Resultado acerca de construcción de aplicaciones lineales).

Consideramos la base $\mathcal{B} := \{1, x, \dots, x^8\}$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 8}$ y la aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 8} \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_8 X^8 \longmapsto \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}$$

que es la aplicación lineal que corresponde a enviar

1 a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, x a $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, x^2 a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, etc.

claramente $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ y por lo tanto f es inyectiva y suprayectiva, por lo que es un isomorfismo.

Un razonamiento análogo da un isomorfismo entre $M_{3,5}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}[X]_{\leq 14}$.

(2) Encuentra los valores de λ para los cuales la aplicación

$$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$
$$p(x) \longmapsto x p(x)' - \lambda p(x)$$

no es isomorfismo.

Puesto que el espacio de salida y el de llegada tienen la misma dimensión f deja de ser isomorfismo si deja de ser inyectiva, es decir $\ker f \neq \{0\}$.

Calculamos $\ker f$

Sea $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$:

$$f(p(x)) = 0 \Leftrightarrow x p(x)' = \lambda p(x) \Leftrightarrow a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & y \quad p(x) = a_0 \\ \lambda = 1 & y \quad p(x) = a_1 x \\ \lambda = 2 & y \quad p(x) = a_2 x^2 \\ \lambda = 3 & y \quad p(x) = a_3 x^3 \\ \lambda \neq 0,1,2,3 & y \quad p(x) = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ los valores de λ para los cuales $\ker f \neq \{0\}$ son $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

$\therefore$ $\boxed{f \text{ no es isomorfismo} \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1,2,3\}.}$

③ Para la aplicación lineal f del ejercicio anterior, encuentra su matriz coordenada $C_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ donde $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\}$

Recordamos que $f(p(x)) = xp(x)' - \lambda p(x)$. La matriz $C_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ se obtiene poniendo por columnas las coordenadas de los elementos de $f(\mathcal{B})$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Así

$$f(1) = -\lambda \equiv (-\lambda,0,0,0)^T$$
$$f(x) = x-\lambda x = (1-\lambda)x \equiv (0,1-\lambda,0,0)^T$$
$$f(x^2) = 2x^2-\lambda x^2 = (2-\lambda)x^2 \equiv (0,0,2-\lambda,0)^T$$
$$f(x^3) = 3x^3-\lambda x^3 = (3-\lambda)x^3 \equiv (0,0,0,3-\lambda)^T$$

$$\therefore \boxed{C_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.}$$

(4) Considera la matriz $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ y la aplicación lineal.

$$f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto AX-XA$$

Encuentra bases para el núcleo y la imagen de f.

Sea $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$. $X\in \operatorname{Ker} f \iff AX-XA=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \iff$

$$\begin{bmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ x_1+x_3 & x_2+x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2 & x_1+x_2\\ x_3+x_4 & x_3+x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \iff$$

$$x_3=x_2 \quad , \; x_4=x_1 \iff X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_1\end{bmatrix} \text{ para ciertos } x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

$$\therefore \operatorname{Ker} f=\left\{\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_1\end{bmatrix} \,\middle|\, x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_1\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \,\middle|\, x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}.$$ Así

$$\boxed{\text{base de } \operatorname{Ker} f \text{ es } \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}.}$$

Calculamos una base para $\operatorname{Im} f$. (Observar que $\dim \operatorname{Im} f=\dim M_2(\mathbb{R})-\dim \operatorname{Ker} f$ $=4-2=2$ $\therefore$ la base tendrá 2 elementos).

$$f(M_2(\mathbb{R}))=f\left(\operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\right).$$

$$=\operatorname{Gen}\left\{f\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right),f\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right),f\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right),f\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\right\}.$$

$$=\operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}=\operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\therefore \boxed{\text{base de } \operatorname{Im} f \text{ es } \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}.}$$

5 Considera la aplicación lineal.

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x-y,\ y-z,\ x+y+z)$$

y las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

Para esta aplicación lineal y estas bases encuentra todas las matrices involucradas en la fórmula del cambio de bases para matrices coordenadas

$$C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\, C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f)\, C^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$$

y comprueba que esta fórmula se cumple.

Calculamos $C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f)$: necesitamos las coordenadas de los eltos de $f(\mathcal{B}_1)$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$.

$f(1,0,0) = (1,0,1) \equiv (1,0,1)^T$ $\quad f(0,1,0) = (-1,1,1) \equiv (-1,1,1)^T$ $\quad f(0,0,1) = (0,-1,1) \equiv (0,-1,1)^T$

$$\therefore \quad \boxed{C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Calculamos $C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f)$

resolver sistemas.

$$f(1,1,0) = (0,1,2) = -\tfrac{1}{2}(1,1,0) + \tfrac{3}{2}(0,1,1) + \tfrac{1}{2}(1,0,1) \equiv (-1/2,\ 3/2,\ 1/2)^T$$

$$f(0,1,1) = (-1,0,2) = -3/2\,(1,1,0) + 3/2\,(0,1,1) + 1/2\,(1,0,1) \equiv (-3/2,\ 3/2,\ 1/2)^T$$

$$f(1,0,1) = (1,-1,2) = -1\,(1,1,0) + 0\,(0,1,1) + 2\,(1,0,1) \equiv (-1,0,2)^T.$$

$$\therefore \quad \boxed{C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}.}$$

Calculamos $C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ (coordenadas de $\mathcal{B}_1$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$). Pero nos damos cuenta de que es más sencillo calcular $C^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ (coordenadas de $\mathcal{B}_2$ respecto de $\mathcal{B}_1$):

$(1,1,0) \equiv (1,1,0)^T$ respecto de $\mathcal{B}_1$

$(0,1,1) \equiv (0,1,1)^T$ " "

$(1,0,1) \equiv (1,0,1)^T$ " "

$$\therefore \boxed{C^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Invertimos la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{21}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3(\frac{1}{2}),\ F_{23}(1),\ F_{13}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \therefore \boxed{C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Realizamos la comprobación $\quad C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = C_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\, C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1}(f)\, C^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$

$$C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}\, C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f)\, C^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} = C_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f).$$

⑥ Considera la aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$p(x) \longmapsto (p(0), p(1), p(2))$$

Encuentra la matriz coordenada $C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ donde $\mathcal{B}=\{1,x,x^2\}$ $\mathcal{B}'=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Comprueba que para $v=1+x+x^2$ se cumple que

$$C_{\mathcal{B}'}(f(v)) = C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\, C_{\mathcal{B}}(v).$$

Necesitamos las coordenadas de $f(\mathcal{B})$ respecto de $\mathcal{B}'$:

$$f(1) = (1,1,1) \equiv (1,1,1)^T$$
$$f(x) = (0,1,1) \equiv (0,1,2)^T$$
$$f(x^2) = (0,1,4) \equiv (0,1,4)^T$$

$$\therefore \quad \boxed{C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.}$$

<u>Calculamos $C_{\mathcal{B}}(v)$</u>: $v = 1+x+x^2 \equiv (1,1,1)^T$ resp. de $\mathcal{B}$.

<u>Calculamos $C_{\mathcal{B}'}(f(v))$</u>: $f(v) = (1,3,7) \equiv (1,3,7)^T$ resp. de $\mathcal{B}'$

$$\boxed{C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\, C_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = C_{\mathcal{B}'}(f(v)).}$$

7 Encuentra la fórmula de una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple (todas) las siguientes condiciones.

a) $(1,0,1) \in \operatorname{Ker} f$

b) $(1,0,0) \in f(\mathbb{R}^3)$

c) $f(0,0,1) = (1,0,0)$

d) $(0,1,0)$ es un vector propio de valor propio 2 de f.

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{ll} f(1,0,1) = (0,0,0) & (\text{por a)}) \\ \boxed{f(0,0,1) = (1,0,0)} & (\text{por c)}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{restando}} \boxed{f(1,0,0) = (-1,0,0).}$$

$$\boxed{f(0,1,0) = 2(0,1,0)} \quad (\text{por d)})$$

Así que

$$f(x,y,z) = f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big)$$

$$= x f(1,0,0) + y f(0,1,0) + z f(0,0,1)$$

usando los recuadros grises anteriores.

$$= x(-1,0,0) + y(0,2,0) + z(1,0,0) = (z-x,\, 2y,\, 0)$$

$\therefore$ $\boxed{f(x,y,z) = (z-x,\, 2y,\, 0)}$ es la candidata, pero hay que comprobar que cumple todo lo que se pide

a) $f(1,0,1) = (1-1,\, 2\cdot 0,\, 0) = (0,0,0)$ $\therefore (1,0,1) \in \operatorname{Ker} f$

b) $f(0,0,1) = (1,0,0) \Rightarrow (1,0,0) \in f(\mathbb{R}^3)$

c) $f(0,0,1) = (1,0,0)$

d) $f(0,1,0) = (0,2,0) = 2(0,1,0)$.