EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º – GM / GII) — 25 - 05 - 13

Nombre:

Titulación: □ **GM** — □ **GII**

Tiempo 30 minutos. El test vale 3=1+2 puntos. Cada respuesta acertada suma 0,1 puntos y si es incorrecta resta 0,1 puntos (en caso de duda es mejor no contestar). La nota mínima de test es 0 puntos.

1		6		11	
2		7		12	
3		8		13	
4		9		14	
5		10		15	
16		21		26	
17		22		27	
18		23		28	
19		24		29	
20		25		30	

Señalar e indicar la única respuesta correcta de las tres posibles (a), (b) y (c) de cada cuestión del siguiente test en el cuadro correspondiente de la tabla anterior.

1. La cadena de símbolos $(p \vee q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q)$ formada a partir del alfabeto $\mathcal{A} = \{p, q\}$

   (a) Es una proposición bien formulada

   (b) No es una proposición bien formulada

   (c) No se puede saber

   La respuesta correcta es la (b)

2. Sabiendo que $\bar{v}((p \rightarrow q) \rightarrow p) = 0$. ¿Qué puede asegurarse de $v(p)$?

   (a) $v(p) = 1$

   (b) $v(p) = 0$

   (c) $v(p)$ puede valer 0 ó 1

   La respuesta correcta es la (b)

3. La proposición $p \wedge \neg p$ es una

   (a) tautología

   (b) contradicción

   (c) contingencia

   La respuesta correcta es la (b)

4. La proposición $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es una

   (a) contradicción

   (b) tautología

   (c) contingencia

   La respuesta correcta es la (b)

5. La proposición $(q \rightarrow r) \rightarrow \neg(q \vee r)$ es una

   (a) contradicción

   (b) tautología

   (c) contingencia

   La respuesta correcta es la (c)

6. Una forma coclausal de la proposición $\neg((p \to q) \to r)$ es

   (a) $(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$

   (b) $(\neg q \vee q) \wedge \neg r$

   (c) $(p \wedge \neg q) \vee r$

   La respuesta correcta es la (a)

7. Sea A una álgebra de Boole. Entonces,

   (a) Existe $x \in A$ tal que $0 \neq x \neq 1$

   (b) A puede ser vacía

   (c) A puede tener infinitos elementos

   La respuesta correcta es la (c)

8. Sea P una proposición. Entonces,

   (a) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $Q \models P$

   (b) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $P \models Q$

   (c) P es una tautología si y sólo si para toda proposición Q, $\{P, \neg Q\}$ es contradictorio.

   La respuesta correcta es la (a)

9. Sea P una tautología y Γ un conjunto de proposiciones. Entonces,

   (a) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \cup \{P\}$ es contradictorio

   (b) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es contradictorio

   (c) Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma \models P$

   La respuesta correcta es la (a)

10. Sean Γ y Σ dos conjuntos de proposiciones y P, Q dos proposiciones. Entonces, si $\Gamma \models P$ y $\Sigma \models Q$ se sigue que

    (a) $\Gamma \cup \Sigma \models P \vee Q$

    (b) $\Gamma \cap \Sigma \models P \wedge Q$

    (c) $(\Gamma \cap \Sigma) \cup \{\neg P \vee \neg Q\}$ es contradictorio

    La respuesta correcta es la (a)

11. El esquema de inferencia

$$\frac{P}{\neg\neg P}$$

(a) es una regla de inferencia

(b) es una regla primitiva

(c) es un procedimiento primitivo

La respuesta correcta es la (a)

12. En una deducción natural se han aplicado reglas primitivas y el procedimiento de la regla de los casos pero no se han aplicado los demás procedimientos. Entonces,

(a) se han introducido un número par de supuestos

(b) se han introducido un número impar de supuestos

(c) es posible que el número de supuestos haya sido nulo

La respuesta correcta es la (a)

Consideremos el conjunto de variables $\{x, y\}$, de constantes $\{a\}$ y de funciones $\{f, g\}$, con aridades $\mathrm{ar}(f) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = 2$.

13. La expresión $g(g(f(x), a), f(y))$ es

(a) un término

(b) una fórmula atómica

(c) una fórmula proposicional

La respuesta correcta es la (a)

14. Consideremos el predicado A de aridad 1. La expresión $A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

(a) un término

(b) una fórmula atómica

(c) una fórmula proposicional no atómica

La respuesta correcta es la (b)

15. La expresión $\exists x \exists y A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

(a) una fórmula que no es proposicional

(b) una fórmula atómica

(c) una fórmula proposicional no atómica

La respuesta correcta es la (a)

16. Si tomamos como dominio de una interpretación I los números enteros, y tomamos $\bar{a} = 0$, $\bar{f}(z) = -z$, $\bar{g}(z, z') = z + z'$. Para la valoración $v(x) = 1$, $v(y) = -1$, se tiene que

    (a) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y))) = -2$

    (b) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y))) = 0$

    (c) $\bar{v}(g(g(f(x), a), f(y)))$ es distinto de los anteriores valores

    La respuesta correcta es la (b)

17. Si tomamos como dominio de una interpretación I los números enteros, $\bar{a} = 0$, $\bar{f}(z) = -z$, $\bar{g}(z, z') = z + z'$ y $\bar{A} = \{z \in \mathbb{Z} | \exists u \in \mathbb{Z}(z = u + u)\}$. Para la valoración $v(x) = 0$, $v(y) = 1$, se tiene que

    (a) $(I, v) \models A(g(g(f(x), a), f(y)))$

    (b) $I \models A(g(g(f(x), a), f(y)))$

    (c) $I \models \exists x \exists y A(g(g(f(x), a), f(y)))$

    La respuesta correcta es la (c)

18. La fórmula $F = A(g(g(f(x), a), f(y)))$ es

    (a) una ley lógica

    (b) Para toda interpretación y valoración (I, v), se tiene que $(I, v) \not\models F$

    (c) Existe una interpretación y una valoración (I, v) tal que $(I, v) \models F$

    La respuesta correcta es la (c)

19. La fórmula $G = \forall x A(x) \vee \forall x \neg A(x)$ verifica:

    (a) Es una ley lógica

    (b) Para toda interpretación y valoración (I, v), se tiene que $(I, v) \not\models G$

    (c) Existe una interpretación I tal que para toda valoración v, se tiene que $(I, v) \models G$

    La respuesta correcta es la (c)

20. En la fórmula $\exists x R(x, y) \vee \forall y A(y)$ todas las apariciones de la variable y son

    (a) libres

    (b) libres y ligadas

    (c) libres o ligadas

    La respuesta correcta es la (c)

21. Considerar la fórmula $F = \exists y A(x,u,y)$ y el término $t = f(y,u)$. Entonces,

    (a) el término t está libre para la variable x en la fórmula F

    (b) el término t está libre para la variable u en la fórmula F

    (c) el término t no está libre para la variable x en la fórmula F

    La respuesta correcta es la (c)

22. Consideremos las fórmulas $F = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $G = \exists x Q(x)$. Entonces se verifica:

    (a) $F \models G$

    (b) $G \models F$

    (c) Ninguna las otras dos opciones

    La respuesta correcta es la (c)

23. Consideremos la fórmula $F = \forall x \exists y A(x,y) \rightarrow \forall x A(x,b)$. Entonces se verifica

    (a) F es una ley lógica

    (b) F es consistente

    (c)$\forall x \exists y A(x,y) \models \forall x A(x,b)$

    La respuesta correcta es la (b)

24. La fórmula $\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$ es lógicamente equivalente a la fórmula

    (a) $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$

    (b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$

    (c) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

    La respuesta correcta es la (a)

25. La fórmula $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$ no es lógicamente equivalente a la fórmula

    (a) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

    (b) $\forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))$

    (c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

    La respuesta correcta es la (c)

26. La fórmula $\exists x P(x)$ es inconsistente si y sólo si
    (a) $P(a)$ es inconsistente
    (b) $P(a)$ es consistente
    (c) $P(x)$ es consistente
    La respuesta correcta es la (a)
27. Una posible forma prenexa de la fórmula $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ es
    (a) $\exists x \exists y \neg(P(x) \to R(x,y))$
    (b) $\forall x \exists y \neg(P(x) \to R(x,y))$
    (c) $\exists x \forall y (P(x) \land \neg R(x,y))$
    La respuesta correcta es la (c)
28. Una posible forma prenexa de la fórmula $\forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$ es
    (a) $\forall x \exists x (P(x) \lor Q(x))$
    (b) $\forall x \exists y (P(x) \lor Q(y))$
    (c) $\exists x \forall x (P(x) \lor Q(x))$
    La respuesta correcta es la (b)
29. El siguiente conjunto de fórmulas $\{P(x), \neg P(a)\}$
    (a) es inconsistente
    (b) tiene un modelo
    (c) es consistente si $x = a$
    La respuesta correcta es la (a)
30. El siguiente conjunto de fórmulas $\{\forall x P(x), P(a)\}$
    (a) es inconsistente
    (b) tiene un modelo
    (c) existen modelos de $\forall x P(x)$ que no son modelos de $P(a)$
    La respuesta correcta es la (b)

EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º – GM / GII) — 25 - 05 - 13

Nombre:

Titulación: □ **GM** — □ **GII**

Problemas

1. (**1 punto**) Considerar la proposición $P = (p \oplus q) \leftrightarrow r$, y el alfabeto $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$.

a) Dar la forma normal conjuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

b) Dar la forma normal disyuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

c) Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga dos modelos, Y tenga dos modelos, $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología.

	Indicar las respuestas del problema 1 en la siguientes filas:
a) FNC:	
b) FND:	
c) X	
Y	

Una solución:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv ((p \oplus q) \to r) \wedge (r \to (p \oplus q))$

$(p \oplus q) \to r \equiv \neg(p \oplus q) \vee r \equiv (p \leftrightarrow q) \vee r \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee r \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$r \to (p \oplus q) \equiv \neg r \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg r \vee ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Entonces

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto los contramodelos de P son $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los modelos de P son $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,0)\}$ que determinan la forma disyuntiva normal

$P \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de P para $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología; es decir que $X \vee Y \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Para que X, Y tengan dos modelos y $X \wedge Y$ sean una contradicción tengo esencialmente tres soluciones

$X_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$, $\quad Y_1 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o

$X_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $\quad Y_2 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o bien

$X_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, $\quad Y_3 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

2. (**2 puntos**) Consideremos el siguiente argumento:

Cuando alguien es miope, su padre o su madre resulta ser miope también.
Todo el mundo ama a su padre y a su madre

Si Raúl es miope, entonces algún miope es amado por alguien.

Tomar los siguientes símbolos

r es una constante que representa a Raúl

m, p son simbolos de función de aridad 1, de modo que, por ejemplo, $m(x)$ representa a la madre de un individuo del universo de los humanos, y $p(x)$ representa al padre.

M es un predicado de aridad 1, que representa el hecho de ser miope.

A es un predicado binario de modo que $A(x, y)$ significa que dos individuos se aman.

(a) (**0.2 puntos**) Representar con fórmulas una formalización del argumento anterior.

(b) (**1.8 puntos**)Utilizar el método de resolución para probar que el siguiente esquema de inferencia es una regla de inferencia.

$$\begin{array}{l}
(1) M(r) \\
(2) \forall x (M(x) \to (M(p(x)) \vee M(m(x)))) \\
(3) \forall x (A(x, p(x)) \wedge A(x, m(x))) \\
\hline
\text{(O) } \exists x \exists y (A(x, y) \wedge M(y))
\end{array}$$

Una solución:

(a) Una formalización del razonamiento anterior puede ser la siguiente:

$$\begin{array}{l}
\forall x (M(x) \to (M(p(x)) \vee M(m(x)))) \\
\forall x (A(x, p(x)) \wedge A(x, m(x))) \\
\hline
M(r) \to \exists x \exists y (A(x, y) \wedge M(y))
\end{array}$$

(b) Las cláusulas obtenidas van de la fila 1 a la 5. A continuación se ha incluido una resolución.

1. $M(r)$ [cláusula de (1)]

2. $\neg M(x) \vee M(p(x)) \vee M(m(x))$ [cláusula de (2)]

3. $A(x, p(x))$ [cláusula de (3)]

4. $A(x, m(x))$ [cláusula de (3)]

5. $\neg A(x,y) \vee \neg M(y)$ [negación de (O)].

6. $\neg M(p(x))$ [3,5($p(x)|y$)].

7. $\neg M(m(x))$ [4,5($m(x)|y$)].

8. $\neg M(x)$ [2,6-7].

9. 0 [1, 8 ($r|x$)]

Nota1: Para la resolución anterior se ha tomado un cierto criterio para ir seleccionando las parejas y sustituciones, pero se puede llegar al conjunto nulo utilizando otras estrategias que pueden ser muy diferentes entre sí.

Nota2: En la resoluciones de este tipo hay que tener cuidado y no sustituir constantes por variables.

3. (**2 puntos**)

Una patrulla de la Guardia Civil está buscando alienígenas en el barrio de Varea. Hay tres posibles sospechosos: Pepe, Quique y Raimundo. La Guardia Civil dispone de una prueba genética contaminada, de la que se desprende que Raimundo es terricola o Pepe es terrícola.

Interrogan a dos sospechosos, Quique y Raimundo, que responden lo siguiente:

Quique: En sus pesquisas tengan en cuenta que Pepe miente.

Raimundo: Pepe es terricola.

Se supone que si un sujeto es terrícola, entonces su declaración es verdadera.

Tendiendo en cuenta toda la información anterior:

a) (**1,5 puntos**) Probar por deducción natural que Quique no es terrícola.

Indicación: Utilizar los átomos: P , Pepe dice la verdad; Q, Quique dice la verdad; R, Raimundo dice la verdad; P1, Pepe es terrícola; Q1, Quique es terrícola; R1, Raimundo es terrícola. Observar que la información anterior es equivalente al siguiente esquema de inferencia:

$$\begin{array}{c} R1 \vee P1 \\ Q \to \neg P \\ \neg P \to Q \\ R \to P1 \\ P1 \to R \\ P1 \to P \\ Q1 \to Q \\ R1 \to R \\ \hline \neg Q1 \end{array}$$

b)(**0,5 puntos**) Encontrar alguna premisa que no sea necesaria para deducir que Quique no es terrícola.

Una solución:

a) Consideremos la siguiente deducción:

1. $R1 \vee P1$ [Premisa]
2. $Q \to \neg P$ [Premisa]
3. $\neg P \to Q$ [Premisa]
4. $R \to P1$ [Premisa]
5. $P1 \to R$ [Premisa]
6. $P1 \to P$ [Premisa]
7. $Q1 \to Q$ [Premisa]
8. $R1 \to R$ [Premisa]
9. $\mid Q1$ [Supuesto]
10. $\mid Q$ [MP(7,9)]
11. $\mid \neg P$ [MP(2,10)]
12. $\mid\mid R1$ [Supuesto]
13. $\mid\mid R$ [MP(8,12)]
14. $\mid\mid P1$ [MP(4,13)]
15. $\mid\mid P$ [MP(6,14)]
16. $\mid\mid P \wedge \neg P$ [IC(15,11)]
17. $\mid\mid P1$ [Supuesto doble]
18. $\mid\mid P$ [MP(6,14)]
19. $\mid\mid P \wedge \neg P$ [IC(18,11)]
20. $\mid P \wedge \neg P$ [ED 1, 12-16,17-18]
21. $\neg Q1$ [IN 9-20]

b) En la deducción anterior no se han utilizado las premisas 3 y 5.

Deducción natural de proposiciones

Las *reglas primitivas de la deducción natural* son las siguientes:

$$\text{(MP)} \quad \frac{\begin{array}{c}P \to Q \\ P\end{array}}{Q} \qquad \text{(EN)} \quad \frac{\neg\neg P}{P}$$

$$\text{(IC)} \quad \frac{\begin{array}{c}P \\ Q\end{array}}{P \wedge Q} \qquad \text{(EC)} \quad \frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{(EC)} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

$$\text{(ID)} \quad \frac{P}{P \vee Q} \qquad \text{(ID)} \quad \frac{P}{Q \vee P}$$

La *deducción natural* de una conclusión a partir de un conjunto de premisas ($\Gamma \vdash Q$) utiliza las reglas primitivas anteriores y estos tres *procedimientos primitivos*:

- *Teorema de la deducción*. Se tiene una deducción $\Gamma \vdash P \to Q$ si se hace la deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ donde Γ se ha extendido con un **supuesto** P que se cancelará cuando se obtenga Q. En esquema:

$$\text{(TD)} \quad \frac{P \vdash Q}{P \to Q}$$

- *Reducción al absurdo*. Se tiene una deducción $\Gamma \vdash \neg P$ si se hace una deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q \wedge \neg Q$. Como antes Γ amplia temporalmente con un nuevo **supuesto** P que se cancelará cuando se deduzca $Q \wedge \neg Q$. En esquema:

$$\text{(RA)} \quad \frac{P \vdash Q \wedge \neg Q}{\neg P}$$

- *Prueba por casos*. Se tiene la deducción $\Gamma \vdash R$ si se tiene $P \vee Q$ y se hacen las deducciones $\Gamma \cup \{P\} \vdash R$ y $\Gamma \cup \{Q\} \vdash R$. Se trata de dos deducciones en paralelo, la primera con un primer **supuesto** P y la segunda con un **segundo supuesto** Q. Los dos supuestos se cancelarán cuando concluyan las dos deducciones. En esquema:

$$\text{(ED)} \quad \frac{\begin{array}{c}P \vee Q \\ P \vdash R \\ Q \vdash R\end{array}}{R}$$

Deducción natural con fórmulas cerradas

A las reglas y procedimientos primitivos de la deducción natural con proposiciones se añaden además las siguientes:

- La regla de *eliminación del cuantificador universal*:

$$\text{(EU)} \quad \frac{(\forall x)P(x)}{P(a)}$$

- La regla de *introducción del cuantificador universal*

$$\text{(IU)} \quad \frac{\begin{array}{c} F_{i_1} \\ \vdots \\ F_{i_n} \\ \vdots \\ P(a) \text{ (No es un supuesto)} \end{array}}{(\forall x)P(x)}$$

  Si $P(a)$ se ha deducido de premisas o supuestos previos no cancelados $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$ (es decir, $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}\} \vdash P(a)$), donde el símbolo de constante a no aparece en $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$, entonces se deduce $(\forall x)P(x)$.

- La regla de *introducción del cuantificador existencial*

$$\text{(IE)} \quad \frac{P(a)}{(\exists x)P(x)}$$

- El procedimiento primitivo llamado *Prueba por elección*

$$\text{(EE)} \quad \frac{\begin{array}{c} F_{i_1} \\ \vdots \\ F_{i_n} \\ \vdots \\ (\exists x)P(x) \\ P(a) \text{ (Supuesto)} \\ \vdots \\ R \end{array}}{R}$$

donde a es un símbolo de constante que no aparece ni en R ni en $P(x)$, ni en en las premisas o supuestos previos no cancelados $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$. El **supuesto** $P(a)$ se cancelará cuando se finalice la deducción.