Estructura de Computadores

Tema 3:

ARITMÉTICA DEL COMPUTADOR

Dr. Iván Luis Pérez Barrón

Grupo de Computación Científica (GRUCACI)



- 3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)
- 3.2. Representación en coma fija
- 3.3. Aritmética en coma fija
- 3.4. Representación en coma flotante
- 3.5. Aritmética en coma flotante



3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)

- 3.2. Representación en coma fija
- 3.3. Aritmética en coma fija
- 3.4. Representación en coma flotante
- 3.5. Aritmética en coma flotante

3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)





- Circuito del procesador que realiza:
 - Operaciones aritméticas: suma, resta, opuesto, multiplicación, división,...
 - Objeto de este tema.
 - Operaciones lógicas: not, and, or, xor,...
 - Estudiadas en el tema anterior.

3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)





• ENTRADAS:

- Registros: contienen los operandos.
- Unidad de control: proporciona un conjunto de señales de control, que ofrecen una combinación distinta para cada operación posible.

SALIDAS:

- Registros: recogen los resultados.
- Registro de estado: contiene un conjunto de indicadores o flags, que son bits que se activan para reflejar diversos detalles del resultado (carry, overflow, signo, resultado cero, paridad,...).

3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)





- Objetivo de este tema: "Aritmética del computador".
- Veremos 2 tipos de aritmética:
 - Coma fija: fundamentalmente números enteros.
 - Coma flotante: números con parte fraccionaria.
- En ambos casos estudiaremos:
 - Representación: forma de expresar los números con ceros y unos.
 - Aritmética: algoritmos para realizar las operaciones.



3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)

3.2. Representación en coma fija

- 3.3. Aritmética en coma fija
- 3.4. Representación en coma flotante
- 3.5. Aritmética en coma flotante



3.2. Representación en coma fija

- 3.2.1. Números enteros sin signo
- 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
- 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
- 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes
- 3.2.5. Números no enteros



- 3.2. Representación en coma fija
 - 3.2.1. Números enteros sin signo
 - 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
 - 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
 - 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes
 - 3.2.5. Números no enteros

3.2.1. Números enteros sin signo



 Los números binarios que hemos manejado hasta ahora han sido enteros sin signo. Por ejemplo:

$$12 d \rightarrow 1100 b$$

- Son los uint (unsigned integer) que utilizamos en los lenguajes de programación.
- Por ejemplo, con uint8 (8 bits) se pueden representar 2⁸ = 256 números, desde el 0 hasta el 255:

0000 0000 b
$$\rightarrow$$
 0 d ... 1111 1111 b \rightarrow 255 d

• **Valor** (A) de un entero sin signo de n bits:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_0 \rightarrow A = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i$$

3.2.1. Números enteros sin signo



¿Cómo representar, por ejemplo, −10.25 d?

$$-10.25 d \rightarrow -1010.01 b$$

- Problema: en un computador sólo disponemos de ceros y unos.
- Por tanto:
 - No hay signo → es necesario algún modo de representación para números enteros con signo.
 - Solución: representación en coma fija.
 - No hay punto → necesitamos un sistema de representación para números con parte fraccionaria.
 - Solución: representación en coma flotante.



- 3.2. Representación en coma fija
 - 3.2.1. Números enteros sin signo
 - 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
 - 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
 - 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes
 - 3.2.5. Números no enteros

3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)



BS Magnitud
$$0 \rightarrow +$$

$$1 \rightarrow -$$

- Representación:
 - **BS**: bit de signo (BS=0 \rightarrow +; BS=1 \rightarrow -).
 - Magnitud: valor absoluto (como los enteros sin signo).
- Ejemplo para una longitud de 8 bits:

$$+25 d \rightarrow 0001 1001 b$$

 $-25 d \rightarrow 1001 1001 b$

• **Valor** (*A*) de un número de *n* bits:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_0 \rightarrow A = \begin{cases} +\sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i & \text{si } a_{n-1} = 0 \\ -\sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i & \text{si } a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)



BS	Magnitud
$0 \rightarrow +$	
$1 \rightarrow -$	

- Inconvenientes:
 - **Suma y resta**: es necesario tener en cuenta los signos de los números (en complemento a dos será directo).
 - Cero: Hay dos representaciones del cero:

$$+0 d \rightarrow 0000 0000 b$$

 $-0 d \rightarrow 1000 0000 b$

• La representación en signo-magnitud (S-M) no se utiliza en los computadores. En su lugar, se emplea la representación en complemento a dos (C-2).



- 3.2. Representación en coma fija
 - 3.2.1. Números enteros sin signo
 - 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
 - 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
 - 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes
 - 3.2.5. Números no enteros



- Son los int (integer) que utilizamos en los lenguajes de programación.
- Igual que en S-M, el primer bit es el **bit de signo** (BS=0 \rightarrow +; BS=1 \rightarrow -):

$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{BS} \\
0 \to + \\
1 \to -
\end{array}$$

 Pero además de ser bit de signo, también tiene un peso asociado: el opuesto al que correspondería a su posición. Por ejemplo, para 4 bits:

-8 +4 +2 +1
BS:
$$0 \rightarrow +$$
 $1 \rightarrow -$

Ejemplo para una longitud de 4 bits:

$$+5 d \rightarrow 0101 b$$
 (+4+1)
-5 d $\rightarrow 1011 b$ (-8+2+1)



-8 +4 +2 +1
BS:
$$0 \rightarrow +$$

 $1 \rightarrow -$

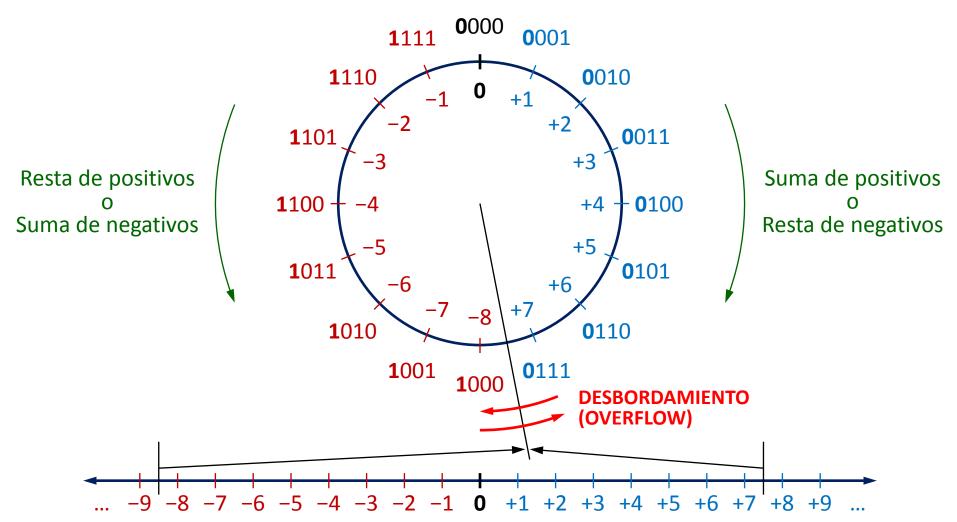
• Valor (A) de un número de n bits en C-2:

$$a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1 a_0 \rightarrow A = \begin{cases} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i & \text{si } a_{n-1} = 0 \\ -2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i a_i & \text{si } a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

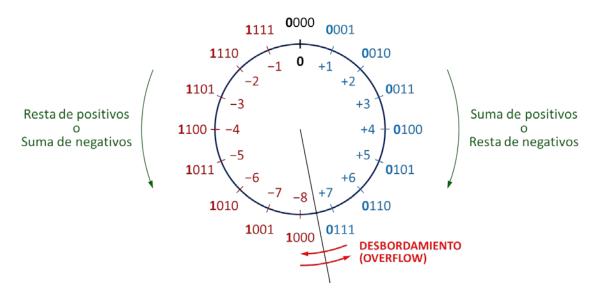
$$\rightarrow A = -2^{n-1}a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^{i}a_{i}$$

- Rango representable en C-2 con 4 bits: [−8,+7]
 - Nº menor: $1000 \text{ b} \rightarrow -8 \text{ d}$
 - Nº mayor: $0111 b \rightarrow +7 d$

- **-8** | +4 | +2 | +1
- BS:
- $0 \rightarrow +$
- $1 \rightarrow -$
- Interpretación geométrica de la representación en C-2:

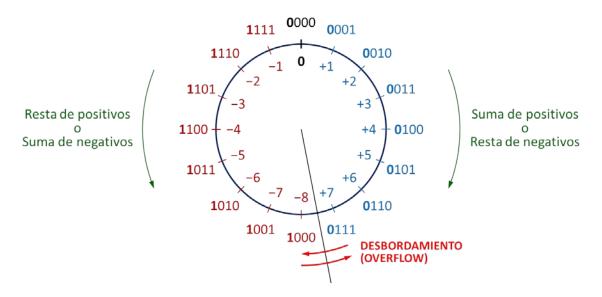






- Sumar (o restar un negativo): por ejemplo, partimos del +2 y avanzamos
 3 posiciones en el sentido de las agujas del reloj, y llegamos al +5.
- Restar (o sumar un negativo): por ejemplo, partimos del +2 y avanzamos 3 posiciones en sentido contrario a las agujas del reloj, y llegamos al −1.
- **Desbordamiento (overflow)**: se produce cuando en una operación atravesamos el punto en el que se unieron los dos extremos del segmento tomado de la recta numérica.





Desbordamiento (overflow):

• (+) + (-): partiendo de la zona de los positivos y avanzando en sentido contrario a las agujas del reloj, o viceversa, es imposible llegar al desbordamiento:

$$1 + (-8) \rightarrow -7$$

 $(-1) + 7 \rightarrow +6$

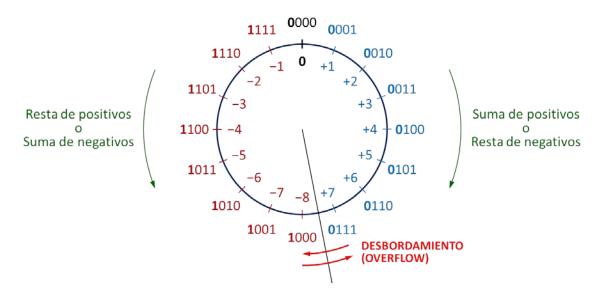
• (+) + (+): si se produce desbordamiento, se obtiene resultado (-):

$$5 + 4 \rightarrow -7$$

(-) + (-): si se produce desbordamiento, se obtiene resultado (+):

$$-7 + (-3) \rightarrow +6$$





- Regla del desbordamiento (overflow):
 - BS operando 1 ≠ BS operando 2 → No overflow

$$0001 + 1000 \rightarrow \text{No overflow}$$

1111 + 0111 → No overflow

BS operando 1 = BS operando 2 ≠ BS resultado → Overflow

$$0101 + 0100 = 1001 \rightarrow Overflow$$

 $1001 + 1101 = 0110 \rightarrow Overflow$

Nota: Más adelante veremos cómo se hace la suma en C-2.

ur

Comparación S-M vs C-2 (para 4 bits):

Decimal	S-M	C-2
+8	-	-
+7	0111	0111
+6	0110	0110
+5	0101	0101
+4	0100	0100
+3	0011	0011
+2	0010	0010
+1	0001	0001
+0	0000	0000
-0	1000	-
-1	1001	1111
-2	1010	1110
-3	1011	1101
-4	1100	1100
-5	1101	1011
-6	1110	1010
-7	1111	1001
-8	-	1000



- Comparación S-M vs C-2:
 - Número de representaciones del cero:
 - S-M: dos
 - C-2: una
 - Rango de números representables (para n (4) bits):
 - n (4) bits \rightarrow 2ⁿ (16) combinaciones
 - 2^{n} (16) números distintos $\rightarrow 2^{n-1}$ (8) negat. y 2^{n-1} (8) posit.
 - <u>S-M</u>:
 - Hay que incluir –0 entre los negat. y +0 entre los posit.
 - Negativos: $[-(2^{n-1}-1), -0]$ ([-7, -0])
 - Positivos: $[+0, +2^{n-1} 1]$ ([+0, +7])
 - Rango: $[-(2^{n-1}-1), +2^{n-1}-1]$ ([-7, +7])
 - <u>C-2</u>:
 - Sólo hay un cero (+0), que se incluye entre los posit.
 - Negativos: $[-2^{n-1}, -1]$ ([-8, -1])
 - Positivos: $[+0, +2^{n-1}-1]$ ([+0, +7])
 - Rango: $[-2^{n-1}, +2^{n-1}-1]$ ([-8, +7])



- Números negativos: conversión decimal ↔ C-2
 - **FORMA 1**: sumar los pesos de los **unos**.

```
BS:
0 → +
1 → -

1000 0100 b = -124 d (-128+4)
1001 0100 b = -108 d (-128+64)
1110 0000 b = -32 d (-128+64+32)
1111 0000 b = -16 d (-128+64+32+16)
```

Resulta sencillo deducir el <u>rango de números representables</u>:

• Nº más negativo: $1000\ 0000\ b = -128\ d$

• Nº más positivo: 0111 1111 b = +127 d

 $(64+32+16+8+4+2+1 \rightarrow 128-1)$

[Propiedad suma de potencias de dos consecutivas]

ur

- Números negativos: conversión decimal ↔ C-2
 - FORMA 2: sumar los pesos de los ceros.
 - Algoritmo: los pesos de los ceros tienen que sumar una unidad menos que el valor absoluto del nº negativo a representar:

- Aplicación: método muy ágil cuando hay pocos ceros.
- <u>Justificación</u>:

Suma de pesos de los <u>unos</u>:

Suma de pesos de los <u>ceros</u>:

$$-8$$
 +2 = $-6 \leftarrow$ Quitar a 8 el peso del **uno** (2)

$$7-2$$
 → $= +5$ ← Quitar a 7 el peso del **uno** (2)

(En ambos casos hacemos lo mismo, pero con los ceros partimos de una unidad menos)

ur

- Números negativos: conversión decimal ↔ C-2
 - **FORMA 3**: hacer el **opuesto** del correspondiente positivo.
 - Algoritmo: invertir todos los bits y sumar 1:

+3 d = 0011 b
$$\rightarrow$$
 1100
+ $\frac{1}{1101}$ b = -3 d
+6 d = 0110 b \rightarrow 1001
+ $\frac{1}{1010}$ b = -6 d
+4 d = 0100 b \rightarrow 1011
+ $\frac{1}{1100}$ b = -4 d

- <u>Procedimiento rápido</u>: yendo de derecha a izquierda (←)...
 - Mantener todos los bits hasta el primer 1, incluido.
 - Invertir el resto de bits.



- 3.2. Representación en coma fija
 - 3.2.1. Números enteros sin signo
 - 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
 - 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
 - 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes
 - 3.2.5. Números no enteros

3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes



- ¿Cómo extender la longitud en bits de un número?
- S-M: trasladar BS a la nueva posición y rellenar la magnitud con ceros.

```
BS b_2 b_1 b_0 → BS 0 0 0 0 b_2 b_1 b_0 +5 d: 0101 b → 0000 0101 b -5 d: 1101 b → 1000 0101 b
```

C-2: rellenar con copias de BS (ceros en positivos, unos en negativos).

```
BS
              b_1
                                   BS
                                          BS
                                                 BS
                                                        BS
                                                               BS
                                                                             b_1
       b_2
                     b_0
                                                                      b_2
                                                                                    b_0
     +5 d:
               0101 \, b \rightarrow 0000 \, 0101 \, b
                1011 b \rightarrow 1111 1011 b
     -5 d:
```

- Causa: hacer el opuesto implica invertir bits → los ceros de relleno de los positivos se convierten en unos de relleno en los negativos.
- Recordar que todos los unos iniciales pueden reducirse a uno solo:

$$1111 \ 1101 \ b = 101 \ b = -3 \ d$$



3.2. Representación en coma fija

- 3.2.1. Números enteros sin signo
- 3.2.2. Representación en signo-magnitud (S-M)
- 3.2.3. Representación en complemento a dos (C-2)
- 3.2.4. Conversión entre longitudes de bits diferentes

3.2.5. Números no enteros

3.2.5. Números no enteros



- La representación en coma fija también permite expresar números no enteros, aunque no es lo habitual.
- Para ello, basta con situar la coma en otra posición distinta a la asignada por defecto, que es a la derecha del bit menos significativo.
- De este modo, se da cabida tanto a la parte entera como a la parte fraccionaria, y todos los valores quedan escalados. Por ejemplo, en C-2:

$$01\ 0100.01\ b = +20.25\ d$$

 $11\ 0101.01\ b = -10.75\ d$

- Ahora bien, al ser una representación en coma fija, una vez establecida la nueva posición de la coma debe mantenerse durante toda la secuencia de cálculos.
- Ello obliga a tomar un compromiso entre el número de bits dedicados a la parte entera y a la parte fraccionaria.
- Esta falta de flexibilidad quedará resuelta con la representación en coma flotante.



- 3.1. Unidad aritmético-lógica (ALU)
- 3.2. Representación en coma fija
- 3.3. Aritmética en coma fija
- 3.4. Representación en coma flotante
- 3.5. Aritmética en coma flotante



3.3. Aritmética en coma fija

- 3.3.1. Opuesto
- 3.3.2. Suma y resta
- 3.3.3. Multiplicación
- 3.3.4. División



- 3.3. Aritmética en coma fija
 - **3.3.1.** Opuesto
 - 3.3.2. Suma y resta
 - 3.3.3. Multiplicación
 - 3.3.4. División

3.3.1. Opuesto



• **S-M**: invertir BS:

$$+3 d = 0011 b \leftrightarrow 1011 b = -3 d$$

- C-2: "hacer el C-2 de n" significa hacer el opuesto de n en C-2.
 - Algoritmo: invertir todos los bits y sumar 1:

+3 d = 0011 b
$$\rightarrow$$
 1100
+ $\frac{1}{1101}$ b = -3 d
+6 d = 0110 b \rightarrow 1001
+ $\frac{1}{1010}$ b = -6 d
+4 d = 0100 b \rightarrow 1011
+ $\frac{1}{1100}$ b = -4 d

- Procedimiento rápido: yendo de derecha a izquierda (←)...
 - Mantener todos los bits hasta el primer 1, incluido.
 - Invertir el resto de bits.

3.3.1. Opuesto



- C-2:
 - Opuesto del opuesto: el número de partida:

$$+4 d = 0100 b \rightarrow 1011$$
 $+ \frac{1}{1100} b = -4 d$
 $-4 d = 1100 b \rightarrow 0011$
 $+ \frac{1}{0100} b = +4 d$

• Opuesto de cero: tiene que ser cero:

$$0 d = 0000 b \rightarrow 1111 + 10000 b = 0 d$$

• Se genera un acarreo, pero en C-2 los acarreos se ignoran.

3.3.1. Opuesto



- C-2:
 - Opuesto de 10...0 b: caso a evitar:
 - Recordemos que, en C-2, el rango de números representables con n (4) bits es asimétrico; hay un negativo más que positivos: [-2ⁿ⁻¹, +2ⁿ⁻¹ 1] ([-8, +7]):

10...0 b
$$\rightarrow$$
 -2ⁿ⁻¹ (-8)
01...1 b \rightarrow +2ⁿ⁻¹ - 1 (+7)

- El opuesto del **número más negativo** (10...0 b) no es representable con n bits.
- Si se aplica el algoritmo para hacer el opuesto sobre este número, se obtiene el mismo valor, por lo que este caso debe ser evitado:

$$-8 d = 1000 b \rightarrow 0111$$

+ $\frac{1}{1000} b = -8 d$



3.3. Aritmética en coma fija

3.3.1. Opuesto

3.3.2. Suma y resta

3.3.3. Multiplicación

3.3.4. División



- La gran ventaja de la representación en C-2 es que permite hacer la suma de números con signo aplicando el mismo procedimiento básico de suma de enteros sin signo.
- Cuando intervienen números negativos, la interpretación de una misma suma es distinta como enteros sin signo y en C-2, pero en ambos casos es correcta:

$$1011$$
 (11) (-5)
+ 0010 + (2) + (+2)
1101 (13) (-3)

- Sin embargo, hay que tener en cuenta dos diferencias:
 - Acarreo (C):
 - Enteros sin signo: forma parte del resultado.
 - C-2: se ignora.

1011 (11) (-5)
+
$$0111$$
 + (7) + $(+7)$
10010 (18) (+2)
(C)



- (...) Sin embargo, hay que tener en cuenta dos diferencias:
 - Acarreo (C).
 - <u>Desbordamiento (overflow)</u>:
 - Enteros sin signo: se ignora.
 - C-2: debe comprobarse, para desechar el resultado en caso de producirse.

0101 (5) (+5)
+
$$0111$$
 + (7) + $(+7)$
1100 (12) (-4) \rightarrow Overflow

- Recordemos la regla para detectar el desbordamiento:
 - BS operando 1 ≠ BS operando 2 → No overflow
 - BS operando 1 = BS operando 2 ≠ BS result. → Overflow
- Puede producirse desbordamiento con o sin acarreo:

1000 (8) (-8)
+ 1111 + (15) + (-1)
10111 (23) (+7)
$$\rightarrow$$
 Overflow
(C)



- **Ejemplos** de sumas y sus interpretaciones en C-2:
 - <u>BS1 ≠ BS2</u>:

1001 (-7) 1100 (-4)
+
$$0101$$
 + (+5) + 0100 + (+4)
1110 (-2) 10000 (0)
(C)

• BS1 = BS2 = BS result.:

0011 (+3) 1100 (-4)
+
$$0100$$
 + $(+4)$ + 1111 + (-1)
0111 (+7) 11011 (-5)
(C)

• BS1 = BS2 \neq BS result.:

0101 (+5) 1001 (-7)
+
$$0100$$
 + (+4) + 1010 + (-6)
1001 (-7) → Overflow 10011 (+3) → Overflow
(C)



- Resta en C-2: al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo, aplicando todo lo expuesto para la suma.
- **Ejemplos** de restas y sus interpretaciones en C-2:



• (...) **Ejemplos** de restas y sus interpretaciones en C-2: