

LISTA DE TAUTOLOGÍAS

Pueden verificarse por método semántico, resolución o deducción natural

1. Axiomas de Russel y Whitehead (1910):

- (RW1) $(P \vee P) \rightarrow P$
- (RW2) $Q \rightarrow (P \vee Q)$
- (RW3) $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
- (RW4) $(P \vee (Q \vee R)) \rightarrow (Q \vee (P \vee R))$
- (RW5) $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$

2. Axiomas de Lukasiewicz (1929):

- (L1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- (L2) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- (L3) $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

3. Axiomas de Hilbert y Bernays (1934, 1939):

- (HB1) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- (HB3) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
- (HB4) $P \rightarrow \neg \neg P$
- (HB5) $\neg \neg P \rightarrow P$
- (HB6) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- (HB7) $(P \wedge Q) \rightarrow P$
- (HB8) $(P \wedge Q) \rightarrow Q$
- (HB9) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)))$
- (HB10) $P \rightarrow (P \vee Q)$
- (HB12) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$
- (HB13) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
- (HB14) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- (HB15) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$

Faltan (HB2)=(L1), (HB11)=(RW2)

4. Axiomas de Kleene (1952):

- (K5) $(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$
- (K9) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$

Faltan (K1)=(L1), (K2)=(L2), (K3)=(HB7), (K4)=(HB8), (K6)=(HB10),
(K7)=(HB11), (K8)=(HB12), (K10)=(HB5)

5. Otras tautologías:

a) $P \rightarrow P$

b) $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$

c) $(P \wedge Q) \rightarrow P$

d) $P \rightarrow (P \vee Q)$

e) $P \vee \neg P$

f) $\neg(P \wedge \neg P)$

g) $P \leftrightarrow \neg\neg P$

h) $(R \rightarrow P) \vee (P \rightarrow R)$

i) $(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow P)$

j) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

k) $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

l) $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

m) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

n) $\neg P \vee (\neg Q \leftrightarrow \neg(P \wedge Q))$

\tilde{n}) $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

o) $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q$

p) $(P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P$

q) $(Q \wedge \neg Q) \rightarrow P$

r) $((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R))$

s) $(P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

t) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$

u) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$

v) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

w) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \wedge Q))$

x) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow (P \vee Q))$

y) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \rightarrow (P \leftrightarrow R)$

z) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \rightarrow R) \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

6. La última: $((P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (P \wedge R \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow (R \leftrightarrow Q))$

LISTA DE REGLAS

1. Reglas de *modus ponens*, *modus tolens* y *silogismo hipotético*:

$$\begin{array}{lll} \text{(MP)} & \frac{P \rightarrow Q}{P} & \text{(MT)} \quad \frac{P \rightarrow Q}{\neg Q} \\ & \frac{P}{Q} & \frac{\neg Q}{\neg P} \end{array} \quad \text{(SH)} \quad \frac{P \rightarrow Q}{Q \rightarrow R} \quad \frac{Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$$

2. Reglas de *introducción y eliminación de la doble negación*:

$$\text{(RI}\neg\neg) \quad \frac{P}{\neg\neg P} \quad \text{(RE}\neg\neg) \quad \frac{\neg\neg P}{P}$$

3. Reglas de *introducción y eliminación de la conjunción*:

$$\text{(RI}\wedge) \quad \frac{P}{Q} \quad \text{(RE}\wedge) \quad \frac{P \wedge Q}{P}$$

4. Reglas de *introducción y eliminación de la disyunción*:

$$\text{(RI}\vee) \quad \frac{P}{P \vee Q} \quad \text{(RE}\vee) \quad \frac{P \vee Q}{\neg P} \quad \frac{\neg P}{Q}$$

5. Reglas de *reducción al absurdo*:

$$\text{(RA)} \quad \frac{P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)}{\neg P} \quad \text{(RA)} \quad \frac{\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)}{P}$$

6. Reglas de *casos* y de *resolución*:

$$\begin{array}{lll} \text{(RC)} & \frac{P \vee Q}{P \rightarrow R} & \text{(RC)} \quad \frac{P \vee Q}{P \rightarrow R} \\ & \frac{Q \rightarrow R}{R} & \frac{Q \rightarrow S}{R \vee S} \end{array} \quad \text{(RR)} \quad \frac{P \vee R}{\neg P \vee S} \quad \frac{\neg P \vee S}{R \vee S}$$

7. a) Silogismo hipotético condicionado:

$$\{H \rightarrow (P \rightarrow Q), H \rightarrow (Q \rightarrow R)\} \models H \rightarrow (P \rightarrow R)$$

- b) Todo sigue de la contradicción:

$$\{Q, \neg Q\} \models P$$

8. Dilema constructivo complejo con negación de los consecuentes:

$$\{\neg R \vee \neg S, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \models \neg P \vee \neg Q$$

9. $\{\neg P \vee \neg S, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \models \neg P \vee \neg Q$

10. a) $\neg(P \rightarrow P) \models P$
 b) $\neg\neg P \rightarrow \neg\neg Q \models \neg\neg(P \rightarrow Q)$
 c) $\{P \vee \neg Q, Q\} \vdash \neg\neg P$
 d) $\{P, Q\} \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$
 e) $\{Q, P \vee \neg Q\} \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$

11. a) $\frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{(P \wedge Q) \rightarrow R}$ b) $\frac{(P \wedge Q) \rightarrow R}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$

12. a) $\frac{P \rightarrow Q}{\neg(P \wedge \neg Q)}$ b) $\frac{\neg(P \wedge \neg Q)}{P \rightarrow Q}$

13. a) $\frac{\frac{P \rightarrow Q}{\neg(P \vee R) \rightarrow S}}{(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg S \rightarrow R)}$ b) $\frac{(P \wedge Q) \rightarrow R}{\frac{\neg R \wedge Q}{\neg P}}$

14. a) $\frac{\frac{(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow S)}{(Q \wedge S) \rightarrow T}}{\neg T} \quad R \rightarrow P$ b) $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)}{(Q \wedge S) \rightarrow \neg T} \quad T \quad \neg P \vee \neg R$

15. a) $\frac{\frac{(\neg P \wedge Q) \rightarrow R}{Q \rightarrow \neg R}}{(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow S} \quad \neg P \rightarrow (\neg Q \wedge S)$ b) $\frac{\neg P \rightarrow Q}{\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)} \quad P$

16. a) $\frac{\frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{R \wedge S \rightarrow T}}{S \wedge T \rightarrow W} \quad P \rightarrow (Q \rightarrow W)$ b) $\frac{P \wedge (Q \rightarrow (P \rightarrow S))}{P \rightarrow (Q \wedge R)} \quad P \rightarrow S$

17. a) $\frac{\frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{S \rightarrow (Q \rightarrow R)} \quad (\neg P \vee \neg S) \rightarrow (\neg T \vee \neg U)}{(\neg T \vee \neg W) \rightarrow (\neg U \vee \neg Y)} \quad (V \rightarrow W) \wedge (X \rightarrow Y) \quad \neg(Q \rightarrow R) \quad \neg V \vee \neg X$ b) $\frac{(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)}{S \rightarrow (Q \wedge T)} \quad S \wedge T \quad P \rightarrow (Q \wedge R)$