Prueba escrita – A: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
Fecha: 5 de noviembre de 2018 ORIGINAL

1. Define, enuncia, demuestra, da ejemplo o contraejemplo según se pida y **siempre justificando de forma razonada tus respuestas**:

   (a) (1,5 ptos.) Define subespacio vectorial. Pon un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ que no sea subespacio vectorial.

   (b) (2 ptos.) Define familia linealmente dependiente. Prueba que, si $\{u, v, w\}$ es una familia libre de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal y $\frac{1}{2}f(u + 2v) = 3f(v) - 2f(w)$, entonces el núcleo de la aplicación f tiene algún vector no nulo.

   (c) (1,5 ptos.) Responde, nunca (luego es falsa), siempre (luego es verdadera), a veces (luego puede ser verdadera o falsa), justificando de forma razonada tus respuestas:

   (c1) Si $n > m$ y $f : \mathbb{R}^n \to R^m$ es lineal, entonces f es inyectiva.

   (c2) Si $r > p$ y $F = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es una familia de vectores de $\mathbb{R}^p$, la familia F genera $\mathbb{R}^p$.

2. (3 ptos.) Para el subespacio $S = \{(b+2c, a+5b+13c, 2a+6c, -a+b-c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, se pide:

   (a) Calcula las ecuaciones implícitas, esto es, encuentra un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean los vectores de S.

   (b) Calcula un par de bases.

   (c) Comprueba si $v_1 = (0, 2, 4, -2)$ y $v_2 = (1, 0, 3, 5)$ pertenecen a S.

3. (2 ptos.) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y f la aplicación lineal descrita en los argumentos x, y, z como

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, ax - y + (a - 1)z, a^2x + y + a^2z + z)).$$

   Si U_b es el subespacio generado por los vectores $(0, 1 + b, b^2 - 1)$ y $(1, 2, 4)$, calcula los valores de a, b para los que U_b está contenido en el conjunto imagen de f.

PRUEBA ESCRITA - A - SOLUCIONES

PREGUNTA 1 -

(a) • Define subespacio vectorial:
Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ (en general V) se dice subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si satisface las siguientes propiedades:

1) El vector nulo $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^n$ (elemento neutro de V) está en S
2) Para cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de S, el vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ también está en S
3) Para cada escalar t de $\mathbb{R}$ y cada vector $\vec{u}$ de S, $t\vec{u}$ esté en S.

• Cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^4$ que no contenga al vector nulo $\vec{0}=(0,0,0,0)$ no es subespacio porque no cumple 1).
De este modo, $S=\{(x,y,z,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ no es subespacio de $\mathbb{R}^4$.
(se pueden poner una infinidad de ejemplos !!!)

(b) • Familia linealmente dependiente ó ligada:
Una familia de vectores $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r\}$ de $\mathbb{R}^n$ (en general V espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$) se dice linealmente dependiente ó ligada si existen escalares $t_1, t_2, \dots, t_r$ reales (en el cuerpo $\mathbb{F}$), no todos nulos de modo que

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots + t_r\vec{v}_r = \vec{0}.$$

• Observamos que, como f es una aplicación lineal, se cumple que, para cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y cualquier nº real t:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ y 2) $f(t\vec{u}) = t f(\vec{u})$

Así, $\frac{1}{2} f(\vec{u}+2\vec{v}) = f\left(\frac{1}{2}(\vec{u}+2\vec{v})\right) = f\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\right)$ usando 2), y

$3f(\vec{v}) - 2f(\vec{w}) = f(3\vec{v}) - f(2\vec{w}) = f(3\vec{v}-2\vec{w})$ usando 2) y 3)

De este modo, la ecuación $\frac{1}{2} f(u+2\vec{v}) = 3f(\vec{v}) - 2f(\vec{w})$ la podemos escribir en la forma:

$$f\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\right) = f(3\vec{v}-2\vec{w})$$

ó en la forma equivalente:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}\right) - f\left(3\vec{v}-2\vec{w}\right) = \vec{0}$$

Aplicamos de nuevo la propiedad 2) de f lineal y tenemos

$$f\left(\tfrac{1}{2}\vec{u}+\vec{v} - (3\vec{v}-2\vec{w})\right) = \vec{0}$$

Esto nos dice, que el vector $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}-3\vec{v}+2\vec{w}$ es preimagen del $\vec{0}$, luego está en el $\ker f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\} = f^{-1}(\vec{0})$, que se dice núcleo de f. Además,

$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$ es no nulo ya que la familia $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es libre y la ecuación

$$\tfrac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$$

es imposible porque da una relación de dependencia lineal que solo puede darse si la familia $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ fuera ligada.

(c) • Apartado (c1). Sea A la matriz canónica asociada a f, luego $f = T_A$, es decir, $f(X) = T_A(X) = AX$ para todo $X^t = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Que la aplicación sea inyectiva es equivalente a que el sistema homogéneo $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \vec{0}$ sea compatible determinado, lo que equivale a decir que rango A = nº incógnitas $= n$. Como A es una matriz de orden $m\times n$, el rango de A, que coincide con el número de pivotes de A en una de sus formas escalonadas cumple que rango $A \leq m < n$. Por tanto, como el rango es menor que el nº de incógnitas, $AX = \vec{0}$ es compatible indeterminado y

$\boxed{\text{f no es nunca inyectiva}}$

• Apartado (c2): La dimensión de $\mathbb{R}^p$ es exactamente p. Si tomamos $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r$ vectores de $\mathbb{R}^p$ y construimos la matriz que tiene por columnas estos vectores, $[\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_r] = A$, observamos que A es de orden $p\times r$. La familia generará $\mathbb{R}^p$ si cualquier vector de $\mathbb{R}^p$ se puede poner como combinación lineal de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_r$, esto equivale a decir que el sistema

$$AX = \vec{b} \quad \text{es compatible para cualquier } \vec{b} \text{ de } \mathbb{R}^p$$

Esto solamente es posible si el rango de A es exactamente p

$\boxed{\text{La afirmación puede ser verdadera o falsa}}$

· Es cierta si rango $A = p$ pues en la familia encontraremos p vectores linealmente independientes (LI) que serán base de $\mathbb{R}^p$ pues p es la dimensión de $\mathbb{R}^p$. Si $\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_p}$ son vectores LI, tenemos $\mathbb{R}^p = \text{Gen}\{\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_p}\} = \text{span} < \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_p} > \subseteq \text{Gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^p$

luego $\mathbb{R}^p = \text{Gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} = \text{span} < \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p >$

Si el rango de A es $< p$ es falsa: Por ejemplo

$\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\}$. rango $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\text{Gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \text{Gen}\{\vec{v}_1\}$ por ser proporcionales y

$\text{Gen}\{\vec{v}_1\} = \{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$

PREGUNTA 2 -

El subespacio S está dado en forma paramétrica y, usando las propiedades de la suma y producto por escalares de $\mathbb{R}^4$, los elementos de S descomponen en la forma:

$$\begin{pmatrix} b+2c \\ a+5b+13c \\ 2a+6c \\ -a+b-c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\5\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\13\\6\\-1\end{pmatrix}$$ esto es, los vectores de S

son combinación lineal de la familia $\{\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\13\\6\\-1\end{pmatrix}\}$

Así, $S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{span} < \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} >$.

Como un vector (x,y,z,t) está en S si y sólo si (x,y,z,t) es comb. lineal de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, (a) las ecuaciones implícitas se obtienen al aplicar reducción gaussiana sobre la matriz $\left[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w} \,\middle|\, \begin{matrix}x\\y\\z\\t\end{matrix}\right] = (A|b)$, imponiendo que el sistema que representa sea compatible

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 5 & 13 & y \\ 2 & 0 & 6 & z \\ -1 & 1 & -1 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 13 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 6 & z \\ -1 & 1 & -1 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 13 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -10 & -20 & z-2y \\ 0 & 6 & 12 & y+t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 13 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{6}(y+t) \\ 0 & -10 & -20 & z-2y \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 13 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2 & 1/6(y+t) \\ 0 & 0 & 0 & z-2y+\frac{5}{3}(y+t) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 13 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1/6(y+t)-x \\ 0 & 0 & 0 & z-1/3y+5/3t \end{array}\right]$$

Un sistema de ecuaciones (mínimas) que describe S es: $\begin{cases} 1/6\,y + 1/6\,t - x = 0 \\ z - 1/3\,y + 5/3\,t = 0 \end{cases}$

o el equivalente $\begin{cases} 6x - y - t = 0 \\ y - 3z - 5t = 0 \end{cases}$ Así,

$S = \{(x,y,z,t) \mid 6x - y - t = 0 \ ;\ y - 3z - 5t = 0\}$

(b) Una base de S estará formada por una familia libre del sistema generador $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. La reducción gaussiana del apartado (a) informa de que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son LI y $\vec{w}$ es combinación lineal de ambos. Así,

$$S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{span}<\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}> = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{span}<\vec{u}, \vec{v}>$$

Una segunda base la podemos obtener al cambiar $\vec{v}$ por $\vec{v}+\vec{u}$ puesto que cambiar un vector por el vector y una combinación lineal de otros no modifica el espacio generado. Así:

$$S = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{span}<\vec{u}, \vec{v}> = \text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}+\vec{u}\} = \text{span}<\vec{u}, \vec{v}+\vec{u}>$$

y, como la dimensión de S es 2 y $\{\vec{u}, \vec{v}+\vec{u}\}$ es un sistema generador con 2 vectores, es base.

Segunda base $\left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Para comprobar si los vectores v_1 y v_2 están en S, basta con comprobar si satisfacen las ecuaciones implícitas que describen S: $6x - y - t = 0$ (y) $y - 3z - 5t = 0$.

- $v_1 = (0, 2, 4, -2)$

$$\left.\begin{array}{l} 6 \cdot 0 - 2 - (-2) = -2 + 2 = 0 \\ 2 - 3 \cdot 4 - 5(-2) = 2 - 12 + 10 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_1 \text{ está en } S$$

- $v_2 = (1, 0, 3, 5)$

$$6 \cdot 1 - 0 - 5 = 6 - 5 = 1 \neq 0 \Longrightarrow v_2 \text{ no está en } S.$$

PREGUNTA 3 -

Observamos que:

$$f(x,y,z) = x\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ a^2+1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & -1 & a-1 \\ a^2 & 1 & a^2+1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ luego } A$$

$f(X) = AX = T_A(X)$, luego $f = T_A$ y A es la matriz canónica de f.

Por tanto, el conjunto Imagen de f es $\text{Im} f = \text{Col}(A) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ a^2+1 \end{pmatrix} \right\}$

También observamos que $\begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ luego podemos eliminar este vector del conjunto generador y tenemos que $\text{Im} f = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

El subespacio U_b estará contenido en el conjunto $\mathrm{Im} f$ si y solamente si los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1+b \\ b^2+1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ están en $\mathrm{Im} f$, lo que equivale a que ambos vectores sean combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Esto es lo mismo que decir que los sistemas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1+b \\ b^2+1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

sean compatibles. Aplicamos reducción de Gauss simultánea sobre la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 1+b \\ 1 & a^2 & 4 & b^2-1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_2 \to F_2+F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 3 & 1+b \\ 0 & a^2-1 & 3 & b^2-1 \end{array}\right] \overset{F_3 \to F_3 - F_2(a-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 3 & b+1 \\ 0 & 0 & \underbrace{3-3(a-1)}_{3(2-a)} & \underbrace{b^2-1-(1+b)(a-1)}_{(*)} \end{array}\right]$$

$$(*) = (b+1)(b-1) - (b+1)(a-1) = (b+1)(b-1-(a-1))$$
$$= (b+1)(b-a)$$

- Para $a=-1$, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 \\ 1 & a^2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$ luego $\mathrm{rg}\, B = 2 \neq \mathrm{rg}\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$

el sistema es incompatible

- Para $a \neq -1$, $\mathrm{rg}(B) = 2$ y ambos sistemas serán compatibles si y solamente si $\mathrm{rg}\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = 2 = \mathrm{rg}\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1+b \\ b^2-1 \end{smallmatrix}\right)$. Esto equivale a que

$$\begin{cases} 3(2-a) = 0 \quad y \\ (b+1)(b-a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \quad y \\ \text{ó bien } b=-1 \text{ ó bien } b=a=2 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN.- U_b contenido en $\mathrm{Im} f \iff \begin{cases} a=2 \text{ y } b=-1 \quad \text{ó} \\ a=2=b. \end{cases}$