Convocatoria extraordinaria: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 2 de julio de 2014
Calificación: Sobre 10.5 puntos [1][2]

1. **(0,5 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo ó da contraejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes justifica tus respuestas):

   a) Define rango de una matriz. Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido como conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones cuya matriz de coeficientes es A, y la dimensión de S es d, el rango de la matriz A es exactamente $(\dots)$.

   b) Pon un ejemplo de conjunto infinito de matrices 2×2 que no sea subespacio vectorial del espacio vectorial de matrices 2×2 indicando una de las propiedades de espacio vectorial que falla.

   c) Da una definición directa de familia (finita) ligada en un espacio vectorial, esto es, **no se puede definir** como aquella que no es libre. Si $\{u, v, w\}$ es una base del espacio vectorial real V, calcula los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la familia de vectores $\{\alpha u + v + w, u + \alpha v + w, u + v + \alpha w\}$ es ligada. Escribe una relación de dependencia lineal en alguno de los casos en los que sale ligada.

   d) Calcula una base del subespacio vectorial real T de polinomios $\mathbb{R}_3[x]$ de grado ≤ 3 definido por $T = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a - 2b + c = 0 = d + b\}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y amplía la base que des hasta una de $\mathbb{R}_3[x]$.

   e) Previa definición general (no tiene por qué ser lineal) de aplicación inyectiva y aplicación suprayectiva, si $f : \mathbb{R}_p[x] \to M_q(\mathbb{R})$ es una aplicación lineal inyectiva, prueba que $p + 1 \leq q^2$.

   f) Sean $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de los espacios vectoriales U y V. Si $f : (U, \mathcal{B}_U) \to (V, \mathcal{B}_V)$ es la aplicación lineal

[1] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas;

[2] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios; en otro caso, la valoración será sobre la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

que cumple $f(u_1 - u_2) = 2v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3$, calcula su matriz coordenada $M = M_{\mathcal{B}_U}^{\mathcal{B}_V}$ sabiendo que M tiene como primera columna $(2, 1, -1)$.

g) Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ son bases de un mismo espacio vectorial que satisfacen las relaciones $v_1 - 4u_1 + u_3 = 0, -u_1 + u_3 - 2v_3 + u_2 = 0$ y $v_2 + 2u_2 - u_3 = 0$, calcula la matriz P del cambio de base $\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}$.

h) Define producto escalar $< \cdot, \cdot >$ sobre un espacio vectorial real V. ¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la matriz $M_{a,b}$ define un producto escalar en la base canónica de $\mathbb{R}^3$?

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

2. **(2,5 puntos)** Estudia, dependiendo de los valores del parámero $a \in \mathbb{R}$, cuándo A es una matriz diagonalizable sobre el cuerpo real. Elige un valor concreto de a que te permita encontrar una matriz Q regular y otra diagonal D tales que $QA = DQ$ (debes encontrar Q y D y comprobar la igualdad ó justificarla adecuadamente).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **(3,5 puntos)** Sean $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, $T = \{(x, y, z, t) : x - y + z - 2t = 0\}$, S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ descrito por los vectores de la forma $S = \{(2y, y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{B}'' = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$. Si $g\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal cuya matriz coordenada en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ es $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide que:

a) calcules una base y la dimensión de T **(0,5 puntos)**;

b) calcules la matriz coordenada de $g : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}')$ **(1 punto)**;

c) calcules todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumplen: $f(e_1) = (1, 2, -3)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$, $f(e_3) = (1, 3, -3)$ y $f(e_1 + e_4) \in S$ **(1 punto)**;

d) respondas a la siguiente pregunta: ¿cuántas aplicaciones f cumplen que el núcleo de $g \circ f$ está contenido en T? **(1 punto)**

Examen final-A: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 28 de enero de 2014
Calificación: Sobre 10.5 puntos [3][4]

---

1. **(0,5 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes contestar de forma justificada)

   a) Enuncia las propiedades que cumple la operación suma de un espacio vectorial V (cada una que no haga referencia a la suma se penalizará con -0,1).

   b) Define familia linealmente dependiente en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Pon un ejemplo de una familia de vectores de $\mathbb{R}^4$ que sea ligada y genere $\mathbb{R}^4$ y de una familia libre de $\mathbb{R}^3$ con al menos 2 vectores y que no genere $\mathbb{R}^3$.

   c) Define rango de una matriz A $n \times m$ y relaciona las dimensiones de los subespacios nulo y de columnas de A. Pon un ejemplo de una matriz A 3×5 que no esté escalonada, sin filas nulas y tal que la dimensión de su subespacio nulo sea 2.

   d) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, prueba que el conjunto de matrices 2×2, $T = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : AB = 2B\}$ es un subespacio del espacio vectorial de matrices $M_2(\mathbb{R})$ y calcula una base.

   e) Si una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y no es isomorfismo, ¿existe alguna aplicación lineal $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que la composición $g \circ f$ sea isomorfismo?

   f) Define aplicación inyectiva en general y aplicación lineal $f : V \to W$ entre espacios vectoriales. Si $f : V \to W$ es lineal e inyectiva, y $u_1, \dots, u_r$ son vectores linealmente indepedientes de V, prueba que los vectores $f(u_1), \dots, f(u_r)$ son libres.

[3]Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas;

[4]Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios; en otro caso, la valoración será sobre la mitad de lo asignado en ell correspondiente apartado.

g) Pon un ejemplo de dos subespacios distintos de dimensión 2 en alguno de los espacios vectoriales que conozcas (no en todos es posible, depende de la dimensión del espacio).

h) En $V = \mathbb{P}_2[x]$, comprueba que $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ es una base y calcula las coordenadas del vector $1 + x + x^2$ en la base $\mathcal{B}$.

i) Para la forma bilineal sobre el espacio vectorial V y definida por la expresión $3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, calcula su expresión coordenada y comprueba si define un producto escalar. En caso afirmativo, calcula un vector w que sea ortogonal a $u = u_1 + u_2 - u_3$ y $v = u_2 + u_3$.

2. **(2 puntos)**Calcula los valores de $\alpha \in \mathcal{R}$ para los que se puede construir una base de $\mathbb{R}^4$ usando vectores de los subespacios S y H donde

$$S = Gen\{(1, \alpha, 0, 1), (2, 1 + 2\alpha, 1, 1)\}$$
$$H = \{(x, y, z, t) : x - y + z + t = 0 = y + 2z + t\}.$$

(Hay que justificar con claridad los casos en los que es imposible.)

3. **(3 puntos)** Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $f_a : (V, \mathcal{B}) \to (V, \mathcal{B})$, la aplicación lineal determinada por las imágenes de los vectores de la base en la forma:

$$f_a(u_1) = -u_2 \qquad f_a(u_2) = (a-1)u_2$$
$$f_a(u_3) = u_1 + (1-a)u_3 - u_4 \qquad f_a(u_4) = u_2$$

a) Calcula la matriz coordenada M_a de f_a en la base $\mathcal{B}$ (conjunto inicial y final).

b) Calcula dimensión y bases del núcleo y de la imagen de f_a dependiendo de los valores de a;

c) Para $a = 0$, encuentra bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V, no necesariamente distintas, de modo que la matriz coordenada de f_0 sea la matriz

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hasta aquí se pueden obtener 9.5 puntos. El siguiente ejercicio te dará **1 punto adicional:** Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal tal que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, prueba que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 h$ $(f^2 = f \circ f)$.

Examen final-B: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 28 de enero de 2014
Calificación: Sobre 10.5 puntos [5][6]

1. **(0,5 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes contestar de forma justificada)

    a) Enuncia las propiedades que cumple la operación producto por un escalar de un espacio vectorial V (cada una que no haga referencia al producto se penalizará con -0,1).

    b) Define familia linealmente independiente en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Pon un ejemplo de una familia de vectores de $\mathbb{R}^4$ que sea libre y de una familia ligada de $\mathbb{R}^3$ que genere todo $\mathbb{R}^3$.

    c) Define rango de una matriz A $n \times m$ y relaciona las dimensiones de los subespacios nulo y de columnas de A. Pon un ejemplo de una matriz A 5x3 que no esté escalonada, con filas todas ellas no nulas y tal que la dimensión de su subespacio nulo sea 2.

    d) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, prueba que el conjunto de matrices 2×2, $T = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : AB = 2B\}$ es un subespacio del espacio vectorial de matrices $M_2(\mathbb{R})$ y calcula una base.

    e) Si una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y no es isomorfismo, ¿existe alguna aplicación lineal $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que la composición $f \circ g$ sea isomorfismo?

    f) Define aplicación inyectiva en general y aplicación lineal $f : V \to W$ entre espacios vectoriales. Si $f : V \to W$ es lineal e inyectiva, y $u_1, \ldots, u_r$ son vectores linealmente indepedientes de V, prueba que los vectores $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ son libres.

[5]Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas;

[6]Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios; en otro caso, la valoración será sobre la mitad de lo asignado en ell correspondiente apartado.

g) Pon un ejemplo de dos subespacios distintos de dimensión 2 en alguno de los espacios vectoriales que conozcas (no en todos es posible, depende de la dimensión del espacio).

h) En $V = \mathbb{P}_2[x]$, comprueba que $\mathcal{B} = \{(x-1)^2, 1, x-1\}$ es una base y calcula las coordenadas del vector $1 + x + x^2$ en la base $\mathcal{B}$.

i) Para la forma bilineal sobre el espacio vectorial V y definida por la expresión $3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$ en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, calcula su expresión coordenada y comprueba si define un producto escalar. En caso afirmativo, calcula un vector w que sea ortogonal a $u = u_1 - u_2 + u_3$ y $v = u_2 - u_3$.

2. **(2 puntos)**Calcula los valores de $\alpha \in \mathcal{R}$ para los que se puede construir una base de $\mathbb{R}^4$ usando vectores de los subespacios S y H donde

$$S = Gen\{(\alpha, 1, 0, 1), (1 + 2\alpha, 2, 1, 1)\}$$

$$H = \{(x, y, z, t) : -x + y + z + t = 0 = x + 2z + t\}.$$

(Hay que justificar con claridad los casos en los que es imposible.)

3. **(3 puntos)** Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $f_a : (V, \mathcal{B}) \to (V, \mathcal{B})$, la aplicación lineal determinada por las imágenes de los vectores de la base en la forma:

$$f_a(u_1) = -u_2 \qquad f_a(u_2) = (a-1)u_2$$
$$f_a(u_3) = u_1 + (1-a)u_3 - u_4 \qquad f_a(u_4) = u_2$$

a) Calcula la matriz coordenada M_a de f_a en la base $\mathcal{B}$ (conjunto inicial y final).

b) Calcula dimensión y bases del núcleo y de la imagen de f_a dependiendo de los valores de a;

c) Para $a = -1$, encuentra bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V, no necesariamente distintas, de modo que la matriz coordenada de f_{-1} sea la matriz

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f_{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hasta aquí se pueden obtener 9.5 puntos. El siguiente ejercicio te dará **1 punto adicional:** Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal tal que $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2$, prueba que $\text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2 h$ $(f^2 = f \circ f)$.