Soluciones a los ejercicios del examen del 26 de noviembre (versión 2)

1. Se trata de calcular el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} 2\,n^2(e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$$

y estudiar entonces el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$.

El límite es 2:

$$2\,n^2(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}) = 2\,n^2\,e^{1/(n+1)}(e^{1/n-1/(n+1)} - 1) = 2\,n^2\,e^{1/(n+1)}(e^{1/(n^2+n)} - 1)$$
$$\underset{n}{\sim} \frac{2n^2}{n^2+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ (hemos usado la equivalencia de la exponencial).}$$

Por tanto $\dfrac{e^{1/n} - e^{1/(n+1)}}{1/n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, y $e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$ es equivalente a $\dfrac{1}{n^2}$.

Por el criterio de paso al límite, la serie converge si y sólo si converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, y concluimos que la serie es convergente.

2. Se pregunta sobre la función dada por

$$f(x) = \log(\log x - 2) - \log x + 3\,.$$

El dominio de f lo forman los puntos x tales que su logaritmo existe y es mayor que 2 (o sea, tales que existe el logaritmo de $(\log x - 2)$). Es decir, el dominio de f es el intervalo $(e^2, +\infty)$.

$\displaystyle\lim_{x\to e^2} f(x) = -\infty$, porque $-\log x + 3 \to 1$ y $\log(\log x - 2) \to -\infty$.

El límite en $+\infty$ no es tan directo porque $\log(\log x - 2) \to +\infty$ y $\log x \to +\infty$, luego tenemos una indeterminación $\infty - \infty$. La resolvemos poniendo

$$f(x) = \log(\log x - 2) - \log x + 3 = \log\frac{\log x - 2}{x} + 3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,$$

ya que como sabemos $\dfrac{\log x - 2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (si no lo sabemos aplicamos L'Hospital).

La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{x(\log x - 2)} - \frac{1}{x} = \frac{3 - \log x}{x(\log x - 2)}\,,$$

y como el denominador es positivo el signo de f' es el de $3 - \log x$: $f'(x) > 0$ si $x < e^3$ y $f'(x) < 0$ si $x > e^3$, siendo $f'(e^3) = 0$.

Deducimos que f es creciente en $(e^2, e^3]$ y es decreciente en $[e^3, +\infty)$, con lo que alcanza su máximo absoluto en $x = e^3$.

El valor máximo es $f(e^3) = 0$, y entonces f es negativa en cualquier otro punto del dominio, así que $f(x) = 0$ tiene como única solución $x = e^3$.

Por último buscamos los puntos de inflexión, estudiando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2 - \log x + (\log x - 3)(\log x - 1)}{x^2(\log x - 2)^2} = \frac{\log^2 x - 5\log x + 5}{x^2(\log x - 2)^2}\,.$$

El signo de $f''(x)$ es el de $t^2 - 5t + 5$, donde $t = \log x \in (2, +\infty)$. Dicho polinomio se anula en $t = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ y en $t = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, es negativo entre ambos valores y es positivo en el resto. Pero el primero de dichos valores es menor que 2, y entonces resulta que $f''(x) = 0$ si y sólo si $x = e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, que es el único punto de inflexión de f (a su izquierda f es cóncava y a su derecha es convexa).