SOLUCIONES o PISTAS a los ejercicios de la HOJA 5

1. a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ b) $\operatorname{arc\,sen} x$ c) $\dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x - 1}$ d) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$

2. a) $g'(x+g(a))$ b) $g(a)\,g'(xg(a))$ c) $(1+g'(x))\,g'(x+g(x))$

d) $g(x)+(x-a)g'(x)$ e) $g(a)$ f) $2(x-3)\,g'((x-3)^2)$

3. la pendiente es $1/2$ (la recta es $y = x/2-\sqrt{2}$)

4. a) la altura inicial es $76,832$ m

b) la velocidad a los 5 segundos es 71 m/s, y a los 10 segundos es 22 m/s

5. a las dos horas la población crece a un ritmo de $\dfrac{23000}{729} \simeq 31,55$ bacterias por hora

6. el nivel sube en ese momento $\dfrac{64}{90\cdot 49\cdot \pi}$ m/min $\simeq 4,6$ mm/min

7. la sombra se mueve a $-\dfrac{960}{g} \simeq -97,96$ m/s (negativa porque avanza hacia la farola)

8. a) una, en $(0,1)$

b) tres, en $(-2,-1)$, $(0,1)$ y $(1,2)$ respectivamente

c) una, en $(-1,0)$

d) dos, en $(0,1)$ y en $(2,3)$ respectivamente

[*hay que estudiar el crecimiento (signo de f') y usar el teorema de Bolzano*]

9. Se pregunta sobre $f_a(x) = \log x - a\,\dfrac{x-1}{x+1}$:

a) su límite en 0 es $-\infty$, y en $+\infty$ es $+\infty$; $f_a(1) = 0$ para todo a

b) $f'_a(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2ax}{x(x+1)^2}$

si $a = 1$ o $a = 2$ la función es creciente y no tiene extremos

si $a = 3$ es creciente en $(0, 2-\sqrt{3}]$ y en $[2+\sqrt{3}, +\infty)$, y decreciente en $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$; tiene máximo relativo en $2-\sqrt{3}$ y mínimo en $2+\sqrt{3}$

c) Tanto $f_1(x) = 0$ como $f_2(x) = 0$ tienen como única solución $x = 1$

$f_3(x) = 0$ tiene tres soluciones: 1, una menor que $2-\sqrt{3}$ y otra mayor que $2+\sqrt{3}$

10. la derivada de f vale $a - \dfrac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$, y el máximo valor que toma la función $\dfrac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$ es $\dfrac{9}{8}$

11. a) ver las derivadas de $x - x^3/6 - \operatorname{arc\,tg} x$ y de $\operatorname{arc\,tg} x - x + x^3/6$, y los valores en 0

b) ídem para $e^x - 1 - x - x^2/2$

c) ídem para $(1+x)\log(1+x) - x$

d) ídem para $x - \operatorname{sen} x$, y entonces para $\operatorname{sen} x - x + x^3/6$

12. es mayor e^π; una forma de verlo es por el crecimiento de $\dfrac{\log x}{x}$ en $[e, \pi]$

13. a) máx. absoluto en 0, mín. absoluto en -1 y 1

b) máx. absoluto en $1/2$, mín. absoluto en 1

c) máx. absoluto en e, mín. absoluto en $1/\sqrt{e}$

d) máx. absoluto en $-4/3$, mín. absoluto en 2

e) máx. absoluto en $\sqrt{2} - 1$, mín. absoluto en $\sqrt{2} + 1$

f) máx. absoluto en $-1/2$, mín. absoluto en 0

14. la recta es $y = 4 - 2x$

el triángulo (con vértices en $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,4)$) tiene área 4

15. son los puntos $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

16. el lado largo (paralelo a la pared) mide $L/2$, y los perpendiculares miden $L/4$

17. el volumen es máximo para $x = \dfrac{\ell}{6}$

18. la anchura del rectángulo ha de ser $\dfrac{8}{\pi+4}$

(su altura será $\dfrac{4}{\pi+4}$, el radio de la circunferencia $\dfrac{4}{\pi+4}$ y la superficie $\dfrac{8}{\pi+4}$)

19. el área es mínima si el tercer vértice equidista de los extremos del diámetro

20. si $3 < L \leq 6$, la base mide $\dfrac{5L-6}{4}$ y la altura $\dfrac{5L-6}{6}$

si $L > 6$, la base mide L y la altura $L - 2$

21. el ángulo es máximo si la distancia a la línea de fondo (la de la portería) es $\sqrt{\ell^2 - d^2}$

22. el área es máxima cuando el triángulo es equilátero, y su lado por tanto es $4/3$

conviene usar la *fórmula de Herón*: el área de un triángulo de lados a, b y c es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, \quad \text{donde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

23. se debe colocar a 9 pies del poste que mide 12, y a 21 del que mide 28

(es fácil ver que en general se debe situar en el punto desde el que los extremos de ambos postes se ven con el mismo ángulo)

24. hay que recorrer a pie el borde de la piscina hasta el punto de abscisa

$$-\frac{2R}{25}(1 + 3\sqrt{14}) \simeq -0,978R\,,$$

y desde dicho punto nadar en línea recta hasta el punto A

25. a) máx. absoluto en $e^{1/n}$, inflexión en $e^{(2n+1)/n(n+1)}$

b) mín. relativo en $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, máx. relativo en $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, no hay inflexiones

c) máx. relativo en $2-\sqrt{2}$, mín. relativo en $2+\sqrt{2}$, inflexión en 8

d) mín. relativo en $2\sqrt{3}$, máx. relativo en $-2\sqrt{3}$, inflexiones en 0, 6 y -6

e) mín. absoluto en $5/6$, inflexiones en 0 y $2/3$

f) máxs. absolutos en $\pi/6+\pi k$, míns. absolutos en $-\pi/6+\pi k$

inflexiones en $k\pi/2$ y en $\operatorname{arc\,tg}(\pm\sqrt{5}/\sqrt{3})+\pi k$ (k entero)

g) $f(x)=-\cos 2x$

máxs. absolutos en πk, míns. absolutos en $(2k+1)\pi/2$ (k entero)

inflexiones en $(2k+1)\pi/4$ (k entero)

h) míns. relativos en $e^{k\pi}$ para cada k entero y par

máxs. relativos en $e^{k\pi}$ para cada k entero impar

inflexiones en $e^{(2k+1)\pi/2}$ para cada k entero