

## CONTROL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

EXAMEN A. 31 de octubre de 2013.

**Problema 1.** Prueba que la siguiente relación es de equivalencia en el conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

$$(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c.$$

Determina todos los elementos de la clase en que está el  $(0, 2)$  y también los de la clase del  $(3, 7)$ . ¿Sabes decir cuáles son todas las clases de equivalencia?.

**Problema 2** Sea la aplicación:

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, 1) \quad \text{tal que} \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Determina si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva. ¿Tiene inversa? (en caso afirmativo, dí cuál es).

**Problema 3.** En un cesto hay entre 100 y 110 manzanas. Al repartirlas de 3 en 3 sobran 2 manzanas y al repartirlas de 4 en 4 sobran 3. ¿Cuántas manzanas hay en el cesto?

## CONTROL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

EXAMEN B. 31 de octubre de 2013.

**Problema 1** Sea la aplicación:

$$f: [0, 1) \rightarrow [0, \infty) \quad \text{tal que} \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Determina si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva. ¿Tiene inversa? (en caso afirmativo, dí cuáles).

**Problema 2.** Prueba que la siguiente relación es de equivalencia en el conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

$$(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c.$$

Determina todos los elementos de la clase en que está el  $(0, 5)$  y también los de la clase del  $(4, 6)$ . ¿Sabes decir cuáles son todas las clases de equivalencia?.

**Problema 3.** Un criador de animales de raza gastó  $100.000\epsilon$  en comprar 100 animales entre ocas, ponis y caballos de raza. Si las ocas las compró a  $50\epsilon$ , los ponis a  $1000\epsilon$  y los caballos a  $5000\epsilon$ , y adquirió animales de los tres tipos, ¿cuántos animales compró de cada tipo?.

## CONTROL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

EXAMEN A. 5 de diciembre de 2013.

### Problema 1.

Siete ladrones tratan de repartir, entre ellos y a partes iguales, un botín de lingotes de oro. Desafortunadamente, sobran seis lingotes y en la pelea que se desata muere uno de ellos. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos lingotes, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelve a sobrar una barra, y sólo después de que muera otro es posible repartirlas por igual. ¿Cuál es el mínimo número de barras para que esto ocurra?

(0 ' 6 puntos)

### Problema 2

Se quieren entregar 3 premios entre los 14 participantes de un concurso. Calcula de cuántas formas se pueden repartir si:

- a) Los premios son distintos y se puede dar más de un premio a una misma persona.
- b) Los premios son distintos y no se puede dar más de un premio a una misma persona.
- c) Los premios son iguales y no se puede dar más de un premio a una misma persona.
- d) Los premios son iguales y se puede dar más de un premio a una misma persona.

(0 ' 2 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 4 puntos )

### Problema 3.

Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química son todos distintos y han de ser colocados en una estantería. Determina el número de colocaciones diferentes si:

- a) Los libros de cada materia han de estar juntos.
- b) Solo los de matemáticas tienen que estar juntos.

Responde las preguntas anteriores pero ahora suponiendo que los libros de cada materia son iguales.

(0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos)

## CONTROL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

EXAMEN B. 5 de diciembre de 2013.

### Problema 1

Una banda de 10 piratas trata de repartirse un botín de entre 300 y 900 monedas de oro. Al intentar hacer el reparto equitativo les sobran 5 monedas que se disputan entre ellos y como consecuencia de la pelea muere uno de los piratas. Deciden hacer de nuevo un reparto equitativo pero les vuelven a sobrar 3 monedas. En una nueva disputa mueren otros dos piratas, y al hacer un nuevo reparto les sobran 1 monedas. ¿Cuál es el número de monedas del botín?

(0 ' 6 puntos)

### Problema 2.

Se quieren asignar 5 tareas a 14 personas de una empresa. Calcula de cuántas formas se pueden asignar si:

- a) Las tareas son distintas y no se asigna más de una tarea a una misma persona.
- b) Las tareas son distintas y se puede asignar más de una tarea a una misma persona.
- c) Las tareas son iguales y no se puede asignar más de una tarea a una misma persona.
- d) Las tareas son iguales y se puede asignar más de una tarea a una misma persona.

(0 ' 2 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 4 puntos )

### Problema 3.

Se quieren saber las posibles colocaciones distintas en una fila de 5 esferas, 3 cubos y 4 tetraedros, todos de colores distintos, en los siguientes casos:

- a) Ponemos juntos todos los objetos de la misma forma geométrica.
- b) Solo ponemos juntos las 5 esferas.

Responde las preguntas anteriores pero ahora suponiendo que las esferas, los tetraedros y los cubos son del mismo color.

(0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos, 0 ' 3 puntos)

**EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.**  
**EXAMEN A. 30 de enero de 2014.**

**Funciones generadoras, sucesiones recurrentes, grafos**

**Problema 1**

Sea  $a_n$  el número de secuencias de longitud  $n$  que se pueden hacer con 1, 2, 3 y 4 de modo que el número de doses y treses sea par y haya por lo menos tres unos y menos de siete unos. Determina la función generadora de dicha sucesión. Calcula  $a_{17}$

**Problema 2.**

Se quiere pintar una bandera a base de franjas horizontales de cuatro colores: azul, verde, amarillo y rojo. Queremos saber el número total de banderas que se pueden pintar con  $n$  franjas suponiendo que cada franja está pintada de un color, dos franjas contiguas están pintadas en colores distintos y la franja superior y la franja inferior están pintadas de distinto color. Se pide la sucesión recurrente lineal que aparece al variar  $n$  y el término general de dicha sucesión.

**Problema 3.**

- a) Se considera el grafo que determinan los vértices y aristas de un cubo a los que se ha añadido un nuevo vértice en el centro del cubo y aristas que unen este vértice con los otros ocho. ¿Es un grafo conexo? ¿Es euleriano? ¿Es bipartido? ¿Es hamiltoniano?
- b) Un grafo con  $n$  vértices y  $(n-1)(n-2)/2$  aristas, ¿es conexo?

**Conjuntos y aritmética**

**Problema 1**

En una reunión de 50 personas, 3 de ellas no leen la prensa (y el resto leen alguno o varios de los periódicos  $L, M, P$ ), 30 leen el periódico  $P$ , 26 leen el periódico  $M$ , 20 leen los periódicos  $P$  y  $L$ , 15 leen  $P$  y  $M$ , 12 leen  $M$  y  $L$  y finalmente, 7 leen  $P, M$  y  $L$ . ¿Cuántos leen  $L$  pero no leen  $P$  ni  $M$ ?

**Problema 2.**

En el conjunto  $\mathbf{R}^2$  definimos la relación  $(x, y)R(a, b)$  si y solo si  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ . Prueba que es de equivalencia. ¿Podrías decir qué elementos de  $\mathbf{R}^2$  están en la clase de  $(1, 0)$ . ¿Cuáles son todas las clases de  $\mathbf{R}^2/R$ ?

**Problema 3.**

¿De cuántas formas se pueden tener 325 puntos en vales de 10 y 25 puntos?

**Aritmética modular y combinatoria**

**Problema 1**

Calcula  $132^{231} \pmod{7}$  (0.5 puntos)

**Problema 2.**

Resuelve el sistema de congruencias  $x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7}$  (1 punto)

**Problema 3.**

¿Cuántas permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  hay que tengan a 1 y 2 en su sitio? ¿Y que tengan exactamente a  $r$  elementos en su sitio?

¿En un alfabeto de 10 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas se pueden formar? (1.5 puntos)

**EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.**  
**EXAMEN B. 30 de enero de 2014.**

**Funciones generadoras, sucesiones recurrentes, grafos**

**Problema 1**

Sea  $a_n$  el número de secuencias de longitud  $n$  que se pueden hacer con 1, 2, 3 y 4 de modo que el número de dos y tres sea impar y haya por lo menos cuatro cuatros y menos de ocho cuatros. Determina la función generadora de dicha sucesión. Calcula  $a_{18}$ .

**Problema 2.**

Con fichas de 5 tipos: A, B, C, D, E se quieren hacer todas las posibles series de  $n$  fichas de modo que no haya dos contiguas del mismo tipo y que nunca se empiece y acabe por la misma ficha. Determina la sucesión recurrente lineal que aparece al variar  $n$  y da su término general.

**Problema 3.**

- a) Sea el grafo completo de  $n$  vértices,  $K_n$ . ¿Es hamiltoniano? ¿Es euleriano? ¿Es bipartido? ¿Es conexo?
- b) Un grafo con  $n$  vértices y  $(n-1)(n-2)/2$  aristas, ¿es conexo?

**Conjuntos y aritmética**

**Problema 1**

En una reunión de 60 personas, 9 de ellas no son consumidores de ninguna de las marcas  $A$ ,  $B$  y  $C$  (el resto sí lo son de una o varias), 29 consumen la marca  $A$ , 29 consumen la marca  $C$ , 10 consumen las marcas  $A$  y  $B$ , 12 consumen  $A$  y  $C$ , 9 consumen  $B$  y  $C$  y finalmente, 4 consumen  $A$ ,  $B$  y  $C$ . ¿Cuántos consumen la marca  $C$  pero no la  $A$  ni  $C$ ?

**Problema 2.**

En el conjunto de los números enteros  $\mathbf{Z}$  se define la relación  $R$  dada por:  $xRy$  si y solo si  $x^2 = y^2$ . Prueba que es de equivalencia. Determina la clase de equivalencia del 5 y la del -2. Puedes determinar el conjunto cociente  $\mathbf{Z}/R$ ?

**Problema 3.**

¿De cuántas formas se pueden tener 325 tizas en paquetes de 10 y 25 tizas?

**Aritmética modular y combinatoria**

**Problema 1**

Calcula  $246^{218} \pmod{11}$  (0.5 puntos)

**Problema 2.**

Resuelve el sistema de congruencias  $x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7}$ . (1 punto)

**Problema 3.**

¿Cuántas permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  hay que tengan a 1 y 2 en su sitio? ¿Y que tengan exactamente a  $r$  elementos en su sitio?

¿En un alfabeto de 10 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas se pueden formar? (1.5 puntos)

## EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA.

27 de junio de 2014.

### Conjuntos y aritmética

#### Problema 1 (1 punto)

Prueba que la siguiente relación en el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es de equivalencia  $xRy$  si y solo si existe  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = \frac{3y+h}{3}$ . Determina la clase de  $2/3$  y el conjunto cociente  $\mathbb{Q}/R$ .

#### Problema 2. (1 punto)

Sea la función:  $f: \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{5x-1}$ . ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva? ¿Tiene inversa? En caso afirmativo de tener inversa, calcúlala.

#### Problema 3. (1 punto)

Determina todos los números racionales  $x = a/b \in \mathbb{Q}$  (en forma reducida, es decir, con  $m.c.d(a, b) = 1$ ) de modo que verifiquen que  $3x^2 + 7x \in \mathbb{Z}$ .

### Aritmética modular y combinatoria.

#### Problema 1 (1'5 puntos)

Determina las soluciones de la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  en  $\mathbb{Z}_3$ . Prueba que en  $\mathbb{Z}$  en cada solución de  $x^2 + y^2 = z^2$  ó  $x$  ó  $y$  ó  $z$  es múltiplo de 3. Determina que además ó  $x$  ó  $y$  ó  $z$  son múltiplos de 5.

#### Problema 2 (1'5 puntos)

¿De cuántas maneras se pueden ordenar 8 bolas numeradas del 1 al 8, suponiendo que las 4 primeras son blancas y las 4 segundas rojas, si han de quedar con colores alternados? ¿Y si las bolas 4 y 5 han de ir juntas además?.

¿De cuántas formas se pueden colocar 6 bolas indistinguibles en 5 urnas distintas?

¿Cuántas formas hay de elegir 4 chicos y 5 chicas de un total de 10 chicos y 6 chicas?

### Funciones generadoras, sucesiones recurrentes, grafos.

#### Problema 1 (1 punto)

Determina la función generadora que daría el número de selecciones españolas de baloncesto de  $n$  jugadores que se puede hacer con jugadores del R. Madrid, Barcelona, otros equipos españoles y jugadores de la NBA, de modo que el número de los del R. Madrid sea de por lo menos cuatro jugadores, los del Barcelona menos de 4 y de la NBA un número par menor que 5. Determina cuántas hay de 12 jugadores.

#### Problema 2 (1'5 puntos)

Determina la fórmula de recurrencia que nos da el número de sucesiones de ceros, unos y doses que no tienen 2 ceros consecutivos.

De la sucesión  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ , con  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 8$  determina el término general.

#### Problema 2 (0'5 puntos)

Construye un grafo euleriano que no sea hamiltoniano, y un grafo hamiltoniano que no sea euleriano.

## EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

### EXAMEN A.

27 de octubre de 2014.

#### Conjuntos y aritmética

1) Sea la relación en  $\mathbb{Z}$  dada por  $aRb$  si y solo si  $a^2 - b^2 = a - b$ . Determina si es de equivalencia y en caso en que lo sea da sus clases de equivalencia.

2) Sean la aplicaciones

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad g(x) = +\sqrt{1 - x^2}$$

Determina de qué tipo son.

3) Determina el menor entero positivo de seis cifras tal que al dividirlo por 3, por 5 y por 19 da el mismo resto, 2, pero al dividirlo por 17 da resto 1.



## EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

### EXAMEN B.

27 de octubre de 2014.

#### Conjuntos y aritmética

1) Sea la relación en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dada por  $(a, b)R(c, d)$  si y solo si  $a - 2b = c - 2d$ . Determina si es de equivalencia y en caso en que lo sea da sus clases de equivalencia y una interpretación geométrica de dichas clases.

2) Sean la aplicaciones

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{si } x \text{ es par,} \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ es impar}$$

$$g: \mathbb{R} - \{3/2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1/2\} \quad \text{tal que} \quad g(x) = \frac{x+2}{2x-3}$$

Determina de qué tipo son.

3) Calcula el menor entero positivo de 6 cifras tal que su resto al dividirlo por 4, por 7 y por 17 es el mismo, 3, pero al dividirlo por 15 da resto 2.

## EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

### EXAMEN A.

9 de diciembre de 2014.

#### Aritmética modular y Combinatoria.

- 1) Determina los enteros positivos  $n$  tales  $\phi(n)$  sea un número impar ( $\phi$  es la función de Euler). (0 , 5 puntos)
- 2) ¿Se puede determinar de forma única un número entero sabiendo que es menor que 500 y sus restos al dividir por 6, 7 y 13? (0 , 5 puntos)
- 3) Se suponen ordenadas en sentido creciente todas las permutaciones posibles de las cifras  $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ . ¿Qué lugar ocupa la permutación 731825? (1 punto)
- 4) Determina las formas diferentes en que se pueden elegir 20 monedas de cuatro recipientes con monedas de diferente tipo (pero con cada recipiente un solo tipo de monedas). (0, 5 puntos)
- 5) ¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco cartas de una baraja (con las cartas As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Sota, Caballo, Rey) y obtener un trío (es decir, 3 cartas iguales) y una pareja (2 cartas iguales, y distintas a las anteriores)? ¿Y una doble pareja? (0 , 5 puntos)

NOTA: Todas las respuestas para ser válidas han de estar razonadas.

## EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA.

### EXAMEN B.

9 de diciembre de 2014.

#### Aritmética modular y Combinatoria.

- 1) ¿Puede determinarse de forma única un número entero sabiendo que es menor que 200 y conociendo sus restos al dividir por 4, 5 y 11? (0 ,5 puntos)
- 2) Determina los enteros positivos  $n$  tales que  $\phi(n) = n/2$  (siendo  $\phi$  la función de Euler). (0 , 5 puntos)
- 3) Se suponen ordenadas en sentido creciente todas las permutaciones posibles de las cifras  $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ . ¿Qué lugar ocupa la permutación 528317? (1 punto)
- 4) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 libros distintos entre 4 personas de modo que cada persona reciba tres libros? ¿Y de modo que las dos mayores de edad reciban 4 libros y las dos menores dos libros cada una? (0 , 5 puntos)
- 5) ¿De cuantas formas se pueden colocar doce bolas del mismo tipo en cinco recipientes distintos? ( 0 , 5 puntos)

NOTA: Todas las respuestas para ser válidas han de estar razonadas.