Primera parte del examen acerca de cálculo matricial y vectorial
enero-2020

NOMBRE:

1. ¿Verdadero o falso?

   a) Si a una matriz A se le aplica una transformación elemental $F_{ij}(\alpha)$ entonces la clausura lineal de las filas de A coincide con la clausura lineal de las filas de $F_{ij}(\alpha)A$.

   b) Si A y B son matrices cuadradas de orden $n \geq 1$ entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   c) Existen matrices A de orden $n \times m$ y B de orden $m \times n$ con $n < m$ tales que $AB = I_n$.

   d) Existen matrices A de orden $n \times m$ y B de orden $m \times n$ con $n > m$ tales que $AB = I_n$.

2. *a*) Encuentra ecuaciones implícitas para el conjunto

   $$\mathrm{Gen}\{(2, \lambda, 1), (1, 1, -1)\}.$$

   b) Determina el valor de λ que hace cierta la igualdad

   $$\mathrm{Gen}\{(2, \lambda, 1), (1, 1, -1)\} = \mathrm{Gen}\{(5, 2, -2), (4, 1, -1)\}.$$

3. Considera el determinante

   $$A_n = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   Encuentra la relación entre A_n, A_{n-1}, A_{n-2} para $n \geq 3$. Compruébala para A_3, A_2, A_1.

4. Determina, sin utilizar ningún procedimiento de diagonalización, los valores que $\lambda \in \mathbb{R}$ que hacen que las filas de A^{10} sean una base de $\mathbb{R}^2$, donde

   $$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Segunda parte del examen acerca de cálculo matricial y vectorial
enero-2020

NOMBRE:

1. Sean S_1, S_2 dos subespacios de V. Define la suma $S_1 + S_2$ y demuestra que es el menor subespacio de V que contiene a S_1 y a S_2.

2. Considera dos poblaciones A y B con el siguiente flujo migratorio: al cabo de cada año, $2/3$ de la población de A se ha marchado a B, mientras que la mitad de la de B se ha marchado a A. Si se asume una población total estable en el tiempo de 7000000 individuos, ¿qué población tendrá A al cabo de muchos años?

3. Considera el espacio V de matrices simétricas de orden 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Fija las bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

   a) Encuentra la matriz $\mathrm{c}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.
   b) Comprueba que $\mathrm{c}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{c}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, \mathrm{c}_{\mathcal{B}'}(v)$ para $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sean

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y - z = 0\}$$
$$S_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x + z = 0\}.$$

   Encuentra justificadamente un subespacio $S \leq \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S = S_2 \oplus S$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dada por

$$f(p(x)) = xp(x)' - 2p(x),$$

   donde $p(x)'$ denota la derivada de $p(x)$.

   a) Demuestra que f es lineal.
   b) Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen de f.

Parte 1. Ejer. 1. a) Cierto. Si $A_1, \dots, A_n$ son las filas de A, la clausura lineal de $F_{ij}(\alpha)A = \mathrm{Gen}\{A_1, \dots, A_i + \alpha A_j, \dots, A_j, \dots, A_n\} = \mathrm{Gen}\{A_1, \dots, A_i + \alpha A_j, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n\} = \mathrm{Gen}\{A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n\}$, que es la clausura lineal de las filas de A.

b) Falso. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pero el determinante de cada sumando es 0 mientras que el de la suma es 1.

c) Cierto. Por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)$.

d) Falso. Las columnas de AB son combinaciones lineales de las de A, por lo que su clausura lineal tiene a lo sumo dimensión m, mientras que la clausura de las de I_n tiene dimensión $n > m$, lo que no es posible.

Parte 1. Ejer. 2. a) Estudiamos la compatibilidad del sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ \lambda & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & x-2z \\ 0 & 1+\lambda & y-\lambda z \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z \\ 0 & 3 & x-2z \\ 0 & 3+3\lambda & 3y-3\lambda z \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z \\ 0 & 3 & x-2z \\ 0 & 0 & -(1+\lambda)x + 2(1+\lambda)z + 3y - 3\lambda z \end{array}\right)$$

por lo que la ecuación es $-(1+\lambda)x + 3y + (2-\lambda)z = 0$.

Este apartado también su puede resolver usando determinantes.

b) Como $(2, \lambda, 1), (1, 1, -1)$ son linealmente independientes, basta ver la condición en λ para que ambos pertenezcan a $\mathrm{Gen}\{(5, 2, -2), (4, 1, -1)\}$. Hay varias formas de resolver este apartado. Por ejemplo, calculamos las implícitas de esta clausura usando determinantes

$$0 = \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & x \\ 2 & 1 & y \\ -2 & -1 & z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 4 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+y \end{pmatrix} = -3(z+y).$$

Por lo que las clausuras son iguales si y solamente si $\lambda = -1$.

También se podría haber resuelto de un modo similar usado las ecuaciones ya calculadas en el apartado anterior.

Parte 1. Ejer. 3. Desarrollando por la primera fila vemos inmediatamente que

$$A_n = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 5A_{n-1} - 4A_{n-2}.$$

Realizamos la comprobación. Claramente $A_1 = 5, A_2 = 21$ y

$$A_3 = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 85 = 5A_2 - 4A_1.$$

Parte 1. Ejer. 4. Las filas de A^{10} forman una base de $\mathbb{R}^2$ si y sololamente si $\det A^{10} \neq 0$. Así que lo que debemos comprobar es qué debe cumplir λ para que $\det A \neq 0$. Como este determinante es $\lambda^2 + 1$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que las filas de A^{10} forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Parte 2. Ejer. 2. Sea (x_n, y_n) la población tras n años. Tenemos que si $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de A

$$\det \begin{pmatrix} x - 1/3 & -1/2 \\ -2/3 & x - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1/3 & -1/2 \\ x - 1 & x - 1 \end{pmatrix} = (x-1)(x+1/6).$$

Calculamos las acompañantes. Para el valor propio 1,

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -2/3 & 1/2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que podemos usar $(3/4, 1)$ o, mejor, $(3, 4)$.

Para el valor propio $-1/6$,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que podemos tomar $(-1, 1)$. La matriz $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, junto con $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ cumplen que

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Cuando n tiene a infinito el límite es

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

La población (x_n, y_n) converge a $\frac{1}{7}(3(x_0 + y_0), 4(x_0 + y_0)) = (3 \times 10^6, 4 \times 10^6)$ ya que la población total es 7×10^6.

Parte 2. Ejer. 3. a) Calculamos las coordenadas de los elementos de la base $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Claramente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1, 0, 1)^T, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (0, 1, 0)^T, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv (1, 0, -1)^T$$

por lo que

$$\mathrm{c}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Lo comprobamos para $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos que $\mathrm{c}_{\mathcal{B}}(v) = (2, 2, 0)^T$ mientras que $\mathrm{c}_{\mathcal{B}'}(v) = (1, 2, 1)^T$. Y sí es cierto que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parte 2. Ejer. 4. Hay muchas formas de resolver este ejercicio. Una más o menos rápida es observar que $S_1 = \mathrm{Gen}\{(0,1,1)\}$ mientras que $S_2 = \mathrm{Gen}\{(1,0,-1)\}$. Así que basta encontrar dos vectores b_2, b_3 tales que tanto $\{0,1,1), b_2, b_3\}$ como $\{(1,0,-1), b_2, b_3\}$ sean linealmente independientes. Claramente $(1,0,0), (0,1,0)$ sirven. Por tanto $S = \mathrm{Gen}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es una elección válida.

Parte 2. Ejer. 5. a) Tenemos

$$\begin{aligned} f(p+q) &= x(p+q)' - 2(p+q) = xp' - 2p + xq' - 2q = f(p) + f(q) \\ f(\alpha p) &= x(\alpha p)' - 2(\alpha p) = \alpha f(p) \end{aligned}$$

por lo que la aplicación es lineal.

b) La imagen es la clausura lineal de $f(1) = -2$, $f(x) = -x$, $f(x^2) = 0$ y $f(x^3) = x^3$, que tiene dimensión 3. Por tanto el núcleo tiene dimensión $4-3 = 1$, y estará generado por x^2.