Primer control acerca de cálculo matricial y vectorial
4-noviembre-2019

NOMBRE:

1. Demuestra que en un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V el número de elementos de un conjunto libre nunca supera al de un conjunto generador. *(2 ptos.)*

2. Encuentra A^k donde *(1.5 ptos.)*
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Sea $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales.

   a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{1, 1-x, 1-x+x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, 1-x, x-x^2\}$ son bases de V. *(0.5 ptos.)*

   b) Calcula las matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$. *(1 pto.)*

   c) Comprueba que $\mathrm{c}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{c}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{c}_{\mathcal{B}'}(v)$ para $v = (1-x)^2$. *(0.5 ptos.)*

   d) Prueba que para todo $n \geq 0$ el conjunto $\{1, x, \cdots, x^n, e^x\}$ es linealmente independiente. Concluye que la función e^x no puede ser un polinomio. *(1 pto.)*

4. Considera $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \mid p(1) = 0\}$ y encuentra subespacios $S_2 \neq S_3$ de modo que $V = S_1 \oplus S_2 = S_1 \oplus S_3$ donde *(2 ptos.)*
$$S_1 = \mathrm{Gen}\{(x-1), (x-1)^2\}.$$

5. Calcula la dimensión de la imagen de $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por *(1.5 ptos.)*
$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, 2x - 2y + 2z, -2x - 2y + 2z).$$

Ej. 2 El polinomio característico es

$$\det(xI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x+5 & -3 \\ 6 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 1-x \\ 6 & x-4 \end{pmatrix}$$
$$= (x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & x-4 \end{pmatrix} = (x-1)(x+2)$$

Los valores propios son 1 y -2.

Resolvemos el sistema homogéneo $(1I_2 - A)X = \mathbf{0}$. Como $I_2 - A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, las soluciones son $\{x_2(1,2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, nos quedamos con la acompañante $(1,2)$. El sistema para el valor propio -2 es $(-2I_2 - A)X = \mathbf{0}$. Como $-2I_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$, las soluciones son $\{x_2(1,1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ y podemos tomar como acompañante $(1,1)$.

Formamos la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ cuyas columnas son las acompañantes. La inversa de P es $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Tenemos que

$$A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & (-2)^k \\ 2 & (-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2(-2)^k & 1-(-2)^k \\ -2+2(-2)^k & 2-(-2)^k \end{pmatrix}$$

Ej. 3

a) Claramente si $\alpha_1 1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x+x^2) = 0$ entonces $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$, por lo que $\mathcal{B}$ es libre y, al tener V dimensión 3, es una base. Del mismo modo se comprueba que $\mathcal{B}'$ es base.

b) Se pide $c_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Debemos escribir las coordenadas de los elementos de la base $\mathcal{B}'$ con respecto de la base $\mathcal{B}$. Claramente se tiene

$$1 \equiv (1,0,0)^T, \quad 1-x \equiv (0,1,0)^T \quad \text{y} \quad x - x^2 \equiv (1,0,-1)^T$$

por lo que

$$c_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $v = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$. Claramente $c_{\mathcal{B}'}(v) = (0,1,-1)^T$ y $c_{\mathcal{B}}(v) = (-1,1,1)$. Comprobamos que efectivamente

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Si $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1}e^x = 0$ entonces, derivando esta expresión $n+1$ tenemos $\alpha_{n+1}e^x = 0$ por lo que $\alpha_{n+1} = 0$. Esto implica $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0$ y, por lo tanto, $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ej. 4 Para encontrar S tal que $V = S_1 \oplus S$ basta completar $\{(x-1),(x-1)^2\}$ hasta una base de V y tomar como S la clausura de los elementos usados para completar. Como $V = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_4 x^4 \mid \alpha_0 + \cdots + \alpha_4 = 0\}$, $\dim V = 4$. Así que hay que usar dos elementos para completar $\{(x-1),(x-1)^2\}$. Una elección sería $S_2 = \text{Gen}\{(x-1)^3,(x-1)^4\}$. Otra elección sería $S_3 = \text{Gen}\{(x-1)x^2,(x-1)x^3\}$. Claramente $(x-1)x^2 \notin S_2$ ya que los polinomios en S_2 son múltiplos de $(x-1)^3$. Así que $S_2 \neq S_3$.

Ej. 5 La imagen es

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}^3) &= \text{Gen}\{(1,1,2,-2),(1,-1,-2,-2),(-1,1,2,2)\} \\ &= \text{Gen}\{(1,1,2,-2),(1,-1,-2,-2)\} \end{aligned}$$

que tiene dimensión 2.