Número factorial, combinatorio y biniomio de Newton

Número factorial:

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Número combinatorio: $n,\ k \in \mathbb{N},\ n \geq k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Sucesiones

Equivalencias:

$\boxed{n \to \infty}$

- $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k \sim a_0 n^k.$
- $\log(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k) \sim \log(a_0 n^k) = \log a_0 + k \log n \sim k \log n.$
- $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (Fórmula de Stirling).
- $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}.$
- $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \log n.$
- $S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \sim \dfrac{n^{k+1}}{k+1}.$

$\boxed{a_n \to 1}$

- $\log a_n \sim a_n - 1.$
- $a_n^{\alpha} - 1 \sim \alpha(a_n - 1).$

$\boxed{a_n \to 0}$

- $(1 + a_n)^k - 1 \sim k a_n.$
- $\log(1 + a_n) \sim a_n.$
- $a_n \sim \operatorname{sen} a_n \sim \tan a_n \sim \operatorname{arcsen} a_n \sim \arctan a_n.$
- $1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}.$
- $\tan a_n - a_n \sim \frac{a_n^3}{3}.$
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
- $a_n - \operatorname{sen} a_n \sim \frac{a_n^3}{6}.$
- $a^{a_n} - 1 \sim a_n \log a.$
- $a_n \sim \operatorname{senh} a_n \sim \tanh a_n \sim \operatorname{arg\,senh} a_n \sim \operatorname{arg\,tanh} a_n.$
- $\cosh a_n - 1 \sim \frac{a_n^2}{2}.$
- $a_n - \tanh a_n \sim \frac{a_n^3}{3}.$
- $\operatorname{senh} a_n - a_n \sim \frac{a_n^3}{6}.$

Comparación de infinitos: $0 < \alpha < \beta$ y $1 < a < b$. $\log n \ll n^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n$.

Criterio de Stolz: Dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, supongamos que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

i) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente monótona creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

ii) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente monótona decreciente, $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces, si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$, para l finito o infinito, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Series numéricas

Criterio del resto: $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n$ no converge.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

- **Criterio del cociente o de D'Alambert:** Sea $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

  (1) Si $l > 1$, entonces $\sum a_n$ diverge. (2) Si $l < 1$, entonces $\sum a_n$ converge.

- **Criterio de la raíz o de Cauchy:** Sea $a_n \geq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

  (1) Si $l > 1$, entonces $\sum a_n$ diverge. (2) Si $l < 1$, entonces $\sum a_n$ converge.

- **Criterio de comparación:** Sean a_n, b_n tales que $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \geq n_0$.

  (1) Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

  (2) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

- **Criterio de comparación por paso al límite:** Sean a_n, $b_n \geq 0$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

  (1) Si $l \in (0, \infty)$, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen simultáneamente.

  (2) Si $l = 0$: si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge y si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

  (3) Si $l = \infty$: si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge y si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge $\Leftrightarrow r < 1$.

Criterios de convergencia para series de términos cualesquiera

- $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
- **Criterio de Leibniz para series de signo alterno:**

  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Exponencial y logaritmo

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$
- $a^{1/x} = \sqrt[x]{a}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x b^x$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$

Fórmulas trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\operatorname{sen}(\pi/2) = \cos(0) = 1.$
- $\cos(\pi/2) = \operatorname{sen}(0) = 0.$
- $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2.$
- $\cos(\pi/6) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$
- $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}.$
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$
- $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x$
- $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x.$

Ángulos suma y diferencia:

- $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$

Ángulo doble:

- $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Ángulo mitad:

- $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

Sumas, diferencias y productos:

- $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$
- $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

- $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$.
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Cambio de variable:

- Si $\tan x = t$, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.
- Si $\tan(x/2) = t$, $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Fórmulas hiperbólicas

- $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Ángulos suma y diferencia:

- $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$
- $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$
- $\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$
- $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$

Ángulo doble:

- $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$
- $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$

Ángulo mitad:

- $\operatorname{ch}^2 a = \dfrac{1 + \operatorname{ch} 2a}{2}$
- $\operatorname{sh}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}$

Cambio de variable:

- Si $\tanh x = t$, $\sinh^2 x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $\cosh^2 x = \dfrac{1}{1-t^2}$, $\sinh x \cosh x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$.
- Si $\tanh(x/2) = t$, $\sinh x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1-t^2}$.

Derivadas inmediatas de funciones elementales

- $f(x) = k \to f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \log x \to f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \log a$
- $f(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\operatorname{sen} x$
- $f(x) = \tan x \to f'(x) = 1 + \tan^2 x$
- $f(x) = \operatorname{arcsen} x \to f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x \to f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arctan x \to f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{ch} x \to f'(x) = \operatorname{sh} x$
- $f(x) = \operatorname{sh} x \to f'(x) = \operatorname{ch} x$
- $f(x) = \operatorname{tgh} x \to f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Desarrollos limitados de algunas funciones elementales

Las funciones siguientes admiten desarrollo limitado de Taylor de cualquier orden en el origen (desarrollo de McLaurin).

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$
2. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$
3. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$
4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$
5. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$
7. $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$
8. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$
9. $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + \cdots + o(x^n), \quad x \to 0.$
10. $\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$
11. $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$

12. $\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots + o(x^n), \quad x \to 0.$

13. $\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$

14. $\operatorname{argtgh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$

Series de potencias de algunas funciones elementales

Geometrica

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$

2. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \quad |x| < 1.$

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1.$

5. $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

6. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

7. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$

8. $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$
$|x| < 1.$

9. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$

10. $\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

11. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

12. $\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$
$|x| < 1.$

13. $\operatorname{argtgh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$

Primitivas inmediatas

- $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ si $\alpha \neq -1$.
- $\int \dfrac{dx}{x} = \log|x| + C$.
- $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$.
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.
- $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.
- $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$.
- $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argch} x + C = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C$, $(x > 1)$.
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

Fórmulas para el cálculo de áreas, longitudes y volúmenes

1. Área encerrada por dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas $x = a$, $x = b$ $(f(x) \geq g(x))$: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.
2. Longitud de la curva que describe una función $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$, $x = b$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.
3. Volumen del cuerpo que genera al girar en torno al eje OX la figura plana encerrada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$, y el eje OX: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$.
4. Volumen del cuerpo que genera al girar en torno al eje OY la figura plana encerrada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$, y el eje OX. $(0 \leq a < b)$: $V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|\,dx$.
5. Volumen de un sólido de sección conocida: $V = \int_a^b S(x)\,dx$.
6. Área de la superficie que genera al girar entorno al eje OX la curva que describe una función $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$, $x = b$: $A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

Todas las fórmulas tienen un análogo para una curva $x = f(y)$, intercambiando los papeles del eje OX y del eje OY.

Integrales impropias

Integrales impropias más usuales

1. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$ convergen para $p<1$; divergen para $p\geq 1$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge para $p>1$; diverge para $p\leq 1$ $(0<a<+\infty)$.

3. $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ converge para $\lambda>0$; diverge para $\lambda\leq 0$ $(-\infty<a<+\infty)$.

Comparación por paso al límite

Tomamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$, con b punto impropio, $f(x), g(x)\geq 0$, $l=\lim_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

a Si $0\leq l<+\infty$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

b Si $0<l\leq+\infty$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

(Lo mismo para a punto impropio. Si ambos puntos son impropios se divide en dos integrales y se estudia por separado.)

Comparación por desigualdad

Tomamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ integrales impropias con $|f(x)|\leq g(x)$. Se tiene que si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Funciones Gamma y Beta. Propiedades

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx,\ p>0,$$

$$\mathrm{B}(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}\,(1-x)^{v-1}\,dx,\ u,\ v>0,$$

$$\mathrm{B}(u,v)=2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2u-1}\theta\cos^{2v-1}\theta\,d\theta,\ u,\ v>0,$$

$$\mathrm{B}(u,v)=\int_0^{+\infty} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}}\,dx,\ u,\ v>0.$$

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, $p>0$.
2. $\Gamma(1)=1$.
3. $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$.
4. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.
5. $\mathrm{B}(u,v)=\mathrm{B}(v,u)$.
6. $\mathrm{B}(u,v)=\dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$, $u,v>0$.
7. $\mathrm{B}(u,1-u)=\Gamma(u)\Gamma(1-u)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(u\pi)}$, $0<u<1$.
8. $\Gamma(2u)=\dfrac{2^{2u-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(u)\Gamma\left(u+\dfrac{1}{2}\right)$, $u>0$.