EVALUACIÓN DE LÓGICA (1º – GM / GII) — 26-03-2014

TEST. La solución correcta se ha marcado con asteriscos.

1. La cadena de símbolos $((p \vee q) \to (q\neg \to p))$ formada a partir del alfabeto $\{p, q\}$

   (a) es una proposición bien formulada

   (b) no es una proposición bien formulada

   (c) es una proposición inconsistente

2. Sabiendo que $\bar{v}(\neg(q \to \neg p) \to \neg p) = 0$ se puede asegurar que:

   (a) $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$

   (b) $v(p) = 1$ y $v(q) = 1$

   (c) $v(p) = 0$

3. Sea la proposición $P = \neg(p \to r) \to (q \vee r)$ y una interpretación v tal que $v(p) = v(q) = 0$. Para que resulte $\bar{v}(P) = 1$: ha de ser:

   (a) No importa el valor de r

   (b) Ha de ser $v(r) = 1$

   (c) Ha de ser $v(r) = 0$

4. La proposición $(p \to (q \vee p)) \wedge (p \to \neg q)$:

   (a) Es una contradicción

   (b) Su negación no es ni tautología ni contradicción

   (c) Es una tautología

5. P y Q son proposiciones con alfabeto $\{p, q, r\}$. La tabla de P tiene exactamente cinco filas con valor 1 y la tabla de Q tiene exactamente cuatro filas con valor 0. Entonces $P \wedge Q$:

   (a) Es consistente

   (b) Es consistente con cuatro filas de valor 1

   (c) Es una tautología

6. La proposición $p \to (q \to r)$ es equivalente a:

   (a) $(p \to q) \to r$

   (b) $\neg(p \land q \land \neg r)$

   (c) Ninguna de las dos anteriores

7. Sean las proposiciones $P = p \leftrightarrow q$, $Q = \neg(p \land \neg q)$, se cumple:

   (a) $\neg Q \models \neg P$

   (b) $Q \models P$

   (c) $P \models \neg Q$

8. Sean la proposiciones $P = p \to (q \to r)$ y $Q = (p \to q) \to r$, entonces se cumple:

   (a) $P \lor Q$ es una tautología

   (b) $P \land Q$ es una contradicción

   (c) $P \land Q$ es consistente

9. Sea A un álgebra de Boole y sean $x, y \in A$. Una de las propiedades de absorción asegura que:

   (a) $x \lor (x \land y) = y$

   (b) $x \land (x \lor y) = y$

   (c) $x \lor (x \land y) = x$

10. Sean x, y elementos de un álgebra de Boole A, tales que $x \land \neg y = 0$. Entonces se cumple:

    (a) $x \to y = 1$

    (b) $y \geq x$

    (c) $y = \neg x$

11. En la lógica de proposiciones se cumple que:

    (a) un esquema de inferencia es una regla de inferencia

    (b) toda regla de inferencia es un esquema de inferencia

    (c) algunas reglas de inferencia no son esquemas de inferencia

12. Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es un conjunto de proposiciones contradictorio. Entonces se cumple:

    (a) $\Gamma \models P$

    (b) P pertenece al conjunto Γ

    (c) P es una tautología

13. Sea $\Gamma = \{p \to q, \neg p \to q, \neg q\}$ y sea P una proposición que solo contiene la letra q. Entonces se cumple:

    (a) $\Gamma \cup \{P\}$ no es contradictorio

    (b) $\Gamma \cup \{\neg P\}$ no es contradictorio

    (c) $\Gamma \models P$

14. Sea $\Gamma \subset \Gamma' \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Entonces se cumple:

    (a) Si Γ' es contradictorio, entonces Γ es contradictorio

    (b) Si Γ es contradictorio, entonces Γ' es contradictorio

    (c) Ni (a) ni (b) es cierto

15. Sea $\Gamma = \{P_1, \cdots, P_n\}$, $n > 1$. Entonces se cumple:

    (a) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \vee \cdots \vee P_n$ es una contradicción

    (b) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \equiv \neg P_n$

    (c) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ es una contradicción

16. El enunciado $\{\neg R \to P, R \to Q\} \models P \vee Q$:

(a) Es cierto sólo si $P \equiv Q$

(b) Es cierto

(c) No es cierto

17. Sea Γ un conjunto finito no vacío de cláusulas generadas por un alfabeto finito no vacío $\mathcal{A}$. Entonces se cumple:

(a) Si todos los literales de cada cláusula son positivos, entonces Γ es contradictorio

(b) Si todos los literales de cada cláusula son negativos, entonces Γ es contradictorio

(c) Si Γ es contradictorio, entonces existe una cláusula con un literal positivo y existe otra cláusula con un literal negativo

18. La afirmación $\{P, \neg Q\} \models \neg R$ si y solo si $\{P, R\} \models Q$ es:

(a) Verdadera

(b) Verdadera solo cuando $P = Q$ o $R = Q$

(c) Falsa

19. El esquema $\frac{P}{Q}$ es una regla de inferencia si y solo si $\frac{P \vee Q}{Q}$ lo es. El enunciado anterior es:

(a) Verdadero solo si $P = Q$

(b) Siempre verdadero

(c) Falso excepto cuando $P = Q$

20. Sea P una proposición y C una cláusula de P. Entonces:

(a) $P \vee C \equiv C$

(b) $P \wedge C \equiv P$

(c) $P \models C$

3 PROBLEMAS. Soluciones.

P1. (0,4 puntos) Sea la proposición $P = \neg(r \to (p \wedge q)) \wedge r$.

a) ¿Qué valores de verdad deben tomar (p, q, r) para que sea $\nu(P) = 1$?

b) Encontrar una proposición Q equivalente a P en la que sólo aparezcan los conectores $\{\neg, \vee\}$.

c) Hallar la forma normal conjuntiva de P.

d) Hallar una proposición $X = X(p, q)$ tal que $P \wedge X$ tenga sólo dos modelos.

SOLUCIÓN.— Se da en la tabla siguiente:

a)	$r = 1$ y $p \wedge q = 0$, es decir, $(p, q) \neq (1, 1)$. Por tanto: $(p, q, r) = (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$
b) Q	$P \equiv \neg[(r \to (p \wedge q)) \vee \neg r] \equiv$ $\equiv \neg[(\neg r \vee \neg(\neg p \vee \neg q)) \vee \neg r] = Q$
c) FNC	$P \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge$ $\wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
d) X	Ver a): con $X = p \vee q$ se anula el valor 1 de P en $(0, 0, 1)$. $P \wedge X$ vale 1 solo en $(p, q, r) = (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.

Sobre c): Eliminando el conector condicional y aplicando equivalencias de De Morgan se llega a $P \equiv r \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge r$, la forma clausal de P. Ahora se completan los paréntesis y simplificando resulta la forma normal conjuntiva propuesta en la tabla.

P2. (0,2 puntos) En una álgebra de Boole A, demostrar la desigualdad siguiente:

$$(x \vee y) \wedge (x \to x') \wedge (y \to y') \leq x' \vee y'.$$

SOLUCIÓN.— [Caso $A = \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Con $x = [P]$, $y = [Q]$, etc., la desigualdad propuesta es en este álgebra de Boole particular la versión algebraica de la regla de casos: $P \vee Q, P \to P', Q \to Q' \models P' \vee Q'$.]

Para demostrarla con los métodos d eálgebra de Boole abstracta usaremos la propiedad distributiva y dos veces cada una de las desigualdades $x \wedge (x \to x') \leq x'$ (modus pones algebraico) y $x \wedge a \leq x$. Se tiene:

$(x \vee y) \wedge (x \to x') \wedge (y \to y') =$

$= [x \wedge (x \to x') \wedge (y \to y')] \vee [y \wedge (x \to x') \wedge (y \to y')] \leq$

$\leq [x' \wedge (y \to y')] \vee [y' \wedge (x \to x')] \leq x' \vee y'$.

P3. (0,4 puntos) (i) Verificar por resolución que el siguiente esquema no es una regla de inferencia:

$$\begin{array}{c} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ (Q \wedge S) \to T \\ \hline \neg P \vee \neg R \end{array}$$

(ii) Encontrar valores de (P, Q, R, S, T) tales que las premisas del esquema anterior valgan 1 y la conclusión valga 0.

(iii) Añadir a las premisas una proposición, que no sea una contradicción y en cuya escritura no aparezcan ni P ni R, de modo que con la nueva proposición añadida el esquema se convierta en una regla.

SOLUCIÓN.— (i) Las dos premisas y la negación de la conclusión dan las cinco cláusulas que se indican abajo y a la izquierda. En la columna derecha aparecen los pasos de una resolución que se estabiliza sin llegar a la contradicción:

1	$\neg P \vee Q$
2	$\neg R \vee S$
3	$\neg Q \vee \neg S \vee T$
4	P
5	R

6	$\neg P \vee \neg S \vee T$	(1,3)
7	Q	(1,4)
8	$\neg Q \vee \neg R \vee T$	(2,3)
9	S	(2,5)
10	$\neg P \vee \neg R \vee T$	(1,8)
11	$\neg S \vee T$	(3,7)
12	$\neg Q \vee T$	(3,9)
13	$\neg P \vee T$	(1,12)
14	$\neg R \vee T$	(2,11)
15	T	(4,13) etc.

(ii) La conclusión vale 0 si y solo si $P = R = 1$. Con estos valores las premisas quedan de la forma $Q \wedge S$, $(Q \wedge S) \to T$, y ambas valen 1 si $Q = S = T = 1$. Así pues, cuando todas las letras que aparecen valen 1 las premisas valen 1 y la conclusión vale 0: el esquema propuesto no es una regla.

(iii) La resolución efectuada en (i) pone de manifiesto que para alcanzar la contradicción, con las condiciones impuestas, bastaría añadir a las premisas uno de cualquiera de estos literales negados: $\neg Q$, $\neg S$, $\neg T$.