# Cálculo Infinitesimal

## Hoja 5

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

   (a) $\log \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

   (b) $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$

   (c) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

   (d) $\log \sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

2. Hallar $f'$ en términos de $g'$, si:

   (a) $f(x) = g(x+g(a))$

   (b) $f(x) = g(xg(a))$

   (c) $f(x) = g(x+g(x))$

   (d) $f(x) = g(x)(x-a)$

   (e) $f(x) = g(a)(x-a)$

   (f) $f(x+3) = g(x^2)$

3. Hallar la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{x - \operatorname{sen} \frac{x}{x - \operatorname{sen} x}}$.

4. Calcular la pendiente de recta tangente a la gráfica de $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

5. La función posición en el movimiento uniformemente acelerado por la gravedad (en caída libre) viene dada por

$$s(t) = -4{,}9\,t^2 + v_0\,t + s_0\,,$$

   donde $v_0$ y $s_0$ son la velocidad y posición iniciales.

   *a*) Con el fin de estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte más alta en el agua de una piscina que se encuentra al nivel del suelo. ¿Cuál es la altura del edificio, si el chapoteo se observa 5.6 segundos después de soltar la piedra?

   *b*) Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de $120m/s$. ¿Cuál es su velocidad a los 5 segundos? ¿Y a los 10?

6. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 415 metros. Utilizaremos la función posición siguiente para objetos de caída libre:

$$s(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t + s_0.$$

   *a*) Determinar las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.

   *b*) Calcular su velocidad promedio en el intervalo $[1, 2]$.

*c*) Encontrar las velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$.

*d*) Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

*e*) Determinar su velocidad al caer en el suelo.

7. El costo $C$ de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un producto es
$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30}\right), \quad x \geq 1,$$
donde $C$ se mide en miles de dólares y $x$ es el tamaño del pedido en cientos. Encontrar la razón de cambio de $C$ respecto de $x$ cuando

   *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$, *c*) $x = 20$.

   ¿Qué implican estas razones de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

8. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación
$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50+t^2}\right),$$
donde $t$ se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

9. En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares. El radio $r$ del círculo exterior está creciendo a una razón constante de 30 cm/s. Cuando el radio es 1 metro, ¿a qué razón está cambiando el área $A$ de la región circular perturbada?

10. Hallar el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones, y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución:

    (a) $3x^5 + 15x - 8 = 0$ (b) $x^5 - 5x = -1$

    (c) $2x^3 - 9x^2 + 12x = -1$ (d) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12 = 0$

11. Demostrar que entre dos ceros de una función derivable en un intervalo, hay al menos, un cero de su función derivada.

12. Comprobar que la ecuación $2x^5 + 8x^3 + 5x - 6 = 0$ tiene una y sólo una raíz real.

13. Demuestra las siguientes desigualdades:

    *a*) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arc\,tg} x < x - \dfrac{x^3}{6}$ si $x \in (0, 1]$

b) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ si $x \geq 0$

c) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x)$ si $x > -1, x \neq 0$

d) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$

e) $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{e}$, $x > 0$, $x \neq e$.

14. Calcular los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$, en $[-1,1]$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$ en $[0,1]$.

(c) $f(x) = x^2 \log x$, en $[e^{-1}, e]$.

(d) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2,2]$.

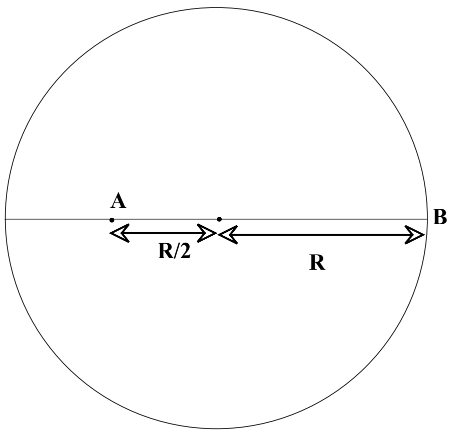
(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, en $[-1,2]$.

(f) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

15. Entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, halla la que forma con los ejes coordenados (en su parte positiva) un triángulo de área mínima. ¿Cuánto vale dicha área?

16. Hallar las coordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2$ más cercanos al punto de coordenadas $(0,1)$.

17. En una piscina circular de $R$ metros de radio, una persona se está ahogando en el punto $A$. ¿Qué tendrá que hacer otra persona situada en $B$ para salvarla en el menor tiempo posible, sabiendo que por tierra va a una velocidad de 6 metros por segundo y nadando a 1,2 metros por segundo?




18. Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y lindante por el cuarto con una larga pared de piedra. ¿Qué forma será más conveniente dar a la superficie para que su área sea mayor, si se dispone en total de $L$ metros de tela metálica?

19. Inscribir en una elipse dada un rectángulo de la mayor área posible, que tenga los lados paralelos a los ejes de la elipse.

20. Sea $P$ un punto del primer cuadrante en un sistema de coordenadas cartesianas. Hallar una recta que pase por $P$ y corte en el primer cuadrante a $OX$ en $A$ y a $OY$ en $B$, de modo que:

    (a) $AB$ sea mínimo. (b) $OA+OB$ sea mínimo. (c) $OA \cdot OB$ sea mínimo.

21. Un empresa fabrica recipientes cuya forma es un cilindro recto, coronado por una semiesfera. Los recipientes deben ser de volumen $V = \dfrac{5\pi}{3}$. Calcular las dimensiones del recipiente para que el área sea mínima. (Nota: el área de la esfera es $4\pi r^2$.)

22. Se tiene un rectángulo de 12 cm de perímetro. Sobre sus lados se trazan cuatro semicircunferencias exteriores a él. Hallar la superficie total mínima de la figura obtenida.

23. Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área entre todos los de perímetro igual a 4

24. Una ventana tiene forma de rectángulo, con un semicírculo en la parte superior. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 4 m, hallar las dimensiones de la ventana de mayor superficie.

25. Buscar todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 1 con dos vértices en los extremos del diámetro y el otro en la semicircunferencia, de forma que el área sea máxima.

26. Queremos construir una lata de conserva de volumen dado $V$, como un cilindro circular recto con tapas. Para soldar las tapas y el lateral necesitamos un material muy caro. Calcular el radio y la altura del cilindro para que el material utilizado al soldarlo sea mínimo.

27. Hallar las coordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2$ más cercanos al punto de coordenadas $(0, 1)$.

28. Dos postes, uno de 4 metros de altura y el otro de 8 metros, están a 9 metros de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?

29. Un espejo cuadrado de lado $L$ se nos rompe por una esquina, desprendiéndose un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y 3 ($L > 3$). De lo que queda queremos obtener un espejo rectangular con la mayor superficie posible. ¿Cuáles serán sus dimensiones?

30. Una empresa fabrica caramelos de forma cilíndrica rematada por un cono cuyo radio es $R = \sqrt{5}$ y su volumen es $V = 20\pi$. Calcular las dimensiones (altura del cono y altura del cilindro) para que el área total sea mínima. (El área del cono es $\pi R\sqrt{h^2 + R^2}$).

31. Tenemos un triángulo isósceles cuyo perímetro es 30 cm. Lo hacemos girar alrededor de su altura formando un cono. ¿Cuáles son las medidas del triángulo que hacen el volumen máximo?

Parcial 2 - 2020

32. Queremos construir un depósito abierto superiormente en forma de prisma recto, con base cuadrada y volumen 50 $m^3$. Hallar las dimensiones para que tenga superficie mínima.

33. Sea $f(x) = ax - \dfrac{x^3}{1+x^2}$. Probar que $f$ es creciente en $\mathbb{R}$ si y sólo si $a \geq 9/8$.

34. Demostrar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ sólo tiene una raíz real.

35. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x - \log(1+x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{1/x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x - 6}$

(d) $f(x) = x(x^2 - 4)^{-1/3}$

(e) $f(x) = x^5(x-1)$

(f) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(2x) + \mathrm{sen}(4x)$

(g) $f(x) = \mathrm{sen}^4 x - \cos^4 x$

(h) $f(x) = x(\mathrm{sen}\log x - \cos\log x)$

36. Estudiar y representar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 9}$

(i) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x}$

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)x}}{x-1}$

(l) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(n) $f(x) = \log\dfrac{x-1}{2x-1}$

(o) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

(q) $f(x) = x + \log(x^2 + 1)$

(s) $f(x) = \tan^2 x$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$

(m) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

(ñ) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$