C.2.2 Segunda prueba escrita

Prueba Corta-A: Espacios vectoriales y aplicaciones
Fecha: 13 de diciembre de 2012

---

1. [4] **(1,6 puntos)** Define aplicación lineal $f : V \to W$ donde V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Pon un ejemplo de subespacio vectorial de polinomios 3-truncados de dimensión 2 que contenga al polinomio $1 + x + x^2$.

2. **(1,4 puntos)** Completa la afirmación de forma razonada: La dimensión de un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ de soluciones de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene rango p es exactamente $(\dots)$.

3. **(7 puntos)**La aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^4, \mathcal{C})$ tiene matriz coordenada en las bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (0,-1,0,1), v_4 = (1,0,1,1)\}$ y $\mathcal{C} = \{u_1 = (-1,0,0,1), u_2 = (1,3,2,0), u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (0,0,0,1)\}$. Se pide que:

   a) calcules una base del núcleo de T;
   b) completes una base del subespacio imagen de T a una base de R^4;
   c) calcules las ecuaciones implícitas del subespecio de filas de la matriz A;
   d) uses la expresión coordenada $Y_{\mathcal{C}} = A \cdot X_{\mathcal{B}}$ para calcular la imagen del vector $u = v_1 - v_2 + v_3 - v_4$.
   e) calcules la matriz coordenada de T asociada a la base canónica de R^4 tanto en el conjunto inicial como en el final.

   Hasta aquí se pueden obtener 5,5 puntos. El siguiente ejercicio os dará **1,5 puntos adicionales:** Construye, explicando tu estrategia, una aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla las siguientes propiedades:

---

[4] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

- $Ker\, f = Gen\{(5,0,0,1),(0,1,-5,5)\}$;
- $Im\, f = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
- existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(0,1,2,1) = (\alpha, \alpha+1, \alpha)$.

Prueba Corta-B: Espacios vectoriales y aplicaciones
Fecha: 13 de diciembre de 2012

---

1. [5] **(1,6 puntos)** Define espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Descibe cómo se calcula la matriz coordenada P del cambio de bases $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_n\} \overset{\mathbf{P}}{\leftarrow} \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

2. **(1,4 puntos)**Verdadero ó falso: el conjunto de matrices simétricas 2×2 es un subespacio del espacio vectorial de matrices reales 2×2. En caso afirmativo, calcula su dimensión.

3. **(7 puntos)**La aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$ tiene matriz coordenada
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
en las bases $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (0,-1,0,1), v_4 = (1,0,1,1)\}$ y $\mathcal{C} = \{u_1 = (-1,0,0), u_2 = (1,3,2), u_3 = (0,0,1)\}$. Se pide que:

   a) calcules una base de la imagen de T;
   b) completes una base del núcleo de T a una base de R^4;
   c) calcules las ecuaciones implícitas del subespacio de filas de la matriz B;
   d) uses la expresión coordenada $Y_{\mathcal{C}} = A \cdot X_{\mathcal{B}}$ para calcular, si hay, las preimágenes del vector $u = -u_1 + u_2 - u_3$.
   e) calcules la matriz coordenada de T asociada a las bases canónicas de R^4 y $\mathbb{R}^3$.

   Hasta aquí se pueden obtener 5,5 puntos. El siguiente ejercicio os dará **1,3 puntos adicionales:** Construye, explicando tu estrategia, una aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla las siguientes propiedades:

   - $Ker\, f = Gen\{(5,0,0,1), (0,1,-5,5)\}$;
   - $Im\, f = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
   - existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(0,1,2,1) = (\alpha, \alpha+1, \alpha)$.

---

[5] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

Prueba Corta-C: Espacios vectoriales y aplicaciones
Fecha: 13 de diciembre de 2012

1. [6]**(1,6 puntos)** Enuncia el teorema de base para un espacio vectorial V de dimensión p sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Pon un ejemplo de aplicación lineal que no sea ni inyectiva ni suprayectiva.

2. **(1,4 puntos)**Supongamos que $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}$ son tres bases de un espacio vectorial V y que conocemos las matrices P, Q de los cambios de base $\mathcal{B} \xleftarrow{\mathbf{P}} \mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B} \xleftarrow{\mathbf{Q}} \mathcal{B}_2$. Calcula de forma razonada la matriz del cambio de base $\mathcal{B}_1 \xleftarrow{\mathbf{R}} \mathcal{B}_2$ usando P y Q.

3. **(7 puntos)**La aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^4, \mathcal{C})$ tiene matriz coordenada
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
en las bases $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (0,-1,0,1), v_4 = (1,0,1,1)\}$ y $\mathcal{C} = \{u_1 = (-1,0,0,1), u_2 = (1,3,2,0), u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (0,0,0,1)\}$. Se pide que:

   a) calcules una base de la imagen de T;

   b) completes una base del núcleo de T a una base de R^4;

   c) calcules las ecuaciones implícitas del subespacio de filas de la matriz C;

   d) uses la expresión coordenada $Y_{\mathcal{C}} = A \cdot X_{\mathcal{B}}$ para calcular, si hay, las preimágenes del vector $u = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4$.

   e) calcules la matriz coordenada de T asociada a la base canónica de R^4 tanto en el conjunto inicial como en el final.

Hasta aquí se pueden obtener 5,5 puntos. El siguiente ejercicio os dará **1,5 puntos adicionales:** Construye, explicando tu estrategia, una aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla las siguientes propiedades:

[6] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

- $Ker\, f = Gen\{(5, 0, 0, 1), (0, 1, -5, 5)\}$;
- $Im\, f = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
- existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(0, 1, 2, 1) = (\alpha, \alpha + 1, \alpha)$.

Prueba Corta-D: Espacios vectoriales y aplicaciones
Fecha:13 de diciembre de 2012

1. [7]**(1,6 puntos)** . Para una aplicación lineal $f : (V, \mathcal{B}) \to (W, \mathcal{C})$, describe cómo se calcula la matriz coordenada de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Previa definición de aplicación biyectiva e inyectiva, prueba que toda aplicación lineal $f : V \to V$ que sea inyectiva debe ser necesariamente biyectiva.

2. **(1,4 puntos)**: Verdadero ó falso: El conjunto de polinomios $\{a + x + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial de los polinomios 2-truncados reales. En caso afirmativo, calcula una base.

3. **(7 puntos)**La aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$matriz

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

representa a la matriz coordenada de una aplicación lineal en las bases de R^4 (inicial) $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,1,0,0), v_3 = (0,-1,0,1), v_4 = (1,0,1,1)\}$ y $\mathbb{R}^3$ (final) $\mathcal{C} = \{u_1 = (-1,0,0), u_2 = (1,3,2), u_3 = (0,0,1)\}$. Se pide que:

   a) calcules una base del núcleo de T;
   b) calcules las ecuaciones implícitas de la imagen de T;
   c) completes una base del subespacio de filas de la matriz D a una base de R^4;
   d) uses la expresión coordenada $Y_{\mathcal{C}} = A \cdot X_{\mathcal{B}}$ para calcular la imagen del vector $u = -v_1 + v_3 - v_3$.
   e) calcules la matriz coordenada de T asociada a las bases canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

   Hasta aquí se pueden obtener 5,5 puntos. El siguiente ejercicio os dará **1,5 puntos adicionales:** Construye, explicando tu estrategia, una aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla las siguientes propiedades:

[7]Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

- $Ker\, f = Gen\{(5,0,0,1),(0,1,-5,5)\}$;
- $Im\, f = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
- existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(0,1,2,1) = (\alpha, \alpha+1, \alpha)$.

Prueba Corta-E: Espacios vectoriales y aplicaciones
Fecha:13 de diciembre de 2012

1. [8]**(1,6 puntos)**Si V espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, define coordenadas del vector $\vec{v} \in V$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_p}\}$. Comprueba si el conjunto de matrices de la forma $S = \{\begin{pmatrix} a+b & c & a \\ b & 0 & a-c \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial de matrices reales 2×3. En caso afirmativo, calcula su dimensión.

2. **(1,4 puntos)** Si $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz coordenada de la aplicación $f : (V, \mathcal{B}) \to (W, \mathcal{C})$ en las bases $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ y $\mathbb{C} = \{c_1, c_2\}$, calcula $f(b_3)$ y $f(2b_1 - b_2)$.

3. **(7 puntos)**aplicación lineal $T : (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}^4, \mathcal{B}$ tiene matriz coordenada en las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ la matriz

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C} = \{u_1 = (-1, 0, 0), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (0, 0, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (0, -1, 0, 1), v_4 = (1, 0, 1, 1)\}$. Se pide:

   a) que calcules una base del subespacio de filas de la matriz E;
   b) que calcules las ecuaciones implícitas de la imagen de T;
   c) que completes una base del núcleo de T a una base de R^3;
   d) que uses la expresión coordenada $Y_{\mathcal{C}} = A \cdot X_{\mathcal{B}}$ para calcular, si hay, las preimágenes del vector $u = 2v_1 + v_2 - v_4$.
   e) que calcules la matriz coordenada de T asociada a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

Hasta aquí se pueden obtener 5,5 puntos. El siguiente ejercicio os dará **1,5 puntos adicionales:** Construye, explicando tu estrategia, una aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla las siguientes propiedades:

[8] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

- $Ker\, f = Gen\{(5,0,0,1),(0,1,-5,5)\}$;
- $Im\, f = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2-x_3 = 0\}$;
- existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(0,1,2,1) = (\alpha, \alpha+1, \alpha)$.