

LÓGICA

ACTIVIDADES EN GRUPO REDUCIDO

SESIÓN 3

Luis Javier Hernández

9 de marzo de 2020

Índice

1. Resolución con proposiciones	2
----------------------------------------	----------

TERCERA SESIÓN DE GRUPO REDUCIDO

1. Resolución con proposiciones

El proceso de resolución permite evaluar si un esquema $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ es o no una regla de la lógica. En este primer momento sólo consideramos proposiciones, más adelante lo haremos también con fórmulas de la lógica de predicados. El proceso tiene dos partes:

(i) *Preparación*. Se trata de transformar el esquema $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ en un conjunto de cláusulas $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$. Este conjunto resulta de juntar las cláusulas que forman las premisas y la negación de la conclusión (recordar la sesión anterior). El esquema $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ es una regla si y sólo si el conjunto de cláusulas Γ así obtenido es inconsistente.

Veamos ejemplos de esquemas $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ y su respectivo conjunto de cláusulas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(E1)} \quad \frac{\neg P \rightarrow Q}{\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)} & \Gamma 1 : \begin{array}{l} P \vee Q \\ P \vee \neg Q \\ P \vee R \\ \neg P \end{array} \\
 \hline
 \text{(E2)} \quad \frac{P \wedge (Q \rightarrow (P \rightarrow S))}{P \rightarrow (Q \wedge R)} & \Gamma 2 : \begin{array}{l} P \\ \neg P \vee \neg Q \vee S \\ \neg P \vee Q \\ \neg P \vee R \\ \neg S \end{array}
 \end{array}$$

(ii) *Resolución*. Se trata de verificar si un conjunto de cláusulas Γ . Para ello se utiliza la *regla de resolución*

$$\text{(RR)} \quad \frac{P \vee p}{Q \vee \neg p} \quad \frac{Q \vee \neg p}{P \vee Q}$$

siendo P, Q cláusulas que no contienen la variable p y por tanto $P \vee Q$ será otra cláusula sin dicha variable. Con la aplicación reiterada de esta regla se van añadiendo al conjunto Γ nuevas cláusulas, cada vez con menos letras, sin que cambie su condición de ser o no contradictorio. Que lo sea o no dependerá de cómo termine la reiteración, lo que sólo admite dos posibilidades:

- Llega a aparecer una contradicción, es decir, una cláusula literal p y su negación $\neg p$. Entonces Γ es *contradictorio* y, si procede de un esquema $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$, dicho esquema *es una regla*.
- Se termina la posibilidad de aplicar (RR) con resultados nuevos sin

encontrar la contradicción. Entonces Γ *no es contradictorio* y, si procede de un esquema $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$, dicho esquema *no es una regla*.

La propia regla de resolución puede verificarse por resolución. Sus cláusulas son $\Gamma = \{P \vee p, Q \vee \neg p, \neg P, \neg Q\}$. Resolviendo la primera con la tercera y la segunda con la cuarta se amplía el conjunto de cláusulas a un conjunto contradictorio $\Gamma' = \{P \vee p, Q \vee \neg p, \neg P, \neg Q, p, \neg p\}$.

También la resolución servirá para verificar tautologías, que no son sino esquemas $\frac{\text{Premisas}}{\text{Conclusión}}$ que tienen vacío el conjunto de premisas y la tautología como conclusión. Así que se tratará de verificar la contradicción o no del conjunto de cláusulas de la negación de la tautología. Un ejemplo muy sencillo, la tautología (H38 en la hoja de tautologías) $(P \wedge Q) \rightarrow Q$, cuya negación tiene un conjunto de cláusulas contradictorio: $\Gamma = \{P, Q, \neg Q\}$. Con expresiones más complejas se procede como con las reglas que veremos después. Si hubiéramos cometido una errata al escribir la tautología poniendo $(P \wedge Q) \rightarrow R$, entonces las cláusulas de la negación formarían el conjunto $\Gamma = \{P, Q, \neg R\}$ en el que la contradicción “no está ni se la espera”, así que la proposición no es una tautología.

Apliquemos la resolución a los cuatro conjuntos de cláusulas ΓX deducidos en el apartado anterior —(i) Preparación— de sendos esquemas EX . Respecto a los esquemas, el resultado será que $E1$, $E2$ son reglas. En cada caso, pondremos en la primer columna las cláusulas de partida, numeradas para poder referirnos a ellas, y en la segunda las que se van añadiendo por resolución indicando los números de las cláusulas de las que proceden:

$\Gamma 1 :$	1	$P \vee Q$		
	2	$P \vee \neg Q$	5	Q (1,4)
	3	$P \vee R$	6	$\neg Q$ (2,4)
	4	$\neg P$	7	0 (5,6)

Nótese que la cláusula 3 no ha sido utilizada, lo que significa que si la quitamos el conjunto de cláusulas que queda también es contradictorio. Si nos fijamos en el esquema $E1$, que ha resultado ser una regla, también lo sería si cambiáramos la segunda premisa por $\neg P \rightarrow \neg Q$ prescindiendo de R . Haciendo esto la conjunción de las premisas es $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q) \equiv (\neg P \rightarrow 0) \equiv \neg \neg P \equiv P$, así que la regla da forma a una equivalencia. Todo esto se observa directamente en los términos de la resolución.

$\Gamma 2 :$	1	P		
	2	$\neg P \vee \neg Q \vee S$	6	Q (1,3)
	3	$\neg P \vee Q$	7	$\neg P \vee \neg Q$ (2,5)
	4	$\neg P \vee R$	8	$\neg Q$ (1,7)
	5	$\neg S$	9	0 (6,8)

Ahora sucede que no se ha usado la cláusula 4, de modo que también en este caso la R es superflua.

Se plantea a continuación la preparación y resolución de una regla (R8 en la hoja de reglas):

$\neg R \vee \neg S$	1	$\neg R \vee \neg S$	6	$\neg P \vee \neg S$	(1,2)
$P \rightarrow R$	2	$\neg P \vee R$	7	$\neg S$	(4,6)
$Q \rightarrow S$	3	$\neg Q \vee S$	8	S	(3,5)
$\neg P \vee \neg Q$	4	P	9	0	(7,8)
	5	Q			

En la resolución efectuada se han utilizado las cinco cláusulas iniciales, ¿ se puede usar un a resolución diferente en la que alguna cláusula no se utilice? Si cometemos una errata al escribir la regla anterior resulta que deja de serlo:

$\neg R \vee \neg S$	1	$\neg R \vee \neg S$	6	$\neg R \vee \neg Q$	(1,3)
$P \rightarrow Q$	2	$\neg P \vee Q$	7	$\neg P \vee S$	(2,3)
$Q \rightarrow S$	3	$\neg Q \vee S$	8	Q	(2,4)
$\neg P \vee \neg Q$	4	P	9	S	(3,5)
	5	Q	10	$\neg R \vee \neg P$	(1,7)
			11	$\neg R$	(1,9)

y ya no hay más aplicaciones posibles de (RR) distintas de las ya efectuadas.

EJERCICIOS RESUELTOS DE LA TERCERA SESIÓN

Ejercicio 1. Considerar los siguientes esquemas de inferencia y conjuntos de cláusulas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(EI1)} & \frac{\begin{array}{c} P \rightarrow R \\ Q \rightarrow S \\ \neg R \vee \neg S \end{array}}{(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R} \\
 & \Gamma(\text{EI2}) : \begin{array}{c} \neg P \vee R \\ \neg Q \vee S \\ \neg R \vee \neg S \\ P \vee R \\ Q \vee R \end{array} \\
 \text{(EI2)} & \frac{\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \\ s \rightarrow (q \wedge t) \\ s \wedge t \end{array}}{p \rightarrow (q \wedge r)} \\
 & \Gamma(\text{EI2}) : \begin{array}{c} \neg p \vee \neg q \vee r \\ \neg p \vee \neg q \vee s \\ \neg s \vee q \\ \neg s \vee t \\ s \\ t \\ p \\ \neg q \vee \neg r \end{array}
 \end{array}$$

a) Comprobar que tomando las cláusulas de una forma clausal de las premisas y de la negación de la consecuencia de los esquemas de inferencia anteriores EI1, EI2 se obtienen los correspondientes conjuntos de cláusulas $\Gamma(\text{EI1}), \Gamma(\text{EI2})$.

b) Estudiar mediante el método de resolución si $\Gamma(\text{EI1}), \Gamma(\text{EI2})$ son conjuntos contradictorios.

Una solución:

1.	$\neg P \vee R$	
2.	$\neg Q \vee S$	
3.	$\neg R \vee \neg S$	
4.	$P \vee R$	
5.	$Q \vee R$	
<hr/>		
6.	$\neg P \vee \neg S$	(1,3)
7.	R	(1,4)
8.	$\neg Q \vee \neg R$	(2,3)
9.	$R \vee S$	(2,5)
10.	$\neg P \vee \neg Q$	(2,6)
11.	$P \vee \neg S$	(3,4)
12.	$Q \vee \neg S$	(3,5)
13.	$\neg S$	(3,7)
14.	$R \vee \neg S$	(4,6)
15.	$P \vee \neg Q$	(4,8)
16.	$\neg Q \vee R$	(4,10)
17.	$\neg P \vee R$	(5,10)
18.	$P \vee R$	(5,15)
19.	$\neg Q \vee \neg S$	(6,15)
20.	$R \vee \neg S$	(6,18)
21.	$\neg Q$	(7,8)
22.	$\neg Q \vee S$	(8,9)
23.	$\neg R \vee \neg S$	(8,12)
24.	$P \vee \neg Q$	(8,18)
25.	$Q \vee R$	(9,12)
26.	$\neg P \vee \neg S$	(10,12)
27.	$\neg Q \vee R$	(10,18)
28.	$R \vee \neg S$	(11,17)
29.	$\neg S$	(11,26)

Puesto que la resolución se estabiliza se tiene que el esquema de inferencia no es una regla de inferencia.

Para el segundo esquema de inferencia se tiene:

1.	$\neg p \vee \neg q \vee r$	
2.	$\neg p \vee \neg q \vee s$	
3.	$\neg r \vee \neg s$	
4.	$\neg s \vee q$	
5.	s	
6.	t	
7.	p	
8.	$\neg q \vee \neg r$	
<hr/>		
9.	$\neg q \vee r$	(1,7)
10.	$\neg q$	(8,9)
11.	$\neg s$	(4,10)
12.	\perp	(5,11)

Luego en este caso sí que es una regla de inferencia.

Ejercicio 2. Utilizar el método de resolución para validar el siguiente esquema de inferencia.

$$\begin{array}{c}
 P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge T \\
 Q \wedge S \rightarrow A \\
 Q \wedge R \rightarrow B \\
 P \wedge T \rightarrow C \\
 A \wedge B \rightarrow D \\
 \hline
 (A \wedge C \rightarrow E) \wedge (B \wedge C \rightarrow F) \\
 \hline
 D \wedge E \wedge F
 \end{array}$$

Una solución:

1. P
2. Q
3. R
4. S
5. T
6. $\neg Q \vee \neg S \vee A$
7. $\neg Q \vee \neg R \vee B$
8. $\neg P \vee \neg T \vee C$
9. $\neg A \vee \neg B \vee D$
10. $\neg A \vee \neg C \vee E$
11. $\neg B \vee \neg C \vee F$
12. $\neg D \vee \neg E \vee \neg F$
13. $\neg D \vee \neg E \vee \neg B \vee \neg C$ (11, 12).
14. $\neg D \vee \neg E \vee \neg B \vee \neg P \vee \neg T$ (8, 13).
15. $\neg D \vee \neg E \vee \neg B$ (1 – 5, 14).
16. $\neg D \vee \neg E \vee \neg Q \vee \neg R$ (7, 15).
17. $\neg D \vee \neg E$ (2 – 3, 16).
18. $\neg D \vee \neg A \vee \neg C$ (10, 17).

19. $\neg D \vee \neg A \vee \neg P \vee \neg T$ (8, 18).
20. $\neg D \vee \neg A$ (1 – 5, 19).
21. $\neg D \vee \neg Q \vee \neg S$ (6, 20).
22. $\neg D$ (2 – 4, 21).
23. $\neg A \vee \neg B$ (9, 22).
24. $\neg A \vee \neg Q \vee \neg R$ (7, 23).
25. $\neg A$ (2 – 3, 24).
26. $\neg Q \vee \neg S$ (6, 25).
27. \perp (2 – 4, 26).

Nota: Para la resolución anterior se ha tomado un cierto criterio para ir seleccionando las parejas, pero se puede llegar al conjunto nulo utilizando otras estrategias que pueden ser muy diferentes entre sí.

Ejercicio 3. Utilizar el método de resolución para validar el siguiente esquema de inferencia. En el caso de que el esquema de inferencia no sea válido, encontrar una interpretación que verifique las premisas y no sea un modelo de la consecuencia.

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ (R \wedge S) \rightarrow T \\ (S \wedge T) \rightarrow W \end{array}}{P \rightarrow (Q \rightarrow W)}$$

Notemos que las interpretaciones de la forma $(P, Q, W, R, S, T) = (1, 1, 1, 0, T)$ y R, S, T son modelos de las premisas y no son de la consecuencia. Por lo tanto el esquema anterior no es una regla de inferencia.

1.	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	
2.	$\neg R \vee \neg S \vee T$	
3.	$\neg S \vee \neg T \vee W$	
4.	P	
5.	Q	
6.	$\neg W$	
<hr/>		
7.	$\neg Q \vee R$	(1,4)
8.	$\neg P \vee R$	(1,5)
9.	$\neg Q \vee \neg S \vee T$	(2,7)
10.	$\neg P \vee \neg S \vee T$	(2,8)
11.	$\neg S \vee \neg T$	(3,6)
12.	$\neg Q \vee \neg S \vee W$	(3,9)
13.	$\neg P \vee \neg S \vee W$	(3,10)
14.	R	(4,8)
15.	$\neg S \vee T$	(4,10)
16.	$\neg S \vee W$	(4,13)
17.	$\neg Q \vee \neg S$	(6,12)
18.	$\neg P \vee \neg S$	(6,13)
19.	$\neg S$	(6,16)

El conjunto ha quedado estabilizado. Por lo tanto, se trata de un esquema que no es regla.

TAREA DE LA TERCERA SESIÓN

Ejercicio 1. Considerar los siguientes esquemas de inferencia:

$$\begin{array}{ll}
 1. \text{ a) } \frac{\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \neg(P \vee R) \rightarrow S \end{array}}{(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg S \rightarrow R)} & \text{ b) } \frac{\begin{array}{c} (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S) \\ S \rightarrow (Q \wedge T) \\ P \wedge \neg(Q \wedge R) \end{array}}{\neg S \vee \neg T} \\
 2. \text{ a) } \frac{\begin{array}{c} (P \vee Q) \wedge (R \rightarrow S) \\ (Q \wedge S) \rightarrow T \\ \neg T \end{array}}{R \rightarrow P} & \text{ b) } \frac{\begin{array}{c} (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \\ (Q \wedge S) \rightarrow \neg T \\ T \end{array}}{\neg P \vee \neg R}
 \end{array}$$

Utilizar el método de resolución para verificar si los esquemas de inferencia anteriores son o no reglas de inferencia.

Una solución:

Para el esquema 1. a)

1.	$\neg P \vee Q$	
2.	$P \vee R \vee S$	
3.	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	
4.	$\neg S$	
5.	$\neg R$	
<hr/>		
6.	$P \vee R$	(2,4)
7.	P	(5,6)
8.	Q	(1,7)
9.	$\neg P \vee \neg Q$	(3,5)
10.	$\neg Q$	(7,9)
11.	0	(8,10)

Luego en este caso sí que es una regla de inferencia.

Para el esquema de inferencia se 1. b):

$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$
$S \rightarrow (Q \wedge T)$
$P \wedge \neg(Q \wedge R)$
<hr/>
$\neg S \vee \neg T$

se tiene:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S) \equiv (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee S)$$

$$S \rightarrow (Q \wedge T) \equiv (\neg S \vee Q) \wedge (\neg S \vee T)$$

1.	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	
2.	$\neg P \vee \neg Q \vee S$	
3.	$\neg S \vee Q$	
4.	$\neg S \vee T$	
5.	P	
6.	$\neg Q \vee \neg R$	
7.	S	
8.	T	
<hr/>		
9.	$\neg Q \vee R$	(1,5)
10.	$\neg Q$	(6,9)
11.	$\neg S$	(4,10)
12.	0	(7,11)

Luego en este caso sí que es una regla de inferencia.

Para el esquema 2. a)

$$\begin{array}{c}
(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow S) \\
(Q \wedge S) \rightarrow T \\
\neg T \\
\hline
R \rightarrow P
\end{array}$$

Una solución:

$$(P \vee Q) \wedge (R \rightarrow S) \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)$$

$$\begin{array}{ll}
1. & P \vee Q \\
2. & \neg R \vee S \\
3. & \neg Q \vee \neg S \vee T \\
4. & \neg T \\
5. & R \\
6. & \neg P \\
\hline
7. & Q & (1,6) \\
8. & \neg S \vee T & (3,7) \\
9. & \neg S & (4,8) \\
9. & \neg R & (2,9) \\
10. & 0 & (5,9)
\end{array}$$

Luego es regla de inferencia.

Para el esquema 2. b)

$$\begin{array}{c}
(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \\
(Q \wedge S) \rightarrow \neg T \\
T \\
\hline
\neg P \vee \neg R
\end{array}$$

Una solución:

$$\begin{array}{ll}
1. & \neg P \vee Q \\
2. & \neg R \vee S \\
3. & \neg Q \vee \neg S \vee \neg T \\
4. & T \\
5. & P \\
6. & R \\
\hline
7. & Q & (1,5) \\
8. & \neg S \vee \neg T & (3,7) \\
9. & \neg S & (4,8) \\
9. & \neg R & (2,9) \\
10. & 0 & (6,9)
\end{array}$$

Luego es regla de inferencia.

Nota: Para la resoluciones anteriores se ha tomado unos determinados criterios para ir seleccionando las parejas, pero se puede llegar al conjunto nulo utilizando otras estrategias que pueden ser muy diferentes entre sí.