Cálculo Infinitesimal
Hoja 1.

1. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   (a) Si a^2 es un número par, también lo es a, $a \in \mathbb{N}$.
   (b) $\sqrt{5}$ es un número irracional.

2. Resolver las siguientes desigualdades:
   (a) $\dfrac{2x-1}{3x+2} \leq 1$
   (b) $x - |x| > 2$
   (c) $|x^2 - x| + x > 1$
   (d) $x + |x| < 1$
   (e) $\dfrac{x-1}{x+1} > 2$
   (f) $\dfrac{a|x|+1}{x} < 1$
   (g) $|x-3| < 8$
   (h) $|x+5| \geq 4$
   (i) $1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{1+x}$
   (j) $|3 - x^{-1}| < 1$
   (k) $|x+4| \geq 7$
   (l) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$
   (m) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$
   (n) $x^2 + x + 1 > 0.$
   (o) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3} \leq 0$
   (p) $x^3 - 1 \geq 0$
   (q) $\dfrac{2x-3}{x^2-1} \geq 0.$
   (r) $|3x+5| + x \leq 0.$

3. Calcular el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximo o mínimo respectivamente:
   (a) $(1, 2]$, $(0, \infty)$.
   (b) $\left\{\dfrac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (c) $\left\{\dfrac{n+1}{n+2} | \, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (d) $\{x \in \mathbb{R} | \, x^2 + x - 1 < 0\}$.
   (e) $\{x \in \mathbb{R} | \, x^2 - 5x + 6 < 0\}$.
   (f) $\bigcup \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$.
   (g) $\{x \in \mathbb{Q} | \, 0 < x < 1\}$.
   (h) $\left\{\dfrac{1}{n^2} | \, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (i) $\left\{n \pm \dfrac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (j) $\{x \in \mathbb{R}\,; \; x^2 + x + 1 \geq 0\}$.
   (k) $\{x \in \mathbb{R} | \, x < 0, \, x^2 + x - 1 < 0\}$.
   (l) $\bigcap \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$.

4. Sea el conjunto $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Encontrar tres cotas superiores y tres cotas inferiores del conjunto A. Determinar si tiene supremo y máximo, e ínfimo y mínimo.

5. Demostrar que si $a \geq 1$, $b + c < a + 1$ y $b \leq c$, entonces $b < a$.

6. Sean a, $b > 0$. Probar que si $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$ entonces $\sqrt{2} < \frac{a+2b}{a+b}$, y que si $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ entonces $\sqrt{2} > \frac{a+2b}{a+b}$.

7. Probar aplicando inducción las siguientes igualdades:

   a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

8. Probar que para todo número natural n, $n^5 - n$ es divisible por 5.

9. Probar que para todo número natural $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

10. Probar la fórmula binomial $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

11. Probar la fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

12. Resolver las ecuaciones:

    (a) $x^2 + 4x + 5 = 0$; (b) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$; (c) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$.

13. Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, hallar:

    a) $z_1 + z_2$. **b)** $z_1 - z_2$. **c)** $z_1 \cdot z_2$. **d)** z_1/z_2.

14. Dados $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$, $z_3 = 3/2$ y $z_4 = 7i$, hallar:

    (a) $(z_1 - z_2)z_3$; (d) $z_1 + z_3^{-1}$; (g) $(\overline{z_1 + z_2})^{-1}$; (i) $\frac{z_2}{z_1}$;

    (b) $z_1 z_4 + z_3 z_4$; (e) z_2^{-1};

    (c) $\overline{z_1 + z_4 - 5z_2}$; (f) $\overline{\overline{z_1 z_2}}$; (h) $z_1^2 z_3$; (j) $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$.

15. Dados los números complejos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + 6i$, determinar el número x que verifica cada una de las igualdades siguientes:

   (a) $z_1 + x = z_2$; (b) $z_1^2 x = 1$; (c) $z_1 + z_2 + x = 1$; (d) $z_2 x = z_1$.

16. Determinar un polinomio con coeficientes reales cuyas raíces sean -3, $1 + i$, $1 - i$.

17. Sea P un polinomio de grado 4 con coeficientes reales.

   (a) Si 1 es raíz de P, ¿cuántas raíces complejas puede tener?

   (b) Si $3i$ y $2 - 3i$ son raíces complejas de P, ¿cuáles son las otras dos raíces?

18. Dado el número complejo $z = 1 - i$, escribirlo en forma trigonométrica y exponencial.

19. Determinar el módulo, el argumento, la forma exponencial y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

   (a) $2 + 2i$; (b) $-2 + 2i$; (c) $2 - 2i$; (d) $-2 - 2i$; (e) $-\sqrt{2}$; (f) $3i$; (g) $\sqrt{3} + i$.

20. Escribir en la forma $\Re z + i \operatorname{Im} z$ el número $(1 + i)^{2000}$.

21. La suma de dos números complejos z_1 y z_2 es $2 + 4i$. La parte real de z_2 es -1 y el cociente z_1/z_2 es imaginario puro. Hallarlos.

22. Resolver la ecuación $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1 + i} = 2 + 3i$.

23. Determinar las figuras en el plano que definen las siguientes relaciones:

   (a) $\operatorname{Im} z < 1$;
   (b) $|z| = 9$;
   (c) $|z - 3| \leq 5$;
   (d) $z \cdot \bar{z} > 4$;
   (e) $|z - 1| = |z + 1|$;
   (f) $z - \bar{z} = i$;
   (g) $|z| = 9$.

24. Resolver las ecuaciones

   (a) $z^3 + 8i = 0$; (b) $z^4 + 1 = 0$; (c) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$; (d) $z^6 - 1 = 0$; (e) $z^5 + 32 = 0$; (f) $z^3 - 4\sqrt{2}(-1 + i) = 0$; (g) $(\bar{z})^3 + i\bar{z} = 0$; (h) $|z - 4| = |z + 4|$; (i) $z^3 + \frac{1-i}{1+i} = 0$.

25. Factorizar los polinomios

   (a) $z^4 + 81$; (b) $z^6 + 1$; (c) $z^5 - 1$.