Ejercicios 3

① Una compañía de coches opera en Madrid y Barcelona. Cada mes el 40% de los vehículos alquilados en Madrid se devuelve en Madrid mientras que el 60% se devuelve en Barcelona. Igualmente, el 70% de los alquilados en Barcelona, pero el 30% restante se devuelve en Madrid. ¿Puedes decir cómo quedará la proporción entre los vehículos de la sucursal de Barcelona y la de Madrid con el paso del tiempo?

Sean x_k los vehículos en la sucursal de Madrid el mes k, e y_k los de la sucursal de Barcelona. Tenemos que:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'4 & 0'3 \\ 0'6 & 0'7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

Consideramos $A := \begin{bmatrix} 4/10 & 3/10 \\ 6/10 & 7/10 \end{bmatrix}$. Así $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Calculamos $\lim_{k\to\infty} A^k$. Para ello encontramos primero P invertible t.q.

$A = PDP^{-1}$ con D matriz diagonal.

<u>Polinomio característico</u> $|xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-\frac{4}{10} & -3/10 \\ -6/10 & x-7/10 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} x-4/10 & -3/10 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-4/10 & -3/10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-\frac{1}{10} & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-1/10).$$

Calculamos la matriz P.

Resolvemos $(A-1I_2)X=0$. $\left[\begin{array}{cc|c} -6/10 & 3/10 & 0 \\ 6/10 & -3/10 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore$ acompañante $(1,2)$

Resolvemos $(A-\frac{1}{10}I_2)X=0$. $\left[\begin{array}{cc|c} 3/10 & 3/10 & 0 \\ 6/10 & 6/10 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore$ acompañantes $(1,-1)$.

$\therefore$ con la matriz $P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ se tiene $A = P \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/10 \end{bmatrix} P^{-1}$.

Calculamos $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} P \begin{bmatrix} 1 & \\ & (1/10)^k \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

¿Qué ocurre con el paso de los meses?

$$\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \lim_{k\to\infty} A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0+y_0}{3} \\ \frac{2(x_0+y_0)}{3} \end{bmatrix}$$

Es decir, Madrid se quedará con $1/3$ del total de vehículos y Barcelona con los $2/3$ restantes.

② Encuentra la fórmula para la potencia k-ésima de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico

$$|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x+3 & -3 & -1 \\ -3 & x+3 & 1 \\ -2 & 2 & x+6 \end{vmatrix} \overset{F_{12}(1)}{=} \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ -3 & x+3 & 1 \\ -2 & 2 & x+6 \end{vmatrix} \overset{C_{21}(-1)}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -3 & x+6 & 1 \\ -2 & 4 & x+6 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x+6 & 1 \\ 4 & x+6 \end{vmatrix} = x\,(x^2+12x+32) = x\,(x+8)(x+4)$$

Resolvemos $(A - 0I_3)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{F_{21}(1),\ F_{31}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{21}(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{acompañante } (1,1,0).$$

Resolvemos $(A + 4I_3)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{F_3(1/2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{13}(-1),\ F_{23}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ soluciones $\{(\tfrac{1}{2}x_3, -\tfrac{1}{2}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{(1,-1,2)\}$ $\therefore$

acompañante $(1,-1,2)$.

Resolvemos $(A+8I_3)X=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{F_3(\frac{1}{2})}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{13}(-5),\ F_{23}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

soluciones $= \left\{ \left(-\frac{x_3}{2}, \frac{x_3}{2}, x_3\right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\{(-1,1,2)\}$

$\therefore$ acompañante $(-1,1,2)$.

La matriz $P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ cumple que $A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} P^{-1}$

Calculamos P^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{21}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_{32}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3(1/4),\ F_2(-1/2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_{23}(1) \\ F_{13}(1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{F_{12}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/4 & 2/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos A^k

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-8)^k \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^k \, 4^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^k \, 4^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -(2^k) & 2^k & 2^k \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{(-1)^k \, 4^{k-1} \begin{bmatrix} 1+2^k & -1-2^k & 1-2^k \\ -1-2^k & 1+2^k & -1+2^k \\ 2-2^{k+1} & -2+2^{k+1} & 2+2^{k+1} \end{bmatrix}}$$

③ Demuestra que las funciones $\{e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots\}$ forman un conjunto linealmente independiente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Escribimos una relación de dependencia lineal.

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \dots + \alpha_n e^{nx} = 0.$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dividiendo por e^x tenemos.

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 e^x + \text{——} + \alpha_n e^{(n-1)x} = 0 \qquad (*)$$

tomando el límite cuando x tiende a $-\infty$ se tiene

$$\alpha_1 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0 = 0$$

de donde $\alpha_1 = 0$. Usando esto en $(*)$ tenemos.

$$\alpha_2 e^x + \text{——} + \alpha_n e^{(n-1)x} = 0$$

Por el mismo motivo $\alpha_2 = 0$ y reiterando,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Por tanto la única relación de dependencia lineal entre $\{e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots\}$ es la trivial $\therefore$ es libre.

(4) Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ considera los subespacios vectoriales.

$$S_1 := \{ p(x) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \mid p(x) + x^3 p(\tfrac{1}{x}) = 0 \}$$

$$S_2 := \{ p(x) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \mid p(0) = 0 = p(\lambda) \}$$

a) Calcula la dimensión y una base $\mathcal{B}$ de S_1

b) Considera la base $\mathcal{B}' := \{x^3 - x^2 + x - 1, x^3 + x^2 - x - 1\}$ de S_1 y encuentra la matriz del cambio de coordenadas $C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Comprueba la fórmula $C_{\mathcal{B}'}(v) = C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}(v)$ para $v := x^2 - x$

c) Encuentra lo valores de λ que hacen que $S_1 + S_2$ sea directa.

d) Para los λ para los cuales $S_1 + S_2$ no es directa calcula $S_1 \cap S_2$.

a) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in S_1 \iff$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \iff$$

$$a_0 + a_3 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0 \quad \therefore$$

$$S_1 = \{ a_0(1 - x^3) + a_1(x - x^2) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R} \}.$$

$\therefore$ una base $\mathcal{B}$ de S_1 es $\boxed{\mathcal{B} = \{1 - x^3, x - x^2\}.}$ y la $\boxed{\text{dimensión de } S_1 \text{ es } 2.}$

(b) Calculamos las coordenadas de los elementos de B respecto de B'.

$$1-x^3 = \alpha_1 (x^3-x^2+x-1) + \alpha_2 (x^3+x^2-x-1) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -1/2$$

$$\Rightarrow 1-x^3 \equiv (-1/2, -1/2) \text{ respecto de } B'.$$

$$x-x^2 = \alpha_1 (x^3-x^2+x-1) + \alpha_2 (x^3+x^2-x-1) \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 = +1/2$$

$$\Rightarrow x-x^2 \equiv (1/2, -1/2) \text{ respecto de } B'$$

$$\therefore \quad \boxed{C_{B'B} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.}$$

Comprobamos que $C_{B'}(v) = C_{B'B}\, C_B(v)$ para $v = x^2-x$

$$x^2-x = \alpha_1 (x^3-x^2+x-1) + \alpha_2 (x^3+x^2-x-1) \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 = -1/2$$

$$x^2-x \equiv (-1/2, 1/2) \text{ respecto de } B'.$$

$$x^2-x = 0\cdot(1-x^3) + (-1)(x-x^2) \Rightarrow x^2-x \equiv (0,-1) \text{ respecto de } B.$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = C_{B'}(v) \overset{?}{=} C_{B'B}\, C_B(v) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y claramente vemos que sí que el lado de la izquierda coincide con el de la derecha.

(c) Hay muchos modos de resolver este apartado.

Una forma: S_1+S_2 es directa $\Longleftrightarrow$ $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Calculamos $S_1 \cap S_2$.

Conocemos una base $\mathcal{B} = \{1-x^3, x-x^2\}$ de S_1. Un elemento genérico de S_1 será de la forma $\alpha_1(1-x^3)+\alpha_2(x-x^2)$. Para pertenecer a S_2 debe cumplirse que al evaluarlo en 0 y λ se obtenga 0. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(1-0^3)+\alpha_2(0-0^2)=0 \\ \alpha_1(1-\lambda^3)+\alpha_2(\lambda-\lambda^2)=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Longrightarrow \alpha_1=0. \\ \Longrightarrow (\lambda-\lambda^2)\alpha_2=0 \Longrightarrow \lambda(1-\lambda)\alpha_2=0\end{array}$$

Por tanto

Si $\lambda \neq 0,1$ entonces $\alpha_1=0=\alpha_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Si $\lambda \in \{0,1\}$ entonces

$$S_1 \cap S_2 = \{\alpha_1(1-x^3)+\alpha_2(x-x^2) \mid \alpha_1=0\} = \mathrm{Gen}\{x-x^2\}.$$

$\therefore$ $\boxed{\text{los valores de } \lambda \text{ que hacen que } S_1+S_2 \text{ sea directa son } \lambda \neq 0,1.}$

(d) En el apartado anterior se ha visto que para $\lambda \neq 0,1$ se tiene $S_1 \cap S_2 = \mathrm{Gen}\{x-x^2\}$.

(5) Considera el espacio vectorial V de matrices de orden 3×3 con entradas reales. y el subespacio

$$S = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Encuentra una base de S de entre los generadores proporcionados y complétala hasta una base de V.

Hay varios modos de hacer el ejercicio. (además de algunos atajos). Usaré el más estándar (y largo), que es pasar a coordenadas. Una base de V es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv (0,1,1,1,1,1) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv (1,0,1,1,1,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv (1,1,0,1,1,1) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv (2,-1,-1,0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv (0,1,-1,0,0,0).$$

Así

$$C_{\mathcal{B}}(S) = \mathrm{Gen}\{(0,1,1,1,1,1), (1,0,1,1,1,1), (1,1,0,1,1,1), (2,-1,-1,0,0,0), (0,1,-1,0,0,0)\}$$

Usamos el método para obtener una base de $C_{\mathcal{B}}(V) = \mathbb{R}^6$ a partir de un cjto generador de $C_{\mathcal{B}}(S)$. Añadimos al cjto generador de $C_{\mathcal{B}}(S)$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$ y escalonamos.

$$A := \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{base de } C_{\mathcal{B}}(S)} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \underset{F_{65}(-1),\ F_{54}(-1),\ F_{43}(-1),\ F_{32}(-1),\ F_{31}(-1),\ F_{12}}{\overset{\sim}{\uparrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{F_{34},\,F_{43}(2)}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Una base de $C_{\mathcal{B}}(V)$ se obtiene con las columnas 1, 2, 3, 6, 9, 10 de la matriz A (ya que los pivotes aparecen en esa posición tras escalonar)

$$\{\underbrace{(0,1,1,1,1,1),(1,0,1,1,1,1),(1,1,0,1,1,1)}_{\text{de } C_{\mathcal{B}}(S)},\underline{(1,0,0,0,0,0)},(0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1,0)\}.$$

Lo que, pasando de coordenadas en $\mathcal{B}$ a vectores, da como <u>base de V</u>

$$\boxed{\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{de } S},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.}$$

siendo los tres primeros elementos base de S extraída de entre los generadores.

⑥ Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera la aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$
$$p(x) \longmapsto p(\alpha x+\beta).$$

ⓐ Demuestra que f es una aplicación lineal.
ⓑ Encuentra los valores de α, β que hacen que f no sea biyectiva.
ⓒ Para esos valores del apartado anterior encuentra el núcleo de f, su imagen y sus correspondientes dimensiones.

ⓐ Debemos comprobar que f respeta la suma y el producto por escalares.
<u>f respeta la suma</u>: dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$f(p(x)+q(x)) = p(\alpha x+\beta) + q(\alpha x+\beta) = f(p(x))+f(q(x))$$

<u>f respeta el producto por escalares</u>: dado $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda p(x)) = \lambda p(\alpha x+\beta) = \lambda f(p(x)).$$

ⓑ Puesto que el espacio de llegada es el mismo que el de salida (y por tanto tienen la misma dimensión) basta ver en qué casos f no es inyectiva. Para ello calculamos su núcleo

$$\operatorname{Ker} f = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(\alpha x+\beta) = 0 \}.$$

<u>Si $\alpha \neq 0$</u> entonces $\forall p(x) \neq 0$ se tiene $p(\alpha x+\beta) \neq 0$ (basta examinar el coeficiente director de $p(\alpha x+\beta)$.) Por tanto, si $\alpha \neq 0$ entonces $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. y f es biyectiva.

Si $\alpha = 0$ entonces $\ker f = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(\beta) = 0 \}$

$\uparrow \beta = 0 \cdot x + \beta.$

y por tanto $\ker f = \text{Gen}\{ x-\beta, x(x-\beta) \} \neq 0$

Así $\boxed{f \text{ no es biyectiva} \iff \alpha = 0}$

ⓒ f no es biyectiva para $\alpha = 0$ y en el apartado anterior hemos visto que en tal caso

$$\boxed{\ker f = \text{Gen}\{ (x-\beta), x(x-\beta) \}. \text{ que tiene dimensión } 2.}$$

Como $\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = 3$ entonces $\dim \text{Im} f = 3 - 2 = 1.$

$\therefore \boxed{\dim \text{Im} f = 1.}$. Por otro lado,

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{Gen}\{1, x, x^2\} \Longrightarrow \text{Im} f = f(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = \text{Gen}\{ f(1), f(x), f(x^2) \}$$

$$= \text{Gen}\{1, \beta, \beta^2\} \underset{\uparrow}{=} \text{Gen}\{1\} = \mathbb{R}1.$$

$\beta, \beta^2 \in \mathbb{R}1.$

$$\therefore \boxed{\text{Im} f = \mathbb{R}1.}$$