Cálculo Infinitesimal

Hoja 2.

1. Calculad el límite de las sucesiones de término general:

   (a) $\dfrac{2n^2+5n}{n^2+n+1}$

   (b) $\dfrac{n^3-1}{n^2+1}$

   (c) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$

   (d) $\dfrac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}{(1+2+\cdots+n)^3}$

   (e) $\dfrac{1+2^2+\cdots+n^2}{1+n+n^2+n^3}$

   (f) $\dfrac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{n}$

   (g) $\left(1+\log\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{4n+1}$

   (h) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

   (i) $(2+3n^4)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}$

   (j) $\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2}$

   (k) $\left(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+n}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$

   (l) $\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$

   (m) $(4n+3)\log\dfrac{n+1}{n-2}$

   (n) $\dfrac{3\sqrt[3]{n}-4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n-3}(4-\sqrt[5]{n})}$

   (o) $(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

   (p) $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt[3]{27n^3-5n^2}$

   (q) $\left(\dfrac{\log(n^2+1)}{\log(n^2-1)}\right)^{n^2\log n}$

   (r) $\dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$

   (s) $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$

   (t) $1\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2+1}+2\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2+n}$

   (u) $\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+1)}+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+2)}+\cdots+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+n)}$

2. Determinad qué relación debe existir entre p y q para que se cumpla

$$\lim_n\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{pn^2-1}=\lim_n\left(\frac{n+q}{n-q}\right)^{2n}.$$

3. Si $u_n=\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\dfrac{1}{3+n}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$, probad que existe $\lim_n u_n$ y está comprendido entre $1/2$ y 1.

4. Calculad los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $\dfrac{\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n}{n \log n}$

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{1}} + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}}{\log(n+1)}$

(c) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

(d) $\dfrac{\operatorname{sen} 1 + 2^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} + 3^2 \operatorname{sen} \frac{1}{3} + \cdots + n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{n^2}$

(e) $\dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[4]{4} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}$

(f) $\dfrac{\sqrt[1]{1!} + \sqrt[2]{2!} + \sqrt[3]{3!} + \cdots + \sqrt[n]{n!}}{n^2}$

(g) $\dfrac{n!}{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}$

(h) $\dfrac{1}{n} \dfrac{1 + 16 + \cdots + n^4}{n^4}$

(i) $\dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

(j) $\dfrac{\cos 1 + \cos \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - n}{\log(n^3+1)}$

(k) $\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}$ $(p \in \mathbb{N})$

(l) $\dfrac{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}}$

(m) $\dfrac{\log 1 - \log 2 + \log 3 - \cdots + \log(2n-1) - \log 2n}{\log n}$ $\boxed{-1/2}$

(n) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sum_{k=1}^{n}(e^{1/\sqrt{k}}-1)}$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}.$ $\boxed{e/2}$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arcsen} \frac{1}{1} + \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} + \cdots + \operatorname{arcsen} \frac{1}{n}}{\log(n^3+1)}.$ → Parcial 1, 2020

5. Sea $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim\limits_n a_n = a$. Calculad

$$\lim_n \left(\frac{a_1^{1/k} + 2a_2^{1/k} + \cdots + na_n^{1/k}}{\binom{n+1}{2}} \right)^k.$$

6. Sea una sucesión $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ de manera que $a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$. Demostrad que, si $a_1 > \sqrt{3}$, la sucesión decrece y que, si $0 < a_1 < \sqrt{3}$, la sucesión crece. Hallad el límite en ambos casos.

7. Sea la sucesión $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $u_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, ..., con $a > 0$. Probad que tiene límite y halladlo.

8. Si $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{p}{u_n}\right)$, donde $p > 0$ y $u_1 > 0$, probad que $\lim_n u_n = \sqrt{p}$. Demostrad cómo se puede utilizar esto para determinar $\sqrt{2}$.

9. Se define la sucesión $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ mediante $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ y $u_1 = 1$. Probad que existe $\lim_n u_n$ y halladlo.

10. Estudiad la convergencia de la sucesión recurente $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}^2$.

11. Estudiad la sucesión $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a-\sqrt{a}}$, $u_3 = \sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}}$, ..., donde $a > 1$. [*Indicación*: estudiad por separado las subsucesiones $(u_{2n})_{n=1}^{+\infty}$ y $(u_{2n+1})_{n=1}^{+\infty}$.]

12. Estudiad la sucesión dada por $a_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1}a_n$.

13. Probad que la sucesión $u_1 = \sqrt{a}$, $u_n = \sqrt{au_{n-1}}$ tiene límite y halladlo ($a > 0$).

14. Sean $a_{n+1} = a_n^2/(a_n+b_n)$ y $b_{n+1} = b_n^2/(a_n+b_n)$, con $a_1 = a$ y $b_1 = b$, $a > b > 0$. Determinad $\lim_n a_n$ y $\lim_n b_n$. *Sugerencia: calculad primero* $a_n - b_n$.

15. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean
$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{x_n}}.$$
Demostrar que la sucesión (x_n) converge y determinar un $k \in \mathbb{N}$ de manera que $\lim_n x_n \in (k-1, k]$.

16. Sea $a > 1$. Estudiad la convergencia de la sucesión dada por
$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1,$$
calculando el valor del límite cuando sea convergente.

17. Sea $a > 0$. Estudiad según los valores de a la convergencia de la sucesión dada por
$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{u_n}},$$
calculando el valor del límite cuando sea convergente.

18. Sea la sucesión recurrente $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$. Probar que tiene límite y hallarlo.

19. Sea la sucesión recurrente $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Probar que tiene límite y hallarlo.