Grado en Ing. Informática — Grado en Matemáticas
Examen Final de Cálculo Infinitesimal
Convocatoria extraordinaria
Curso 2020–2021

Nombre y apellidos: ______________________________

Titulación: ______________________________

1. (*0.75 puntos*) Determinad la región en el plano que determina la relación
$$z - \bar{z} = i.$$
2. (*1.5 puntos*) Razonad si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
   (a) La sucesión recurrente $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n}$ es monótona creciente.
   (b) Todas sucesión monótona creciente es convergente.
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e.$
3. (*0.75 puntos*) Estudiad la convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}).$$
4. (*1.5 puntos*) Demostrad sin usar relaciones trigonométricas
$$\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
   Ayuda: derivad ambos lados de la igualdad.
5. (*1.5 puntos*) Desarrollad en serie de potencias de $x - \pi/6$ la función
$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$
   indicando el radio de convergencia. Calculad $f^{(2021)}(\pi/6)$.
6. (*2 puntos*) Calculad las primitivas siguientes
   (a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$
7. (*2 puntos*) Calculad el valor de $a \geq 0$ para que el volumen generado al girar alrededor del eje OX la función $f(x) = \log x + \dfrac{a}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$, sea $V = (e-2)\pi$.

Tiempo para realizar el examen: **2,5 horas** .

El examen debe realizarse a bolígrafo azul o negro, nunca a lápiz.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

campus iberus

Nombre y apellidos:DNI:Fecha://Titulación:Asignatura:

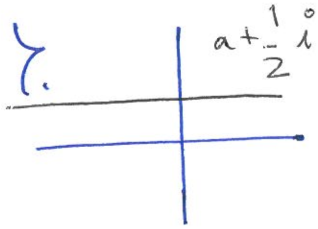
1) $z - \bar{z} = i$

$a+bi - (a-bi) = i$

$\cancel{a} + bi - \cancel{a} + bi = i$

$2bi = i$, $2b = 1$, $b = 1/2$, $a \in \mathbb{R}$

$R = \{ a + \frac{1}{2} i \mid a \in \mathbb{R} \}$.



2) a) Cierto. inducción $a_{n+1} \geq a_n$

$a_2 = a_1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \geq a_1 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{n+1} \geq a_{n+1}$

b) Falso $a_n = n$, es monótona creciente y no convergente

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ cierto.

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{b_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{(a_n - 1) b_n} = e^1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. $a_n \to +\infty$

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$

$\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\cancel{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}} = \frac{2n+1-2n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} = a_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sum a_n = +\infty \Leftrightarrow \sum b_n = +\infty$, por tanto divergente

4) $\operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2} x \quad , \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$

$$\frac{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)'}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}} = \frac{\frac{\cos x(1+\cos x)+\operatorname{sen}^2 x}{\cancel{(1+\cos x)^2}}}{\frac{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}{\cancel{(1+\cos x)^2}}} = \frac{\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\cos x+1}{1+2\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cancel{\cos x+1}}{2\,\cancel{(1+\cos x)}} = \frac{1}{2}$$

$f'(x) = g'(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$f(x) = g(x) + C$

$f(0) = \operatorname{arctg} \dfrac{0}{1+1} = 0 + C, \quad C = 0.$

5) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x.$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)\,(x-c)^n}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(\pi/6)}{n!} (x-\pi/6)^n$$

$f(\pi/6) = \operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$

$f'(\pi/6) = \cos \pi/6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(\pi/6) = -1/2$

$f'''(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1/2}{(4j)!} (x-\pi/6)^{4j} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}/2}{(4j+1)!} (x-\pi/6)^{4j+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)}{(4j+2)!} (x-\pi/6)^{4j+2} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{3}/2)}{(4j+3)!} (x-\pi/6)^{4j+3}$$

$2021 = 1+2020 = 1+4\cdot 505$

$f^{(2021)}(\pi/6) = f'(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Nombre y apellidos:DNI:Fecha://Titulación:Asignatura:

6) $$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4+5x^2+4-5x^2-4}{x^4+5x^2+4}\,dx =$$

$$= \int 1\,dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx = x - \int \frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$$

$$x^4+5x^2+4 = (t^2)+5$$

$$(t^2+5t+4) = (t^2+4)(t^2+1).$$

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+1).}$$

$$(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4) = 5x^2+4$$

$$(Ax+B)(x^2+1) + Cx^3+Dx^2+4Cx+4D = 5x^2+4$$

$$Ax^3+Bx^2+Ax+B +$$

$$\begin{array}{l} A+C=0 \\ A+4C=0 \end{array} \Bigg| \; A=0, \quad C=0.$$

$$\begin{array}{l} B+D=5 \\ B+4D=4 \end{array}, \quad -3D=1, \quad D=-1/3$$

$$B=5-D=5+1/3 = \frac{16}{3}$$

$$\int \frac{16/3}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1/3}{x^2+1}\,dx = \frac{16}{3\cdot 4}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{8}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

$$= x - \frac{8}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

campus iberus

Nombre y apellidos:DNI:Fecha://Titulación:Asignatura:

6b) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\text{sen}^2 x \,\text{sen}\,x\,dx}{\cos^3 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)(\text{sen}\,x\,dx)}{\cos^3 x}$

$\cos x = t, \quad dt = -\text{sen}\,x\,dx$

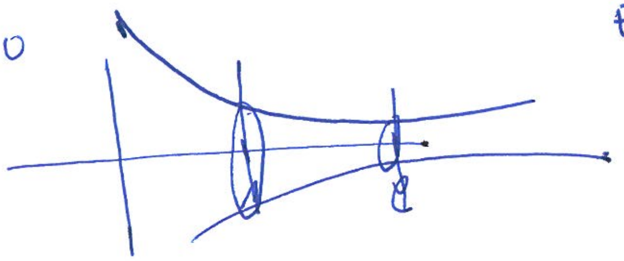
$\displaystyle = -\int \frac{(1-t^2)}{t^3}\,dt = +\int \frac{t^2}{t^3}\,dt - \int \frac{dt}{t^3} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^3} =$

$\displaystyle = \log t + \frac{1}{2t^2} + C = \log \cos x + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + C$

$\displaystyle -\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{2}\cos x\,(-\text{sen}\,x)}{\cos^4 x} = -\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\text{sen}\,x}{\cos^3 x} = \frac{\text{sen}\,x - \text{sen}\,x(\cos^2 x)}{\cos^3 x}$

$\displaystyle = \frac{\text{sen}\,x\,(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x} = \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} = \text{tg}^3 x$

7) $a > 0$



Eje OX $\quad \displaystyle V = \pi \int_1^e \left(\log x + \frac{a}{x}\right)^2 dx$

$\displaystyle \pi \int_1^e \log^2 x\,dx + \pi \int_1^e 2\log x \frac{a}{x}\,dx + \pi \int_1^e \frac{a^2}{x^2}\,dx = (e-2)\pi$

$\displaystyle \int_1^e \log^2 x\,dx + \int_1^e 2\log x \frac{a}{x}\,dx + \int_1^e a^2 \frac{dx}{x^2} = e-2$

$\displaystyle \int_1^e 2\log x \frac{a}{x}\,dx = \frac{2a}{2} \log^2 x \Big|_1^e = a\left((\log e)^2 - \log^2 1\right) = a$

$\displaystyle a^2 \int_1^e \frac{dx}{x^2} = a^2 \left. -\frac{1}{x}\right|_1^e = a^2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

campus iberus

Nombre y apellidos:DNI:Fecha://Titulación:Asignatura:

$\int \underbrace{\log^2 x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \cancel{x}\, 2 \lg x \frac{dx}{\cancel{x}} - \int 2 \cdot \log x$

$dv = dx$, $v = x$

$u = \log^2 x$ $du = 2 \log x \frac{1}{x} dx$

$\int_1^e \underbrace{\log^2 x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \log^2 x \cdot x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \lg x \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx =$

$= (1 \cdot e - 0 \cdot 1) - 2 \left[\log x \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x\, dx \right] =$

$= e - 0 - 2(e - (e-1)) = e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2$

$e - 2 + a + a^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e - 2$, $\boxed{a = 0}$