Prueba Corta-A: Sistemas, matrices y cambios de base en n-espacios
Fecha: 14 de noviembre de 2013

1. [1] Enuncia cuatro caracterizaciones equivalentes a que una matriz cuadrada A sea invertible. Contesta si lo que se afirma es cierto (razona) o falso (un contraejemplo basta):

   a) Cualquier familia de $n+1$ vectores de R^n es ligada.

   b) Cualquier familia de $n-1$ vectores de R^n es libre.

2. Si la familia de vectores de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base y los vectores $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ satisfacen las siguientes identidades: $2v_1 - 2u_1 = u_2 + 2u_3$, $u_1 + u_3 = 2v_2 - 2u_2$ y $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$, comprueba usando la definicin, si la familia $\mathcal{B}'$ es libre. ¿ Es $\mathcal{B}'$ una base de $\mathbb{R}^3$? Si lo es, calcula la matriz del cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y si no lo es justifícalo adecuadamente.

3. Sea b un número real cualquiera y $T_b : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por la expresión general,

   $$T_b(x,y,z,t) = (x+by+2bz+(2b+1)t, bx+y+2bz+3bt, 2bx+by+z+(2b+1)t).$$

   Clasifica T_b en función de los valores b. Sustituyendo $b = 1$ en la expresión general anterior obtenemos la aplicación T_1. Tienes que:

   a) calcular una base y la dimensión del núcleo de T_1;

   b) ampliar una base del conjunto imagen de T_1 hasta una base de $\mathbb{R}^3$;

   c) calcular los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, \alpha, \beta)$ esté en la imagen de T_1.

   Hasta aquí se pueden obtener 6 puntos. La siguiente pregunta te dará **1 punto adicional:** Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que al núcleo de f sea igual al conjunto imagen de T_1 y calcula la matriz canónica de la composición $f \circ T_1$.

[1] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

Prueba Corta-B: Sistemas, matrices y cambios de base en n-espacios
Fecha: 14 de noviembre de 2013

1. [2] Define subespacio generado por la familia de vectores $\{\vec{v_1},\ldots,\vec{v_k}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Pon un ejemplo de una familia de vectores que genere un subespacio S y que no sea base. Contesta si lo que se afirma es cierto (razona) o falso (un contraejemplo basta):

   Si A es una matriz $m\times n$ cuyas columnas son familia libre,

   (a) El sistema $AX=\vec{b}$ es compatible para cualquier $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$.

   (b) Si $n=m$, las columnas de A generan $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n$.

2. Si la familia de vectores de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$ es una base y los vectores $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,v_3\}$ satisfacen las siguientes identidades: $2v_1-8u_1+2u_2=0$, $-u_1+u_2-v_2+u_3=0$ y $2u_3+v_3-u_2=0$, comprueba usando la definicin, si la familia $\mathcal{B}'$ es libre. ¿ Es $\mathcal{B}'$ una base de $\mathbb{R}^3$? Si lo es, calcula la matriz del cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y si no lo es justifícalo adecuadamente.

3. Sea $T_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por la expresión general

   $$T_a(x,y,z)=(x+ay+2az,ax+y+az,2ax+2ay+z,(2a+1)x+3ay+(2a+1)z).$$

   Clasifica T_a según los valores del parámetro a. Sustituyendo $a=0$ en la expresión general anterior obtenemos la aplicación T_0. Tienes que:

   a) calcular una base y la dimensión del núcleo de T_0;
   b) calcular las ecuaciones implícitas del conjunto imagen de T_0;
   c) los valores de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ para que el vector $(1,\alpha,\beta,0)$ no esté en imagen de T_0.

   Hasta aquí se pueden obtener 6 puntos. La siguiente pregunta os dará **1 punto adicional:** Construye una aplicación $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ tal que el núcleo de f sea igual al conjunto imagen de T_0 y calcula la matriz canónica de la composición $T_0\circ f$.

[2] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.