Segundo examen parcial de cálculo matricial y vectorial, 17 de diciembre de 2018, modelo B resuelto con criterios de corrección

Ejercicio 1-a

En un espacio vectorial V tenemos una operación suma $+$ definida, que a cada par de vectores $u, v \in V$ le asocia otro vector, que llamamos $u+v$. Dicha operación satisface las siguientes cuatro propiedades:

(1) Para todos vectores u, v, w en V, se cumple que $(u+v)+w = u+(v+w)$. (0,25 puntos).

(2) Para todos vectores u, v en V, se cumple que $u+v = v+u$ (0,25 puntos).

(3) Existe un vector, que llamamos $\bar{0}$, tal que para todo vector u en V tenemos que $u+\bar{0} = u$. (0,25 puntos)

(4) Para cada vector u en V, existe un vector en V, que llamamos $-u$, tal que $u+(-u) = \bar{0}$. (0,25 puntos)

(Si se enuncian las propiedades (3) y (4) sin escribir correctamente los "existe", se pierden 0,25 puntos).

Ejercicio 1-b

• q • L I • no generan • $\alpha \neq \beta$

(El último apartado era más difícil que los demás).
(Notar que la "p" de $v_{p-1}+v_p$, $\alpha v_{p-1}+\beta v_p$ debería ser una "q").

Ejercicio 1-c

• Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. El núcleo de f es el conjunto de vectores del espacio inicial V cuya imagen es el vector nulo de W. (0,5 puntos)

• $\Longrightarrow$) Supongamos que f es inyectiva. Esto quiere decir que no existen dos vectores distintos de V cuya imagen es la misma. Como ya sabemos que la imagen del vector nulo es el vector nulo, $\bar{0}$ pertenece al núcleo, y por la definición de aplicación inyectiva no hay más vectores en el núcleo. (0,5 puntos)

$\Longleftarrow$) Supongamos que el único vector del núcleo es $\bar{0}$. Sean a, b vectores de V tales que $f(a)=f(b)$. Tenemos que demostrar que necesariamente $a=b$.

$$f(a)=f(b) \Rightarrow f(a-b)=f(a)-f(b)=\bar{0}$$

Luego $a-b$ está en el núcleo. Por hipótesis, $a-b=\bar{0}$. Es decir, $a=b$. (0,5 puntos)

Ejercicio 1-d

$$T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a+c=0, \quad b+d=0 \right\} =$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

Una base de T es el conjunto formado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Se perdían 0,25 puntos si se hacían las cuentas en coordenadas de $\mathbb{C}^4$, y se olvidaba volver a matrices al exponer el resultado).

(Se perdían 0,25 puntos si se escribe

$$T = \text{span} < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} >$$

¿Dónde está aquí la base?)

Ejercicio 2

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = & + y_2 - y_3 \\ x_2 + y_2 = 2y_1 & + 2y_3 \\ x_3 = 2y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

• Calculemos la inversa de P:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & 2 & & 1 & \\ 2 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} -F_1 \\ \\ F_3-F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ & 1 & & 2 & 1 & \\ & & -1 & & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{F_1+F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & & 2 & 1 & \\ & & 1 & & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(0,75 puntos. Se pierden 0,25 puntos si se escribe bien el algoritmo pero hay algún fallo en los cálculos. Es fácil comprobar que no hay errores haciendo la cuenta:

$$P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad)$$

• Por lo tanto $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(0,5 puntos).

• Esto quiere decir que P^{-1} es la matriz de cambio de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Por lo tanto las <u>columnas</u> de P^{-1} son los vectores de $\underset{\{v_1, v_2, v_3\}}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{B}_1}}$ expresados en coordenadas de $\underset{\{u_1, u_2, u_3\}}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{B}_2}}$:

$$v_1 = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2$$

$$v_2 = 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

$$v_3 = 1 \cdot u_1 \quad -1 u_3$$

(0,75 puntos)

Ejercicio 3 - a (2 puntos)

- Calculemos las ecuaciones implícitas de $G = \text{span} < x^2 + x^3, \beta + x + x^2 - 2x^3 >$. ¿Qué condiciones deben satisfacer los parámetros b_0, b_1, b_2, b_3 para que $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ pertenezca a G? Deben existir escalares μ_1, μ_2 tales que

$$\mu_1 (x^2 + x^3) + \mu_2 (\beta + x + x^2 - 2x^3) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Esta igualdad de polinomios es equivalente a cuatro igualdades:

$$\begin{array}{l} \text{coeficiente independiente} \\ \text{coeficiente de } x \\ \text{———— } x^2 \\ \text{— — — — } x^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} \beta \cdot \mu_2 = b_0 \\ \mu_2 = b_1 \\ \mu_1 + \mu_2 = b_2 \\ \mu_1 - 2 \cdot \mu_2 = b_3 \end{array} \right.$$

Veamos cuándo este sistema es compatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \beta & b_0 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ 1 & -2 & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 1 & -2 & b_3 \\ 0 & \beta & b_0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & b_3 - b_2 \\ 0 & \beta & b_0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_0 - \beta b_1 \end{array} \right)$$

Luego unas ecuaciones implícitas son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3b_1 - b_2 + b_3 & = 0 \\ b_0 - \beta b_1 & = 0 \end{array} \right.$$

(0,5 puntos)

• Calculemos las ecuaciones implícitas de F. Un polinomio genérico $p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ está en F si $p(1)\cdot x^2+p''(0)x=0$.

Calculemos $p(1)$ y $p''(0)$:

$$p(1)=b_0+b_1+b_2+b_3$$

$$p'(x)=b_1+2b_2x+3b_3x^2$$

$$p''(x)=2b_2+6b_3x \qquad p''(0)=2b_2$$

Así, la condición que deben satisfacer b_0,b_1,b_2,b_3 es $(b_0+b_1+b_2+b_3)\cdot x^2+2b_2\cdot x=0$. Como antes, esta igualdad de polinomios se traduce en varias igualdades de números:

$$\begin{cases} b_0+b_1+b_2+b_3=0 & (\text{coef. de } x^2) \\ 2b_2=0 & (\text{coef. de } x) \end{cases}$$

(0,5 puntos)

• Para hallar unas ecuaciones implícitas de $F\cap G$ simplemente juntamos las ecuaciones de F y las de G:

$$\begin{cases} 3b_1-b_2+b_3=0 \\ b_0-\beta b_1=0 \\ b_0+b_1+b_2+b_3=0 \\ 2b_2=0 \end{cases} \qquad (0,5 \text{ puntos})$$

• Finalmente calculamos para hallar la dimensión del subespacio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\beta & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & 2 & & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ 1 & -\beta & & & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & & 1/3 & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ 1 & -\beta & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & & 1/3 & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & -\beta-1 & & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & & 1/3 & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & -1+\frac{1}{3}(\beta+1) & 0 \end{array}\right)$$

Si $-1+\frac{1}{3}(\beta+1)=0$, es decir, si $\beta+1=3$, es decir, si $\boxed{\beta=2}$, entonces la última variable (b_3) puede tomar cualquier valor λ, mientras que b_0, b_1, b_2 están determinadas. Luego:

$$\dim(F \cap G) = 1 \quad \text{si y solo si} \quad \beta = 2$$

(0,5 puntos).

Ejercicio 3-b (1,5 puntos)

- Para definir $f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ basta con dar las imágenes de una base. Busquemos una base conveniente. Primero hallamos una base de F usando las ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ \qquad\quad 2b_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow b_3 = \delta, \ b_2 = 0, \ b_1 = \rho, \ b_0 = -\delta - \rho$$

Luego $\{-1+x, -1+x^3\}$ es base de F. Ampliamos ahora esta base con vectores de la base "canónica" $\{1, x, x^2, x^3\}$ hasta formar una base de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$\{-1+x, -1+x^3, 1, x^2\}$$

Definimos:

$$f: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$-1+x \longleftrightarrow x^2 + x^3$$

$$-1+x^3 \longleftrightarrow \beta + x + x^2 - 2x^3$$

$(f(F) = G)$

$$1 \longleftrightarrow 0$$

$$x^2 \longleftrightarrow 1 - x + x^3$$

(u está en la imagen)

(0,75 puntos)

- Claramente $\dim \ker f \geq 1$, veamos que es 1.

$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}< x^2+x^3,\ \beta+x+x^2-2x^3,\ 1-x+x^2 > =$$

$$= \operatorname{span}< x^2+x^3,\ \beta+x-3x^3,\ 1-x+x^3 > =$$

$$= \operatorname{span}< x^2+x^3,\ (\beta+1)-2x^3,\ 1-x+x^3 >$$

claramente son linealmente independientes,

luego $\dim \operatorname{im} f = 3$, y $\dim \ker f = 4-3=1$.

(0,25 puntos).

- Para calcular la matriz coordenada, hacemos los tres pasos:

(1) $x,\ 1,\ x^3,\ x^2$

(2) $f(x) = f(-1+x)+f(1) = x^2+x^3$

$f(1)=0$

$f(x^3) = f(-1+x^3)+f(1) = \beta+x+x^2-2x^3$

$f(x^2) = 1-x+x^3$

(3) $x^2+x^3 = 0\cdot x+0\cdot 1+1\cdot x^3+1\cdot x^2$

$0=0$

$\beta+x+x^2-2x^3 = 1\cdot x+\beta\cdot 1-2\cdot x^3+1\cdot x^2$

$1-x+x^3 = (-1)x+1\cdot 1+1\cdot x^3+0\cdot x^2$

Luego la matriz buscada es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)