GUIA SUPER CHUPI PARA NO PENCAR MATRICIAL

Jaime Cabal

Contents

Tema 1: Sistemas de ecuaciones lineales ... 3
Transformaciones elementales: ... 3
Matriz escalonada ... 3
Ejercicio tipo: Gauss Jordan ... 4
Rango de una matriz ... 4
Tipos de matrices según su rango y su número de indeterminadas ... 4
Expresión Implícita ... 5
Ejercicio tipo: Encuentra una base ... 5
Ejercicio tipo: Completar una base hasta una base de R^3 ... 6
Matriz traspuesta ... 6
Ejercicio Tipo: Forma escalonada reducida de la matriz ... 6
Tema 2: Matrices y determinantes ... 7
Producto de matrices ... 7
Matriz identidad ... 8
Matriz inversa ... 8
Como calcular la matriz inversa ... 9
Determinante ... 9
Regla de Sarrus ... 10
Determinante de Vandermonde ... 11
Matriz Adjunta ... 12
Inversa en términos de la adjunta ... 12
Estudiar el valor de una variable para que un sistema sea compatible determinado ... 12
Regla de Cramer ... 12
Tema 3: Diagonalización de matrices ... 13
Calcular una potencia m-esima de la matriz ... 13
Tema 4: Espacios vectoriales ... 16
Propiedades de la suma y el producto en un cuerpo ... 16
Propiedades de la suma y del producto por escalares de un espacio vectorial ... 17
Propiedades de los espacios vectoriales ... 17
Dependencia o independencia lineal ... 17
Combinación lineal ... 17
Dependencia lineal ... 18
Subespacios vectoriales de bases y dimensión: ... 20
Coordenadas ... 21
Regla de la cadena ... 24

Suma e intersección de subespacios 25
Caracterización reticular de la suma directa 25
Caracterización de la suma directa mediante dimensiones 26
Caracterización de la suma directa mediante bases 26
Tema 5: Aplicaciones lineales 27
Aplicaciones Lineales: 27
Ejercicio tipo: 27
Calcula el núcleo y la imagen de una aplicación: 27
Demuestra que una aplicación es lineal: 28
Dimensiones: 28
Rango: 28
Tipos de aplicaciones: 28
Inyectiva: 28
Suprayectiva: 28
Ejercicio tipo: 29
Examinar la suprayectividad de la aplicación: 29
Isomorfismo: 29
Matriz coordenada: 30
Regla de la cadena para la composición de aplicaciones lineales 30
Construcción de aplicaciones lineales 30
Ejercicios tipo: 31
Encuentra una aplicación lineal de modo que f(S) = S’ y f(T) = T’: 31
Dada una aplicación lineal, encuentra la matriz coordenada respecto de ciertas bases: 33
Diagonabilizidad de aplicaciones lineales: 33
Polinomio característico de f: 33
Caracterización de la diagonalizabilidad: 34

Tema 1: Sistemas de ecuaciones lineales

Transformaciones elementales:

formarlo en otro equivalente más *sencillo*. Las siguientes **transformaciones elementales** no alteran las soluciones:

(I) Intercambiar de orden dos ecuaciones.

(S) Sumarle a una ecuación un múltiplo de otra (no de ella misma).

(M) Multiplicar una ecuación por elemento invertible de $\mathbb{F}$.

Las soluciones expresan b como combinación lineal de las columnas de A.

Sea $\text{col}_i(A)$ la i-ésima columna de A. Es muy importante observar que

$$\boxed{A \cdot X = x_1 \,\text{col}_1(A) + \cdots + x_m \,\text{col}_m(A)}$$

por lo que resolver el sistema $A \cdot X = b$ es lo mismo que encontrar los posibles $x_1, \ldots, x_m$, si es que existen, que permiten expresar b como una combinación lineal de las columnas de A.

Matriz escalonada

Una matriz se dice que está **escalonada por filas** si el primer elemento (de izquierda a derecha) no nulo en cada fila, al que llamaremos **pivote**, aparece a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\bullet} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\bullet} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\bullet} & * \end{pmatrix}$$

donde $\bullet$ indica un elemento no nulo y $*$ un elemento cualquiera, está escalonada por filas (hemos recuadrado los pivotes).

Ejercicio tipo: Gauss Jordan

Ejemplo.

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 4y-2z & = & 2 \\ -x+3y-2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Seguimos el procedimiento para escalonar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y resolviendo regresivamente vemos que

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$$
$$x = y - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$$

por lo que la solución general es

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Los pivotes han aparecido en las columnas 1 y 2. Las indeterminadas libres son $\{z\}$ mientras que las básicas son $\{x, y\}$.

Rango de una matriz

Definición 1. *El **rango** (por filas)* $\text{rango}(A)$ *de una matriz* A *es el número de pivotes de cualquier matriz escalonada por filas equivalente por filas a* A*. En particular, cualesquiera dos matrices equivalentes por filas comparten el mismo rango.*

Tipos de matrices según su rango y su número de indeterminadas

Teorema de Rouché-Frobenius

Corolario 1. *Sea* $A \cdot X = b$ *un sistema de* m *ecuaciones y* n *indeterminadas. Se tiene que el sistema es:*

- *Incompatible si* $\text{rango}(A \mid b) \neq \text{rango}(A)$.
- *Compatible determinado si* $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) = n$.
- *Compatible indeterminado si* $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) < n$. *En tal caso diremos que el sistema posee* $n - \text{rango}(A)$ ***grados de libertad***.

Expresión Implícita

Por ejemplo, vamos a hallar un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean

$$S := \{(1,0,0) + \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Para ello observamos que

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & x_2 - 0 \\ 1 & 1 & x_3 - 0 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 + 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 + 1 \end{array}\right)$$

por lo que el rango no aumentará al añadir la última columna si y solamente si $x_3 - x_1 - x_2 + 1 = 0$, es decir

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

Propiedad fundamental de las columnas asociadas a pivotes

Corolario 8. *Sean $j_1, \dots, j_r$ las columnas donde aparecen los pivotes tras escalonar por filas A. Se tiene que las columnas $j_1, \dots, j_r$ de A son linealmente independientes y todas las columnas de A son combinaciones lineales de estas.*

Ejercicio tipo: Encuentra una base

Ejercicio tipo.

En $\mathbb{R}^3$ considera la clausura

$$\mathrm{Gen}\{(-1,-4,9), (9,1,-4), (1,-1,2), (2,3,-7), (3,2,-5)\}.$$

Encuentra una base de esta clausura que contenga a $(1,-1,2)$. Expresa $(2,3,-7)$ como una combinación lineal de esta base. Completa la base de la clausura hasta una base de $\mathbb{R}^3$.

Puesto que queremos incluir a $(1,-1,2)$ lo pondremos como primer elemento de la matriz que tiene por columnas los generadores y la escalonaremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -7 & -5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 11 & -22 & 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 11 & -22 & 0 & -11 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como los pivotes aparecen en las columnas 1 y 2 nos quedamos con la base $\{(1,-1,2), (-1,-4,9)\}$. La dimensión de esta clausura es 2 ya que la base tiene 2 elementos.

Ejercicio tipo: Completar una base hasta una base de R^3

Para completar la base $\{(1,-1,2),(-1,-4,9)\}$, una posible forma (no la más breve) es completarla hasta un conjunto generador $\{(1,-1,2),(-1,-4,9),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y quedarnos con las columnas asociadas a los pivotes resultante de escalonar la matriz que tiene como columnas este conjunto generador:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1/5} & 11/5 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que indica que una base para $\mathbb{R}^3$ es

$$\{(1,-1,2),(-1,-4,9),(1,0,0)\}.$$

Matriz traspuesta

Definición 2. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \textit{la matriz} \quad A^T := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz traspuesta*** *de* A.

Ejercicio Tipo: Forma escalonada reducida de la matriz

Encuentra la forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -1 & -3 \\ -3 & -6 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Es muy sencillo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -1 & -3 \\ -3 & -6 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tema 2: Matrices y determinantes

Producto de matrices

Podemos definir el **producto de una matriz** de orden $m \times n$ **por una columna** $n \times 1$ como la columna $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

Vamos a calcular el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Elemento en posición $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Elemento en posición $(2,1)$:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & -2 & -1 \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Elemento en posición $(3,1)$:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ -1 & * & * \\ \boxed{-1} & * & * \end{pmatrix}$$

Elemento en posición $(1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & -3 & * \\ * & 2 & * \\ * & 2 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & * \\ -1 & * & * \\ -1 & * & * \end{pmatrix}$$

Tras hacer todos los cálculos se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

La **matriz identidad** de orden m es la matriz cuadrada de orden m

$$I_m := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Definición. *Una matriz cuadrada de orden n se dice* ***invertible*** *si existe otra matriz cuadrada A^{-1}, a la que llamamos* ***inversa*** *de A tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Ejemplo.

Puedes comprobar que

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -8 & -7 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -8 & -7 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Como calcular la matriz inversa

Veamos un ejemplo de cálculo. Vamos a ver quién podría ser la inversa de la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Realizamos el escalonamiento

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 7 & 3 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -11 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 7 & 3 \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & 7 & 3 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

y llegamos a que la matriz

$$A^{-1} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Determinante

Calcular

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos usar cualquier fila o columna. Primero lo haremos usando la primera columna:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+(-1)^{3+1}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 0 + 1\cdot(-2)\cdot 1 = -2$$

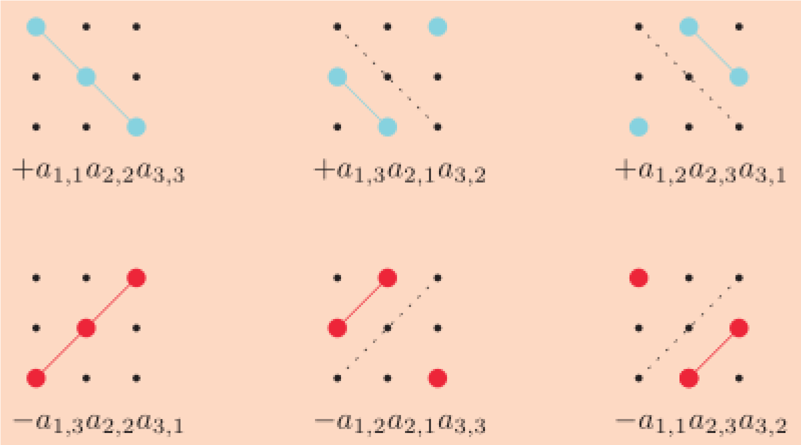
Este ejemplo ya nos muestra que

> las mejores filas o columnas para desarrollar un determinante suelen ser las que tienen muchos ceros ya que producen desarrollos más cortos.

Así que en lugar de la primera columna, si usamos la primera fila y no incluimos los sumandos nulos correspondientes a $a_{1,j} = 0$ tenemos

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(1)\cdot(2) = -2$$

Regla de Sarrus



Determinante de Vandermonde

Dados $x_1, \dots, x_n$, calcula el ***determinante de Vandermonde***

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Usamos la primera fila para hacer ceros en la primera columna ya que el determinante no cambiará. Usaremos la notación $|A|$ en lugar de $\det(A)$ para que las matrices no excedan los márgenes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Usando que $x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1})$ vemos que todos los elementos de la i-ésima columna están multiplicados por $x_i - x_1$, así que los podemos sacar factor común del determinante y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 + x_1 & \cdots & x_n + x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} + x_2^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} + x_n^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix} \prod_{2 \le j \le n} (x_j - x_1)$$

Usando la primera fila podemos eliminar x_1 de la segunda, y procediendo análogamente, podemos convertir la anterior expresión en

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \prod_{2 \le j \le n} (x_j - x_1)$$

donde el determinante es un determinante de Vandermonde de una matriz de orden menor. Reiterando llegamos a que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$$

Matriz Adjunta

La matriz adjunta de A es la matriz cuadrada en la que se cambian las filas por columnas

Inversa en términos de la adjunta

Inversa en términos de la adjunta

Corolario 27. *Una matriz cuadrada A es invertible si y solamente si* $\det(A)$ *es invertible. Además, en tal caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

y $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Estudiar el valor de una variable para que un sistema sea compatible determinado

Ejemplo.

Estudia el valor de λ para que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x - \lambda y - (2\lambda - 2)z & = & -1 \\ -x + \lambda y + (\lambda - 1)z & = & 1 \\ -2x + \lambda y - (2\lambda - 2)z & = & 0 \end{array}\right\}$$

sea compatible determinado.

Este sistema ya lo estudiamo en el tema anterior, así que podemos comparar los resultados que obtengamos ahora. Primero estudiamos las condiciones en λ para que la matriz de coeficientes tenga rango 3.

Calculamos el determinante haciendo algunos ceros

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -2\lambda+2 \\ -1 & \lambda & \lambda-1 \\ -2 & \lambda & -2\lambda+2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -2\lambda+2 \\ 0 & 0 & -\lambda+1 \\ -2 & \lambda & -2\lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$= -(-\lambda+1)\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda)$$

por lo que el sistema será compatible determinado si y solo si $\lambda \neq 0, 1$.

Regla de Cramer

Teorema 29. *Sea A una matriz invertible. El sistema $AX = b$ es compatible determinado y para todo $i = 1, \ldots, n$ se tiene que*

$$x_i = \frac{\det(\operatorname{col}_1(A), \ldots, \operatorname{col}_{i-1}(A), b, \operatorname{col}_{i+1}(A), \ldots, \operatorname{col}_n(A))}{\det(A)}.$$

Tema 3: Diagonalización de matrices

Se puede usar para conseguir la potencia de k de una matriz A:

$$A^k = P^{-1} D^k P$$

Algoritmo para diagonalizar

1. Hallar las distintas raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ de $\det(xI_n - A)$.
2. Para cada una de esas raíces λ_i resolver el sistema $(A - \lambda_i I_n)X = \mathbf{0}$ y usar las acompañantes de las indeterminadas libres como columnas de una matriz P.

Para que una matriz cuadrada a es diagonalizable si y solamente si el algoritmo devuelve una matriz P cuadrada.

Calcular una potencia m-esima de la matriz

Ejercicio tipo.

Encuentra la potencia m-ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico

$$\det\begin{pmatrix} x+3 & -3 & -1 \\ 2 & x-2 & -1 \\ 8 & -6 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -3 & -1 \\ x & x-2 & -1 \\ 2 & -6 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1 & -3 & -1 \\ x-1 & x-2 & -1 \\ x-1 & -6 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 1 & -6 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 \\ 1 & -6 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)(x+1)$$

Así que los valores propios son $1, 2, -1$. Para que sea diagonalizable necesitamos un grado de libertad en el sistema homogéneo asociado a cada valor propio, y obviamente lo vamos a tener.

Valor propio 1. Prescindiremos de la columna de ceros para la matriz ampliada del sistema $(I_3 - A)X = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La compañera es $(1, 1, 1)$.

Valor propio 2:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 8 & -6 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 8 & -6 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la acompañante es, multiplicada por 2, $(1, 1, 2)$.

Valor propio -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la acompañante es, multiplicada por 2, $(1, 0, 2)$. La matriz P que devuelve el algoritmo es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y por el orden de las columnas que hemos elegido tendremos

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrix inversa de P es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^m = PD^m P^{-1}$ y así

$$A^m = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + (-1)^m + 2 & 2^m - (-1)^m & 2^m - 1 \\ -2 \cdot 2^m + 2 & 2^m & 2^m - 1 \\ -4 \cdot 2^m + 2\,(-1)^m + 2 & 2 \cdot 2^m - 2\,(-1)^m & 2 \cdot 2^m - 1 \end{pmatrix}$$

Tema 4: Espacios vectoriales

Propiedades de la suma y el producto en un cuerpo

Definición. *Un* ***cuerpo*** $(\mathbb{F},+,\cdot)$ *es un conjunto no vacío* $\mathbb{F}$ *junto con dos operaciones internas* $+: \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ *(**suma**) y* $\cdot: \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ *(**producto**) tales que para todo* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}$ *se cumple:*

1. *Propiedades de la suma* $\alpha+\beta$*:*
   a) *Asociativa:* $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
   b) *Neutro:* $\alpha+0=\alpha=0+\alpha$.
   c) *Opuestos:* $\alpha+(-\alpha)=0=(-\alpha)+\alpha$.
   d) *Conmutativa:* $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
2. *Propiedades del producto* $\alpha\beta$*:*
   a) *Asociativa:* $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.
   b) *Existencia de elemento unidad:* $1\alpha=\alpha=\alpha 1$.
   c) *Conmutativa:* $\alpha\beta=\beta\alpha$.
   d) *Existencia de inversos: si* $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$ *entonces existe* $\alpha^{-1}\in\mathbb{F}$ *tal que* $\alpha\alpha^{-1}=1=\alpha^{-1}\alpha$.
3. *Compatibilidad de ambas operaciones:*
   a) *Distributiva respecto a la suma de vectores:* $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$. *Puesto que el producto es conmutativo se cumple automáticamente que* $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.

Lo que deben cumplir los conjuntos para poder operar con combinaciones lineales queda recogido en la siguiente definición.

Propiedades de la suma y del producto por escalares de un espacio vectorial

Definición. *Un $\mathbb{F}$-**espacio vectorial** $(V,+,\cdot_{\mathbb{F}})$ es un conjunto no vacío V dotado de dos operaciones, una interna llamada **suma** $(+: V \times V \longrightarrow V)$ y otra externa llamada **producto por escalares** $(\cdot_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V)$ tales que para todo $u, v \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ se tiene:*

1. *Propiedades de la suma $u + v$:*
   a) *Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$.*
   b) *Neutro: $u + \vec{0} = u = \vec{0} + u$.*
   c) *Opuestos: $u + (-u) = \vec{0} = (-u) + u$.*
   d) *Conmutativa: $u + v = v + u$.*
2. *Propiedades del producto por escalares $\alpha u := \alpha \cdot_{\mathbb{F}} u$:*
   a) *Asociativa respecto al producto de escalares: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.*
   b) *$1u = u$.*
3. *Compatibilidad de ambas operaciones:*
   a) *Distributiva respecto a la suma de vectores: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.*
   b) *Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$.*

*Los elementos de un espacio vectorial se llaman **vectores**.*

Propiedades de los espacios vectoriales

1. *El elemento neutro es único.*
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0} = 0u$.
3. *Si $\alpha u = \vec{0}$ entonces, o bien $\alpha = 0$, o bien $u = \vec{0}$.*
4. *Para u, el opuesto $-u$ de u es único. Además, $-\alpha u = (-\alpha)u = \alpha(-u)$.*
5. *Si $\alpha u = \beta u$ y $u \neq \vec{0}$ entonces $\alpha = \beta$. Si $\alpha u = \alpha v$ y $\alpha \neq 0$ entonces $u = v$.*

Dependencia o independencia lineal

Combinación lineal

Definición. *Dados $v_1, \ldots, v_p \in V$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{F}$, cualquier expresión*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$$

*se dice **combinación lineal** de $v_1, \ldots, v_p$ con coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.*

Dependencia lineal

Definición. *Una expresión del tipo*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \vec{0}$$

se llama ***dependencia lineal*** *entre los vectores* $\{v_1, \ldots, v_p\}$*. Si* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ *entonces la dependencia se dice* ***trivial***.[1] *Una dependencia lineal no trivial permite expresar algún vector como combinación lineal de los restantes ya que si* $\alpha_i \neq 0$ *entonces*

$$v_i = -(\alpha_i^{-1}\alpha_1)v_1 - \cdots - (\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})v_{i-1} - (\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})v_{i+1} - \cdots - (\alpha_i^{-1}\alpha_p)v_p$$

Si la única forma de obtener

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \vec{0}$$

es con $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ *entonces* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *se dicen* ***linealmente independientes*** *(o* ***libres****). Un conjunto infinito se dice libre si todos los subconjuntos finitos de él son libres. Un conjunto no libre se dice* ***ligado*** *o* ***linealmente dependiente****.*

Ejemplo: Estudiar la dependía linear de un grupo de matrices.

Estudia si las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

forman un conjunto linealmente independiente o no.

Escribimos una relación de dependencia genérica y estudiamos los coeficientes:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Debemos comprobar si el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones no triviales. En este caso bastará estudiar el determinante de la matriz de coeficientes (ya que es cuadrada) aunque la técnica general será calcular el rango de esta matriz o resolver el sistema:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

ya que la primera y tercera fila son proporcionales. Así, el conjunto de matrices es linealmente dependiente. Una de ellas podrá escribirse en término de las otras. Si hubiésemos resuelto el sistema sabríamos cual de ellas es. Por ejemplo

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Estudia si es libro un conjunto de polinomios.

Estudia si es libre el conjunto de polinomios

$$\{x+3x^3, 2-2x+x^2-x^3, 1-x^2, -x+3x^2+2x^3\}.$$

El procedimiento es el natural: se propone una relación de dependencia lineal genérica y se estudia si los coeficientes deben ser nulos o hay otras posibilidades. Tenemos

$$\alpha_1(x+3x^3)+\alpha_2(2-2x+x^2-x^3)+\alpha_3(1-x^2)+\alpha_4(-x+3x^2+2x^3)=0.$$

Agrupando los coeficientes de acuerdo a las potencias de x esto equivale a

$$\begin{aligned} 2\alpha_2+\alpha_3&=0\\ \alpha_1-2\alpha_2-\alpha_4&=0\\ \alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4&=0\\ 3\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_4&=0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que sí hay soluciones no triviales, por lo que el conjunto de polinomios es ligado y además una relación de dependencia lineal no trivial es la siguiente:

$$-(x+3x^3)-(2-2x+x^2-x^3)+2(1-x^2)+(-x+3x^2+2x^3)=0.$$

Subespacios vectoriales de bases y dimensión:

Definición. *Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V se dice* ***subespacio vectorial*** *si αu, $u+v \in S$ para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u, v \in S$ (decimos que S es cerrado por las operaciones $+$ y $\cdot_{\mathbb{F}}$). Lo indicamos con la notación $S \leq V$ en lugar de $S \subseteq V$.*

Subespacio vectorial:

Definición. *Dado un subconjunto $C \subseteq S$, el conjunto $\operatorname{Gen} C$ de todas las combinaciones lineales de elementos de C se llama* ***clausura lineal*** *de S.*

Conjunto generador:

Definición. *Sea S un subespacio de V. Si $S = \operatorname{Gen} C$, decimos que C es un* ***conjunto generador*** *de S. Un conjunto generador que es además linealmente independiente se dice* ***base*** *de S. Si $S = \operatorname{Gen}\{v_1, \ldots, v_p\}$ entonces se dice que S está* ***finitamente generado*** *(o que tiene* ***tipo finito****).*

Para generar un subespacio conviene usar vectores que no tengan dependencias lineales no triviales.

Todo espacio vectorial finitamente generado posee alguna base y el numero de elementos de un conjunto libre es a lo sumo el de un conjunto generador.

Lema 36. *Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es libre entonces $\{v_1, \ldots, v_m, v\}$ es libre si y solamente si $v \notin \mathrm{Gen}\{v_1, \ldots, v_m\}$.*

Corolario 37. *Todo conjunto libre en un espacio vectorial finitamente generado puede completarse hasta una base y de todo conjunto generador puede extraerse una base.*

Corolario 38. *Todo subespacio de un espacio finitamente generado es finitamente generado y posee bases.*

Teorema 39. *Cualesquiera dos bases de un espacio finitamente generado tienen el mismo número de elementos, al cual llamamos* ***dimensón****, $\dim_{\mathbb{F}} V$ (o simplemente $\dim V$).*

Corolario 40. *Sea S un subespacio de V. Se tiene que $\dim S \leq \dim V$ y que toda base de S puede completarse hasta una base de V. En particular, $\dim S = \dim V$ si y solamente si $S = V$.*

Coordenadas

Lema 41. *Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada. Cada elemento $v \in V$ solo puede expresarse de una única forma como*

$$v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n.$$

La tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ se llama ***coordenadas*** *de v respecto de la base $\mathcal{B}$. Usaremos la notación $c_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \ldots, x_n)^T$ o $v \equiv X$ si no hay riesgo de confusión al no especificar la base.*

Las coordenadas van a permitir operar con espacios vectoriales abstractos como lo haríamos con tuplas y solucionar los problemas resolviendo sistemas de ecuaciones lineales.

Lema 42. *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión n, S un subespacio y $c_{\mathcal{B}}(S) := \{c_{\mathcal{B}}(v) \mid v \in S\}$. Se tiene:*

1. *$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ si y solamente si $c_{\mathcal{B}}(v) = \alpha_1 c_{\mathcal{B}}(v_1) + \cdots + \alpha_p c_{\mathcal{B}}(v_p)$.*

2. *$\{v_1, \ldots, v_p\}$ es libre si y solamente si $\{c_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, c_{\mathcal{B}}(v_p)\}$ es libre en $\mathbb{F}^n$.*

3. *$\{v_1, \ldots, v_p\}$ es ligado si y solamente si $\{c_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, c_{\mathcal{B}}(v_p)\}$ es ligado en $\mathbb{F}^n$.*

4. *$\{v_1, \ldots, v_p\}$ es base de S si y solamente si $\{c_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, c_{\mathcal{B}}(v_p)\}$ es base de $c_{\mathcal{B}}(S)$.*

Ejercicio tipo: Extrae una base y calcula una dimensión para un subespacio de polinomios

Ejercicio tipo.

En el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{F}[x]$ ($\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) considera el subespacio de los polinomios de grado ≤ 2. Sea S la clausura lineal de los polinomios $p_1(x), \ldots, p_5(x)$ siguientes

$$1 + x, 1 - x + x^2, 3 - x + 2x^2, 2 + x^2, 1 - x - x^2.$$

De entre estos polinomios extrae una base para S y calcula la dimensión de S.

Visto así puede parecer un poco abstracto, aunque lo único que nos piden es que encontremos un subconjunto linealmente independiente de modo que el resto de elementos del conjunto sea combinación lineal de los que hemos encontrado. Para pasarlo a un problema que sabemos resolver fijamos una base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ para los polinomios de grado ≤ 2 y usar coordenadas. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 + x &\equiv (1,1,0)^T \\ 1 - x + x^2 &\equiv (1,-1,1)^T \\ 3 - x + 2x^2 &\equiv (3,-1,2)^T \\ 2 + x^2 &\equiv (2,0,1)^T \\ 1 - x - x^2 &\equiv (1,-1,-1)^T \end{aligned}$$

y resolvemos exactamente el mismo problema pero para las coordenadas. Sabemos que hemos de formar una matriz por columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix}$$

Puesto que los pivotes aparecen en las columnas 1, 2 y 5, esas columnas son linealmente independientes mientras que las demás son combinaciones lineales de estas. Por tanto, al ser las coordenadas de $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_5(x)$ linealmente independientes estos polinomios lo son. Al ser las coordenadas de $p_3(x)$ y $p_4(x)$ combinación lineal de las anteriores, también $p_3(x)$, $p_4(x)$ son combinación lineal de $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_5(x)$. Concluimos que la base que nos piden es

$$\{1 + x, 1 - x + x^2, 1 - x - x^2\}$$

y que la dimensión de S es 3.

Si observamos por ejemplo que la tercera columna de la matriz escalonada es la primera más dos veces la segunda, la misma relación será cierta para la matriz original, por lo que $c_{\mathcal{B}}(p_3) = c_{\mathcal{B}}(p_1) + 2\,c_{\mathcal{B}}(p_2)$. Esto implica que debería cumplirse que $p_3(x) = p_1(x) + 2p_2(x)$, lo cual es cierto como puedes comprobar. Lo mismo ocurre con $p_4(x)$ que debe ser $p_1(x) + p_2(x)$ ya que la cuarta columna de la matriz escalonada es la suma de la primera y de la segunda.

Ejercicio tipo: Completa la matriz hasta una base de M2(F)

Ejercicio tipo.

Completa las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hasta una base de $M_2(\mathbb{F})$.

$M_2(\mathbb{F})$ tiene una base $\mathcal{B}$ formada por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de las matrices que nos dan en el enunciado son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv (1, 0, 0, -1)^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (0, 1, 1, 0)^T$$

Resolvemos el mismo problema pero para coordenadas. Así, sabemos que hay que formar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

escalonarla

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y como los pivotes han aparecido en las primeras cuatro columnas sabemos que las primeras cuatro columnas de la matriz original forman una base de $\mathbb{F}^4$. Miramos qué matrices tienen por coordenadas las columnas que necesitamos añadir (la tercera y cuarta). Se trata de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así que una base de $M_2(\mathbb{F})$ será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Regla de la cadena

Para transformar coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ debes formar la matriz $\mathrm{c}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ y seguir la regla de la cadena

$$\mathrm{c}_{\mathcal{B}'}(v) = \mathrm{c}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\, \mathrm{c}_{\mathcal{B}}(v).$$

¿Y cómo me acuerdo de la forma de construir $\mathrm{c}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$? Acostúmbrate a leer cada lado de derecha a izquierda: "coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}'$ es igual a coordenadas de v respecto <u>de $\mathcal{B}$</u> por <u>coordenadas de $\mathcal{B}$</u> respecto de $\mathcal{B}'$". Así te acordarás de que $\mathrm{c}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ tiene (por columnas) las coordenadas de (los vectores de) $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$.

Ejercicio tipo: Matriz de cambio de coordenadas

Para el subespacio S de polinomios de grado ≤ 2 de $\mathbb{F}[x]$ considera las bases

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2) \quad y \quad \mathcal{B}' = (1, x-1, (x-1)^2).$$

Encuentra la matriz del cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Nos piden la matriz que realiza el cambio $c_{\mathcal{B}'}(p(x)) = c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} c_{\mathcal{B}}(p(x))$ por lo que hemos de encontrar las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$. Algunas son triviales, como por ejemplo $1 = 1+0(x-1)+0(x-1)^2 \equiv (1,0,0)^T$ o $x = 1+1(x-1)+0(x-1)^2 \equiv (1,1,0)^T$. También es sencillo obtener la de x^2 ya que $x^2 = a1 + b(x-1) + c(x-1)^2$ equivale a

$$\begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

es decir, $x^2 = 1 + 2(x-1) + 1(x-1)^2 \equiv (1,2,1)^T$. Por tanto,

$$c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (con coordenadas $(a_0, a_1, a_2)^T$ respecto de $\mathcal{B}$) entonces

$$c_{\mathcal{B}'}(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

implica

$$p(x) = (a_0 + a_1 + a_2)1 + (a_1 + 2a_2)(x-1) + a_2(x-1)^2$$

Suma e intersección de subespacios

Suma: $S_1 + S_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$

Interseccion: $S_1 \cap S_2 := \{v \mid v \in S_1, v \in S_2\}$

$S_1 + S_2$ es el subespacio más pequeño que contiene a S_1 y a S_2: cualquier subespacio S que contenga a S_1 y a S_2 contiene a $S_1 + S_2$.

$S_1 \cap S_2$ es el mayor subespacio contenido a la vez en S_1 y en S_2: cualquier otro subespacio S contenido en S_1 y en S_2 está contenido en $S_1 \cap S_2$.

Se tiene que $\dim S + S' = \dim S + \dim S' - \dim S \cap S'$.

Caracterización reticular de la suma directa

La suma $S_1 + \cdots + S_r$ es directa si y solamente si $S_k \cap (S_1 + \cdots + S_{k-1}) = \{\vec{0}\}$ para todo $k = 2, \ldots, r$.

La suma $S_1 + S_2$ es directa si y solamente si $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

Caracterización de la suma directa mediante dimensiones

Lema 46. *La suma* $S_1 + \cdots + S_r$ *es directa si y solamente si* $\dim S_1 + \cdots + S_r = \dim S_1 + \cdots + \dim S_r$.

Caracterización de la suma directa mediante bases

Lema 47. *La suma* $S_1 + \cdots + S_r$ *es directa si y solamente si al unir bases* $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ *de* $S_1, \ldots, S_r$ *se obtiene una base de* $S_1 + \cdots + S_r$.

Tema 5: Aplicaciones lineales

Aplicaciones Lineales:

Definición. *Dados dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales V y V', una* ***aplicación lineal*** *entre V y V' es una aplicación $f : V \to V'$ tal que*

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Lema 48. $f(\mathrm{Gen}\{v_1,\dots,v_r\}) = \mathrm{Gen}\{f(v_1),\dots,f(v_r)\}$.

El núcleo de f es un subespacio de V y la imagen lo es de V'.

Ejercicio tipo:

Calcula el núcleo y la imagen de una aplicación:

Comprueba que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ p(x) & \mapsto & \dfrac{d}{dx} p(x) \end{array}$$

es lineal y calcula su núcleo y su imagen.

La linealidad es consecuencia de las propiedades de la derivada, concretamente de

$$\frac{d}{dx}(p(x)+q(x)) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(\alpha p(x)) = \alpha p(x).$$

El núcleo es $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \frac{d}{dx}p(x) = 0\}$, es decir, $\mathbb{R}1$. La imagen es todo $\mathbb{R}[x]$ ya que dado un polinomio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ tenemos que la derivada de

$$\alpha_0 x + \frac{\alpha_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1}$$

es $p(x)$.

Demuestra que una aplicación es lineal:

Considera la aplicación $f(x,y,z) := (x+y, x-y+z, x+y+z)$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Prueba que es una aplicación lineal.

Hay dos modo de hacerlo. El general es observar que, si ponemos las tuplas como columnas,

$$f(x,y,z) = \left(x+y, x-y+z, x+y+z\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vista así, esta aplicación es un simple ejemplo de aplicación $X \mapsto AX$ para una matriz A, y estas aplicaciones son siempre lineales.

Otro método, más largo, es comprobar la definición:

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+(x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (x+x'+y+y', x+x'-y-y'+z+z', x+x'+y+y'+z+z') \\ &= (x+y, x-y+z, x+y+z) + (x'+y', x'-y'+z', x'+y'+z') \\ &= f(x,y,z) + f(x',y',z') \\ f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha y + \alpha z) \\ &= \alpha(x+y, x-y+z, x+y+z) = \alpha f(x,y,z) \end{aligned}$$

Dimensiones:

Importante: dim(V) = dim f(V) + dim (ker f)

Rango:

El rango de una aplicación lineal f: V → V' es dim f(V)

Tipos de aplicaciones:

Inyectiva:

Una aplicación es inyectiva si y solamente si ker f = {0}

Suprayectiva:

Sea f: V → V' una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión dimV= dimV'. Se tiene que f es suprayectiva si y solo si f es biyectiva.

También hay que tener en cuenta que f será suprayectiva si y solamente si

dim V -dim ker f= dim V'

Ejercicio tipo:

Examinar la suprayectividad de la aplicación:

Vamos a examinar la suprayectividad de la aplicación

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_4)$$

de $\mathbb{R}^4$ en R^2.

Hay diversas formas de hacerlo. Una es notar que

$$f(\mathbb{R}^4) = \text{Gen}\{(1,1),(1,1),(1,0),(0,1)\} = \text{Gen}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

por lo que sí que es suprayectiva. Como consecuencia también sabemos inmediatamente que $\dim\ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim f(\mathbb{R}^4) = 4 - 2 = 2$.

Otra forma es resolverlo del revés. Primero obtener $\dim\ker f$ con lo que obtendremos $\dim f(\mathbb{R}^4) = 4 - \dim\ker f$ y podremos comprobar coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^2$ o no. Calcular la dimensión del núcleo supone examinar el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que $\dim\ker f = 2$ (el número de indeterminadas libres) y que por lo tanto $\dim f(\mathbb{R}^4) = 2$. Comparando dimensiones observamos que $\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}^4)$.

Otra forma es usar la caracterización del rango como el máximo orden de los menores de la matriz con determinante no nulo. La matriz del sistema anterior debe tener rango ≤ 2 y posee un menor de determinante 1 (dos últimas columnas), por lo que el rango es 2 y por tanto $\dim f(\mathbb{R}^4) = 2$.

En general, una u otra forma de resolver un problema la determina el cómo nos vengan presentados los datos en el enunciado.

Isomorfismo:

Aplicación lineal biyectiva, los espacios vectoriales V y V' se dicen que son isomorfos si existe una aplicación biyectiva.

Matriz coordenada:

Proposición 54. *Sea $f\colon V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales V y V' con $\dim V = n$ y $\dim V' = m$. Existe una única matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ tal que*

$$c_{\mathcal{B}'}(f(v)) = A\, c_{\mathcal{B}}(v)$$

para todo $v \in V$. Tal matriz $c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ tiene por columnas las coordenadas de los distintos $f(b_j)$ $(b_j \in \mathcal{B})$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ y la llamaremos ***matriz coordenada*** *de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.*

Regla de la cadena para la composición de aplicaciones lineales

Regla de la cadena para la composición de aplicaciones lineales

Proposición 55. *Sean $g\colon V \to V'$ y $f\colon V' \to V''$ aplicaciones lineales y sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ bases de V, V' y V'' respectivamente. Se tiene que $f \circ g$ es una aplicación lineal y*

$$c_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(f \circ g) = c_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(f)\, c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$$

Construcción de aplicaciones lineales

Lema 56. *Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de V.*

- *Una aplicación lineal queda determinda por las imáges de los vectores en $\mathcal{B}$ ya que si $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ entonces*

$$f(v) = x_1 f(b_1) + \cdots + x_n f(b_n)$$

- *Dados $v'_1, \dots, v'_n \in V'$ existe una única aplicación lineal $f\colon V \to V'$ tal que $f(b_i) = v'_i$ $i = 1, \dots, n$.*

- *Dada una base $\mathcal{B}'$ de V' y una matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ existe una única aplicación lineal $f\colon V \to V'$ de modo que $c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = A$.*

Ejercicios tipo:

Encuentra una aplicación lineal de modo que f(S) = S’ y f(T) = T’:

Ejemplo

Encuentra una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de modo que* $f(S) = S'$ *y* $f(T) = T'$ *donde*

$$\begin{aligned} S &:= \mathrm{Gen}\{(0,0,1),(0,1,0)\} \\ T &:= \mathrm{Gen}\{(0,1,-1),(1,1,0)\} \\ S' &:= \mathrm{Gen}\{(1,1,1),(0,1,1)\} \\ T' &:= \mathrm{Gen}\{(1,0,0),(1,1,-1)\} \end{aligned}$$

En principio, encontrar una aplicación lineal que cumpla que $f(S) = S'$ es muy sencillo ya que basta enviar una base de S a un conjunto generador de S'. Lo mismo es válido para T. El problema es hacer ambas cosas con la misma aplicación. Si la unión de una base de S y una de T es un conjunto libre entonces no hay problema. Basta completar esa unión a una base y definir la aplicación lineal f como hemos dicho: la parte de base en S la enviamos a un conjunto generador de S'; la parte en T se envía a un conjunto generador de T' y el resto de la base se envía donde se quiera.

Sin embargo, si $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$ entonces hay que evitar una doble definición de la imagen de los elementos de $S \cap T$: la que les corresponde por pertenecer a S y la que les corresponde por pertenecer a T. Es más, la imagen de un elemento de $S \cap T$ debe pertenecer a $f(S) \cap f(T)$.

La estrategia para evitar la doble definición es como sigue. Calculamos una base $\mathcal{B}_{S\cap T}$ de $S \cap T$. La completamos a una $\mathcal{B}_S$ de S y a otra

$\mathcal{B}_T$ de T. Hacemos lo mismo con S', T' obteniendo $\mathcal{B}_{S'\cap T'}$, $\mathcal{B}_{S'}$, $\mathcal{B}_{T'}$. Ahora enviamos $\mathcal{B}_{S\cap T}$ a $\mathcal{B}_{S'\cap T'}$, la parte de $\mathcal{B}_S$ que hemos añadido a $\mathcal{B}_{S\cap T}$ a la de $\mathcal{B}_{S'}$ que hemos añadido a $\mathcal{B}_{S'\cap T'}$ y lo mismo para $\mathcal{B}_T$. De este modo evitamos la doble definición. Veámoslo.

Primero calculamos $S\cap T$ y $S'\cap T'$ pasando a implícitas. Una forma breve es observar que todos estos espacios tienen dimensión 2, por lo que (x,y,z) pertenece a ellos si y solamente si al calcular el determinante de los dos vectores de la base y de (x,y,z) obtenemos 0. Así

$$
\begin{aligned}
S &= \left\{(x,y,z) \mid \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0\right\} = \{(x,y,z) \mid x = 0\} \\
T &= \left\{(x,y,z) \mid \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0\right\} = \{(x,y,z) \mid x - y - z = 0\} \\
S' &= \{(x,y,z) \mid y - z = 0\} \\
T' &= \{(x,y,z) \mid y + z = 0\}
\end{aligned}
$$

La intersección $S\cap T$ es $\mathrm{Gen}\{(0,1,-1)\}$ mientras que la intersección $S'\cap T'$ es $\mathrm{Gen}\{(1,0,0)\}$. Las bases que debemos considerar son

1. De $S\cap T$: $\{(0,1,-1)\}$. La completamos a una base $\{(0,1,-1),(0,1,0)\}$ de S y a una base $\{(0,1,-1),(1,1,0)\}$ de T.

2. De $S'\cap T'$: $\{(1,0,0)\}$. La completamos a una base $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$ de S' y a una base $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ de T'.

Ahora ya podemos observar que $\{(0,1,-1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, por lo que existe una aplicación lineal que envía estos vectores donde nosotros especifiquemos. Para que se cumplan las condiciones del enunciado definimos

$$f((0,1,-1)) := (1,0,0), \quad f((0,1,0)) := (0,1,1), \quad f((1,1,0)) := (0,1,-1).$$

De esta forma tenemos que $f(S) = S'$ y $f(T) = T'$.

Dar la fórmula para $f(x,y,z)$ equivale a encontrar las imágenes de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Claramente

$$
\begin{aligned}
f(1,0,0) &= f(1,1,0) - f(0,1,0) = (0,1,-1) - (0,1,1) = (0,0,-2) \\
f(0,1,0) &= (0,1,1) \\
f(0,0,1) &= f(0,1,0) - f(0,1,-1) = (0,1,1) - (1,0,0) = (-1,1,1)
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\
&= (-z, y+z, -2x+y+z)
\end{aligned}
$$

Dada una aplicación lineal, encuentra la matriz coordenada respecto de ciertas bases:

Considera la aplicación lineal entre el V de polinomios de grado ≤ 2 y el espacio V' de polinomios de grado ≤ 3 dada por $f(p(x)) = (x-1)p(x)$. Encuentra la matriz coordenada de f respecto de las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Calculamos las coordenadas de $f(1)$, $f(x)$ y $f(x^2)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$:

$$f(1) = x - 1 \equiv (-1, 1, 0, 0)^T$$
$$f(x) = (x-1)x \equiv (0, -1, 1, 0)^T$$
$$f(x^2)(x-1)x^2 \equiv (0, 0, -1, 1)^T$$

Las ponemos por columnas para obtener

$$c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonabilizidad de aplicaciones lineales:

Definición. *Una aplicación lineal $f : V \to V$ se dice que es* ***diagonalizable*** *si existe una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V de modo que $f(v_j) = \lambda_j v_j$ para algún $\lambda_j \in \mathbb{F}$ $(j = 1, \ldots, n)$*

Teorema 57. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y $\mathcal{B}$ una base de V. Se tiene que f es diagonalizable si y solamente si $c_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ es diagonalizable.*

Polinomio característico de f:

Lema 58. *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y $\mathcal{B}$ una base de V. El polinomio $\det(xI_n - c_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))$ no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida y lo llamaremos* ***polinomio característico de f***.

Teorema 59. *Los subespacios fundamentales asociados a diferentes valores propios se suman de forma directa*

Caracterización de la diagonalizabilidad:

Caracterización de la diagonalizabilidad

Teorema 60. *Sea $f: V \to V$ una aplicación lineal y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sus distintos valores propios en $\mathbb{F}$. Se tiene que f es diagonalizable si y solamente si*

$$V = S(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(\lambda_r).$$

Corolario 61. *Sea $f: V \to V$ una aplicación lineal $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sus distintos valores propios en $\mathbb{F}$. Se tiene que*

1. *f es diagonalizable si y solamente si V posee una base formada por vectores propios.*
2. *f es diagonalizable si y solamente si* $\dim S(\lambda_1) + \cdots + \dim S(\lambda_r)$.
3. *f es diagonalizable si y solamente si el polinomio característico de f se factoriza como $(x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$ donde m_i es la y para cada i, la multiplicidad geométrica de λ_i coincide con su multiplicidad algebraica m_i.*