LÓGICA
ACTIVIDADES EN GRUPO REDUCIDO
SESIONES 1–3

1 de marzo de 2020

Índice

LÓGICA, ACTIVIDADES EN GRUPO REDUCIDO, SESIÓN 1

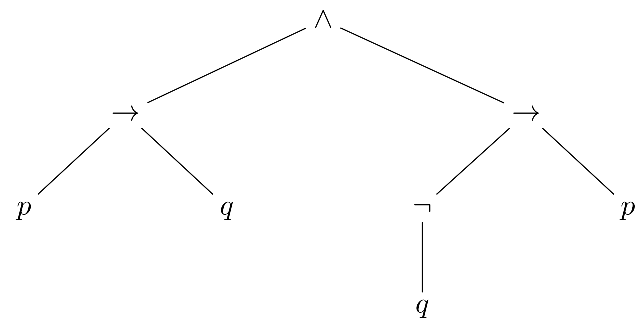
1. Tablas, equivalencias y formas normales

Para iniciar el trabajo con una proposición, debemos asegurarnos de que está bien escrita, una buena ayuda para este trámite es comprobar que podemos dibujar su árbol.

Árboles

Escribir el árbol de una de una proposición P sirve para identificar su conector raíz y verificar su sintaxis, es decir, comprobar que se trata de un fórmula proposicional bien formada de acuerdo con las normas de escritura. Trazar los árboles de las proposiciones es muy simple, basta ver un ejemplo:

1. $P = (p \to q) \wedge (\neg q \to p)$ [conector raíz $\wedge$]



Tablas de verdad

La tabla representa las operaciones que se hacen para calcular el valor (1 ó 0) de una proposición en función de los valores (1 ó 0) que pueden tomar sus variables. Los valores finales de aparecen debajo de su conector raíz. Realizar la tabla de verdad de una proposición es un ejercicio automático a partir de las tablas de verdad de los conectores básicos, las cuales deben memorizarse como hicimos de niños con las tablas de sumar y de multiplicar. Los cinco conectores binarios básicos con sus respectivas tablas son:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Las tablas de verdad se pueden construir de modo inductivo teniendo en cuenta las funciones de verdad de las subproposiciones. Por ejemplo, la tabla de verdad de $P = (p \to q) \wedge (\neg q \to p)$ es la siguiente:

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(\neg q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

En este otro ejemplo construimos la tabla de la proposición $(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \wedge q)$.

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\to$	$(\neg p \wedge q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0

Equivalencias. Formas normales

Dos proposiciones son equivalentes si sus tablas respectivas dan los mismos valores de verdad en todos los casos (tiene distinta expresión pero el mismo significado).

Recordatorio: A partir de la tabla de una proposición se obtienen proposiciones equivalentes de una forma muy especial que se llaman *formas normales*. Un ejemplo brevísimo es $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Otro ejemplo:

$$P = (p \leftrightarrow q) \to (\neg p \wedge q) \equiv \begin{cases} (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \end{cases}$$

La primera es la forma normal *conjuntiva*, en ella cada paréntesis representa un 0 en la tabla de P. La segunda es la forma normal *disyuntiva*, en ella cada paréntesis representa un 1 en la tabla de P.

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\to$	$(\neg p \wedge q)$	Filas 0	Filas1
1	1	1	0	0	$\neg p \vee \neg q$	
1	0	0	1	0		$p \wedge \neg q$
0	1	0	1	1		$\neg p \wedge q$
0	0	1	0	0	$p \vee q$	

Tres observaciones importantes:

(i) Todos los paréntesis en las formas normales contienen a todas las variable involucradas, negadas o no.

(ii) Cada una de las formas normales ofrece toda la información de la tabla, son como unas *tablas algebraicas* de la proposición inicial.

(iiii) Es interesante notar que $P \equiv P \vee (r \wedge \neg r) \equiv (P \vee r) \wedge (P \vee \neg r)$ y también que $P \equiv P \wedge (r \vee \neg r) \equiv (P \wedge r) \vee (P \wedge \neg r)$. Estas equivalencias permiten cambiar las formas normales de un alfabeto con n átomos $\{p_1, \cdots, p_n\}$ a un alfabeto con $n+1$ átomos $\{p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}\}$. Basta duplicar "paréntesis" con equivalencias del siguiente tipo:

$(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (p_1 \vee \cdots \vee p_n \vee p_{n+1}) \wedge (p_1 \vee \cdots \vee p_n \vee \neg p_{n+1})$
$(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge p_{n+1}) \vee (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg p_{n+1})$

Se puede pasar de una forma clausal a una co-clausal, y viceversa, mediante equivalencias distributivas, conmutativas y de simplificación. En el ejemplo anterior es así:

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

Además para formas normales también puede hacerse argumentando con ceros y unos. En el caso anterior, una vez que con la forma normal conjuntiva conocemos los dos pares que dan a P el valor 0, que son las $(0,0)$ y $(1,1)$, cualquiera de los otros dos pares posibles darán 1 y a cada una de ellas corresponde un paréntesis de la forma normal disyuntiva: a $(1,0)$ corresponde $p \wedge \neg q$ y a $(0,1)$ corresponde $\neg p \wedge \neg q$.

Recordamos a continuación la la lista de equivalencias básicas, a partir de la cual se pueden obtener otras equivalencias:. Sean $C, T \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ de manera que C es una contradicicón y T es una tautología. Entonces se verifican las siguientes equivalencias:

(i) (idempotentes) $P \wedge P \equiv P \equiv P \vee P$.
(ii) (conmutativas) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P, P \vee Q \equiv Q \vee P$.
(iii) (asociativas) $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$.
(iv) (absorción) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P \equiv P \vee (P \wedge Q)$.
(v) (de la contradicción) $P \wedge C \equiv C, P \vee C \equiv P$.
(vi) (de la tautologogía) $P \wedge T \equiv P, P \vee T \equiv T$.
(vii) (distributiva $\wedge$) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
(viii) (distributiva $\vee$) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
(ix) (de la negación) $P \wedge \neg P \equiv C, P \vee \neg P \equiv T$.

ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 *Escribir el árbol y la tabla de las proposiciónes siguientes. Obtener a partir de ella sus dos formas normales y pasar de una a otra por equivalencias.*

1. $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$
2. $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
3. $\neg[(p \rightarrow r) \wedge q)]$
4. $[(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow r)] \rightarrow [\neg[(p \rightarrow r) \wedge q)]]$

Ejercicio 2 *Considerar las proposiciones* $P = p \wedge \neg q$, $Q = \neg p \wedge q$ *y el alfabeto* $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$

1. Dar la forma normal conjuntiva de $P \vee Q$ respecto a $\mathcal{A}$.
2. Dar la forma normal disyuntiva de $P \vee Q$ respecto a $\mathcal{A}$.
3. Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga dos modelos, Y tenga dos modelos, $X \wedge (P \vee Q)$, $Y \wedge (P \vee Q)$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P \vee Q$ sea una taulotología.

Ejercicio 3 *Considerar la proposición* $P = (p \oplus q) \leftrightarrow r$, *y el alfabeto* $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$.

1. Dar la forma normal conjuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.
2. Dar la forma normal disyuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.
3. Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga dos modelos, Y tenga dos modelos, $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología.

Una solución al ejercicio 1:

1) No se incluye el árbol sintáctivo. La tabla es la siguiente:

p	q	r	$((p \wedge q)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg r))$	$\rightarrow$	$(q \leftrightarrow r)$	Filas0	Filas1
1	1	1	1	1	0	1	1		$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	1	1	0	0	0	$\neg p \vee \neg q \vee r$	
1	0	1	0	0	0	1	0		$p \wedge \neg q \wedge r$
1	0	0	0	0	0	1	1		$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	1	1	0	0	0	1	1		$\neg p \wedge q \wedge r$
0	1	0	0	1	1	0	0	$p \vee \neg q \vee \neg r$	
0	0	1	0	0	0	1	0		$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	0	0	0	1	1	1	1		$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

También se puede aplicar el programa prolog lp.pl

```
| ?- consult(~/prolog/lp.pl').
/Users/luhernan/prolog/lp.pl compiled,
254 lines read - 17512 bytes written, 20 ms

(4 ms) yes
| ?- modelos_formula(no(((p y q) o (no p y no r)) im (q sii r)), L).

L = [[(p,0),(q,1),(r,0)],[(p,1),(q,1),(r,0)]]

yes
| ?- modelos_formula(((p y q) o (no p y no r) im (q sii r)), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,0),(r,1)],[(p,0),(q,1),(r,1)],
[(p,1),(q,0),(r,0)],[(p,1),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes
```

Encadenando equivalencias se tiene:
$\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))) \equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee r))$
$(q \leftrightarrow r) \equiv (\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$
Por lo tanto
$((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)) \vee ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
Ahora para pasar a la forma normal disyuntiva. Basta con aplicar distributivas y otras equivalencias
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q) \vee (\neg q \wedge r) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge \neg q) \vee r \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

En los dos apartados restantes se da la solución con modelos y contra-modelos, para que el alumno compruebe que la tabla y formas normales que ha calculado son correctas.

2) Los modelos y contra-modelos se pueden encontrar con el programa lp.pl de GNU prolog que se realizará en la práctica informática número 3.

```
| ?- modelos_formula((q im p) y ( no p im r), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,0),(r,0)],[(p,1),(q,0),(r,1)],
[(p,1),(q,1),(r,0)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes

| ?- modelos_formula(no((q im p) y ( no p im r)), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,1),(r,0)],[(p,0),(q,1),(r,1)]]

(1 ms) yes

yes
```

p	q	r	$(q \to p)$	$\wedge$	$(\neg p \to r)$	Filas0	Filas1
1	1	1	1	1	1		$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	1	1	1		$p \wedge q \wedge \neg r$
1	0	1	1	1	1		$p \wedge \neg q \wedge r$
1	0	0	1	1	1		$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	1	1	0	0	1	$p \vee \neg q \vee \neg r$	
0	1	0	0	0	0	$p \vee \neg q \vee r$	
0	0	1	1	1	1		$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	0	0	1	0	0	$p \vee q \vee r$	

3) Análogamente al caso anterior se obtiene:

```
?-modelos_formula(no ((p im r) y q), L)
L = [[(p, 0), (q, 0), (r, 0)], [(p, 0), (q, 0), (r, 1)],
(p, 1), (q, 0), (r, 0)], [(p, 1), (q, 0), (r, 1)],
[(p, 1), (q, 1), (r, 0)]]
```

La tabla es la siguiente:

p	q	r	$\neg$	$((p \to r)$	$\wedge$	$q)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0

4) Como en el caso anterior se tiene:

```
| ?- modelos_formula(((q im p) y (no p im r)) im (no ((p im r) y q)), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,0),(r,1)],[(p,0),(q,1),(r,0)],
[(p,0),(q,1),(r,1)],[(p,1),(q,0),(r,0)],[(p,1),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,1),(r,0)]]

(1 ms) yes
| ?- modelos_formula(no((q im p) y (no p im r)) im (no ((p im r) y q))), L).

L = [[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes
```

La tabla es la siguiente:

p	q	r	$((q \to p)$	$\wedge$	$(\neg p \to r))$	$\to$	$\neg$	$((\ p \to r)$	$\wedge$	$q)$
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	

Una solución al ejercicio 2:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto los contramodelos de $P \vee Q$ son $\{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los modelos de $P \vee Q$ son $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ que determinan la forma disyuntiva normal

$P \vee Q \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de $P \vee Q$ para $X \wedge (P \vee Q)$, $Y \wedge (P \vee Q)$, sean contradiciones y $X \vee Y \vee P \vee Q$ sea una taulotología; es decir que $X \vee Y \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Para que X, Y tengan dos modelos y $X \wedge Y$ sean una contradicción tenemos "esencialmente" tres soluciones

$X_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$, $\quad Y_1 = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o

$X_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$, $\quad Y_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o bien

$X_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, $\quad Y_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

Una solución al ejercicio 3:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv ((p \oplus q) \to r) \wedge (r \to (p \oplus q))$

$(p \oplus q) \to r \equiv \neg(p \oplus q) \vee r \equiv (p \leftrightarrow q) \vee r \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee r \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$r \to (p \oplus q) \equiv \neg r \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg r \vee ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Entonces

$(p \oplus q) \leftrightarrow r \equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto los contramodelos de P son $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los modelos de P son $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\}$ que determinan la forma disyuntiva normal

$P \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de P para $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología; es decir que $X \vee Y \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Para que X, Y tengan dos modelos y $X \wedge Y$ sean una contradicción tengo esencialmente tres soluciones

$X_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$, $\quad Y_1 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o

$X_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $\quad Y_2 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

o bien

$X_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$, $\quad Y_3 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

TAREA PRIMERA SESIÓN

Ejercicio 1 *Escribir el árbol y la tabla de las proposiciónes siguientes. Obtener a partir de ella sus dos formas normales y pasar de una a otra por equivalencias.*

1. $(q \leftrightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$

2. $(q \leftrightarrow r) \vee (\neg p \rightarrow r)$

3. $\neg[\neg(p \rightarrow r) \wedge q)]$

4. $[\neg[(p \rightarrow r) \wedge q]] \rightarrow [(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow r)]$

Ejercicio 2 *Considerar las proposiciones* $P = p \vee \neg q$, $Q = \neg p \vee q$ *y el alfabeto* $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$

1. Dar la forma normal conjuntiva de $P \wedge Q$ respecto a $\mathcal{A}$.

2. Dar la forma normal disyuntiva de $P \wedge Q$ respecto a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 3 *Considerar la proposición* $P = p \oplus (q \leftrightarrow r)$, *y el alfabeto* $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$.

1. Dar la forma normal conjuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

2. Dar la forma normal disyuntiva de P respecto a $\mathcal{A}$.

3. Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga dos modelos, Y tenga dos modelos, $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología.

Una solución al ejercicio 1 de la tarea de la primera sesión:

1) No se incluye el árbol sintáctivo. La tabla es la siguiente:
$(q \leftrightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$

p	q	r	$(q \leftrightarrow r)$	$\rightarrow$	$((p \wedge q)$	$\vee$	$(\neg p \wedge \neg r))$	Filas0	Filas1
1	1	1	1	1	1	1	0		$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	0	1	1	1	0		$p \wedge q \wedge \neg r$
1	0	1	0	1	0	0	0		$p \wedge \neg q \wedge r$
1	0	0	1	0	0	0	0	$\neg p \vee q \vee r$	
0	1	1	1	0	0	0	0	$p \vee \neg q \vee \neg r$	
0	1	0	0	1	0	1	1		$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
0	0	1	0	1	0	0	0		$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	0	0	1	1	0	1	1		$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

También se puede aplicar el programa prolog lp.pl

```
| ?- consult('~/prolog/lp.pl').
/Users/luhernan/prolog/lp.pl compiled,
254 lines read - 17512 bytes written, 20 ms

(4 ms) yes
| ?- modelos_formula(no((q sii r)im ((p y q) o (no p y no q))),L).

L = [[(p,0),(q,1),(r,1)],[(p,1),(q,0),(r,0)]]

(1 ms) yes


| ?- modelos_formula(((q sii r)im ((p y q) o (no p y no q))),L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,0),(r,1)],[(p,0),(q,1),(r,0)],
[(p,1),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,1),(r,0)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]
```

Encadenando equivalencias se tiene:
$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))) \equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)$
$(q \leftrightarrow r) \equiv (\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)$
$\neg(q \leftrightarrow r) \equiv (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \equiv (q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
Por lo tanto
$(q \leftrightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \equiv ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
Ahora buscamos la forma normal disyuntiva.

$(q \leftrightarrow r) \to ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \equiv ((q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

En los apartados restantes se da la solución con modelos y contra-modelos, para que el alumno compruebe que la tabla y formas normales que ha calculado son correctas.

2) Los modelos y contra-modelos se pueden encontrar con el programa lp.pl de GNU prolog que se realizará en la práctica informática número 3.

```
| ?- modelos_formula(((q sii r) o   (no  p im r)),L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,0),(r,1)],
[(p,0),(q,1),(r,1)],[(p,1),(q,0),(r,0)],
[(p,1),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,1),(r,0)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes
| ?- modelos_formula(no((q sii r) o   (no  p im r)),L).

L = [[(p,0),(q,1),(r,0)]]

yes
```

La forma normal conjuntiva es fácil de encontrar:

$(q \leftrightarrow r) \vee (\neg p \to r) \equiv (q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r) \vee p \vee r \equiv p \vee \neg q \vee r$

La forma normal disyuntiva se obtiene a partir de los siete casos restantes.

3) Análogamente al caso anterior se obtiene:

```
| ?- modelos_formula(no (no(p im r) y q), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)],[(p,0),(q,0),(r,1)],
[(p,0),(q,1),(r,0)],[(p,0),(q,1),(r,1)],
[(p,1),(q,0),(r,0)],[(p,1),(q,0),(r,1)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes
| ?- modelos_formula((no(p im r) y q), L).

L = [[(p,1),(q,1),(r,0)]]

(1 ms) yes
```

La forma normal conjuntiva se obtiene facilmente por equivalencias:

$\neg[\neg(p \to r) \wedge q)] \equiv \neg[(p \wedge \neg r) \wedge q)] \equiv \neg p \vee r \vee \neg q$

4) Como en el caso anterior se tiene:

```
| ?- modelos_formula(no ((p im r) y q) im ((q im p) y (no p im r)), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,1)],[(p,0),(q,1),(r,0)],[(p,0),(q,1),(r,1)],
[(p,1),(q,0),(r,0)],[(p,1),(q,0),(r,1)],
[(p,1),(q,1),(r,0)],[(p,1),(q,1),(r,1)]]

yes
| ?- modelos_formula(no(no ((p im r) y q) im ((q im p) y (no p im r))), L).

L = [[(p,0),(q,0),(r,0)]]

yes
```

La forma normal conjuntiva se calcula facilmente:

$[\neg[(p \to r) \wedge q)]] \to [(q \to p) \wedge (\neg p \to r)] \equiv [(p \to r) \wedge q)] \vee [(\neg q \vee p) \wedge (p \vee r)] \equiv [(\neg p \vee r) \wedge q)] \vee [(\neg q \vee p) \wedge (p \vee r)] \equiv p \vee q \vee r$

En la forma normal disyutiva intervienen las siete co-cláusulas restantes.

Una solución al ejercicio 2 de la tarea de la primera sesión:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Por lo tanto los modelos de $P \wedge Q$ son $\{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los contramodelos de $P \wedge Q$ son $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ que determinan la forma conjuntiva normal

$P \wedge Q \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

Una solución al ejercicio 3 de la tarea de la primera sesión:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$p \oplus (q \leftrightarrow r) \equiv (p \wedge \neg (q \leftrightarrow r)) \vee (\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)) \equiv (p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\neg p \vee \neg (q \leftrightarrow r))$

Notemos que

$q \leftrightarrow r \equiv (q \to r) \wedge (r \to q) \equiv (\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

$\neg (q \leftrightarrow r) \equiv (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \equiv (q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto,

$(p \vee (q \leftrightarrow r)) \wedge (\neg p \vee \neg (q \leftrightarrow r)) \equiv (p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r))) \wedge (\neg p \vee ((q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r))) \equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r))$

Para la forma normal disyuntiva

$p \oplus (q \leftrightarrow r) \equiv (p \wedge \neg (q \leftrightarrow r)) \vee (\neg p \wedge (q \leftrightarrow r)) \equiv (p \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))) \vee ((\neg p \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r))) \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

En consecuencia los modelos de P son $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0)\}$ y los contramodelos $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de P para que $X \wedge P$, $Y \wedge P$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P$ sea una taulotología, se tiene que verificar que

$X \vee Y \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Para que X, Y tengan dos modelos y $X \wedge Y$ sean una contradicción tenemos esencialmente tres soluciones

$X_1 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r), \quad Y_1 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

o

$X_2 = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r), \quad Y_2 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

o

$X_3 = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r), \quad Y_3 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$