Primer control acerca de cálculo matricial y vectorial
4-noviembre-2019

Nombre:

1. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

   a) Si al añadirle a una matriz una nueva fila se obtiene una matriz con filas linealmente dependientes entonces la fila añadida es combinación lineal de las que había antes. *(0.5 ptos.)*

   b) La unión de dos clausuras lineales es una clausura lineal. *(0.5 ptos.)*

   c) Si a un conjunto libre de r elementos de una clausura lineal G de dimensión d le añadimos $d-r$ elementos obtenemos una base de G. *(0.5 ptos.)*

   d) $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$. *(0.5 ptos.)*

2. Encuentra las ecuaciones implícitas del conjunto

$$(1,0,0,0) + \text{Gen}\{(1,1,0,0),(1,0,-1,0))\}.$$

(1.5 ptos.)

3. ¿Para qué valores de λ puedes completar $\{(0,1,\lambda,0)\}$ hasta una base de la clausura lineal $\text{Gen}\{(1,1,0,0),(1,0,-1,0),(2,1,-1,0)\}$? *(1.5 ptos.)*

4. De entre el conjunto generador que se propone, extrae una base para la clausura lineal

$$\text{Gen}\{(-2,-1,1),(0,2,2),(-2,-3,-1),(-1,-3,-2),(-3,-3,0),(1,1,1)\}$$

(1.5 ptos.)

5. Calcula los λ para los cuales las columnas de la matriz resultante de hacer el producto

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda+3 \\ \lambda+4 & \lambda \end{pmatrix}$$

son una base de $\mathbb{R}^2$. *(1.5 ptos.)*

6. Calcula la inversa de la matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} 2-n & 4-n & 4-n & \cdots & 4-n \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

(2 ptos.)

1. *a*) Falso. Al añadirle la fila $(1,1)$ a la matriz $(0,0)$ tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene filas linealmente dependientes $\mathbf{1}(0,0)+\mathbf{0}(1,1)=(0,0)$ pero $(1,1)$ no es combinación lineal de $(0,0)$. En teoría se vio que si las filas de la matriz inicial eran <u>libres</u> entonces sí que esto sería cierto.

   b) Falso. Si $G := \operatorname{Gen}(0,1) \cup \operatorname{Gen}(0,1)$ fuese clausura lineal, como $(0,1),(1,0) \in G$, también así $(1,1)$ debería pertenecer a G, pero no pertenece. Por tanto G no es clausura.

   c) Falso. Si a $\{(1,0)\}$ que es libre y está contenido dentro de la clausura $\operatorname{Gen}\{(1,0),(0,1)\}$, que tiene dimensión 2, le añadimos $(0,0)$ no obtenemos una base, pues $\{(1,0),(0,0)\}$ es ligado.

   d) Cierto. Existe P invertible (producto de matrices elementales) tal que PA es escalonada con $r := \operatorname{rango}(A)$ filas no nulas y sus últimas filas nulas. Así, $P(AB) = (PA)B$ tiene a lo sumo r filas no nulas. Por tanto el $\operatorname{rango}(AB) \leq r$.

2. Escalonando,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & w \\ 0 & 0 & z \end{array}\right) \underset{F_{21}(-1)}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 0 & -1 & y-x+1 \\ 0 & -1 & w \\ 0 & 0 & z \end{array}\right) \underset{F_{32}(-1)}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 0 & -1 & y-x+1 \\ 0 & 0 & \mathbf{w-y+x-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{z} \end{array}\right)$$

las ecuaciones son $x-y+w-1=0$ y $z=0$.

3. Cualquier subconjunto libre dentro de una clausura lineal puede completarse hasta una base. Claramente $\{(0,1,\lambda,0)\}$ es libre, por lo que si está dentro de la clausura puede completarse a una base. Conviene observar que el tercer generador de la clausura es suma de los dos anteriores, por lo que es superfluo y no lo usaremos. Para ver si $(0,1,\lambda,0)$ pertenece a la clausura comprobamos que sea compatible el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{21}(-1)}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{32}(-1)}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo que la solución es $\lambda = 1$.

4. Para hacer este ejercicio ponemos los generadores por columnas y escalonamos

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{13}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{21}(1),\,F_{31}(2)}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_{23}(-1)}{\simeq} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

por lo que la base es $\{(-2,-1,1),(0,2,2),(1,1,1)\}$.

5. Para que las columnas sean una base basta que el su determinante sea $\neq 0$. Puesto que el determinante del producto es el producto de los determinantes, esto ocurre si y solamente si $\lambda \neq 1, 2, -3, -4$.

6. Sumando a la primera fila las demás en el primer paso y luego restando esta a todas las demás

$$
\left(\begin{array}{rrrcr|ccccc}
2-n & 4-n & 4-n & \cdots & 4-n & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\simeq \left(\begin{array}{rrrcr|ccccc}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right)
\simeq \left(\begin{array}{rrrcr|rrrcr}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & -1 & \ldots & -1 \\
0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 0 & \ldots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 & -1 & -1 & \ldots & 0
\end{array}\right)
$$

Dividiendo por -2 todas las filas excepto la primera y restándoselas a la primera

$$
\simeq \left(\begin{array}{ccccc|rrrcr}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & 1/2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & \ldots & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\simeq \left(\begin{array}{ccccc|rrrcr}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(n-1)/2 & 1-(n-2)/2 & 1-(n-1)/2 & \ldots & 1-(n-2)/2 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & 1/2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & \ldots & 0
\end{array}\right)
$$

por lo que la inversa es

$$
\left(\begin{array}{rrrcr}
(3-n)/2 & (4-n)/2 & (4-n)/2 & \ldots & (4-n)/2 \\
1/2 & 0 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\
1/2 & 1/2 & 0 & \ldots & 1/2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1/2 & 1/2 & 1/2 & \ldots & 0
\end{array}\right)
$$