SOLUCIONES o PISTAS a los ejercicios de la HOJA 6

3. a) $3\ (f(x) \sim \frac{1}{6}\, x^3)$ b) $5/2\ (\sim \frac{1}{12}\, x^{5/2})$

c) $1\ (\sim x)$ d) $2\ (\sim \frac{1}{2}\, x^2)$

e) $2\ (\sim \frac{1}{2}\, x^2)$ f) $3\ (\sim \frac{1}{2}\, x^3)$

g) $3\ (\sim \frac{1}{6}\, x^3)$ h) $3\ (\frac{1}{3}\, x^3)$

4. en cada expresión u es una función tal que $u(x) \to 0$ cuando $x \to 0$:

a) $$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + x^{2n+1}\, u(x)$$

b) $$-\frac{1}{2}\log(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2k} + x^n\, u(x)$$

c) $$1 + 2\,e^x + e^{2x} = 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2+2^k}{k!}\, x^k + x^n\, u(x)$$

d) $$x\, e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k!} + x^n\, u(x)$$

e) $$\log(1+x) - \log(1-x) = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}) + x^{2n+2}\, u(x)$$

f) $$\log(1+x) + x\log(1+x) = x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,(k-1)}\, x^k + x^n\, u(x)$$

5. a) -1

b) $-\dfrac{128}{27}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{\log\big(1 + (x-1)\big) - (x-1)}{1 - \sqrt{1-(x-1)^2}} \;=\; -1$$

e) $1/2$ si $a=3$, 0 si $a<3$, $+\infty$ si $a>3$

f) $$\lim_{x\to 4} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}-1\right)}{(x-4)^a} = \begin{cases} 1/4 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{si } a<1 \\ +\infty & \text{si } a>1 \end{cases}$$

6.

a) $$f(x)=\frac{1}{1-(x-1)}=\sum_{k=0}^{n}(x-1)^k+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ ,\ c \text{ entre } 1 \text{ y } x$$

[*usamos el desarrollo en* $t=0$ *de* $\frac{1}{1-t}$ *y sustituimos* $t=x-1$]

b) $$f(x)=\log 2+\log\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,2^k}(x-2)^k+\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ ,$$

c entre 2 y x

[*desarrollamos* $\log(1+t)$ *en* 0, *con* $t=(x-2)/2$]

c) $$f(x)=e\,e^{x-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e}{k!}(x-1)^k+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^c,\ c \text{ entre } 1 \text{ y } x$$

[*desarrollamos* e^t *en* 0, *con* $t=x-1$]

d) $$f(x)=2\sqrt{1+\frac{x-3}{4}}=\sum_{k=0}^{n}2\binom{1/2}{k}\frac{(x-3)^k}{4^k}+\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ ,$$

c entre 3 y x

[*desarrollamos* $(1+t)^{1/2}$ *en* 0, *con* $t=\frac{x-3}{4}$]

7. el primer polinomio es $(x-1)^4+5\,(x-1)^3+6\,(x-1)^2+5\,(x-1)-1$

[*el coeficiente de grado* k *es* $\frac{p^{(k)}(1)}{k!}$]

el segundo es $(x-3)^4+(x-3)^3-2\,(x-3)^2+9\,(x-3)+5$ [*análogo*]

8. el polinomio es el de orden 6, y el error es menor o igual que $\frac{|x|^7}{7!}$

9. $1-9\,x^2+27\,x^4$ es el polinomio de Taylor en 0 de orden 5 de $\cos^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{2}$,

y la derivada de orden 6 de dicha función vale $-3\cdot 6^5\cdot\cos 6x$

10. si P_n es el polinomio de Taylor en 0 de orden n para e^x, hay que ver que

$$|e^{1/2}-P_n(1/2)|\le \frac{1}{2^n\,(n+1)!}\,,$$

y la aproximación válida más sencilla es

$$P_7(1/2)\simeq 1,64872117$$

11. si P_n es el polinomio de Taylor en 0 de orden n para $f(x)=\log(1+x)$, como

$$f^{(n+1)}(c)=\frac{(-1)^n\,n!}{(1+c)^{n+1}}$$

se ve que

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,,$$

de donde para $x=\frac{3}{100}$ la aproximación válida más sencilla es

$$P_3\left(\frac{3}{100}\right)=0,029559$$

12. $\pi=16\ \mathrm{arc\,tg}(1/5)-4\ \mathrm{arc\,tg}(1/239)$. Aproximamos

$$\pi\simeq 16\,p_n(1/5)-4\,p_n(1/239)=q_n\in\mathbb{Q}\,,$$

donde p_n es el polinomio de Taylor de orden n de $\mathrm{arc\,tg}$ centrado en 0. Se obtienen:

$$q_1=\frac{3804}{1195}\simeq 3,18\,,\qquad q_3\simeq 3,1405\,,\qquad q_5\simeq 3,14162\,,...$$

13. 4a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

4b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k}$

4c) $\displaystyle 4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+2^k}{k!}\, x^k$

4d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$

4e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\, x^{2k+1}$

4f) $\displaystyle x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,(k-1)}\, x^k$

6a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

6b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,2^k}\,(x-2)^k$

6c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}\,(x-1)^k$

6d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2\binom{1/2}{k}\frac{(x-3)^k}{4^k}$

14. [*en el intervalo no estudiamos la posible convergencia en los extremos*]

a) $\displaystyle -3 - \sum_{k=1}^{\infty} (k+5)\, x^k\,, \quad x \in (-1,1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^{k+1}}\, x^{2k+1}\,, \quad x \in (-3,3)$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \binom{-1/2}{k} x^{2k+1}, \quad x \in (-1,1)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} \frac{2}{8^k} x^k, \quad x \in (-8,8)$

e) $\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right) x^k = 1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(k-2)!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^{3k}, \quad x \in (-1,1)$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k}}{a^{2k+2}} x^{2k+1}, \quad x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$

h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{b^{2k+1}}{a^{2k+1}} \cdot x^{2k+1}, \quad x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$

i) $\displaystyle\frac{1-\cos 4x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, 4^{2k}}{2\cdot(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$

15. a) $\displaystyle -\cos\frac{3\,(x-\pi)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \cdot \frac{3^{2k}}{2^{2k}} \cdot (x-\pi)^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sqrt{4+(x-3)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\binom{1/2}{k} \frac{(x-3)^k}{4^k}, \quad x \in (-1,7)$

c) $\displaystyle\frac{1}{a+b+b\,(x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, b^k}{(a+b)^{k+1}} (x-1)^k, \quad x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}+2\right)$

16. a) converge si $x \in (-1,1)$, y la suma es $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$

b) converge si $x \in (-1,1)$, y la suma es $\dfrac{6\,x^2}{(1-x)^4}$

c) converge para todo $x \in \mathbb{R}$, y la suma vale $e^x\,(x^3+3x^2+1)$

d) converge para todo $x \in \mathbb{R}$, y la suma es $1+(x^2+x-1)\,e^x$

17. a) $1-\dfrac{1}{4x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{(x^4)^k}{k}$

converge si $x\in[-1,1]$, y la suma es $1-\dfrac{\log(1+x^4)}{4x}$ $\quad$ (1 si $x=0$)

b) converge si $x\in[-1,1]$, y la suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+1}=1+\frac{(1-x)\log(1-x)}{x} \qquad (0 \text{ si } x=0,\ 1 \text{ si } x=1)$$

18. el radio de convergencia es 1 $\big($y el dominio es $(-1,1)\big)$

[*para comprobar la suma basta considerar las derivadas y el valor en* $x=0$]