Apéndice C

Pruebas intermedias y exámenes finales

C.1 Exámenes finales curso 2011-12

Final Junio-12: Cálculo Matricial y Vectorial[1]
Fecha: 16 de junio de 2012

1. Define espacio vectorial euclídeo. Enuncia el Teorema de diagonalización que aparece en los apuntes como criterio y que da una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable (no pido el procedimiento de diagonalización). **(1,5 puntos)**

2. Completa, razona ó calcula según se pida:

   a) V ó F: Si $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ es una aplicación lineal, la dimensión de la imagen y del núcleo de f pueden ser iguales. **(1 punto)**

   b) Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, para los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ distintos de $(\dots)$, la matriz P_α define el cambio de base $\mathcal{B}' \xleftarrow{\mathbf{P}_\alpha} \mathcal{B}$. Los vectores $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ se pueden expresar usando los de $\mathcal{B}$ mediante las combinaciones lineales $v_1 = (\dots)$, $v_2 = (\dots)$ y $v_3 = (\dots)$. **(1 punto)**

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Los ejercicicios deben estar adecuadamente explicados y justificados; no justificar ó hacerlo de forma inadecuada podrá reducir la valoración de los mismos. Está prohibido el uso de calculadoras y llevar cualquier dispositivo electrónico; el incumplimiento de esta norma supondrá la explusión del examen con calificación 0.

b) V ó F: Si u, v, w son tres vectores linealmente independientes, los vectores $u - v, v - w, w - u$ también lo son. **(1 punto)**

3. Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz A es diagonalizable. Cuando lo sea, encuentra D diagonal y P regular tal que $D = PAP^{-1}$. **(2,5 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & b & 2 \end{pmatrix}$$

4. Para el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por la expresión general:

$$f(x, y, z) = ((p - 2)x + 2y - z, 2x + py + 2z, 2px + 2(p - 1)y + (p + 1)z)$$

a) Calcula los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los que f no es inyectiva.

b) Si $f(4, 0, -4) = 0$, calcula una base $\mathcal{B}$ del conjunto imagen y las ecuaciones implícitas de este subespacio.

c) Amplía la base $\mathcal{B}$ del conjunto imagen que has calculado hasta una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcula la matriz coordenda de f tomando la base canónica en el espacio de partida y en el de llegada la base $\mathcal{C}$ que has ampliado. **(3 puntos)**

Final-A: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 12 de enero de 2012

1. Define vector propio (VEP) y valor propio (VAP) de A para una matriz cuadrada A (pido la definición básica). Si $(V, <>)$ es un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, construye una base ortonormada usando el método de Gram-Schmidt sobre la base $\mathcal{B}$. **(1.5 puntos)**

2. Completa, razona ó calcula según se pida:

   a) Completa la cadena de afirmaciones:

   > El subespacio $\mathbb{R}_n(x)$ de polinomios n-truncados tiene dimensión $(\dots)^{(1)}$ y el subespacio $M_p[x]$ de matrices cuadradas $p \times p$ tiene dimensión $(\dots)^{(2)}$. Además, si existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{R}_n[x] \to M_p(\mathbb{R})$, la dimensión del núcleo de f es exactamente $(\dots)^{(3)}$ y la de el conjunto imagen es exactamente $(\dots)^{(4)}$. Estas dimensiones nos permiten, usando el Teorema de $(\dots)$, relacionar n y p mediante la ecuación $(\dots)^{(5)}$. **(1 punto)**

   b) Verdadero ó falso: Si V es un espacio vectorial de dimensión n, cualquier subconjunto que tenga n vectores y que no sea sistema generador es linealmente dependiente. **(1 punto)**

   c) Comprueba que el conjunto de polinomios 2-truncados $T = \{p(x) = ax^2 + bx + c : p'(2) = p(1)\}$ es un subespacio vectorial y calcula una base. **(1 punto)**

3. Comprueba si la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula D diagonal y P de modo que se cumpla la identidad $D = PAP^{-1}$. **(2.5 puntos)**

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por la expresión general:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y - z \\ z - y & x - z \end{pmatrix}.$$

   Calcula las dimensiones y bases de los subespacios núcleo e imagen de f. ¿Es f inyectiva? ¿es suprayectiva?. Calcula la matriz coordenada de f cuando tomamos en $\mathbb{R}^3$la base $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ y en $M_2(\mathbb{R})$ la base $\mathcal{C} = \{e_{11} + e_{12} + e_{22}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. **(3 puntos)**

Puedes optar por realizar los ejercicios 1-2-3-5. Si es así, debes indicarlo, teniendo en cuenta que el valor total del examen será de 9 puntos en vez de 10

Ejercicio 5:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por la expresión general:

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - y, x - z)$$

Calcula las dimensiones y bases de los subespacios núcleo e imagen de f. ¿Es f inyectiva? ¿es suprayectiva?. Calcula la matriz coordenada de f cuando tomamos en $\mathbb{R}^3$la base $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ y en $M_2(\mathbb{R})$ la base $\mathcal{C} = \{e_1 + e_2 + e_4, e_2, e_3, e_4\}$, donde los vectores e_i son los canónicos de $\mathbb{R}^4$. **(2 puntos)**

Final-B: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 12 de enero de 2012

1. Para una matriz A de orden $n \times n$: Enuncia cinco caracterizaciones equivalentes a que A sea invertible. Define VEP para matriz cuadrada A y enuncia el teorema etiquetado como Teorema de diagonalización-método. **(1.5 puntos)**

2. Completa, razona ó calcula según se pida:

   a) Completa la cadena de afirmaciones:

      El subespacio $M_n(\mathbb{R})$de matrices cuadradas $n \times n$ tiene dimensión $(\dots)^{(1)}$ y el de polinomios $R_p[x]$ de polinomios p-truncados tiene dimensión $(\dots)^{(2)}$. Además, si existe una aplicación biyectiva $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_p[x]$, la dimensión del núcleo de f es$(\dots)$y la de el conjunto imagen es $(\dots)^{(3)}$. Estas dimensiones nos permiten relacionar n y p mediante la ecuación $(\dots)^{(4)}$. **(1 punto)**

   b) Calcula la dimensión del subespacio $S = Gen\{(\alpha - 1, 1, \alpha + 1), (\alpha, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, dependiendo de los valores del parámetro α. **(1 punto)**

   c) En $\mathbb{R}^3$ tenemos la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ y tres vectores v_1, v_2, v_3 cuyas coordenadas en la base canónica natural $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y en la base $\mathcal{B}$ vienen dadas en la tabla:

v	$[v]_{\mathcal{B}_c}$	$[v]_{\mathcal{B}}$
v_1	$[v_1]_{\mathcal{B}_c} = [3, 3, -1]$	$[v_1]_{\mathcal{B}} = [1, 1, 2]$
v_2	$[v_2]_{\mathcal{B}_c} = [2, 1, 1]$	$[v_2]_{\mathcal{B}} = [2, 0, 1]$
v_3	$[v_3]_{\mathcal{B}_c} = [-1, -1, 1]$	$[v_3]_{\mathcal{B}} = [1, -1, 0]$

   Calcula las coordenadas del vector u_1 en $\mathcal{B}_c$. **(1 punto)**

3. Comprueba si la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$es diagonalizable. En caso afirmativo, calcula D diagonal y P de modo que se cumpla la identidad $PD = BP$. **(2.5 puntos)**

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por la expresión general:
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - y & x - y \\ x - z & z - y \end{pmatrix}.$$
Calcula dimensión y bases de núcleo e imágenes. ¿Es f inyectiva? ¿es suprayectiva?. Calcula la matriz coordenada de f cuando tomamos en $\mathbb{R}^3$la base $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ y en $M_2(\mathbb{R}) = \{e_{11} + e_{12} + e_{22}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. **(3 puntos)**

Puedes optar por realizar los ejercicios 1-2-3-5. Si es así, debes indicarlo, teniendo en cuenta que el valor total del examen será de 9 puntos en vez de 10

Ejercicio 5:
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por la expresión general:

$$f(x, y, z) = (z - y, x - y, x - z, z - y)$$

Calcula las dimensiones y bases de los subespacios núcleo e imagen de f. ¿Es f inyectiva? ¿es suprayectiva?. Calcula la matriz coordenada de f cuando tomamos en $\mathbb{R}^3$la base $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ y en $M_2(\mathbb{R})$ la base $\mathcal{C} = \{e_1 + e_2 + e_4, e_2, e_3, e_4\}$, donde los vectores e_i son los canónicos de $\mathbb{R}^4$. **(2 puntos)**

C.2 Exámenes curso 2012-13

C.2.1 Finales

Final-A-Enero-13: Cálculo Matricial y Vectorial[2]

Fecha: 16 de enero de 2013

---

1. Define espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Define aplicación inyectiva (definición general). Si A de orden $n \times m$ es la matriz coordenada de una aplicación lineal $f : V \to W$, determina las dimensiones de V y W y explica un procedimiento usando la matriz A, que te permita concluir que la aplicación f es inyectiva. **(1,5 puntos)**

2. Completa, razona ó calcula según se pida:

   a) Si $F = Gen\{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (3, 1, -1, -3)\}$, encuentra un subespacio que contenga a F y que sea distinto de $\mathbb{R}^4$ y F. **(1,25 puntos)**

   b) Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de V y $f : V \to V$ es una aplicación lineal tal que $f(u_1) = f(u_2)$ y $f(u_3)$ son linealmente independientes, prueba que el conjunto imagen de f es un subespacio 2-dimensional y calcula una base del núcleo de f. **(1,25 puntos)**

[2]Los ejercicicios deben estar adecuadamente explicados; no justificar ó hacerlo de forma inadecuada podrá reducir la valoración de los mismos. Está prohibido el uso de calculadoras y de cualquier dispositivo electrónico; el incumplimiento de esta norma supondrá la explusión del examen con calificación 0.

3. Estudia, en función de los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ si la matriz A es ó no diagonalizable sobre el cuerpo real. Elige un valor de β tal que A sea diagonalizable y encuentra D diagonal y P regular tal que $D = PAP^{-1}$. **(2,5 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & \beta+1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, definido sobre el espacio de polinomios 3-truncados reales y dado la matriz coordenada A en la base ordenada $\{x^3, x^2, x, 1\}$ (la misma en conjunto inicial y final):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula el núcleo, el conjunto imagen y comprueba que hay una relación de contenido entre ambos.

   b) Prueba que $\mathcal{B} = \{1+x, x^2+x^3, 2x+x^3, 1+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y calcula la matriz coordenada M de f tomando como base inicial $\mathcal{B}$ y como base final la base ordenada $\mathcal{C} = \{1, x^2, x^3, x\}$ (hay que determinar completamente M).

   c) Calcula todas las aplicaciones lineales $g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ de modo que $g \circ f = 0$ (Sugerencia: la condición $g \circ f = 0$ equivale a que el núcleo de g y la imagen de f estén relacionados en la forma ...). **(3,5 puntos)**

Puedes optar por realizar los ejercicios 1-2-3-5. Si es así, debes indicarlo, teniendo en cuenta que el valor total del examen será de 9 puntos en vez de 10.

Ejercicio 5: Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por la expresión general:

$$f(x, y, z, t) = (2x - y - 2z + 2t, y + 2z - 2t, 3x - 2y - 3z + 4t, 2x - y - z + 2t),$$

a) Calcula el núcleo, el conjunto imagen de f y bases para ambos subespacios.

b) Completa la familia $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ hasta una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y calcula la matriz coordenada M de f en la base $\mathcal{B}$ (la misma en conjunto inicial y final; debes calcular M por completo).

c) Define una nueva aplicación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de modo que la imagen de g coincida con el conjunto imagen de f. **(2,5 puntos)**

Final-B-Enero-13: Cálculo Matricial y Vectorial[3]
Fecha: 16 de enero de 2013

1. Define base y dimensión de un espacio vectorial cualquiera V (recuerda que los conceptos usados en la definición deben ser definidos). Describe el procedimiento sistemático para calcular la matriz coordenada P del cambio de bases $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_n\} \xleftarrow{\mathbf{P}} \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. **(1,5 puntos)**

2. Completa, razona ó calcula según se pida:

   a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \neq 0$, prueba que el conjunto de matrices $F = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA = AX\}$ es un subespacio del conjunto de matrices reales 2×2 y calcula una base. **(1,25 puntos)**

   b) Verdadero ó falso: $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_m[x]$ es una aplicacón lineal de polinomos n-truncados en polinomios m-truncados y $n < m$, entonces f no es suprayectiva. **(1,25 puntos)**

3. Estudia, en función de los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ si la matriz A es ó no diagonalizable sobre el cuerpo real. Elige un valor de β tal que A sea diagonalizable y encuentra D diagonal y P regular tal que $D = PAP^{-1}$. **(2,5 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -\beta - 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, definido sobre el espacio de polinomios 3-truncados reales y dado la matriz coordenada A en la base ordenada $\{1, x, x^2, x^3\}$ (la misma en conjunto inicial y final):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula el núcleo, el conjunto imagen y comprueba que hay una relación de contenido entre ambos.

   b) Prueba que $\mathcal{B} = \{1 + x, x^2 + x^3, 2x + x^3, 1 + x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y calcula la matriz coordenada M de f tomando como base inicial $\mathcal{B}$ y como base final la base ordenada $\mathcal{C} = \{1, x^2, x^3, x\}$ (hay que determinar completamente M).

[3] Los ejercicicios deben estar adecuadamente explicados; no justificar ó hacerlo de forma inadecuada podrá reducir la valoración de los mismos. Está prohibido el uso de calculadoras y de cualquier dispositivo electrónico; el incumplimiento de esta norma supondrá la explusión del examen con calificación 0.

c) Calcula todas las aplicaciones lineales $g : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ de modo que $g \circ f = 0$ (Sugerencia: la condición $g \circ f = 0$ equivale a que el núcleo de g y la imagen de f estén relacionados en la forma ...). **(3,5 puntos)**

Puedes optar por realizar los ejercicios 1-2-3-5. Si es así, debes indicarlo, teniendo en cuenta que el valor total del examen será de 9 puntos en vez de 10

Ejercicio 5: Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por la expresión general:

$$f(x, y, z, t) = (2x - y - 2z + 2t, y + 2z - 2t, 3x - 2y - 3z + 4t, 2x - y - z + 2t),$$

a) Calcula el núcleo, el conjunto imagen de f, bases y dimensión para ambos subespacios.

b) Completa la familia $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$ hasta una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y calcula la matriz coordenada M de f en la base $\mathcal{B}$ (la misma en conjunto inicial y final; debes calcular M por completo).

c) Define una nueva aplicación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de modo que la imagen de g coincida con el conjunto imagen de f. **(2,5 puntos)**