EJERCICIOS VARIOS DE LA HOJA 2.

$$\text{(t)}\quad 1\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^2+1} + 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^2+2} + \cdots + n\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^2+n}$$

- Se usa el criterio del sándwich para hallar el valor del límite de una serie cuyos términos quedan comprendidos entre otras dos series: $a_N \le x_N \le b_N$.

- Sea x_N la serie dada, entonces se puede decir que sus términos quedan comprendidos entre la serie:

$$a_N = (1+2+3+...n)\cdot\sum_{n=1} sen\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \to \left\{ \begin{matrix} (1+2+3+..n) \approx \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} \\ \left\{ \begin{matrix} Equivalencia: \\ n\to\infty : \dfrac{1}{n^2+1} \to 0 \end{matrix} \right\} \to sen\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right) \approx \dfrac{1}{n^2+1} \end{matrix} \right\}$$

$$a_N = \sum_{n=1} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=1}\cdot\frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$Lim_{n\to\infty} a_N = Lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{\infty}{\infty} \to Ind \to P.C.G. \to 1/2$$

- De forma análoga se halla la otra serie:

$$b_N = (1+2+3+...n)\cdot\sum_{n=1} sen\left(\frac{1}{n^2+n}\right) \to \left\{ \begin{matrix} (1+2+3+..n) \approx \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} \\ \left\{ \begin{matrix} Equivalencia: \\ n\to\infty : \dfrac{1}{n^2+n} \to 0 \end{matrix} \right\} \to sen\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right) \approx \dfrac{1}{n^2+n} \end{matrix} \right\}$$

$$b_N = \sum_{n=1} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}\cdot\frac{n^2+n}{2n^2+2n}$$

$$Lim_{n\to\infty} b_N = Lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2n} = \frac{\infty}{\infty} \to Ind \to P.C.G. \to 1/2$$

- Por lo tanto: $1/2 \le x_N \le 1/2$.

$$\text{(u)}\quad \operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{2(n^2+1)}+\operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{2(n^2+2)}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n^2\pi}{2(n^2+n)}$$

- Se usa el criterio del sándwich para hallar el valor del límite de una serie cuyos términos quedan comprendidos entre otras dos series: $a_N \leq x_N \leq b_N$.

- Sea x_N la serie dada, entonces se puede decir que sus términos quedan comprendidos entre las series:

$$a_N=\sum_{n=1} sen\left(\frac{\pi\cdot n^2}{2(n^2+1)}\right)\rightarrow Lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{\pi\cdot n^2}{2(n^2+1)}\right)=sen\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ IND\rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$b_N=\sum_{n=1} sen\left(\frac{\pi\cdot n^2}{2(n^2+n)}\right)\rightarrow Lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{\pi\cdot n^2}{2(n^2+n)}\right)=sen\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ IND\rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

- Por lo tanto: $1\leq x_N \leq 1$.

3. Si $u_n = \dfrac{1}{1+n} + \dfrac{1}{2+n} + \dfrac{1}{3+n} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$, probad que existe $\lim_n u_n$ y está comprendido entre $1/2$ y 1.

- Los términos de la serie u_N están comprendidos entre las siguientes series formadas por infinitas sumas del tipo:

$$b_N = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} + \ldots \approx \frac{n}{1+n} \to Lim_{x\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1$$
$$a_N = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{3+3} + \ldots \approx \frac{n}{n+2} \to Lim_{x\to\infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

- Se usa el criterio del sándwich para hallar el valor del límite de una serie cuyos términos quedan comprendidos entre otras dos series: $a_N \le x_N \le b_N$:

$$1/2 \le u_N \le 1$$

- Para resolver el límite infinitesimal de la siguiente expresión se usará la equivalencia de Stirling:

$$\text{(r)} \quad \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$$

$$Stirling \to n\,! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot n}$$

- De esta manera se obtiene:

$$(n\,!)^2 = n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot 2\pi \cdot n$$

$$(2n+1)! = (2n+1)\cdot n\,! = (2n+1)\cdot(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}$$

- Se sustituye en el límite:

$$Lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot(n\,!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} = Lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot 2\pi\cdot n\cdot\sqrt{n}}{(2n+1)\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2n}} =$$

$$Lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot 2\pi\cdot n\cdot\sqrt{n}}{(2n+1)\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot 2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}} = Lim_{n\to\infty} \frac{\pi\cdot n}{(2n+1)\cdot\sqrt{\pi}} = Lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}\cdot n}{(2n+1)} = \frac{\infty}{\infty} \quad IND \to \sqrt{\pi}/2$$

- Para resolver el límite infinitesimal de la siguiente expresión se usarán las equivalencia siguientes:

$$\text{(d)} \quad \frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}{(1+2+\cdots+n)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) \approx \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \left(1+2+3+\ldots+n\right) \approx \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Por lo tanto el límite queda:

$$Lim_{n\to\infty} \frac{\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)^2}{\left(1+2+3+\ldots+n\right)^3} = Lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)^2}{\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^3} = Lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)^2\cdot 2^3}{n^3\cdot(n+1)^3\cdot 6^2}$$

$$Lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)^2\cdot 2^3}{n^3\cdot(n+1)^3\cdot 6^2} = Lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2\cdot 2}{n\cdot(n+1)\cdot 9} = Lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+8n+2}{9n^2+9n} = \frac{\infty}{\infty} \quad IND \to 8/9$$

- Para resolver el límite infinitesimal de la siguiente expresión se usará el criterio de Stolz:

$$\text{(e)} \quad \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[4]{4}+\cdots+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_N &= n\cdot\sqrt[n]{n}\to\infty \\ b_N &= n^2 \to\infty \end{aligned}\right\} \to STOLT \to Lim_{n\to\infty}\frac{a_N - a_{N-1}}{b_N - b_{N-1}} = l$$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[n]{n}-(n-1)\cdot\sqrt[n-1]{n-1}}{n^2-(n-1)^2}$$

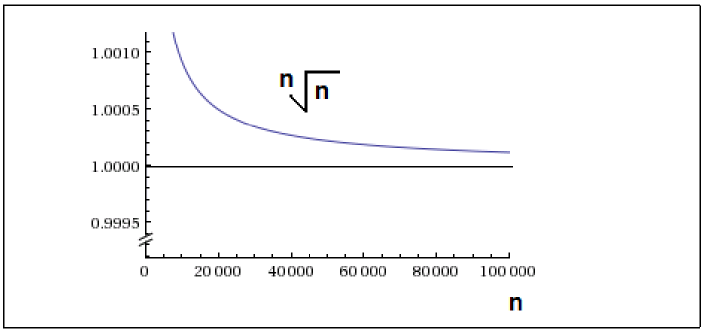
- Teniendo en cuenta que cuando n $\to\infty$: $n\cdot\sqrt[n]{n} >>> (n-1)\cdot\sqrt[n-1]{n-1}$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[n]{n}-(n-1)\cdot\sqrt[n-1]{n-1}}{n^2-(n-1)^2} = Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[n]{n}}{n^2-(n-1)^2} = Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^{1/n}}{n^2-(n-1)^2} =$$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^{1/n}}{2n-1}$$

- Cuando n $\to\infty$ el término $n^{1/n}\to 1$, luego:

$$Lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^{1/n}}{2n-1} = 1/2$$



- Para resolver el límite infinitesimal de la siguiente expresión se usará el criterio de Stolz:

$$\text{(j)} \quad \frac{\cos 1 + \cos\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - n}{\log(n^3+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_N &= \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n \to -\infty \\ b_N &= Log(n^3+1) \to \infty \end{aligned}\right\} \to STOLT \to Lim_{n\to\infty} \frac{a_N - a_{N-1}}{b_N - b_{N-1}} = l$$

$$Lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) - (n-(n-1))}{Log(n^3+1) - Log\left((n-1)^3+1\right)}$$

- Por un lado:

$$a_N - a_{N-1} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \cancel{n} + \cancel{n} - 1 = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - 1 =$$
$$= \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \to ya\ que : \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) >> \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) ????$$

- Usando la equivalencia:

$$a_N \to 0$$
$$1 - \cos(a_N) \approx \frac{(a_N)^2}{2}$$
$$\cos(a_N) - 1 \approx -\frac{(a_N)^2}{2}$$

- Entonces se obtiene:

$$a_N - a_{N-1} = -\left(\frac{\left(1/\sqrt{n}\right)^2}{2}\right)$$

$$a_N - a_{N-1} = -\frac{1/n}{2} = -\frac{1}{2n}$$

- Por otro lado:

$$b_N - b_{N-1} = Log(n^3+1) - Log\left((n-1)^3+1\right)$$

- Usando la equivalencia:

$$\begin{aligned} &b_N \to \infty \\ &Log(b_0 \cdot n^k + b_1 \cdot n^{k-1} + ...b_k) \approx k \cdot Log(n) \end{aligned}$$

- Se obtiene:

$$b_N - b_{N-1} = 3 \cdot Log(n) - 3Log(n-1) = 3 \cdot \left(Log\left(\frac{n}{n-1} \right) \right)$$

- Usando otra equivalencia:

$$\begin{aligned} &b_N \to 1 \\ &Log(b_N) \approx b_N - 1 \end{aligned}$$

- Se obtiene que:

$$3 \cdot \left(\frac{n}{n-1} - 1 \right) = 3 \cdot \left(\frac{\cancel{n} - \cancel{n} + 1}{n-1} \right) = \frac{3}{n-1} \approx \frac{3}{n}$$

- Por lo tanto:

$$Lim_{n \to \infty} \frac{a_N - a_{N-1}}{b_N - b_{N-1}} = \frac{-1/2n}{3/n} = -\frac{1}{6}$$

$$(q)\quad \left(\frac{\log(n^2+1)}{\log(n^2-1)}\right)^{n^2\log n}$$

- Al hacer el límite infinitesimal de la expresión siguiente se obtiene una indeterminación tipo 1^{∞} :

- Se hace la siguiente suposición:

$$a_N = e^{x_N} \rightarrow x_N = Ln(a_N)$$

- Por lo que entonces queda:

$$x_N = n^2 \cdot Log(n) \cdot Log\left(\frac{Log(n^2+1)}{Log(n^2-1)}\right)$$

- Usando la equivalencia:

$$b_N \rightarrow 1$$
$$Log(b_N) \approx b_N - 1$$

- Se obtiene:

$$x_N = n^2 \cdot Log(n) \cdot \left(\frac{Log(n^2+1)}{Log(n^2-1)} - 1\right) = n^2 \cdot Log(n) \cdot \left(\frac{Log(n^2+1) - Log(n^2-1)}{Log(n^2-1)}\right) =$$

$$x_N = n^2 \cdot Log(n) \cdot \left(\frac{Log\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)}{Log(n^2-1)}\right)$$

- Usando otra vez la equivalencia:

$$b_N \rightarrow 1$$
$$Log(b_N) \approx b_N - 1$$

- Se obtiene:

$$x_N = \frac{n^2 \cdot Log(n) \cdot \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} - 1\right)}{Log(n^2-1)} = \frac{n^2 \cdot Log(n) \cdot \left(\frac{2}{n^2-1}\right)}{Log(n^2-1)} =$$

$$x_N = \frac{2 \cdot n^2 \cdot Log(n) \cdot}{(n^2-1) \cdot Log(n^2-1)} \approx \frac{\cancel{n}^2 \cdot Log(n^2)}{\cancel{n}^2 \cdot Log(n^2-1)}$$

- Usando la equivalencia:

$$b_N \rightarrow \infty$$
$$Log(b_0 \cdot n^k + b_1 \cdot n^{k-1} + \ldots b_k) \approx k \cdot Log(n)$$

- Se obtiene:

$$x_N \approx \frac{Log(n^2)}{Log(n^2-1)} \frac{2 \cdot Log(n)}{2 \cdot Log(n)} = 1$$

- Como:

$$a_N = e^{x_N} = e$$

- Por lo tanto el límite infinitesimal vale e.

- Para resolver el límite infinitesimal de la expresión siguiente se reescribe de la siguiente manera:

$$(\mathrm{p})\quad \sqrt{9n^2 - n} - \sqrt[3]{27n^3 - 5n^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(n) = 9n^2 - n \approx n\cdot(9n-1) \approx 9n^2 \approx (3n)^2 \\ q(n) = 27n^3 - 5n^2 \approx n^2\cdot(27n-5) \approx 27n^3 \approx (3n)^3 \end{array}\right\} \to p^3(n) \approx (3n)^6 \approx q^2(n)$$

$$a_N = \left(p(n)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(q(n)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(p^3(n)\right)^{\frac{1}{6}} - \left(q^2(n)\right)^{\frac{1}{6}} = \left(q^2(n)\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{\left(p^3(n)\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(q^2(n)\right)^{\frac{1}{6}}} - 1\right) = \left(q^2(n)\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\left(\frac{p^3(n)}{q^2(n)}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right)$$

- Usando la equivalencia:

$$\begin{array}{l} x_N \to 1 \\ x_N^{\alpha} - 1 \approx \alpha\cdot\left(x_N - 1\right) \end{array}$$

- Sustituyendo los valores de $p^3(n)$ y $q^2(n)$, se obtiene:

$$a_N = 3n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{p^3(n) - q^2(n)}{q^2(n)}\right) \approx \frac{n}{2}\cdot\frac{\left(n\cdot(9n-1)\right)^3 - \left(n^2\cdot(27n-5)\right)^2}{(3n)^6}$$

$$a_N \approx \frac{n}{2}\cdot\frac{n^3\cdot(9n-1)^3 - n^4\cdot(27n-5)^2}{3^6\cdot n^6} = \frac{n^4\cdot(9n-1)^3 - n^5\cdot(27n-5)^2}{1458\cdot n^6}$$

$$a_N = \frac{(9n-1)^3 - n\cdot(27n-5)^2}{1458n^2} = \frac{27n^2 + 2n - 1}{1458n^2}$$

- Así:

$$Lim_{n\to\infty} a_N = Lim_{n\to\infty}\frac{27n^2 + 2n - 1}{1458n^2} = \frac{\infty}{\infty}\quad IND \to {}^{27}\!/\!_{1458} = {}^{1}\!/\!_{54}$$

/==/

- Para calcular el límite infinitesimal de la siguiente expresión tener en cuenta las siguientes equivalencias:

$$\text{(e)}\quad \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{1+n+n^2+n^3}$$

$$1+2^2+3^2+\ldots n^2 \approx \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1+n+n^2+n^3 \approx n^3, cuando\ n \to \infty$$

- Por lo tanto:

$$Lim_{n\to\infty} a_N = Lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}{n^3} = Lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{\infty}{\infty} IND \ \to {}^{1}\!/_{3}$$

- Para calcular el límite infinitesimal de la siguiente expresión tener en cuenta la siguiente equivalencia:

$$\boxed{\text{(a)} \quad \frac{2n^2 + 5n}{n^2 + n + 1}}$$

$$a_N \to \infty$$
$$p(n) = a_0 \cdot n^k + a_1 \cdot n^{k-1} + \ldots a_k \approx a_0 \cdot n^k$$

- Por lo tanto:

$$Lim_{n\to\infty} a_N \approx Lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad IND \to 2$$

$$(b)\quad \frac{n^3-1}{n^2+1}$$

- Para calcular el límite infinitesimal de la siguiente expresión tener en cuenta la siguiente equivalencia:

$$a_N \to \infty$$
$$p(n) = a_0 \cdot n^k + a_1 \cdot n^{k-1} + ...a_k \approx a_0 \cdot n^k$$

- Por lo tanto:

$$Lim_{n\to\infty} a_N \approx Lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad IND \to +\infty$$

- Para calcular el límite infinitesimal de la siguiente expresión se hace por el método de los conjugados:

$$\text{(f)}\quad \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{n}$$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{n}=Lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)-\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{n\cdot\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}=Lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1-n^2-1}{n\cdot\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}=$$

$$Lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n\cdot\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}=-2/\infty=0$$

8. Si $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{p}{u_n}\right)$, donde $p > 0$ y $u_1 > 0$, probad que $\lim_n u_n = \sqrt{p}$. Demostrad cómo se puede utilizar esto para determinar $\sqrt{2}$.

- Se trata de una serie recurrente, de la cuál nos dicen que:

$$u_{N+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_N + \frac{p}{u_N}\right),\ \ donde\ \ p > 0 \rightarrow Lim_{n\to\infty} u_N = \sqrt{p}$$

- Observación: $u_N > 0\ \ \forall\ n$

- <u>Caso 1: Ocurrirá lo siguiente:</u>

$$Si\ u_1 = \sqrt{p}\ \ entonces\ u_N = \sqrt{p}\ \ \forall n$$

- Teniendo en cuenta que la serie decrece:

$$u_N > u_{N+1} \rightarrow u_N > \frac{1}{2}\cdot\left(u_N + \frac{p}{u_N}\right)$$

- O lo que es lo mismo, multiplicando por u_N:

$$u_N^2 > \frac{1}{2}\cdot\left(u_N^2 + p\right) \rightarrow 2\cdot u_N^2 > \left(u_N^2 + p\right) \rightarrow u_N^2 > p \rightarrow u_N = \sqrt{p}$$

- <u>Caso 2: Ocurrirá lo siguiente:</u>

$$Si\ u_1 \neq \sqrt{p}\ \ entonces\ u_2 > u_3 > u_4 > ... > u_N > u_{N+1} > \sqrt{p}$$

- Teniendo en cuenta que:

$$u_{N+1} > \sqrt{p} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(u_N + \frac{p}{u_N}\right) > \sqrt{p}$$

- O lo que es lo mismo, multiplicando por u_N:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(u_N^2 + p\right) > u_N^2 \cdot \sqrt{p} \rightarrow u_N^2 + p > 2\cdot u_N^2 \cdot \sqrt{p}$$
$$u_N^2 + p - 2\cdot u_N^2 \cdot \sqrt{p} > 0 \rightarrow \left(u_N - \sqrt{p}\right)^2 > 0 \rightarrow u_N \neq \sqrt{p}$$

- Si $u_1 \neq \sqrt{p}$ $entonces\ u_2 > u_3 > u_4 > ... > u_N > u_{N+1} > \sqrt{p}\ \ \rightarrow (u_N)_{n\geq 2}$, luego la serie recurrente es decreciente y acotada inferiormente, eso quiere decir que existe el límite:

$$Lim_{n\to\infty} u_N = \ell\ \ \rightarrow \ell = \frac{1}{2}\cdot\left(\ell + \frac{p}{\ell}\right) \rightarrow \ell = \sqrt{p}$$

17. Sea la sucesión recurrente $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$. Probar que tiene límite y hallarlo.

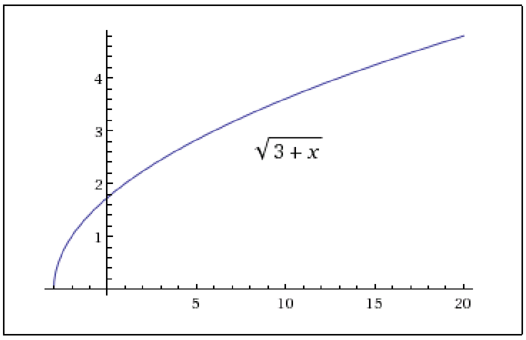
- Se define la función y se halla su dominio: $f(x) = \sqrt{3+x} \to Dom\ f(x) = [-3, +\infty)$.
- Si la sucesión existe a_1 debe de pertenecer al intervalo del dominio: $a_1 = \sqrt{3} \in\ Dom\ f(x)$
- Los posibles puntos fijos de la función $f(x) = x$ podrán ser los posibles valores del límite de la sucesión:

$$f(x) = x \to \sqrt{3+x} = x \to \left(\sqrt{3+x}\right)^2 = x^2 \to 3 + x = x^2 \to x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \to No\ vale: a_N \geq 0\ \ \forall\ \ n \in N \end{cases}$$

- Por lo tanto el único punto fijo de la función es $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ y si existe el límite de la sucesión, este a de valer dicho valor.
Para ver si tiene límite se estudia si es creciente o decreciente:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} > 0 \to siempre\ \ que: x > -3$$



- Luego la función es siempre creciente, por lo tanto la sucesión va a ser monótona.

$$Si\ \ a_1 \leq a_2 \to sucesión\ \ monótona\ \ creciente:$$

$$a_1 \leq \sqrt{3 + a_1} \Leftrightarrow a_1 \leq 0 \to o\ \ lo\ \ que\ \ es\ \ lo\ \ mismo \to \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq a_1 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

- Luego:

$$a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow a_1 \leq 0 \to o\ \ lo\ \ que\ \ es\ \ lo\ \ mismo \to -3 \leq a_1 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$a_1 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}\ \ en\ \ -3 \leq a_1 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

- Ahora cómo $a_1 \leq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, en $-3 \leq a_1 \leq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, por inducción $a_N \leq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, se cumple que:

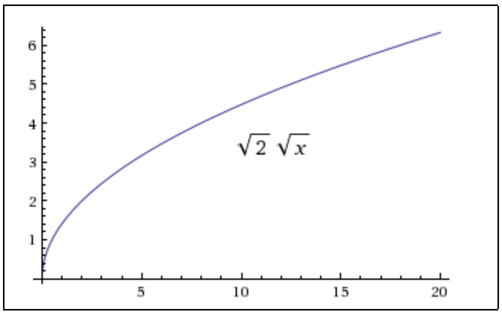
$$Lim_{n\to\infty} a_N = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

18. Sea la sucesión recurrente $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Probar que tiene límite y hallarlo.

- Se define la función y se halla su dominio: $f(x) = \sqrt{2x} \rightarrow Dom\ \ f(x) = [0, +\infty)$.
- Si la sucesión existe a_1 debe de pertenecer al intervalo del dominio: $a_1 = \sqrt{2} \in \ \ Dom\ \ f(x)$
- Los posibles puntos fijos de la función $f(x) = x$ podrán ser los posibles valores del límite de la sucesión:

$$f(x) = x \rightarrow \sqrt{2x} = x \rightarrow \left(\sqrt{2x}\right)^2 = x^2 \rightarrow 2x = x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 2x = x \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- Por lo tanto los únicos puntos fijos de la función son x = 0 y x = +2, y si existe el límite de la sucesión, este a de valer dicho valor. Para ver si tiene límite se estudia si es creciente o decreciente:



$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} > 0 \rightarrow siempre\ \ que: x > 0$$

- Por lo tanto el punto fijo x = 0 no puede ser.
- Luego la función es siempre creciente, por lo tanto la sucesión va a ser monótona.

$$Si\ \ a_1 \leq a_2 \rightarrow sucesión\ \ monótona\ \ creciente:$$
$$a_1 \leq \sqrt{2 \cdot a_1} \Leftrightarrow a_1 \leq 0 \rightarrow o\ \ lo\ \ que\ \ es\ \ lo\ \ mismo \rightarrow 0 \leq a_1 \leq +2$$

- Luego:

$$a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow a_1 \leq 0 \rightarrow o\ \ lo\ \ que\ \ es\ \ lo\ \ mismo \rightarrow 0 \leq a_1 \leq +2$$
$$a_1 \leq +2\ \ en\ \ 0 \leq a_1 \leq +2$$

- Ahora cómo $a_1 \leq +2$, en $0 \leq a_1 \leq +2$, por inducción $a_N \leq +2$, la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, se cumple que:

$$Lim_{n \rightarrow \infty} a_N = +2$$