Cálculo Infinitesimal

Hoja 6

1. Calcular las derivadas n-ésimas y la fórmula de Taylor en el punto c, de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{a - bx}, \quad c = 1$

   b) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}, \quad c = \pi$

   c) $f(x) = \log(1 - 2x), \quad c = 0$

   d) $f(x) = \cos^2 x, \quad c = 0$

   e) $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x), \quad c = 0$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}, \quad c = -1$

   g) $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad c = 3$

   h) $f(x) = \dfrac{x}{a^2 - b^2x^2}, \quad c = 0$

2. Mediante la regla de Leibniz, hallar la derivada n-ésima de las funciones:

   a) $y(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

   b) $y(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x$

   c) $y(x) = x^2(1 + x)^n$

   d) $y(x) = \dfrac{1}{x - 1} + x^2 \operatorname{sen} x$

3. Calcular los órdenes de los siguientes infinitésimos cuando $x \longrightarrow 0$:

   a) $x - \operatorname{sen} x$

   b) $1 - \cos x$

   c) $\tan x - \operatorname{sen} x$

   d) $\sqrt{x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}$

   e) $\cosh x - 1$

   f) $\arcsin x - x$

   g) $\log(x + \sqrt{1 - x^2})$

   h) $\tan x - x$

4. Demostrar, sin aplicar la regla de L'Hôpital, las siguientes igualdades de límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{2}$

   b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = 1$

   c) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$

   d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2} = \frac{n(n+1)}{2}$

   e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \frac{\log a - \log b}{\log c - \log d}, \quad a, b, c, d > 0$

   f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x - 1}{\log(1 + x)} = 2$

   g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\pi}{x \cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$

   h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x = \sqrt[3]{abc}$

5. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\log \cot x)^{\tan x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\log(1+x)}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/(1-\cos x)}\operatorname{sen} x$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\log\cos(2x^2-x)}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cosh x}{x\sinh x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\log(e^x-1)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\log x \quad (n>0)$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\tan x}{\sec x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

6. Calcular los límites siguientes utilizando desarrollos limitados de Taylor:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{sen}(ax)-3ax-a^3x^3}{6bx-6\operatorname{sen}(bx)+b^3x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1-\sqrt{x(1+x)}\log\dfrac{1+x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x-\tan x}{\operatorname{sen} x-\arcsin x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen}(3x)-3\operatorname{sen} x)^2}{(\cos(2x)-\cos x)^3}$

? g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\log(1+x)-(e^x-1))^3}{(\operatorname{sh} x-\tan x)^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x-\log(1+x^2)}{\tan x-\arctan x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\log(x^2+1)-\log(x^2+x+1)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sh}(x))^2}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)^3}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\log(1+x)-x}{e^x-x-1}$.

7. Obtener una cota del error que se comete con la siguiente aproximación, para x recorriendo el intervalo que se indica

$$\operatorname{sen} x \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right),\quad \frac{4\pi}{18}<x<\frac{5\pi}{18}.$$

8. Prueba que, si $|x|\le 1/10$, el error cometido al sustituir $\cos^2(3x)$ por $1-9x^2+27x^4$ es menor que $4\cdot 10^{-5}$.

9. Halla $\sqrt{e}$ con un error menor que 10^{-6}.

10. Halla $\log(1'03)$ con un error menor que 10^{-6}.

11. Usar la identidad trigonométrica

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el número π.

12. Determinar el radio de las series de potencias de término n-ésimo:

$a)$ $\left(\dfrac{n!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}\right)^2 x^n$

$b)$ $n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$

$c)$ $\dfrac{3^n}{n4^n} x^n$

$d)$ $\dfrac{\log n}{n} x^n$

$e)$ $\dbinom{2n}{n} x^n$

$f)$ $\dfrac{2^n}{n^2} x^n$

$g)$ $\dfrac{(-1)^n}{n^2 4^n} x^n$

$h)$ $\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

$i)$ $n! x^n$

$j)$ $\dfrac{2^n}{n!} x^n$

$k)$ $\sqrt{n} x^n$

$l)$ $\dfrac{x^n}{n2^n}$

13. Desarrollar en series de potencias de x las siguientes funciones, indicando los intervalos en los que son válidos los desarrollos:

$a)$ $\dfrac{2x^2-3}{(x-1)^2}$

$b)$ $\log(a+x)$

$c)$ $\sqrt[3]{8+x}$

$d)$ $\cos^2 x$

$e)$ $\dfrac{4x}{1+x^2}$

$f)$ $\dfrac{1+x}{(1-x^2)^2}$

$g)$ $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$h)$ x^2+x-1

$i)$ $\operatorname{arcsen} x$

$j)$ $\dfrac{x}{9+x^2}$

$k)$ $\log \dfrac{1+x}{1-x}$

$l)$ $\sqrt{1-x^2}$

$m)$ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

$n)$ $\log(1-2x)$

$\tilde{n})$ $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$o)$ $\dfrac{1}{x-1} + x^2 \operatorname{sen} x$

$p)$ $\dfrac{x}{x+1}$

$q)$ $\arctan x$

$r)$ $\dfrac{1}{4-x^4}$

$s)$ $\log(x+\sqrt{1+x^2})$

$t)$ $(1+x)e^{-x}$

$u)$ $\dfrac{1}{1+2x}$

$v)$ $\sqrt{1+x^3}$

$w)$ $\operatorname{sen} x - x\cos x$

$x)$ $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$

$y)$ $\dfrac{\sin x}{x}$

$z)$ $(x^2+1)e^{2x}$

14. Desarrollar en series de potencias de $(x-x_0)$ las siguientes funciones, indicando los intervalos en los que son válidos los desarrollos:

a) $(a+bx)^{-1}, \quad x_0 = 1$

b) $\sqrt{1+x}, \quad x_0 = 3$

c) $\operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}, \quad x_0 = \pi$

d) $\log 2x - \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2$

15. Probar utilizando derivación que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

16. Desarrollar en serie de potencias de x las siguientes funciones indicando su radio de convergencia y calcular $f^{(1000}(0)$ y $f^{(1001)}(0)$.

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{2}.$

b) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{2} + \dfrac{1}{4} \log \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right).$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{3} \sqrt{1-x^2}(2+x^2).$

Parcial 2-2017 *d*) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Modelo B

Parcial 2-2019 *e*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \dfrac{1}{3} \log(1+x) - \dfrac{1}{6} \log(x^2 - x + 1).$

f) $f(x) = \arctan \left(\dfrac{x+1}{1-x} \right).$

17. Hallar la suma (si convergen) de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ donde a_n viene dado por:

a) $\dfrac{2n+2}{n!}$

b) $\dfrac{5n^2+4n+1}{5^n}$

c) $\dfrac{3n+1}{3^n}$

d) $\dfrac{n^2+n+1}{2^n}$

e) $\dfrac{3n^2+2n+1}{n!}$

f) $\dfrac{n^2+7n-2}{n!}$

g) $\dfrac{n^2+2n+3}{n!}$