Cálculo Infinitesimal

Hoja 9

1. Probar que las siguientes integrales impropias convergen:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^{-1/3}\cos x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \log^2 x\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\log x\sqrt{x}}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 e^x x^{-1/4}\,dx$

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{4/3}}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^{1/4}}\,dx$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

n) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^2-3}\,dx$

o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x+1}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+3}\,dx$

q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x^2}}$

s) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

t) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$

2. Probar que las siguientes integrales impropias convergen:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}-3}$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^x-1)^2}$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \log x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+x^{-2})}\,dx$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{1+x^2}$

j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$

k) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$

l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

m) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x^3}\,dx$

$o)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$

$p)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+3}}\,dx$

$q)$ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$

$r)$ $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$s)$ $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-4x^2+4x}}$

$t)$ $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}(3+x)}$

$u)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x+e^x}$

$v)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

$w)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

3. Probar que las siguientes integrales impropias divergen:

$a)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$

$b)$ $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\log x}$

$c)$ $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$

$d)$ $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{cotg} x\,dx$

$e)$ $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sec x\,dx$

$f)$ $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\log x}$

$g)$ $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx$

$h)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$

$i)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\operatorname{sen} x\,dx$

4. Calcular las siguientes integrales impropias, probando, de paso, que son convergentes.

$a)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$b)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$c)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2},\ (a,b>0)$

$d)$ $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$e)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

$f)$ $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}\ (\alpha>1)$

$g)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

$h)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

$i)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx\ (\alpha>1)$

$j)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$k)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

$l)$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx\ (\alpha>1)$

$m)$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \log x\,dx$

$n)$ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

ñ) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

o) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log^2 x\,dx$

p) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

q) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

r) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

s) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

t) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}$

u) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\log x\,dx$

v) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$

w) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

x) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2}$

y) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

z) $\displaystyle\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$

5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^5 e^{-t}\,dt$

b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{3/2} e^{-t}\,dt$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^3 e^{t}\,dt$

d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^4 e^{-t/2}\,dt$

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{-1/2} e^{-2t}\,dt$

f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{(1+t)^3}\,dt$

g) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{(1+2t)^4}\,dt$

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} (1-t)t^n\,dt \ (n \in \mathbb{N})$

i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\,d\theta$

j) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^3}\,dx$

l) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^6}$

m) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^4}\,dt$

n) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{(1+\sqrt{t})^5}\,dt$

ñ) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^8\theta\cos^6\theta\,d\theta$

6. Consideramos la superficie, en el primer cuadrante, comprendida entre la curva $y^2 = \dfrac{x^4}{4-x^2}$, su asíntota, y el eje OX Calculad su área.

7. Calculad el área de la superficie comprendida entre la curva $y^2 = \dfrac{4-x}{x}$ y su asíntota.

8. Calculad el área de la superficie comprendida entre la curva $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ y su asíntota.

9. Calculad el área de la superficie, en el primer cuadrante, comprendida entre la curva $y = xe^{-x^2/2}$ y su asíntota.

10. Calculad la longitud total de la curva $9y^2 = x^2(2x+3)$.

11. Calculad la longitud total de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

12. Calculad la longitud total de la curva $y^2 = x(3-x)^2$.

13. Consideramos la superficie comprendida entre la curva $xy = 1$, el eje OX y la recta $y = 1$. Probar que su área es infinita y que el sólido que engendra al girar entorno al eje OX tiene volumen finito.

14. Hallar el área de la superficie comprendida entre la curva $y = e^{-|x|}$ y su asíntota; hallar el volumen del sólido de revolución engendrado al girar dicho recinto plano alrededor de la asíntota.

15. Hallar el área de la superficie comprendida entre la curva $(1+x)y^2 = 1-x$ y su asíntota.

16. Hallar el área de la superficie comprendida entre la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ y sus asíntotas.

17. Hallar el área de la superficie comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2-1}$, la recta $x = 3$ y el eje OX.

18. Consideramos la superficie comprendida entre la curva $y = e^{-2x}$, el eje OX y el eje OY. Hallar su área y el volumen del sólido que engendra al girar entorno al eje OX.