LÓGICA
de predicados

por

Luis Español González
Luis Javier Hernández Paricio
Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja

Logroño
2020

Prólogo

Hemos estudiado el cálculo de proposiciones, ahora le toca el turno al cálculo de predicados, que es la parte genuina de la lógica; el cálculo de proposiciones es un fragmento sencillo del cálculo de predicados. Nuestro estudio del cálculo de predicados será menos completo que el realizado para las proposiciones, pero suficiente para comprender la importancia teórica del tema y conocer alguno de sus métodos.

De nuevo, la primera tarea será delimitar con precisión el lenguaje simbólico que vamos a utilizar. Las *fórmulas* serán las expresiones de dicho lenguaje, que construiremos de una manera reglada a partir de alfabetos de *variables*, *constantes* y *funciones*, de símbolos lógicos incluyendo los *cuantificadores* y de símbolos de puntuación. Una vez dispuesto el lenguaje, veremos cómo se realiza su *interpretación* a fin de determinar la verdad de las fórmulas. Ello nos permitirá identificar *leyes lógicas*, es decir, fórmulas que son verdaderas en todas las interpretaciones posibles.

Veremos cómo se extienden a la lógica de predicados el método de resolución y la deducción natural, que ya conocemos para proposiciones. Finalmente, expondremos el sistema axiomático de Lukasiewicz para la lógica de predicados, que, como sucede en los demás aspectos, es una ampliación del conocido para las proposiciones.

Luis Español González

Universidad de La Rioja

Logroño, abril 2010

Hemos completado los apuntes elaborados por el profesor Luis Español con algunas secciones adicionales. Se ha agregado una sección que incluye instrucciones para el uso de Prover9 para el cálculo de resoluciones con predicados. También se ha añadido una sección sobre cláusulas Horn en la que se basa la progamación lógica (prolog).

Finalmente y con el fin de poder utilizar el asistente de deducción que utiliza el conjunto de reglas y procedimientos primitivos de Fitch para predicados, hemos incorporado alguna sección adicional enfocada al uso del editor y chequeador que vamos a utilizar en las clases prácticas.

Luis Javier Hernández Paricio
Universidad de La Rioja, febrero de 2020.

Índice general

Capítulo 1

Sintaxis y semántica

La característica básica del cálculo de predicados es que utiliza *variables*, que son letras $\{x, y, x, \dots\}$ que pueden ser interpretadas como elementos arbitrarios de un cierto conjunto X, así como *constantes*, que son letras $\{a, b, c, \dots\}$ que se interpretan como elementos fijos de X. También hay símbolos de *funciones*, con los que se construyen, junto a variables y constantes, las expresiones usuales de la sintaxis funcional matemática, como $f(x), g(y, a)$, etc., que en lógica se llaman *términos*. Para completar la semántica necesitaremos los *predicados*, que son símbolos $\{A, B, C, \dots\}$ con los que escribir fórmulas, como por ejemplo $A(x, f(a, x, y))$, llamadas *atómicas*. Éstas son interpretadas como subconjuntos de $X \times \cdots \times X$, con tantas repeticiones como variables distintas aparezcan en la fórmula atómica, y son verdaderas o falsas en función de los valores asignados a las variables.

Estas primeras fórmulas darán lugar a otras más complejas con el uso de los conectores lógicos ya conocidos. Pero tendremos además los símbolos lógicos de la *cuantificación*, que indicarán al ser interpretados «*para todo*» o «*existe*» en relación con las variables. Una cuantificación se referirá siempre a una variable. Como sucedía con los conectores del cálculo de proposiciones, que no era necesario introducirlos todos inicialmente, en el cálculo de predicados daremos como primitivo el símbolo «$\forall x$» y luego aparecerá como derivado el símbolo «$\exists x$». La interpretación semántica de estos símbolos corresponderá con el sentido usual de la lógica que ya vimos al tratas sobre proposiciones.

1.1. Las fórmulas y su interpretación

En esta primera sección desarrollaremos de modo simultáneo y progresivo el lenguaje del cálculo de predicados y su interpretación en busca de un significado de verdad. Para constituir el lenguaje necesitamos un cierto número de símbolos y las reglas para combinarlos en sucesión finita siguiendo algún criterio. Empezaremos con los términos, que no llegan a expresar verdad, para terminar con las fórmulas atómicas, donde la verdad ya se manifiesta tras ser interpretadas, y con las fórmulas generales que se derivan de ellas usando los símbolos lógicos.

Los términos y su interpretación

El lenguaje del cálculo de predicados requiere los tipos de símbolos que ya conocemos: literales, lógicos y de puntuación. Pero ahora la complejidad del sistema simbólico es mayor que en el cálculo de proposiciones. Como símbolos de puntuación usaremos paréntesis y comas.

Definición 1.1.1 *El* lenguaje del cálculo de predicados *parte de tres alfabetos formados por símbolos literales:*

A. *Un conjunto de* variables $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$.

B. *Un conjunto de* constantes $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$.

C. *Un conjunto de* funciones $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$, *provisto de una aplicación (*aridad*)* $ar : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ *que toma valores* $n \geq 1$.

El lenguaje del cálculo de predicados admite también los símbolos de puntuación *usuales.*

Llamaremos término *a una sucesión finita de símbolos de los alfabetos anteriores construida según las siguientes instrucciones:*

1. *Cada símbolo de variable y cada símbolo de constantes es un término.*

2. *Si* f *es un símbolo de función con aridad* n *y* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *son términos, entonces* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *es un término.*

3. *Sólo son términos las expresiones construidas según las instrucciones anteriores.*

Se desprende de la definición anterior que los términos no son sino las expresiones que escribimos habitualmente cuando usamos funciones matemáticas. Por ejemplo:

$$f(x) \ , \ g(x, y) \ , \ h(x, y, z) \ , \ h(z.x, y) \ , \ h(f(a), h(y, b.x), g(b, b)).$$

El conjunto de todos los términos será denotado $\mathcal{T} = \{t, \ldots\}$.

Definición 1.1.2 *Una* interpretación *de términos consiste en los siguientes datos:*

A. *Un conjunto no vacío* X, *llamado el* dominio *de la interpretación.*

B. *Un elemento* $\bar{a} \in X$ *para cada símbolo de constante* a.

C. *Una aplicación* $\bar{f} : X^n \to X$ *para cada símbolo de función* f *con aridad* n.

Fijada una interpretación de términos con dominio X, *una* valoración *de términos es una aplicación* $\bar{v} : \mathcal{T} \to X$ *obtenida como extensión de una aplicación cualquiera* $v : \mathcal{V} \to X$, *llamada valoración de variables, por el procedimiento inductivo siguiente:*

1. *Para cada símbolo* x *de variable,* $\bar{v}(x) = v(x)$.

2. *Para cada símbolo* a *de constante,* $\bar{v}(a) = \bar{a}$.

3. *Si* f *es un símbolo de función con aridad* n *y* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *son términos,*

$$\bar{v}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \bar{f}(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \ldots, \bar{v}(t_n)).$$

Por el procedimiento explicado en la Definición 1.1.2, cada término se interpreta en un elemento del dominio X de la interpretación, una vez que se dan los datos de la interpretación y los valores que deben tomar las variables. Por ejemplo, sea el término $f(x, y, a)$. De momento es una simple lista se símbolos, pero podemos interpretarla en el conjunto $\mathbb{N}$ siendo $\bar{f}$ la función suma de tres sumandos y $\bar{a} = 3$, entonces, si para las variables suponemos $v(x) = 5$ y $v(y) = 7$ resulta $v(\bar{f}(x, y, a)) = 5 + 7 + 3 = 15$. En la práctica matemática esto se llama «calcular» la expresión y no suele usarse la barra encima de los símbolos, porque se da por supuesto que se trabaja en una interpretación determinada y se identifica el símbolo con su interpretación.

En esa misma práctica matemática, estamos acostumbrados a sustituir una variable por otro término dentro de un término que contiene a dicha variable. Por ejemplo, si en el término $t = h(f(a), h(y, b, x), g(x, b))$ sustituimos la variable x por el término $s = f(y)$ resulta el término $t' = h(f(a), h(y, b.f(y)), g(f(y), b))$. Supongamos ahora que hemos formulado una interpretación con dominio X y que tenemos una cierta valoración de términos $\bar{v} : \mathcal{T} \to X$. Es claro que los valores $\bar{v}(t)$ y $\bar{v}(t')$ no serán iguales en general, pero si definimos una nueva valoración de variables $v' : \mathcal{V} \to X$ que sea igual a v en todas las variables menos x y con $v'(x) = v(s)$, entonces resulta $\bar{v'}(t) = \bar{v}(t')$. Esto, que se comprueba de inmediato en el ejemplo, puede enunciarse como una proposición que se demuestra por inducción sobre la complejidad del término. Que el lector animoso se ocupe de ello.

Fórmulas atómicas y su interpretación

El lenguaje del cálculo de predicados requiere nuevos símbolos literales, además de los necesarios para formar los términos; se trata de nuevos símbolos con aridad, como las funciones, pero que interpretaremos como relaciones (subconjuntos de productos).

Definición 1.1.3 *Se añade al lenguaje del cálculo de predicados un nuevo alfabeto de símbolos literales: un conjunto de* predicados $\mathcal{P} = \{A, B, C, \ldots\}$, *provisto de una aplicación (aridad)* $ar : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}$ *que toma valores* $n \geq 1$. *Llamaremos* fórmula atómica *a una expresión finita de símbolos de la forma*

$$A(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

donde A *es un símbolo de predicado con aridad* n *y* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *son términos.*

Se desprende de la definición anterior que las fórmulas atómicas presentan el mismo aspecto literal que los términos pero sustituyendo el símbolo de función raíz por un símbolo de predicado. Por ejemplo:

$$A(x) \ , \ B(x, y) \ , \ C(x, y, z) \ , \ C(z.x, y) \ , \ C(f(a), h(y, b.x), g(b, b)).$$

Definición 1.1.4 *Una* interpretación, *de fórmulas atómicas es una interpretación de términos, que suponemos con dominio* X, *a la que se añade un subconjunto* $\bar{A} \subseteq X^n$ *para cada símbolo de predicado* A *con aridad* n.

Fijada una interpretación de fórmulas denotada I, *con dominio* X *y en ella una valoración de términos* $\bar{v} : \mathcal{T} \longrightarrow X$, *se dice que* se satisface *la fórmula atómica* $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, *y se escribe*

$$I, v \models A(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

cuando se verifica

$$(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \ldots, \bar{v}(t_n)) \in \bar{A}.$$

Los predicados de aridad $n = 1$ se interpretan como subconjuntos del dominio X de la interpretación. Los de aridad $n = 2$ se interpretan como subconjuntos de $X \times X$, que son relaciones. En general, las interpretaciones de las fórmulas atómicas pueden ser muy variadas. Por ejemplo, la fórmula atómica $A(x, y)$ admite interpretaciones como las siguientes, entre otras en cantidad ilimitada:

- ▹ Dominio $\mathbb{N}$ y $\bar{A} = \{(m, n) \in \mathbb{N}; m < n\}$. Se dice que «$A(x, y)$ significa $m < n$».
- ▹ Como dominio tomamos el conjunto X de los habitantes de Logroño, y determinamos que $A(x, y)$ signifique «x es padre de y».
- ▹ Se el plano $\mathbb{R}^2$ el dominio y tomemos como $\bar{A}$ la relación definida por $d(x, y) \leq 2$, donde d significa distancia.
- ▹ Tomamos como dominio un conjunto con dos elementos, $X = \{a, b\}$ e interpretamos el (símbolo de) predicado A como el subconjunto de dos elementos $\bar{A} = \{(x, y) \in X; x \neq y\}$.

Interpretación de fórmulas. Leyes lógicas

Vamos a completar el lenguaje del cálculo de predicados y su interpretación. Hemos incorporado ya los elementos literales del lenguaje y sólo falta introducir los símbolos lógicos para formar con ellos las fórmulas, a partir de las fórmulas atómicas.

Definición 1.1.5 *El* lenguaje del cálculo de predicados *consiste en todos los elementos lingüísticos introducidos en las Definiciones 1.1.1 y 1.1.3 más los siguientes símbolos lógicos:*

- *Los símbolos* negación *«$\neg$» y* condicional *«$\longrightarrow$».*
- *El símbolo* cuantificador universal *«$\forall$».*

Llamaremos fórmula *a una expresión finita de símbolos obtenida por el procedimiento inductivo siguiente:*

1. *Cada fórmula atómica es una fórmula.*
2. *Si P es una fórmula entonces $\neg P$ es una fórmula.*
3. *Si P y Q son fórmulas entonces $(P \to Q)$ es una fórmula.*
4. *Si P es una fórmula y x es una variable entonces $(\forall x)P$ es una fórmula.*
5. *Sólo son fórmulas las expresiones construidas según las instrucciones anteriores.*

Una fórmula se dice proposicional *si en su expresión no aparecen cuantificadores.*
Una fórmula tiene forma tautológica *si se puede obtener a partir de una tautología sustituyendo cada uno de sus átomos por una fórmula cualquiera.*

Las fórmulas proposicionales tienen el mismo aspecto que las proposiciones, pero cambiando átomos por fórmulas atómicas. Por ejemplo, una fórmula proposicional es

$$\neg\neg A(f(a), x) \to (\neg A(f(a), x) \to \neg(B(y) \to A(f(a), x))).$$

Definición 1.1.6 *Una* interpretación del lenguaje del cálculo de predicados *es una interpretación de fórmulas atómicas como en la Definición 1.1.4. Fijada una interpretación I con dominio X y en ella una valoración de términos $\bar{v} : \mathcal{T} \to X$, se dice que una fórmula P* se satisface *en la interpretación I con la valoración v, y se escribe*

$$I, v \models P,$$

cuando se verifica la siguiente condición inductiva:

1. *Si P es una fórmula atómica se aplica la Definición 1.1.4.*

2. *Si* $P = \neg Q$*, entonces* $I, v \models P$ *es cierto si y sólo si* $I, v \models Q$ *es falso.*

3. *Si* $P = (Q \to R)$*, entonces* $I, v \models P$ *es cierto si y sólo si cuando* $I, v \models Q$ *es cierto también* $I, v \models R$ *es cierto .*

4. *Si* $P = (\forall x)Q$*, entonces* $I, v \models P$ *es cierto si y sólo si* $I, v' \models Q$ *es cierto para cada valoración* v' *que sólo se diferencie de* v *en el valor tomado en la variable* x *(se dice entonces que* v *y* v' *son* x-equivalentes*).*

Una fórmula P *es* verdadera *o* válida *en una interpretación* I *si se satisface en* I *con todas las valoraciones. Se escribe en tal caso*

$$I \models P$$

y se dice también que I *es un* modelo *de* P*. Se dice que* P *es falsa en* I *cuando la fórmula* $\neg P$ *es verdadera en* I*.*

Una fórmula P *es una* ley lógica *si es verdadera en todas las interpretaciones, en cuyo caso se escribe*

$$\models P.$$

Se dice también que la fórmula P *es* lógicamente verdadera.

Nótese que, dadas una fórmula P y una interpretación I, puede ser que P no sea ni verdadera ni falsa en I, es decir, que se verifique para unas valoraciones y para otras no. Se invita al lector a dar ejemplos.

Algunos conceptos vistos para proposiciones se extienden inmediatamente a fórmulas. Así sucede con el concepto de fórmula *consistente* (tiene un modelo) y otros análogos. Dadas dos fórmulas P y Q, se escribe

$$P \models Q$$

cuando todo modelo de P lo es también de Q, y se dice P, Q son *equivalentes*,

$$P \equiv Q,$$

si se verifica $P \models Q$ y $Q \models P$, es decir, si tienen los mismos modelos.

Lema 1.1.7 *Toda fórmula con forma tautológica es una ley lógica.*

DEM: Sea una fórmula F con forma proposicional, es decir, existe una proposición $P = P(p_1, \ldots, p_n)$, escrita con átomos p_i, tal que $F = P(P_1, \ldots, P_n)$, donde cada P_i es una fórmula atómica. Dada una interpretación I cualquiera y en ella una valoración v cualquiera, definimos un valor de verdad para los átomos p_i mediante $\theta(p_i) = 1$ si y sólo si $I, v \models P_i$ es cierto. Entonces $I, v \models P$ es cierto si y sólo si $\theta(P) = 1$. Si F tiene forma tautológica entonces P es una tautología y por tanto $I, v \models F$ es cierto siempre, es decir, $\models P$. $\square$

Naturalmente no sólo son leyes lógicas las fórmulas con forma tautología escritas con los conectores lógicos primitivos, también serán leyes lógicas todas las derivadas de las tautologías escritas mediante cualquiera de los conectores derivados. Por ejemplo, son leyes lógicas la del tercio excluso, $P \vee \neg P$, y la de contradicción, $\neg(P \wedge \neg P)$, donde P es una fórmula cualquiera. Esto explica el sentido en que el cálculo de proposiciones es un caso particular del cálculo de predicados.

Nuestro objetivo desde ahora será determinar las leyes lógicas, no sólo las derivadas de las tautologías.

Algún lector puede estar echando de menos el *cuantificador existencial* «∃», que no hemos introducido como dato inicial del lenguaje. Lo hemos hecho así porque puede introducir como un símbolo derivado

Definición 1.1.8 *Se define el conector existencial «∃» mediante la abreviatura*

$$(\exists x)P = \neg(\forall x)\neg P.$$

Es evidente que resulta ser $I, v \models (\exists x)P$ si y sólo si existe una valoración v' x-equivalente a v tal que $I, v' \models P$.

Como primeros ejemplos de leyes lógicas de tipo no tautológico daremos los siguientes, cuya verificación es inmediata:

$$\models (\forall x)P \to P \quad , \quad \models P \to (\exists x)P.$$

Variables libres y sustituciones

Para continuar el estudio de la lógica de predicados debemos introducir alguna terminología que nos ayude en las descripciones sintácticas.

En la fórmula $(\forall x)P$ se dice que la fórmula P es el *radio de acción* del cuantificador $(\forall x)$ y cada vez que la variable x aparezca en la fórmula P se dirá que x aparece *ligada*.

Se dirá que una variable x aparece *libre* en una fórmula P si no está en el radio de acción de un cuantificador $(\forall x)$. Con la notación $P(x), P(x,y)$, etc. indicaremos expresamente las variables libres de la fórmula P. Nótese que una variable puede aparecer varias veces en una fórmula y cada una de esas apariciones será libre o ligada. En las fórmulas proposicionales todas las variables que aparecen son libres. Si A es un predicado binario, en la fórmula $(\forall x)A(x,y)$ la variable x aparece ligada y la variable y aparece libre. En la fórmula $(\forall x)A(x,y) \to B(x)$, en la que B un predicado monádico, la segunda aparición de la variable x es libre.

Una fórmula sin variables libres se dice *cerrada* (lo mismo diremos para términos). En una fórmula proposicional (en particular en una atómica) todas las variables que aparecen son libres. Una fórmula puede ser cerrada porque no tiene variables (sólo constantes) o porque todas las variables que en ella aparecen están ligadas (cuantificadas). Las fórmulas cerradas son más fáciles de manejar.

El resultado siguiente muestra el papel de las variables libres en las interpretaciones. Su significado es muy claro y la demostración (por inducción sobre la complejidad de la fórmula P) queda como ejercicio para el lector (aunque quizás le resulte algo engorrosa).

Proposición 1.1.9 *Dada una interpretación I, si v y v' son valoraciones que coinciden en las variables libres de la fórmula P entonces*

$$I, v \models P \text{ si y sólo si } I, v' \models P.$$

La Proposición 1.1.9 tiene como corolario que para verificar la validez de una fórmula cerrada en una interpretación basta comprobar con una única valoración. También se deduce que, si P es cerrada, cada interpretación es un modelo de P o un modelo de $\neg P$.

Conviene ahora analizar la fórmula $P \to (\forall x)P$ para determinar si es o no una ley lógica. Con ella podemos hacer una importante precisión sobre la semántica.

Proposición 1.1.10 *Se verifica:*
(i) $\models P \to (\forall x)P$, si x no aparece libre en P.
(ii) $P \equiv (\forall x)P$ (tienen los mismos modelos).

DEM. (i) En efecto, si x no aparece libre en P es claro que $P \equiv (\forall x)P$. Por el contrario, el caso más sencillo con x libre es $P = A(x)$, siendo A un predicado de aridad $n = 1$. Sea I una interpretación con dominio $\mathbb{N}$ y $\bar{A}$ el subconjunto de los números pares. Tomando una valoración v tal que $v(x) = 2$ resulta que $I, v \models A(x)$ es cierto pero $I, v \models (\forall x)A(x)$ es falso (hemos probado formalmente algo bien simple: que un cierto número sea par no significa que todos los números sean pares). (ii) es inmediato. □

De la Proposición 1.1.10(ii) se deduce que toda fórmula es equivalente a una fórmula cerrada, de modo que para muchos fines se puede trabajar sólo con fórmulas cerradas, evitando así las complicaciones que plantean las variables libres. También se deduce de la proposición anterior que el teorema de deducción (TD) para la lógica de predicados no puede ser exactamente igual que en la lógica de proposiciones, necesitará alguna condición sobre variables libres, como se verá más adelante.

Nótese que para invalidar una presunta ley lógica basta encontrar una interpretación concreta y en ella una valoración concreta con las que la condición $I, v \models P$ falle. Pero esto no impide que haya otros casos favorables. Toda interpretación I con dominio X y $\bar{A} = X$ es un modelo de $A(x) \to (\forall x)A(x)$.

Las variables libres obligan también a tomar precauciones cuando se hacen *sustituciones.* Dada una fórmula, $P(x)$, en la que aparece libre la variable x, denotaremos con $P(t|x)$ la fórmula que resulta de *sustituir* la variable x por el término t, entendiendo siempre que la sustitución se hace *a* *la vez en todas* las apariciones libres de x en $P(x)$. Hecha una sustitución, nos interesa estudiar la validez de la fórmula

$$(\forall x)P(x) \to P(t|x).$$

El caso trivial se presenta si $t = x$, cuando realmente no se sustituye nada. Es fácil el caso en que el término es una constante, pero es más delicada analizar la fórmula con una sustitución de la variable por un término arbitrario, incluso si es simplemente otra variable.

Es inmediato que, si a es una constante, se verifica

$$\models (\forall x)P(x) \to P(a|x).$$

La fórmula recíproca no es una ley lógica en general. Tampoco se verifica que todo modelo de $P(a|x)$ lo sea de $(\forall x)P(x)$. Es muy fácil dar ejemplos de esta situación. Lo que sucede con la sustitución $P(a|x)$ ocurre también con la $P(t|x)$ siempre que t sea un término cerrado, pero las sutilezas aparecen cuando el término contiene variables distintas de la sustituida.

Vamos con el caso en que se sustituye una variable x que aparece libre en P por otra variable y distinta, enfrentándonos entonces con la validez de la fórmula $(\forall x)P(x) \to P(y|x)$. Al plantear la sustitución con toda generalidad no sabemos bien dónde cae la nueva variable y, pudiendo suceder que aterrice en una aparición libre de x dentro del radio de acción de un cuantificador $(\forall y)$, en cuyo caso habremos cambiado una variable en estado libre por otra en estado ligado, lo que es una modificación esencial. Veamos un ejemplo con un predicado *A binario* (aridad 2) y la fórmula $P(x) = (\exists y)A(x, y)$, en la que x aparece libre e y ligada, siendo $P(y|x) = (\exists y)A(y, y)$. No le costará mucho trabajo al lector comprobar que

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y) \to (\exists y)A(y, y)$$

no es una ley lógica (tómese por ejemplo $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x\}$). Al sustituir la variable por un término debemos evitar que suceda lo anterior con todas las variables que aparecen en el término.

Definición 1.1.11 *Diremos que una variable y está* libre para la variable *x en la fórmula $P(x)$ si ninguna aparición libre de x en $P(x)$ está en el radio de acción de un cuantificador $(\forall y)$. Diremos que un término t está* libre para la variable *x en la fórmula $P(x)$ si todas las variables de t están libres para la variable x en la fórmula $P(x)$.*

Nótese que todas las constantes y la propia variable x están libres para x en la fórmula $P(x)$. Esta noción permite clarificar el mecanismo de la sustitución.

Teorema 1.1.12 *Si t es un término libre para x en $P(x)$ entonces*

$$\models (\forall x)P(x) \to P(t|x).$$

DEM: Con la notación bien conocida, tenemos que demostrar

$$I, v \models (\forall x)P(x) \to P(t|x),$$

es decir: si $I, v \models (\forall x)P(x)$ entonces $I, v \models P(t|x)$. Pero esto quedará probado si demostramos la siguiente equivalencia:

$$I, v' \models P(x) \text{ si y sólo si } I, v \models P(t|x)$$

para alguna valoración v' que sea x-equivalente a v. La nueva valoración v' será

$$v'(y) = \begin{cases} v(y) & y \neq x \\ \bar{v}(t) & y = x \end{cases}$$

Con ella se demuestra sin dificultad la equivalencia anterior cuando P es atómica y, por inducción, cuando $P = \neg Q$ y cuando $P = Q \to R$. Supongamos para terminar que $P = (\forall y)Q$ con la equivalencia cierta para Q. Como $P = P(x)$, es decir, x aparece libre en P, tendrá que ser $Q = Q(x)$, $y \neq x$, $P(t|x) = (\forall y)Q(t|x)$. De modo que la equivalencia pretendida es la equivalencia entre los dos enunciados siguientes:

$$I, \theta \models Q(x), \text{ para cada valoración } \theta \text{ } y\text{-equivalente a } v',$$
$$I, \omega \models Q(t|x), \text{ para cada valoración } \omega \text{ } y\text{-equivalente a } v.$$

Como tenemos la hipótesis inductiva para Q, podemos cambiar la segunda fila por esta otra:

$$I, \omega' \models Q(x), \text{ para cada valoración } \omega \text{ } y\text{-equivalente a } v.$$

donde ω' se construye respecto a ω como antes v' respecto a v'. Terminaremos demostrando este último enunciado a partir del primero de los enunciados anteriores (el recíproco será análogo). Lo que hay que demostrar en definitiva es que, al igual que ω con v, también ω' y v' son y-equivalentes. Si $z \neq x, y$ la igualdad $\omega'(z) = v'(z)$ es inmediata y la misma igualdad con x es consecuencia de esta otra

$$\bar{\omega}(t) = \bar{v}(t).$$

Para probarla necesitamos la hipótesis inicial sobre el término t. Al ser t libre para x en $P(x) = (\forall y)Q(x)$, la variable y no puede aparecer en t, luego ω y v valen los mismo en t por ser y-equivalentes. □

Se propone al lector demostrar el resultado que sigue, que es una consecuencia del teorema anterior.

Corolario 1.1.13 *Si t es un término libre para x en $P(x)$ entonces*

$$\models P(t|x) \to (\exists x)P(x).$$

Además de dar la prueba, el lector deberá proporcionar un ejemplo que muestre que el resultado puede no ser cierto si se elimina la condición inicial sobre el término t.

Ejercicios

1. Demostrar que $(\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$ es una ley lógica.

2. Demostrar que $(\exists x)P(x) \to (\forall x)P(x)$ no es una ley lógica, pero es una fórmula consistente.

3. Determinar si son o no equivalentes las siguientes fórmulas:

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y), \quad (\exists y)(\forall x)A(x,y).$$

4. El enunciado interpretado siguiente es verdadero: Para cada par x, y de números enteros, si $x - y < 0$ entonces $x < y$. Dar su expresión formal y encontrar, si es posible, otra interpretación en la que el enunciado sea falso.

5. Verificar si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
(i) $(\forall x)A(x) \wedge (\exists y)\neg A(y)$ es inconsistente.
(ii) $(\forall x)A(x) \to (\exists y)A(y)$ es una ley lógica.
(iii) $A(a) \to \neg(\exists x)A(x)$ es consistente.
(iv) $(\forall x)A(x) \vee (\exists y)\neg A(y)$ es una ley lógica.
(v) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)A(x)$ es consistente.

6. Verificar si es o no una ley lógica la fórmula $(\forall x)P(x) \to P(y|x)$ siendo $P(x) = (\exists y)A(x,y)$.

1.2. Formas prenexas

Pretendemos ahora demostrar que toda fórmula es equivalente a otra en cuya escritura aparecen todos los cuantificadores a la izquierda, es decir, a una fórmula proposicional precedida de cuantificadores. Se dice de este tipo particular de fórmulas que están en *forma prenexa*. Por ejemplo,

$$(\exists x)(\forall y)((\neg A(x,y) \to B(a)) \wedge B(y)).$$

Una vez que la fórmula esté en forma prenexa nos interesará ademas que la parte proposicional quede en forma clausal, así que llamaremos al resultado *forma prenexa clausal*. Es decir, una proposición está en forma prenexa clausal si su escritura es una secuencia de cuantificadores seguida de una fórmula proposicional escrita en forma clausal respecto a las fórmulas atómicas. Por ejemplo:

$$(\exists x)(\forall y)((A(x,y) \vee B(a)) \wedge B(y)).$$

Todas las equivalencias entre proposiciones son válidas para fórmulas, de modo que podemos usar las ya conocidas para expresar los conectores binarios en función de $\{\vee, \wedge\}$, que son los usados en las formas proposicionales clausales. Al hacer esto debemos notar que tomamos un *fragmento* de la fórmula, entendiendo por tal un trozo que por sí mismo tiene sentido como fórmula, y lo cambiamos por otra fórmula equivalente, que se reinserta en el lugar del fragmento dando lugar a una fórmula distinta pero que afirmamos ser equivalente. Esto ya lo demostramos con las proposiciones y ahora deberíamos demostrarlo también, procediendo por inducción sobre la complejidad de la fórmula; pero vamos a dar este hecho por supuesto ya que resulta bastante admisible y su prueba, sin ser difícil, tiene una casuística técnica que podemos a evitar y así lo haremos.

Los cuantificadores pasan a la izquierda de la negación según las equivalencias siguientes (de De Morgan cuantificadas), cuya demostración es muy sencilla:

Proposición 1.2.1 *Se verifican las equivalencias siguientes:*

$$\neg(\forall x)P \equiv (\exists x)\neg P \quad , \quad \neg(\exists x)P \equiv (\forall x)\neg P.$$

El teorema que viene a continuación nos indica cómo los cuantificadores escapan a la izquierda de una disyunción o conjunción. Para simplificar, usaremos el símbolo Δ para indicar uno cualquiera de los cuantificadores, de modo que cada expresión con Δ nos indicará dos resultados, uno para cada cuantificador. Cuando se usa este símbolo para abreviar, las equivalencia de De Morgan se dan de una vez: $\neg(\Delta x)P \equiv (\Delta' x)\neg P$, entendiendo que Δ' es el cuantificador distinto de Δ.

Teorema 1.2.2 *Se verifican las equivalencias siguientes:*
(i) $P \vee (\Delta x)Q \equiv (\Delta x)(P \vee Q)$*, si* x *no aparece en* P.
(ii) $P \wedge (\Delta x)Q \equiv (\Delta x)(P \wedge Q)$*, si* x *no aparece en* P.

DEM: Vamos a demostrar una de las ocho partes en que podemos dividir el enunciado y las demás, análogas, se dejan como ejercicio. Suponiendo que x no aparece libre en P, probemos que

$$\frac{(\forall x)(P \vee Q)}{P \vee (\forall x)Q},$$

es decir, para cada interpretación I,

$$\text{si } I \models (\forall x)(P \vee Q) \text{ entonces } I \models P \vee (\forall x)Q.$$

Para cada valoración v tenemos que demostrar que $I, v \models P \vee (\forall x)Q$, es decir:

$$I, v \models P \text{ o bien } I, v' \models Q \text{ para cada } v\text{‘ } x\text{-equivalente a } v.$$

Pero v, v' coinciden en las variables libres de P, pues entre ellas no está x, así que (Proposición 1.1.9) $I, v \models P$ equivale a $I, v' \models P$. Fijándonos ahora en la premisa, concluimos que $I, v' \models Q$ y la demostración termina. □

Conviene verificar que la hipótesis «si x no aparece libre en P» es necesaria. Para ello, habrá que dar un ejemplo en el que dicha hipótesis no se cumpla y la regla de inferencia prevista no se verifique. Tomemos $P = A(x)$ y $Q = B(x)$ e interpretemos en números naturales de modo que A sea el predicado «n es par» y B el predicado «n es impar». Es claro que en esta interpretación se verifica $I \models (\forall x)(P \vee Q)$. Pero no se verifica $I \models P \vee (\forall x)Q$, lo que se comprueba tomando una valoración tal que $v(x)$ sea impar, en cuyo caso no se cumple $I, v \models P \vee (\forall x)Q$.

Sabemos ya que una cuantificación universal (existencial) es como una conjunción (disyunción) extendida a todos los elementos del dominio de la interpretación. Este paralelismo se traduce en unas equivalencias que no necesitan supuestos adicionales sobre variables.

Proposición 1.2.3 *Se verifican las equivalencias siguientes:*
(a) $(\forall x)P \wedge (\forall x)Q \equiv (\forall x)(P \wedge Q)$.
(b) $(\exists x)P \vee (\exists x)Q \equiv (\exists x)(P \vee Q)$.

DEM: (a) Se aplica la Proposición 1.1.10(ii). (b) Se deduce de (a). □

La dificultad que se presenta por la presencia de variables libres puede sortearse a veces mediante un cambio de variable que afecte a la variables ligadas. En efecto, una variable ligada es una variable «muda», en el sentido de que al interpretar no se dice nada acerca de su valor sino que forma parte de una instrucción especificada por el cuantificador. El resultado que se aplica en estos casos está en la proposición siguiente, cuya demostración es inmediata. Nótese que se da una condición que siempre puede cumplirse porque no hay límite al número de variables, y al hacerlo así se evita cualquier tipo de colisión sintáctica.

Proposición 1.2.4 *Si y es una variable distinta de x y tal que no aparece en P, entonces se verifica la equivalencia:*

$$(\forall x)P \equiv (\forall y)P.$$

Tenemos ya suficientes equivalencias para transformar una fórmula cualquiera en otra equivalente en forma prenexa clausal. Para ello basta seguir el proceso que describiremos a continuación, que iremos ejemplificando con la fórmula

$$P = (\forall x)A(x) \to (\forall y)B(x, y).$$

Deberá notarse que dicho proceso tendrá grados de libertad y no llevará a una forma prenexa clausal única.

El proceso como sigue:

1. Pasar los conectores binarios al sistema $\{\vee, \wedge\}$.

$$\neg(\forall x)A(x) \vee (\forall y)B(x, y).$$

2. Pasar las negaciones a la derecha de los cuantificadores, continuar desplazando hasta llegar a los literales y suprimir dobles negaciones.

$$(\exists x)\neg A(x) \vee (\forall y)B(x, y).$$

3. Renombrar variables ligadas si fuera necesario.

$$(\exists z)\neg A(z) \vee (\forall y)B(x, y).$$

4. Pasar los cuantificadores a la izquierda de los conectores $\{\vee, \wedge\}$.

$$(\exists z)(\forall y)(\neg A(z) \vee B(x, y)).$$

5. Poner la parte proposicional en forma clausal (en el ejemplo ya está).

En el paso 4 ha quedado establecida la fórmula P' en forma prenexa clausal equivalente a P. Conviene observar que la aparición libre de la variable x en P se mantiene en P', mientras que la aparición ligada de x ha pasado a ser en P' una aparición también ligada, pero de una nueva variable z. Si se repite el proceso anterior con la fórmula cierre de P, es decir $(\forall x)P$, el resultado será el cierre de P', es decir, $(\forall x)P'$.

A la vista de la Proposición 1.2.3, es importante notar que otras presuntas candidatas a equivalencias no son válidas:

(i) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \not\equiv (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$.
(ii) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \not\equiv (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$.

Indicaremos las formas prenexas clausales en cada caso:

(i) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$.
(ii) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$.

Ejercicios

1. Como aplicación del Teorema 1.2.2, demostrar las equivalencias:

   (i) $P \to (\Delta x)Q \equiv (\Delta x)(P \to Q)$, si x no aparece en P.

   (ii) $(\Delta x)P \to Q \equiv (\Delta' x)(P \to Q)$, si x no aparece en Q.

2. Pasar a forma prenexa clausal las fórmulas:
   (i) $(\forall x)A(x) \wedge (\exists y)\neg A(y)$.
   (ii) $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists y)A(y)$.
   (iii) $A(a) \rightarrow \neg(\exists x)A(x)$.
   (iv) $(\forall x)A(x) \vee (\exists y)\neg A(y)$.
   (v) $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)A(x)$.
   (vi) $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$ y su recíproca.
   (vii) $(\forall x)((\forall z)A(z) \rightarrow (\forall y)B(x, y))$.
   (viii) $(\forall x)(\forall y)((\exists z)(A(x, z) \wedge A(y, z)) \rightarrow (\exists u)B(x, y, u))$.

Capítulo 2

Métodos de demostración

2.1. Reglas de inferencia

En esta sección se repiten para la lógica de predicados las ideas ya conocidas para la lógica de proposiciones. Sólo debe tenerse en cuenta que donde entonces decíamos interpretación pensando en una asignación de valor de verdad a los átomos (es decir, en una fila de la tabla de verdad), ahora debemos entender que se interpreta valorando las variables en un dominio, etc.

La definición de *regla de inferencia* en la lógica de predicados repite la ya conocida en la lógica de proposiciones: se tiene una regla de inferencia

$$P_1, \ldots, P_n \models Q,$$

si todo modelo de las premisas es un modelo de la conclusión. Todas las reglas de inferencia proposicionales son también reglas de inferencia con fórmulas, por ejemplo la regla (MP), que enunciamos a continuación, sin demostrarla porque es un ejercicio muy sencillo.

Lema 2.1.1 *La regla de modus ponens (MP) es válida en la lógica de predicados, es decir: si $I \models (P \to Q)$ e $I \models P$ entonces $I \models Q$.*

$$\text{(MP)}\ \frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Se deduce del lema anterior que si $P \to Q$ y P son leyes lógicas entonces Q es también una ley lógica.

Con la regla de modus ponens no hacemos sino empezar una larga lista. De la Proposición 1.1.10 se siguen las reglas de *introducción del cuantificador universal*, también llamada *regla de generalización* y la de *eliminación del cuantificador universal*. Es fácil verificar también la validez de la regla de *introducción del cuantificador existencial*:

$$(\mathrm{RI}\forall,\ \mathrm{RG})\ \frac{P}{(\forall x)P} \qquad (\mathrm{RE}\forall)\ \frac{(\forall x)P}{P} \qquad (\mathrm{RI}\exists)\ \frac{P}{(\exists x)P}\ .$$

A propósito de la Proposición 1.1.10 ya vimos que el teorema de la deducción (TD) falla en la lógica de proposiciones a causa de las variables libres. Pero si las fórmulas involucradas son cerradas entonces se verifica sin problemas dicho teorema.

Teorema 2.1.2 (Teorema de la deducción restringido) *Supongamos que P es una fórmula cerrada. Se verifica:*

$$\textit{si}\ \Gamma \cup \{P\} \models Q\ \textit{entonces}\ \Gamma \models P \to Q.$$

DEM: Sea I un modelo de todas las premisas de Γ, veamos que $I \models P \to Q$. Para ello, sea una valoración v cualquiera y verifiquemos que si $I, v \models P$ entonces $I, v \models Q$. Por ser P cerrada, la hipótesis $I, v \models P$ implica que I es un modelo de P, luego de la hipótesis primera $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ se sigue que $I \models Q$, en particular $I, v \models Q$. □

Existe una formulación más general del (TD), pero de momento nos quedamos con ésta, notando que al ser la fórmula P cerrada hemos podido pasar de la verificabilidad para una valoración a la verificabilidad para todas las valoraciones, lo que no puede hacerse si hay variables libres. Este caso requiere un estudio más delicado que haremos por vía axiomática.

Ejercicios

1. Decidir si es o no una regla de inferencia la eliminación del cuantificador existencial

$$(\mathrm{E}\exists)\ \frac{(\exists x)P}{P}$$

2. A continuación se da una secuencia de inferencias interpretadas. Escribir su expresión formal y determinar si son válidas o no.
(i) Todo el que piensa existe. Pienso, luego existo.
(ii) Pedro es maestro. Todos los maestros son sabios y generosos. Por tanto, alguien es generoso.
(iii) Todos los maestros son sabios y generosos. Por tanto, alguien es generoso.
(iv) Algunos son lógicos. Algunos son lógicos o detectives. Por tanto, algunos son detectives.

2.2. Método de resolución

Extenderemos a predicados la resolución ya estudiada para proposiciones. Como sabemos, el método de resolución está diseñado para averiguar si un conjunto de fórmulas es inconsistente. Como hicimos en la lógica de proposiciones, no demostraremos la validez de los procesos algorítmicos del método, nos limitaremos a exponerlo y aplicarlo a la verificación de leyes lógicas y reglas de inferencia.

Como en el cálculo de proposiciones el método con predicados tiene también dos fases:

- *Fase de preparación.* Consiste en poner las fórmulas que se han de utilizar en forma prenexa clausal, y luego obtener a partir de dichas formas un conjunto de cláusulas proposicionales, es decir, exentas de cuantificadores, para lo que usaremos el llamado *proceso de Skolem.*

- *Fase de ejecución.* Consiste en aplicar la *regla de resolución* (RR) a las cláusulas obtenidas en la fase de preparación buscando deducir una contradicción. Como ahora las cláusulas contienen variables, para hacer coincidir literales complementarios se permite un proceso de *unificación* mediante sustituciones.

Proceso de Skolem

En la fase de preparación se transformará un conjunto finito de fórmulas $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ en un conjunto también finito $\Delta = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ de cláusulas (k será mayor o igual que n), de modo que Γ es inconsistente si y sólo si Δ lo es.

Advirtamos en primer lugar que la inconsistencia de Γ no cambia si se sustituye una fórmula por otra lógicamente equivalente. Esto es lo primero que hacemos en la fase de preparación, sustituir cada fórmula P_i por otra equivalente más conveniente. En primer lugar cerraremos todas las fórmulas y luego pasaremos estos cierres a forma prenexa clausal, algo que ya sabemos hacer y que dará también fórmulas cerradas.

Supongamos pues un conjunto de fórmulas cerradas $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ todas ellas en forma prenexa clausal. Cada una de las fórmula tendrá pues la forma siguiente, con todas las variables x_i distintas:

$$(\Delta_1 x_1)(\Delta_2 x_2)\cdots(\Delta_n x_n)R(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde Δ significa uno cualquiera de los dos cuantificadores y R es una fórmula proposicional en forma clausal con las variables libres que se indican. Ahora queremos determinar una equivalencia de la forma

$$(\Delta_1 x_1)(\Delta_2 x_2)\cdots(\Delta_n x_n)R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cong_r R(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

donde los t_i van a ser términos asociados a los cuantificadores existenciales mediante el procedimiento de Skolem. Los cuantificadores universales tendrán importancia por la posición que ocupan respecto a los cuantificadores existenciales.

Hay que advertir que la relación $\equiv_r$, que llamaremos *r-equivalencia*, r por resolución) va a ser en efecto una relación de equivalencia, pero no la de equivalencia lógica. Será una relación más débil que ésta, pero suficiente para garantizar que la inconsistencia no se altera si se cambia una fórmula por otra r-equivalente.

Definición 2.2.1 *Dos fórmulas P, Q son r-equivalentes, $P \equiv_r Q$, si se cumple: P inconsistente si y sólo si Q inconsistente.*

Es claro que se trata de una relación de equivalencia y que si dos fórmulas son lógicamente equivalentes entonces son r-equivalentes. Un ejemplo que distinga estas dos relaciones es fácil de dar después de lo ya estudiado:

$$(\exists x)P(x) \not\equiv P(a) \text{ pero } (\exists x)P(x) \equiv_r P(a).$$

Esta r-equivalencia da lugar al caso más sencillo del proceso de Skolem, que consiste en eliminar los cuantificadores existenciales introduciendo constantes y funciones:

(PS1) Si una cuantificación $(\exists x)$ está a la izquierda de la fórmula, se elimina y en su radio de acción se sustituye la variable x por una constante a no presente en la fórmula. Si hay varias cuantificaciones existenciales seguidas a la izquierda se realiza el proceso sucesivamente usando una constante diferente cada vez. Ejemplos:

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(A(x,y) \wedge B(x,y,z)] \equiv_r (\forall y)(\forall z)(A(a,y) \wedge B(a,y,z)].$$

$$(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y,x)] \equiv_r A(a) \wedge B(b,a).$$

Pasamos al segundo caso, cuando un cuantificador existencial tiene algún cuantificador universal a su izquierda. La situación ahora es de este tipo:

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \not\equiv P(a, f(x)) \text{ pero } (\forall x)(\exists y)P(x,y) \equiv_r (\forall x)P(x, f(x)).$$

(PS2) Si $(\exists y)$ tiene a su izquierda (en toda la fórmula) a los cuantificadores universales $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)$, se elimina $(\exists y)$ y se sustituye en su radio de acción la variable y por un término $f(x_1,\ldots,x_n)$. Ejemplos:

$$(\forall y)(\exists x)(\neg A(y) \vee B(x,y)) \equiv_r (\forall y)(\neg A(y) \vee B(f(y),y)).$$

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x)(A(x,y) \vee B(x,y,z)) \equiv_r (\forall y)(\forall z)(A(f(y,z),y) \vee B(f(y,z),y,z)).$$

Finalmente, veamos un ejemplo que combina varios casos. El proceso de Skolem aplicado a la fórmula

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)A(x, y, z, u, v, w),$$

da como resultado la fórmula r-equivalente

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)A(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Una vez finalizado el proceso de Skolem de eliminación de los cuantificadores existenciales, en la fórmula sólo quedan cuantificadores universales, que se pueden suprimir en virtud de la equivalencia

$$(\forall x)P(x) \equiv P(x).$$

El resultado es pues una fórmula proposicional en forma clausal. Las fórmulas finales en los ejemplos anteriores son las siguientes:

$$A(a) \wedge B(c, a), \quad A(a, y) \wedge B(a, y, z)], \quad \neg A(y) \vee B(f(y), y),$$

$$A(f(y, z), y) \vee B(f(y, z), y, z), \quad A(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)).$$

Se observa que estas fórmulas son cláusulas proposicionales, con fórmulas atómicas en vez de átomos.

Una vez que se hace esto con todas las fórmulas de Γ se elabora el conjunto de cláusulas resultante Δ y se pasa a la fase de resolución propiamente dicha.

Resolución de cláusulas

Como ya sabemos por lo visto en lógica de proposiciones, el método de resolución pretende averiguar si un conjunto de fórmulas Γ es inconsistente, mediante la aplicación reiterada de la regla de resolución, cuya validez se mantiene en la lógica de predicados (se puede demostrar por aplicación de la regla de casos):

$$\text{(RR)} \qquad \frac{P \vee Q,\ R \vee \neg Q}{P \vee R}$$

La inconsistencia de de un conjunto de fórmulas Γ no cambia si se añade una fórmula que sea su consecuencia lógica, es decir: suponiendo $\Gamma \models Q$, se verifica que Γ es inconsistente si y sólo si $\Gamma \cup \{Q\}$ lo es. De modo que la resolución añade fórmulas al conjunto dado sin alterar su inconsistencia. Pero estos argumentos generales sólo son eficaces si se trabaja con cláusulas, por eso primero hemos realizado la fase de preparación de las fórmulas.

Supongamos pues que tenemos dado un conjunto de cláusulas Δ y vamos a averiguar su inconsistencia por el método de resolución, es decir, ampliando el conjunto Δ mediante la regla de resolución

(RR) aplicada específicamente a cláusulas, de modo que Δ es inconsistente si y sólo si mediante consecutivas aplicaciones de la regla se llega a la cláusula 0 que representa la contradicción.

Pero hay que advertir que ahora las cláusulas tienen literales que son fórmulas atómicas con o sin negación, en las que pueden aparecer variables, y algunos literales pueden parecer complementarios sin serlo realmente. Por ejemplo, el complementario del literal $A(x)$ es el literal $\neg A(x)$, pero podemos encontrarnos con otros como $\neg A(y)$, $\neg A(b)$, $\neg A(f(a))$. Este tipo de literales son de la forma $\neg A(t)$, donde $A(t)$ es el resultado de la sustitución en $A(x)$ de la variable x por un término t. La novedad que se presenta en la resolución de cláusulas con predicados es que con cada cláusula podemos considerar todas las que resulten de ella por sustitución de las variables por términos, lo que da muchas posibilidades de lograr la cancelación de literales, una vez que hacemos lo que se llama la *unificación* de los complementarios mediante una sustitución. Veamos este ejemplo de resolución:

$$\frac{\begin{array}{c} A(x) \vee B(x) \\ C(x,y) \vee \neg A(a) \end{array}}{B(a) \vee C(x,y)} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} A(a) \vee B(a) \\ C(x,y) \vee \neg A(a) \end{array}}{B(a) \vee C(x,y)}$$

La resolución de la izquierda no se puede hacer directamente, pero podemos unificar los literales $A(x)$ y $\neg A(a)$ haciendo en el primero la sustitución de la variable x por la constante a, de modo que entonces quedan perfectamente complementarios y se pueden cancelar. Pero, naturalmente, la sustitución se debe hacer en toda la cláusula que contiene a $A(x)$. Es decir, se hace la sustitución en la primera cláusula y queda la resolución como se indica a la derecha, donde se realiza sin ningún problema. Habitualmente el proceso de unificación se hace mentalmente y sólo se escribe la resolución mostrada a la izquierda.

Comprendido el mecanismo de unificación, podemos pasar ya a explicar con generalidad la regla (RR) para cláusulas. Tomamos un conjunto de cláusulas $\Delta = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ y nos fijamos en dos C_i, C_j, que contengan literales complementarios, ya sea directamente o después de una unificación. Escribimos entonces las cláusulas de la forma $C_i' \vee L_i$, $C_j' \vee \neg L_j$, destacando los literales que vamos a hacer complementarios y denotando con primas el resto de la cláusula. Entonces procedemos a aplicar la siguiente regla de resolución:

Definición 2.2.2 *La* regla de resolución para cláusulas *es el siguiente esquema de inferencia:*

$$\text{(RR)} \qquad \frac{C_i' \vee L_i,\ C_j' \vee \neg L_j}{C_i^* \vee C_j^*}, \qquad \textit{donde}$$

- ▹ $C_i' \vee L_i$, $C_j' \vee \neg L_j$ *son cláusulas previas con* L_i, L_j *literales, en las que se han cambiado variables si fuera preciso para que no las tengan comunes.*

- ▹ C_i^*, C_j^* *son el resultado de hacer sustituciones en* C_i', C_j' *respectivamente, de modo que con tales sustituciones se obtenga la unificación de los literales,* $L_i^* = L_j^*$.

La resolución se completa repitiendo la aplicación de la regla (RR) en busca de la contradicción. Terminaremos con un ejemplo. Haremos la prueba por resolución del silogismo *Barbara*, con las letras mayúsculas indicando predicados:

$$\begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \\ \hline (\forall x)(P(x) \to R(x)) \end{array}$$

Para probar el silogismo tenemos que ver que las premisas y la negación de la conclusión forman un conjunto inconsistente. La primera premisa da lugar a la cláusula $\neg P(x) \vee Q(x)$ y la segunda a $\neg Q(x) \vee R(x)$. La negación de la conclusión es equivalente a $(\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$, que se reduce por el procedimiento de Skolem a $P(a) \wedge \neg R(a)$. Por tanto la resolución de cláusulas que resulta es:

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg P(x) \vee Q(x) & \\ 2. & \neg Q(x) \vee R(x) & \\ 3. & P(a) & \\ 4. & \neg R(a) & \\ \hline 5. & Q(a) & (1(a|x), 3) \\ 6. & \neg Q(a) & (2(a|x), 4) \\ 7. & 0 & (5, 6) \end{array}$$

La anotación $(1(a|x), 3)$ a la derecha de la línea 5 indica que hemos aplicado la regla de resolución con las cláusulas 1 y 2, una vez unificados los complementarios realizando en la cláusula 1 la sustitución $(a|x)$.

Veamos ahora como ejemplo la verificación de la ley lógica de la Proposición 1.1.10(i): $P \to (\forall x)P$, si x no aparece libre en P. Podemos suponer que la fórmula es cerrada, como será su negación en forma prenexa clausal $(\exists x)(P \wedge \neg P)$, cuya equivalente Skolem es $P \wedge \neg P$, que es la contradicción estándar. Si suponemos la misma fórmula con la condición "x aparece libre en P", considerando además que P es un predicado monádico, entonces la fórmula cerrada a considerar es $(\forall x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$, de modo que la forma prenexa clausal de su negación es $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$, que por Skolem da $P(a) \wedge \neg P(b)$, resultando la no contradicción.

Ejercicios

1. Verificar por resolución los siguiente silogismos:

$$\begin{array}{c} (\forall x)(Q(x) \to \neg R(x)) \\ (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \\ \hline (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\exists x)(R(x) \wedge \neg Q(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\exists x)(R(x) \wedge Q(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x) \wedge P(x)) \end{array}$$

2. Verificar por resolución las siguientes inferencias:

$$
\begin{array}{l}
(\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \to \neg R(x)) \\
(\forall x)(S(x) \to R(x)) \\
\hline
(\forall x)(P(x) \to (\neg S(x) \vee T(x)))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\forall x)((P(x) \wedge Q(x)) \to R(x)) \\
(\exists x)(S(x) \wedge \neg R(x)) \\
\hline
(\exists x)(S(x) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x)))
\end{array}
$$

2.3. Resolución de predicados con Prover9

Prover 9 también dispone de un sistema automático que construye resoluciones. La sintaxis utilizada para proposicones se extiende para predicados del siguente modo:

Nombre	En apuntes	Para Prover9	Ejemplo
constantes	a, b, etc.	a, b, etc	a
funciones	$f(x), g(a, y)$ etc.	f(x), g(a,y)	g(f(a),y)
predicados	$P(x), A(x, b)$ etc.	P(x), A(x,b)	A(f(x),y)
para todo	$\forall x$	all x	(all x all y p(x,y))
existe	$\exists x$	exists	(exists x exists y p(x,y))

Hay que notar que para trabajar con Prover9 las fŕmulas que se introducen como premisas o como consecuencia tienen que acabar en un punto.

Por ejemplo, si queremos validar la regla:
$$
\begin{array}{l}
(\forall x)(Q(x) \to \neg R(x)) \\
(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \\
\hline
(\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))
\end{array}
$$

Utilizando la sintaxis anterior introducimos las premisas en la ventana Assumptions:

```
(all x (Q(x)->R(x))).
(exists x (P(x) & Q(x))).
```

y la consecuencia en la ventana Goals:

```
(exists x (P(x) & R(x))).
```

Se obtiene la siguiente resolución:

```
============================== PROOF =================================
1 (all x (Q(x) -> R(x))) # label(non_clause).  [assumption].
2 (exists x (P(x) & Q(x))) # label(non_clause).  [assumption].
3 (exists x (P(x) & R(x))) # label(non_clause) # label(goal).  [goal].
4 Q(c1).  [clausify(2)].
5 -Q(x) | R(x).  [clausify(1)].
6 -P(x) | -R(x).  [deny(3)].
```

```
7 P(c1).  [clausify(2)].
8 -R(c1).  [resolve(6,a,7,a)].
9 R(c1).  [resolve(4,a,5,a)].
10 $F.  [resolve(8,a,9,a)].

============================== end of proof ==========================
```

Prover9 mezcla las fórmulas con las cláusulas. Notemos que en la sucesión de fórmulas anterior, en primer lugar tenemos las premisas que no están en forma clausal. Después las cláusulas de las premisas y de la negación de la conclusión y luego hay una resolución que lleva a $F.

Como en el caso de las proposiciones si intentamos verificar un esquema que no es válido, Prover9 responde con el mensaje: Prover9 exit: exhausted.

La aplicación Prover9 dispone de la herramienta MACE (Models And CounterExamples) que busca uno de estos modelos que nos sirve de contraejemplo. A veces utilizaremos Mace para referimos a MACE.

Por ejemplo, si nos piden que verifiquenos si el siguiente silogismo es una regla:

$$\begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\forall x)(P(x) \to R(x)) \\ \hline (\exists x)(R(x) \land Q(x)) \end{array}$$

Introducimos en en la ventana Assumptions:

```
(all  x (P(x)-> Q(x))).
(all x (P(x)-> R(x))).
```

y en la ventana Goals:

```
(exists x (R(x) & Q(x))).
```

Prover9 reponde: Prover9 exit: exhausted. Sin embargo, podemos buscar un contraejemplo pulsando el botón star de Mace para obtener:

```
interpretation( 2, [number = 1,seconds = 0], [
    relation(P(_), [0,0]),
    relation(Q(_), [0,0]),
    relation(R(_), [0,0])]).
```

También lo podemos disponer este contraejemplo en la siguiente tabla que muestra la funciones características de la interpretaciones de P, Q y R. Es decir que tomando como universo $2 = \{0, 1\}$ la función caráteristica de $\bar{P}$ aplica 0 en 0 y 1 en 0. Esto significa que $\bar{P}$ es el subconjunto vacío y similarmente con $\bar{Q}$ y $\bar{R}$.

P:	0	1
	0	0

Q:	0	1
	0	0

R:	0	1
	0	0

Obviamente esta interpretación es modelo de los premisas y no es un modelo de ls conclusión.

Para probar que el siguiente conjunto con dos fórmulas no es contradictorio.

$P(x, f(x))$,
$\neg P(g(y), y)$.

Introducimos en en la ventana Assumptions:

```
P(x,f(x)).
-P(g(y),y).
```

y en la ventana Goals:

```
F.
```

Prover9 reponde: Prover9 exit: exhausted. Sin embargo, podemos buscar un contraejemplo pulsando el botón star de Mace para obtener:

f:	0	1
	0	1

g:	0	1
	1	0

P:	0	1
0	1	0
1	0	1

MACE genera el universo $2 = \{0, 1\}$ y explicita la definición de las funciones f y g y del predicado P. Esta interpretación es un modelo de ambas fórmulas $\{P(x, f(x)), \neg P(g(y), y)\}$. Luego dicho conjunto no es contradictorio.

2.4. Cláusulas de Horn

En esta sección vamos a estudiar refinamientos del método de resolución para un conjunto particular de cláusulas. Esta clase particular de cláusulas son las cláusulas que intervienen en Prolog.

Definición 2.4.1 *Una* cláusula de Horn *es una cláusula que contiene como máxino un literal positivo. Es decir, si tiene una de las formas siguientes:*

1. $\neg P_1 \vee \cdots \neg P_n \vee Q$,

2. Q,

3. $\neg P_1 \vee \cdots \neg P_n$.

Donde $P_1, \cdots, P_n, Q$ *son fórmulas atómicas.*

Una cláusula de tipo 1 *o de tipo* 2 *se denomina* cláusula definida *y una de tipo* 3 cláusula objetivo. *Las cláusulas de tipo* 1 *se llaman* reglas *y las de tipo* 2 hechos *y también* cláusulas unitarias. *Un* programa definido *(o programa prolog definido) es un conjunto (sucesión finita)* $\mathcal{P}$ *de cláusulas definidas.*

Una cláusula de Horn explicitando cuantificadorees tiene una de las formas siguientes:

1. $\forall x_1 \cdots \forall x_n(\neg P_1 \vee \cdots \neg P_n \vee Q) \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q)$,

2. $\forall x_1 \cdots \forall x_n Q$,

3. $\forall x_1 \cdots \forall x_n(\neg P_1 \vee \cdots \neg P_n) \equiv \neg(\exists x_1 \cdots \exists x_n(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n))$.

Una *co-cláusula consulta* C es una que sea de la forma $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ o bien explicitando sus cuantificadores que sea de la forma $\exists x_1 \cdots \exists x_n(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n)$. Notemos que la negación de una consulta es una clausula objetivo.

Dado un programa definido $\mathcal{P}$ y una co-cláusula consulta C que tiene asociada la cláusula objetivo $G = \neg C$, el problema principal de la programación lógica en el de contestar a al pregunta:

$$\mathcal{P} \models C.$$

Recordemos que $\mathcal{P} \models C$. si y sólo si $\mathcal{P} \cup \{G\}$ es inconsistente (contradictorio) si y sólo si

$$\mathcal{P} \cup \{G\} \vdash_R \perp.$$

Nota 2.4.2 *Se pueden probar los siguientes resultados:*

- *Un programa definido* $\mathcal{P}$ *es siempre consistente.*

- *Un conjunto de cláusulas de Horn que sea inconsistente siempre tiene al menos una cláusula hecho y un cláusula objetivo.*

Definición 2.4.3 *Sea* $\mathcal{S} = \{C_1, \cdots, C_n\}$ *una sucesión de cláusulas. Una* resolución lineal *de una cláusula* C *es una ampliación de la sucesión anterior*

$$\{C_1, \cdots, C_n, C_{n+1}, \cdots, C_{n+m} = C\}$$

de manera que C_{n+i} *es la resolvente de* C_{n+i-1} *y de* C_j *con* $j < n + i - 1$. *Si* $C = \perp$ *diremos que es una* refutación lineal *de* $\mathcal{S}$. *Sea* $\mathcal{P}$ *un programa definido y* G *una cláusula objetivo una refutación de* G *en* $\mathcal{P} \cup \{G\}$ *es una refutación lineal que empieza en* G.

Una resolución unitaria *de cláusula C es una resolución lineal*

$$\{C_1, \cdots, C_n, C_{n+1}, \cdots, C_{n+m} = C\}$$

tal que en cada resolución interviene una cláusula unitaria. Una refutación unitaria *es una resolución unitaria de cláusula* $\perp$.

Se pueden probar los siguientes resultados:

Nota 2.4.4 *Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de cláusulas Horn, $\mathcal{P}$ un programa definido y G una cláusula objetivo.*

- *Si $\mathcal{H}$ es inconsistente, entonces existe una refutación lineal de $\mathcal{H}$.*
- *Si $\mathcal{P} \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación lineal de $\mathcal{P} \cup \{G\}$ empezando en G.*
- *Si $\mathcal{H}$ es inconsistente, entonces existe una refutación unitaria de $\mathcal{H}$.*
- *Si $\mathcal{P} \cup \{G\}$ es inconsistente, entonces existe una refutación unitaria de $\mathcal{P} \cup \{G\}$ empezando en G*

2.5. Deducción natural (Gentzen)

De nuevo en este método de demostración sucederá que las reglas primitivas dadas para las proposiciones sigue siendo válidas cuando las letras P, Q son fórmulas de la lógica de predicados. Además tendremos que admitir alguna regla primitiva más con los cuantificadores y dar las versiones oportunas de los procedimientos primitivos de deducción. En particular, habrá un nuevo procedimiento de *prueba por elección* (PE) que será similar a la prueba por casos (PC) del mismo que $\exists$ es similar a $\vee$.

En la lógica de predicados aparecen reglas y procedimientos cuyo uso requiere alguna restricción en presencia de variables libres, lo que se hace innecesario cuando de usan fórmulas cerradas y todas las variables que se introduzcan sean diferentes de las aparecidas hasta entonces.

Recordemos las *reglas primitivas de la deducción natural* con proposiciones, que siguen siendo válidas cuando las letras P, Q son fórmulas de la lógica de predicados.

Se añaden además como nuevas reglas primitivas:

- La regla de *generalización* o de *introducción del cuantificador universal*

$$\text{(RG, RI}\forall\text{)} \qquad \frac{P(x)}{(\forall x)P(x)}$$

- La regla de *particularización* o de *eliminación del cuantificador universal*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$», que recordamos en el esquema poniendo la indicación «c.c.» como abreviatura de «con condiciones»:

$$\text{(RP, RE}\forall) \qquad \frac{(\forall x)P(x)}{P(t|x)\ \text{(c.c.)}}$$

▹ La regla de *introducción del cuantificador existencial*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$»:

$$\text{(RI}\exists) \qquad \frac{P(t|x)\ \text{(c.c.)}}{(\exists x)P(x)}$$

La *deducción natural* de una conclusión a partir de un conjunto de premisas ($\Gamma \vdash Q$) utiliza las reglas primitivas anteriores y estos cuatro *procedimientos primitivos*:

▹ *Teorema de la deducción.* Se tiene una deducción $\Gamma \vdash P \to Q$ si se hace la deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ sin utilizar la regla de generalización respecto a una variable que aparezca libre en P. En el esquema indicamos «c.c.» como abreviatura de «con condiciones» :

$$\text{(TD)} \qquad \frac{P \vdash Q\ \text{(c.c.)}}{P \to Q}$$

▹ *Reducción al absurdo.* Se tiene una deducción $\Gamma \vdash \neg P$ si se hace una deducción $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q \wedge \neg Q$ sin utilizar la regla de generalización respecto a una variable que aparezca libre en P. En esquema:

$$\text{(RA)} \qquad \frac{P \vdash Q \wedge \neg Q\ \text{(c.c.)}}{\neg P} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \vdash Q\ \text{(c.c.)} \\ P \vdash \neg Q\ \text{(c.c.)} \end{array}}{\neg P}$$

▹ *Prueba por casos.* Igual que en lógica de proposiciones.

▹ *Prueba por elección.* Se tiene la deducción $\Gamma \vdash R$ si se tiene $(\exists x)P(x)$ y se hace una deducción $\Gamma \cup \{P(a)\} \vdash R$ siendo a una constante que no aparece en R. En esquema:

$$\text{(PE)} \qquad \frac{\begin{array}{c} (\exists x)P(x) \\ P(a) \vdash R\ \text{(c.c.)} \end{array}}{R}$$

Nótese que (PE) es similar a (PC), como $\exists$ lo es a $\vee$. Abusando de la notación, (PE) se expresa a veces en forma de eliminación del cuantificador existencial:

$$(\mathrm{E}\exists) \qquad \frac{(\exists x)P(x)}{P(a)}$$

Pero debe quedar claro que (E∃) no es una regla de inferencia válida, como se ve inmediatamente en esta interpretación:

$$\frac{\text{Existe un número natural par}}{\text{El número natural 1 es par}}$$

No obstante el uso de (E∃) como abreviatura puede darse por válido según se desprende de comparar el esquema de demostración ordinario usando (PE) con el esquema abreviado colocado a la derecha:

1.	$(\exists x)P(x)$		Premisa
2.		$P(a)$	Supuesto (PE)
3.		R	$P(a) \vdash R$
4.	R		PE(2-3)

1.	$(\exists x)P(x)$	Premisa
2.	$P(a)$	E∃(1)
3.	R	$P(a) \vdash R$

Terminaremos con un ejemplo sencillo. Vamos a demostrar por deducción natural el silogismo *Ferio*:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(Q(x) \to \neg R(x)) \\ (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))\end{array}}{(\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))}$$

1.	$(\forall x)(Q(x) \to \neg R(x))$	Premisa
2.	$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	Premisa
3.	$P(a) \wedge Q(a)$	E∃(2)
4.	$P(a)$	RE∧(4)
5.	$Q(a)$	RE∧(4)
6.	$Q(a) \to \neg R(a)$	RE∀(1)
7.	$\neg R(a)$	MP(5,6)
8.	$P(a) \wedge \neg R(a)$	RI∧(4,7)
9.	$(\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$	RI∃(8)

Obsérvese en la demostración anterior que las líneas 3-8 son la demostración (proposicional) de la inferencia que resulta quitando al silogismo la cuantificación.

Ejercicios

1. Verificar si los siguiente silogismos son válidos y demostrar los que lo sean por deducción natural:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\exists x)(R(x) \land \neg Q(x))\end{array}}{(\exists x)(R(x) \land \neg P(x))} \qquad \frac{\begin{array}{l}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ (\exists x)(R(x) \land Q(x))\end{array}}{(\exists x)(R(x) \land P(x))}$$

2. Lo mismo con las siguientes inferencias:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(\neg E(x) \to \neg P(x)) \\ P(a)\end{array}}{E(a)} \qquad \frac{(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))}{R(a) \to ((\forall x)(R(x) \to Q(x)) \to \neg P(a))}$$

2.6. Deducción natural con fórmulas cerradas (Gentzen)

En este caso todas las fórmulas que se utilizan en la deducción natural son fórmulas cerradas. Recordemos las *reglas primitivas de la deducción natural* con proposiciones, que siguen siendo válidas cuando las letras P, Q son fórmulas cerradas de la lógica de predicados. Se añaden además como nuevas reglas primitivas:

- La regla de *particularización* o de *eliminación del cuantificador universal*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$», que recordamos en el esquema poniendo la indicación «c.c.» como abreviatura de «con condiciones»:

$$(\text{RP, RE}\forall) \qquad \frac{(\forall x)P(x)}{P(t|x)\ (\text{c.c.})}$$

  Utilizaremos con frecuencia es el siguiente caso particular:

$$(\text{EU}) \qquad \frac{(\forall x)P(x)}{P(a)}$$

  donde a es un símbolo de constante. En este caso $P(x)$ representa un predicado de aridad uno y también, si se quiere con mas generalidad, una fórmula que tiene como única variable libre la x. Hay que notar que como el término a no depende de ninguna variable, se tiene que, en este caso, no hay que imponer ninguna condición adicional.

- La regla de *introducción del cuantificador existencial*, sometida a la condición «t está libre para x en $P(x)$»:

$$\text{(RI}\exists\text{)} \qquad \frac{P(t|x) \text{ (c.c.)}}{(\exists x)P(x)}$$

Utilizaremos con frecuencia es el siguiente caso particular:

$$\text{(IE)} \qquad \frac{P(a)}{(\exists x)P(x)}$$

▹ La regla de *introducción del cuantificador universal*

$$\text{(IU)} \qquad \frac{\begin{array}{l} F_{i_1} \\ \vdots \\ F_{i_n} \\ \vdots \\ P(a) \text{ (No es un supuesto)} \end{array}}{(\forall x)P(x)}$$

Si $P(a)$ se ha deducido de premisas o supuestos previos no cancelados $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$ (es decir, $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}\} \vdash P(a)$), donde el símbolo de constante a no aparece en $F_{i_1}, \cdots, F_{i_n}$, entonces se deduce $(\forall x)P(x)$.

La *deducción natural* de una conclusión a partir de un conjunto de premisas cerradas ($\Gamma \vdash Q$) utiliza las reglas primitivas anteriores y estos cuatro *procedimientos primitivos*:

▹ *Teorema de la deducción* (TD).

▹ *Reducción al absurdo* (IN).

▹ *Prueba por casos*(ED).

Para estos procedimientos se procede del mismo modo que en lógica de proposiciones.

▹ *Prueba por elección.* Se tiene la deducción $\Gamma \vdash R$ si se tiene $(\exists x)P(x)$ y se hace una deducción $\Gamma \cup \{P(a)\} \vdash R$ siendo a un símbolo de constante que no aparece en R, no aparece en las premisas de Γ y tampoco en la fórmula $(\exists x)P(x)$. En esquema:

$$
\text{(EE)} \qquad \begin{array}{c}
F_{i_1} \\
\vdots \\
F_{i_n} \\
\vdots \\
(\exists x)P(x) \\
\quad P(a) \ \text{(Supuesto)} \\
\vdots \\
R \\
\hline
R
\end{array}
$$

donde como ya se ha mencionado a no aparece ni en R, ni en en las premisas o supuestos previos no cancelados $F_{i_1} \cdots F_{i_n}$, ni en $(\exists x)P(x)$.

2.7. Deducción natural de predicados (Fitch)

Esta sección completa la correspondiente sección de la primera parte dedicada a la deducción natural con proposiciones mediante el método deductivo de Fitch. Puesto que el editor/chequeador que vamos a utilizar funciona únicamente con formulas cerradas y no admite símbolos de función daremos un conjunto de reglas y procedimientos primitivos que se adapte a esta situación. Hemos de clarificar que una función se puede considerar como un caso particular de predicado con lo cual este sistema deductivo se podría aplicar a una deducción en la que aparezcan funciones si previamente se ha realizado un cambio de formulación que haya sustituido los símbolos de función por formulas que contengan predicados (tarea que no siempre es fácil). También hay que resaltar que el editor/chequeador utiliza una notación simplificada para las relaciones. Por ejemplo, una propiedad de aridad 3 que normalmente se denota por $R(x, a, c)$ en la sintaxis del editor se simplifica a $Rxad$.

Para la deducción natural de predicados utilizaremos las reglas y procedimientos primitivos de método de Fitch que hemos visto para la lógica de proposiciones y además las reglas y procedimientos primitivos para los cuantificadores que mostramos a continuación:

2.7.1. Eliminación del universal

Ponemos utilizar la regla de eliminación del universal (∀E) que tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\
 & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \qquad \forall\text{E } m
\end{array}
$$

Notemos que todas las apariciones que haya de la variable x se sustituyen por en nombre de una constante que hemos denotado por c pero también se puede utilizar otros nombres: $a, b, \ldots$.

Observemos que el radio de action del cuantificador universal es todo la fórmula $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ que está en la fila m.

Damos un ejemplo de una invocación incorrecta de la regla de eliminación del cuantificador universal

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \forall xBx \rightarrow Bk & \\
\hline
2 & Bb \rightarrow Bk & \text{invocación incorrecta } \forall\text{E } 1
\end{array}
$$

En este caso el radio de acción del cuantificador universal es sólo un fracmento de la fórmula.

Hemos de señalar que el nombre de la constante c puede que ya estuviera en el alfabeto de constantes, pero también es correcto aumentar el alfabeto con un nuevo nombre de constante c.

2.7.2. Introducción del existencial

Esta regla permite sustituir una aparición de una constante, digamos c, por una variable pongamos x. Si en un término depende de una constante c lo podemos indicar por '$\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$' lo que indica que quizás aparezca varias veces. Además hemos de suponer que la variable x no aparece en esta fórmula. Entonces la regla de introducción del existencial $\exists I$ es la siguiente:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\
 & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\text{I } m
\end{array}
$$

Damos un ejemplo de dos invocaciones correctas de la regla:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & Raad & \\
\hline
2 & \exists xRxad & \exists\text{I } 1 \\
3 & \exists y\exists xRxyd & \exists\text{I } 2
\end{array}
$$

Pero la siguiente llamada es incorrecta:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & Raad & \\
\hline
2 & \exists xRxad & \exists\text{I } 1 \\
3 & \exists x\exists xRxxd & \text{invocación incorrecta } \exists\text{I } 2
\end{array}
$$

La expresión de la línea 3 no es un fórmula del lenguaje de predicados.

2.7.3. Introducción del universal

Supongamos que queremos probar '$\forall x F x$' en una determinada interpretación con dominio X de cardinalidad infinita. Una técnica de trabajo sería cambiar el alfabeto a uno nuevo que tuviera muchas más constantes, un nombre de constante c_x para cada $x \in X$ de manera que podemos considerar una nueva interpretación que valore la constante c_x exactamente como x. Utilizando una lógica que permita trabajar un una número infinito de fórmulas entonces tendriamos que si se verifica $\{F c_x | x \in X\}$ con el nuevo alfabeto y nueva interpreración, entonces '$\forall x F x$' en la primera interpretación con un alfabeto que no tenga tantas constantes. Pero como sólo vamos a trabajar con un número finito de fórmulas el método anterior is inabordable.

Vamos a proceder del modo siguiente que no necesita introducir tantas constantes, de hecho sólo vamos a necesitar una constante c. Lo que vamos a hacer es ampliar el alfabeto únicamente con una constante nueva c. Ahora vamos a considerar la familia de interpretaciones del nuevo alfabeto que mantiene lo ya interpretado pero añade una interpretación para cada valoración de c a un elemento de x. Este procedimiento hace que podamos disponer de una familia (infinita si X es infinito) de interpretaciones. Entonces lo que decimos es que si la única fórmula Fc se satisface en todas las interpretaciones de c como los distintos elementos de X, entonces '$\forall x F x$' se satisface en la interpretación inicial con un alfabeto sin el nombre c.

Esta argumentación permite introducir la regla de introducción del cuantificador universal ($\forall$I):

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \quad \forall\mathrm{I}\ m \end{array}$$

En muy importante asegurase de que se verifican las siguientes condiciones:

El nombre c no debe aparecer en las premisas y supuestos no cancelados.

El nombre de variable x no debe aparecer en $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$

Si c ya ha aparecido en las premisas o supuestos no cancelados y estamos considerando una determinada interpretación, entonces el nombre c se valora como un determinado elemento de X. Por lo tanto no podemos aplicar el proceso de aumentar al alfabeto con un nuevo nombre c porque esta constante ya estaba utilizada. Por otra parte, si consideramos otras posibles interpretaciones con dominio X de la constante c, el hecho de que c esta condicionada por las premisas o supuestos no cancelados hace que las posibles interpretaciones de c describan un subconjunto de X que puede ser distinto de X. En este caso la fórmula $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$ no se podrÌa generalizar para cualquier elemento del universo X.

Veamos con un ejemplo una invocación incorrecta de la regla:

1	$\forall x Lxk$	
2	Lkk	$\forall$E 1
3	$\forall x Lxx$	invocación incorrecta de $\forall$I 2

Notemos que en este caso existe la premisa (o supuesto) de la línea 1 contiene la letra k y por lo tanto se ha invocado de modo indebido la regla de introducción del universal.

Sin embargo si el supuesto ya ha sido cancelado, entonces si que se puede aplicar la regla:

1	$\quad \vert\ Gd$	
2	$\quad \vert\ Gd$	R 1
3	$Gd \to Gd$	$\to$I 1–2
4	$\forall z(Gz \to Gz)$	$\forall$I 3

En ese caso se prueba que '$\forall z(Gz \to Gz)$' es un teorema.

2.7.4. Procedimiento primitivo para eliminar el existencial

El cuantificador universal se puede eliminar mediante el siguiente procedimiento (primitivo):

m	$\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$	
i	$\quad \vert\ \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$	
j	$\quad \vert\ \mathscr{B}$	
	$\mathscr{B}$	$\exists$E m, i–j

Hay que tener en cuenta las siguientes restricciones:

c no debe aparecer en ninguna premisa o supuesto no descartado anterior a la línea i,

c no debe aparecer en $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$,

c no debe apacer en la conclusión $\mathscr{B}$.

La comprobación de que se verifican las condiciones anteriores es muy importante. En uso indebido de esta regla puede generar argumentaciones erróneas como la siguiente:

1	Lb	
2	$\exists x \neg Lx$	
3	$\quad \neg Lb$	
4	$\quad Lb \wedge \neg Lb$	$\wedge$I 1, 3
5	$Lb \wedge \neg Lb$	invocación erronea de $\exists$E 2, 3–4

La subtitución de la variable x por b no se puede hacer porque la letra b aparece en la línea 1. Además la letra b no ha desaparecido en la línea 4. La siguiente demostración camufla un poco la argumentación ya que resuelve uno de los problemas pero todavía no es válida:

1	Lb	
2	$\exists x \neg Lx$	
3	$\quad \neg Lb$	
4	$\quad Lb \wedge \neg Lb$	$\wedge$I 1, 3
5	$\quad \exists x(Lx \wedge \neg Lx)$	$\exists$I 4
6	$\exists x(Lx \wedge \neg Lx)$	invocación erronea de $\exists$E 2, 3–5

La moraleja es que si se quiere quitar el existencial hay que indroducir un nuevo supuesto por sustitución de la variable por una nueva constante que no haya aparecido previamente y llevar la argumentación hasta que desaparezca esa constante.

Ejercicios

1. Las siguientes demostraciones son incorrectas. Explica por qué son incorrectas y encuentra una interpretación es la que quede en evidencia que la argumentación es falaz.

1	$\forall x Rxx$	
2	Raa	$\forall$E 1
3	$\forall y Ray$	$\forall$I 2
4	$\forall x \forall y Rxy$	$\forall$I 3

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x \exists y Rxy & \\
\hline
2 & \exists y Ray & \forall\text{E } 1 \\
3 & \quad \begin{array}{|l} Raa \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l} \exists x Rxx \end{array} & \exists\text{I } 3 \\
5 & \exists x Rxx & \exists\text{E } 2,\ 3\text{–}4
\end{array}
$$

2. Las siguientes pruebas no contienen citas (acrónimo de regla o procedimeinte y números de línea). Añade acrónimo y números de línea adecuados para obtener una demostración correcta y completa.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x \exists y (Rxy \vee Ryx) \\
2 & \forall x \neg Rmx \\
\hline
3 & \exists y (Rmy \vee Rym) \\
4 & \quad \begin{array}{|l} Rma \vee Ram \\ \hline \end{array} \\
5 & \quad \begin{array}{|l} \neg Rma \end{array} \\
6 & \quad \begin{array}{|l} Ram \end{array} \\
7 & \quad \begin{array}{|l} \exists x Rxm \end{array} \\
8 & \exists x Rxm
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx) \\
2 & Lab \\ \cline{2-2}
3 & \exists y Lay \to \forall z Lza \\
4 & \exists y Lay \\
5 & \forall z Lza \\
6 & Lca \\
7 & \exists y Lcy \to \forall z Lzc \\
8 & \exists y Lcy \\
9 & \forall z Lzc \\
10 & Lcc \\
11 & \forall x Lxx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \multicolumn{2}{|l}{\forall x(Jx \to Kx)} \\
2 & \multicolumn{2}{|l}{\exists x \forall y Lxy} \\
3 & \multicolumn{2}{|l}{\forall x Jx} \\ \cline{2-2}
4 & & \forall y Lay \\ \cline{3-3}
5 & & Laa \\
6 & & Ja \\
7 & & Ja \to Ka \\
8 & & Ka \\
9 & & Ka \wedge Laa \\
10 & & \exists x(Kx \wedge Lxx) \\
11 & \multicolumn{2}{|l}{\exists x(Kx \wedge Lxx)}
\end{array}
$$

3. Aristóteles y sus sucesores identificaron diversos silogismos que se indican con sus nombres medievales. Encuentra fórmulas que los representen y da una demostración de cada uno de ellos.

- **Barbara**. Todo G es F. Todo H es G. Entonces: Todo H es F
- **Celarent**. Ningún G es F. Todo H es G. Entonces: Ningún H es F
- **Ferio**. Ningún G es F. Algún H es G. Entonces: Algún H no es F
- **Darii**. Todo G es F. Algún H es G. Entonces: Algún H es F.
- **Camestres**. Todo F es G. Ningún H es G. Entonces: Ningún H es F.
- **Cesare**. Ningún F es G. Todo H es G. Entonces: Ningún H es F.
- **Baroko**. Todo F es G. Algún H no es G. Entonces: Algún H no es F.
- **Festino**. Ningún F es G. Algún H es G. Entonces: Algún H no es F.
- **Datisi**. Todo G es F. Algún G es H. Entonces: Algún H es F.
- **Disamis**. Algún G es F. Todo G es H. Entonces: Algún H es F.
- **Ferison**. Ningún G es F. Algún G es H. Entonces: Algún H no es F.
- **Bokardo**. Algún G no es F. Todo G es H. Entonces: Algún H no es F.
- **Camenes**. Todo F es G. Ningún G es H Entonces: Ningún H es F.
- **Dimaris**. Algún F es G. Todo G es H. Entonces: Algún H es F.
- **Fresison**. Ningún F es G. Algún G es H. Entonces: Algún H no es F.

4. Notemos que 'Ningún F es G' se puede formalizar como $\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$ y también por '$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$'. Modificar las demostraciones anteriores utilizando una u otra fórmula.

5. Probar los siguientes silogismos:

- **Barbari**. Alguno es H. Todo G es F. Todo H es G. Entonces: Algún H es F
- **Celaront**. Alguno es H. No G es F. Todo H es G. Entonces: Algún H no es F
- **Cesaro**. Alguno es H. No F es G. Todo H es G. Entonces: Algún H no es F.
- **Camestros**. Alguno es H. Todo F es G. No H es G. Entonces: Algún H no es F.
- **Felapton**. Alguno es G. No G es F. Todo G es H. Entonces: Algún H no es F.
- **Darapti**. Alguno es G. Todo G es F. Todo G es H. Entonces: Algún H es F.
- **Calemos**. Alguno es H. Todo F es G. No G es H. Entonces: Algún H no es F.
- **Fesapo**. Alguno es G. No F es G. Todo G es H. Entonces: Algún H no es F.
- **Bamalip**. Alguno es F. Todo F es G. Todo G es H. Entonces: Algún H es F.

6. Dar una demostración para cada esquema:

1. $\vdash \forall xFx \vee \neg\forall xFx$
2. $\vdash \forall z(Pz \vee \neg Pz)$
3. $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists xAx \vdash \exists xBx$
4. $\forall x(Mx \leftrightarrow Nx), Ma \wedge \exists xRxa \vdash \exists xNx$
5. $\forall x\forall yGxy \vdash \exists xGxx$
6. $\vdash \forall xRxx \rightarrow \exists x\exists yRxy$
7. $\vdash \forall y\exists x(Qy \rightarrow Qx)$
8. $Na \rightarrow \forall x(Mx \leftrightarrow Ma), Ma, \neg Mb \vdash \neg Na$
9. $\forall x\forall y(Gxy \rightarrow Gyx) \vdash \forall x\forall y(Gxy \leftrightarrow Gyx)$
10. $\forall x(\neg Mx \vee Ljx), \forall x(Bx \rightarrow Ljx), \forall x(Mx \vee Bx) \vdash \forall xLjx$

7. Probar en cada pareja de fórmulas siguientes cada una de las fórmulas se puede probar tomando como premisa la otra.

1. $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$, $\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$
2. $\forall x(\neg Ax \rightarrow Bd)$, $\forall xAx \vee Bd$
3. $\exists xPx \rightarrow Qc$, $\forall x(Px \rightarrow Qc)$

8. Para cada una de las parejas siguientes, si son equivalentes dar un par de demostraciones (deducciones naturales) que prueban una fórmula tomando como premisa la otra. Si no son equivalentes da una interpretación que pruebe que no son lógicamente equivalentes.

1. $\forall xPx \rightarrow Qc, \forall x(Px \rightarrow Qc)$
2. $\forall x\forall y\forall zBxyz, \forall xBxxx$

3. $\forall x \forall y Dxy, \forall y \forall x Dxy$
4. $\exists x \forall y Dxy, \forall y \exists x Dxy$
5. $\forall x(Rca \leftrightarrow Rxa), Rca \leftrightarrow \forall x Rxa$

9. Considerar los siguientes esquemas de inferencia. Si son válidos da una demostración (deducción natural) y si no lo son encuentra una interpretación que pruebe que no es válido (no es una regla).

1. $\exists y \forall x Rxy \therefore \forall x \exists y Rxy$
2. $\forall x \exists y Rxy \therefore \exists y \forall x Rxy$
3. $\exists x(Px \wedge \neg Qx) \therefore \forall x(Px \to \neg Qx)$
4. $\forall x(Sx \to Ta), Sd \therefore Ta$
5. $\forall x(Ax \to Bx), \forall x(Bx \to Cx) \therefore \forall x(Ax \to Cx)$
6. $\exists x(Dx \vee Ex), \forall x(Dx \to Fx) \therefore \exists x(Dx \wedge Fx)$
7. $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx) \therefore Rjj$
8. $\exists x \exists y(Rxy \vee Ryx) \therefore Rjj$
9. $\forall x Px \to \forall x Qx, \exists x \neg Px \therefore \exists x \neg Qx$
10. $\exists x Mx \to \exists x Nx, \neg \exists x Nx \therefore \forall x \neg Mx$

2.7.5. Reglas derivadas básicas

En esta sección agregamos algunas reglas derivadas básicas relacionadas con la leyes que conmutan universales y existenciales con negaciones. Para utilizar el editor/chequeador adoptaremos el acrónimo CQ obtenido de la versión inglesa de «Conversion of quantifiers».

m	$\forall x \neg \mathscr{A}$	
	$\neg \exists x \mathscr{A}$	CQ m

y

m	$\neg \exists x \mathscr{A}$	
	$\forall x \neg \mathscr{A}$	CQ m

También añadimos:

m	$\exists x \neg \mathscr{A}$	
	$\neg \forall x \mathscr{A}$	CQ m

y

m	$\neg\forall x\mathcal{A}$	
	$\exists x\neg\mathcal{A}$	CQ m

Estas reglas derivadas se pueden probar a partir de las reglas y procedimientos primitivos. Demostramos dos de estas reglas y dejamos como ejercicio las dos restantes.

1	$\forall x\neg Ax$	
2	$\quad \exists xAx$	
3	$\quad\quad Ac$	
4	$\quad\quad \neg Ac$	$\forall$E 1
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 4, 3
6	$\quad \bot$	$\exists$E 2, 3–5
7	$\neg\exists xAx$	$\neg$I 2–6

1	$\exists x\neg Ax$	
2	$\quad \forall xAx$	
3	$\quad\quad \neg Ac$	
4	$\quad\quad Ac$	$\forall$E 2
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E 3, 4
6	$\quad \bot$	$\exists$E 1, 3–5
7	$\neg\forall xAx$	$\neg$I 2–6

Ejercicios

1. Probar por deducción natural que los siguientes conjuntos de fórmulas son son contradictorios:

1. $Sa \to Tm, Tm \to Sa, Tm \wedge \neg Sa$
2. $\neg\exists xRxa, \forall x\forall yRyx$
3. $\neg\exists x\exists yLxy, Laa$
4. $\forall x(Px \to Qx), \forall z(Pz \to Rz), \forall yPy, \neg Qa \wedge \neg Rb$

2. Probar por deducción natural que los siguientes pares de fórmulas son equivalentes:

1. $\forall x(Ax \to \neg Bx), \neg\exists x(Ax \wedge Bx)$
2. $\forall x(\neg Ax \to Bd), \forall x Ax \vee Bd$

3. Ahora analizamos que sucede en algunos casos cuando movemos de lugar los cuantificadores. Probar por dedución natural que son equivalentes las fórmulas de los siguientes pares (Notar que x no aparece en Ga.):

1. $\forall x(Fx \wedge Ga), \forall x Fx \wedge Ga$
2. $\exists x(Fx \vee Ga), \exists x Fx \vee Ga$
3. $\forall x(Ga \to Fx), Ga \to \forall x Fx$
4. $\forall x(Fx \to Ga), \exists x Fx \to Ga$
5. $\exists x(Ga \to Fx), Ga \to \exists x Fx$
6. $\exists x(Fx \to Ga), \forall x Fx \to Ga$

2.8. Axiomas de Lukasiewicz

Como la lógica de proposiciones, la lógica de predicados admite diversos sistemas axiomáticos que son ampliaciones de los sistemas axiomáticos de aquélla. A título informativo, basta esbozar uno de ellos.

Definición 2.8.1 *El* sistema axiomático de Lukasiewicz *para la lógica de predicados tiene como axiomas todas las fórmulas de una de las siguientes formas:*

(L1) $P \to (Q \to P)$.
(L2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.
(L3) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$.
(L4) $(\forall x)P \to P$.
(L5) $(\forall x)P(x) \to P(t|x)$, *si* t *es un término libre para* x *en* $P(x)$.
(L6) $(\forall x)(P \to Q) \to (P \to (\forall x)Q)$, *si* x *no aparece libre en* P.

Además, son primitivas la regla de modus ponens y la regla de generalización:

$$\text{(MP)}\quad \dfrac{\begin{array}{c}P \to Q\\ P\end{array}}{Q} \qquad\qquad \text{(RG)}\quad \dfrac{P}{(\forall x)P}$$

Los tres primeros axiomas son los mismos de la lógica de proposiciones, referidos ahora a fórmulas P, Q, R cualesquiera. Por tanto, según el Lema 1.1.7, son leyes lógicas. Que (L4) es una ley lógica es evidente, y que lo es (L5) sigue del Teorema 1.1.12. Se deja como ejercicio demostrar que (L6) también es una ley lógica. Por otra parte, ya sabemos que (MP) y (RG) son reglas de inferencia, de modo que todo lo que demostremos a partir del sistema axiomático de Lukasiewicz serán nuevas leyes lógicas y reglas de inferencia. Esta característica se conoce con el nombre de *teorema de corrección* de la lógica de proposiciones, porque asegura que todo lo que se demuestra en el sistema axiomático es válido desde el punto de vista semántico de las interpretaciones, lo que con símbolos se indica así:

$$\text{si } \Gamma \vdash P \text{ entonces } \Gamma \models P.$$

El enunciado recíproco, el llamado *teorema de completitud*, tiene una demostración difícil y queda fuera de los límites de este curso introductorio.

Tampoco vamos a desarrollar ahora el sistema axiomático de Lukasiewicz, nos limitaremos a enunciar sin demostración la versión completa del teorema de la deducción, que es como sigue:

Teorema 2.8.2 (Teorema de la deducción) *Se verifica*

$$\textit{si } \Gamma \cup \{P\} \vdash Q \textit{ entonces } \Gamma \vdash P \rightarrow Q$$

siempre que se cumpla la siguiente condición:

la demostración de $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ *no utilizó la regla de generalización*
respecto a variable libres de P*.*

En el Teorema 2.1.2 dimos una forma restringida del (TD) que fue demostrado por método semántico. Ahora sería un corolario simple del Teorema 2.8.2. La demostración de este último repite la dada para proposiciones, pero con un argumento adicional sobre el cuantificador universal que utiliza la regla que vamos a demostrar a continuación. Demostraremos también algo que ya quedó demostrado por método semántico en la Proposición 1.1.10.

Proposición 2.8.3 *Se verifica:*
(i) $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (\forall x)Q$*, si* x *no aparece libre en* P*.*
(ii) $\vdash P \rightarrow (\forall x)P$*, si* x *no aparece libre en* P*.*

DEM: Prueba de (i):

1.	$P \rightarrow Q$	Premisa
2.	$(\forall x)(P \rightarrow Q)$	(RG) 1
3.	$(\forall x)(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (\forall x)Q)$	(L6)
5.	$P \rightarrow (\forall x)Q$	MP(3,4)

La prueba de (ii) usa la anterior empezando por una ley lógica (con forma tautológica):

1.	$P \to P$	Ley
2.	$P \to (\forall x)P$	Regla(i) 1

Nótese que en ambos casos la hipótesis adicional del enunciado está implícita en el uso del axioma (L6). □

El desarrollo del este sistema axiomático de la lógica de predicados continúa aplicando el Teorema 2.8.2 para obtener la regla de reducción al absurdo de la lógica de predicados, etc. En particular, el sistema axiomático permite la demostración de todas las equivalencias que se utilizan para poner fórmulas en forma normal prenexa, como veremos en alguno de los ejercicios que siguen. Terminaremos esta exposición dando un ejemplo de demostración por (RA) (recuérdese el Corolario 1.1.13).

Proposición 2.8.4 *Se verifica: $P(t|x) \vdash (\exists x)P(x)$, si t es un término libre para x en $P(x)$.*

DEM:

1.	$P(t\|x)$		Premisa
2.		$(\forall x)\neg P(x)$	Supuesto (RA)
3.		$(\forall x)\neg P(x) \to \neg P(t\|x)$	(L5)
5.		$\neg P(t\|x)$	MP(2,3)
6.		0	RI$\wedge$(1,5)
7.	$(\exists x)P(x)$		RA(2-6)

Nótese que la hipótesis adicional del enunciado está implícita en el uso del axioma (L5). □

Ejercicios

1. Verificar por el método semántico que el axioma (L6) es en efecto una ley lógica, y dar un ejemplo que pruebe que la hipótesis sobre la variable x es necesaria.

2. Demostrar: (i) $P \to (\forall x)Q \vdash (\forall x)(P \to Q)$.
   (ii) $\vdash (P \to (\forall x)Q) \to (\forall x)(P \to Q)$, si x no aparece libre en P.
   (iii) Comprobar que la fórmula de (ii) puede no ser válida si falla la hipótesis sobre la variable x:

3. Demostrar $\vdash (\forall x)(P \to Q) \to ((\forall x)P \to (\forall x)Q)$.

4. Demostrar: (i) $P \to (\exists x)Q \vdash (\exists x)(P \to Q)$.
   (ii) $\vdash (P \to (\exists x)Q) \to (\exists x)(P \to Q)$, si x no aparece libre en P.

5. Demostrar la regla de inferencia

$$\frac{\begin{array}{c}(\exists x)(P \to Q)\\ P\end{array}}{(\exists x)Q}$$

Reglas y procedimientos primitivos del método deductivo de Fitch

Regla de eliminación del conector condicional:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \to \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \to\text{E } m, n \end{array}$$

Regla de eliminación del conector negación:

$$\begin{array}{r|ll} m & \neg\mathscr{A} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \bot & \neg\text{E } m, n \end{array}$$

Regla X

$$\begin{array}{r|ll} m & \bot & \\ & \mathscr{A} & \text{X } m \end{array}$$

Reglas de introducción y eliminación del connector conjunción:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \wedge\text{I } m, n \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} & \\ & \mathscr{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

Reglas de introducción del conector disyunción:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} & \vee\text{I } m \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} \vee \mathscr{A} & \vee\text{I } m \end{array}$$

Reglas de eliminación de conector bicondicional:

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{A} & \\ & \mathscr{B} & \leftrightarrow\text{E } m, n \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} & \\ n & \mathscr{B} & \\ & \mathscr{A} & \leftrightarrow\text{E } m, n \end{array}$$

Regla de eliminación del universal (∀E) que tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\ & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \forall\text{E } m \end{array}$$

Regla de introducción del existencial $\exists I$ (la variable x no aparece en esta fórmula de la línea m)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\text{I } m \end{array}$$

Regla de introducción del cuantificador universal (∀I) (El nombre c no debe aparecer en las premisas y supuestos no cancelados. El nombre de variable x no debe aparecer en $\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\ & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \forall\text{I } m \end{array}$$

Procedimiento para introducir el condicional

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \mathscr{A} \\
\hline
j & \quad \mathscr{B} \\
 & \mathscr{A} \to \mathscr{B} \qquad \to\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Procedimiento para introducir la negación

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \mathscr{A} \\
\hline
j & \quad \bot \\
 & \neg\mathscr{A} \qquad \neg\mathrm{I}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Procedimiento para eliminar la disyunción (regla de los casos)

$$\begin{array}{l|l}
m & \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \\
i & \quad \mathscr{A} \\
j & \quad \mathscr{C} \\
k & \quad \mathscr{B} \\
l & \quad \mathscr{C} \\
 & \mathscr{C} \qquad \vee\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

Procedimiento de la prueba indirecta (redución al absurdo)

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \neg\mathscr{A} \\
\hline
j & \quad \bot \\
 & \mathscr{A} \qquad \mathrm{IP}\ i\text{–}j
\end{array}$$

Procedimiento de introducción del conector bicondicional:

$$\begin{array}{l|l}
i & \quad \mathscr{A} \\
j & \quad \mathscr{B} \\
k & \quad \mathscr{B} \\
l & \quad \mathscr{A} \\
 & \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \qquad \leftrightarrow\mathrm{I}\ i\text{–}j,\ k\text{–}l
\end{array}$$

Procedimiento de eliminación del cuantificador existencial (c no debe aparecer en ninguna premisa o supuesto no descartado anterior a la línea i, c no debe aparecer en $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$, c no debe apacer en la conclusión $\mathscr{B}$):

$$\begin{array}{l|l}
m & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) \\
i & \quad \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) \\
j & \quad \mathscr{B} \\
 & \mathscr{B} \qquad \exists\mathrm{E}\ m,\ i\text{–}j
\end{array}$$