EXAMEN NO PRESENCIAL (1º - GM / GII) 16 - 04 - 2020

Para contestar una cuestión escribe el cuadro del documento word adjunto sólamente una de las tres respuestas posibles: (a), (b), (c).

1. La cadena de símbolos $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ formada a partir del alfabeto $\{p, q\}$

   (a) no es una proposición bien formulada

   (b) es una proposición bien formulada

   (c) no se puede saber

   Solución: (b)

2. La cadena de símbolos $(((p \leftrightarrow q) \wedge p) \wedge \neg q)$ formada a partir del alfabeto $\{p, q\}$

   (a) no es una proposición bien formulada

   (b) es una proposición bien formulada

   (c) no se puede saber

   Solución: (b)

3. Sabiendo que $\bar{v}(q \rightarrow \neg p) = 0$ se puede asegurar que:

   (a) $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$

   (b) $v(p) = 1$ y $v(q) = 1$

   (c) $v(p) = 0$

   Solución: (b)

4. Dada la proposición $P = (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \vee \neg r) \rightarrow \neg p)$ y una interpretación principal v tal que $v(p) = v(q) = 0$, para que $\bar{v}(P) = 1$, ¿cuánto tiene que valer $v(r)$?

   (a) $v(r) = 1$

   (b) $v(r) = 0$

   (c) Cualquier valor

   Solución: (c)

5. Dada la proposición $P = \neg(p \rightarrow r) \rightarrow (q \vee r)$ y una interpretación principal v tal que $v(p) = v(q) = 0$, para que $\bar{v}(P) = 1$, ¿cuánto tiene que valer $v(r)$?

   (a) Cualquier valor

   (b) $v(r) = 1$

   (c) $v(r) = 0$

   Solución: (a)

6. La proposición $p \to \neg p$ es una:

   (a) contingencia

   (b) contradicción

   (c) tautología

   Solución: (a)

7. La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \to p)$ es una:

   (a) tautología

   (b) contradicción

   (c) contingencia

   Solución: (a)

8. La proposición $(p \to (q \vee p)) \wedge (p \to \neg q)$ es una:

   (a) contradicción

   (b) tautología

   (c) contingencia

   Solución: (c)

9. Si P es una contradicción y Q es una proposición cualquiera, entonces $P \to Q$ es una:

   (a) contradicción

   (b) contingencia

   (c) tautología

   Solución: (c)

10. Si P y Q son contingencias, entonces $P \wedge Q$ es siempre:

    (a) falsable

    (b) consistente

    (c) una tautología

    Solución: (a)

11. La proposición $p \to (q \to r)$ es equivalente a:

    (a) $(p \to q) \to r$

    (b) $\neg p \vee (r \vee \neg q)$

    (c) Ninguna de las dos

    Solución: (b)

12. La proposición $\neg((p \to q) \vee \neg(\neg p \vee q))$ es equivalente a:

    (a) una tautología

    (b) $\neg(p \to q)$

    (c) una contradicción

    Solución: (c)

13. Sean las proposiciones $P = p \leftrightarrow q$, $Q = \neg(p \wedge \neg q)$, se cumple:

    (a) $P \models Q$

    (b) $Q \models P$

    (c) $P \equiv Q$

    Solución: (a)

14. Sea la proposición $P = p \vee \neg p$, se cumple:

    (a) P es una cláusula estándar

    (b) P es una cláusula

    (c) P está en forma normal conjuntiva

    Solución: (b)

15. Sea la proposición $P = p \vee \neg p$, entonces se cumple:

    (a) P es una conjunción de literales

    (b) P es una cláusula estándar

    (c) P está en forma normal disyuntiva

    Solución: (c)

16. Sean la proposiciones $P = p \to (q \to r)$ y $Q = (p \to q) \to r$, entonces se cumple:

    (a) P modela a Q

    (b) Q modela a P

    (c) P es equivalente a Q

    Solución: (b)

17. Sean la proposiciones $P = p \to (q \to r)$ y $Q = (p \to q) \to r$, entonces se cumple:

    (a) $P \wedge Q$ es consistente

    (b) $P \wedge Q$ es una tautología

    (c) $P \wedge Q$ es una contradicción

    Solución: (a)

18. Sea A un álgebra de Boole y sean $x, y \in A$. Una de las propiedades de absorción asegura que:

    (a) $x \vee (x \wedge y) = y$

    (b) $x \vee (x \wedge y) = x$

    (c) $x \wedge (x \vee y) = y$

    Solución: (b)

19. Sea A un álgebra de Boole y sea $x \in A$, $x \neq 1$, entonces se cumple:

    (a) $x \wedge \neg x = 1$

    (b) $x \wedge \neg x = 0$

    (c) $x \wedge \neg x = \neg(x \wedge x)$

    Solución: (b)

20. Sea A un álgebra de Boole y sean $x, y \in A$, tales que $0 \neq x \neq 1$, $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$, entonces se cumple:

    (a) $y = 0$

    (b) $y = 1$

    (c) $y = \neg x$

    Solución: (c)

21. Sea Γ un conjunto de proposiciones, $P \in \mathcal{P}$ y supongamos que $\Gamma \models P$. Entonces se cumple:

    (a) $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es un conjunto contradictorio si y sólo si se cumple la condición adicional de que las proposiciones de Γ sean cláusulas

    (b) $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es un conjunto contradictorio si y sólo si se cumple la condición adicional de que las proposiciones de Γ sean cláusulas estándar

    (c) $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es un conjunto contradictorio

    Solución: (c)

22. Sea $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ el conjunto de todas las proposiciones con alfabeto $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Entonces se cumple:

    (a) $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ no es un conjunto contradictorio

    (b) $P \models \mathcal{P}(\mathcal{A})$

    (c) $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \models P$

    Solución: (c)

23. Sea $\Gamma \subset \Gamma' \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Entonces se cumple:

    (a) Si Γ es contradictorio, entonces Γ' es contradictorio

    (b) Si Γ' es contradictorio, entonces Γ es contradictorio

    (c) Si Γ es contradictorio si y sólo si $\Gamma' \setminus \Gamma$ es contradictorio

    Solución: (a)

24. Sea $\Gamma = \{P_1, \cdots, P_n\}$, $n > 1$. Entonces se cumple:

    (a) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \vee \cdots \vee P_n$ es una contradicción

    (b) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \vee \cdots \vee P_n$ es una tautología

    (c) Γ es contradictorio si y sólo si $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ es una contradicción

    Solución: (c)

25. En cualquier álgebra de proposiciones se cumple que:

    (a) toda regla de inferencia es un esquema de inferencia

    (b) un esquema de inferencia es una regla de inferencia

    (c) algunas reglas de inferencia no son esquemas de inferencia

    Solución: (a)

26. Sea Γ un conjunto de proposiciones. Entonces se cumple:

    (a) Si Γ es un conjunto nulo, entonces es contradictorio

    (b) Si Γ es un conjunto nulo y $P \in \Gamma$, entonces $\neg P \in \Gamma$

    (c) Si Γ es un conjunto contradictorio, entonces es un conjunto nulo

    Solución: (a)

27. Sea Γ un conjunto finito no vacío de tautologías generadas por un alfabeto finito no vacío $\mathcal{A}$. Entonces se cumple:

    (a) Γ es equivalente a un conjunto no vacío de cláusulas estándar

    (b) Las proposiciones de Γ son cláusulas

    (c) $\neg\Gamma = \{\neg P | P \in \Gamma\}$ es equivalente a un conjunto de cláusulas

    Solución: (c)

28. Sea Γ un conjunto finito no vacío de cláusulas generadas por un alfabeto finito no vacío $\mathcal{A}$. Entonces se cumple:

    (a) Si todos los literales de cada cláusula son positivos, entonces Γ es contradictorio

    (b) Si todos los literales de cada cláusula son negativos, entonces Γ es contradictorio

    (c) Si Γ es contradictorio, entonces existe una cláusula con un literal positivo y existe otra cláusula con un literal negativo

    Solución: (c)

29. Sea Γ un conjunto finito no vacío de cláusulas generadas por un alfabeto finito no vacío $\mathcal{A}$. Entonces se cumple:

    (a) Si Γ es contradictorio, cada interpretación es un contramodelo de alguna cláusula de Γ

    (b) Si Γ es contradictorio, entonces cada átomo interviene en el mismo número de literales positivos que negativos

    (c) Si Γ es contradictorio, entonces el número total de literales positivos de las cláusulas de Γ es igual que el número total de literales negativos de las cláusulas de Γ

    Solución: (a)

30. Sea $\Gamma = \{p \to q, p, \neg q\}$ y sea P una proposición. Entonces se cumple:

    (a) $\Gamma \cup \{P\}$ no es contradictorio

    (b) $\Gamma \cup \{\neg P\}$ no es contradictorio

    (c) $\Gamma \models P$

    Solución: (c)

EXAMEN NO PRESENCIAL (1º - GM / GII) 16 - 04 - 2020

Problemas (Cada problema vale 30 puntos. Tiempo 90 minutos)

Problema 1. Utilizar el método de resolución para validar el siguiente esquema de inferencia.

$$\begin{array}{c} P3 \wedge P2 \wedge P1 \wedge Q2 \wedge Q1 \\ ((P2 \wedge P1) \vee (P2 \wedge Q1)) \to A \\ P3 \wedge A \to B \\ A \wedge Q2 \to T1 \\ P1 \wedge Q1 \to H \\ T1 \wedge H \to T2 \\ \hline T1 \wedge T2 \wedge B \end{array}$$

Una solución:

En primer lugar buscamos las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$P3 \wedge P2 \wedge P1 \wedge Q2 \wedge Q1$ ya está en forma clausal y genera 5 cláusulas.

$((P2 \wedge P1) \vee (P2 \wedge Q1)) \to A \equiv \neg((P2 \wedge P1) \vee (P2 \wedge Q1)) \vee A \equiv (\neg(P2 \wedge P1) \wedge \neg(P2 \wedge Q1)) \vee A \equiv ((\neg P2 \vee \neg P1) \wedge (\neg P2 \vee \neg Q1)) \vee A \equiv (\neg P2 \vee \neg P1 \vee A) \wedge (\neg P2 \vee \neg Q1 \vee A)$

$P3 \wedge A \to B \equiv \neg P3 \vee \neg A \vee B$

$A \wedge Q2 \to T1 \equiv \neg A \vee \neg Q2 \vee T1$

$P1 \wedge Q1 \to H \equiv \neg P1 \vee \neg Q1 \vee H$

$T1 \wedge H \to T2 \equiv \neg T1 \vee \neg H \vee T2$

$\neg(T1 \wedge T2 \wedge B) \equiv \neg T1 \vee \neg T2 \neg B$

Después consideramos el conjunto de cláusulas obtenidas y aplicamos el procediemiento de resolución.

1. $P3$
2. $P2$
3. $P1$
4. $Q2$
5. $Q1$
6. $\neg P2 \vee \neg P1 \vee A$
7. $\neg P2 \vee \neg Q1 \vee A$
8. $\neg P3 \vee \neg A \vee B$

9. $\neg A \vee \neg Q2 \vee T1$

10. $\neg P1 \vee \neg Q1 \vee H$

11. $\neg T1 \vee \neg H \vee T2$

12. $\neg T1 \vee \neg T2 \vee \neg B$

$- -$

13. $\neg T1 \vee \neg T2 \vee \neg P3 \vee \neg A \quad (8, 12)$.

14. $\neg T1 \vee \neg T2 \vee \neg P3 \vee \neg P2 \vee \neg Q1 \quad (13, 7)$.

15. $\neg T1 \vee \neg T2 \vee \neg P2 \vee \neg Q1 \quad (14, 1)$.

16. $\neg T1 \vee \neg T2 \vee \neg Q1 \quad (15, 2)$.

17. $\neg T1 \vee \neg T2 \quad (16, 5)$.

18. $\neg T1 \vee \neg H \quad (17, 11)$.

19. $\neg T1 \vee \neg P1 \vee \neg Q1 \quad (18, 10)$.

20. $\neg T1 \vee \neg Q1 \quad (19, 3)$.

21. $\neg T1 \quad (20, 5)$.

22. $\neg A \vee Q2 \quad (21, 9)$.

23. $\neg P2 \vee \neg Q1 \vee \neg Q2 \quad (22, 7)$.

24. $\neg Q1 \vee \neg Q2 \quad (23, 2)$.

25. $\neg Q1 \quad (24, 4)$.

26. $\perp \quad (25, 5)$.

Problema 2. Considerar las proposiciones $P = p \wedge \neg q$, $Q = \neg p \wedge q$ y el alfabeto $\mathcal{A} = \{p, q, r\}$.

a) Dar la forma normal conjuntiva de $P \vee Q$ respecto a $\mathcal{A}$.

b) Dar la forma normal disyuntiva de $P \vee Q$ respecto a $\mathcal{A}$.

c) Encontrar dos proposiciones X, Y tales que X tenga tres modelos, Y tenga un modelo, $X \wedge (P \vee Q)$, $Y \wedge (P \vee Q)$, $X \wedge Y$ sean contradiciones y $X \vee Y \vee P \vee Q$ sea una taulotología.

Una solución:

Calculemos la forma normal conjuntiva

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Por lo tanto los contramodelos de $P \vee Q$ son $\{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0)(1,1,1)\}$

En consecuencia los modelos de $P \vee Q$ son $\{(1,0,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$ que determinan la forma disyuntiva normal

$P \vee Q \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Notemos que también se puede obtener esta forma normal mediante equivalencias:

$P \vee Q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Basta tomar como modelos de $X \vee Y$ los contramodelos de $P \vee Q$ para $X \wedge (P \vee Q)$, $Y \wedge (P \vee Q)$, sean contradiciones y $X \vee Y \vee P \vee Q$ sea una taulotología; es decir que $X \vee Y \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Para que X tengan tres modelos e Y un modelo y $X \wedge Y$ sea una contradicción tenemos "esencialmente" cuatro soluciones

$X_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r), \quad Y_1 = (p \wedge q \wedge r)$

o

$X_2 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r), \quad Y_2 = (p \wedge q \wedge \neg r)$

o

$X_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r), \quad Y_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$

o bien

$X_4 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r), \quad Y_4 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$