Cálculo Infinitesimal

Hoja 4.

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x-4}$

   b) $h(x) = \log \dfrac{x-1}{x^2-3x-4}$

   c) $k(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$

   d) $(l \circ k)(x)$

   e) $g(x) = \sqrt{f(x)}$

   f) $j(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x-1}{5}$

   g) $l(x) = \sqrt{x-1}$

   h) $(k \circ l)(x)$

2. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ -1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Demostrar que f y g no son continuas en $x = 0$. Demostrar que tanto $f + g$ como $f \cdot g$ son funciones continuas en $x = 0$.

3. Comprobar con la definición de límite $\epsilon - \delta$ que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2};$$

   y que no existe el límite

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}.$$

4. Calcular los límites siguientes:

   a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

   b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

   d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

   e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

   f) $\displaystyle\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

   g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+1)(x+2)} - x\right)$

   h) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

   i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+3x)^2-(1+2x)^3}{x^2}$

   j) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$

   k) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2}$

   l) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

   m) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

   n) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^4-(\sqrt{x^2+1}-x)^4}{x}$

   ñ) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan^2 x}$

5. Sea f una función definida en $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ por $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$. ¿Puede definirse f en $x=2$ de forma que f sea continua?

6. Estudiar la continuidad de la función $f:(0,2)\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x & \text{si } 0<x\leq 1\\ \log x & \text{si } 1<x<2.\end{cases}$$

7. Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{6}{x}$.

b) $f(x)=x^2-9$.

c) $f(x)=3x-\cos x$.

d) $f(x)=\dfrac{x}{xr-x}$.

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

f) $f(x)=\tan x$.

g) $f(x)=\dfrac{|x+7|}{x}$

h) $f(x)=\begin{cases}\tan\frac{\pi x}{4}, & |x|<1,\\ x, & |x|\geq 1.\end{cases}$

i) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|x}{x+2}$

j) $f(x)=\dfrac{|x^2+4x|(x+2)}{x+4}$

k) $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-1}{x}, & x<0,\\ 5x, & x\geq 0.\end{cases}$

8. Encontrar los valores de a que hacen continuas las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geq 1,\\ ax-4, & x<1.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3x^3, & x\leq 1,\\ ax+5, & x>1.\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{4\operatorname{sen}x}{x}, & x<0,\\ a-2x, & x\geq 0.\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-a^2}{x-a}, & x\neq a,\\ 8, & x=a.\end{cases}$

9. Estudia los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\pi\ \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^p-a^p}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen}x}}{x-\operatorname{sen}x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}x-1}{\log(1+x)}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

g) $\displaystyle\lim_{+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{(x^2+3)\ \operatorname{tg}\frac{x-1}{3x^2}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x}\,)^{1/x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{\log(1+x^3-2x^4)}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}2x}{e^{x^3}-1}$

10. Sea $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios primos entre sí. Hallar, si existe, el límite de f en un punto $a\in\mathbb{R}$.

11. Sabiendo que
$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=c,$$
calcular el límte
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}.$$