Primera Prueba-A: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 14 de noviembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [11][12]

1. **(0,8 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo ó da contraejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes justifica tus respuestas):

   a) Define familia libre de vectores de un $\mathbb{R}^n$. Describe un procedimiento que, usando reducción gaussiana, te permita concluir que la familia $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es ligada.

   b) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema homogéneo de ecuaciones $(a-1)x + (a+1)z + t = 0$ y $2(a+1)x + y + z = 0$.

   c) Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (1, -2, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, -2, 1)$ cumplen que $v_1 = 4u_1 + 2u_2 + 5u_3$, que $[v_2]_{\mathcal{B}} = (-2, -1, -2)$ y que $v_3 + 3u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$, ¿qué vectores de $\mathbb{R}^3$ son exactamente u_1, u_2 y u_3?

   d) Define aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Cómo se construye la matriz coordenada de T y qué relación tiene con T?

2. **(3,3 puntos)** Para los subespacios S, T de $\mathbb{R}^4$, calcula una base y su dimensión. Comprueba que S está contenido en T y calcula las coordenadas de los vectores de la base de S en la base de T (las que has calculado al principio).

   - $S = \{(x, y, z, t) : 2x + y - z + t = 0; x - y + z + t = 0\}$
   - $T = Gen\{(-1, 0, 0, 1), (-5, 0, 1, 0), (1, 1/5, -1, 5), (5, 1, 0, 0)\}$

3. **(3,5 puntos)**Para la aplicación lineal T de matriz canónica:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} -a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & ab & a \end{pmatrix}$$

   se pide:

[11] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas.

[12] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios. En otro caso, la valoración podría ser reducida a la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

a) **(1,25 puntos)** que calcules los valores de a y b para los que T no es ni inyectiva ni suprayectiva;

b) **(1 punto)** que, para los casos del apartado a), encuentres una base $\mathcal{B}_1$ del núcleo de T y una base $\mathcal{B}_2$ del conjunto imagen de T;

c) **(1,25 puntos)** Elige un vector no nulo $\vec{u}$de la imagen de T que no sea uno de la base $\mathcal{B}_2$ que has dado y calcula todas sus preimágenes (recuerda que esto lo denotamos como $T^{-1}(\vec{u})$.

Primera Prueba-B: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 14 de noviembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [13][14]

1. **(0,8 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo ó da contraejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes justifica tus respuestas):

   - Define subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$. Pon un ejemplo de un subconjunto infinito de $\mathbb{R}^3$ que no sea subespacio vectorial indicando las propiedades de la definición que no cumple.
   - Define familia ligada de vectores de un $\mathbb{R}^n$. Describe un procedimiento que, usando reducción gaussiana, te permita concluir que una familia de $\mathbb{R}^n$ es ligada.
   - Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -2, 1)$ y $v_3 = (1, -2, 2)$ cumplen que $[v_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 1)$, que $[v_2]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 1)$ y que $u_3 = v_3 + 3u_1 + 2u_2$, ¿qué vectores de $\mathbb{R}^3$ son exactamente u_1, u_2 y u_3?
   - Completa el texto aquí mismo: Si A es una matriz real de orden $p \times q$, para cada vector X de $(\dots)$ componentes, el producto AX nos permite definir una aplicación lineal T cuyo conjunto inicial es $(\dots)$ y cuyo conjunto final es $(\dots)$. El núcleo y el imagen de T coinciden exactamente con los subespacios $(\dots)$ y $(\dots)$ de la matriz A. Además, la aplicación T es inyectiva siempre que el rango de A sea $(\dots)$ y es suprayectiva en el caso de que el rango de A sea $(\dots)$.

2. **(3,3 puntos)** Para los subespacios S, T de $\mathbb{R}^4$, calcula los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que los dos subespacios tienen dimensión 2. Si $\alpha = 3$, contesta razonadamente: ¿es posible encontrar alguna base de $\mathbb{R}^4$ usando dos vectores de S y otros dos de T?

   - $S = \{(x, y, z, t) : x + y - z + t = 0; (\alpha - 1)x + (\alpha + 1)z + t = 0\}$

[13] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas;

[14] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios; en otro caso, la valoración será sobre la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

- $T = \{(x,y,z,t) : x + y - \alpha z = 0; 2(\alpha+1)x + y + z = 0\}$

3. (**3,5 puntos**) Para la aplicación lineal T cuya matriz canónica es:

$$B_{a,b} = \begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & ab \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

se pide:

a) **(1,25 puntos)** que calcules los valores de a y b para los que T no es ni inyectiva ni suprayectiva;

b) **(1 punto)** que, para los casos del apartado a), encuentres una base $\mathcal{B}_1$ del núcleo de T y una base $\mathcal{B}_2$ del conjunto imagen de T;

c) **(1,25 puntos)** Elige un vector no nulo $\vec{u}$de la imagen de T que no sea uno de la base $\mathcal{B}_2$ que has dado y calcula todas sus preimágenes (recuerda que esto lo denotamos como $T^{-1}(\vec{u})$.

Primera Prueba-C: Cálculo Matricial y Vectorial
Fecha: 14 de noviembre de 2014
Calificación: Sobre 10 puntos [15][16]

1. **(0,8 puntos por apartado)** Define, contesta, pon ejemplo ó da contraejemplo, calcula ó prueba según se pida (en todos los apartados debes justifica tus respuestas):

   - Enuncia dos resultados equivalentes a la siguiente afirmación: para cualquier matriz A de orden $m \times n$, el sistema $AX = b$ siempre tiene solución.
   - Define vector $\vec{u}$ combinación lineal de la familia $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$. Describe un procedimiento que, usando reducción gaussiana, te permita concluir que una familia de $\mathbb{R}^n$ es ligada.
   - La aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determina las siguientes relaciones entre los elementos de la base canónica de la base de $\mathbb{R}^3$: $T(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $3T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + T(\mathbf{e}_3)$ y que $T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$. Calcula la matriz coordenada de la aplicación T.
   - Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (1, -2, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, -2, 1)$ cumplen que $[v_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 1)$, que $v_2 = u_1 - U - 2 + u_3$ y que $u_3 = v_3 + 3u_1 + 2u_2$, ¿qué vectores de $\mathbb{R}^3$ son exactamente u_1, u_2 y u_3?

2. **(3,3 puntos)** Para los subespacios S, T de $\mathbb{R}^4$, calcula los valores de α para los que T está contenido en S. En caso afirmativo, completa una base de S a una base de T:

   - $S = Gen\{(-1, 0, 0, 1), (-5, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$
   - $T = \{(x, y, z, t) : x + y - \alpha z = 0; 2(\alpha + 1)x + y + z = 0\}$

3. **(3,5 puntos)** Para la aplicación lineal T cuya matriz canónica es:

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 & 0 \\ 2 & a & ab & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

[15] Una definición no es un método y un método no se explica mediante un ejemplo. No se admiten definiciones dadas en forma de método ni métodos explicados mediante ejemplos. Las definiciones descritas mediante en conceptos previos deben incluir la definición de tales conceptos, en otro caso se considerarán incompletas;

[16] Hay que introducir los métodos antes de usarlos en las resolución de los ejercicios; en otro caso, la valoración será sobre la mitad de lo asignado en el correspondiente apartado.

se pide:

a) **(1,25 puntos)** que calcules los valores de a y b para los que T no es ni inyectiva ni suprayectiva;

b) **(1 punto)** que, para los casos del apartado a), encuentres una base $\mathcal{B}_1$ del núcleo de T y una base $\mathcal{B}_2$ del conjunto imagen de T;

c) **(1,25 puntos)** Elige un vector no nulo $\vec{u}$ de la imagen de T que no sea uno de la base $\mathcal{B}_2$ que has dado y calcula todas sus preimágenes (recuerda que esto lo denotamos como $T^{-1}(\vec{u})$.

RESOLUCIÓN EXAMEN TIPO A

PREGUNTA 1.A:

– a) Una familia de vectores $\{v_1,\dots,v_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice libre si la ecuación vectorial $x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = \vec{0}$ en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_p$ tiene como única solución la trivial, esto es: $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.

Para comprobar si la familia $\{v_1,\dots,v_p\}$ es libre o ligada, construimos la matriz cuyas columnas son los vectores de la familia (no importa el orden), $A=[v_1 \cdots v_p]$, y le aplicamos la reducción gaussiana. Si el nº de pivotes es <u>menor que p</u>, la familia será ligada (si es exactamente p, será libre.)

– b) El sistema es siempre compatible por ser homogéneo y será indeterminado por tener 2 ecuaciones (luego a lo más 2 pivotes) y 4 variables: nº variables básicas ≤ 2 luego hay variables libres. Como no se pide resolver, no es necesario hacerlo!!!

– c) Los datos que nos dan nos describen los vectores v_i usando los u_i. De este modo; (observa, $[v_2]_{\mathcal{B}} = (-2,-1,-2) \iff v_2 = -2u_1 - u_2 - 2u_3$)

$$\begin{cases} v_1 = 4u_1 + 2u_2 + 5u_3 & (1) \\ v_2 = -2u_1 - u_2 - 2u_3 & (2) \\ v_3 = -3u_1 - 2u_2 + u_3 & (3) \end{cases}$$

Para calcular los u_i, basta con ponerlos como combinación lineal de los v_i que sabemos quiénes son con exactitud. Operamos con las ecuaciones anteriores intentando despejar los u_i's:

- (sumamos (1) y el doble de (2)) : $\boxed{v_1 + 2v_2 = u_3}$
- sustituimos en las otras:

$$v_2 = -2u_1 - u_2 - 2v_1 - 4v_2 \quad ; \quad \begin{cases} 2v_1 + 5v_2 = -2u_1 - u_2 & (4) \\ v_3 - v_1 - 2v_2 = -3u_1 - 2u_2 & (5) \end{cases}$$
$$v_3 = (\cdots\cdots)$$

- A (5) le quitamos el doble de (4) : $\boxed{v_3 - 5v_1 - 12v_2 = u_1}$
- En (2) despejamos $\boxed{u_2} = -v_2 - 2u_1 - 2u_3 = -v_2 - 2(-4v_1 - 10v_2 + v_3) = \boxed{8v_1 + 19v_2 - 2v_3}$

Ahora $[u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} -5 & 8 & 1 \\ -12 & 19 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -13 & -1 \\ -4 & 7 & 0 \\ -9 & 14 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $u_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) • $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice aplicación lineal si T es <u>aplicación</u> (todo elemento de $\mathbb{R}^n$ tiene una y sólo una imagen en $\mathbb{R}^m$) y cumple que para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ y cualquier escalar $t \in \mathbb{R}$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(t \cdot u) = t \cdot T(u)$.

• La matriz coordenada (canónica) de T es $A = [T(e_1)\ T(e_2) \cdots T(e_n)]$ es decir, aquella cuyas columnas son las imágenes a través de T de los elementos $e_1 = (1,0,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,\dots,0,1)$ que forman la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

• Relación entre A y T: dado $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = v$ vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$ la imagen de v a través de T se obtiene mediante el producto matricial: $T(v) = Av = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2-A :

- Resolvemos $\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x-y+z+t=0 \end{cases}$ para encontrar sistema generador y base de S : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ x e y básicas ; z y t libres

$3y = 3z + t$, $\boxed{y = z + \frac{1}{3}t}$; $x = y - z - t = z + \frac{1}{3}t - z - t = -\frac{2}{3}t$ " $\boxed{x = -\frac{2}{3}t}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3\,t \\ z + 1/3\,t \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; z,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$$

$$[v_2\ v_1] = \begin{bmatrix} -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \ \{v_1, v_2\} \text{ libre}$$

Una base de S : $\{ v_1 = (0,1,1,0) \, , \, v_2 = (-2/3, 1/3, 0, 1) \}$, $\dim S = 2$

- Una base de T vendrá dada por cualquier familia libre de la familia que lo genera. Aplicamos reducción gaussiana a :

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + F_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 5F_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + 5F_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las 3 primeras columnas son libres y la cuarta combinación lineal de las previas. Una base de T : $\{ u_1 = (-1,0,0,1) \, , \, u_2 = (5,1,0,0) \, , \, u_3 = (-5,0,1,0) \}$ luego $\dim T = 3$.

- Para comprobar que $S \subseteq T$, Tenemos que resolver los sistemas lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1$ y $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_2$, con $A = [u_1\ u_2\ u_3]$, Las soluciones de estos sistemas (únicas) nos darán las coordenadas en cada v_i en la base de T $\{u_1, u_2, u_3\}$. Si un sistema no fuera compatible, la conclusión sería S no contenido en T. Como tenemos que realizar una resolución múltiple usando A, basta con aplicar reducción gaussiana a la matriz $[A\ v_1\ v_2]$

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 5 & -5 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_4 \to F_4 + F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 5 & -5 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \underset{F_4 \to F_4 - 5F_2 + 5F_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 5 & -5 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \underset{F_1 \to F_1 - 5F_2 + 5F_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 0 & 0 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{array}\right]$$

Gracias a que hemos realizado una reducción gaussiana a forma escalonada reducida, las soluciones de $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v_1$ y $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v_2$ son fáciles de obtener :

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v_1$ tiene como solución $x=0 \quad y=1=z$

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v_2$ no tiene solución . $0=-4/3$

Luego $v_1 = 0\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 1\cdot u_3$,, $[v_1]_{\{u_1,u_2,u_3\}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ COORDENADAS u_1

No podemos calcular $[v_2]_{B_3}$ porque $v_2 \notin T$. Luego $S \not\subseteq T$.

PREGUNTA 3-A : La aplicación $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $X \mapsto M_{a,b}X$

a) T no inyectiva $\Leftrightarrow$ $M_{a,b}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\vec{0}$ sistema compatible indeterminado

$\Leftrightarrow$ el sistema tiene variables libres

Ahora nº variables libres = 4 − nº de básicas = 4 − nº pivotes de $M_{a,b}$

y como nº pivotes de $M_{a,b} \leq$ nº filas = 3 , este sistema , para cualquier valor de a y b tiene variables libres . Por tanto

$\boxed{\forall\, a,b \in \mathbb{R} \quad T \text{ es no inyectiva}}$

T no será supreyectiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix}-a\\1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\ab\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\b\\a\end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ Las columnas de $M_{a,b}$ no generan $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ rango $M_{a,b}$ = nº pivotes $M_{a,b} \leq 2$

Para la no supreyectividad , necesitamos encontrar los valores de a y b t.q. $M_{a,b}$ tenga exactamente 1 ó 2 pivotes

$$M_{a,b} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&b\\-a&1&2&0\\0&3&2+ab&a\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&b\\0&1&2+a&ab\\0&3&2+ab&a\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&b\\0&1&2+a&ab\\0&0&-4-3a+ab&a-3ab\end{bmatrix}$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$, $F_3 \to F_3 + F_1$ $\qquad$ $F_2 \to F_2 + aF_1$ $\qquad$ $F_3 \to F_3 - 3F_2$

Así , rg $M_{a,b} \geq 2$ y será exactamente 2 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} a(1-3b)=0 \\ -4+a(b-3)=0 \end{cases}}$

Observamos que $a(1-3b)=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $b=\frac{1}{3}$

El caso $a=0$ nos lleva a que $-4+0=0$ ∄ luego $a\neq 0$

de donde $\boxed{b=\frac{1}{3}}$ y entonces $a\left(\frac{1}{3}-3\right)=4$,, $a\underbrace{\left(\frac{1-9}{3}\right)}_{-8/3}=4$

luego $\boxed{a=-\frac{3}{2}}$, es decir :

$\boxed{T \text{ no supreyectiva} \Leftrightarrow b=1/3 \quad a=-2/3}$

$$\boxed{T \text{ no inyectiva ni suprayectiva} \iff b=\tfrac{1}{3} \ \text{ y } \ a=-\tfrac{3}{2}}$$

b) $M_{-3/2,\,1/3}=\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1/3\\ -3/2 & 2 & -1/2 & -3/2\end{bmatrix}$ aprovechamos el escalonamiento que hemos hecho en el apartado a) y tenemos

$$M_{-3/2,\,1/3} \underset{\text{Gauss}}{\sim (\cdots) \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 1 & 2-3/2 & -1/2\\ 0 & 0 & \underset{\downarrow}{0} & \underset{\hookrightarrow\ a-3ab=0}{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1/3\\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (1)$$

$-4+ab-3a=0$

y concluimos que, como $\operatorname{Im}T$ está generado por las columnas de $M_{-3/2,\,1/3}$ y las dos últimas son combinación lineal de las dos primeras:

$\operatorname{Im}T = \operatorname{Gen}\left\{\begin{pmatrix}3/2\\1\\-3/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ y el conjunto generador es libre

luego $\mathcal{B}_2=\left\{\begin{pmatrix}3/2\\1\\-3/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\operatorname{Im}T$

Para calcular $\operatorname{Ker}T$, seguimos resolviendo el sistema $M_{-3/2,\,1/3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0$ desde la forma escalonada (1), y tenemos: x e y básicas, z,t libres,

$x=-z-\tfrac13 t \qquad y=-\tfrac12 z+\tfrac12 t$

luego $\operatorname{Ker}T=\left\{\begin{pmatrix}-z-\frac13 t\\ -\frac12 z+\frac12 t\\ z\\ t\end{pmatrix} \;\middle|\; z,t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{Gen}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}}_{u_1},\underbrace{\begin{pmatrix}-1/3\\1/2\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2}\right\}$

los vectores forman familia libre $\begin{bmatrix}-1 & 1/3\\ -1/2 & 1/2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1/3\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ luego

$\mathcal{B}_2=\{u_1,u_2\}$ es una base de $\operatorname{Ker}T$

c) $\vec{u}=(2,1,-1/2)\in\operatorname{Im}T$ (es la columna 3 de $M_{-3/2,\,1/3}$).

Para calcular sus preimágenes, hay que resolver el sistema

$$M_{-3/2,\,1/3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1/2\end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccc|c}3/2 & 1 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1\\ -3/2 & 2 & -1/2 & -3/2 & -1/2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 1/3 & 1\\ 3/2 & 1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 3/2 & -3/2 & 3/2\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 1/3 & 1\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 3 & 3/2 & -3/2 & 3/2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 0 & 1 & 1/3 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} x = 1 - z - \frac13 t\\ y=\frac12-\frac12 z+\frac12 t\\ z,t \text{ libres,}\end{array}$$

luego $T^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1/2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1-z-\frac13 t\\ \frac12-\frac12 z+\frac12 t\\ z\\ t\end{pmatrix} \;\middle|\; z,t\in\mathbb{R}\right\}$

CON MENOS CUENTAS: soluciones del sistema $M_{-3/2,\,1/3}\,\bar{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1/2\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1/2\end{pmatrix}=$

$=\{v_0+h \mid v_0 \text{ solución particular, } h \text{ solución homogénea asociada}\}=\left\{\begin{pmatrix}-z-\frac13 t\\ -\frac12 z+\frac12 t\\ 1+z\\ t\end{pmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$

[$v_0=e_3=(0,0,1,0)$ y $\operatorname{Nul}M_{-3/2,\,1/3}=\operatorname{Ker}T$

RESOLUCIÓN DE EXAMEN TIPO B:

PREGUNTA 1-B

- a) Un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que cumple las siguientes propiedades:

  i) El vector nulo pertenece a S: $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} \in S$

  ii) Si $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores de S, su suma está en S: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S$, la suma $\vec{u}+\vec{v} \in S$

  iii) Si $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in S$ el vector producto por escalar $t\vec{u}$ está en S $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{u} \in S$, el vector $t\vec{u} \in S$.

  Subconjunto infinito que no es subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ Falla i) pues $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, luego $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \notin A$

Falla ii) pues $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ están en A y $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin A$

Falla iii) pues $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $t=2$ da: $2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin A$.

- b) Una familia $\{v_1, \dots, v_p\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ se dice ligada si es posible encontrar escalares $t_1, \dots, t_p$ en $\mathbb{R}$, no todos nulos de modo que: $t_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + t_p \vec{v}_p = \vec{0}$

  Un procedimiento para comprobar si la familia $\{v_1, \dots, v_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ es ligada: construimos la matriz cuyas columnas son los vectores de la familia (no importa el orden), $A = [v_1 \cdots v_p]$ y le aplicamos reducción gaussiana. Si el nº de pivotes de A es <u>menor que p</u>, la familia será ligada.

- c) Como en el ejercicio 1-c)-A, podemos despejar los vectores u_i usando las relaciones: $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = u_1 - u_2 + u_3$ y $v_3 = -3u_1 - 2u_2 + u_2$

(<u>observa que</u> $v_2 = u_1 + u_3 - u_2 = v_1 - u_2$, luego $\boxed{u_2 = v_1 - v_2}$ . . .)

Vamos a utilizar $\boxed{\text{otro método}}$ de resolución $\boxed{\text{más mecánico}}$:

  1) Las descripciones de v_i nos dicen que $\mathcal{B}_{\{u_1,u_2,u_3\}} \xleftarrow{P} \mathcal{B}_{\{v_1,v_2,v_3\}}$

  la matriz del cambio $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

  Como queremos calcular los u_i's, necesitamos $P^{-1} = \left[[u_1]_{\mathcal{B}_v} \; [u_2]_{\mathcal{B}_v} \; [u_3]_{\mathcal{B}_v} \right]$

que nos proporcionarán las coordenadas de los u_i's en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Para calcular los u_i solamente tenemos que hacer la siguiente cuenta:

si $[u_i]_{\mathcal{B}_v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, entonces $u_i = a \cdot v_1 + b v_2 + c v_3 = [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ (1)

2) (cuentas): $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 & 5/4 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

Teniendo en cuenta (1), podemos expresar los u_i mediante el producto matricial:

$$[u_1, u_2, u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\, P^{-1}$$

$\boxed{\text{Dicho de otro modo}}$: usamos un cambio a triple banda

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{\{v_1, v_2, v_3\}} \arrow[rr, "P"'] \arrow[dr, "{[v_1\ v_2\ v_3]}"'] & & \mathcal{B}_{\{u_1, u_2, u_3\}} \arrow[ll, bend right, "P^{-1}"'] \arrow[dl, "{[u_1\ u_2\ u_3]}"] \\
& \mathcal{B}_{\text{canónica}} &
\end{tikzcd}$$

luego $[u_1, u_2, u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\, P^{-1}$

d) Observamos que $T = T_A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

y que el núcleo, $\ker T = $ Soluciones $[A\mathbf{x} = \vec{0}]$ y el conjunto imagen, $\operatorname{Im} T = \operatorname{Gen}\{$columnas de $A\}$, luego

(1) q componentes (2) $\mathbb{R}^q$ conjunto inicial (3) $\mathbb{R}^p$ final

(4) núcleo es $\operatorname{Nul} A = $ Soluc. $[A\mathbf{x} = \vec{0}]$ (5) Imagen es $\operatorname{Col} A$

(6) rango de $A = q$ ($\Leftrightarrow$ q variables básicas, luego no hay libres)

(7) rango de $A = p$ ($\Leftrightarrow$ p columnas libres que es la dimensión de $\mathbb{R}^p$)

PREGUNTA 2-B

- S está definido por ecuaciones (implícitas). Hay que resolver el sistema que proporcionan las ecuaciones que definen S para encontrar un conjunto generador:

$$\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ (\alpha-1)x+(\alpha+1)z+t=0 \end{cases} \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \alpha-1 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2-(\alpha-1)F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 2\alpha & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

observamos que, $\forall \alpha$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 luego disponemos de, exactamente 2 variables libres

$* \ \alpha=1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ " y, t libres, $z=-\frac{1}{2}t \quad x=-y+z-t=-y-{}^3/_2 t$

luego $S=\text{Gen}\{(-1,1,0,0),(-{}^3/_2,0,-{}^1/_2,1)\}$ 2-dim pues familia libre

$** \ \alpha \neq 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha}{1-\alpha} & \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \end{pmatrix}$ " z, t libres $\quad y=\frac{2\alpha}{\alpha-1}z+\frac{2-\alpha}{\alpha-1}t$

$$x=-y+z-t=\left(\frac{-2\alpha}{\alpha-1}+1\right)z+\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}-1\right)t$$

$$=\frac{-(\alpha+1)}{\alpha-1}z+\frac{-1}{\alpha-1}t$$

$$S=\text{Gen}\left\{\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha-1},\frac{2\alpha}{\alpha-1},1,0\right),\left(-\frac{1}{\alpha-1},-\frac{\alpha-2}{\alpha-1},0,1\right)\right\}$$ 2-dim pues familia libre

- T está definido también por implícitas, luego resolvemos (t hay que usarla aunque no aparezca en ecuaciones!!)

$$\begin{cases} x+y-\alpha z=0 \\ 2(\alpha+1)+y+z=0 \end{cases} \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 2(\alpha+1) & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2-2(\alpha+1)F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha-1 & 2\alpha^2+2\alpha+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ " $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)+1 \neq 0$ y tenemos 2 pivotes y 2 variables libres

$\alpha \neq -\frac{1}{2}$ lo mismo

$* \ \alpha=-\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -{}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{{}^1/_2} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad y, t$ libres $\quad z=0 \quad x=-y+\frac{1}{2}z=-y$

luego $T=\text{Gen}\{(-1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ 2-dim pues familia libre

$** \ \alpha \neq -\frac{1}{2}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{-2\alpha-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad z, t$ libres $\quad y=\frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{1+2\alpha}, \quad x=-y+\alpha z$

$$x=\frac{\alpha(1+2\alpha)-2\alpha^2-2\alpha-1}{1+2\alpha}z=\frac{-\alpha-1}{1+2\alpha}z=\frac{-(1+\alpha)}{2\alpha+1}z$$

luego $T=\text{Gen}\left\{\left(-\frac{1+\alpha}{2\alpha+1},\frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{1+2\alpha},1,0\right),(0,0,0,1)\right\}$ 2-dim pues familia es libre

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \dim T=\dim S=2$

Caso $\alpha = 3$:

$$S = \mathrm{Gen}\{(-2, +3, 1, 0), (-1/2, -1/2, 0, 1)\} = \{(-2, +3, 1, 0), (1, 1, 0, -2)\}$$

$$T = \mathrm{Gen}\{(-4/7, 25/7, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} = \{(-4, 25, 7, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Comprobemos si, al unir ambas bases, tenemos una familia libre

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 25 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Son l.i. en $\mathbb{R}^4$, luego base de $\mathbb{R}^4$: la formada por los 4 vectores

de $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T = \{(4, -3, 1, 0), (-5, 1, 0, 1), (8, -5, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

PREGUNTA 3-B

La aplicación $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida como $X \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{a,b} X \in \mathbb{R}^4$

a) T no inyectiva $\Leftrightarrow$ $M_{a,b} X = \vec{0}$ sistema compatible indeterminado

$\Leftrightarrow$ El sistema tiene variables libres

$\Leftrightarrow$ $rg\, M_{a,b} =$ nº pivotes de $M_{a,b} \leq 2$

Para la no inyectividad necesitamos encontrar los valores de a y b tales que $rg\, M_{a,b}$ sea 1 ó 2. Aplicamos reducción gaussiana

$$M_{a,b} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & ab \\ 0 & b & a \\ -a & 1 & a \end{bmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & ab-4 \\ 0 & b & a \\ 0 & 1 & 3a \end{bmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - bF_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & ab-4 \\ 0 & 0 & a-ab^2+4b \\ 0 & 0 & 3a-ab+4 \end{bmatrix}$$

Observamos que $rg\, M_{a,b} \geq 2$ y será exactamente 2 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a - ab^2 + 4b = 0 \\ 3a - ab + 4 = 0 \end{cases} \; \text{(y)} \; \Leftrightarrow \begin{cases} a(1-b^2) + 4b = 0 \\ a(3-b) = -4 \end{cases}$$

Como $a(3-b) = -4 \neq 0$, $b \neq 3$ luego $a = \frac{4}{b-3}$, sustituimos en la otra ecuación: $\frac{4}{b-3}(1-b^2) + 4b = 0$;; $\frac{4 - 4b^2 + 4b^2 - 12b}{b-3} = 0$;;

$4 - 12b = 0$;; $\boxed{b = \frac{1}{3}}$ $\quad a = \frac{4}{-8/3}$;; $\boxed{-\frac{3}{2} = a}$

Como: T no es inyectiva $\Leftrightarrow$ $b = \frac{1}{3}$, $a = -3/2$

y $rg\, M_{-3/2, 1/3}$ es exactamente 2, tenemos que $\dim Im\, T$ para $b = \frac{1}{3}$, $a = -3/2$ es igual a $2 \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$, luego $Im\, T \neq \mathbb{R}^4$ y, por tanto no suprayectiva. Así

T no inyectiva ni suprayectiva $\Leftrightarrow$ $a = -3/2$ $\quad b = \frac{1}{3}$

De hecho, T no es suprayectiva $\forall a,b$ ($rg\, M_{a,b} = \dim Im T \leq$ nº de pivotes $\leq 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$)

b) $a = -3/2$ $\quad b = 1/3$. Aprovechamos la reducción gaussiana de a)

$$M_{-3/2, 1/3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y de aquí concluimos que: las 2 primeras columnas de $M_{-3/2, 1/3}$ son l.i. y forman una base de $Im\, T$

$$Im\, T = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}, \; \boxed{B_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Para calcular una base $\mathcal{B}_1$ del núcleo de T, hay que terminar de resolver el sistema $M_{-3/2,1/2}X=\vec{0}$. Tras la reducción gaussiana, el sistema es equivalente a: $M_{-3/2,1/2} \approx \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-9/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ z libre, x e y básicas

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-9/2\, z=0 \end{cases} \quad \therefore \quad y=9/2\, z \qquad x=-2z$$

luego $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix}-2z\\ 9/2\, z\\ z\end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix}-2\\ 9/2\\ 1\end{pmatrix} \right\}$

y como $(-2, 9/2, 1) \neq (0,0,0)$, $\boxed{\mathcal{B}_1} = \{(-2, 9/2, 1)\}$ es una base del núcleo

c) Un vector de la imagen que no esté en la base $\mathcal{B}_2$: la última columna de $M_{-3/2,1/3}$: $\vec{u} = (-3/2, 2, -1/2, -3/2)$. Observando el cálculo de $T^{-1}(\vec{u})$ tenemos que resolver

$$M_{-3/2,1/3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\2\\-1/2\\-3/2\end{pmatrix}$$

pero como $\operatorname{Im} T = \text{Gen}\{3 \text{ columnas}\} = \left\{ \begin{pmatrix}3/2\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3/2\\2\\-1/2\\-3/2\end{pmatrix} \right\}$

Resolvemos (reducción Gaussiana; sí importa el orden)

(mecánico)

$$\begin{array}{cccc} y & x & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & -3/2 & -3/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} y \quad x \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

intercambio columnas 1 y 2 en $M_{3/2,1/3}$ a considerar

$x = 2-2z \qquad y = -3/2 - 3/2\,x + 3/2\,z = -3/2 - 3 + 3z + 3/2\,z = -9/2 + 9/2\,z$

luego $T^{-1}(\vec{u}) = \left\{ \begin{pmatrix}2-2z\\ -9/2+9/2\,z\\ z\end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\}$

$\boxed{\text{CON MENOS CUENTAS}}$

Las soluciones del sistema $M_{-3/2,1/3}X=\vec{u}$ son de la forma

$\{ v_0 + h \mid v_0$ es solución particular y h solución del homogéneo $M_{-3/2,1/3}X=\vec{0}\}$

Observamos que $v_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ cumple $T(v_0) = M_{-3/2,1/3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{u}$

(3ª columna de $M_{-3/2,1/3}$) y que $M_{-3/2,1/3}X=\vec{0}$ coincide exactamente con $\operatorname{Nul} M_{-3/2,1/3}$ luego:

$T^{-1}(\vec{u}) = [\text{Soluciones de } M_{-3/2,1/3}X=\vec{u}] = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2z\\ 9/2\,z\\ z\end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}-2z\\ 9/2\,z\\ 1+z\end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\}$

PREGUNTA 1-C

a) Dada A matriz de orden $m \times n$, son equivalentes:

- el sistema $AX = b$ tiene solución para cualquier vector $b \in \mathbb{R}^m$
- las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^m$
- Las formas escalonadas de A tienen exactamente m posiciones pivote

b) Un vector $\vec{u}$ se dice combinación lineal de la familia de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ si existen escalares $t_1, t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = t_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + t_p \vec{v}_p$

Un procedimiento para comprobar si $\{v_1, \dots, v_p\}$ es una familia ligada de $\mathbb{R}^n$ consiste en; construir la matriz A cuyas columnas son los vectores de la familia (no importa el orden), $A = [v_1 \dots v_p]$; aplicar reducción gaussiana a la matriz A hasta escalonar. Si el nº de pivotes de A es <u>menor que p</u>, la familia es ligada.

c) La matriz coordenada A de T es la que tiene por columnas $A = [\,T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)\,]$. Por tanto, debemos calcular $T(e_i)$ desde las relaciones:

$$T(e_1 - 2e_3) = T(e_1) - 2T(e_3) = e_2 + 2e_3 \iff T(e_1) = e_2 + 2e_3 + 2T(e_3)$$

$$T(e_1 - e_2 + e_3) = T(e_1) - T(e_2) + T(e_3) = 0 \qquad \text{y} \qquad T(e_2) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}T(e_3)$$

$$3T(e_2) = e_1 + T(e_3)$$

sustituimos en la 2ª relación: $0 = e_2 + 2e_3 + 2T(e_3) - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}T(e_3) + T(e_3)$

$$\iff 0 = e_2 + 2e_3 + \frac{8}{3}T(e_3) - \frac{1}{3}e_1 \quad \therefore \quad \boxed{T(e_3) = -\frac{3}{8}e_2 - \frac{3}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_1}$$

$$T(e_2) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{8}e_2 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}e_1 = \boxed{\frac{3}{8}e_1 - 1/8\, e_2 - 1/4\, e_3} \quad \text{y}$$

$$T(e_1) = e_2 + 2e_3 - 3/4\, e_2 - 3/2\, e_3 + 1/4\, e_1 = 1/4\, e_1 + 1/4\, e_2 + 1/2\, e_3 \quad \therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 1/8 \\ 1/4 & -1/8 & -3/8 \\ 1/2 & -1/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

d) Para calcular u_i's, despejamos estos vectores en fón. de v_1, v_2 y v_3 sabiendo que: $[v_1]_{\mathcal{B}} = (1,0,1) \iff$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_2 \\ v_2 &= u_1 - u_2 + u_3 \\ v_3 &= -3u_1 - 2u_2 + u_3 \end{aligned}}$$

Observamos que $v_2 - v_3 = 4u_1 + u_2$

luego $u_2 = v_2 - v_3 - 4u_1$; de

$$v_1 = u_1 + u_2 = u_1 + v_2 - v_3 - 4u_1 \quad \text{,,} \quad v_1 - v_2 + v_3 = -3u_1 \iff \boxed{u_1 = -1/3\, v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{1}{3}v_3}$$

Ahora $u_2 = v_1 - u_1 = v_1 + 1/3\, v_1 - 1/3\, v_2 + 1/3\, v_3 = \boxed{\frac{4}{3}v_1 - 1/3\, v_2 + 1/3\, v_3 = u_2}$

y finalmente $u_3 = v_2 - u_1 + u_2 = v_2 + 5/3\, v_1 - 2/3\, v_2 + 2/3\, v_3 = \frac{5}{3}v_1 + 1/3\, v_2 + \frac{2}{3}v_3$

Finalmente

$$[u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3] \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3/2 & -3 & -7/2 \\ -3/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Hay una alternativa a la solución de 1-d) usando cambios a triple banda:

$$P = \left[[v_1]_{\mathcal{B}_u} \; [v_2]_{\mathcal{B}_u} \; [v_3]_{\mathcal{B}_u} \right]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_u = \{u_1, u_2, u_3\} \arrow[dr, dotted, "A = {[u_1\, u_2\, u_3]}"'] \arrow[rr, bend left, "P^{-1}"] & & \mathcal{B}_v = \{v_1, v_2, v_3\} \arrow[ll, "P"'] \arrow[dl, dotted, "B = {[v_1\, v_2\, v_3]}"] \\
& \mathcal{B}_{canónica} &
\end{tikzcd}$$

donde $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & +1 \end{bmatrix}$

y $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 & 5/4 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

Así, $A = [u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3/2 & -3 & -7/2 \\ -3/4 & 2 & -11/4 \end{bmatrix}$

1ª SOLUCIÓN

PREGUNTA 2-c : PENSAMOS QUÉ NOS PREGUNTAN Y EXPLICAMOS NUESTRO PROCEDIMIENTO

PROTOCOLIZAMOS MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Para comprobar si $S \subseteq T$, basta con verificar si los 3 vectores que generan S están en T, es más:

$S \subseteq T$ equivale a que $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y estén en T

Como T está definido por implícitas, sus elementos son exactamente el conjunto de soluciones del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y - \alpha z = 0 \\ 2(\alpha+1)x + y + z = 0 \end{array} \right. \quad (1)$

Así, los vectores u_i estarán en T si y solamente si son soluciones del sistema homogéneo (ecuaciones implícitas). Sustituimos

RESOLVEMOS

$u_1 = (-1,0,0,1) \in T \iff (x=-1 \quad y=z=0 \quad t=1$ es solución de (1)

$\iff -1 = 0 \quad \lightning \qquad u_1$ no es solución, luego $u_1 \notin T$

$\boxed{S \text{ NO ESTÁ CONTENIDO en } T . \forall \alpha}$ (el ejercicio ha terminado)

$\boxed{\text{Observa}}$ $u_2 = (-5,0,1,0) \in T \iff x=-5, \; y=t=0 \quad z=1$ solución de (1)

$\iff \left\{ \begin{array}{l} -5-\alpha = 0 \quad \text{"} \quad \alpha = -5 \\ -10(\alpha+1)+1 = 0 \quad \text{"} \quad -10\cdot(-4)+1 = 0 . \; \lightning \end{array} \right.$

u_2 no es solución, luego $u_2 \notin T$

$u_3 = (1,1,0,0) \in T \iff x=y=1 \quad z=t=0$ solución de (1)

$\iff \left\{ 2 = 0 \right. \; \lightning$, u_3 no es solución, $u_3 \notin T$

CUALQUIER elección arbitraria de entre u_1, u_2 y u_3 te lleva a concluir que que S NO ESTÁ CONTENIDO en T.

$\boxed{\text{Observa}}$ No se puede completar S a una base de T pues $S \not\subseteq T$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & +5 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & -5 & 1 & x+t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x+t-y+5z \end{array}\right] \qquad \boxed{x - y + 5z + t = 0}$$

$$(*)\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & -(3\alpha+1)/2\alpha-1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\alpha^2+2\alpha+1/2\alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & -(3\alpha+1)/2\alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\alpha^2+2\alpha+1/2\alpha-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array}$$

caso $\alpha \neq 1/2$

2ª SOLUCIÓN

PREGUNTA 2-c ✓ (METODOLÓGICA , NO PENSAMOS)

- Una base de S' vendrá dada por cualquier familia libre de los vectores que generen S. Aplicamos reducción gaussiana a:

nunca está contenido en

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 3 vectores son l.i. pues hay 3 pivotes en forma escalonada.

Una base de S' : $\{u_1 = (1,1,0,0),\ u_2 = (-1,0,0,1),\ u_3 = (-5,0,1,0)\}$

- Como T está definido por ecuaciones implícitas, para encontrar una base de T hay que resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x+y-\alpha z = 0 \\ 2(\alpha+1)x+y+z = 0 \end{cases}$

Usamos reducción gaussiana; procurando observar pivotes NO NULOS (en caso de que haya que usar como pivote $\underline{2(\alpha+1)}$ hay que estudiar en forma separada: $2(\alpha+1) \neq 0$ (entonces tenemos pivote) y $2(\alpha+1) = 0$ (no podemos usar esto como pivote)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2(\alpha+1) & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & 1-2(\alpha+1) & 1+\alpha 2(\alpha+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha^2+2\alpha+1 \end{bmatrix} \sim (1)$$

$F_2 \to F_2 - (2(\alpha+1))F_1$: operación elemental válida* OJO

OJO* ERROR en Reducción

$F_2 \to \frac{1}{2(\alpha+1)}F_2 - F_1$. no es válido salvo que se advierta $2(\alpha+1) \neq 0$ y se estudie el caso $2(\alpha+1) = 0 \iff \alpha = -1$ por separado.

(1) discutimos pivotes $\begin{cases} 2\alpha-1 \neq 0 \Rightarrow 2 \text{ pivotes (columnas 1 y 2)} \\ 2\alpha-1 = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2} \text{ y } 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 2 = 5/2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 2 pivotes, (columnas 1 y 3)

En cualquier caso, el sistema es compatible indeterminado con 1 variable libre

<u>Caso 1</u>: $\alpha = \frac{1}{2}$ Resolvemos $\begin{cases} x+y-\frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ ∴ $z = 0$ $x = -y$.

$$T = \{(y,-y,0,t) \mid y,t \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{(1,-1,0,0),\ (0,0,0,1)\}$$

<u>Caso 2</u> $\alpha \neq \frac{1}{2}$ Resolvemos $\begin{cases} x+y-\alpha z = 0 \\ (2\alpha-1)y + (2\alpha^2+2\alpha+1)z = 0 \end{cases}$ ∴ $y = \dfrac{2\alpha^2+2\alpha+1}{2\alpha-1}z$

$$x = -y+\alpha z = \frac{-2\alpha^2-2\alpha-1}{2\alpha-1}z + \alpha z = \frac{-3\alpha-1}{2\alpha-1}z$$

$$T = \left\{\left(-\frac{3\alpha+1}{2\alpha-1}z,\ \frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{2\alpha-1}z,\ z, t\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \text{Gen}\left\{\left(-\frac{3\alpha+1}{2\alpha-1}, \frac{2\alpha^2+2\alpha+1}{2\alpha-1}, 1, 0\right),\right.$$

$\left.(0,0,0,1)\right\}$. Para comprobar si $S' \supseteq T$ escalonamos la matriz (*) $\longrightarrow$ parte superior hoja

El escalonamiento indica que $u = (0,0,0,1)$ no pertenece a S' y, como es vector de T tanto en el caso $\alpha = 1/2$ como para $\alpha \neq 1/2$, S' NUNCA ESTÁ CONTENIDO en T

PREGUNTA 3-C

La aplicación $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $X \longmapsto M_{a,b}X$ $\quad M_{a,b}$ de orden 3×4

a) T no inyectiva $\Longleftrightarrow$ $M_{a,b}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \vec{0}$ sistema compatible indeterminado

$\Longleftrightarrow$ El sistema tiene variables libres

Ahora: nº variables libres = 4 - nº variables básicas = 4 - nº pivotes de $M_{a,b}$ y, como nº pivotes de $M_{a,b} \leq$ nº filas $M_{a,b} = 3$, este sistema, para cualquier valor de a y b tiene variables libres. Por tanto:

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ T es no inyectiva

T no será suprayectiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Gen}\{\text{columnas de } M_{a,b}\} \neq \mathbb{R}^3$

$\Longleftrightarrow$ las columnas de $M_{a,b}$ no generen $\mathbb{R}^3$

$\Longleftrightarrow$ rango $M_{a,b}$ = nº pivotes de $M_{a,b} \leq 2$.

Para la no suprayectividad, necesitamos encontrar los valores de a y b tales que $M_{a,b}$ tenga rango 1 ó 2. Aplicamos reducción Gaussiana usando pivotes NO NULOS.

$$M_{a,b} \underset{F_2\to F_2-F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & 0\\ 0 & 3a & ab-4 & a\\ 0 & 1 & 1 & b\end{bmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -a & 2 & c\\ 0 & 1 & 1 & b\\ 0 & 3a & ab-4 & a\end{bmatrix} \underset{F_3\to F_3-(3a)F_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -a & 2 & c\\ 0 & \boxed{1} & 1 & b\\ 0 & 0 & ab-4-3a & -3ab+a\end{bmatrix} \sim$$

pivote

Así, rg $M_{a,b} \geq 2$ y será exactamente 2 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} ab-3a-4=0\\ a(1-3b)=0\end{cases}}$

Observamos que $a(1-3b)=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $b=1/3$. El caso $a=0$ no puede ocurrir ya que $0=ab-3a-4=-4$ ↯. Luego $a\neq 0$ obliga a que $\boxed{b=1/3}$ y entonces $\frac{1}{3}a-3a=4$; $-\frac{8}{3}a=4$; $\boxed{a=-\frac{3}{2}}$

es decir: T no suprayectiva $\Longleftrightarrow$ $a=-3/2$, $b=1/3$.

conclusimos: $\boxed{\text{T no inyectiva ni suprayectiva} \Longleftrightarrow a=-3/2,\ b=1/3}$

b) $$M_{-3/2,1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 0\\ 2 & -3/2 & -1/2 & -3/2\\ 0 & 1 & 1 & 1/3\end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{c}\text{escalonamiento}\\ \text{apartado a)}\end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Como Im T está generado por las columnas de $M_{-3/2,1/2}$ y las dos últimas son combinación lineal de las 2 primeras tenemos que $\operatorname{Im} T = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\\1\end{pmatrix} \right\}$ además, los 2 vectores son l.i. (2 pivotes) luego $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\\1\end{pmatrix} \right\}$ es una base del conjunto imagen.

Para calcular una base del núcleo de T, resolvemos el sistema $M_{-3/2,1/2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \vec{0}$ (sus soluciones son exactamente los vectores del $\operatorname{Ker} T$)

$$M_{-3/2,1/2} \sim \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ;; \quad \left\{ \begin{aligned} x + 3/2\, y + 2z &= 0 \\ y + z + 1/3\, t &= 0. \end{aligned} \right.$$

z, t libres, x e y básicas

$$y = -z - \tfrac{1}{3}t \quad ;; \quad x = -3/2\, y - 2z = \tfrac{3}{2}z - 2z + \tfrac{1}{2}t = -\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}t$$

Así, $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2(z-t) \\ -(z+1/3\,t) \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2} \right\}$

Además $\{u_1, u_2\}$ es familia libre, luego

$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}-1/2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\operatorname{Ker} T$.

c) Tomamos el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\-3/2\\1/3\end{pmatrix}$, última columna de $M_{-3/2,1/2}$, luego pertenece a $\operatorname{Im} T$. Para calcular sus preimágenes, resolvemos el sistema lineal $M_{-3/2,1/2}X = \vec{u}$. Por reducción gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3/2 & -1/3 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \quad (\cdots)$$

UN PROCEDIMIENTO, BASADO EN TEORÍA, MÁS RÁPIDO:

1) Calculamos una solución particular. $x = y = z = 0 \quad t = 1$

2) Soluciones de $M_{-3/2,1/2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3/2\\1/3\end{pmatrix}$ se obtienen sumando a la solución particular, las soluciones del sistema homogéneo $M_{-3/2,1/2}X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ que son precisamente el $\operatorname{Ker} T$. Así

$$T^{-1}\begin{pmatrix}0\\-3/2\\1/3\end{pmatrix} = \text{Soluc.}\left[M_{-3/2,1/2}X = \vec{u} \right] = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2(z-t) \\ -(z+1/3\,t) \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1/2(z-t) \\ -(z+1/3\,t) \\ z \\ 1+t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$