Ejercicios 3 - Segunda Parte

1. Una compañía de coches opera en Madrid y Barcelona. Cada mes el 40% de los vehículos alquilados en Madrid se devuelve en Madrid mientras que el 60% se devuelve en Barcelona. Igualmente, el 70% de los alquilados en Barcelona se devuelven en Barcelona pero el 30% restante se devuelven en Madrid. ¿Puedes decir cómo quedará la proporción entre los vehículos de la sucursal de Barcelona y la de Madrid con el paso del tiempo?

2. Encuentra la fórmula para la k-ésima potencia de la matriz

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Demuestra que las funciones $\{e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots\}$ forman un conjunto linealmente independiente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

4. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ considera los subespacios vectoriales

$$S_1 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(x) + \frac{1}{x}p(x) = 0\}$$
$$S_2 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(0) = 0 = p(\lambda)\}.$$

   (a) Calcula la dimensión y una base $\mathcal{B}$ de S_1.

   (b) Considera la base $\mathcal{B}' := \{x^3 - x^2 + x - 1, x^3 + x^2 - x - 1\}$ de S_1 y encuentra la matriz del cambio de coordenadas $c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Comprueba la fórmula $c_{\mathcal{B}'}(v) = c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} c_{\mathcal{B}}(v)$ para $v := x^2 - x$.

   (c) Encuentra los valores de λ que hacen que la suma $S_1 + S_2$ sea directa.

   (d) Para los λ para los cuales la suma $S_1 + S_2$ no es directa calcula la intersección $S_1 \cap S_2$.

5. Considera el espacio vectorial V de matrices simétricas de orden 3×3 con entradas reales y el subespacio

$$S := \mathrm{Gen}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

   Encuentra una base de S de entre los generadores proporcionados y complétala hasta una base de V.

6. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ p(x) & \mapsto & p(\alpha x + \beta) \end{array}$$

(a) Demuestra que f es una aplicación lineal.

(b) Encuentra los valores de α, β que hacen que f no sea biyectiva.

(c) Para esos valores del apartado anterior encuentra el núcleo de f, su imagen y sus correspondientes dimensiones.