Prácticas de Lógica en aula informática (Curso 2019-2020) - Práctica 5

DEDUCCIÓN NATURAL CON PROPOSICIONES

Para adquirir habilidad en Deducción Natural vamos a utilizar el corrector de deducciones denominado "Proof Checker for forall x: Cambridge and Calgary" desarrollado por Richard Zach de la Universidad de Calgary. Se puede ejecutar en línea en el siguiente enlace:

http://proofs.openlogicproject.org/

En esta primera práctica lo usaremos con proposiciones. En una primera fase únicamente aplicaremos reglas básicas y posteriormente utilazaremos también reglas derivadas. En la siguiente sesión informática continuaremos incorporando predicados. Una limitación es que no permite almacenar lo ya probado para que sea utilizado en nuevas demostraciones.

La mencionada página web contiene las instrucciones de uso. En particular se indican los símbolos que se pueden utilizar en el teclado para introducir los conectores lógicos y en la misma página hay una relación de las reglas básicas que se pueden utilizar. Incluye también una lista de reglas derivadas que también podremos aplicar en el proceso de deducción.

1.- Empezamos con tres deducciones en las que hemos incluido la solución. En primer lugar hay que introducir las premisas y la consecuencia. Después en cada paso hay que teclear la proposición que queremos deducir y también la regla y número /o números) de línea que vamos a utilizar:

a) Probar por deducción natural la siguiente regla:
$P \wedge S, S \rightarrow R \therefore R \vee E$

1	$P \wedge S$	
2	$S \rightarrow R$	
3	P	$\wedge$E 1
4	S	$\wedge$E 1
5	R	$\rightarrow$E 2, 4
6	$R \vee E$	$\vee$I 5

b) En el siguiente ejercicio, no sólo aplicamos reglas sino que también un procedimiento. Cuando se quiere aplicar un procedimiento hay que iniciar una subdedución con una premisa provisional que suponemos es verdadera.

Probar el siguiente argumento utilizando el procedimiento primitivo denominado “teorema de deducción”:
$A \rightarrow D \therefore (A \wedge B) \rightarrow (D \vee E)$

1	$A \rightarrow D$	
2	$\quad A \wedge B$	
3	$\quad A$	$\wedge$E 2
4	$\quad D$	$\rightarrow$E 1, 3
5	$\quad D \vee E$	$\vee$I 4
6	$(A \wedge B) \rightarrow (D \vee E)$	$\rightarrow$I 2–5

c) A continuación se propone una deducción en el que se utiliza el llamado “procedimiento de los casos”. Tiene la particularidad que hay que realizar dos subdeducciones, que se podrían realizar en paralelo, pero que este sistema sólo nos deja efectuarlas en serie: suponiendo en primer lugar una parte de la disyunción y más adelante la otra parte.

Verificar que el siguiente esquema es una regla:
$\neg L \rightarrow (J \vee L), \neg L \therefore J$

1	$\neg L \rightarrow (J \vee L)$	
2	$\neg L$	
3	$J \vee L$	$\rightarrow$E 1, 2
4	$\quad J$	
5	$\quad J \wedge J$	$\wedge$I 4, 4
6	$\quad J$	$\wedge$E 5
7	$\quad L$	
8	$\quad \bot$	$\neg$E 7, 2
9	$\quad J$	X 8
10	J	$\vee$E 3, 4–6, 7–9

2.- Ahora se propone la verificación por deducción natural de la siguientes reglas:

1. $J \rightarrow \neg J \therefore \neg J$
2. $Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \therefore \neg Q$

3. $A \to (B \to C) \therefore (A \wedge B) \to C$
4. $K \wedge L \therefore K \leftrightarrow L$
5. $(C \wedge D) \vee E \therefore E \vee D$
6. $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \therefore A \leftrightarrow C$
7. $\neg F \to G, F \to H \therefore G \vee H$
8. $(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \to D \therefore D$
9. $P \wedge (Q \vee R), P \to \neg R \therefore Q \vee E$
10. $S \leftrightarrow T \therefore S \leftrightarrow (T \vee S)$
11. $\neg(P \to Q) \therefore \neg Q$
12. $\neg(P \to Q) \therefore P$

3.- Demostrar cada una de las siguientes reglas derivadas utilizando únicamente reglas simples:

$A \therefore A$ Identidad

$A \vee B, \neg B \therefore A$
$A \vee B, \neg A \therefore B$ Silogismo Disyuntivo

$A \to B, \neg B \therefore \neg A$ Modus Tollens

$\neg\neg A \therefore A$ Eliminación doble negación

$A \to B, \neg A \to B \therefore B$ Tertium Non Datur

$\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$
$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$
$\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$
$\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ Reglas de De Morgan

4.- Construir deducciones para probar las siguientes reglas:

a) $\dfrac{P \to (Q \to R)}{(P \wedge Q) \to R}$ b) $\dfrac{(P \wedge Q) \to R}{P \to (Q \to R)}$ c) $\dfrac{\begin{array}{c}\neg R \vee \neg S \\ P \to R \\ Q \to S\end{array}}{\neg P \vee \neg Q}$

d) $\dfrac{P \to Q}{\neg(P \wedge \neg Q)}$ e) $\dfrac{\begin{array}{c}P \vee Q1 \\ \neg P \vee Q2\end{array}}{Q1 \vee Q2}$

5.- También se pueden demostrar las tautologías, como si fueran reglas pero sin premisas. Por ejemplo, los tres axiomas de Lukasiewicz:

- (L1) $P \to (Q \to P)$
- (L2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

- (L3) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

Nótese que a cada una de estas proposiciones le podemos asociar una regla de la siguiente forma:

$$\text{(RL1)}\frac{P}{Q \to P} \qquad \text{(RL2)}\ \frac{P \to (Q \to R)}{(P \to Q) \to (P \to R)} \qquad \text{(RL3)}\ \frac{\neg P \to \neg Q}{Q \to P}$$

Compárese la demostración de una de estas reglas con la de la correspondiente tautología.

6.- Terminamos con un ejemplo de tautología a demostrar cuyo conector raíz no es el condicional: $P \vee \neg(Q \wedge P)$.