Prácticas de Lógica en aula informática (Curso 2019-2020) - Práctica 6

DEDUCCIÓN NATURAL CON PREDICADOS

La reglas y procedimientos primitivos de proposiciones se amplían con las siguientes reglas y procedimientos que introducen y eliminan los cuantificadores:

Eliminación del universal. Ponemos utilizar la regla de eliminación del universal (∀E) que tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \\
 & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \forall\text{E } m
\end{array}
$$

Notemos que todas las apariciones que haya de la variable x se sustituyen por en nombre de una constante que hemos denotado por c pero también se puede utilizar otros nombres: $a, b, \ldots$.

Observemos que el radio de action del cuantificador universal es todo la fórmula $\mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$ que está en la fila m.

Hemos de señalar que el nombre de la constante c puede que ya estuviera en el alfabeto de constantes, pero también es correcto aumentar el alfabeto con un nuevo nombre de constante c.

Introducción del existencial. Esta regla permite sustituir una aparición de una constante, digamos c, por una variable pongamos x. Si en un término depende de una constante c lo podemos indicar por '$\mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots)$' lo que indica que quizás aparezca varias veces. Además hemos de suponer que la variable x no aparece en esta fórmula. Entonces la regla de introducción del existencial $\exists I$ es la siguiente:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A}(\ldots c \ldots c \ldots) & \\
 & \exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\text{I } m
\end{array}
$$

Damos un ejemplo de dos invocaciones correctas de la regla:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & Raad & \\
\hline
2 & \exists x Rxad & \exists\text{I } 1 \\
3 & \exists y \exists x Rxyd & \exists\text{I } 2
\end{array}
$$

Introducción del universal. La regla de introducción del cuantificador universal (∀I) es la siguiente:

$$
\begin{array}{r|ll}
m & \mathscr{A}(\ldots \cancel{c} \ldots \cancel{c} \ldots) & \\
 & \forall x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots) & \forall\text{I } m
\end{array}
$$

En muy importante asegurase de que se verifican las siguientes condiciones:

El nombre c no debe aparecer en las premisas y supuestos no cancelados.

El nombre de variable x no debe aparecer en $\mathscr{A}(\ldots \cancel{c} \ldots \cancel{c} \ldots)$

Veamos con un ejemplo una invocación incorrecta de la regla:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x Lxk & \\
\hline
2 & Lkk & \forall\text{E } 1 \\
3 & \forall x Lxx & \text{invocación incorrecta de } \forall\text{I } 2
\end{array}
$$

Notemos que en este caso existe la premisa (o supuesto) de la línea 1 contiene la letra k y por lo tanto se ha invocado de modo indebido la regla de introducción del universal.

Sin embargo si el supuesto ya ha sido cancelado, entonces si que se puede aplicar la regla:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & & Gd & \\
\cline{3-3}
2 & & Gd & \text{R } 1 \\
3 & \multicolumn{2}{l}{Gd \to Gd} & \to\text{I } 1\text{–}2 \\
4 & \multicolumn{2}{l}{\forall z(Gz \to Gz)} & \forall\text{I } 3
\end{array}
$$

En ese caso se prueba que '$\forall z(Gz \to Gz)$' es un teorema.

Procedimiento primitivo para eliminar el existencial. El cuantificador universal se puede eliminar mediante el siguiente procedimiento (primitivo):

$$
\begin{array}{r|l|ll}
m & \multicolumn{2}{l}{\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)} & \\
i & & \mathscr{A}(\ldots \cancel{c} \ldots \cancel{c} \ldots) & \\
\cline{3-3}
j & & \mathscr{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathscr{B}} & \exists\text{E } m,\ i\text{–}j
\end{array}
$$

Hay que tener en cuenta las siguientes restricciones:

c no debe aparecer en ninguna premisa o supuesto no descartado anterior a la línea i,

c no debe aparecer en $\exists x \mathscr{A}(\ldots x \ldots x \ldots)$,

c no debe apacer en la conclusión $\mathscr{B}$.

La moraleja es que si se quiere quitar el existencial hay que indroducir un nuevo supuesto por sustitución de la variable por una nueva constante que no haya aparecido previamente y llevar la argumentación hasta que desaparezca esa constante.

1.- Probar por deducción natural las siguiente leyes lógicas o reglas de deduccón:

1. $\vdash \forall xFx \vee \neg\forall xFx$

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \quad \begin{array}{|l}\forall xFx \\ \hline \end{array} & \\
2 & \quad \begin{array}{|l}\forall xFx \vee \neg\forall xFx\end{array} & \vee\mathrm{I}\ 1 \\
3 & \quad \begin{array}{|l}\neg\forall xFx \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l}\forall xFx \vee \neg\forall xFx\end{array} & \vee\mathrm{I}\ 3 \\
5 & \forall xFx \vee \neg\forall xFx & \mathrm{LEM}\ 1\text{–}2,\ 3\text{–}4
\end{array}
$$

2. $\vdash \forall z(Pz \vee \neg Pz)$

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \quad \begin{array}{|l}Pa \\ \hline \end{array} & \\
2 & \quad \begin{array}{|l}Pa \vee \neg Pa\end{array} & \vee\mathrm{I}\ 1 \\
3 & \quad \begin{array}{|l}\neg Pa \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l}Pa \vee \neg Pa\end{array} & \vee\mathrm{I}\ 3 \\
5 & Pa \vee \neg Pa & \mathrm{LEM}\ 1\text{–}2,\ 3\text{–}4 \\
6 & \forall x(Px \vee \neg Px) & \forall\mathrm{I}\ 5
\end{array}
$$

3. $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists xAx \vdash \exists xBx$

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & \forall x(Ax \rightarrow Bx) & \\
2 & \exists xAx & \\ \hline
3 & \quad \begin{array}{|l}Aa \\ \hline \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l}Aa \rightarrow Ba\end{array} & \forall\mathrm{E}\ 1 \\
5 & \quad \begin{array}{|l}Ba\end{array} & \rightarrow\mathrm{E}\ 4,\ 3 \\
6 & \quad \begin{array}{|l}\exists xBx\end{array} & \exists\mathrm{I}\ 5 \\
7 & \exists xBx & \exists\mathrm{E}\ 2,\ 3\text{–}6
\end{array}
$$

4. $\forall x(Mx \leftrightarrow Nx), Ma \land \exists xRxa \vdash \exists xNx$
5. $\forall x\forall yGxy \vdash \exists xGxx$
6. $\vdash \forall xRxx \to \exists x\exists yRxy$
7. $\vdash \forall y\exists x(Qy \to Qx)$
8. $Na \to \forall x(Mx \leftrightarrow Ma), Ma, \neg Mb \vdash \neg Na$
9. $\forall x\forall y(Gxy \to Gyx) \vdash \forall x\forall y(Gxy \leftrightarrow Gyx)$
10. $\forall x(\neg Mx \lor Ljx), \forall x(Bx \to Ljx), \forall x(Mx \lor Bx) \vdash \forall xLjx$

2.- Las dos equivalencias de De Morgan cuantificadas dan cuatro reglas (dos a dos recíprocas), por ejemplo, $\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$, etc.. Demostrad las cuatro reglas sin utilizar reglas derivadas

3.- Probar por Deducción Natural los siguientes silogismos:

De la primera figura:

Barbara: $\forall x(Gx \to Fx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Hx \to Fx)$

Celarent: $\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Hx \to \neg Fx)$

Ferio: $\forall x(Gx \to \neg Fx), \exists x(Hx \land Gx) \vdash \exists x(Hx \land \neg Fx)$

Darii:

$\forall x(Gx \to Fx), \exists x(Hx \land Gx) \vdash \exists x(Hx \land Fx)$

Subalternos de la primera figura:

Barbari:

$\exists xHx, \forall x(Gx \to Fx), \forall x(Hx \to Gx) \therefore \exists x(Hx \land Fx)$

Celaront:

$\exists xHx, \forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

Subalternos de la segunda figura:

Cesaro:

$\exists xHx, \forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

Camestrop: $\exists xHx, \forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

De la tercera figura:

Felapton: $\exists xGx, \forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Gx \to Hx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

Darapti: $\exists xGx, \forall x(Gx \to Fx), \forall x(Gx \to Hx) \therefore \exists x(Hx \land Fx)$

Subalternos de la tercera figura:

Calemop: $\exists xHx, \forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

De la cuarta figura:

Fesapo: $\exists xGx, \forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Gx \to Hx) \therefore \exists x(Hx \land \neg Fx)$

Bamalip: $\exists xFx, \forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to Hx) \therefore \exists x(Hx \land Fx)$

Para resolver los siguientes ejerccios hay que cambiar previamente la sintaxis; por ejemplo $Q(x)$ se cambia a Qx

4.- También se pueden demostrar las tautologías, como si fueran reglas pero no hay premisas. Por ejemplo:

$$\forall x(P \to Q(x)) \to (P \to \forall xQ(x))$$

y también su recíproco.

Nótese que a la fórmula anterior le podemos asociar la regla:

$$\frac{\forall x(P \to Q(x))}{P \to \forall x Q(x)}$$

y análogamente con la fórmula recíproca. Compárese la demostración de estas reglas con las de las correspondientes leyes lógicas.

5.- Probar las siguientes reglas mediante dedución natural (cambiando la notacíon para que se pueda aplicar el corrector "proofs")

a) $\dfrac{\forall x \forall y(P(x) \wedge S(y) \to \neg R(x,y))}{\forall x(Q(x) \to \neg S(x))}$

b) $$\begin{array}{l} \forall x \forall y \exists z(A(x,y)) \vee Q(z)) \\ \exists x \exists y(\neg R(x,y) \vee (S(x) \wedge T(y))) \\ \forall x(S(x) \to \exists y \exists z \neg A(y,z)) \\ \neg \exists x Q(x) \\ \hline \forall x \forall y \exists z(A(x,y) \vee Q(z)) \end{array}$$

c) Probad la siguiente ley lógica

$$\neg(\neg \exists x \neg P(x) \wedge \neg \forall x P(x))$$