Listado de ejercicios tipo

Leer detenidamente. Este listado procede de ejercicios propuestos en exámenes de prácticas de Sage en Cáculo Matricial y Vectorial en cursos previos. Hay múltiples formas de preguntar un concepto o un algoritmo en el entorno del álgebra lineal. **Los enunciados que presentamos son por tanto orientativos**. Estos mismos ejercicios pueden aparecer formulados en subespacios de tipo $\mathbb{F}^n$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo (reales, complejos, racionales, $\ldots$), polinomios de grado $\leq m$ con coeficientes en un cuerpo o matrices $p \times q$ con entradas en un cuerpo. En el examen práctico hay que demostrar que se sabe manejar las órdenes SAGE básicas que permiten identificar los conceptos y aplicar los algoritmos fundamentales presentados en la asignatura de Cáculo Matricial y Vectorial, a saber y salvo error por omisión: resolución de sistemas lineales (presentados en forma estándar o en otros formatos, como por ejemplo ecuaciones martriciales) dependencia e independencia lineal, cáculo de bases y dimensión de subespacios; comparación de subespacios (contenidos entre ellos); construcción y calsificación de aplicaciones lineales y cálculo de los subespacios núcleo e imagen; construcción de matrices coordenadas asociadas a una aplicación lineal y de matrices de cambios de base; elementos básicos del proceso de diagonalización (polinomio caracterśtico, vectores y valores propios, subespacios fundamentales), reconocimiento de matrices diagonalizables.

1. Para los subespacios S, T de $\mathbb{R}^4$, calcula una base y comprueba si S está contenido en T. En caso afirmativo, completa una base de S a una base de T:

   - $S = \{(x, y, z, t) : 2x + y - z + t = 0; x - y + z + t = 0\}$
   - $T = \{(x, y, z, t) : -x - 5y + 5z + t = 0\}$

   (Versiones análogas con polinomios o matrices).

2. Calcula polinomio característico, valores propios y subespacios fundamentales de la matriz A. Si es diagonalizable, describe una matriz P invertible y una D diagonal de modo que $PD = AP$.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Otras variaciones de preguntas: indica la multiplicidad de los valores propios, calcula bases para los subespacios fundamentales. Justifica por qué diagonaliza a la vista del código de respuesta SAGE.

3. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

   $f(1) = -1 + 2x^2$

$f(x^2) = 2 + 2x - x^2$
$f(1 + x) = 2 - x^2$

Calcula la matriz coordenada M de f en la base canónica. Comprueba que los subespacios fila, $Fil\, A$ y columna $Col\, A$ tienen la misma dimensión. ¿Son iguales?

4. Comprueba si es posible dar una base de $\mathbb{R}^3$ utilizando un vector y solo uno de los siguientes conjuntos: $A = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$, $B = \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (-4, -5, -3)\}$, $C = \{(1, 0, 3), (1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$.

5. Para la aplicación lineal dado por la expresión general:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - z, 2x + y + z, y + z)$$

calcula la matriz coordena M de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y clasifica f. Usa la matriz M para calcular las preimágenes del vector $(2, 0, 4, 2)$.

(**Otras versiones:** calcula la matriz coordenada tomando en el espacio inicial $\mathbb{R}^3$ una base $\mathcal{B}$ y en el espacio $\mathbb{R}^4$ de llegada la base $\mathcal{B}'$, las bases pueden ser distintas de las canónicas)

Enunciados análogas con polinomios o matrices.

6. Discute sin resolver (escalonamiento y pivotes ó determinantes) los siguientes sistemas de ecuaciones (observa que pueden aparecer sistemas con parámetros):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + 3z & = & 0 \\ 2x - 3y + 2z & = & 0 \\ -x + 12y + 4z & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} y + z + t & = a \\ -y + z & = & b \\ -x - z + t & = & c \\ -y - z & = & d \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} -y + z & = & 1 \\ -x + z - t & = & 2 \\ x + y + z - t & = & 3 \\ x - z + t & = & 4 \end{array}\right.$$

7. En el espacio vectorial de polinomios 2-truncados reales, comprueba que la familia de polinomios $\mathcal{B} = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ forma una base. Calcula la matriz del cambio P del cambio de bases $\mathcal{B} \xleftarrow{\mathbf{P}} \mathcal{B}_c$, donde $\mathcal{B}_c$ es la base canónica natural de los 2-truncados. Usa la expresión coordenada del cambio para encontrar $[1 + x - x^2]_{\mathcal{B}}$.

8. Encuentra todas las soluciones que hacen cierta la siguiente igualdad de matrices:

$$\begin{pmatrix} y + z & 2x + y - z \\ 2x + 4y & -2x + y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + x & 3 + x - y \\ -3x - y + 5z & -6 - 6x - y - z \end{pmatrix}$$

9. Si $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, encuentra una base $\mathcal{B}$ del subespacio S de las matrices reales 2×2, $M_2(\mathbb{R})$, generado por el conjunto de vectores $\{a, 2a + b, b - 3c, a + 3c\}$. Completa la base $\mathcal{B}$ a una base de $M_2(\mathbb{R})$.

   (**Otra preguntas en enunciados similares:** comprueba si un vector está en S y calcula sus coordenadas en la base dada; encuentra un vector que no esté en S)

10. Calcula las matrices X que cumplen la ecuación matricial $A = XB$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Encuentra, si es posible, un polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que $p(1) = -1, p(2) = 1, p(0) = -1$. Haz su representación gráfica de modo que se vea que cumple las condiciones pedidas.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_4[t]$ de los polinomios de grado ≤ 4, comprueba que la familia $F_3 = \{1 + t + t^2, 1 - 2t + 5t^2 + t^3, t + 3t^2 - t^4, 2 + 9t^2 + t^3, 1 + 3t + 7t^2 + t^4, -3 + 4t^2 + t^4, 1 + t^4\}$ es ligada. Encuentra el mayor número de vectores libres y expresa el resto como combinación lineal de ellos.