Mañana discutiremos algunos ejercicios cuyas soluciones encontraréis en esta hoja

Ej. 1a) Comprobamos si f preserva la suma y el producto por escalares. Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$f(p(x)+q(x)) = p(x^2)+q(x^2) = f(p(x))+f(q(x))$$

y

$$f(\alpha p(x)) = \alpha p(x^2) = \alpha f(x)$$

por lo que f es lineal.

Ej. 1b) Observamos que f no preserva la suma, por lo que no es lineal,

$$f(1+x) = (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \neq f(1)+f(x).$$

(Aquí asumimos que en $\mathbb{F}$ se cumple que $2 \neq 0$, lo cual es cierto para $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y muchos otros cuerpos, pero no para $\mathbb{Z}_2$.)

Ej. 1h) Comprobamos si f preserva la suma y el producto por escalares. Dadas $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$f(A+A') = (A+A')B-B(A+A') = AB-BB+A'B-BA' = f(A)+f(A')$$

y

$$f(\alpha A) = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha(AB-BA) = \alpha f(A)$$

por lo que f es lineal.

Ej. 5 Las aplicaciones lineales preservar las combinaciones lineales por lo que como

$$-6(2,1,0)+4(3,0,2)+(0,6,-8) = (0,0,0)$$

por lo que aplicando f debería cumplirse

$$-6(1+x)+4(2-x+x^2)+(-2+2x^2) = 0$$

pero esto es, obviamente, falso.

Ej. 12a) Calculamos el núcleo de f; es decir, las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $(a-b, c-d) = (0,0)$. Así,

$$\begin{aligned} \ker f &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a=b, c=d\} = \{\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \mid a=b, c=d\} \\ &= \mathrm{Gen}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

La imagen de f tendrá dimensión $4-2=2$ y es

$$\begin{aligned} f(M_2(\mathbb{R})) &= \mathrm{Gen}\{f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\} \\ &= \mathrm{Gen}\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\} = \mathrm{Gen}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ej. 12b) El núcleo son los $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tales que $(p(0), p(1)) = (0, 0)$. Es decir,

$$\ker f = \mathbb{R}x(x-1).$$

Por lo tanto, $\dim \ker f = 1$ y así $\dim f(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = 3 - 1 = 2$. Esto implica que $f(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R}^2$. Otra forma de calcular esta imagen sería $f(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = \mathrm{Gen}\{f(1), f(x), f(x^2)\} = \mathrm{Gen}\{(1,1),(0,1),(0,1)\} = \mathrm{Gen}\{(1,1),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$.

Ej. 12c) El núcleo lo constituyen las $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $AB = \mathbf{0}$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ esto equivale a

$$\begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ c-d & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $a = b$ y $c = d$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ker f &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = b, c = d\} = \{\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Gen}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

tiene dimensión 2. La imagen de f tendrá dimensión $4 - 2 = 2$ y es

$$\begin{aligned} f(M_2(\mathbb{R})) &= \mathrm{Gen}\{f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\} \\ &= \mathrm{Gen}\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\} \\ &= \mathrm{Gen}\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

Ej. 13a) El núcleo de f es

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0,\ x + 2y = 0\} = \{(0, 0)\}$$

por lo que f es inyectiva, y automáticamente suprayectiva ya es el espacio de salida tiene la misma dimensión que el de llegada. Por tanto f es biyectiva.

Ej. 13 b) El núcleo de f es el conjunto de los polinomios $a + bx + cx^2$ tales que

$$\begin{pmatrix} a+b & a+2c \\ 2a+c & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\ker f = \{a + bx + cx^2 \mid a + b = a + 2c = 2a + c = b - c = 0\} = \{0\}.$$

Por tanto f es inyectiva. Como $\dim f(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = 3 - 0 = 3 < 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$, f no puede ser suprayectiva, y por lo tanto tampoco es biyectiva.

Ej. 13 c) El núcleo de f es el conjunto de todos los polinomios $a + bx + cx^2$ tales que $(2a - b, a + b - 3c, c - a) = (0, 0, 0)$. La única solución de este sistema es $a = b = c = 0$ por lo que

$$\ker f = \{0\}.$$

Esto prueba que f es inyectiva. Como $\dim f(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = 3 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ entonces f es automáticamente suprayectiva, y también biyectiva.