Ejercicios 4 - Segunda Parte

1. Identifica qué espacios vectoriales son isomorfos entre sí y encuentra un isomorfismo entre ellos

   (a) $\mathbb{R}^7$

   (b) $\mathbb{R}^{15}$

   (c) $M_3(\mathbb{R})$ (matrices 3×3 con entradas en $\mathbb{R}$).

   (d) $M_{3,5}(\mathbb{R})$ (matrices 3×5 con entradas en $\mathbb{R}$).

   (e) $\mathbb{R}[x]_{\leq 6}$.

   (f) $\mathbb{R}[x]_{\leq 8}$.

   (g) $\mathbb{R}[x]_{\leq 14}$.

2. Encuentra los valores de λ para los cuales la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\to \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \\ p(x) &\mapsto xp(x)' - \lambda p(x) \end{aligned}$$

   no es isomorfismo (aquí $p(x)'$ denota la derivada de $p(x)$).

3. Para la aplicación lineal f del ejercicio anterior, encuentra su matriz coordenada $c_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B} := \{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Considera la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f\colon M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto AX - XA. \end{aligned}$$

   Encuentra bases para el núcleo y la imagen de f.

5. Considera la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, y - z, x + y + z), \end{aligned}$$

   y las bases $\mathcal{B}_1 := \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\mathcal{B}_2 := \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$. Para esta aplicación lineal y estas bases encuentra todas las matrices involucradas en la fórmula del cambio de bases para matrices coordenadas

$$c_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = c_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} c_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) c^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$$

   y comprueba que la fórmula se cumple.

6. Considera la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{R}^3 \\ p(x) &\mapsto (p(0), p(1), p(2)) \end{aligned}$$

Encuentra la matriz coordenada $c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ donde $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}' := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Comprueba que para $v := 1+x+x^2$ se cumple que

$$c_{\mathcal{B}'}(f(v)) = c_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)c_{\mathcal{B}}(v).$$

7. Encuentra la fórmula de una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla (todas) las siguientes condiciones

   (a) $(1,0,1) \in \ker f$.

   (b) $(1,0,0) \in f(\mathbb{R}^3)$.

   (c) $f(0,0,1) = (1,0,0)$.

   (d) $(0,1,0)$ es un vector propio de valor propio 2 de f.