Cálculo Infinitesimal

Hoja 8

1. Encontrar $f'(x)$ en cada caso:

   a) $f(x) = \int_3^{x^2} \operatorname{sen} t dt$;

   b) $f(x) = \int_3^{5x-4} \cos^3 t dt$;

   c) $f(x) = \int_{2x+3}^{x^3} t^5 dt$;

   d) $f(x) = \int_3^{2x} e^{t^2} dt$.

2. Calcular el área de la figura limitada por la curva $xy = a^2$, el eje OX, y las rectas $x = a$, $x = 2a$ $(a > 0)$.

3. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^3$.

4. Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y = 4 - x^2$ y el eje OX.

5. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje OY.

6. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = \log x$, $y = \log^2 x$.

7. Hallar el área de una de las regiones limitadas por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$.

8. Hallar el área de una de la región limitada por la curva $y = x^3$ y las rectas $y = 2x$, $y = x$.

9. Hallar el área de la figura contenida en el primer cuadrante, dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3a^2$ y limitada por las parábolas $x^2 = 2ay$, $y^2 = 2ax$ $(a > 0)$.

10. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

11. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$, su tangente en el punto $(2, -5)$ y el eje OY.

12. Hallar el área de la superficie limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a,\ b > 0)$.

13. Hallar el área de la figura limitada por el eje OX, la curva $y = \frac{6a^3}{x^2 + 9a^2}$ y las rectas $x = 3a$, $x = -3a$ $(a > 0)$.

14. Calcular el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = x$ divide al círculo limitado por $x^2 + y^2 = 4$.

15. Hallar el área de la figura limitada por la curva $xy = a$, y las rectas $x = a$, $x = 2a$, y el eje OX.

16. Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x^2+2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.

17. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x^4 - 6x^2$ y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.

18. Hallar el área de la figura comprendida entre las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$ y la recta $x = 4$.

19. Hallar el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a,\ b,\ c > 0)$.

20. Calcular el volumen del segmento esférico de dos bases cortado de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ mediante los planos $x = 2$, $x = 3$.

21. Sobre todas las cuerdas paralelas de un círculo de radio R se construyen segmentos parabólicos simétricos de la misma altura h, que cortan a la circunferencia y cuyos planos son perpendiculares al plano del círculo. Hallar el volumen del sólido así obtenido.

22. La figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leq x \leq \pi/2)$, el eje OY y la recta $y = 1$ gira alrededor del eje OY. Calcular el volumen del sólido de revolución así engendrado.

23. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva $a^2y^2 = ax^3 - x^4$ alrededor del eje OX $(a > 0)$.

24. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX la figura limitada por $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$ y las rectas $x = c$, $x = -c$ $(a,\ c > 0)$.

25. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la porción de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = 2a$ $(a > 0)$.

26. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la figura limitada por la curva $y = xe^x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

27. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la figura limitada por la curva $y = \operatorname{arc\,sen} x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

28. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la figura limitada por la curva $y = 2x - x^2$ y el eje OX.

29. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}$ y el plano $z = 1$.

30. Deducir por integración la fórmula del volumen de un cono de radio R y altura H.

31. La zona interior a las curvas $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ gira entorno a la recta $x = 5$. Hallad el volumen del cuerpo resultante.

32. La zona interior a la curva $x = 9 - y^2$, y las rectas $x - y - 7 = 0$, $x = 0$ gira entorno a la recta $y = 3$. Hallad el volumen del cuerpo resultante.

33. Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = \dfrac{2}{3}(x-1)^3$ que limita la curva $y^2 = \dfrac{x}{3}$.

34. Calcular la longitud del arco de la curva $x = \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{4}\log y$ comprendida entre las rectas $y = 1$, $y = e$.

35. Calcular la longitud del arco de la curva $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ que limita la recta $x = \dfrac{5a}{3}$ $(a > 0)$.

36. Hallar la longitud del arco que la recta $x = 4/3$ corta en la curva $y^2 = x^3$.

37. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \log \cos x$ entre los puntos de abscisas $x = 0$, $x = \pi/4$.

38. Hallar la longitud del arco de la curva $9y^2 = x(x-3)^2$ comprendido entre los puntos de corte con el eje OX.

39. Calcular la longitud del arco de curva de ecuación $y = \log \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $1 \leq x \leq 2$.

40. Hallar la longitud del arco de curva de ecuación $y = \operatorname{arc\,sen} e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$.

41. Hallar la longitud del arco de la curva $x^2 = (y+1)^3$ entre los puntos de corte con la recta $y = 4$.

42. Hallar la longitud del arco de la rama derecha de la tractriz

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right|,$$

desde $y = a$ hasta $y = b$ $(0 \leq b \leq a)$.

43. Hallar la longitud de la curva de ecuación $y = \log \sqrt{\sec 2x}$ comprendida entre los puntos de abscisa $x = 0$, $x = \pi/6$.

44. Calcular el área de la superficie engendrada formada al girar alrededor del eje OX el arco de la curva $3y - x^3 = 0$ limitado por las rectas $x = 0$, $x = a$ $(a > 0)$.

45. Calcular el área de la superficie engendrada formada al girar alrededor del eje OX la curva $y = \operatorname{sen} x$, con $0 \leq x \leq 2\pi$. Solo planteamiento

46. Hallar el área del elipsoide formado al girar alrededor del eje OX la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

47. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje OY la porción de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ cortada por la recta $y = \dfrac{3}{2}$.

48. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje OX la porción de la curva $y^2 = 4 + x$ cortada por la recta $x = 2$.

49. Calcular el área y el volumen de una esfera radio a.

50. Calcular el área y el volumen de un toro circular de radio exterior b y radio interior a, formado al girar sobre el eje $0Y$ la circunferencia $y^2 + (x - a)^2 = b^2$.

51. Hallar el área de la superficie limitada por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $y = x^2$, $2y = x^2$.

52. Hallar el área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje OX el contorno cerrado formado por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$.