Università degli Studi di Salerno

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Equazioni Lineari ai Coefficienti Variabili

Equazioni differenziali

Relatore:
Prof.ssa
Lyoubomira Softova Palagacheva

Candidato:
Corzo Galdo Jaime
j.corzogaldo@studenti.unisa.it
Matricola ERASMSIN03737

Anno Accademico 2023-2024

15 gennaio 2024

Indice

1. Introduzione

Le equazioni differenziali hanno un ruolo molto importante nella nostra vita. Molti problemi della scienza e dell'ingegneria richiedono la descrizione di alcune misurabile quantità(posizione, temperatura, popolazione corrente elettrica, ecc.) in funzione del tempo. Ad esempio un sistema dinamico, come **l'atrattore di Lorenz** (il cui sistema è presente nei laser, nei generatori elettrici e in alcune ruote idrauliche), viene descritto da un'equazione differenziale ordinaria. Spesso le leggi scientifiche che regolano tali sono espresse al meglio come equazioni che coinvolgono il tasso di variazione della quantità nel tempo. Tali leggi danno origine alle equazioni differenziali.

Un tipo di equazoni differenziali sono quelle ai coefficienti variabili. Della forma:

$$a2(t)y'' + a1(t)y' + a0(t)y = f(t) \tag{1}$$

Si noti che i coefficienti $a0(t)$, $a1(t)$ e $a2(t)$ sono funzioni della variabile indipendente t e non necessariamente costanti. Per trovare metodi di soluzione, è necessario porre alcune restrizioni piuttosto forti sulle alle funzioni coefficienti $a0(t)$, $a1(t)$ e $a2(t)$.

Deviamo anche distinguire tra le omogenea e non omogenea equzione. Nel primo caso,

$$a2(t)y'' + a1(t)y' + a0(t)y = 0 \tag{2}$$

in principio saremo in grado di di trovare due funzioni linearmente indipendenti y1 e y2 tali che tutte le soluzioni della (2) siano della forma $c1y1 + c2y2$, per alcune costanti $c1$ e $c2$. Nel secondo caso, per trovare la soluzione una forma è ussare le soluzione della equazione omogenea, e, via il metodo delle variazione delle constante troviamo la soluzione della equazione non omogenea.

Noi andiamo a vedere divere metodi di risolvere queste tipo di equazione, **le equazione ai coefficiente variabili.**

Anche alle fine andiamo a vedere alcuni **modelli matematici con equazioni differenziali di secondo ordine.**
Ma prima di tutto vediamo il **Teorema di esistenza e unicità**, che stabilisce le condizioni di esistenza e unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.

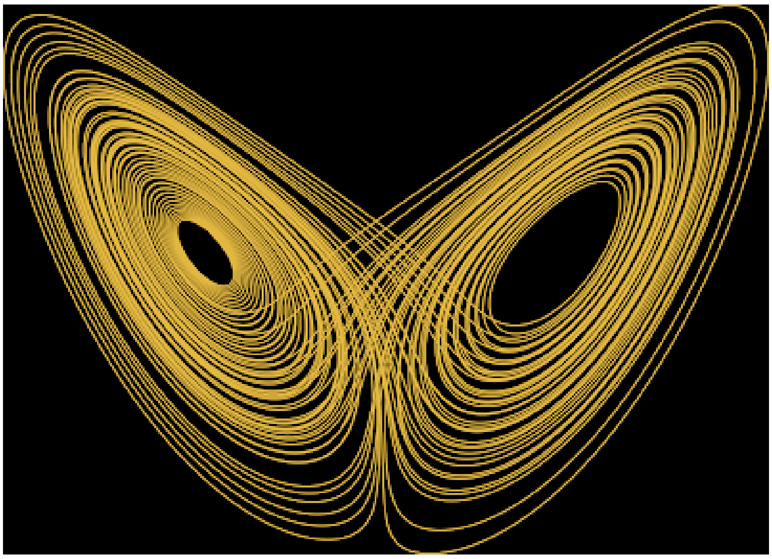


Figura 1: Attrattore di Lorenz

2. Equazioni Lineari ai Coefficienti Variabili

2.1. **Il teorema di esistenza e unicità.** Prendiamo l'equazione (1). Assumeremo che le funzioni coefficienti a0(t), a1(t), e a2(t) e f(t) sono funzioni continue su un intervallo comune I. Assumiamo inoltre che $a2(t) \neq 0$ per tutti i t $\in I$.
Forma standard: Con $a2(t) = 1$.
Operatore differenziale:

$$L[y] = y'' + a1(t)y' + a0(t)y \tag{3}$$

Ora possiamo scrivere la equazione in forma standard come $Ly = f(t)$. Questo operatore che abbiamo definito è lineare.

Teorema 2.1. *Supponiamo $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ e f sono funzioni continue su uno intervallo aperto I e $a_2(t) \neq 0$ per tutti i $t \in$ I. Supponiamo $t_0 \in I$ e $y_0 e y_1$ sono numeri reali impostati. Sia $L = a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$. Allora c'è sola e sola una soluzione al problema del valore iniziale. $Ly = f$; $y(t_0) = y_0$; $y'(t_0) = y_1$.*

Il Teorema non ci dice come trovare una soluzione. Dobbiamo sviluppare delle procedure per questo. Spieghiamo più in dettaglio cosa dice questo teorema. Sotto le condizioni indicate, il teorema di esistenza e unicità dice che c'è sempre una soluzione al problema del valore iniziale dato. La soluzione è almeno due volte differenziabile su I e non esiste un'altra soluzione.

2.2. **Equazioni Lineari ai Coefficienti Variabili Omogenee.**

Teorema 2.2. *Supponiamo $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ e f sono funzioni continue su uno intervallo aperto I e $a_2(t) \neq 0$ per tutti i $t \in$ I. Sia $L = a2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$.*

1. Esistono due soluzioni linearmente indipendenti a $Ly = 0$.

2. Se y1 e y2 sono due soluzioni linearmente indipendenti di $Ly = 0$, allora ogni soluzione omogenea y può essere scritta $y = c_1y_1 + c_2y_2$, per qualche c_1; $c_2 \in \mathbb{R}$.

Sollecito: Matrice Wronskiana e Wronskiano

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice Wronskiana e il Wronskiano è:

$$w(y_1, y_2)(t) = detW(y_1, y_2)(t)$$

Date due funzioni differenziabili, y1 e y2, il cui Wronskiano è una funzione non nulla, allora y1 e y2 sono indipendenti.

Teorema 2.3. *Siano una $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_1, a_0 \in C^0(I)$, $t_0 \in I$, allora W(t) verifica l'equazione:*

$$W'(t) + a1W(t) = 0 \tag{4}$$

e

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds} \tag{5}$$

Questo Teorema possiamo usarlo per risolvere questi tipo di equazioni.

Esempio 1. *Sia $y_1 = t^2$ una soluzione dell'equazione*

$$y'' - \frac{2}{t^2}x = 0$$

Trovare la soluzione generale.

Chiedamo che $W(y_1, y_2)(t_0) = W_0 \neq 0$ per alcuno $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Prendiamo $t_0 = 1$ e $W_0 = -7$. Sono arbitrari, ma rispettando $t_0 > 0$ e $W_0 \neq 0$ $\Longrightarrow W(y_1.y_2)(t) = -7e^{-\int_1^t a_1(s)ds} = -7e^{-\int_1^t 0ds} = -7$.
Allora

$$-7 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = -7 \Longleftrightarrow y_2'(t) = \frac{-7}{t^2} + \frac{2}{t} y_2$$

Possiamo risolvere questa equazione differenziale di primo ordine con il fattore integrale $\frac{-1}{t^4}$.

$-t^4 y_2' + 2ty_2 = 7 \iff \frac{y_2'}{t^2} - \frac{2}{t^3}y_2 = \frac{-7}{t^4}$

$\int \frac{d}{dt}(\frac{1}{t^2}y_2(t)) = \int \frac{-7}{t^4} \iff \frac{1}{t^2}y_2(t) = c - 7\int_1 t\frac{ds}{s^4} = C + \frac{7}{3t^3}$

In conclusione, $y_1(t) = t^2, y_2(t) = \frac{7}{3t}$ *è un sistema fondamentale.*

In sommario de ciò che abbiamo visto, prima di tutto, per il Teorema 2.1, sappiamo que c'è una soluzione particulare y1. Dopo di chè possiamo trovare un'altra soluzione e tutte le soluzione della equazione omogenea saranno della forma $c_1y_1 + c_2y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e con y_1, y_2 linearmente indipendente. Ora debbiamo sviluppare metodi per ottenere y_2.

2.2.1. *Metodo: Riduzione del ordine.* Supponiamo $L = a_2(t)y''+a_1(t)y'+a_0(t)y$ e che y_1(t) è una soluzione non banale che conosciamo. Una seconda soluzione indipendente è della forma:

$$y_2(t) = u(t)y_1(t) \tag{6}$$

dov'è debbiamo determinare u(t). Di (6) otteniamo

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \tag{7}$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \tag{8}$$

Sostituendo (6), (7) e (8) in $L = a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$ otteniamo

$$Ly_2 = u''a_2y_1 + u'(2a_2y_1' + a_1y_1) = 0 \tag{9}$$

Un'altra equazione differenziale in u. Il passo successivo è il cambio v=u' è otteniamo $v'a_2y_1 + v(2a_2y_1' + a_1y_1) = 0$. Una equazione in v di primo ordine separabile. Otteniamo $v = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1/a_2}$. Come v=u', integriamo:

$$u = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1/a_2}$$

Sostituimmo u in (6) e otteniamo l'altra soluzione independenti.

2.2.2. *Metodo: Equazioni di Euler.*

$$a_m t^m y^{(m)} + a_{m-1} t^{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + a_1 t y' + a_0 y = 0 \tag{10}$$

Equazioni di tipo (10) dove $y = y(x)$ si chiama equazione di Euler. Dov'è $a_i \in \mathbb{R}$ per tutti i $\in$ [0,...,m].

Se ponniamo (10) nella forma normale, le funzioni, $\frac{a_{m-1}}{a_m x}, \ldots, \frac{a_0}{a_m x^m}$, sono continui ovunque tranne in 0, e, per il Teorema 2.1 sappiamo che la soluzione esiste in entrambi intervali $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Assumeremo che $t > 0$, e $L = a_m t^m y^{(m)} + a_{m-1} t^{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + a_1 t y' + a_0 y$ sarà il operatore Euler. Possiamo fare due sostituzione.

SOSTITUZIONE1: $t = e^x$

Vediamo questo metodo per m=2 ma è possibile estenderlo a qualsiasi ordine.

Prendiamo $Y(x) = y(e^x)$. Per la regola della catena:

$Y'(x) = e^x y'(e^x)$

$Y''(x) = Y'(x) + (e^x)^2 y''(e^x)$

$\Longrightarrow a_2 (e^x)^2 y''(e^x) + a_1 e^x y'(e^x) + a_0 y(e^x) = a_2 Y''(x) - a_2 Y'(x) + a_1 Y'(x) + a_0 Y(x)$.

$$a_2 Y''(x) + (a_1 - a_2) Y'(x) + a_0 Y(x) = 0 \tag{11}$$

Il polinomio

$$Q(s) = a_2 s^2 + (a_1 - a_2) s + a_0$$

è il polinomio caratteristico della equazione precedente. Le sue soluzioni dipendono dal modo in cui Q(s) si fattorizza. Vediamo l'altra sostituzione e dopo consideriamo le tre possibilità secondo le radici del polinomio caratteristico.

SOSTITUZIONE2: $y = t^k$

Come prima, vediamo questo metodo per m=2 ma è possibile estenderlo a qualsiasi ordine. Prendiamo $y = t^k$ e troviamo k dopo la sostituzione in $a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0$.

$y' = kt^{k-1}$
$y'' = k(k-1)t^{k-2}$
$\implies a_2 t^2 k(k-1)t^{k-2} + a_1 t k t^{k-1} + a_0 t^k = a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = k^2 + (a_1 - a_2)k + a_0 = 0$
Il polinomio

$$Q(s) = a_2 s^2 + (a_1 - a_2)s + a_0$$

è il polinomio caratteristico della equazione precedente. Le sue soluzioni dipendono dal modo in cui Q(s) si fattorizza. Vediamo ora le tre possibilità secondo le radici del polinomio caratteristico.

1. Q ha radici reale distinti

Supponiamo λ_1, λ_2 sono radici diverse di Q(s).
Nella prima sostituzione abbiamo $y(x) = c1e^{\lambda_1 x} + c2e^{\lambda_2 x} \implies y(t) = c1t^{\lambda_1} + c2t^{\lambda_2}$.
Nella seconda sostituzione abbiamo $y_1 = t^{\lambda_1}, y_2 = t^{\lambda_2} \implies y(t) = c1t^{\lambda_1} + c2t^{\lambda_2}$.

2. Q ha una radice doppia

Supponiamo che λ è la radice di Q(s).
Nella prima sostituzione abbiamo che $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono soluzioni independenti di (11), con la sostituzone $x = \ln t$, t^λ, $t^\lambda \ln t$ sono soluzioni independenti di (10) con m=2 e $\{t^\lambda, t^\lambda \ln t\}$ è un sistema fondamentale per L(y)=0.
Nella seconda sostituzione $y1 = t^\lambda$, $y2 = t^\lambda \ln t$. La soluzione generale è $y(t) = c1t^\lambda + c2t^\lambda \ln t$.

3. Q ha radici complesse coniugate

Supponiamo $\alpha \pm i\beta$ dov'è $\beta \neq 0$ sono radici diverse di Q(s).

Nella prima sostituzione abbiamo che $e^{\alpha x} cos\beta x$ e $e^{\alpha x} sin\beta x$ sono soluzioni indipendenti della (11). La sostituzione $x = \ln t$ dà quindi $\{t^{\alpha} cos\beta \ln t, t^{\alpha} sin\beta \ln t\}$ come insieme fondamentale per Ly = 0.
Nella seconda sostituzione abbiamo la soluzione generale $y(t) = c1t^{\alpha+i\beta} + c2t^{\alpha-i\beta} = t^{\alpha}(Acos\beta \ln t + Bsin\beta \ln t)$, la otteniamo sapendo che $e^{i\beta \ln t} = cos\beta \ln t + isin\beta \ln t$.

2.2.3. *Metodi di transformazioni di Laplace.* In questa sezione, svilupperemo alcune proprietà della trasformata di Laplace e le utilizzeremo per risolvere alcune equazioni differenziali lineari con funzioni a coefficienti non costanti.
Iniziamo con una definizione importante. A funzione continua f su $[0, \infty)$ si dice di tipo esponenziale di ordine a se esiste una costante K tale che

$$-Ke^{at} \leq |f(t)| \leq Ke^{at}$$

per tutti i $t \in [0, \infty)$ come se mostra nella figura 1. Se l'ordine non è importante per la discussione, diremo semplicemente che f è di tipo esponenziale.

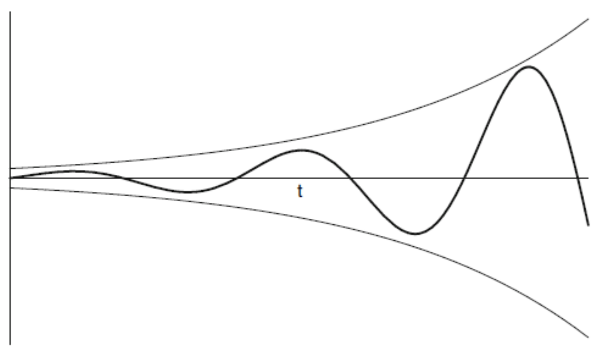


Figura 2: The exponential function Ke^{at} bounds f(t)

Per una funzione exponenziale, sappiamo la seguente propietà per la Trasformata di Laplace: esiste F(s) = Lf(s) e che

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

Valori asintotici

Teorema 2.4. *Supponiamo che f e f' sono di ordine exponenciale. Sia F(s) = Lf(s).*
$\Longrightarrow f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Teorema 2.5. *Supponiamo che f e f' sono di ordine exponenciale e che* $\lim_{t\to\infty} f(t)$ *esiste. Sia F(s) = Lf(s).*
$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Integrazione nello spazio di trasformazione

Teorema 2.6. *Supponiamo che f sia di tipo esponenziale con ordine a e* $\dfrac{f(t)}{t}$ *ha un'estensione continua a 0, cioè* $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ *esiste. Allora* $\dfrac{f(t)}{t}$ *è di tipo esponenziale di ordine a e*

$$L\{\frac{f(t)}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

Risoluzione di equazioni differenziali lineari

Consideriamo ora, a titolo di esempio, come si possa utilizzare il metodo della trasformata di Laplace per risolvere alcune equazioni differenziali.

Esempio 2. *Trovare una soluzione di tipo esponenziale che risolva*

$$ty'' - (1+t)y' + y = 0$$

<u>Soluzione:</u> *Si noti che il teorema di esistenza e unicità implica che le soluzioni su intervalli che non contengono 0. Sia y una soluzione di questo tipo. Let* $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ *e* $Y(s) = L\{y(t)\}(s)$. *La apllicazione del principio della derivata trasformata:* $L\{-tf(t)\}(s) = \dfrac{d}{ds}L\{f(t)\}(s)$, *a ciascuna componente dell'equazione differenziale. equazione differenziale dà*

$$L\{ty''\} = -(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0))' = -(2sY(s) + s^2Y'(s) - y(0))$$

$$L\{-(1+t)y'\} = L\{-1y'\} + L\{-ty'\} = -sY(s) + y_0 + (sY(s) - y_0)' = sY'(s) - (s-1)Y(s) + y_0$$

$$L(y) = Y(s)$$

Aggiungendo i termini di destra e semplificando si ottiene

$$(s-s^2)Y'(s)+(-3s+2)Y(s)+2y_0 = 0 \Longleftrightarrow Y'(s)+\frac{(3s-2)Y(s)}{s(s-1)} = \frac{2y_0}{s(s-1)}$$

Questa equazione è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in Y(s). Poiché $\frac{3s-2}{s(s-1)} = \frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}$, *è facile vedere che un fattore di integrazione è* $I = s^2(s-1)$, *e quindi,*

$$(IY(s))' = 2y_0 s$$

Integrando e risolvendo per Y si ottiene

$$Y(s) = \frac{y_0}{s-1}+\frac{c}{s^2(s-1)}$$

La trasformata di Laplace inversa è $y(t) = y_0e^t + c(e^t - t - 1)$. *Per semplicità, si può scrivere questa soluzione nella forma*

$$y(t) = c1e^t + c2(t+1)$$

dove c1 = y0 + c e c2 = -c.

Importante: Quando le funzioni a coefficiente sono polinomiali di ordine superiore a uno, il metodo della trasformata di Laplace sarà generalmente poco utile. Per questo motivo, di solito limiteremo esempi alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine con funzioni di coefficienti che sono termini lineari, cioè della forma at + b. Anche con questa restrizione, dovremo comunque risolvere un'equazione differenziale del primo ordine in Y(s) e determinare la sua inversa trasformata di Laplace; problemi non sempre facili.

Polinomi di Laguerre

Il polinomio di Laguerre, $l_n(t)$, di ordine n è la soluzione polinomiale di equazione differenziale di Laguerre

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

dove y(0)=1 e n è un intero non negativo.

Lemma 2.1. *Il nth Polinomio di Leguerre e la sua Transformata sono:*

$$\ell_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}$$

$$\mathcal{L}\{\ell_n(t)\}(s) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

2.3. **Equazioni Lineari ai Coefficienti Variabili Non Omogenee.** Se conosciamo una soluzione dell'equazione non omogenea e sappiamo risolvere la omogenea, allora possiamo calcolare tutte le soluzioni.

Esempio 3. $y'' + y = t^2$
Soluzione dell'equazione non omogenea: $y(t) = t^2 - 2$
Sistema fondamentale della omogenea: $\{cost, sent\}$
Le soluzioni sono della forma: $y(t) = t^2 - 2 + c1cost + c2sent$

2.3.1. *Variazione delle constante.* Metodo che permete di risolvere la equazione non omogenea se conosciamo un sistema fondamentale, $\{y_1, y_2\}$ dell'omogenea.
Supponiamo la equazione è in forma normale: $L = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$, questo è molto importante per questo metodo. Sia y_p la soluzione particolare a L(y)=f. Ora facciamo due assunzioni

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \tag{12}$$

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 \tag{13}$$

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$$
$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''$$

Sostituamo y_p in L(y):

$$L(y_p) = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + a_1(u_1y_1' + u_2y_2') + a_0(u_1y_1 + u_2y_2)$$
$$= u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + u_2(y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2)$$

$$= u_1'y_1' + u_2'y_2'$$

La seconda assunzione e $L(y_p) = f$ portanno al seguente sistema:

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f$$

Per la regola di Cramer e ricordando que $w(y_1, y_2)$ è il Wronskiano di y1,y2 che è non zero perchè sono un sistema fondamentale possiamo risolvere questo sistema:

$$u_1' = \frac{-y2f}{w(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{y_1 f}{w(y_1, y_2)}$$

Otteniamo una formula per y_p

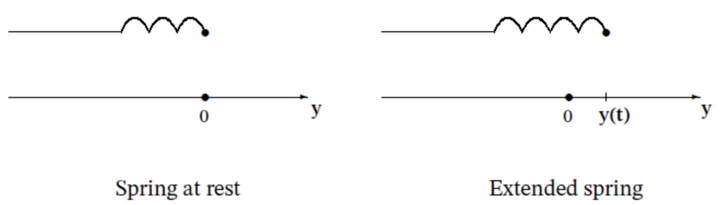
$$y_p = u1y1 + u2y2 = (\int \frac{-y2f}{w(y_1, y_2)})y1 + (\int \frac{y_1 f}{w(y_1, y_2)})y2 \tag{14}$$

E tutte le soluzione di L(y) = f sono

$$\{y_p + c_1y_1 + c_2y_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

3. Modelli matematici

<u>Molla vibrante</u>



Se una molla viene estesa o compressa, oscillerà intorno alla sua posizione di equilibrio. Dirigiamo l'asse y lungo la molla, con l'origine scelta nella posizione di equilibrio. Sia y = y(t) lo spostamento di una molla dalla sua posizione naturale al tempo t. Il suo moto è governato dalla seconda legge di Newton:

$$f = ma$$

L'accelerazione a $= y''(t)$. Assumiamo che l'unica forza f, che agisce sulla molla, sia la sua stessa forza di ripristino. che per la legge di Hooke è f = -ky, per piccoli spostamenti. Qui la costante fisica k > 0 descrive la rigidità (o la durezza) della molla. Quindi

$$my'' = -ky$$

Dividiamo entrambi i lati per la massa m della molla, e indichiamo k/m $= \omega^2$, ottenendo

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

La soluzione generale, $y = c_1 cos\omega t + c_2 sen\omega t$, ci dà il moto armonico della molla. Per capire meglio la soluzione, scriviamo y(t) come

$$y(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} cos\omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} sen\omega t)$$

Notiamo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e osserviamo che $\dfrac{c_1^2}{A^2} + \dfrac{c_2^2}{A^2} = 1 \Longrightarrow \exists\delta$ tale che $cos\delta = \dfrac{c_1}{A}$ e $sen\delta = \dfrac{c_2}{A}$.
Quindi la nostra soluzione è della forma

$$y(t) = A(cos\delta cos\omega t + sen\delta sen\omega t) = Acos(\omega t - \delta)$$

Concludiamo che qualsiasi moto armonico non è altro che una curva coseno traslata di ampiezza A $= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e di periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Più ω è grande, più il periodo è piccolo e le oscillazioni sono più frequenti. ω ci dà la frequenza delle oscillazioni, detta frequenza naturale della molla. Le costanti c_1, c_2 possono essere calcolate, una volta determinato lo spostamento iniziale $y(0)$ e la velocità iniziale $y'(0)$.

Una meteora in avvicinamento alla Terra

Sia r=r(t) la distanza di una meteora dal centro della Terra al tempo t. Il moto della meteora è governato dalla legge di gravitazione di Newton

$$mr'' = -\frac{mMG}{r^2} \tag{15}$$

Qui m è la massa della meteora, M indica la massa della Terra e G è la costante gravitazionale universale. Sia r il raggio della Terra. Se un oggetto si trova sulla superficie della Terra, allora r=a e l'accelerazione $r'' = -g$, la gravità della Terra, per cui da (15)

$$g = \frac{MG}{a^2}$$

Allora $MG = ga^2$, quindi possiamo scrivere (15) come

$$r'' = -g\frac{a^2}{r^2}$$

Risolviamo l'equazione:

$$r'r'' + g\frac{a^2}{r^2}r' = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}r'^2 - g\frac{a^2}{r}) = 0$$

$$\frac{1}{2}r'^2(t) - g\frac{a^2}{r(t)} = c \qquad (16)$$

in modo che l'energia della meteora, $E(t) = \frac{1}{2}r'^2(t) - g\frac{a^2}{r(t)}$, rimane costante in ogni momento.

Ora possiamo scrivere $r = -\sqrt{2c + \frac{2ga^2}{r(t)}}$ e calcolare il moto della meteora r(t) per separazione di variabili. Tuttavia, dal momento che non stiamo viaggiando sulla meteora, sembra che non ne valga la pena. Ciò che ci interessa davvero è la velocità d'impatto, quando la meteora colpisce la Terra, che viene che verrà discussa nel prossimo paragrafo. Assumiamo che la meteora "inizi" il suo viaggio con velocità zero $r'(0) = 0$ e a una distanza così grande che possiamo assumere $r(0) = \infty$. Allora l'energia della meteora al t = 0 è zero, E(0) = 0. Poiché l'energia rimane sempre costante, anche l'energia al momento dell'impatto è zero. al momento dell'impatto è anch'essa pari a zero. Al momento dell'impatto, abbiamo r=a, e denotiamo la velocità d'impatto con v(r'=v). Allora dalla (16)

$$\frac{1}{2}v^2(t) - g\frac{a^2}{a} = 0$$

e la velocità dell'impatto

$$v = \sqrt{2ga}$$

4. Conclusione

Le equazione differenziale sono studiati in molto ambiti della scienza, nella matematica applicata, le funzioni rappresentano solitamente quantità fisiche, le derivate rappresentano i loro tassi di variazione e l'equazione definisce la relazione tra di esse.
Hanno anche un ruolo importante nella fisica, ingegneria, biologia...
Ma questo non è tutto, nella matematica pura, si prova a trovare tutte le soluzione dell'equazione, che non è sempre facile e possibile. Se no possiamo richiedere aiuta allo computer, per risolverla per aprossimazione.
Quindi è molto importante conoscere le equazione differenziale e come possiamo descrivere, grazie a loro, diverse aspetti della vita, e come questo, ci può aiutare a vivire meglio e capire meglio come funziona il nostro mondo.

5. Riferimenti bibliograci

[1] Philip L. Korman, Lectures on Differential Equations, AMS/MAA Textbooks Volume: 54; 2019.
[2] Antonio Ambrosetti, Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie, Springer-Verlag UNITEXT, Italia 2012.
[3] William A. Adkins , Mark G. Davidson, Ordinary Differential Equations, TextBook, 2012.