PROBLEMA

Date le superfici regolari

$$\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, u)$$

$$\psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\bar{u},\bar{v}) \mapsto (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \ln \bar{v})$$

1) Calcolare le curvature di Gauss
2) Dimostrare che non sono localmente isometriche
3) Quali sono le equazioni delle geodetiche sulla prima superficie ?

Osserviamo innanzitutto che φ è la parametrizzazione di un elicoide e che ψ è una superficie di rotazione ottenuta ruotando la funzione logaritmo.
Si può verificare che sia $\varphi : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \to \varphi(U)$ che $\psi : U \to .(U)$ sono omeomorfismi
$\Rightarrow$ $S_1 = \varphi(U)$ e $S_2 = \psi(U)$ sono due

superfici regolari.

1) Per la prima superficie

$$\varphi_u = (-v\sin u, v\cos u, 1)$$

$$\varphi_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u + 1 =$$

$$= v^2 + 1$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -v \sin u \cos u + v \cos u \sin u$$

$$= 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$\Rightarrow \qquad K_1 = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$$

Per la seconda

$$\psi_{\bar{u}} = (-\bar{v}\sin\bar{u}, \bar{v}\cos\bar{u}, 0)$$

$$\psi_{\bar{v}} = \left(\cos\bar{u}, \sin\bar{u}, \frac{1}{\bar{v}}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \bar{v}^2 \qquad \bar{F} = 0 \qquad \bar{G} = 1 + \frac{1}{\bar{v}^2}$$

$$K_2 = -\frac{1}{(1+\bar{v}^2)^2}$$

2) Supponiamo per assurdo che S_1 e S_2 siano localmente isometriche. Allora $\forall p \in S_1$ dovrebbe esistere un aperto V e un' isometria

$$f : V \to W$$

con W aperto in S_2. Sia

$$f(u,v) = (\bar{u} = \bar{u}(u,v), \ \bar{v} = \bar{v}(u,v))$$

l'espressione locale di tale f. Poiche' f e' un' isometria deve valere

$$K_2(f(p)) = K_1(p) \qquad \forall p \in S_1$$

Dall' espressione di K_1 e K_2 si ha

$$-\frac{1}{(1+\bar{v}^2)^2} = -\frac{1}{(1+v^2)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}(u,v) \\ \bar{v} = \pm v \end{cases} \qquad (*)$$

Ricordiamo che f isometria $\Leftrightarrow$ $I_1(p) = I_2(f(p))$

La prima forma fondamentale si può scrivere come

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad \Rightarrow$$

$$I_1 = (v^2+1)\,du^2 + dv^2$$

$$I_2 = \bar{v}^2 d\bar{u}^2 + \frac{\bar{v}^2+1}{\bar{v}^2} d\bar{v}^2$$

Da $(*)$ segue

$$\begin{cases} d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv \\ d\bar{v} = \pm dv \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_2 = v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dv^2$$

$$= v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 du^2 + v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^2 dv^2 +$$

$$2 v^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) dv^2$$

Non coincide con la I_1 ! Dovrebbe valere

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0 \qquad \text{cioè} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 0$$

oppure $\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0$.

Se $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 0$ dall' uguaglianza $E = \bar{E}$ si

trova l'assurdo

$$0 = v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 = v^2 + 1 \neq 0$$

Ugualmente, se $\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0$ dall' uguaglianza

$G = \overline{G}$ si trova l'assurdo

$$1 + \frac{1}{v^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v^2} = 0$$

3) $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

Poiché $F = 0$ i simboli di Christoffel sono semplici da calcolare:

$$E = v^2 + 1$$
$$G = 1$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{E_u}{2E} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = -\frac{E_v}{2G} = -\frac{\cancel{2}v}{\cancel{2}}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{E_v}{2E} = \frac{\cancel{2}v^2}{\cancel{2}(v^2+1)}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{G_u}{2G} = 0$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{G_u}{2E} = 0$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{G_v}{2G} = 0$$

L'espressione locale delle geodetiche è

$$\begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{2v^2}{v^2+1} u'v' = 0 \\ v'' - v\, u'^2 = 0 \end{cases}$$