Resumen Proba

(Espacio muestral)

→ Spazio Campionario Ω: Colección de resultados de un experimento aleatorio

Ω < conjunto infinito / infinito < numerable / no numerable

Evento → Subconjunto de Ω

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ è vero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ej: Lancio di 3 monete: $B = \{\text{testa una volta}\} = \{\omega_1\omega_2\omega_3 \in \Omega : \sum_{i=1}^{3} \{\omega_i = t\} = 1\}$

Cardinalità di Ω (nel lancio di una moneta n volte, $n \in \mathbb{N}$)

$|\Omega| = \overbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}^{n} = 2^n$

$A = \{\text{il primo lancio una testa}\}$, $|A| = 1 \times \overbrace{2 \times \ldots \times 2}^{n-1} = 2^{n-1}$

$B = \{\text{testa una volta}\}$, $|B| = n$ (Por cada lanzamiento solo hay una posibilidad)

Formulas de De Morgan

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ 2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 3) $\bar{\bar{A}} = A$

Más propiedades → Conmutativa, Asociativa y Distributiva $[A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)]$ $[A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Definiciones

- Dados 2 eventos A, B decimos que A implica B (escribimos $A \subset B$) si $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$

  (Nota: → Si $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
  → si $A \subset B$, $B \subset A \Rightarrow A = B$
  → $A \cap B \subset A \subset A \cup B$)

- A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$
- Dados n eventos $A_1, \ldots, A_n$ son 2 a 2 incompatibles si $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (igual para una sucesión $A_1, A_2, \ldots$)
- Dados eventos A, B se dicen complementarios si $A \cup B = \Omega$ (necesario)
- Partición de Ω: Los eventos son complementarios y 2a2 incompatibles

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Espacio de probabilidad

$\mathcal{F}$ (Familia de eventos) es una colección de eventos de Ω tales que

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$

4) $\emptyset \in \mathcal{F}$ $(\emptyset = \bar{\Omega})$

5) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots \in \mathcal{F})$ Por 3) y 4)

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i} \in \mathcal{F}$ (Por 2) y 5))

6) $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (Igual que 5))

$\mathcal{F}$ se dice también σ-álgebra de los eventos

(Importaciones)

Interpretaciones de la probabilidad

1) Clasica

Ω tiene cardinalidad finita $(|\Omega| = n, n \in \mathbb{N})$

Los resultados del experimento tienen igual probabilidad

Dado $A \in \mathcal{F}$, la def. clásica es $\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{numero de casos favorable}}{\text{numero de casos totales}}}$

Nota: $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ $\quad P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$ $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|}$

Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

$\frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$

2) Frequentista

Se repite un experimento más de una vez bajo las mismas condiciones

$f(A)$ = frecuencia relativa de A en n pruebas $= \boxed{\frac{V(A)}{n}}$ $\quad 0 \leq f(A) \leq 1$

$V(A)$ = " absoluta de A en n pruebas (las veces que ha sucedido A, $0 \leq V(A) \leq n$)

$P(A)$ = Valor al que tiende $f(A)$ cuando $n \to \infty$ $\quad P(A) \approx f(A)$

$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, $\quad f(\bar{A}) = 1 - f(A)$

3) Subjetiva

$P(A)$ es el grado de confianza que un observador tiene en que A ocurra

ω : resultado del experimento $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$

$\omega \in A \Rightarrow$ recibimos 1 euro

$\omega \in \bar{A} \Rightarrow$ " 0 euros

Sucesioni di eventi

Ω, $\mathcal{F}$ = familia de eventos, $\{A_1, A_2, \dots\}$ sucesión de eventos de $\mathcal{F}$

1) $\{A_n\}$ es creciente si $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ $\left[\lim_{n \to +\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$ Evento de $\mathcal{F}$

2) $\{A_n\}$ es decreciente si $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n \geq 1$ $\left[\lim_{n \to +\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right]$

3) Monotona se es creciente o decreciente

4) $\{A_n\}$ non monótona, definimos:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad B_n = A_n \cap B_{n+1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup C_{n+1}$$

A partir de un n w pertenece a todos los A_K

$\underline{w \in \liminf_{n\to\infty} A_n} \iff w \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n \geq 1 : w \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \underline{\exists n \geq 1 : w \in A_k \; \forall k \geq n}$

$\underline{w \in \limsup_{n\to\infty} A_n} \iff w \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \forall n \geq 1 : w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \underline{\forall n \geq 1 : \exists k \geq n : w \in A_k}$

Para todos los n, w pertenece a un A_K (con $K \geq n$)

__Nota__: $\liminf A_n \subset \limsup A$

Si w pertenece a todos los A_K dado un $n \geq 1$, $w \in$ a un A_K para cada $n \geq 1$ / Ej: si $n = 3$, $w \in A_3, A_4, A_5 \dots \Rightarrow$
$(\forall K \geq n)$

$\Rightarrow \forall n \geq 1$, por ej, sea $n = 1$, con $K = 3$, $w \in A_3$
≥ 1

Si $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \Rightarrow \{A_n\}$ __admite limite__

Espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

P è una funzione $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que:

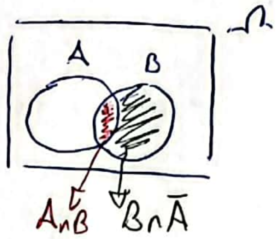
1) $P(\Omega) = 1$
2) $P(A) \geq 0$ $\quad \forall A \in \mathcal{F}$
3) Si $\{A_1, A_2, \dots\}$ es una sucesión de eventos 2 a 2 incompatibles entonces
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{(propiedad de la aditividad numerable)}$$

Axiomas de la probabilidad

Formula di inclusione - esclusione

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \quad \text{con } A,B \in \mathcal{F}}$$

- Dem -



$A\cup B = A\cup(B\cap\bar{A}) \Rightarrow P(A\cup B) = P(A\cup(B\cap\bar{A})) =$

$(A\cap(B\cap\bar{A})) = \emptyset \qquad = P(A) + P(B\cap\bar{A})$

$B = \underbrace{(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)}_{\text{incompatibles}} \Rightarrow P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) \Rightarrow P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

Luego $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ ∎

Sea $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1\cap A_2) - P(A_1\cap A_3) - P(A_2\cap A_3) + P(A_1\cap A_2\cap A_3)}$$

Desigualdad de Boole

$\{A_i\}$ sucesión de eventos de $\mathcal{F}$

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$$ (iguales si son independientes)

Form. Binomio Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ej: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$A \ne \Omega$ es un evento casi cierto si $P(A) = 1$

$B \ne \emptyset$ es un evento casi imposible si $P(B) = 0$

} complementarios

Teorema: Sea B un evento cualquiera

i) Si A es un evento casi imposible $\Rightarrow P(A\cap B) = 0$, $P(A\cup B) = P(B)$

ii) Si C es un evento casi cierto $\Rightarrow P(C\cap B) = P(B)$, $P(C\cup B) = 1$

Elementos de calculo combinatorio

z experimento
- el 1° experimento tiene n_1 resultados
- el 2° " " n_2 "

⋮

Los z experimentos tienen un total de $n_1 \times n_2 \times .. \times n_z$ resultados con distinta secuencia

(Disposizione)
Variaciones sin repetición: n elementos, se llama variación de p elementos, con $p<n$, a cualquier disposición ordenada de p elementos distintos del conjunto

$$\boxed{V_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = (n)_p \quad n,p \in \mathbb{N},\ p \le n}$$

Ej: ¿Cuántas banderas diferentes de tres franjas horizontales de colores distintos pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

$$V_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!}$$

Variaciones con repetición: Igual pero puede haber repeticiones, y puede ocurrir que $p \geq n$

$$\left[VR_n^p = n^p, \quad n,p \in \mathbb{N} \right]$$

Ej: ¿Cuántos N° de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5?

$$VR_5^3 = 5^3$$

Permutaciones sin repetición: Conjunto con n elementos, permutación de n elementos es cualquier disposición ordenada de ellos

$$\left[P_n = n(n-1)\cdots 1 = n! \qquad n \in \mathbb{N} \right]$$

Ej: ¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse con las letras de PENA?

$$P_4 = 4!$$

Permutaciones con repetición: Conjunto con n elementos formado por m grupos distintos de elementos indistinguibles de cardinales $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ / $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = n$. Permutación de los n elementos es cualquier disposición ordenada de ellos.

$$\left[PR_n^{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m, n \in \mathbb{N} \ \ y \ \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n \right]$$

Ej: ¿Cuántos n° de 6 cifras se pueden formar con los dígitos $\{\underbrace{1,1,1}_{\alpha_1=3},\underbrace{2,2}_{\alpha_2=2},\underbrace{3}_{\alpha_3=1}\}$

$n = 6$

$m = 3$

$$PR_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

Combinación sin repetición: Conjunto con n elementos, combinación sin rep. de p elementos, $p < n$, es cualquier subconjunto de p elementos distintos del conjunto

$$\left[C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad n,p \in \mathbb{N}, p \leq n \right]$$

Ej: Reunión con 20 participantes, se intercambian saludos entre todos ¿Nº de saludos?

$n = 20$

$p = 2$

nº combinaciones de 2 personas

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!\,(18!)} = 10 \cdot 19 = 190 \text{ saludos}$$

Combinación con repetición: Igual pero puede haber repeticiones

$$\left[CR_n^p = C_{n+p-1}^{p}, \quad n, p \in \mathbb{N} \right]$$

Ej: En una tienda se venden 5 sabores distintos. Se desea comprar 4, se puede repetir sabor ¿Posibilidades de elegir? ¿Y si se compran 8 refrescos?

$n = 5$, $p = 4$

$$CR_5^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

$n = 5$, $p = 8$

$$CR_5^8 = C_{12}^8 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

¿Influye el orden?

- Sí → ¿Intervienen todos los elementos?
  - Sí → Permutaciones → ¿Se repite algún elemento?
    - Con repetición
    - Sin repetición
  - No → Variaciones → ¿Se pueden repetir los elementos?
    - Con repetición
    - Sin repetición
- No → Combinaciones → ¿Se pueden repetir los elementos?
  - Con repetición
  - Sin repetición

Fórmula:

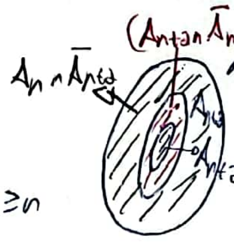
$$(x+y+z)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}}_{\text{coeficiente trinomial}} x^i y^j z^{n-i-j}$$

Lema: $\{A_n\}$ sucesión de eventos, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0 = P(\emptyset) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$

decreciente

-Dem-

Veamos que $A_n = \bigcup_{k\geq n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1}),\ n \geq 1$



$A_n = (A_n \cap \bar{A}_{n+1}) \cup (A_{n+1} \cap \bar{A}_{n+2}) \cup \ldots$

$\subseteq$

Si $w \in A_n$; $\{A_n\}$ es decreciente y converge a $\emptyset$, luego $\exists k \geq n$ tal que $w \in A_k \cap \bar{A}_{k+1} \Rightarrow w \in A_k$

Como $\{A_n\}$ es decreciente luego $A_n \subset \bigcup_{k\geq n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1})$

$(A_i \cap \bar{A}_{i+1}) \cap (A_j \cap \bar{A}_{j+1}) = \emptyset \quad i<j$

$\supseteq$) $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1}) \Rightarrow \exists k \geq n$ tal que $\omega \in A_k \cap \bar{A}_{k+1} \Rightarrow \omega \in A_k$

Como $\{A_n\}$ es decreciente: $\omega \in A_k \Rightarrow \omega \in A_n$ para $k \geq n$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1}) \subset A_n \Rightarrow A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1})$$

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap \bar{A}_{k+1})\right) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \cap \bar{A}_{k+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \cap \bar{A}_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Teorema (Propiedad de continuidad de la probabilidad)

$\{A_n\}$ sucesión de eventos que tiene límite, $\lim_{n\to\infty} A_n = A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$

-Dem: ~~[illegible]~~ Apuntes pág 52

Axiomas de la probabilidad		Axiomas alternativos
1) $P(\Omega) = 1$	$\Leftrightarrow$	1') $P(\Omega) = 1$
2) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$		2') $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ para eventos 2 a 2 incompatibles		3') $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$
		4') $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente, con $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

$\Rightarrow$) Ya hecho

$\Leftarrow$) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\text{incompatibles}}{\cup} \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$ con $A_1, A_2, \dots$ eventos 2 a 2 incompatibles

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y para $n \to \infty$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) + 0$$

B_n es una sucesión decreciente luego $\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i = \emptyset \overset{Ax.4'}{\Rightarrow}$

$A_n \quad \underbrace{A_{n+1} \quad \underbrace{A_{n+2} \quad \underbrace{A_{n+3} \cdots}}_{B_{n+1}}}$ $\quad \Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(\emptyset) = 0$

Formula di Vandermonde

n ~~oggetti~~ objetos de tipo 1 ; Elegimos k de la colección de los $n+m$ objetos
m " " " 2

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

con
$0 \le i \le n$
$0 \le k-i \le m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k-m \le i \le k$

Problema de la concordancia: Una urna con n canicas numeradas de la 1 a la n, extracción sin reinserción. Decimos que hay concordancia en la extracción i-ésima si en esa extracción se saca la canica i-ésima $(i=1,\dots,n)$

C_k = hay en total k concordancias, $k=0,1,\dots,n$

$|\Omega| = n!$ → Permutación sin repetición $P|$

2ª fórmula de Stieffel

$$\left[\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{m} = 0 \text{ con } m>n$$

E_i = hay concordancia en la extracción i-esima $i=1,2,\dots,n$ $\quad E_i \cap E_j \neq 0$ con $i \neq j$

→ Quitando el i que está fijado, todas las formas en las que puede permutar

$$P(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

(De esta forma k "casos" en lo que tiene que ocurrir el resto de extracciones, y k casos en lo que tiene que ocurrir a la extracción i-ésima $\Rightarrow P(E_i) = \frac{\text{1 bola correcta}}{\text{n bolas}}$

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$
$i \neq j$

$\vdots$

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \frac{1}{n!}$$

Formula inclusione-esclusione

$$P(E) = P(\text{almeno una concordanza}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \stackrel{\uparrow}{=} \dots = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

$$P(\bar{E}) = P(\text{no hay concordancia}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bar{E}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = 0{,}367879\dots \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} = e^c\right)$$

Def: Dados n eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ se dice que son independientes si:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \quad \forall k=2,\dots,n, \ \forall\, 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$$

Dados n eventos independientes, todos con la misma probabilidad, $P(A_i) = p \in [0,1]$ $\forall i \in 1,\dots,n$.
Llamamos B_k al evento que tiene lugar cuando ocurren exactamente k de los eventos $A_1,\dots,A_n \Rightarrow P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,\dots,n$

Esquema de extracción de una urna con A + B objetos en n extracciones

canicas azules (A), canicas blancas (B)

B_K = Entre las n canicas extraidas hay K azules, K=0,1,...,n

1) Extracciones con reinserción

Prob de que salga blanca

$$P(B_K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = \binom{n}{K}\left(\frac{A}{A+B}\right)^K \left(\frac{B}{A+B}\right)^{n-K} = \binom{n}{K}\frac{A^K B^{n-K}}{(A+B)^n}, \quad K=0,1,...,n$$

Probabilidad de que salga bola azul

$$\frac{A^K B^{n-K}}{(A+B)^n} \cdot \binom{n}{K} = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

2) Extracciones sin reinserción

Ahora las probabilidades van cambiando, ya que si sacas una bola, la prob. de sacar azul o blanca cambia

$$P(B_K) = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}} = \frac{\binom{A}{K}\binom{B}{n-K}}{\binom{A+B}{n}} = \frac{\frac{(A)_K}{K!}\cdot\frac{(B)_{n-K}}{(n-K)!}}{\frac{(A+B)_n}{n!}} =$$

$$= \frac{n!}{K!(n-K)!}\cdot\frac{(A)_K (B)_{n-K}}{(A+B)_n} = \binom{n}{K}\frac{(A)_K (B)_{n-K}}{(A+B)_n} = \frac{\binom{A}{K}\binom{B}{n-K}}{\binom{A+B}{n}}, \quad K=0,1,...,n$$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-p)!} = (n)_p \qquad \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}}$$

Los eventos $B_0, B_1, ..., B_n$ son complementarios y 2 a 2 incompatibles

1) $\sum_{K=0}^{n} P(B_K) = \sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K} = (p+1-p)^n = 1^n = 1$

2) $\sum_{K=0}^{n} P(B_K) = \sum_{K=0}^{n}\frac{\binom{A}{K}\binom{B}{n-K}}{\binom{A+B}{n}} = \frac{1}{\binom{A+B}{n}}\sum_{K=0}\binom{A}{K}\binom{B}{n-K} = \frac{1}{\binom{A+B}{n}}\binom{A+B}{n} = 1$

Prob 1 azul + Prob 2 azules + ... + Prob n azules

Formula Vandermonde

Coeficiente binomial

Nos dice de cuantas formas podemos elegir K cosas entre un total de n

Definimos $\binom{n}{K} = 0$ si $K > n$, ya que no es posible escoger más elementos del conjunto dado

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

~~Ej: pág 11~~

Lema di Borel-Cantelli: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad, $(A_n)_{n\geq 1}$ successione di eventi

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ e $A_1, A_2, ...$ indipendenti $\Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

Corolario: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(A_n)_{n\geq 1}$ sucesión de eventos independientes. Entonces $P(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$ ó $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

Ej: $\Omega = [0,1]$ $\quad A_n = [0, \frac{1}{n}]$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

↳ Eventos independientes

$P([a,b]) = b - a$ $\qquad P(\limsup A_n) = 0$ y $\sum P(A_n) = +\infty$

subconjunto de $[0,1]$

Luego en general:

Si $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$

Ley 0-1 de Kolmogorov

$\{A_n, n\ge 1\}$ sucesión de eventos

$\mathcal{A}_n = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_n)$ $\forall n \ge 1$; $\quad \mathcal{A}'_n = \sigma(A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)$ $\forall n \ge 0$

σ-algebra generada por

Definimos la siguiente σ-algebra $\Rightarrow \mathcal{T} = \bigcap_{n\ge 0}^{+\infty} \mathcal{A}'_n$

$\Rightarrow$ Si $\{A_n : n\ge 1\}$ es una sucesión de eventos independientes, para todo $A \in \mathcal{T}$, tenemos que $P(A)=0$ o $P(A)=1$

Ley de la Probabilidad Compuesta

$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$, $\quad P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A\cap B) = P(A/B)P(B)$

Se puede extender a un numero arbitrario

n=3 | $P(A\cap B\cap C) = P(A\cap(B\cap C)) = P(A/B\cap C)P(B\cap C) = P(A/B\cap C)P(B/C)P(C)$

Per n eventi (induzione):

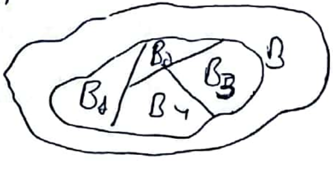
$P(A_1\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$

Legge delle alternative

Def: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad y sea $B \in \mathcal{F}$. Consideramos una familia de eventos de $\mathcal{F}$ $\{B_1, \dots, B_n\}$. Esta familia constituye un conjunto de alternativas para B si:

i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\quad i,j = 1,\dots,n$, $i \neq j$ (los eventos son incompatibles)

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$ (los eventos son complementarios para B)

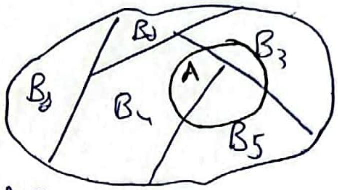


iii) $P(B_i) > 0$ $\quad \forall i = 1, \dots, n$

En particular, si $B = \Omega$, el conjunto de alternativas se dice completo

Teorema (Ley de las alternativas): Sea $\{B_n, n=1,\dots,k\}$ un conjunto completo de alternativas y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{k} P(A|B_n)P(B_n)$$



Dem ⇒ pág 15

Ej: Urna con 9 canicas numeradas del 1 al 9. Extraemos 2 sin reinserción. ¿Prob. de que la 2ª extraída tenga un número par?

Teorema (Ley de las alternativas condicionadas)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad

$B \in \mathcal{F}$ $\{B_n, n=1,\dots,k\}$ conjunto de alternativas para B

↓ subconjunto propio de Ω

$$A \in \mathcal{F}, \quad P(A/B) = \sum_{n=1}^{k} P(A/B_n)P(B_n/B)$$

Teorema de Bayes: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad. $\{B_n, n=1,\dots,k\}$ conjunto de eventos incompatibles de $\mathcal{F}$ y tales que $P(B_n)>0$ $\forall n=1,\dots,k$; $A \in \mathcal{F}$, $P(A)>0$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{k} B_n$

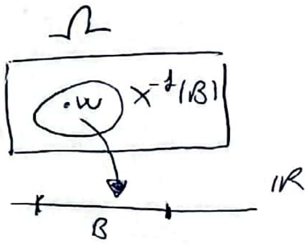
$$P(B_n/A) = \frac{P(A/B_n)P(B_n)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i)}_{=P(A)}}, \quad n=1,\dots,k$$

VARIABLES ALEATORIAS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad

Se dice variable aleatoria a un cualquier función $X: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene $\{w \in \Omega : X(w) \in B\} \equiv X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

La σ-álgebra Borel



Proposición: Una función $X: \Omega \to \mathbb{R}$ se dice variable aleatoria si para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$

Distribución de Probabilidad

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ variable aleatoria

$(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), P_X)$ es un espacio de probabilidad, con P_X distribución di X y definida así:

$P_X: \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ con $P_X(B) \overset{def}{=} P(X^{-1}(B)) \; \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

Demostramos que P_X es una Probabilidad

1) $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$

2) $\forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$: $P_X(B) = P(\underbrace{X^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}}) \geq 0$

3) Sea $B_1, B_2, \ldots \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ disjuntos dos a dos, $P_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{n} P_X(B_i)$$

Función de Distribución

Dada una v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, la función de distribución de X es la función $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) \; \forall x \in X$$

Teorema: Si $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ es una función de distribución de una v.a. X entonces:

1) F_X es monótona no decreciente: si $x < y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

2) F_X es continua a la derecha: si $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ Dem $\Rightarrow$ 134

Teorema: Sea $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la 1), 2) y 3). Entonces existe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad y existe $X: \Omega \to \mathbb{R}$ variable aleatoria t.q. $F_X(x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Teorema: Sea X una variable aleatoria y sea $F_X(x)$ su función de distribución. Sea $F_X(x^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} F_X(x+\varepsilon)$. Entonces:

Fijamos x_1 y x_2 reales tales que $x_1 < x_2$ y

i) $P(X < x_1) = F_X(x_1^-)$

ii) $P(X = x_1) = F_X(x) - F_X(x_1^-)$

iii) $P(X > x_1) = 1 - F_X(x_1)$

iv) $P(X \geq x_1) = 1 - F_X(x_1^-)$

v) $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

vi) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$

vii) $P(x < X < y) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1)$

viii) $P(x \leq X < y) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1^-)$

Observación: Si $F(x)$ no es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ (en particular la continuidad a la derecha)

$\Rightarrow P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-) > 0$ (Si fuese continua $P(X = \cancel{x}) = 0$)

Clasificación de las variables aleatorias unidimensionales

Def: Una v.a X se dice discreta si $\exists$ un conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ a lo sumo numerable tal que $P(X \in S) = 1$ ($x_1, x_2, \dots$ son reales distintos).

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\} = \bigcup_{n : x_n \in S} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}) = 1 = P\Big(\bigcup_{n : x_n \in S} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}\Big) = \sum_{n : x_n \in S} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\}) =$$

$$= \sum_{n : x_n \in S} P(X = x_n)$$

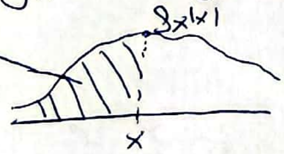
A una v.a. X discreta podemos asociarle una función de probabilidad (o distribución)

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x_n) & \text{si } x = x_n,\ n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Def: Una v.a. X se dice absolutamente continua si $\exists$ una función no negativa $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ t.q la f. de distribución de X se puede expresar como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

f_X es la función de densidad de probabilidad de X



$F_X(x)$ el área de lo rayado

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \end{cases}$ (Propiedades que tiene que cumplir la densidad de probabilidad)

$$F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \int_a^b f_X(z)\,dz$$

$B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow P(X \in B) = \int_B f(z)\,dz$ (caso abs cont) / $P(X \in B) = \sum_{x_k \in B} p(x_k)$ (caso discreto)

Si X es abs. continua, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} P(a<X\leq b) = F(b)-F(a) \\ P(a<X<b) = F(b^-)-F(a) \\ P(a\leq X<b) = F(b^-)-F(a^-) \\ P(a\leq X\leq b) = F(b)-F(a^-) \end{array}\right\} = \int_a^b f_X(z)\,dz$$

$\Rightarrow$ Si $x\in\mathbb{R}$ y F_X es derivable en $x \Rightarrow \left[f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \right]$

Ej: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \sqrt{x} & 0\leq x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$ X v.a. abso. continua

No puede valer 0

$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x\leq 1 \\ 0 & x\geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Se puede poner en cualquiera de los dos

$\Rightarrow$ Los valores de los extremos, en este caso $f_X(0)$ y $f_X(1)$ se asignan para que sea continua $\Rightarrow f_X(0)=0$ y $f_X(1)=1$

Def: Una función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice abs. continua $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 /$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y para cada familia de subintervalos abiertos y disjuntos $(a_1,b_1)\dots(a_n,b_n)$ de $\mathbb{R}$ de longitud: $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\delta$ se tiene $\sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))\leq\varepsilon$

Def: Una v.a. X se dice singular si su función de distribución es continua con derivada casi en todas partes nula. En este caso X tiene función de distribución continua pero no abs. continua.

Def: Dos var. aleatorias X e Y se dicen idénticamente distribuidas si $F_X(z)=F_Y(z)$ $\forall z\in\mathbb{R}$ $\to (*)$

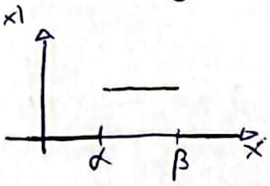
Def: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad

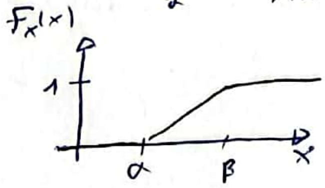
$\underline{X}$ vector aleatorio n-dimensional es una función $\underline{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ tal que $\forall B\in\mathcal{B}$ se tenga $\{\omega\in\Omega: \underline{X}(\omega)\in B\}\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\{\omega\in\Omega: X_1(\omega)\leq x_1,\dots,X_n(\omega)\leq x_n\}\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega: X_i(\omega)\leq x_i\}\in\mathcal{F}$

(*)

→ V.A X, se dice que tiene dist. uniforme en (α,β), $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ si

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \text{para } x\in(\alpha,\beta)\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \quad ; \quad F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<\alpha\\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha\leq x<\beta\\ 1 & x\geq\beta\end{cases}$$





Ej: Dadas n f. di dist. $F_1(x),\dots,F_n(x)$ y n reales $a_1,\dots,a_n$, con $a_i\geq 0$ $\forall i$ $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$. Entonces $\left[F(x)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)\right.$ es una f. de dist.$\left.\right]$

Def: Una v.a. discreta X se dice degenerada si su soporte S (conj de puntos donde la función no se anula) contiene un solo valor: $S=\{x_0\}$: $P(X\in S)=1 \Rightarrow P(X=x_0)=1$

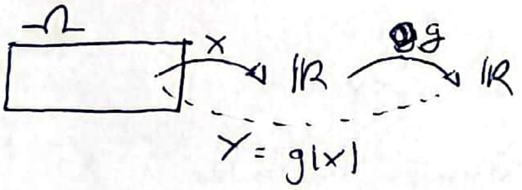
$$p_X(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=x_0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \quad ; \quad F_X(x)=\sum_{x_k\in S} p_X(x_k)=\begin{cases}0 & x<x_0\\ 1 & x\geq x_0\end{cases}$$

—

X v.a., $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Borel-medible

$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$: $g^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ donde $g^{-1}(B):=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\in B\}$

entonces $\underline{Y=g(X)}$ es una variable aleatoria



$\underbrace{X^{-1}(g^{-1}(B))}_{Y^{-1}(B)}\in\mathcal{F} \Rightarrow Y=g(X)$ es una v.a.

—

Dada la transformación $\underline{Y=g(X)}$, X v.a; g B-medible

$\left[P(Y\in B)=P(g(X)\in B)=P(X\in g^{-1}(B)) \quad \text{con } B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\right]$

— <u>Transformaciones de v.a discretas</u>

X v.a. discreta, $Y=g(X)$ g no monótona

$|S_X|\geq|S_Y|$ $\left[\begin{array}{l} p_Y(y)=P(Y=y)=P(g(x)=y)=P[X\in g^{-1}(\{y\})]= \\ y\in S_Y \end{array}\right.$

$$\left.=\sum_{\substack{x\in S_X\\ x\in g^{-1}(\{y\})}} p_X(x)\right]$$

Algunos MODELOS DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Una dist. de prob. está caracterizada por una o más cantidades que reciben el nombre de parámetros de dist. Un par. puede tomar cualquier valor de un conj. dado y se define una familia de dists. de prob. que tendrán la misma función genérica de prob o f. de densidad

Distribución degenerada: Exp. aleatorio que siempre da el mismo resultado.
$Var(X)=0$

- Función masa de prob.
$$P(X=x)=\begin{cases}1 & x=c\\ 0 & x\neq c\end{cases}$$
- Función dist.
$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & x<c\\ 1 & c\leq x\end{cases}$$
- F. generatriz de momentos
$$M(t)=E(e^{tX})=e^{tc}\quad \forall t\in\mathbb{R}$$
- Momentos no centrados
$$M_k=E(X^k)=c^kP(X=c)=c^k\quad k\in\mathbb{N}\quad (\text{Media es } E(X)=c)$$
- Momentos centrados
$$M_k=E((X-c)^k)=0\quad k\in\mathbb{N}\quad (Var(X)=0)$$

Dist. Uniforme: X v.a. toma un nº finito de valores equiprobables. X se distribuye uniformemente sobre $x_1,\dots,x_n \Rightarrow X\sim U(x_1,\dots,x_n)$

- F.m.p
$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & i=1,\dots,n\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$
- F. dist.
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ \frac{1}{n} & x_1\leq x<x_2\\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & x_{n-1}\leq x<x_n\\ \vdots & \\ 1 & x_n\leq x\end{cases}=\frac{1}{n}\,n^{\circ}\text{ valores } x_i\leq x$$
- F.g. de momentos
$$M(t)=E(e^{tX})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{tx_i},\ \forall t\in\mathbb{R}$$
- Momentos no centrados
$$M_k=E(X^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,\ k\in\mathbb{N}$$
$$(\text{Media}\Rightarrow E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x})$$
- Momentos centrados
$$M_k=E((X-c)^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k\quad k\in\mathbb{N}$$
$$(Var(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

Dist. Bernoulli: Da lugar a dos posibles resultados mutuamente excluyentes, éxito (E) y fracaso (F). $\Omega=\{E,F\}$. $X\sim B(1,p)$
$$X=\begin{cases}1 & \text{si ocurre } E\\ 0 & \text{si ocurre } F\ (\text{no ocurre } E)\end{cases}$$
p = prob. de suce E, • f.m.p $=\begin{cases}P(X=1)=p\\ P(X=0)=p-1\end{cases}$

$E(X)=p$, $E(X^2)=p$, $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=p-p^2=p(1-p)$

$M_X(t)=E(e^{tX})=(1-p)+pe^t$, $t\in\mathbb{R}$

Distribución Binomial: X v.a. sigue dist. bin. de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in]0,1[$ si modela el nº de éxitos en n repeticiones de un ensayo de Bernoulli con prob. p de éxito en las n repet. del exp. $X \sim B(n,p)$

• F.m.p

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x \in \{0,1,\dots,n\}$ • $M_X(t) = E(e^{tX}) = (pe^t + (1-p))^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$

• $E(X) = np$

• $Var(X) = np(1-p) < E(X)$

• Propiedad de simetría: Si $X \sim B(n,p)$, la variable que contabilizará el nº de fracasos es $Y = n - X \sim B(n, 1-p)$, verificándose $P(X=x) = P(Y=n-x)$ y $M_Y(t) = e^{nt} \cdot M_X(-t)$

Disp. Bin. Negativa: Exp. aleatorio consistente en repeticiones independientes de ensayos de Bernoulli con prob. de éxito cte, hasta que aparezca el éxito r-ésimo. Definimos la v.a. X con dist. bin neg. como aquella que modela el nº de fracasos hasta que aparezca el éxito r-ésimo. $X \sim BN(r,p)$.

• X; $x = 0, 1, \dots$ y $r = 1, 2, \dots$

• $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ • $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

• F.M.P

$P(X=x) = \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x p^r$ $\quad x = 0,1,2\dots$ $\quad r = 1,2\dots$ $\quad 0 < p < 1$

(Binomial con $n = x+r-1$)

Disp. de Pascal: Y = nº pruebas hasta el r-ésimo éxito. Si $X \sim BN(r,p) \Rightarrow$ $\Rightarrow Y = r + X$; $Y \sim Pascal(r,p)$

$E(Y) = r + E(X)$; • $Var(Y) = Var(X)$

• F.m.p

$P(Y = y_i) = P(X = x_i + r)$

Disp. Hipergeométrica: Población de N individuos divididos en dos categorías N_1 y $N_2 = N - N_1$. Se elige una muestra de n individuos de la población (sin reemplazamiento). La v.a. X que contabiliza el nº de individuos de la primera categoría en la muestra se dice que tiene dist. hipergeométrica de parámetros N, N_1 y n. $X \sim H(N, N_1, n)$ $\quad n, N_1, N \in \mathbb{N}$, $n, N_1 \leq N$

• $E(X) = np$; • $Var(X) = \frac{n(N-n)N_1(N-N_1)}{N^2(N-1)}$

• F.m.p

$P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$\max(0, n-(N-N_1)) \leq x \leq \min(n, N_1)$

Disp. de Poisson: Representa el nº de ocurrencias de un determinado suceso durante un periodo de tiempo fijo o en una región fija del espacio, cuando dicho nº sigue unas pautas:

→ El nº de ocurrencias en un int./región es independiente del nº de ocurr. en otro int./región

→ Si se considera un int./región muy pequeño, la prob. de ocurrencia es proporcional a la longitud del intervalo (volumen de la región) y a la prob. de dos o más ocurrencias es práct. nula (despreciable)

- X_t nº de ocurrencias de un suceso en un int. de $l = t$:

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \quad \lambda > 0$$

- La colección de v.a. $\{X_t : t \geq 0\}$ configuran un proceso de Poisson y cada v.a. X_t tiene una disp. de Poisson de parámetro λ. $X \sim P(\lambda)$

- F.m.p

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots \quad \lambda > 0$$

- $E(X) = \lambda$; • $Var(X) = \lambda$

Distribución Geométrica: Nº de veces que hay que realizar un experimento hasta que se da el suceso A con prob. p. $X \sim G(p)$

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} p \quad n \in \mathbb{N}$$

- $E(X) = \frac{1}{p}$; • $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

- F.g.m

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \quad t < -\ln(1-p)$$

- Pérdida de memoria: $\forall m, n \geq 0$

$$P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)$$

El hecho de haber fallado anteriormente no influye en acertar en la siguiente vez (Ej: Lanzamiento dado)

Dist. Exponencial: Cantidad de tiempo hasta que se produce algún evento específico. Tiene también la propiedad de la pérdida de memoria. $X \sim Exp(\lambda)$
$\lambda > 0$

- Función densidad

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- F. distribución

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \quad (0 \text{ si } x < 0)$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; • $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ • $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

Dist. Multinomial: Generalización de la binomial, nos interesa estudiar la ocurrencia de varios sucesos (> 3). $X \sim M(n, p_1, \ldots, p_n)$

F. probabilidad

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_n!} p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}$$

Transformaciones de v.a. abs. continuas

X es v.a. abs. cont. , $Y = g(X)$, g Borel-medible y estric monótona ~~creciente~~

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) =$

$\to P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X[g^{-1}(y)]$ si g estric creciente

$\to P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) =$

$= 1 - F_X(g^{-1}(y)^-) =$

$= 1 - F_X(g^{-1}(y))$ si g estric. decreciente

$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) =$

$\to \frac{\partial}{\partial y} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)}_{>0}$ si g estric creciente

$\to \frac{\partial}{\partial y} [1 - F_X(g^{-1}(y))] = -f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)}_{<0}$ si g estric decreciente

Ejemplo: $Y = |X|$ X v.a. abs. cont.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) =$

$\to (y < 0) = 0$

$\to (y \geq 0) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y^-) =$

$= F_X(y) - F_X(-y)$

Continuación después de (*)

Def: $\underline{X} = (X_1,\dots,X_n)$ vector aleatorio

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n) = P(\{w\in\Omega : X_1(w)\le x_1,\dots,X_n(w)\le x_n\})$$

$\hookrightarrow$ Función de dist. de $\underline{X}$ o función de dist. conjunta de las variables $X_1,\dots,X_n$

Propiedades:

1) $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ es no decreciente

2) Es continua a la derecha respecto a cada argumento

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k+\varepsilon,\dots,x_n) = F_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)$$

3) $\displaystyle\lim_{x_k\to-\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) = 0 \quad \forall k$

4) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \vdots \\ x_n\to+\infty}} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = 1$

Proposición: $X=(X_1,\dots,X_n)$, $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$

Si $m<n$ sea $\tilde{X} = (X_1,\dots,X_m) \Rightarrow F_{X_1,\dots,X_m}(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\lim_{\substack{x_{m+1}\to+\infty\\ \vdots \\ x_n\to+\infty}} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{m+1},\dots,x_n)$

Def: (X,Y) se dice discreto si $\exists S = S_1\times S_2$ como mucho numerable de parejas distintas de $\mathbb{R}^2$ con $P((X,Y)\in S)=1$

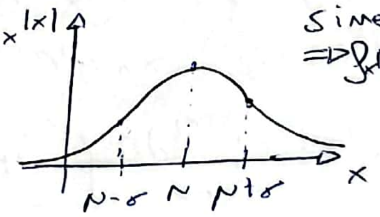
$S_1=\{x_1,\dots\}$ y $S_2=\{y_1,\dots\}$ tales que

$$\{w\in\Omega : (X(w),Y(w))\in S\} = \bigcup_{i/x_i\in S_1}\ \bigcup_{j/y_j\in S_2} \{w\in\Omega : X(w)=x_i,\ Y(w)=y_j\}$$

Distribución normal $\quad X\sim N(\mu,\sigma^2)$ con $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$

X es una v.a. abs. continua valores en $\mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R}$$

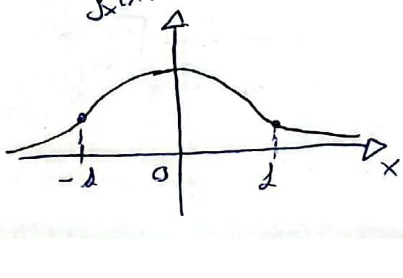


simetría $\Rightarrow f_X(\mu-x)=f_X(\mu+x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Distribución Normal standard

En el caso que $\mu=0$, $\sigma^2=1$. $\quad X\sim N(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in\mathbb{R}$$



Ejemplo: $X \sim Exp(\lambda)$, $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

$Y = g(x) = \lceil x \rceil$ (parte entera superior de x) $x \in (0, +\infty)$, $y \in \mathbb{N}$, Y discreta

$P_Y(y) = P(Y=y) = P(\lceil x \rceil = y) = P(y-1 < x \leq y) = F_X(y) - F_X(y-1) =$

$= 1 - e^{-\lambda y} - (1 - e^{-\lambda(y-1)}) = e^{-\lambda(y-1)} - e^{-\lambda y} = e^{-\lambda(y-1)}[1 - e^{-\lambda}] =$

$= p^{y-1}(1-p)$ con $y \in \mathbb{N}, \lambda > 0 \Rightarrow 0 < p < 1$

$e^{-\lambda} = p$ $\quad Y \sim Geom(p)$

Vectores aleatorios ~~absolutamente~~ discreto: Una v.a. (X, Y) se dice vector aleatorio discreto si $\exists S = S_X \times S_Y$ con $S_X = \{x_1, x_2, ...\}$ reales distintos, $S_Y = \{y_1, y_2, ...\}$ reales distintos $/ P((X,Y) \in S) = 1$

$$P((X,Y) \in B) = \sum_{\substack{i \\ (x_i, y_j) \in B \cap S}} \sum_{j} p(x_i, y_j) \quad \text{donde } p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{i \\ x_i \leq x}} \sum_{\substack{j \\ y_j \leq y}} p(x_i, y_j) \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ con } \begin{cases} p(x_i, y_j) \geq 0 \ \forall (x_i, y_j) \in S \\ \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1 \end{cases}$$

Prob. marginal

- $p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p(x_i, y_j) \quad \forall x_i \in S_X$
- Igual para $p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j) \quad \forall y_j \in S_Y$

Vectores aleatorios abs. continuos: $X = (X_1, ..., X_n)$ v.ale., se dice abs. cont. si existe una función $f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, conocida como densidad de proba. conjunta, t.q. $\forall \underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\underline{X}}(t_1, ..., t_n) dt_n$$

Si $F_{\underline{X}}$ tiene derivada en $\underline{X}$:

$$\Rightarrow f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_{\underline{X}}(\underline{x})$$

La densidad tiene la propiedad $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cdot\ f_{\underline{X}}(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \cdot\ \int_{\mathbb{R}^n} f_{\underline{X}}(\underline{x}) dx_1 \cdots dx_n = 1 \end{cases}$$

Densidad marginal

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, dx_2 \dots dx_n, \dots, f_{X_n}(x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}$$

Análogamente $\Rightarrow f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_{\underline{X}}(\underline{x})\, dx_3 \dots dx_n, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
(Vale cualquier comb.)

Ejemplo: (X,Y) v.a. bidimensional abs. continua uniformemente distribuida en $B \subseteq \mathbb{R}^2$. $f_{XY}(x,y)$ tiene que ser constante en B

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{para cada } (x,y) \in B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_B c\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{\int_B dx\,dy} =$

$= (\text{Area}(B))^{-1}$ con $\text{Area}(B) = \int_B dx\,dy$ finita en normal.

Def: Un vect. alea. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ se dice singular si tiene función de distribución continua con derivada $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{\underline{X}}(\underline{x})$ nula en casi todas partes

Independencia de variables aleatorias: Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad, con valores en $\mathbb{R}$. Se dicen independientes $\Leftrightarrow \forall B_1, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$P[\underbrace{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots}, X_n \in B_n] = P[X_1 \in B_1] \cdot \dots \cdot P[X_n \in B_n]$$

La coma tiene significado de intersección

Para $B_i = (-\infty, x_i]$ $\quad i = 1, \dots, n$

$X_1, \dots, X_n$ son independientes $\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Proposición: Si $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio abs. cont. la condición de independencia de $X_1, \dots, X_n$ equivale a que los son $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Proposición: $X_1, \dots, X_n$ v.a. discreta en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y valores en $\mathbb{R}$

$p_{X_1}(x_1)$ función de probabilidad de X_1

$\vdots$

$p_{X_n}(x_n)$ " " " " X_n

$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ f. prob. conjunta

Son ind $\Leftrightarrow$ $p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n)$

Teorema: Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias conjuntamente distribuidas y $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ Borel-medible. Ponemos $Y_i = g_i(X_i)$. Entonces:

$X_1, \dots, X_n$ independientes $\Rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ independientes

Usando F. Vandermonde

$\Rightarrow$ Ej: $Z = X + Y \Rightarrow p_Z(k) = P(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j, Y = k - j) \underset{X, Y \text{ ind.}}{=} \sum_{j=0}^{k} P(X = j) \cdot P(Y = k - j) = \dots =$, $k = 0, \dots, n + m$

$Z \sim Bin(n + m, p)$

$\Rightarrow X_i \sim Binomial(n_i, p)$ $i = 1, \dots, k$ $\quad$ X_i independientes $\Rightarrow X_1 + \dots + X_k \sim Binomial(n_1 + \dots + n_k, p)$

$\Rightarrow X \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$, $\quad p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k = 0, 1, \dots$

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{e^{\lambda}}_{} = 1 \right]$$

$$\left[\frac{P(X = k)}{P(X = k - 1)} = \frac{\lambda}{k} \right]$$

$\Big[$ $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, $Z = X + Y \Rightarrow$

$p_Z(k) = \sum_{j=0}^{k} p_X(j) p_Y(k - j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{k-j}}{(k-j)!}$, $k \in \mathbb{N}_0$

$\underset{\times 1/k!}{=} \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda + \mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$

$Z \sim Poiss(\lambda + \mu)$

Teorema: $X_1, \dots$ sucesión de variables aleatorias

$X_n \sim B(n, p_n)$, $n \to +\infty$, $p_n \to 0$ para $n \to \infty$, $n p_n \to \lambda$, $\lambda > 0$

$\Rightarrow \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p_n \to 0 \\ n p_n \to \lambda}} p_{X_n}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$ $\qquad$ $\lim_n p_{X_n}(k) = p_X(k)$ $\quad X \sim Poiss(\lambda)$

Valor medio

n numeros, $x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ Media aritmética: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\Rightarrow$ Media geométrica: $\bar{x} = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$

X v.a. discreta, $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\quad p_i = P(X = x_i)$

$\bar{X}$ = media aritmética de x_i ponderada: $E(X) = \sum_i x_i p_i$

Def: Sea X v.a. discreta, no negativa ($P(X \geq 0) = 1$) o no positiva ($P(X \leq 0) = 1$).

El valor esperado (o valor medio) de X es:

$$E(X) = \sum_{i, x_i \in S_X} x_i \cdot p_X(x_i) \begin{cases} \to E(X) \geq 0 & \text{si es no negativa puede ser } E(X) = +\infty \\ \to E(X) \leq 0 & \text{" " " positiva " " " } = -\infty \end{cases}$$

→ Si X es degenerada, $P(X = c) = 1 \Rightarrow E(X) = c$

→ Si X es una constante, $E(c) = c$

Def

Si X es v.a. abs. continua, no negativa $\Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \geq 0$ y puede ser también $E(X) = +\infty$. Si X es v.a. abs. continua, no pos. $\Rightarrow$

$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx \leq 0$ y puede ser también $E(X) = -\infty$

Parte neg de $X \Rightarrow X^-(\omega) = \max\{0, -X(\omega)\}$

Def: Si X es una v.a. cualquiera $\Rightarrow E(X) = E(X^+) - E(X^-)$

Parte pos de $X \Rightarrow \max\{0, X(\omega)\} = X^+(\omega)$

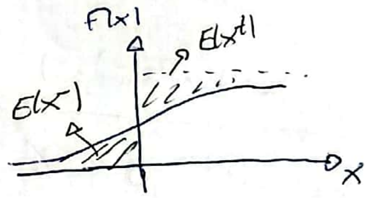
~~Alternativamente~~ Si ~~ninguna~~ ni $E(X^+)$ ni $E(X^-)$ es finito decimos que $E(X)$ no existe

→ $E(X)$ es finito $\Leftrightarrow E(|X|)$ es finito

Def: Valor esperado de X cualquiera con f. de distribución $F(x)$

$$\left[E(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\,dx}_{E(X^+)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx}_{E(X^-)} \right]$$

(las dos integrales tienen que ser finitas)



En el caso abs. continuo:

$$\int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\,dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx}_{E(X^+)} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} (-x) f(x)\,dx}_{E(X^-)}$$

Def: $\left[X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow X \text{ e } Y \text{ son idénticamente distribuidas, es decir, } F_X(t) = F_Y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\right]$

Si $X \overset{d}{=} -X \Leftrightarrow F_X(t) = F_{-X}(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F_X(-t) = P(X \leq -t) \underset{X \overset{d}{=} -X}{=} P(-X \leq -t) = P(X \geq t) = 1 - P(X < t) =$$

$1 - F_X(t^-)\ \forall t \in \mathbb{R}$

Si X abs continuo $\Rightarrow F_X(-t) = 1 - F_X(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

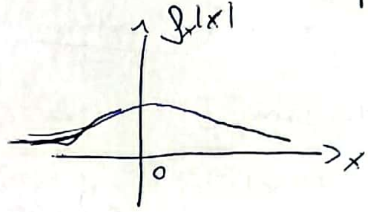
Derivando respecto a $t \Rightarrow -f_X(-t) = -f_X(t)$, es decir, $f_X(t) = f_X(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$,

es decir, f_X es una función par

En este caso, $E(X^+) = E(X^-) \Rightarrow E(X) = E(X^+) - E(X^-) = \begin{cases} 0 & \text{si } E(X^+) \equiv E(X^-) \text{ finito} \\ \text{no existe} & \text{si } E(X^+) \equiv E(X^-) = +\infty \end{cases}$

Ejemplo $\Rightarrow X$ v.a con dist. de Cauchy si $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$ ($f_X(x)$ es una f. par)

$$E(X^+) = E(X^-) = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} =$$



$= \dfrac{1}{2\pi}(\infty - 0) = \infty \Rightarrow E(X)$ no existe

---

X v.a., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible, $Y = g(X)$ v.a.

Caso discreto $\Rightarrow E(g(X)) = \sum_{k: x_k \in S_X} g(x_k) p_X(x_k)$ ($S_X = \{x_k\}$ y $p_X(x_k) = P(X = x_k)$)

Caso abs. continuo $\Rightarrow E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx = \overbrace{\int_{D^+} g(x) f_X(x) dx}^{\geq 0} +$

$+ \overbrace{\int_{D^-} g(x) f_X(x) dx}^{\leq 0}$ (f_X dens. de prob de X, $D^+ = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}$, $D^- = \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\}$)

Propiedad de linealidad $E(aX+b) = aE(X) + b$

Si X tiene $E(X)$, $\Rightarrow Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow Y$ tiene valor medio y $E(Y) = aE(X) + b$

$F_Y(y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

- Dem -

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} [1 - F_Y(y)] dy - \int_{-\infty}^0 F_Y(y) dy \overset{\uparrow}{=} \int_0^{+\infty} 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) dy - \int_{-\infty}^0 F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) dy =$$

$\frac{y-b}{a} = x$

$dy = a\,dx$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} (1 - F_X(x))\, a\, dx - \int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} F_X(x)\, a\, dx =$$

$\downarrow$

$\frac{0-b}{a} = -\frac{b}{a} = x$

$$= a\left\{ \int_{-\frac{b}{a}}^{0} [1 - \cancel{F_X(x)}]\, dx + \underbrace{\int_0^{+\infty} [1-F_X(x)]\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\, dx}_{E(X)} + \int_{-\frac{b}{a}}^{0} \cancel{F_X(x)}\, dx \right\} =$$

$$a\left\{ \int_{-\frac{b}{a}}^{0} dx + E(X) \right\} = a\left(\frac{b}{a} + E(X) \right) = a\,E(X) + b \,]$$

Momento n-esimo

Dada una v.a. X se dice momento n-esimo de X a la cantidad:

$$\left[\mu_n = E(X^n), \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \right] \qquad (\mu_0 = E(X^0) = E(1) = 1)$$

En general $E(c) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$\mu_1 = E(X) = \mu$

$\mu_2 = E(X^2)$

$\vdots$

Una v.a. se dice centrada si su valor medio es igual a 0. Si X tiene valor medio finito μ, entonces $X - \mu$ es una v.a centrada $(E(X-\mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0)$

Momento central n-esimo

Si X tiene $\mu = E(X)$ finito

$$\left[\bar{\mu}_n = E[(X-\mu)^n], \quad n \in \mathbb{N}_0 \right]$$

$\bar{\mu}_0 = 1$

$\bar{\mu}_1 = 0$

$\bar{\mu}_2 = E[(X-\mu)^2] \geq 0 \;\; = \mu_2 - \mu^2$

$\bar{\mu}_2 = Var(X)$

Observación: $E[(aX+b)^n] \underset{\text{B.Newton}}{=} E\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k X^k b^{n-k}\right] \overset{\text{Linealidad}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \underbrace{E(X^k)}_{\mu_k} b^{n-k}$

$$\bar{\mu}_n = E[(X-\mu)^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (-\mu)^{n-k} \;//$$

En particular $\left[Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \right]$

→ $Var(X)$ grande $\Leftrightarrow$ gran dispersión de la masa de prob.

→ $Var(X)$ pequeña $\Leftrightarrow$ pequeña " " " " "

$$\left[Var(aX+b) = E[(aX+b - E(aX+b))^2] = E[(aX - aE(X))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 Var(X) \right]$$

Coefficiente di Correlación de X: $E(X)$ finito y no nulo

$$\left[C_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} \text{ es adimensional} \right] \qquad C_X > C_Y \iff X \text{ presenta mayor variabilidad que } Y$$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ es la desviación estándar de X

$X, \sigma_X, E(X)$ tienen la unidad de medida de X

$Var(X)$ tiene la unidad de medida de X^2

$$C_{aX+b} = \frac{\sqrt{Var(aX+b)}}{E[aX+b]} = \frac{|a|\sigma(X)}{aE(X)+b}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt =$$

$$\underset{z=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{densidad de } N(0,1)}\,dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$z = \frac{t-\mu}{\sigma}$

$dz = \frac{1}{\sigma}\,dt$

Si $Z \sim N(0,1)$, su f. de distribución no se puede definir de forma cerrada.

Definimos $\Phi(x) := P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R})$

Esempio $X \sim N(1, 4)$ $\quad \mu = 1,\ \sigma^2 = 4,\ \sigma = 2$ $\quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$P(-1 < X < 5) = P\left(\frac{-1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{5-1}{2}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = \phi(2) - \phi(-1) =$$

$$= \phi(2) - [1 - \phi(1)] = \phi(2) + \phi(1) - 1 = 0{,}9772 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}8385$$

Tabla dist. Normal

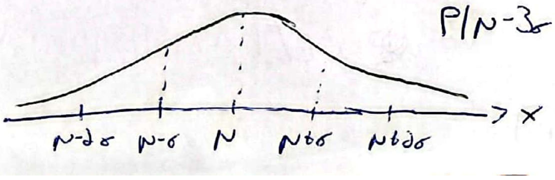
Ley del 3σ para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $k > 0$

$$P[|X-\mu| \le k\sigma] = P(-k\sigma \le X-\mu \le k\sigma) = P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) =$$

$$\Phi\left(\frac{\mu+k\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-k\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1 = \begin{cases} 0{,}6826 & k=1 \\ 0{,}9544 & k=2 \\ 0{,}9974 & k=3 \end{cases}$$

Mirar tabla

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9974$



$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ $\quad \underline{x} = x_1, \dots, x_n$ $\quad g(X) = Y$ $\quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible

$g(\underline{X}) = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\underline{x}} g(x_1, \dots, x_n) p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, x_n \end{cases} = E[g(x)^+] - E[g(x)^-]$$

$\Rightarrow E[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$ (prop. linealidad)

<u>Teorema</u>: Se $X_1, \dots, X_n$ v.a. independient. entonces $E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

<u>Corollario</u> (caso bidimensional)

Si X e Y independientes $\Rightarrow E[h(X) g(Y)] = E[h(X)] E[g(Y)]$

$\Rightarrow$ Vector aleatorio bidimensional

<u>Momento mixto de orden (i,j), $i,j \in \mathbb{N}_0$ de (X,Y)</u>: $\mu_{ij} = E[X^i Y^j]$

<u>" " central " " " "</u> $: \bar{\mu}_{ij} = E[(X - \underset{E(X)}{\mu_X})^i \cdot (Y - \underset{E(Y)}{\mu_Y})^j]$

$\mu_{0,j} = E(Y^j)$; $\mu_{i,0} = E(X^i)$

$\bar{\mu}_{0j} = E[(Y - \mu_Y)^j]$; $\bar{\mu}_{i,0} = E[(X - \mu_X)^i]$

<u>Si X e Y son ind, entonces</u>:
- $\mu_{ij} = E(X^i) \cdot E(Y^j) \quad \forall i,j \in \mathbb{N}_0$
- $\bar{\mu}_{ij} = E[(X - \mu_X)^i] \cdot E[(Y - \mu_Y)^j] \quad \forall i,j \in \mathbb{N}_0$

<u>Covarianza de un vector aleatorio (X,Y)</u>:

$\left[\mathrm{Cov}(X,Y) = \bar{\mu}_{1,1} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \right]$

Tienen que existir

$\hookrightarrow$ Sirve para estudiar la dependencia entre X e Y
- $\mathrm{cov} > 0 \Rightarrow X$ e Y directamente proporcionales
- $\mathrm{cov} < 0 \Rightarrow X$ e Y inv. proporcionales

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \begin{cases} > 0 & X \text{ e } Y \text{ pos. correlacionados} \\ = 0 & \text{" no están relacionados (incorrelat.)} \\ < 0 & \text{" neg. relacionados} \end{cases}$$

Teorema: Si X e Y son independientes $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X e Y sono scorrelate (siempre y cuando la cov exista)

Formula alternativa

$$\left[Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = \mu_{1,1} - \mu_{1,0} \cdot \mu_{0,1} \right]$$

Discreto $\Rightarrow E[XY] = \sum_{y=0}^{j} \sum_{x=0}^{i} xy \, p_{X,Y}(x,y)$

Continuo $\Rightarrow E[XY] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} xy \, f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy$

Propietà della Covarianza

1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

2) $Cov(X,X) = Var(X)$

3) $Cov(aX,Y) = a\,Cov(X,Y)$

4) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

Proposición (Desigualdad de Schwarz)

(X,Y) vector aleatorio. Suponemos $E(X^2) < +\infty$, $E(Y^2) < +\infty$. Entonces $E(XY) < +\infty$ y $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y)^2}$

(si al menos una de las variables es degenerada en 0, esto se da como igualdad)

Ej: $X_1, \dots, X_n$ son i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas)

$E(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$

$Var(X_i) = \sigma^2 > 0$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ (media campionaria)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Def

(X,Y) vettore aleatorio. El coeficiente de correlación de X e Y se define como

$$\left[\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} \right]$$ siempre y cuando $E(X^2), E(Y^2) < +\infty$ y $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} > 0$, $\sigma_Y > 0$

Observación $\Rightarrow$ X, Y ind $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $\rho(X,Y) = 0$ (porque $Cov(X,Y) = 0$)

Teorema: Si $E(X^2)<+\infty$, $E(Y^2)<+\infty$, $\sigma_X, \sigma_Y > 0 \Rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$

- Dim - Tome (U,V) vettore aleatorio, $U = X - E(X)$ y $V = Y - E(Y)$

Usa dig. Schwarz y que $E(UV) = Cov(X,Y)$

$|E(UV)| \leq \sqrt{E(U^2)E(V^2)}$

Teorema: (X,Y) vettore aleatorio, $Y - E(Y) = a(X - E(X))$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $a > 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = 1$

2) $a < 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = -1$

Teorema: $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vettore aleatorio. $E(X_i^2) < +\infty$ $i = 1, \dots, n$

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$Var(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Varianza Campionaria (Media camp. vista antes)

$$\left[S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \right]$$

$E(S^2) = \sigma^2$

Función generatriz de momentos

Dada una v.a. X, la función $M_X(s) = E(e^{sX})$ se dice f.g.m si el valor medio del segundo miembro es finito al menos en un entorno del origen, $|s| < s_0$, con $s_0 > 0$

$\Rightarrow$ Caso discreto $\Rightarrow$ X v.a. discreta con f. di probabilità $p_X(x)$

$$\left[M_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{z: x_z \in S} e^{s x_z} p_X(x_z) \right]$$

(S es el conjunto de los valores que toma X con prob. no nula)

$\Rightarrow$ Caso abs. cont. $\Rightarrow$ X abs. cont. con f. de densidad $f_X(x)$

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx$$

Teorema: Sea X v.a con fgm $M_X(s)$ para $|s| \leq s_0$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M_{aX+b}(s) = e^{bs} M_X(as)$

Teorema: Sea $M_X(s)$ fgm de X v.a. Si $M_X(s)<+\infty$ para $|s|\leq s_0$

$\Rightarrow$ Todos los momentos de X existen y finitos y además:

$$M_X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{s^n}{n!}, \quad |s|\leq s_0$$

donde $\alpha_n = E(X^n)=\frac{d^n}{ds^n}M_X(s)\Big|_{s=0} \quad (n=0,1,\dots)$

Teorema: Sean $X_1,\dots,X_n$ v.a. ind. con f.g.m finitas en un entorno del origen y sea $X=X_1+\dots+X_n$

$\Rightarrow M_X(s)=M_{X_1+\dots+X_n}(s)=M_{X_1}(s)\cdots M_{X_n}(s)$

(Se puede usar para obtener la $M_X(s)$ de la distr. Bin a partir de la f.g.m de la Bernoulli)

Límite notable

$$\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n}$$

$X\sim Unif(a,b)$ (caso abs. continuo)

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$M_X(s)=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{sx}dx=\frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)} \quad s\in\mathbb{R}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad C_X=\frac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$$

$X\sim Exp(1,\lambda)$ (caso abs. cont)

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad \lambda>0, \quad M_X(s)=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-x(\lambda-s)}dx=\frac{\lambda}{\lambda-s}, \quad (s<\lambda)$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$X\sim Gamma(\nu,\lambda)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad \lambda,\nu>0 \quad \Gamma(\nu)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}dx$$

$$M_X(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)^\nu \quad (s<\lambda)$$

$X \sim N(\mu, \sigma)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma y+\mu)s} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma \, dy =$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = y \Leftrightarrow x = \sigma y + \mu$

$dx = \sigma dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma y+\mu)s} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu s} e^{\sigma y s - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \sigma y s} dy$$

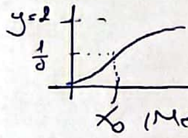
$$= e^{\mu s + \frac{\sigma^2}{2} s^2}$$

$E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

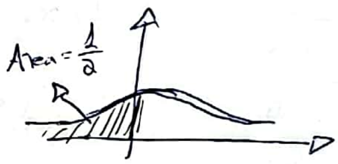
Mediana

X v.a., F_X función de distribución

La mediana es el valor x_0 t.q. $P(X < x_0) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_0) \Leftrightarrow F_X(x_0^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(x_0)$



Si X abs. cont. $\Rightarrow F(x_0) \leq \frac{1}{2} \leq F(x_0) \Leftrightarrow F(x_0) = \frac{1}{2}$



Intercambiabilidad

Las v.a. $X_1, \ldots$ se dicen intercambiables si $\forall k \in \mathbb{N}$ la distribución k-upla depende solo del nº k:

$$\left[F_{(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma k})}(x_1, \ldots, x_k) = F_{(X_1, \ldots, X_k)}(x_1, \ldots, x_k) \right]$$

Condicionamiento de variables aleatorias

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ con } P(B) > 0$$

Caso discreto $\quad x \in S_x$, $y \in S_y$ con $P(Y=y) > 0$

$$P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ con $p_Y(y)>0$ $\{y \in \mathbb{R} / p_Y(y)>0\} = D_y$

Def: $p_{X|Y}(x|y)$ = función de probabilidad de X condicionada por $Y=y$ ($\forall y \in D_y$)

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad x \in \mathbb{R}$$

Se cumple que:
- $p_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x \in S_x$
- $\sum_{x \in S_x} p_{X|Y}(x|y) = 1$
- X e Y ind $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x) p_Y(y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$, $F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)$

Media condicionada $\Rightarrow E[X|Y=y] = \sum_{x \in S_x} x \cdot p_{X|Y}(x|y)$ cuando es finito

Varianza " $\Rightarrow Var[X|Y=y] = \sum_{x \in S_x} (x - \mu_{X|Y})^2 p_{X|Y}(x|y) = E[X^2|Y=y] - (E[X|Y=y])^2$

$\mu_{X|Y} = E[X|Y=y]$

Def: Función de distribución de X condicionada por $Y=y$

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y=y) \quad y \in \mathbb{R}$$

2) Caso abs. continuo

(X,Y), $f_{X,Y}(x,y)$ densità di prob.

Def: F. di distribuzione di X dado $Y=y$, $y \in D_y$

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y=y) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0^+} P(X \leq x | y < Y \leq y+h) =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y+h)}{P(y < Y \leq y+h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} du \int_{y}^{y+h} f(u,v)\,dv}{\int_{y}^{y+h} f_Y(v)\,dv} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\,du = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u,y)\,du$$

Densidad de prob. de X condicionada por $Y=y \Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \ x \in \mathbb{R}$

Se cumple que:
- $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$
- $f_X(x) = \int_{D_y} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,dy$
- X e Y ind, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, $F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)$

~~Resultados requeridos~~

Desigualdad de Markov

X v.a. non negativa $P(X\geq 0)=1$, $\forall a>0 \Rightarrow \boxed{P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}}$

-Dem-

$A=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\geq a\}$

$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } \omega\in A\\ 0 & \text{si } \omega\in\bar{A}\end{cases}$ (función indicadora de A)

$I_A(\omega)$ es una variable aleatoria de Bernoulli

$P(I_A=0)=P(\{\omega\in\Omega: \omega\in\bar{A}\})=P\{\omega\in\Omega: X(\omega)<a\})=P(X<a)$

$P(I_A=1)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)\geq a\})=P(X\geq a)$

$E[I_A]=P(X\geq a)$ $\qquad X\geq XI_A\geq aI_A =$

$=\begin{cases}\text{Si } \omega\in A,\ I_A(\omega)=1;\ X(\omega)=X(\omega)\underset{1}{I_A(\omega)}\geq aI_A(\omega) \ ✓\\ \text{Si } \omega\in\bar{A},\ I_A(\omega)=0;\ X(\omega)\geq XI_A=0\geq 0=aI_A \ ✓\end{cases}$

$X\geq aI_A \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{si } X\geq Y\Rightarrow E(X)\geq E(Y)}}{E(X)\geq E(aI_A)}=aE(I_A)=aP(X\geq a)\Rightarrow P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$ //

Desigualdad de Markov generalizada: X v.a., $v>0$

$$P(|X|\geq a)\leq\frac{E(|X|^v)}{a^v} \quad \text{con } a>0 \qquad (1)$$

-Dem-

$|X|$ v.a. no negativa $\Rightarrow |X|^v$ v.a. no negativa $\Rightarrow E(|X|^v)$ existe siempre finito

$$P(|X|\geq a)=P(|X|^v\geq a^v)\leq\frac{E(|X|^v)}{a^v}$$

Desigualdad de Chebyshev: Sea X v.a. con $E(X^2)<+\infty$

$\forall\varepsilon>0$, $\left[P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|X-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}\right]$

-Dem-

En (1) ponemos $v=2$, $a=\varepsilon$ y $|X|$ lo sustituimos con $|X-\mu|$

Desigualdad de Jensen

Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y continua en los valores que toma por una v.a. X y si existe $E[g(X)]$ finito $\Rightarrow \boxed{E[g(X)] \geq g(E(X))}$

Si, en cambio, g es cóncava $\Rightarrow \boxed{E[g(X)] \leq g[E(X)]}$

- Dim -

~~Separamos~~ Usamos F. Taylor para g con punto inicial $\mu = E(X)$

$$g(x) = g(\mu) + g'(\mu)\cdot(x-\mu) + \underbrace{\frac{1}{2}g''(\xi)(x-\mu)^2}_{\geq 0}$$

$$g(x) \geq g(\mu) + g'(\mu)\cdot(x-\mu)$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx}_{\shortparallel} \geq g(\mu)\overbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx}^{1} + g'(\mu)\int_{\mathbb{R}} (x-\mu) f_X(x)\,dx$$

$$E[g(X)] \geq g(\mu) + g'(\mu)\underbrace{E[X-\mu]}_{0} \Rightarrow E[g(X)] \geq g[E(X)]$$

$\blacksquare$

Ej: $g(x)$ es convexa $\Rightarrow E[X^2] \geq [E(X)]^2$ es cierta $(Var(X) \geq 0)$

Convergencia de variables aleatorias: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Convergencia sobre Ω: $\left|\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right|\ \forall \omega \in \Omega$

con X v.a. def. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

es decir, $\forall \varepsilon > 0: \exists K = K_{\varepsilon,\omega}: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \quad \forall n \geq K$ y $\forall \omega \in \Omega$

Def: Convergencia casi cierta: X y $\{X_n\}$ con $n\in\mathbb{N}$ son v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

X_n converge casi ciertamente a X $(X_n \xrightarrow{q.c} X)$ cuando $\left|P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1\right|$

es decir, $P(\{\omega\in\Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

es decir, $P(\{\omega\in\Omega: \forall\varepsilon>0, \exists K, \forall n>K: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Teorema: $X_n \xrightarrow{qc} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k\geq n}^{\infty} \{\omega\in\Omega: |X_k(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1 \quad \forall\varepsilon > 0$

Convergencia en probabilidad: $X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

la sucesión converge en probabilidad a X $(X_n \xrightarrow{P} X)$ si $\forall\varepsilon>0$:

$: \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$

es decir, $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega\in\Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall\varepsilon > 0$

$(X_n \xrightarrow{qc} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X)$

$$\left| \begin{array}{l} \cancel{P(X_n - X \leq 1) =} \\ \cancel{= P(X_n - X = 0) +} \\ \cancel{+ P(X_n - X = 1) =} \\ = \end{array} \right|$$

Convergenza in distribuzione

X v.a. con f. dist. F, X_n v.a. con f. dist. F_n, $n \in \mathbb{N}$

La sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a X ($X_n \xrightarrow{d} X$) si $\left[\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)\right]$

$\forall x \in C(F) := \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$ (X, X_n tienen que pertenecer al mism espacio de prob.)

Teorema

Si $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

Si $X_n \xrightarrow{d} X$ con X degenerada $\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Teorema central de convergencia (t. central del limite)

Sea $X_1, \dots, X_n, \dots$ una sucesión de v.a. def. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e i.i.d con $\mu = E(X)$ finito y $\sigma^2 = Var(X)$ finito y positivo. Entonces $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ es tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Por lo que $\frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

Nota $E(Y_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n\mu$ $\quad Var(Y_n) = n\sigma^2$

$$\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}} = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$$

Ley de grandes números

1) Ley débil de grandes números (de Markov)

$\{X_n\}$ sucesión de v.a independientes, con $E(X_i)$ finito $\forall i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$ finito

para $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ se tiene $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y_n - E(Y_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Por lo que $\frac{Y_n - E(Y_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$ $\quad$ En la hipo. que $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0$ para $n \to \infty$ (1)

-Dim- $\cancel{\text{Si } \sigma_i^2 = c \Rightarrow \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2}} \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n} \Rightarrow)$

$\forall \varepsilon > 0: \quad P\left(\left|\frac{Y_n - E(Y_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{Var\left(\frac{Y_n - E(Y_n)}{n}\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \cdot Var(Y_n) =$

D. Chebyshev

$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2 \varepsilon^2}$

En la hip. (1) se tiene $P\left(\left|\frac{Y_n - E(Y_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1$ para $n \to \infty$, de donde tenemos la tesis

2) **Ley débil de grandes nº (de ~~Markov~~ Chebyshev)**

$\{X_n\}$ sucesión de v.a. ind. con $E(X_i)$ finito $\forall i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$ finito

~~para $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ se tiene $\lim P(|Y_n - E(Y_n)|$~~

$(\sigma_i^2 \leq C \ \forall i) \Rightarrow \frac{Y_n - E(Y_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$ para $n \to \infty$

- Dem -

Si $\sigma_i^2 \leq C \Rightarrow \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$ por lo que $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0$ para $n \to \infty$

La tesis se saca del teorema anterior

3) **Ley débil de grandes nº de Khintchin**: Si $X_1, \dots, X_n, \dots$ son i.i.d con valor medio μ finito $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es tal que $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

es decir $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$