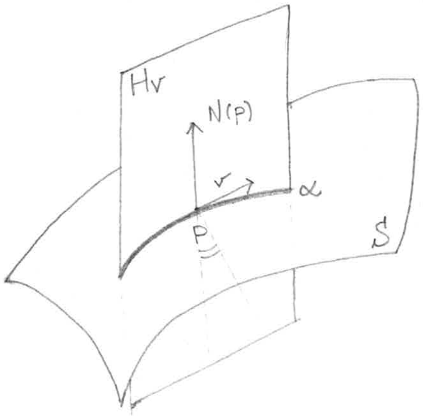
$p \in T_p S$ $\quad N(p)$ vettore normale



H_v = piano passante per p e $\parallel$ a v e $N(p)$

La curva
$\alpha : I \longrightarrow H_v \cap S$

regolare, p.a.l. con $\alpha(0) = p$

e sostegno $H_v \cap S$ è detta SEZIONE NORMALE di S in p lungo v

Poichè $\mathrm{Span}(v, N(p)) \cap T_p S = \mathbb{R}v \Rightarrow$ il vettore tg di α in p può essere solo $\pm v$: scegliamo

$$\alpha'(0) = v.$$

La sezione normale dipende solo dalla geometria della superficie S!

Ricordiamo che La curvatura normale k_n è data da

$$k_n = k \cos\theta$$

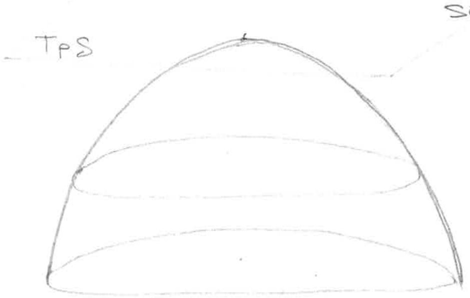
θ: angolo tra il vettore normale alla curva e quello normale alla superficie

k: curvatura di α

Teorema Eulero : $k_n = \mathrm{II}_p \Rightarrow k_1, k_2 \Rightarrow K$

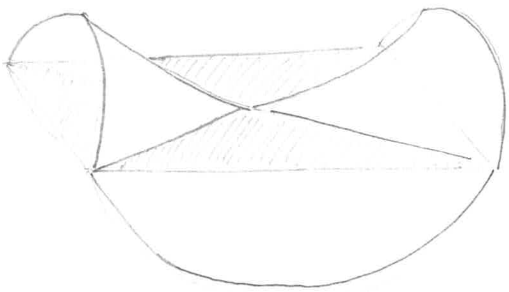
k_n: di ogni curva passante per p e con vel $= v$

$K(p) > 0$ [ellittici] $\Rightarrow$ tutte le curvature normali in p hanno stesso segno : tutte le sezioni normali di S si curvano dalla stessa parte rispetto a $T_p S$ $\Rightarrow$ vicino a p la superficie è da un solo Lato del piano tg



$K(p) < 0 \Rightarrow$ curvature normali di segno diverso in $p \Rightarrow$ sezioni normali possono essere curvate da parti opposte rispetto a $T_pS \Rightarrow S$ ha pezzi da entrambe le parti

[iperbolici]



$K(p) = 0 \Rightarrow$ non possiamo dire niente.

[parabolici]

PROBLEMA

Sia $p \in S$. Dimostrare che se p ellittico allora $\exists$ un intorno V di p in S tale che $V \setminus \{p\}$ e' contenuto in uno dei due semispazi aperti delimitati dal piano tangente (affine $p+$) T_pS

Dimostrare che se p e' iperbolico ogni intorno di p in S interseca entrambi i semispazi aperti determinati dal piano $p+T_pS$.

Sol.

$\varphi : U \to S$ parametrizzazione locale centrata in p

Definiamo la funzione

$$d : U \to \mathbb{R} \quad : \quad d(x) = \langle \varphi(x) - p \,,\, N(p) \rangle$$

$\hookrightarrow$ mappa Gauss

Chiaramente

$$\varphi(x) \in p + T_pS \iff d(x) = 0$$

Inoltre $\varphi(x) \in$ all'uno o all'altro dei semispazi determinati da $p + T_pS$ a seconda del segno di $d(x)$

Sviluppiamo d in serie di Taylor nell'origine:

$$d(x) = d(0) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial d}{\partial x_j}(0)\, x_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}(0)\, x_i x_j + \dots$$

$$\overset{\text{Rem.}}{\underset{3.2.13}{=}} e(p)\, x_1^2 + 2 f(p)\, x_1 x_2 + g(p)\, x_2^2 + \dots$$

$$= \mathrm{II}_p(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2) + \dots \qquad (*)$$

Se p ellittico $\Rightarrow$ k_1, k_2 hanno stesso segno e sono $\neq 0$

$\Rightarrow$ II_p ha segno costante in un intorno dell'origine

$\Rightarrow$ dalla $(*)$ segue che $d(x)$ ha segno cost $\Rightarrow$ $\exists$ V intorno di p su S tale che tutti i punti di $V \setminus \{p\}$ appartengono a uno dei due semispazi aperti delimitati da $(p+)\, T_pS$

Se p iperbolico $\Rightarrow$ k_1, k_2 segno opposto e $\neq 0$

II_p cambia segno in qualsiasi intorno dell'origine $\Rightarrow$ $d(x)$ cambia segno in qualsiasi intorno dell'origine

$\Rightarrow$ ogni intorno di p in S interseca entrambi i semispazi aperti delimitati da $(p+)\, T_pS$.

PROBLEMA $\varphi : U \to S$ param. locale

supponiamo $\nexists$ punti ombelicali

Dimostrare che le curve coordinate sono tutte linee di curvatura $\Leftrightarrow$ $F \equiv f \equiv 0$. Mostrare che, in tal caso, le curvature principali sono $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$

Sol.

linee di curvatura : $\alpha : I \to S$ with $\alpha'(t) =$ principal direction (v_1 o v_2) at $\alpha(t)$ $\forall t$

curve coordinate : $\alpha : I \to S$ with $\alpha'(t) =$ φ_u o φ_v (direzioni coordinate)

Se tutte le curve coordinate sono le linee di curvatura, stiamo dicendo che le direzioni coordinate sono sempre dir principali

$\boxed{\Leftarrow}$

$$A = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix} \quad \text{(endomorp. } dN)$$

se $f = F \equiv 0 \Rightarrow A$ diagonale $\Rightarrow$ curve coord sono sempre linee di curv

in questo caso le formule di Prop. 3.2.14 si semplificano e si ha

$$K = \frac{eg}{EG} \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Viceversa: supponiamo che le linee di curvatura sono le linee coord. Quindi φ_u e φ_v sono v_1 e v_2

In particolare, essendo tutti i punti non umbilical ($k_1 \neq k_2$ sempre)

$\varphi_u \perp \varphi_v \Rightarrow F \equiv 0$ as $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$

Allora gli elementi fuori della diagonale di A sono

$$-\frac{1}{E\cancel{G}} \cdot f\cancel{G} \qquad -\frac{1}{\cancel{E}G} \cdot f\cancel{E}$$

Dovendo essere nulli $\Rightarrow f \equiv 0$. $\square$