Matematicas-2-Bachillerato.pdf

Resumende10

Matemáticas II

1º Prueba de Acceso a la Universidad

Estudios España

MATRICES & DETERMINANTES.

↳ agrupación de nº en filas y columnas

tipos de matrices

1. M. CUADRADA: mismo nº filas y de columnas $(n \times n)$
2. M. FILA: tiene una única fila $(1 \times n)$
3. M. COLUMNA: una única columna $(n \times 1)$
4. M. NULA: todos sus elementos son ∅
5. TRASPUESTA de una MATRIZ (A^t): escribir columna → fila $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
6. M. IDENTIDAD: M. cuadrada con 1's en la diagonal y 0's resto
   ↳ su determinante = 1

ORDEN de la MATRIZ
$(f \times c)$ = filas × columnas

OPERACIONES con MATRICES

1. SUMA y RESTA: tienen q tener mismo orden

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

2. PRODUCTO de una MATRIZ por un ESCALAR:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

3. PRODUCTO de 2 MATRICES: deben tener mismo nº columnas de la 1ª con el nº filas de la 2ª → el producto de matrices NO es CONMUTATIVO

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix} ae+bh & af+bi & ag+aj \\ ce+dh & cf+di & cg+dj \end{pmatrix}_{2\times3}$$

4. POTENCIA de una MATRIZ: solo si es CUADRADA

$A^3 = A \cdot A \cdot A$; A^n = relación de $n \to \forall n \in \mathbb{N}$

se cumple para:

→ 2 matrices: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

→ igualdades notables con matrices NO se cumplen
↳ solo si a y b conmutan $(AB = BA)$

CÁLCULO de DETERMINANTES = solo matrices CUADRADAS

→ 2×2: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$

→ 3×3: $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + gbf + cdh) - (ceg + afh + ibd)$

→ 4×4: 1º elegir columna / fila con más ∅ o sino 1's
2º quiero < fila de ∅ → opero columnas = 1 0 0 0 ; columna de ∅ → opero filas = 1 0 0 0 (en columna)
3º hago el ADJUNTO
↳ determ. 3×3

¿QUÉ es un ADJUNTO?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ tacha fila y colum.

→ $adj(a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ impar

→ $adj(a_{33}) = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ par

PROPIEDADES de un DETERMINANTE $|D|$

1. si un $|D|$ tiene 1 < fila / columna de ∅'s → $|D|$ vale ∅
2. si un $|D|$ tiene 2 filas / columnas linealmente independientes entre sí → $|D|$ vale ∅
3. si en un $|D|$ intercambia 2 f/c → cambia el signo $|D|$
4. siempre se cumple que $|A| = |A^t|$
5. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
6. $\det(A^n) = [\det(A)]^n \quad n \in \mathbb{N}$
7. $\det(k \cdot A) = k^{\text{ord}(A)} \cdot |A|$ EXAMEN
8. En un $|D|$ los factores comunes se sacan por f/c.
   Y si un K está multiplicando al valor $|D|$, solo modifica 1 f o c

INVERSA de M. CUADRADA

la inversa de A ∄ A^{-1} $\quad A \cdot A^{-1} = I$, $\quad A^{-1} \cdot A = I$

→ cómo calcularla

1º. solo tiene si $|A| \neq 0$
2º. A^t
3º. $adj(A^t)$
4º $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A^t)}$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ■ = cambiar signo (posición)

RANGO de una MATRIZ: nº de filas y columnas de la matriz q son linealmente independientes
↳ dimensión máxima determinante distinto de Ø

1º máximo rango posible
2º matriz nula única con rango Ø → el resto como mín. 1
3º como mucho rango del más pequeño de los dimensiones

ORLAR sobre: $2 \times 2 \neq Ø$

$$\left|\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{matrix}\right|$$

$a \cdot f - be \neq 0$

← 1ª opción
← 2ª opción

SISTEMAS de ECUACIONES:

1º T. de ROUCHE
2º A y A*
3º |A| → Rg(A) y Rg(A*)
4º Clasificarlo
5º Gauss o Crammer
(x, y, z) = (, ,)

TEOREMA de ROUCHE: 1 sistema con A y A*

- Si $rg(A) = rg(A^*) =$ nº incógnitas → SCD (única solución)
- Si $rg(A) = rg(A^*) \neq$ nº incógnitas → SCI (infinitas soluciones)
- Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ → SI (NO tiene ninguna solución)

RESOLUCIÓN de SISTEMAS: → MÉTODOS

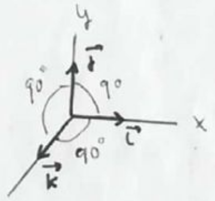
M. de Crammer (SCD)

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \; ; \; y = \frac{|A_y|}{|A|} \; ; \; z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

M. de Gauss (SCD o SCI)

A^* operar entre filas $\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}$ → añadir parámetros al tener filas de 0

VECTORES en $\mathbb{R}^3$



$\vec{v} = (V_x, V_y, V_z)$

$\vec{v} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$

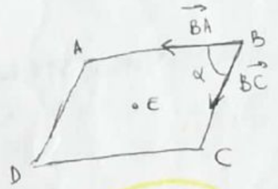
→ módulo de un vector: longitud del vector

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

→ Dirección de un vector: recta sobre la q se apoya el vector

→ VECTOR q pasa por 2 puntos: $\vec{AB} = B - A$

→ VECTORES UNITARIOS: $\vec{V_u} = \left(\frac{V_x}{|\vec{V}|}, \frac{V_y}{|\vec{V}|}, \frac{V_z}{|\vec{V}|} \right)$



Punto medio ⇒ $E = \frac{A + C}{2}$

$\frac{x_{AB}}{x_{AC}} = \frac{y_{AB}}{y_{AC}} = \frac{z_{AB}}{z_{AC}}$

A, B y C están ALINEADOS si $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son ld.

A, B, C y D son COPLANARIOS si $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ son ld

$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$

OPERACIONES:

1. SUMA o RESTA: $\vec{u} \pm \vec{v} = (U_x \pm V_x, U_y \pm V_y, U_z \pm V_z)$
2. PRODUCTO de $\vec{v} \cdot K$: $\vec{v} \cdot K = (U_x \cdot K, U_y \cdot K, U_z \cdot K)$
3. PRODUCTO ESCALAR de 2 VECTORES: $\vec{U} \circ \vec{V} = \vec{U_x} \cdot \vec{V_x} + U_y \cdot \vec{V_y}$
   $\vec{U} \circ \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha$

$$\alpha = \arccos \frac{U_x \cdot V_x + U_y \cdot V_y + U_z \cdot V_z}{|\vec{U}| \cdot |\vec{V}|}$$

4. PRODUCTO VECTORIAL de 2 VECTORES:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (\text{adj}(\vec{i}), \text{adj}(\vec{j}), \text{adj}(\vec{k}))$$

CAMBIAR signo

$\vec{u} \perp \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{w} \perp \vec{u} y \vec{v}$; $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

5. PRODUCTO MIXTO: Interpretación geométrica ⇒ VOLUMEN PARALELEPÍPEDO

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

Relación dependencia $(3\vec{v})$: $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ combinación lineal

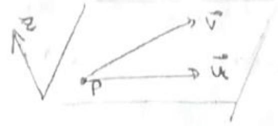
Escaneado con CamScanner

GEOMETRÍA

simétrico a respecto $\begin{cases} P & 1^{\circ}\text{ recta } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_{r_\pi} \\ \pi & 2^{\circ}\ O' \text{ corta } \pi \text{ (general) } r \text{ (paramétrica)} \\ & 3^{\circ}\ O' = \frac{O + O''}{2} ;\ O'' = 2O' - O \end{cases}$

α entre 2π $\begin{cases} \pi_1 \rightarrow \vec{v}_{r_{\pi_1}} \\ \pi_2 \rightarrow \vec{v}_{r_{\pi_2}} \end{cases}$

ECUACIONES de 1 PLANO $\rightarrow \pi$ $\begin{cases} \vec{u} \\ \vec{v} \\ P \end{cases}$



- **E. VECTORIAL:**

$$\pi \equiv (x,y,z) = P + \lambda \vec{u} + t\vec{v} = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(u_x, u_y, u_z) + t(v_x, v_y, v_z)$$

- **E. PARAMÉTRICA**

$$\pi \equiv \begin{cases} x = p_x + \lambda u_x + t v_x \\ y = p_y + \lambda u_y + t v_y \\ z = p_z + \lambda u_z + t v_z \end{cases} \Rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x - p_x & y - p_y & z - p_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

- **E. GENERAL:**

$$\pi \equiv Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{n}_\pi = (A, B, C)}$$

VECTOR NORMAL

→ recta general

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$$

$P_r \Rightarrow x, y \circ z = 0$

ECUACIONES de 1 RECTA $r \begin{cases} \vec{v} \\ P \end{cases}$

- **E. VECTORIAL** $r \equiv (x,y,z) = P + t\vec{v} = (p_x, p_y, p_z) + t(v_x, v_y, v_z)$

- **E. PARAMÉTRICA**

$$r: \begin{cases} x = p_x + t v_x \\ y = p_y + t v_y \\ z = p_z + t v_z \end{cases}$$

- **E. CONTINUA**

$$r: \frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

- **E. IMPLÍCITA o GENERAL**

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

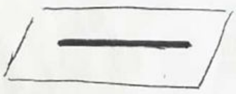
POSICIÓN RELATIVA de 1 RECTA y 1 PLANO

paramétrica general → sustituyes (x,y,z) y despejas t

SECANTES
se corta P 1 punto

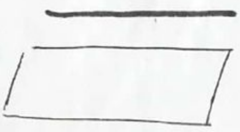
$t = a$

R. INCLUIDA en un PLANO
se corta P infinitos puntos



$0 = 0$

PARALELOS
NO se corta P ningún punto

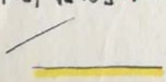


$a = 0$

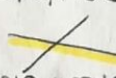
POSICIÓN RELATIVA de 2 RECTAS:

$\begin{cases} r: \begin{cases} v_r \\ P_r \end{cases} \\ s: \begin{cases} v_s \\ P_s \end{cases} \end{cases}$ General y comparas $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{C'}$

SE CRUZAN
NO $\vec{v}$ proporcionales
$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rP_s}] \neq 0$



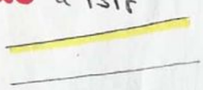
SECANTES
NO $\vec{v}$ proporcionales
$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rP_s}] = 0$



↳ punto de corte = sustituir

COINCIDENTES
$\vec{v}_r$ proporcionales a $\vec{P_sP_r}$
$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

PARALELAS
$\vec{v}_r$ proporcionales
NO a $\vec{P_sP_r}$
$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$



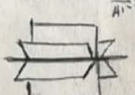
POSICIÓN RELATIVA de 3 PLANOS:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Estudio del sistema}$$

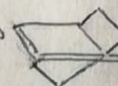
SCD
↳ 1 único punto en común

SCI
↳ 2 PLANOS → $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

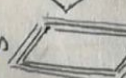
→ 2π q se cortan en $1r$



→ 2π coincidentes y 1π secante



→ 3π coincidentes



SI

→ 3π paralelos

PIRÁMIDE → 3π secantes

→ 2π coincidentes y 1π paralelo

→ 2π paralelos y 1π secante

MÉTRICO:

DISTANCIAS:

→ PUNTO - PUNTO (2 puntos): $\boxed{dist(A,B) = |\overrightarrow{AB}|}$

→ PUNTO - PLANO: $\boxed{dist(P,\pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}_\pi|}}$

→ entre 2 PLANOS: Posición relativa ⇒ PARALELOS: tomar un punto ∈ r o π; COINCIDENTES o SECANTES: $d = 0$

→ RECTA y PLANO: posición relativa

→ PUNTO - RECTA: $\boxed{dist(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}}$

→ 2 RECTAS: Posición relativa
- PARALELAS
- COINCIDENTES o SECANTES: $d = 0$
- SE CRUZAN: $\boxed{dist = \dfrac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}}$

ÁNGULOS:

→ entre 2 RECTAS: $\boxed{\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\,|\vec{v}_s|}}$

→ entre 2 PLANOS: $\boxed{\cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\alpha) = \dfrac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_\alpha|}}$

→ entre RECTA y PLANO: $\boxed{\cos\beta = \dfrac{\vec{v}_r \circ \vec{n}_\pi}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}}$

ÁREAS:

→ PARALELOGRAMO: $\boxed{S(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}$

→ TRIÁNGULO: $\boxed{S(ABC) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}}$

VOLÚMENES:

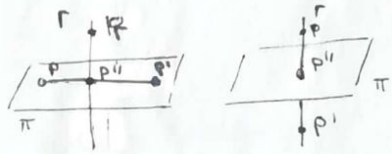
→ PARALELEPÍPEDO: $\boxed{V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}$

→ TETRAEDRO: $\boxed{V = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}}$

PROYECCIONES, SIMÉTRICOS

PUNTO:

1° Construimos un plano (π) o recta (r) auxiliar



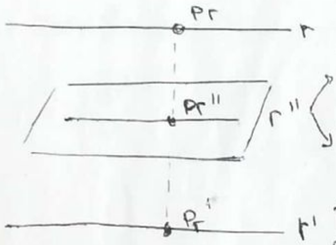
$\left\{\begin{array}{l} r \\ P \end{array}\right. \Rightarrow \pi \left\{\begin{array}{l} \vec{n_\pi} = \vec{u_r} \\ P \end{array}\right.$ o $\left\{\begin{array}{l} \pi \\ P \end{array}\right. \Rightarrow r \left\{\begin{array}{l} \vec{u_r} = \vec{n_\pi} \\ P \end{array}\right.$

2° intersecamos la recta (r) y el plano (π) → PROYECCIÓN P''

3° Sacamos el p. simétrico con la fórmula: $\boxed{P' = 2P'' - P}$

RECTA: → 1° Posición Relativa de r y π

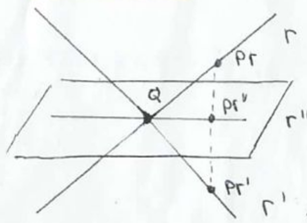
PARALELOS: $r \parallel \pi$



$r'' \left\{\begin{array}{l} \vec{u_r}'' = \vec{u_r} \\ \pi \text{ y } r \Rightarrow P'' \end{array}\right.$

$r' \left\{\begin{array}{l} \vec{u_r}' = \vec{u_r} \\ P' = 2P'' - P \end{array}\right.$

SECANTES: $r \times \pi$



$r'' \left\{\begin{array}{l} \vec{u_r}'' = \vec{QP_r''} \\ Q(r \text{ y } \pi) \text{ o } P_r'' \left(\begin{array}{l} 1^\circ r_\perp \\ 2^\circ r_\perp \text{ y } \pi \end{array}\right) \end{array}\right.$

$r' \left\{\begin{array}{l} \vec{u_r}' = \vec{QP_r'} \\ Q(r \text{ y } \pi) \text{ o } P_r' \left(\begin{array}{l} 1^\circ r_\perp \\ 2^\circ r_\perp \text{ y } \pi \\ 3^\circ 2P_r'' - P_r \end{array}\right) \end{array}\right.$

MÉTRICO:

DISTANCIAS

→ punto – punto (2 p.): $\boxed{dist(A,B) = |\vec{AB}|}$

→ punto – plano: $\boxed{dist(P,\pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n_\pi}|}}$

→ entre 2 planos
→ Recta y plano
} 1° posición relativa {
PARALELOS: tomar punto de r o π
COINCIDENTE o SECANTE: $d = 0$

→ Punto – recta: $\boxed{dist(P,r) = \dfrac{|\vec{P_rP} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|}}$

→ 2 rectas → 1° posición relativa {
PARALELAS
COINCIDENTES o SECANTES: $d = 0$
SE CRUZAN: $\boxed{dist(r,s) = \dfrac{|[\vec{P_rP_s}, \vec{v_r}, \vec{v_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}}$

ÁNGULOS

→ entre 2 rectas $(\vec{v_r}, \vec{v_s})$

→ entre 2 planos $(\vec{n_\pi}, \vec{n_\alpha})$

→ entre Recta y plano $(\vec{v_r}, \vec{n_\pi})$

$\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$

ÁREAS

→ PARALELOGRAMO: $\boxed{S(ABCD) = |\vec{AB} \times \vec{AD}|}$

→ TRIÁNGULO: $S(ABC) = \boxed{\dfrac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}}$

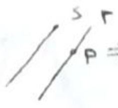
VOLÚMENES

→ PARALELEPÍPEDO: $\boxed{V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}$

→ TETRAEDRO: $\boxed{V = \dfrac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}}$

CONSTRUCCIÓN de RECTAS

- **RECTA // A**
  - 1 dada (s) pasando por un punto exterior (P)



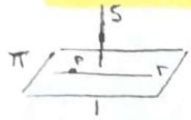
$P \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{v_s} \\ P \end{cases}$

  - 2 planos (π_1 y π_2) secantes pasando por un punto (P)

$s \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$ (recta intersección) $\Rightarrow$ La recta buscada es // a s $\Leftrightarrow \vec{v_s} = \vec{v_r}$

$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{v_s} \\ P \end{cases}$

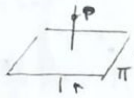
- **RECTA CONTENIDA en 1 plano (π) ⊥ a otra Recta (s) y que pase por 1 punto (P)**



Supongamos q la recta buscada es r:
$s \subset \pi \rightarrow \vec{v_s} \perp \vec{n_\pi}$
$r \perp s \rightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_s}$
$\vec{v_r} = \vec{v_s} \times \vec{n_\pi}$ producto mixto

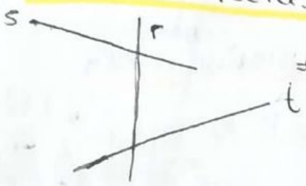
$r \equiv \{\vec{v_r}$ y $P\}$

- **RECTA ⊥**
  - A 1 plano (π) pasando por 1 punto (P)



$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n_\pi} \\ P \end{cases}$

  - Común a 2 rectas (s y t) que se cruzan (recta como intersección de 2 planos)



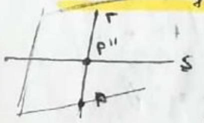
$\Rightarrow r \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$
$r \perp s \leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_s}$
$r \perp t \leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_t}$
$\vec{v_r} = \vec{v_s} \times \vec{v_t} = \vec{w}$

construimos 2 planos auxiliares:
$\pi_1 \equiv \{$contiene a $\vec{w}$ y a $t\} = \{\vec{w}, \vec{v_t}, P_t\}$
$\pi_2 \equiv \{$contiene a $\vec{w}$ y a $s\} = \{\vec{w}, \vec{v_s}, P_s\}$

  - A 2 rectas (s y t) pasando por 1 punto (P)

Supongamos que la recta buscada es r:
$r \perp s \leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_s}$
$r \perp t \leftrightarrow \vec{v_r} \perp \vec{v_t}$
$\vec{v_r} = \vec{v_s} \times \vec{v_t} \Rightarrow r \begin{cases} \vec{v_r} \\ P \end{cases}$

  - A otra (s) que pasa por 1 punto (P)

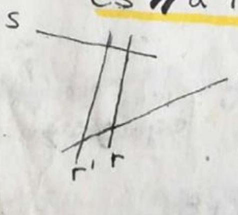


1º necesito 1 plano auxiliar ⊥ a r. $\pi \equiv \begin{cases} \vec{n_\pi} = \vec{v_s} \\ P \end{cases}$
2º Interseco r y π para obtener P''
3º La recta buscada pasa por P y P'' $\Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{PP''} \\ P \text{ o } P'' \end{cases}$

- **RECTA QUE SE APOYA EN 2 RECTAS (s y t) q se cruzan**
  - Pasando por 1 punto (P)

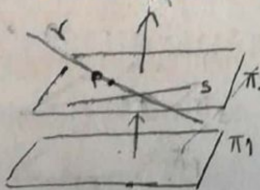
Construyo 2 planos auxiliares:
$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv \{\text{contiene a } P \text{ y } s\} \equiv \{\vec{v_s}, \vec{PP_s}, P_s \text{ o } P\} \\ \pi_2 \equiv \{\text{contiene a } P \text{ y } t\} \equiv \{\vec{v_t}, \vec{PP_t}, P \text{ o } P_t\} \end{cases}$

  - Es // a 1 tercera (r')



Construyo 2 planos auxiliares:
$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv \{\text{contiene a } \vec{v_{r'}} \text{ y a } s\} \equiv \{\vec{v_{r'}}, \vec{v_s}, P_s\} \\ \pi_2 \equiv \{\text{contiene a } \vec{v_{r'}} \text{ y a } t\} \equiv \{\vec{v_{r'}}, \vec{v_t}, P_t\} \end{cases}$

- **RECTA QUE PASA POR 1 PUNTO (P), es // a 1 plano (π_1) y CORTA a OTRA RECTA (s)**

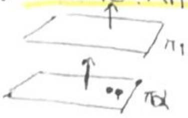


construimos 2 plano
$\pi_1 \equiv \{$contiene a P y su $\vec{n_\pi}\} = \{P, \vec{n_{\pi_1}} = \vec{n_\pi}\}$
$\pi_2 \equiv \{$contiene a P y s$\} \equiv \{\vec{v_r}, \vec{PP_r}, P \text{ o } P_r\}$

CONSTRUCCIÓN de PLANOS

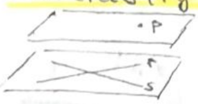
• PLANO // A

→ 1 Plano (π_1) y pasa por 1 punto (P)



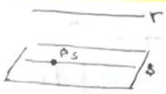
$\pi_\alpha \equiv \begin{cases} \vec{n_\alpha} = \vec{n_\pi} \\ P \end{cases}$

→ 2 Rectas (r y s) SECANTES y pasa por 1 Punto (P)
(se cruzan)



$r \langle \begin{matrix} \vec{v_r} \\ P_r \end{matrix} \quad s \langle \begin{matrix} \vec{v_s} \\ P_s \end{matrix} \quad P \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{v_r} \\ \vec{v_2} = \vec{v_s} \\ P \end{cases}$

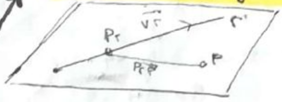
→ 1 Recta (r) y contiene a otra recta (s)



$r \langle \begin{matrix} \vec{v_r} \\ P_r \end{matrix} \quad s \langle \begin{matrix} \vec{v_s} \\ P_s \end{matrix} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{v_r} \\ \vec{v_2} = \vec{v_s} \\ P_s \end{cases}$
(contiene)

• PLANO que CONTIENE A

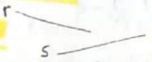
→ 1 Recta (r) y 1 punto exterior a ella

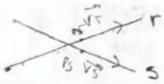


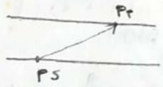
$r \begin{cases} \vec{v_r} \\ P_r \end{cases} \quad P \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{v_r} \\ \vec{v_2} = \vec{P_rP} \\ P_r \circ P \end{cases}$

→ 2 Rectas (r y s)

1º Posición Relativa

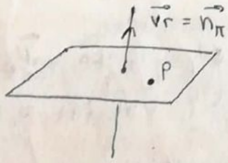
Se cruzan  ⇒ ∞ PLANOS — si te dan 1 P: $P_r \circ P_s \Rightarrow P$

Secantes  $\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{v_r} \\ \vec{v_2} = \vec{v_s} \\ P_r \circ P_s \end{cases}$

Paralelas  $\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{v_r} \circ \vec{v_s} \\ \vec{v_2} = \vec{P_rP_s} \\ P_r \circ P_s \end{cases}$

Coincidentes  ⇒ NO existe nigún plano

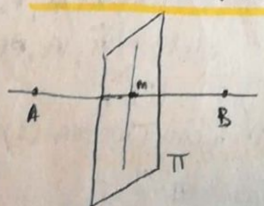
• PLANO ⊥ A 1 recta (r) y pasa por 1 punto (P)



$\vec{v_r} = \vec{n_\pi}$

$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} \\ P_r \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{n_\pi} = \vec{v_r} \\ P \end{cases}$

• Plano MEDIADOR de 1 SEGMENTO: lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos (A y B)
↳ que te dan



$\pi \equiv \begin{cases} \vec{n_\pi} = \vec{AB} \\ P = M = \dfrac{A+B}{2} \end{cases}$

BLOQUE IV: Cálculo → de una FUNCIÓN

DOMINIOS: conjunto de valores que puede tomar en "x"
- denominadores $\neq 0$
- Radicandos índice par ≥ 0
- Argumento logaritmo > 0

LÍMITES: → INDETERMINACIONES

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ L'Hôpital / Regla de Grados

$\boxed{\frac{k}{0}}$ $\pm\infty$ límites laterales ↳ $\exists$ lím = ambos límites iguales

$\boxed{\frac{0}{0}}$ → L'Hôpital (derivar a parte num. y denom.)

$\boxed{\infty - \infty}$ fracción → resta / raíz → conjugado

$\boxed{1^{\infty}} = e^{A} \rightarrow A = \lim_{x \to x_0} (\text{base} - 1) \cdot \text{exponente}$

$\boxed{0 \cdot \infty}$ uno de los términos invertido y dividiendo al otro $\xrightarrow{\text{conseguir}}$ $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ L'Hôpital

EXPONENCIALES: $\boxed{1^{\infty}, 0^{0}, 0^{\infty}, \infty^{0}} = e^{A}$; $\ln A = \ln f(x)$

CONTINUIDAD: f es continua en un punto x_0 de su dominio si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y se cumple $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Consecuencia: los puntos de fuera del dominio siempre son puntos de discontinuidad

1. Discontinuidad de 2ª especie: NO existe 1 de los límites laterales (Bagujeros del dominio) $\nexists$ lím
2. Discontinuidad de 1ª especie:
   - 2.1. D. de salto infinito: alguno de los límites laterales en tor al punto es $\pm\infty$ (Asínt. Verticales)
   - 2.2. D. de salto finito: ambos límites laterales son numéricos y distintos (barde funciones a trozos)
   - 2.3. D. evitable: ambos límites laterales son numéricos e iguales, pero difiere el valor de f en el punto.
     ($\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}}$ da resultado un $n^{\underline{o}}$)

$\boxed{x = a \leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$

ASÍNTOTAS → 3 tipos:

A. Verticales: de ecuación $y = x_0$ si se cumple $\lim_{x \to x_0} \boxed{f(x) = \pm\infty}$
(los x_0 son valores de fuera del dominio o punto frontera)

* cuando f(x) es RACIONAL tienen misma tendencia vertical y horizontal

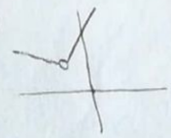
A. Horizontales: de ecuación $y = k$ si se cumple $\lim_{x \to \pm\infty} \boxed{f(x) = k}$

A. Oblicuas: de ecuación $y = mx + n$, si existen m y n definidos

$\boxed{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$ $\left(\begin{matrix} m \neq 0 \\ m \neq \infty \end{matrix}\right)$ $\boxed{n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - m \cdot x}$

Si hay horizontal NO hay oblicua

DERIVABILIDAD: f es derivable en un punto x_0 de su dominio si existe $f'(x_0)$



1° Dominio
2° Continuidad → si NO continua ↔ NO derivable
3° Derivabilidad { derivas f(x) (trozos) con estrictamente (> o <) / haces límites laterales → si son iguales → DERIVABLE

MONOTONÍA { MÁXIMO → creciente a decreciente / MÍNIMO → decreciente a creciente
1° Dominio
2° $f'(x) \rightarrow f'(x) = 0$ (soluciones = puntos críticos)
4° miramos signos con $f'(x)$ { creciente / decreciente } y { máximos / mínimos } relativos

RELATIVO = si es derivable
LOCAL(todos) = el + { alto / bajo } de su zona
ABSOLUTO = + { alto / bajo } de toda f(x)

RECTA TANGENTE

$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

RECTA NORMAL

$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}$

COSAS IMPORTANTES

$f(x_0) = tg(x_0)$

$f'(x_0) = tg'(x_0)$

PUNTOS de CORTE con el EJE $\begin{cases} OX \text{ (abcisas)} \rightarrow y = 0 \\ OY \text{ (ordenadas)} \rightarrow x = 0 \end{cases}$

SIGNO
- 1º Dom f
- 2º $f(x) = 0$ (cortes con OX)
- 3º Recta de signo para f $\begin{cases} \text{fuera dominio} \\ \text{corte con OX} \end{cases}$

$+ \quad - \quad - \quad +$

SIMETRÍA
- **PAR** → $\boxed{\text{si } f(x) = f(-x)}$
- **IMPAR** → $\boxed{\text{si } f(x) = -f(x)}$

INTEGRACIÓN: propiedades
$\begin{cases} \int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \\ \int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx \end{cases}$

→ INDEFINIDA

- I. POLINÓMICA: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \forall n \neq -1}$ $\boxed{\int k\, dx = kx + C}$
- I. POTENCIALES: $\boxed{\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}, \ \forall n \neq -1}$
- I. EXPONENCIAL: $\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C}$ $\boxed{\int a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C}$
- I. LOGARÍTMICA: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C}$
- I. SENO/COSENO: $\boxed{\begin{aligned} &\int f'(x) \cdot \text{sen } f(x)\, dx = -\cos f(x) + C \\ &\int f'(x) \cdot \cos f(x)\, dx = \text{sen } (x) + C \end{aligned}}$
- cuando el numerador tiene mayor grado que el denominador $\boxed{\int \text{cociente} + \int \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}}$
- I. POR PARTES:

¿Cómo se usaba? $\begin{cases} \text{Dominios de cosas distintas} \\ \text{Arcos} \\ \text{logaritmos} \end{cases}$

Para elegir "u" **ALPES**:
- Arcos
- Logaritmos
- Polinomios
- exponenciales
- sinusoidales

FÓRMULA: $\boxed{\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du}$

→ DEFINIDA
DEFINIDA: Contraposición del área positiva y negativa → diferencia en el área del intervalo( )

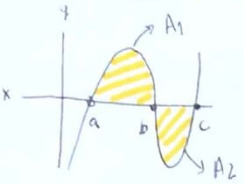
Regla de Barrow

Dada una función f y un intervalo $[a, b]$ de su dominio tal que F **NO** tenga DSI en $[a, b]$

Entonces se define: $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$ (donde F es una primitiva de f)

CÁLCULO de ÁREAS con INTEGRACIÓN

CASO 1: ÁREA ENCERRADA por la GRÁFICA de f y el eje Ox.



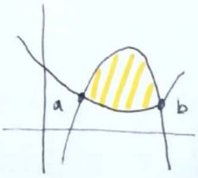
1º Calcular los cortes de f con el eje OX $(f=0) \to a, b, c\dots$

2º Pensamos cuántas integrales hay que hacer → superficie pedida: $A_1 + A_2$

3º Tomamos valores absolutos de las integrales que hacemos y los sumamos $A_T = |A_1| + |A_2|$

$$A_T = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$$

CASO 2: ÁREA ENCERRADA entre 2 FUNCIONES



1º Calcular puntos de intersección entre ambas gráficas $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

2º Suma de los valores absolutos de las integrales necesarias = ÁREA

3º Estas integrales son de forma $A = \left|\int_a^b f(x) - g(x)\right| dx$

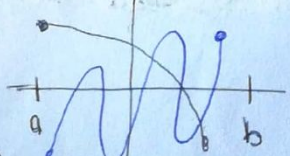
Curvatura de una función

1. Dominio
2. Calculo $f''(x) = 0 \to$ Puntos de estudio
3. Hacemos recta de signo para f'': si $f''(x)$ $\begin{cases} > 0 \ (+) & \text{la } f \text{ es cóncava hacia arriba } \cup \\ < 0 \ (-) & \text{la } f \text{ es cóncava hacia abajo } \cap \end{cases}$

$\ln(\infty) = \infty$	$\text{sen}(\infty) = \nexists$	$\frac{k}{\infty} = 0$
$\ln(0) = \nexists$	$\cos(\infty) = \nexists$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$\ln(0^+) = -\infty$	$\text{tg}(\infty) = \infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$
$e^{-\infty} = 0$	$\text{sen}(-\infty) = -\infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
$e^{\infty} = \infty$	$\cos(-\infty) = \frac{k}{-\infty} = 0$	
tamaños infinitos: exp > poli > log	$\text{tg}(-\infty) = \frac{k}{-\infty} = 0$	
	$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$	

TEOREMAS

→ **Teorema de Bolzano**: dada una función real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ de su dominio y tal que $\text{sgn}(f(a)) \neq \text{sgn}(f(b))$. Entonces existe al menos $C \in (a,b)$ que cumple $f(c) = 0$



¿Para qué?: demostrar existencia de { puntos de corte con Ox; soluciones de una ecuación

Teorema de Weierstrass: si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f alcanza un valor máximo y mínimo en ese intervalo.

Tabla de derivadas

Función	Expresión	Derivada
Constante	y=K	y´=0
Potencia	y= $f(x)^n$	y´=n·$f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
Inversa	y=$\frac{1}{f(x)}$	y´= $\frac{-1}{f(x)^2}\cdot f'(x)$
Raíz cuadrada	y= $\sqrt{f(x)}$	y´=$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
Raíz enésima	y=$\sqrt[n]{f(x)}$	y´= $\frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\cdot f'(x)$
Logaritmo	y= $\log_a f(x)$	y´=$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \log_a e$ $\frac{1}{\ln a}$
	y=ln *f(x)*	y´=$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
Exponencial	y=$a^{f(x)}$	y´=$a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot \ln a$
	y=$e^{f(x)}$	y´=$e^{f(x)}\cdot f'(x)$
Seno	y=sen*f(x)*	y´=cos *f(x)* $\cdot f'(x)$
Coseno	y=cos *f(x)*	y´= -sen *f(x)* $\cdot f'(x)$
Tangente	y=tg *f(x)*	y´=$\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$ y´=$\sec^2 f(x)\cdot f'(x)$ y´=$(1+tg^2 f(x))\cdot f'(x)$
Arcoseno	y=arcsen *f(x)*	y´=$\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
Arcocoseno	y=arccos *f(x)*	y´=$\frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\cdot f'(x)$
Arcotangente	y=arctg *f(x)*	y´=$\frac{1}{1+f(x)^2}\cdot f'(x)$

COLEGIO ARCÁNGEL RAFAEL

TABLA DE INTEGRALES

Funciones simples	Funciones compuestas
$\int dx = \int 1\,dx = x + C$	---
$\int k\,dx = kx + C$	---
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ;\ n \neq -1$	$\int f'(x) f(x)^n\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C\ ;\ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int f'(x) e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$	$\int f'(x) a^{f(x)}\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^{f(x)} + C$
$\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$	$\int f'(x) \ln f(x)\,dx = f(x) \ln f(x) - f(x) + C$
$\int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x \ln x - x) + C$	$\int f'(x) \log_a f(x) dx = \frac{1}{\ln a}(f(x) \ln f(x) - f(x)) + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int f'(x) \cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln(\cos x) + C$	$\int f'(x) \operatorname{tg} f(x)\,dx = -\ln(\cos f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \int f'(x)\left(1 + \operatorname{tg}^2 f(x)\right)\,dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = \int f'(x)\left(1 + \operatorname{ctg}^2 f(x)\right)\,dx = -\operatorname{ctg} f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,cos} x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arc\,cos} f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} f(x) + C$

PROBABILIDAD:

tipos de sucesos

- S. ELEMENTAL: 1 solo resultado
- S. COMPUESTO: 2 o + resultados
- S. SEGURO: se verifica siempre
- S. **IMPOSIBLE**: **NUNCA** se verifica
- S. CONTRARIO ($\bar{S} = S'$)

- A y B son **INCOMPATIBLES** si: $\boxed{P(A \cap B) = 0} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A y B son **INDEPENDIENTES** si: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Probabilidad condicionada $\boxed{P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Leyes de Demorgan

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Regla de Laplace

$P(A) = \frac{\text{c. favorables}}{\text{c. posibles}}$

→ MEDIA ARITMÉTICA $(\bar{x} = \mu = E(x)) = p \cdot n$

→ DESVIACIÓN TÍPICA $(S = \sigma = \sqrt{Var}) = \sqrt{p \cdot n \cdot q}$

→ VARIANZA $(Var = \sigma^2) = n \cdot p \cdot q$

Resta de sucesos:

$P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$

X → cualitativos
X → cuantitativos:
- discretas (valores sueltos) → DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: $X \sim B(n, p)$

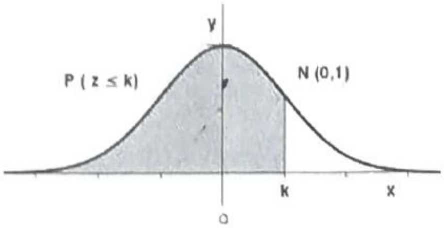
$\boxed{P(x=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}}$

- continuos (intervalos) → DISTRIBUCIÓN NORMAL: $X \sim N(\mu, \sigma)$

tipificar $Z \sim N(0,1)$ $\quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Tabla de distribución normal tipificada N(0,1)

Los valores de la tabla normal representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

TRIGONOMETRIA

ÁNGULO: región del plano comprendida entre 2 semirrectas con origen común

unidades < GRADO SEXAGESIMAL (°) / RADIANES (rad)

π rad = 180°
2π rad = 360° → vuelta completa

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

SENO: $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

COSECANTE: $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$

COSENO: $\cos\alpha = \frac{\text{cat. contiguo}}{\text{hipotenusa}}$

SECANTE: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

TANGENTE: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. contiguo}}$ ← $\tan\alpha$

COTANGENTE: $\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

F.F.T | $\text{tg} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

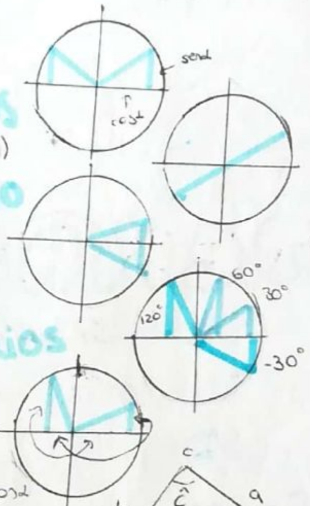
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

divide entre $\cos^2\alpha$: $\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

divide entre $\text{sen}^2\alpha$: $\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \rightarrow 1 + \text{cotan}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

TIPOS de ÁNGULOS:

α
- SUPLEMENTARIOS (suman 180° → 180 − α)
- DIFIEREN en LLANO (180 + α)
- OPUESTOS (−α / 360 − α)
- COMPLEMENTARIOS (suman 90 → 90 − α)
- DIFIEREN en 90° (90 + α)



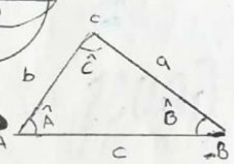
RESOLUCIÓN TRIÁNGULOS (NO rectángulos)

- TEOREMA del SENO

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}}$$

- TEOREMA del COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\hat{C}$$



área del triángulo

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \text{sen}\,\hat{A}}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

SUMA
$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$

RESTA
$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$

ÁNGULO DOBLE
$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

ÁNGULO MITAD
$\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$

$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

x dentro de < sen x / cos x / tg x

EXPRES. SENCILLA: operas (si posible) → (para reducirlo) < arccos / arcsen / arctan

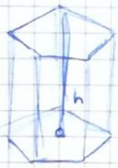
- CAMBIO de VARIABLE = para expresar 1 única razón trigonom.

↳ NO se puede hacer nada más = elevamos ambos miembros al cuadrado → COMPROB!

INFINITAS SOLUCIONES (∞ vueltas) → $\begin{cases} \alpha + 360k \\ \beta + 2\pi k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

ÁREAS Y VOLUMENES

PRISMA



AL → $P_B \cdot h$

AB → $\frac{P_B \cdot a_b}{2}$

AT → $A_L + 2 \cdot A_b$

V → $A_b \cdot h$

PIRÁMIDE

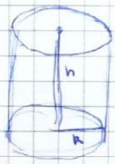
AL → $\frac{P_B \cdot ap}{2}$

AB → $\frac{P_B \cdot Ap_L}{2}$

AT → $A_L + A_b$

V → $\frac{1}{3} Ab \cdot h$

CILINDRO



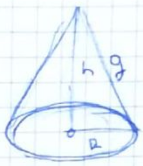
AL → $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

AB → $\pi \cdot R^2$

AT → $A_l + A_b$

V → $h \cdot A_b$ $(\pi \cdot r^2)$

CONO



AL → $\pi \cdot R \cdot g$

AB → $\pi \cdot R^2$

AT → $A_b \cdot h$

V → $\frac{1}{3} Ab \cdot h$

SUCESOS

compatible (+1 com) ↑ | contrario / complementario → opuesto $\bar{A}$

elementales (1 [illegible]) ← tipos

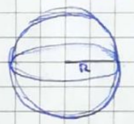
∪ = unión

∩ = inresección

P = Regla Laplace = $\frac{n^{o}\text{ c. favorables}}{n^{o}\text{ c. posibles}}$

0 imposible — 1 seguro ⟹ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ESFERA



AL $= 4 \cdot \pi \cdot R^2$

V $= \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

FUNCIONES

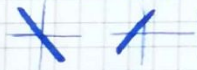
Vy = depd

Vx = indep.

Domf (x)

Recf (y)

LINEAL — AFÍN



$y = mx$ — $y = mx + n$

PARÁBOLAS (f. cuadráticas)

$a \neq 0$ — $a > 0$ ∪ — $a < 0$ ∩

eje y → x=0

eje x → y=0

VÉRTICE $(V = V_x, V_y)$

$V_x = \frac{-b}{2a}$ — V_y = susti.

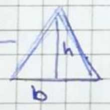
HIPÉRBOLA (f. proporcional inversa)

$y = \frac{k}{x} \to k \neq 0$

$k > 0$ — $k < 0$

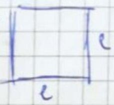
TRIÁNGULO

$a = \frac{b \cdot h}{2}$



CUADRADO

$a = l^2$

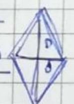


RECTÁNGULO / ROMBOIDE

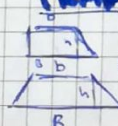
$a = b \cdot h$

ROMBO

$a = \frac{d \cdot D}{2}$



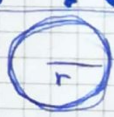
TRAPECIO



$a = \frac{b + B}{2} \cdot h$

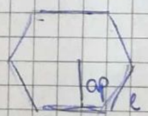
CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

$a = r \cdot \pi^2$



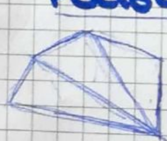
$l = 2 \cdot \pi \cdot r$

POLÍGONO REGULAR



$a = \frac{P \cdot ap}{2}$

POLÍGONO IRREGULAR



se dividen en triángulos y suman sus áreas