

# Matematicas-1BACH.pdf



Aitana\_jimju



Matemáticas I



1º Bachillerato



Estudios España



**Aprovecha el verano y  
matricúlate en tu grado**

Explora nuestras titulaciones y  
estudia 100 % online.

Explora grados en economía, finanzas,  
emprendimiento y negocios, derecho y más

.h universidad  
de las  
hespérides online



¡Visita nuestra web!

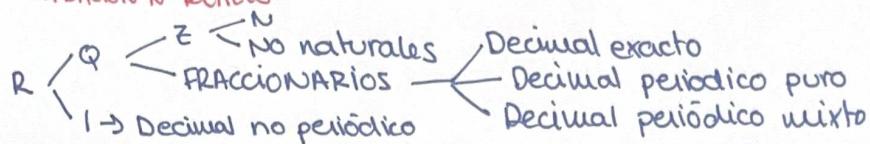
# Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

## Notes tema 1:

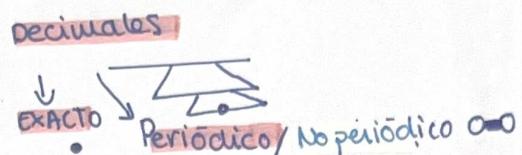
### I) CLASIFICACIÓN NÚMEROS



### II) REPRESENTACIÓN EN RÉGIA

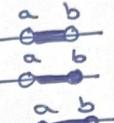
$\mathbb{Z} \rightarrow$       FRACCIÓN  $\rightarrow$

$\text{ROUTE} \rightarrow \sqrt{10}$   
 $10 = 9 + 1$   
 $(\sqrt{10})^2 = 3^2 + 1^2$



### III) Intervalos / semirrectas

- abierto  $\rightarrow (a, b) \{x/a < x < b\}$  No entre a y b, sin incluirlos
- semicerrado  $\rightarrow [a, b] \{x/a \leq x \leq b\}$  No entre a y b, sin incluir a
- cerrado  $\rightarrow [a, b] \{x/a \leq x \leq b\}$  Entre a y b, incluyéndolos
- semirrecta  $\rightarrow (-\infty, a) \{x/x < a\}$  No menores que a  $\leftarrow \overset{a}{\circ}$   $(-\infty, a]$  incluyendo a
- $\rightarrow (a, \infty) \{x/a < x\}$  No mayores que a  $\overset{a}{\circ} \rightarrow [a, \infty)$  incluyendo a



### IV) Entornos

- entorno de centro a y radio r  $\rightarrow E(a, r) \rightarrow (a-r, a+r)$
- entorno reducido de centro a y radio r  $\rightarrow E^*(a, r) \rightarrow (a-r, a+r) - \{a\}$
- entorno por la derecha  $\rightarrow E^+(a, r) \rightarrow (a, a+r)$
- entorno por la izquierda  $\rightarrow E^-(a, r) \rightarrow (a-r, a)$

### V) Valor absoluto

$$|a| \begin{cases} a \geq 0 \\ -a \leq 0 \end{cases}$$

Dentro ± fuera = 2 ptas < interior > exterior

### VI) Radicales

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a/b}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

### VII) logaritmos

$$\log_a P = x \rightarrow a^x = P$$

$$P > 0 \text{ as } a \neq 1$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a P^n = n \log_a P$$

$$\log_a(P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

$$\log_a(P/Q) = \log_a P - \log_a Q$$

### VIII) Notación científica

$$N = a, bcd \dots 10^n$$

$$\rightarrow 10^b \cdot 10^c = 10^{b+c}$$

$$\rightarrow 10^b : 10^c = 10^{b-c}$$

Sumas y restas  $\rightarrow$  Misma potencia en base 10.

### IX) Errores y cotas

$$\text{Error Absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor apox}|$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Cota de los errores  $\rightarrow |\text{Error Absoluto}| \leq k$   
 $|\text{Error Relativo}| \leq k'$

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

wuolah

# Tema 3: Álgebra

## I) FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

- sacar factor común
- grado  $\geq 3 \rightarrow$  Ruffini
- grado = 2  $\rightarrow$  ecuación 2º grado  
→ productos notables

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

## II) FRACCIONES ALGEBRAICAS

→ cociente de dos polinomios  $\frac{P(x)}{Q(x)}$   
simplificación

→ factorizar numerador y denominador  
y simplificar los valores comunes.

### Sumar y restar

• común denominador

### Producto

• producto de numeradores por el

producto de denominadores

### Cociente

$$\cdot \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot b}$$

## III) ECUACIONES

### 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### cuadráticas

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$x^2 = t$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \pm \sqrt{t}$$

## IV) SISTEMAS DE ECUACIONES

### sustitución

- despejar una incógnita y sustituir en la otra

### reducción

- multiplicar para poder restarlos y que se vaya una incógnita

### igualación

- despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan

## VI) INECUACIONES

### 1º grado

- resolver ecuación normal  
i - el signo cambia!

### 2º grado / > 2

- igualar a 0 = 0
- resolver normal  
~~no si~~
- comprobar

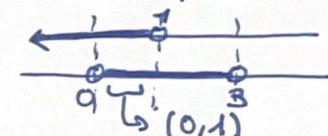
### cocientes

- igualar a cero
- puntos del numerador se pintan si es  $\geq 1$

i NUNCA LOS DEZ DÉN!

### sistema de inecuaciones

- resolver por separado



$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 & g \\ 0 & 0 & 1 & h \end{array} \right)$$

como si fuese  
reducción

• luego resolver por sustitución

## V) MÉTODO DE GAUSS

objetivo → sistema escalonado

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ b'y + c'z = d' \\ c''z = d'' \end{array} \right.$$

## VI) VALOR ABSOLUTO

$$|x-a| = b \rightarrow \begin{cases} x-a = b \\ x-a = -b \end{cases}$$

comprobar en ecuación inicial

→ 1 raíz = aislar y elevar los miembros al cuadrado

→ 2 raíces = aislar 1 raíz, y se eleva al cuadrado.  
Repetir hasta que no queden raíces.

## VI) EXPONENCIALES

sumas → • quitar sumas

• cambio variable  $a^x = t$

función misma base  $a^x = a^y \rightarrow x = y$

no sumas → no → logaritmos

comprobar: den  $\neq 0$

## VII) LOGARÍMICAS

logarítmicas dentro  $> 0$

• propiedades de log.

→ misma base logaritmo = resultados

→ no todas tienen logar. = aplicar def de log.

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

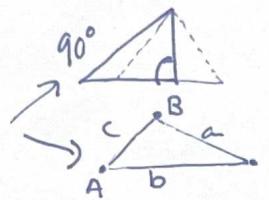
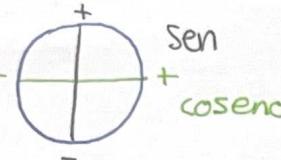
## VIII) POLINÓMICAS g. > 2

• factorizar

• igualar cada factor a cero.

## I) cambio de cuadrante simple:

- saber el cuadrante (SIG-NOS)
- dibujar triángulo



## II) resolver pbmas:

- 2 lados: pitágoras
- 1 lado y 1 ángulo: razón trigonométrica
- 1 lado y su ángulo: teorema del seno
- Sino, probar el teorema del coseno.

## III) cambio de cuadrante complejo:

- saber el cuadrante (SIG-NOS)
- utilizar las fórmulas (IV, V, VI)  $\Rightarrow$  hallar b necesario

$\triangle$  Si es  $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{90^\circ}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{180^\circ}{2} \Rightarrow$  saber el signo

## IV) Simplificación:

- poner todo en mismo ángulo
- poner en función del seno y del coseno

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

## V) demostrar:

- comenzar con el más difícil
- utilizar las fórmulas  $\Rightarrow$  poner mismo ángulo
- (-) mismo sen/cos/tag

## VI) ecuaciones: $\forall k \in \mathbb{Z}$

tipo:  $(\sin x = n)$

- si es  $60^\circ, 30^\circ, 45^\circ \Rightarrow$  normal
- si es  $\neq$  con calculadora



tipo:  $(+ \cdot razones/angulos)$

- pasar todo a misma razón y ángulo
- (-) poner en productos  $\Rightarrow$  simplificar y = 0

FALLOS SOLO TENER:  $\pm$  en problemas.

- comprobar los que tienen el mismo sen/cos/tag

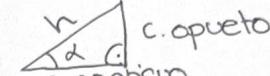


- poner el resultado/conclusión del pb.

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$$

## Formulas trigonometría:

$$\pi = 180^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c. \text{opuesto}}{n}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{c. \text{cont}}{n}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{c. \text{opu}}{c. \text{cont}}$$

## IV) Ángulo de 90°

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c. \text{opuesto}}{n}$$

### relación:

$$1 + \operatorname{tag}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{ctaga} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cotag}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

## V) teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

TIENE DOS SOLUCIONES!

## VI) Suma Resta

## III) teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tag}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tag} \alpha + \operatorname{tag} \beta}{1 - \operatorname{tag} \alpha \operatorname{tag} \beta}$$

## VII) Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tag}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tag} \alpha}{1 - \operatorname{tag}^2 \alpha}$$

## VIII) Ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}}$$

## VII) Pasar de sumas a productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{A-B}{2} \right) \rightarrow \operatorname{sen}(A+B)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{cos} \left( \frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{A-B}{2} \right) \rightarrow \operatorname{sen}(A-B)$$

$$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \left( \frac{A+B}{2} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{A-B}{2} \right) \rightarrow \operatorname{cos}(A+B)$$

$$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = -2 \operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{A-B}{2} \right) \rightarrow \operatorname{cos}(A-B)$$

# Importante

Puedo eliminar la publi de este documento con 1 coin

¿Cómo consigo coins? → Plan Turbo: barato  
→ Planes pro: más coins

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración

ali ali ooooh  
esto con 1 coin me  
lo quito yo...

wuolah

## ① Dominio:

cocientes: den  $\neq 0 \rightarrow \text{IR} - \{x/\text{denominador} = 0\}$   
radicar pal: dentro  $\geq 0$

logarítmica: dentro  $> 0$

resto: IR

trigonometricas: seno: IR  
coseno: IR

tangente: IR - {cuando la fracción sea  $\frac{1}{0}$ }

## ② Funciones:

### polinómicas

→ grado = 0 → constante

→ grado > 0 → tabla

grado 1: → grado 2:

grado 3: → grado 4:

grado 5: → grado 6:

grado 7: → grado 8:

grado 9: → grado 10:

grado 11: → grado 12:

grado 13: → grado 14:

grado 15: → grado 16:

grado 17: → grado 18:

grado 19: → grado 20:

grado 21: → grado 22:

grado 23: → grado 24:

grado 25: → grado 26:

grado 27: → grado 28:

grado 29: → grado 30:

grado 31: → grado 32:

grado 33: → grado 34:

grado 35: → grado 36:

grado 37: → grado 38:

grado 39: → grado 40:

grado 41: → grado 42:

grado 43: → grado 44:

grado 45: → grado 46:

grado 47: → grado 48:

grado 49: → grado 50:

grado 51: → grado 52:

grado 53: → grado 54:

grado 55: → grado 56:

grado 57: → grado 58:

grado 59: → grado 60:

grado 61: → grado 62:

grado 63: → grado 64:

grado 65: → grado 66:

grado 67: → grado 68:

grado 69: → grado 70:

grado 71: → grado 72:

grado 73: → grado 74:

grado 75: → grado 76:

grado 77: → grado 78:

grado 79: → grado 80:

grado 81: → grado 82:

grado 83: → grado 84:

grado 85: → grado 86:

grado 87: → grado 88:

grado 89: → grado 90:

grado 91: → grado 92:

grado 93: → grado 94:

grado 95: → grado 96:

grado 97: → grado 98:

grado 99: → grado 100:

grado 101: → grado 102:

grado 103: → grado 104:

grado 105: → grado 106:

grado 107: → grado 108:

grado 109: → grado 110:

grado 111: → grado 112:

grado 113: → grado 114:

grado 115: → grado 116:

grado 117: → grado 118:

grado 119: → grado 120:

grado 121: → grado 122:

grado 123: → grado 124:

grado 125: → grado 126:

grado 127: → grado 128:

grado 129: → grado 130:

grado 131: → grado 132:

grado 133: → grado 134:

grado 135: → grado 136:

grado 137: → grado 138:

grado 139: → grado 140:

grado 141: → grado 142:

grado 143: → grado 144:

grado 145: → grado 146:

grado 147: → grado 148:

grado 149: → grado 150:

grado 151: → grado 152:

grado 153: → grado 154:

grado 155: → grado 156:

grado 157: → grado 158:

grado 159: → grado 160:

grado 161: → grado 162:

grado 163: → grado 164:

grado 165: → grado 166:

grado 167: → grado 168:

grado 169: → grado 170:

grado 171: → grado 172:

grado 173: → grado 174:

grado 175: → grado 176:

grado 177: → grado 178:

grado 179: → grado 180:

grado 181: → grado 182:

grado 183: → grado 184:

grado 185: → grado 186:

grado 187: → grado 188:

grado 189: → grado 190:

grado 191: → grado 192:

grado 193: → grado 194:

grado 195: → grado 196:

grado 197: → grado 198:

grado 199: → grado 200:

grado 201: → grado 202:

grado 203: → grado 204:

grado 205: → grado 206:

grado 207: → grado 208:

grado 209: → grado 210:

grado 211: → grado 212:

grado 213: → grado 214:

grado 215: → grado 216:

grado 217: → grado 218:

grado 219: → grado 220:

grado 221: → grado 222:

grado 223: → grado 224:

grado 225: → grado 226:

grado 227: → grado 228:

grado 229: → grado 230:

grado 231: → grado 232:

grado 233: → grado 234:

grado 235: → grado 236:

grado 237: → grado 238:

grado 239: → grado 240:

grado 241: → grado 242:

grado 243: → grado 244:

grado 245: → grado 246:

grado 247: → grado 248:

grado 249: → grado 250:

grado 251: → grado 252:

grado 253: → grado 254:

grado 255: → grado 256:

grado 257: → grado 258:

grado 259: → grado 260:

grado 261: → grado 262:

grado 263: → grado 264:

grado 265: → grado 266:

grado 267: → grado 268:

grado 269: → grado 270:

grado 271: → grado 272:

grado 273: → grado 274:

grado 275: → grado 276:

grado 277: → grado 278:

grado 279: → grado 280:

grado 281: → grado 282:

grado 283: → grado 284:

grado 285: → grado 286:

grado 287: → grado 288:

grado 289: → grado 290:

grado 291: → grado 292:

grado 293: → grado 294:

grado 295: → grado 296:

grado 297: → grado 298:

grado 299: → grado 300:

grado 301: → grado 302:

grado 303: → grado 304:

grado 305: → grado 306:

grado 307: → grado 308:

grado 309: → grado 310:

grado 311: → grado 312:

grado 313: → grado 314:

grado 315: → grado 316:

grado 317: → grado 318:

grado 319: → grado 320:

grado 321: → grado 322:

grado 323: → grado 324:

grado 325: → grado 326:

grado 327: → grado 328:

grado 329: → grado 330:

grado 331: → grado 332:

grado 333: → grado 334:

grado 335: → grado 336:

grado 337: → grado 338:

grado 339: → grado 340:

grado 341: → grado 342:

grado 343: → grado 344:

grado 345: → grado 346:

grado 347: → grado 348:

grado 349: → grado 350:

grado 351: → grado 352:

grado 353: → grado 354:

grado 355: → grado 356:

grado 357: → grado 358:

grado 359: → grado 360:

grado 361: → grado 362:

grado 363: → grado 364:

grado 365: → grado 366:

grado 367: → grado 368:

grado 369: → grado 370:

grado 371: → grado 372:

grado 373: → grado 374:

grado 375: → grado 376:

grado 377: → grado 378:

grado 379: → grado 380:

grado 381: → grado 382:

grado 383: → grado 384:

grado 385: → grado 386:

grado 387: → grado 388:

grado 389: → grado 390:

grado 391: → grado 392:

grado 393: → grado 394:

grado 395: → grado 396:

grado 397: → grado 398:

grado 399: → grado 400:

grado 401: → grado 402:

grado 403: → grado 404:

grado 405: → grado 406:

grado 407: → grado 408:

grado 409: → grado 410:

grado 411: → grado 412:

grado 413: → grado 414:

grado 415: → grado 416:

grado 417: → grado 418:

grado 419: → grado 420:

grado 421: → grado 422:

grado 423: → grado 424:

grado 425: → grado 426:

grado 427: → grado 428:

grado 429: → grado 430:

grado 431: → grado 432:

grado 433: → grado 434:

## Tema 4: Límite de funciones

### I) Límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

[1] sustituir "x" por "a"

[2] si no sale hay una indeterminación

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \rightarrow$  valor al que se approxima  $f(x)$  cuando  $x \approx c$

### INDETERMINACIONES:

$\infty - \infty \rightarrow$  mirar quién puede más       $\log < \text{Pol (grado)} < \text{expon}$   
 → si pueden igual = operar

$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$  mirar quién puede más

$\left\{ \begin{array}{l} +\text{grande NUMERADOR} \\ \text{igual} \\ +\text{grande DENOMINADOR} \end{array} \right. \begin{array}{l} \pm \infty \\ a/b \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{a y b los coeficientes de los que más piden}) \\ = \rightarrow \exists \text{ límite} \\ \neq \rightarrow \nexists \text{ límite} \end{array}$

$\frac{0}{0} \rightarrow$  hacer límites laterales  $\rightarrow -0,01(x \rightarrow a^-) + 0,01(x \rightarrow a^+)$

$\frac{0}{0} \rightarrow$  factorizar y simplificar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)\dots}{(x-a)\dots} = \boxed{\square}$

raíces que dan problemas → multiplicar y dividir por el conjugado

$1^{\pm\infty} / 1^{\pm\infty} \rightarrow$  aplicar la fórmula  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x)-1]}$

### II) Funciones a trozos + continuidad

[1] Buscar qué números no es "continua"  
 (caso de no saber → Dominio)

[2] hacer límites laterales

[3] saber cuánto mide  $f(n)$

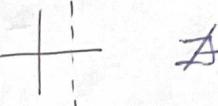
[4] si es igual = continua / si no es igual

discontinua inevitable salto finito  
 discontinua evitable  
 discontinua inevitable de salto infinito

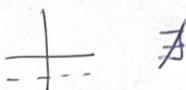
### III) Asintotas

#### POLOMÓNICAS

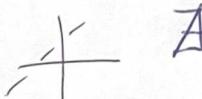
Asintota vertical



Asintota horizontal ↓



Asintota oblicua ↓



Ramas infinitas



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

#### RACIONALES \*

Den = 0  $\rightarrow x=a$  → límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \boxed{y=b} \rightarrow f(100) \geq b \quad f(-100) \geq b$$

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

$$f(100) \geq \text{Asint}(100)$$

$$f(-100) \leq \text{Asint}(-100)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

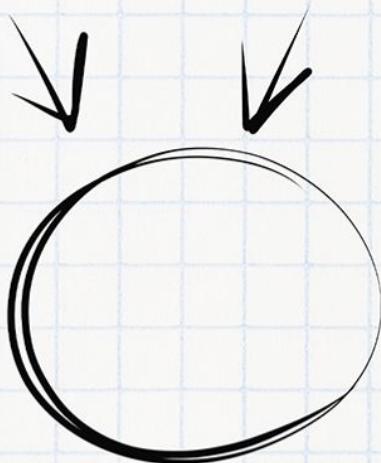
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

# Imagínate aprobando el examen

## Necesitas tiempo y concentración

Planes	PLAN TURBO	PLAN PRO	PLAN PRO+
diamond Descargas sin publi al mes	10 🟡	40 🟡	80 🟡
clock Elimina el video entre descargas	✓	✓	✓
folder Descarga carpetas	✗	✓	✓
download Descarga archivos grandes	✗	✓	✓
circle Visualiza apuntes online sin publi	✗	✓	✓
glasses Elimina toda la publi web	✗	✗	✓
€ Precios	Anual <input type="checkbox"/>	0,99 € / mes	3,99 € / mes
			7,99 € / mes

Ahora que puedes conseguirlo,  
¿Qué nota vas a sacar?

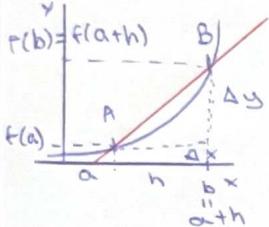


**WUOLAH**

## Tema 8

### ① TASA DE VARIACIÓN MEDIA

pendiente de la recta secante que une los puntos A y B

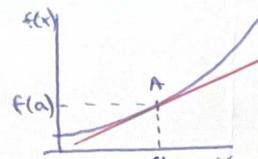


$$TVM[a,b] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$TVM[a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

### ⑪ TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

pendiente de la recta tangente por A



$$TVI(a) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(+) creciente (-) decreciente

### ⑫ OPERACIONES CON DERIVADAS

$$(K \cdot f(x))' = K f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

⚠

### ⑬ DERIVADAS FUNCIÓN SIMPLE

$$y = k \rightarrow y' = 0$$

$$y = x \rightarrow y' = 1$$

$$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{sen} x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$$

$$y = \operatorname{tg} x \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

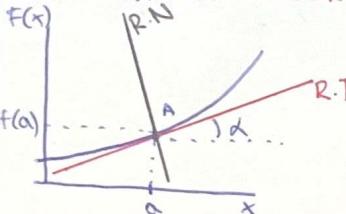
$$y = \arcsen x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctg x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

### ⑭ APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

#### RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA



$$\text{Ecación recta: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\begin{aligned} \text{RT} &\rightarrow \text{Punto: } A(a, f(a)) \\ &\rightarrow \text{Pte: } m = f'(a) = \operatorname{tg} a \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{RN} &\rightarrow \text{Punto: } A(a, f(a)) \\ &\rightarrow \text{Pte: } m = \frac{-1}{m'} = \frac{-1}{f'(a)} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} y - f(a) &= \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \end{aligned} \right\}$$

#### PRÁCTICA:

- Dan un punto (A) tg
  - ① Hayar  $f(a)$
  - ② Hayar  $f'(a) \rightarrow f'(a)$
  - ③ Sustituir

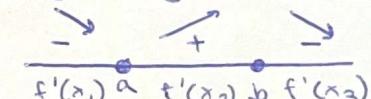
- Dan pendiente recta tg
  - ① Hacer derivada  $f'(x)$
  - ② Igualar  $m \rightarrow m = f'(x_1) \rightarrow$  tengo punto  $x$
  - ③ Hacer como arriba

### NONOTONIA Y EXTREMOS RELATIVOS $f'(x)$

$$\textcircled{1} f'(c)$$

$$\textcircled{2} \text{Dominio } f'(x)$$

$$\textcircled{3} = 0 \rightarrow \text{signo } f'(x) \geq 0$$



⚠ a y b mirar si están en dominio

$$\textcircled{4} f'(x) \rightarrow \text{crece } (a, b)$$

$$\rightarrow \text{decrece } (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

$$\min(a, f(a))$$

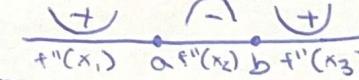
$$\max(b, f(b))$$

### CURVATURA Y PUNTOS INFLEXIÓN $f''(x)$

$$\textcircled{1} f''(x)$$

$$\textcircled{2} \text{Dominio } f''(x)$$

$$\textcircled{3} = 0 \rightarrow \text{signo } f''(x) \geq 0$$



⚠ normalmente se puede simplificar

$$\textcircled{4} f(x) \rightarrow \text{convexa } (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

$$\rightarrow \text{concava } (a, b)$$

$$PI = (a, f(a)), (b, f(b))$$

### ESTUDIO FUNCIONES COMPLEJAS

$$\textcircled{1} \text{Dominio}$$

$$\textcircled{2} \text{Puntos de corte}$$

$$\textcircled{3} \text{Asintotas y ramas infinitas}$$

$$\textcircled{4} \text{Nonotonia y extremos relativos}$$

$$\textcircled{1} \text{Curvatura y PI}$$

$$\textcircled{2} \text{Tabla valores}$$

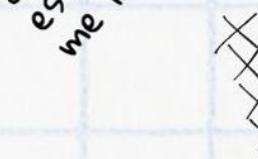
$$\textcircled{3} \text{Representar}$$

Importante

pierdo  
espacio



Necesito  
concentración  
ali ali ooh  
esto con 1 coin  
me lo quito yo...



WUOLAH

Puedo eliminar la publi de este  
documento con 1 coin ¿Cómo consigo coins?

→ Plan Turbo: barato

→ Planes pro: más coins

Tema 9: vectores		
	EXPRESIÓN VECTORIAL	EXPRESIÓN ANALÍTICA
PRODUCTO ESCALAR	$\vec{U} \cdot \vec{V} =  \vec{U}   \vec{V}  \cos(\vec{U}, \vec{V})$	$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_1 V_1 + U_2 V_2$
MÓDULO	$ \vec{U}  = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}}$	$ \vec{U}  = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$
ÁNGULO	$\cos(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{ \vec{U}   \vec{V} }$	$\cos(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{U_1 V_1 + U_2 V_2}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$
VECTOR PROYECCIÓN	$\vec{U}' = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{ \vec{V} ^2} \vec{V}$	$\vec{U}' = \frac{U_1 V_1 + U_2 V_2}{V_1^2 + V_2^2} (V_1, V_2)$
PROYECCIÓN (MÓDULO DEL VECTOR PROYECCIÓN)	$ \vec{U}'  = \frac{ \vec{U} \cdot \vec{V} }{ \vec{V} }$ $u \text{ sobre } v$	$ \vec{U}'  = \frac{ \vec{U}_1 V_1 + \vec{U}_2 V_2 }{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$
CONVERTIR UN VECTOR EN UNITARIO	$\frac{\vec{V}}{ \vec{V} }$	$\left( \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \right)$
VECTORES PARALELOS PROPORCIONALES	$\vec{V} = \lambda \vec{U}$	$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2}$
VECTORES PERPENDICULARES	$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$	$U_1 V_1 + U_2 V_2 = 0$

$$\perp \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

$$|\vec{U}| > 0$$

ángulo  $< 180^\circ$

### ① PRODUCTO POR NO:

$$\begin{aligned} \vec{V} &\xrightarrow{K} K\vec{V} \\ \vec{V}(x, y) &\xrightarrow{K} K\vec{V}(Kx, Ky) \end{aligned}$$

→ módulo =  $\vec{V}$  por  $|K|$   
→ dirección = la de  $\vec{V}$   
→ sentido  $\rightarrow K > 0$ : misma  
 $K < 0$ : opuesta  
 $K = 0 \rightarrow$  vector nulo (P10)

### ② SUMA/RESTA VECTORES:

$$\begin{aligned} \vec{U} + \vec{V} &= \vec{U} + \vec{V} \\ \vec{U} - \vec{V} &= \vec{U} - \vec{V} \end{aligned}$$

origen sobre el eje  $x$  (ley paralelo)  
 $\vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1, U_2 + V_2)$   
 $\vec{U} - \vec{V} = (U_1 - V_1, U_2 - V_2)$

$$\begin{aligned} \vec{U} + \vec{V} &= (U_1 + V_1, U_2 + V_2) \\ \vec{U} - \vec{V} &= (U_1 - V_1, U_2 - V_2) \end{aligned}$$

### ③ COMBINACIÓN LINEAL:

$$a\vec{U} + b\vec{V} = \vec{W} \rightarrow a(U_1, U_2) + b(V_1, V_2) = (W_1, W_2)$$

(comprobaci.)

### ④ BASE:

→ 2 vectores  
→ No nulos  
→ No proporcionales

} combinación lineal

caso 1:  
ortogonal ( $\infty$ )

caso 2:  
módulo = 1  
ortonormal ( $2$ )

### ⑤ PRODUCTO ESCALAR:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cos(\vec{U}, \vec{V}) = N$$

propiedades:

- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$
- $\vec{U} \perp \vec{V} \Rightarrow \cos 90^\circ = 0 \rightarrow \vec{U} \neq 0 \neq \vec{V} \rightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$
- $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \quad (\cos(\vec{U}, \vec{V}) = \cos(\vec{V}, \vec{U}))$

### ⑥ COORDENADAS DE UN VECTOR:

$$\vec{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

### ⑦ TRES PUNTOS ALINEADOS:

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) \rightarrow \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}$$

### ⑧ PUNTO MEDIO/SIMÉTRICO:

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

B sería el PUNTO MEDIO DEL SIMÉTRICO

PAR:  
 $A \xrightarrow{N_1} N_2 \xrightarrow{M_1} M_3 \xrightarrow{B}$

IMPAR:  
 $A \xrightarrow{M_1} M_2 \xrightarrow{B} B$

$$\vec{AB} = 3\vec{AM}$$

## Tema 10: GEOMETRÍA EN EL PLANO

### ① ECUACIONES DE UNA RECTA PTO + VECTOR

NOMBRE	NEED	ECUACIÓN
vectorial	$P(x_0, y_0)$ $\vec{v}(a, b)$	$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
paramétrica	$P(x_0, y_0)$ $\vec{v}(a, b)$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
continua	$P(x_0, y_0)$ $\vec{v}(a, b)$	$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$
PTO-PTE	$P(x_0, y_0)$ $m(b/a)$	$y - y_0 = m(x - x_0)$
explícita	$P(x_0, y_0)$ $m(b/a)$	$y = mx + n \rightarrow y_0 = mx_0 + n$
general	$P(x_0, y_0)$ $\vec{n}(b, -a)$	$bx + ay + c = 0 \rightarrow bx_0 + ay_0 + c = 0$
segmentaria	general	$\frac{x}{\textcircled{2}} + \frac{y}{\textcircled{3}} = 1$ <small>Punto corte con ejes: <math>x=0 \rightarrow (0, w)</math> <math>y=0 \rightarrow (z, 0)</math></small>

### ④ $\alpha$ entre rectas ( $\parallel / \perp \Rightarrow \alpha = 0^\circ$ ) / $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

secantes:

$\vec{v}/\vec{n}$	$\cos \alpha = \frac{ \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s }{ \vec{v}_r  \cdot  \vec{v}_s }$	$\cos \alpha = \frac{ \vec{n}_r \cdot \vec{n}_s }{ \vec{n}_r  \cdot  \vec{n}_s }$
$m$ (tan $\alpha$ )	$\tan \alpha = \left  \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right $	$0^\circ = 90^\circ \cdot \text{ANS}$

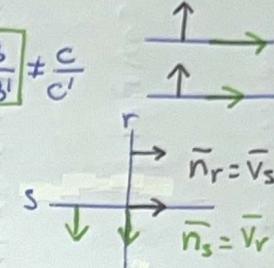
2 SOL

### ⑤ distancias

2 PTOS	$d(P_1, P_2) =  \vec{P_1 P_2}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
PTO Y RECTA	$d(P(x_0, y_0), Ax + By + C = 0) = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
2 RECTAS ( $r, s$ )	<p>[1] Posición relativa (<math>\perp \rightarrow d = 0</math>)</p> <p>paralelas: <math>d(r, s) = \frac{ C - C' }{\sqrt{A^2 + B^2}}</math> (E. gen)</p>

### ⑪ Paralelismo y perpendicularidad

• Paralelas:  $\vec{v}, \vec{n}$  proporcionales  
 $m_1 = m_2$



• perpendiculares:  $\vec{v}, \vec{n} \perp \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

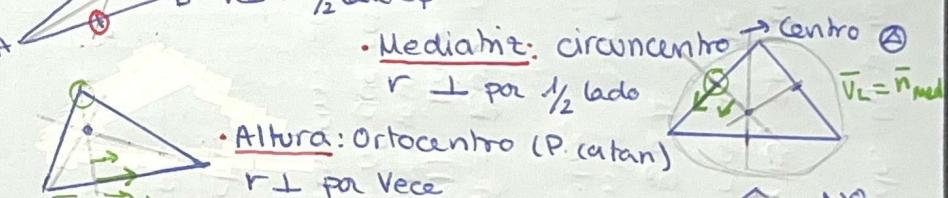
$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

### ⑫ Posición relativa entre dos rectas

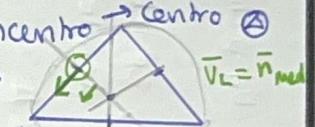
	F. GENERAL	F. EXPLÍCITA	SISTEMA
coincidentes	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n = n'$	0 soluc.
paralelas	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$m = m'$ $n \neq n'$	X soluc
secantes	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$m \neq m'$	1 soluc

### VI Elementos triángulo

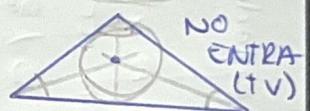
• Mediana: Baricentro (P. catan)  
 $V_{ce} \rightarrow \frac{1}{2}$  lado op



• Mediatriz: Circuncentro → Centro  
 $r \perp$  por  $\frac{1}{2}$  lado



• Altura: Ortocentro (P. catan)  
 $r \perp$  por Vece



• Bisectriz: Incentro  
 $r \perp \frac{1}{2}$

### VII Simétricos

• pto-recta: [1] recta  $\perp r$  [2] M corte 2r [3]  $P' \perp r \rightarrow P$

• 2-rectas:

#### PARALELAS

$$\begin{array}{|c|c|} \hline d & d \\ \hline \end{array}$$

$$Ax + By + C = 0 \quad A''x + B''y + C'' = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

$$|C - C'| = |C' - C''|$$



#### SECANTES

$P_1$  [1] = Punto inter (r, s)  
cualq.  $P_2$  [2] = simétrico  $P_3$  ( $P_1$ -recta)  
 $P_3 - P_1$  [3] = recta simétrica