Matematicas-1-Bach.pdf

Anayet

Matemáticas I

1º Bachillerato

Rosa Chacel

TEMA 2: ÁLGEBRA

- Valor numérico de un polinomio
- Suma y diferencia de polinomios
- Producto de polinomios
- Identidades notables
- División de polinomios
- Ruffini
- Raíces de un polinomio
- Teorema del resto
  $P(x) : x-a \mid P(a)=0$
- Teorema del factor
  Si $x=a \rightarrow$ raíz
  $(x-a)$ = factor de $P(x)$

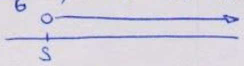
- Factorizar polinomios.
- Fracciones equivalentes
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo
- Simplificar fracciones
- Ecuaciones:
  - polinómicas
  - racionales
  - con radicales
  - logarítmicas
  - exponenciales.

• INECUACIONES:

- **Primer grado** → si se multiplica toda la inecuación por un nº - se cambia "<" de lado.

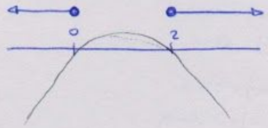
$\frac{x}{2}-(x-3) < \frac{x-1}{4} - \frac{x-12}{6}$; $6x-12x+36 < 3x-3-2x+4$; $-7x+35<0$; $7x>35$; $x>\frac{35}{7}$; $x>5$

$x \in (5, \infty)$



- **Segundo grado** → resolvemos la ecuación

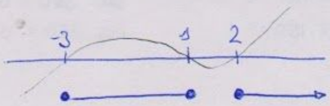
$2x \leq x^2$
$-x^2+2x \leq 0$
$-x^2+2x=0$
$x(-x+2)=0 \to x=0,\ x=2$



$x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

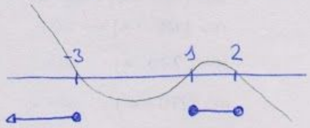
- **Tercer grado** → primero factorizamos

$3(x-1)(x+3)(x-2) \geq 0$



$x \in [-3, 1] \cup [2, \infty)$

$-3(x-1)(x+3)(x-2) \geq 0$



$x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$

• ECUACIONES LINEALES DE TRES INCÓGNITAS: lineal = x no elevada a nada.

Cada ecuación es un plano.

- **MÉTODO DE GAUSS**: intentar escalonar

Multiplicar una ecuación por un número es equivalente

$$\begin{cases} x+2y-3z=7 & \text{igual} \\ 2x+y-z=6 & \text{2veces la 1ª} \\ 3x-y-z=6 & \text{3veces la 1ª} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-3z=7 \\ -3y+5z=-8 \\ \boxed{-7y}+8z=-15 \end{cases}$$

L ahora

Fila 3·3 - Fila 2·7

$$\begin{array}{r} -21y+24z=-45 \\ +21y-35z=56 \\ \hline -11z=11 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ -3y+5z=-8 \\ -11z=11 \end{cases}$$

$z=1$

Fila 2: $-3y+5\cdot(-1)=-8$; $\boxed{y=1}$

Fila 1: $x+2\cdot 1-3\cdot(-1)=7$; $\boxed{x=2}$

Matrices

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Es exactamente igual salvo que no se escribe tantas veces las incógnitas.

• VALOR ABSOLUTO:

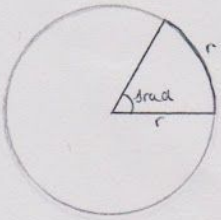
$|a| \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a<0 \end{cases}$

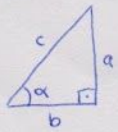
$|x-3|=3$ → $x-3=3 \rightarrow x=6$; $-x+3=3 \rightarrow x=0$

TEMA 3: TRIGONOMETRÍA

$1 rad = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$ $\quad 180° — \pi rad$

$360 — 2\pi r$
$x — 1 rad$





$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$

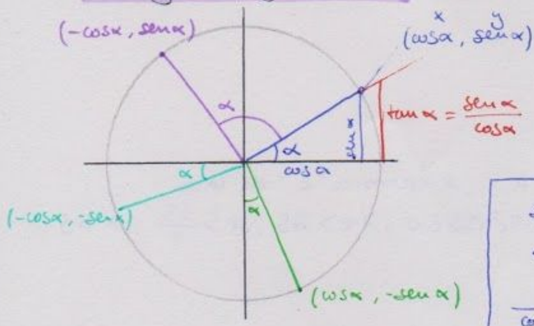
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$

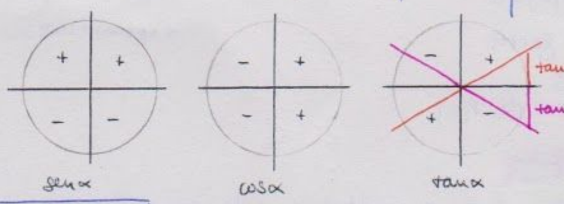
$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$

Pitágoras $= h^2 = c^2 + c^2$ (hipotenusa; cateto)

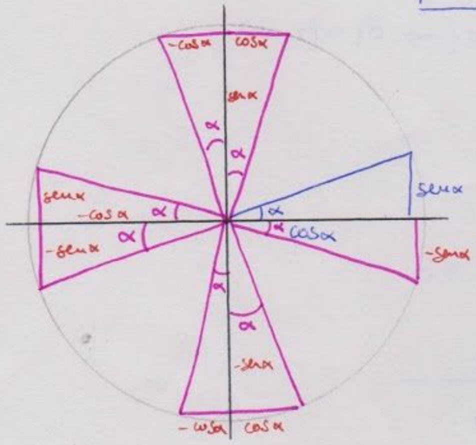
	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

– Circunferencia goniométrica:





$$\boxed{\begin{gathered} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \\ \frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tan^2\alpha \end{gathered}}$$



$sen\,(90-\alpha) = cos\,\alpha$
$cos\,(9-\alpha) = sen\,\alpha$

$sen\,(90+\alpha) = cos\,\alpha$
$cos\,(90+\alpha) = -sen\,\alpha$

$sen\,(180-\alpha) = sen\,\alpha$
$cos\,(180-\alpha) = -cos\,\alpha$

$sen\,(180+\alpha) = -sen\,\alpha$
$cos\,(180+\alpha) = -cos\,\alpha$

$sen\,(270-\alpha) = -cos\,\alpha$

$cos\,(270-\alpha) = -sen\,\alpha$

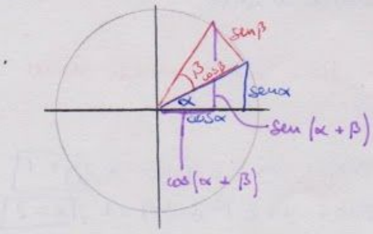
$sen\,(270+\alpha) = -cos\,\alpha$
$cos\,(270+\alpha) = sen\,\alpha$

$sen\,(360-\alpha) = -sen\,\alpha$
$cos\,(360-\alpha) = cos\,\alpha$

$sen\,90 = 1$ $\quad sen\,270 = -1$
$cos\,90 = 0$ $\quad cos\,270 = 0$

$sen\,180 = 0$ $\quad sen\,360 = 0$
$cos\,180 = -1$ $\quad cos\,360 = 1$

– Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos:



$sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$

$cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$

$tan\,(\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$

$sen\,(\alpha-\beta) = sen \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$

$cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$

$tan\,(\alpha-\beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$

AREA - TRIÁNGULO

$l \cdot l \cdot sen\,\alpha$

lado — ángulo que forman

· ÁNGULOS DOBLES:

$sen\,2\alpha = 2 sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha$ $\quad | \quad cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$ $\quad | \quad tan\,2\alpha = \frac{2 tan\,\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

· ÁNGULOS MITAD:

$sen\,\alpha = sen\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2 sen\,\frac{\alpha}{2} \cdot cos\,\frac{\alpha}{2}$

$cos\,\alpha = cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$

$$
\begin{array}{rl}
 & sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 \\
+ & -sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = cos\,\alpha \\
\hline
 & 2cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\,\alpha
\end{array}
$$

$$\boxed{cos\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 \\
- & -sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = cos\,\alpha \\
\hline
 & 2 sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\,\alpha
\end{array}
$$

$$\boxed{sen\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{tan\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS → PRODUCTOS

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

$+\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$ → se hace igual restando

$\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta$

$\alpha+\beta = \hat{A} \rightarrow \alpha = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$

$\alpha-\beta = \hat{B} \rightarrow \beta = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B} &= 2\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \\ \text{sen}\,\hat{A} - \text{sen}\,\hat{B} &= 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \end{aligned}}$$

COSENOS

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

$+\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$$\boxed{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} = 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$-\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$$\boxed{\cos\hat{A} - \cos\hat{B} = -2\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

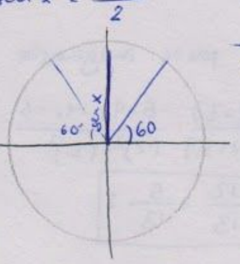
$\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 60^\circ\ ;\ x = 120 + 360^\circ \cdot K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

rad.

$x = \dfrac{\pi}{3}\ \text{rad} + 2\pi \cdot K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad} + 2\pi \cdot K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

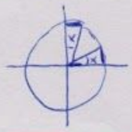


Cuando tienen sen y cos intentamos quedarnos con solo una incognita. Y ya luego buscamos la solución de x.

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ \text{sen}\,x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$

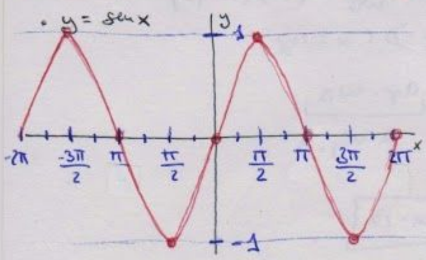
$\text{sen}\,x + \underbrace{\cos(90-x)}_{\text{sen}\,x} = \sqrt{2} \rightarrow 2\,\text{sen}\,x = \sqrt{2}\ ;\ \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ x = 45^\circ + 360^\circ \cdot K$

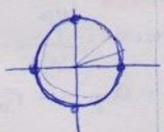
$x = 135^\circ + 360^\circ \cdot K$



DIBUJOS DE LAS FUNCIONES:

• $y = \text{sen}\,x$

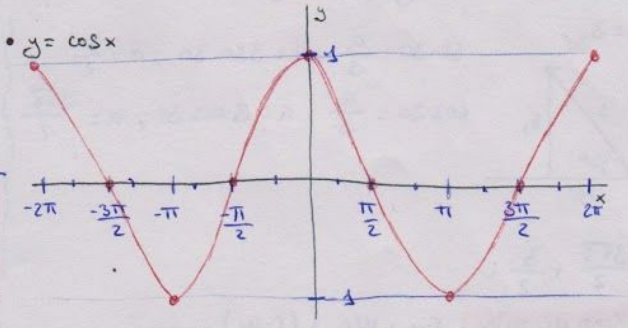




x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

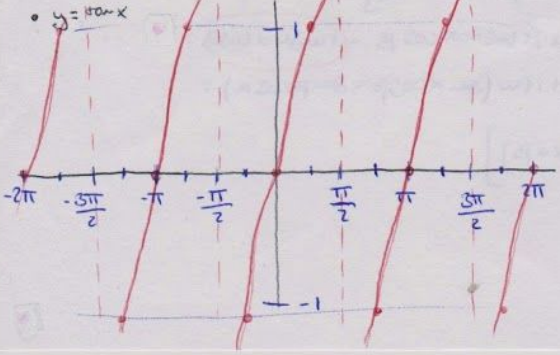
x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

• $y = \cos x$



$\cos x = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

• $y = \tan x$

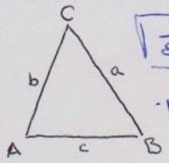


x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
2π	0

→ siempre que el $\cos = 0$ hay una asíntota

siempre que el $\text{sen} = 0$ la $\tan = 0$

- Teorema del seno: para todos los triángulos.



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

- puede haber dos posibilidades

- Teorema del coseno:

$$\boxed{\begin{aligned} &\cdot\ a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &\cdot\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B \\ &\cdot\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}}$$

NÚMEROS COMPLEJOS $i = \sqrt{-1}$ imaginarios puros → cuando $a = 0$ $(\mathbb{C})$

Números que tienen que ver con i → $a + b \cdot i$ = a puede ser 0 y b puede ser 0, así que a también es un número complejo. Todos los reales = complejos.

z = número complejo.

- $\sqrt{-2}$ → $a = 0$
  → $b = \sqrt{2}$

$0 + \sqrt{2} \cdot \underset{i}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-2}$

$x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$ → i, $-i$

$\boxed{i^2 = -1}$

- $z = a + b \cdot i$ → forma binómica
  - b → parte imaginaria
  - a → parte real

$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = -2 - 3i$

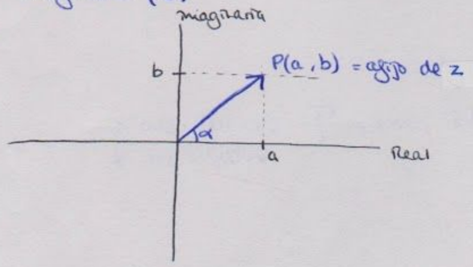
- $z_1 + z_2 = 3 + 2i - 2 - 3i = 1 + 1i = \boxed{1 - i}$
- $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (-2 - 3i) = -6 - 9i - 4i - 6i^2 = -6 - 13i + 6 = \boxed{-13i}$

Para que dos números complejos sean iguales tienen que tener la misma parte imaginaria y real.

- El opuesto es el mismo número cambiado de signo.
- conjugado = número real se queda igual y cambia de signo la parte imaginaria $(\bar{z})$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+2i}{-2-3i} = \dfrac{(3+2i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)} = \dfrac{-6+9i-4i-6}{(-2)^2 - (3i)^2} = \dfrac{5i - 12}{4 - 9i^2} = \dfrac{5i - 12}{4+9} = \boxed{\dfrac{-12}{13} + \dfrac{5}{13}i}$

REPRESENTACIÓN →

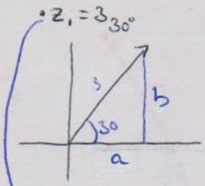


- Módulo de z = longitud del vector = $\sqrt{a^2 + b^2}$ $|z|$

α = argumento de z

- Forma polar = módulo$_{\text{argumento de z}}$

- $z_1 = 3_{30^\circ}$



$\operatorname{sen} 30 = \dfrac{b}{3}$; $b = 3 \operatorname{sen} 30$; $b = \dfrac{3}{2}$

$\cos 30 = \dfrac{a}{3}$; $a = 3\cos 30$; $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

→ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

- División: $\dfrac{r_\alpha}{w_\beta} = r_\alpha \cdot \dfrac{1}{w_\beta} = \left(\dfrac{r}{w}\right)_{(\alpha - \beta)}$

Demostración

$\dfrac{r_\alpha}{w_\beta} = a_\gamma \rightarrow r_\alpha = \underbrace{a_\gamma \cdot w_\beta}_{a \cdot w_{\gamma + \beta}}$

$r = a \cdot w \rightarrow a = \boxed{\dfrac{r}{w}}$

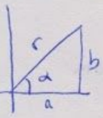
$\gamma + \beta = \alpha \rightarrow \boxed{\gamma = \alpha - \beta}$

- Multiplicación: $r_\alpha \cdot w_\beta = (r \cdot w)_{(\alpha + \beta)}$

- Pasarlo a binómica

→ $\left[(r\cos\alpha) + i(r\operatorname{sen}\alpha)\right] \cdot \left[(w\cos\beta) + i(w\operatorname{sen}\beta)\right] =$ no tiene i.

$r_\alpha \rightarrow (r\cos\alpha) + i(r\operatorname{sen}\alpha)$



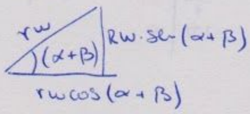
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{r}$; $b = r\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$; $a = r\cos\alpha$

$= wr\cos\alpha\cos\beta + irw\operatorname{sen}\beta\cos\alpha + irw\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - rw\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$

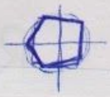
$= rw\left(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right) + irw\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\right) =$

$= rw\left[\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$

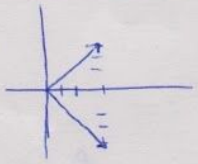


- Potencias: $(r_\alpha)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \dots \cdot r_\alpha}_{n \text{ veces}} = \boxed{r^n_{n\alpha}}$

- raíces: $\sqrt[5]{(r^5_{5\alpha})} = r_{\frac{5\alpha + 360K}{5}} = r_{\alpha + \frac{360}{5}}$ (5 posibilidades)



$1 = 1_0$
$-1 = 1_{180}$ } $\bar{z} = \overline{(r_\alpha)} = r_{-\alpha}$



• $z^3 = 8i = 8_{90°}$

• $r^3 = 8 \rightarrow r = 2$

• $3\alpha = 90°$
- $\alpha = 30°$
- $\alpha = 150°$
- $\alpha = 270°$

Si queremos que tenga módulo 5:
$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot 5$

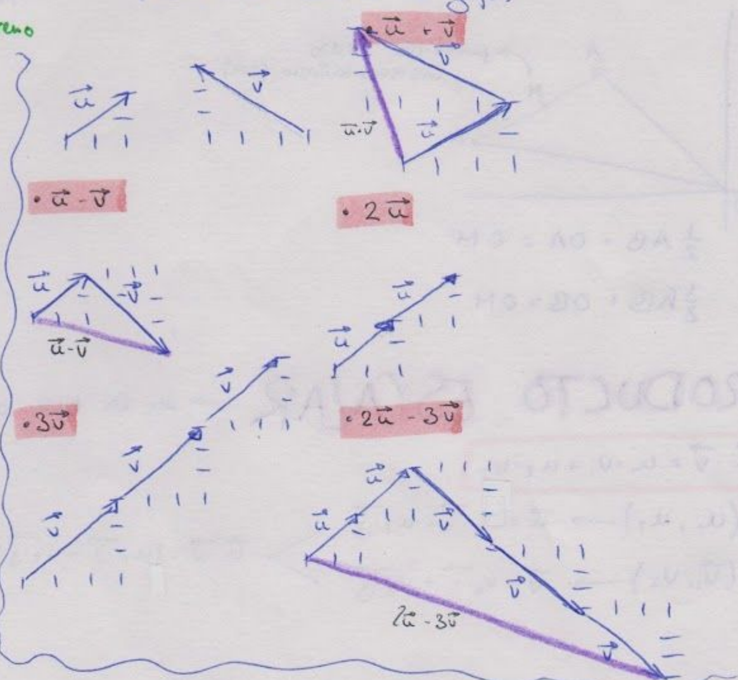
- unitario → solo entre su módulo
  - módulo 1.

|Corrección anterior|

TEMA 4 - VECTORES

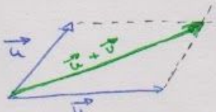
módulo → dirección / sentido / módulo
- recta
- $\leftrightarrow$
- origen ⟶ extremo

puede ser libres o fijos

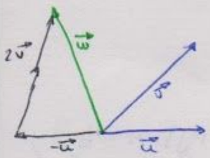


B_0 = base ortonormal

Base: dos vectores linialmente independientes
- dependiente = misma dirección
  - dividimos para buscar la proporcionalidad
- independientes = No se puede hacer una combinación de uno para hallar el otro



Con dos vectores linialmente independientes se puede hallar cualquier vector.



$(w_1, w_2) = a(u_1, u_2) + b(v_1, v_2)$

$\begin{cases} w_1 = a u_1 + b v_1 \\ w_2 = a u_2 + b v_2 \end{cases}$

$\vec{u} = (u_1, u_2)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
$\vec{w} = (w_1, w_2)$

• $\vec{w}(4,1)$
• $\vec{u}(3,0)$
• $\vec{j}(-2,1)$

$\longrightarrow \begin{cases} 4 = a \cdot 3 + b \cdot (-2) \rightarrow 4 + 2 = 3a; \boxed{a = 2} \\ 1 = a \cdot 0 + b \cdot 1 \end{cases}$

$\boxed{1 = b}$

$\boxed{\vec{w} = 3\vec{u} + 1\vec{v}}$

• Módulo y argumento como los números complejos

unitario = módulo 1.

$\vec{r}(5,2) \rightarrow B_2 \{\vec{r}, \vec{u}\} = (1,0)$ (1^a coordenada, 2^a coordenada)

|Vectores equipolentes → vectores iguales|

Perpendicular → cambio las coordenadas de sitio y cambio un número.

$(3,5) \longrightarrow B_1 \{\vec{u}, \vec{v}\} = 3\vec{u} + 5\vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cdot \cos 0$
$= 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$x(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot x)$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \rightarrow$ siempre es mayor que aunque el ángulo fuese diferente el coseno es igual

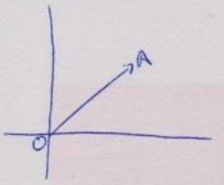
También el producto escalar
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
- lo obligamos a 0.

Para que sean fijos tiene que tener un sistema de referencia

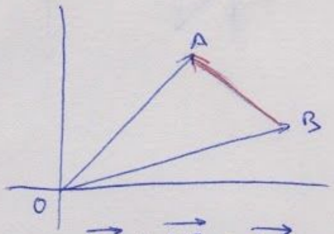
SISTEMA DE REFERENCIA EUCLIDEO

$\hookrightarrow S\{O, (\vec{u}, \vec{j})\}$ = ortonormal
$\vec{u} \rightarrow 1$, $\vec{j} \rightarrow 1$

Vector de posición

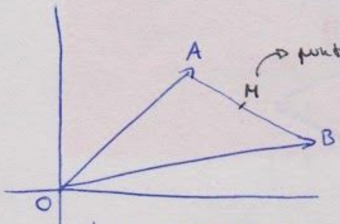


OA = señala dónde está el punto A



$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$



→ punto del medio
Queremos hallarlo (OM)

$\frac{1}{2}AB + OA = OM$

$\frac{1}{2}BA + OB = OM$

PRODUCTO ESCALAR

→ en la base ortonormal

① $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}$

$\vec{u}(u_1, u_2) \longrightarrow \vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}$

$\vec{v}(v_1, v_2) \longrightarrow \vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$

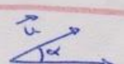
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j})(v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}) = u_1 \cdot v_1 \cdot \underbrace{(i \cdot i)}_{1} + v_1 \cdot v_2 \cdot \underbrace{(i \cdot j)}_{0} + u_2 \cdot v_1 \cdot \underbrace{(j \cdot i)}_{0} + u_2 \cdot v_2 \cdot \underbrace{(j \cdot j)}_{1}$

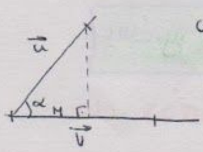
$|i| \cdot |i| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$= v_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot v_2$

② $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}$ → es cero si los dos vectores son perpendiculares.

$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \alpha$





$\cos\alpha = \frac{M}{\vec{u}}$; $M = \cos\alpha \cdot \vec{u}$

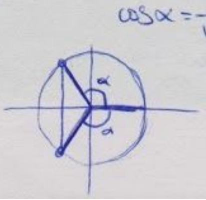
→ si lo multiplicamos por $\vec{v}$ nos da el producto escalar, es más si dividimos el producto escalar entre $\vec{v}$ nos sale la medida M.

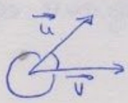
$\vec{u}(-1, 4)$
$\vec{v}(3, -2)$

y se pide α

$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v}$; $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$; $\cos\alpha = \frac{-3-8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$;

$\cos\alpha = \frac{-11}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$; $\alpha = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}\right)$

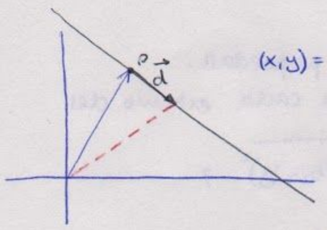




TEMA 5 GEOMETRÍA ANALÍTICA

La ecuación de la recta nos da todos los puntos de la recta

para expresar una recta:
- dos puntos
- un punto y un vector
- punto y pendiente



$(x,y) = P + k\vec{d} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ → $\boxed{\text{ecuación vectorial de la recta}}$

$\begin{cases} x = P_1 + k d_1 \\ y = P_2 + k d_2 \end{cases}$ → $\boxed{\text{ecuaciones paramétricas de la recta}}$

Posición relativa de la recta
↓
paralelas
misma recta
se cortan

$\dfrac{x - P_1}{d_1} = \dfrac{y - P_2}{d_2}$ → $\boxed{\text{ecuación continua}}$

$ax + by + c = 0$ → $\boxed{\text{ecuación general de la recta}}$

↓

$d_2 x - d_1 y + \dots = 0$ (vector que multiplica a "x" y a "y" = $(d_2 - d_1)$)

↓ es ⊥ a la recta.

$y = mx + n$ → $\boxed{\text{ecuación explícita de la recta}}$

↓

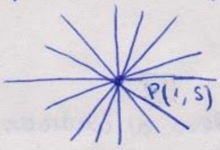
$m = \dfrac{d_2}{d_1} \left(\dfrac{y}{x}\right)$

$3x + 2y - 1 = 0$
$x - y + 2 = 0$
se cortan porque sus $\vec{d}$ no son proporcionales

$2x + y + 2 = 0$
$4x + 2y + 15 = 0$
son proporcionales
esto no
son paralelas.

$y - y_0 = m(x - x_0)$ → $\boxed{\text{ecuación punto pendiente}}$

- Haz de rectas secantes → todas las rectas que pasan por un mismo punto.



$y = m(x-1) + 5$ $\boxed{\text{siempre en función de } m}$

$x = 1$ → porque no tiene pendiente

$\boxed{\text{siempre hay que añadir la vertical}}$

Ángulo de rectas:
→ directores
→ normales
Se puede hacer con los dos.

- Haz de rectas paralelas → todas la misma pendiente. en función de a $\boxed{x + y + a = 0}$

DISTACIA DE UN PUNTO Y UNA RECTA

distancia $(P, r) = \dfrac{|AP_1 + BP_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ → valor absoluto; → módulo del vector director.

$P(P_1, P_2)$ $\quad r: Ax + By + C = 0$

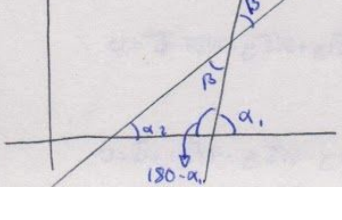
- ejemplo: $P(-2,4)$ a $r: 3x - y + 5 = 0$

$d(P,r) = \dfrac{|3\cdot(-2) - 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{|-6-4+5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

ÁNGULOS

- A partir de pendientes:

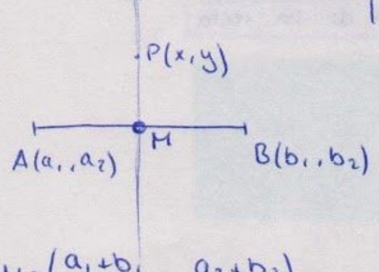
$\beta = 180 - \alpha_2 - (180 - \alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_2$



Simetría axial → semejanza desde una recta

lugar geométrico del plano → puntos que verifican una misma propiedad.

↳ mediatriz → todos los puntos tienen la misma distancia de cada extremo del segmento.



$$|\vec{PA}| = |\vec{PB}| \ ; \ \sqrt{(a_1-x)^2+(a_2-y)^2} = \sqrt{(b_1-x)^2+(b_2-y)^2} \ ;$$

$$; \ (a_1-x)^2+(a_2-y)^2 = (b_1-x)^2+(b_2-y)^2 \ ;$$

$$a_1^2 - 2a_1x + \cancel{x^2} + a_2^2 - 2a_2y + \cancel{y^2} = b_1^2 - 2bx + \cancel{x^2} + b_2^2 - 2b_2y + \cancel{y^2}$$

$$2(a_1-b_1)x + 2(a_2-b_2)y - a_1^2 - a_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$$

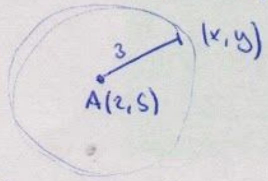
$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

$$2(a_1-b_1)x + 2(a_2-b_2)y - (a_1^2+a_2^2) + (y_1^2+y_2^2) = 0 \ ;$$

$$(a_1-b_1)x + (a_2-b_2)y - \left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right) + \left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right) = 0$$

$\cdot \vec{d} = \vec{u}_{AB}$; $\vec{N} = \vec{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$

✓ se pueden hallar de las dos formas.

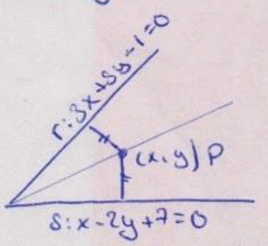


$|\vec{PA}|$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} = 3$$

El lugar geométrico que disten 3 de A.

Bisectriz



$$\left(\frac{|x-2y+7|}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{|3x+5y-1|}{\sqrt{34}}\right)^2$$ → si elevo al cuadrado se quita el valor absoluto.

$$d(P,s) = \frac{|x-2y+7|}{\sqrt{5}} = d(P,r) = \frac{|3x+5y-1|}{\sqrt{34}}$$

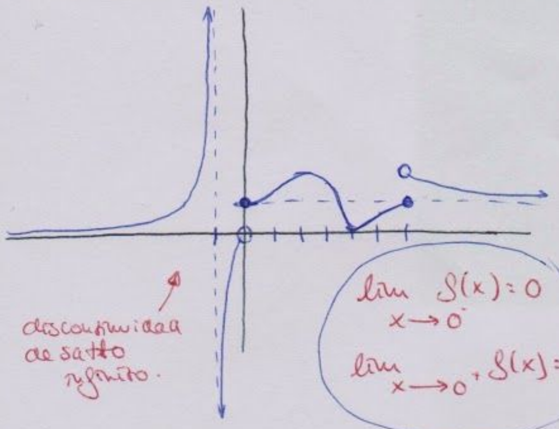
- $\dfrac{x-2y+7}{\sqrt{5}} = \dfrac{3x+5y-1}{\sqrt{34}}$; $\sqrt{34}x - 2\sqrt{34}y + 7\sqrt{34} = 3\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}y - \sqrt{5}$; $\sqrt{34}x - 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{34}y - 5\sqrt{5}y + 7\sqrt{34} + \sqrt{5} = 0$
  $(\sqrt{34}-3\sqrt{5})x + (-2\sqrt{34}-5\sqrt{5})y + 7\sqrt{34} + \sqrt{5} = 0$

- $\dfrac{x-2y+7}{\sqrt{5}} = \dfrac{-3x-5y+1}{\sqrt{34}}$; $\sqrt{34}x - 2\cdot\sqrt{34}y + 7\sqrt{34} = -3\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}y + \sqrt{5}$; $\sqrt{34}x + 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{34}y + 5\sqrt{5}y + 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$
  $(\sqrt{34}+3\sqrt{5})x + (-2\sqrt{34}+5\sqrt{5})y + 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$

- $\dfrac{-x+2y-7}{\sqrt{5}} = \dfrac{-3x-5y+1}{\sqrt{34}}$; $-\sqrt{34}x + 2\sqrt{34}y - 7\sqrt{34} = -3\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}y + \sqrt{5}$; $-\sqrt{34}x + 3\sqrt{5}x + 2\sqrt{34}y + 5\sqrt{5}y - 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$
  $(-\sqrt{34}+3\sqrt{5})x + (2\sqrt{34}+5\sqrt{5})y - 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$

- $\dfrac{-x+2y-7}{\sqrt{5}} = \dfrac{3x+5y-1}{\sqrt{34}}$; $-\sqrt{34}x + 2\sqrt{34}y - 7\sqrt{34} = 3\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}y - \sqrt{5}$; $-\sqrt{34}x - 3\sqrt{5}x + 2\sqrt{34}y - 5\sqrt{5}y - 7\sqrt{34} + \sqrt{5} = 0$
  $(-\sqrt{34}-3\sqrt{5})x + (2\sqrt{34}-5\sqrt{5})y - 7\sqrt{34} + \sqrt{5} = 0$

TEMA 6: FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

↓ discontinuidad de salto finito.

$f(0) = 1$ $\quad f'(0) = \nexists$

$f(2) = 1$ $\quad f'(2) = 0$

$f(6) = 0$ $\quad f'(3) = -1$

$f(-1) = \nexists$ $\quad f'(4) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1^+$

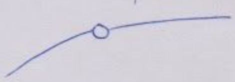
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$

asíntota vertical en $x = -1$

límites laterales. → por la izquierda o por la derecha.

asíntota → es una recta a la que se acerca la función

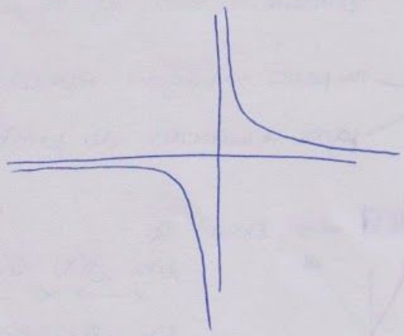


- $y = \frac{1}{x}$

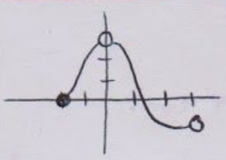
$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0^+$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$



- DOMINIO DE DEFINICIÓN



$[-2, 0) \cup (0, 3)$

- $f(x) \to y = x^2 - 3$
  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$
- $g(x) \to y = \frac{1}{x}$
  $\text{Dom } f(x) = x \in \mathbb{R} - \{0\}$

→ Problemas:
- Denominadores → $x \neq 0$
- Raíces pares: números negativos.
- log: números negativos o ceros.

Funciones:
- polinómicas → $\mathbb{R}$
- denominadores → denominador $\neq 0$
- $y = \frac{3x-2}{x^2-4}$ $\quad \text{Dom}: \mathbb{R} - \{2, -2\}$

$x^2 = 4 \; ; \; x = \pm 2$

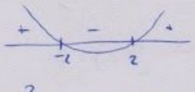
- $y = 3 - \sqrt{x+5}$ $\quad \text{Dom } f(x) = [-5, \infty)$

$x + 5 \geq 0 \; ; \; x \geq -5$

- $y = \sqrt{x^2 - 4}$ $\quad \text{Dom}: (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$x^2 - 4 \geq 0$

$x = \begin{cases} -2 \\ +2 \end{cases}$



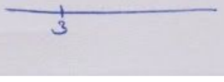
- $y = \log_7 (x+2) - 7x + 49$

$x + 2 > 0 \; ; \; x > -2$ $\qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\text{Dom}: (-2, \infty)$

- $y = x^2 + \sqrt[4]{2x-6} - \frac{2}{x}$ $\quad \text{Dom}: [3, \infty)$

$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \to x \geq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

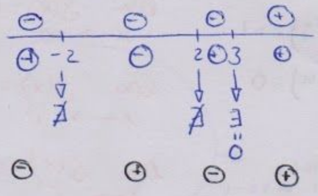


- $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-3}{x^2-4}}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-4} \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$x = 3$

$x^2 - 4 = 0 \; ; \; x = \pm 2$



Dom : $(-2, 2) \cup [3, \infty)$

vertice de parábola:

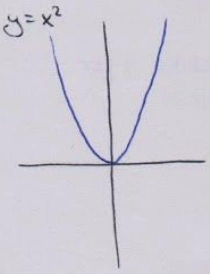
$V_x = \dfrac{-b}{2a}$

$ax^2 + bx + c = y$

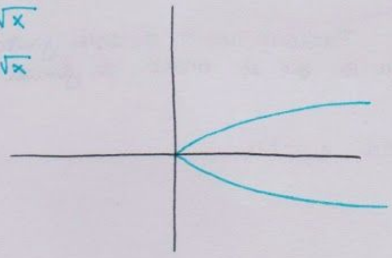
Si $\longrightarrow x^2 + 3x = 0$

Representarlo = hayar el vertice y representar la parábola.

$y = x^2$



$x = y^2$ $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = -\sqrt{x} \end{cases}$



- Racionales
  - asíntota $\longrightarrow$ hayar límites.
  - evitable : cuando algo de lo de arriba se vaya con lo de abajo. $\frac{0}{0}$

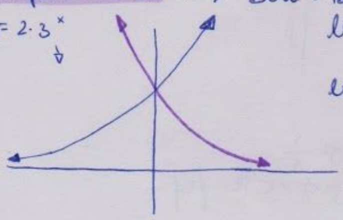
- Radicales
  - impares $\rightarrow$ ninguna restricción
  - pares $\rightarrow$ mitades de parábolas.

- exponenciales $\longrightarrow$ Dom $= \mathbb{R}$

$y = 2 \cdot 3^x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

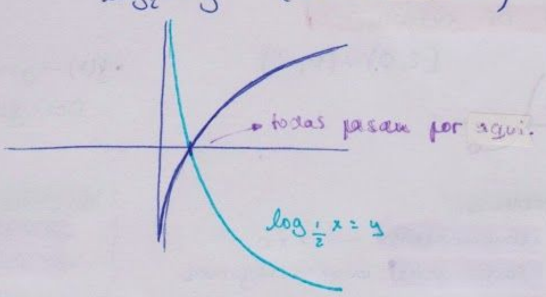
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$



$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

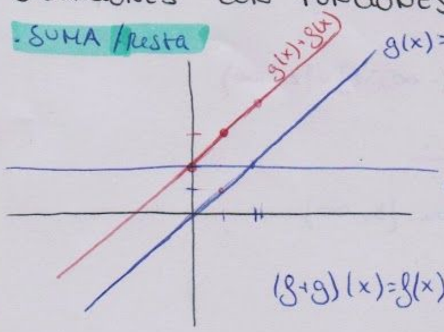
- logarítmicas $\log_a b = c \longrightarrow a^c = b$

$\log_2 x = y$ (asíntota en el 0)



OPERACIONES CON FUNCIONES

- SUMA / Resta



$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2 + x$

- MULTIPLICACIÓN:

$f(x) = 3x$

$g(x) = 2x + 3$

$f \cdot g = 3x(2x^2 + 3)$

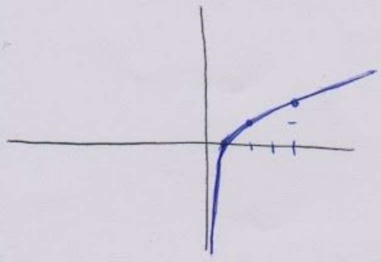
$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = x^2 + 2x$

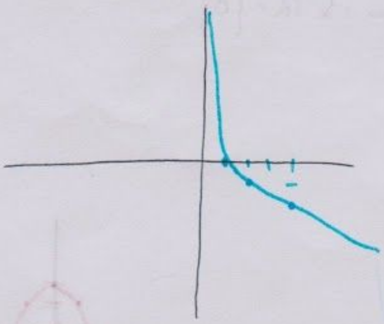
$f \cdot g = \dfrac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$

Dom : $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

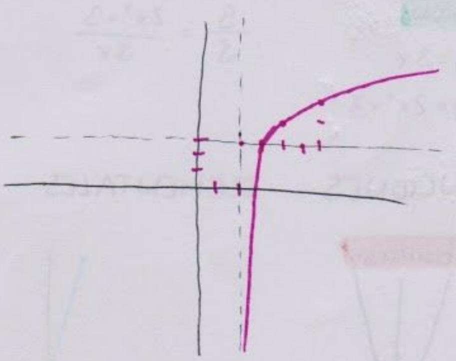
- logarítmicas:



$y = \log_2 x$



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$



$y = \log_2 (x-2) + 3$

LÍMITES

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 3} g(x) = -2$

$\lim_{x \to 3} (f+g)(x) = \lim f(x) + \lim g(x) = 5 - 2 = 3$

Esto es así para operaciones. Tener en cuenta que sea mayor que 0 en raíces o superior a 0 en log.

- $\frac{l}{\pm\infty} = 0$
- $\frac{l}{0} = \pm\infty$
- si $l < 0$; $+\infty^{l} = 0$
- $l^{+\infty} = 0$ si $0 < l < 1$
- $\frac{0}{\pm\infty} = 0$
- $+\infty^{-\infty} = 0$
- $l^{-\infty} = 0$ si $l > 1$
- $l^{-\infty} = \infty$ si $0 < l < 1$

- indeterminación $\to \frac{\infty}{\infty} = ?$

$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$ → esta es más rápido.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$ → esta es más rápido

- Exponenciales → + nº de base
- Polinomiales → + grado. ($\sqrt{x} = x^{1/2}$)
- logarítmicas → base + cerca del uno

} comparación de ∞

- TIPOS:
- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty)^{(0)}$ → no es exactamente un nº.
- $(1)^{(+\infty)}$
- $\frac{(0)}{(0)}$
- $(\pm\infty) \cdot (0)$
- $(0)^{(0)}$
- $(1)^{(-\infty)}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{-x-1}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 - 2x^2 + 1}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$ → este es $+\infty$.

- Radicales cuadráticos:

→ multiplicamos y dividimos por su conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2-3} - \sqrt{3x^2+5x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2-3} - \sqrt{3x^2+5x}) \cdot (\sqrt{x^2-3} + \sqrt{3x^2+5x})}{(\sqrt{x^2-3} + \sqrt{3x^2+5x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3 - 3x^2 - 5x}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{3x^2+5x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{3x^2+5x}} = -\infty$$

$\frac{-2x^2}{x} = -\infty$

Si no sabemos qué hacer → dividimos por x con el grado + grande.

- División

$g(x) = 3x$

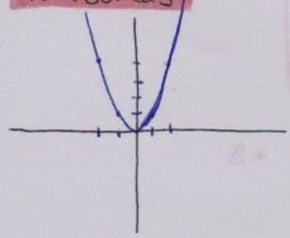
$g(x) = 2x^2+3$

$$\frac{g}{g} = \frac{2x^2+3}{3x}$$

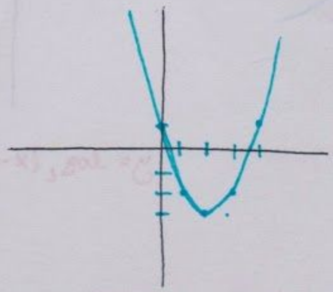
Dom : x $\mathbb{R} - \{0\}$

FUNCIONES ELEMENTALES

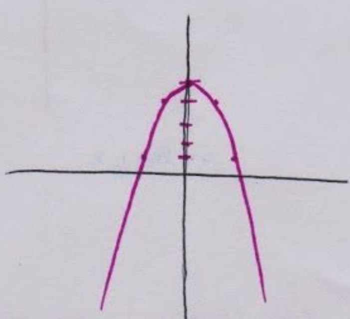
- Parabólicas:



$y = x^2$

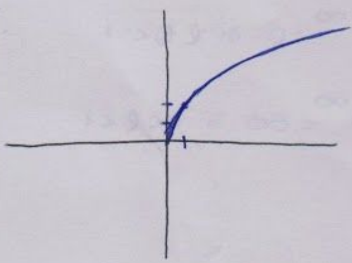


$y = (x-2)^2 - 3$

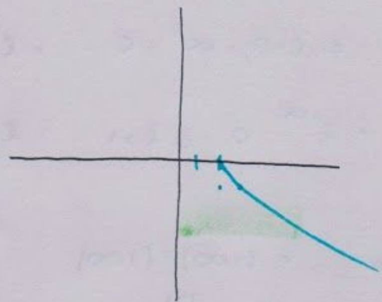


$y = -x^2 + 5$

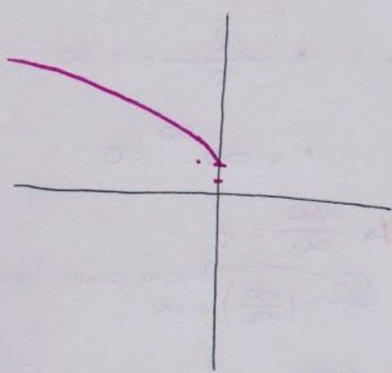
- Radicales:



$y = 2\sqrt{x}$

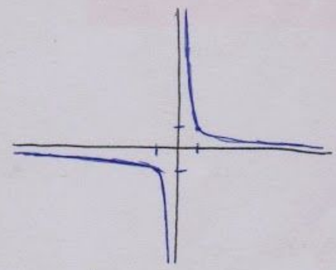


$y = -\sqrt{x-2}$

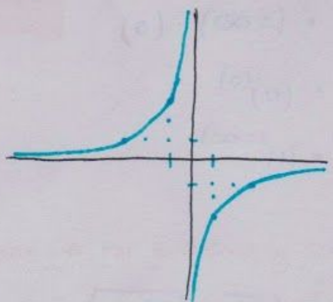


$y = \sqrt{-x} + 2$

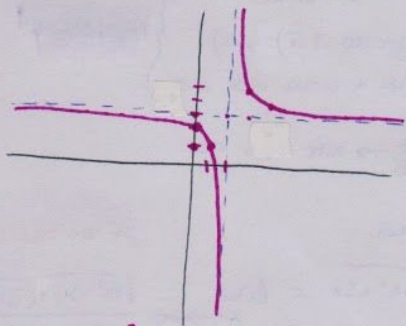
- Proporcionalidad inversa:



$y = \frac{1}{x}$



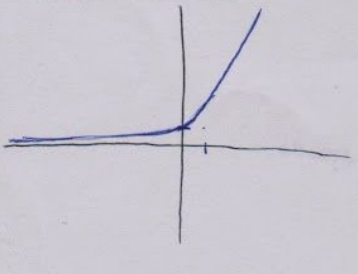
$y = \frac{-3}{x}$



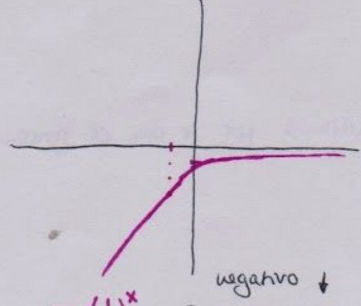
$y = \frac{2}{x-2} + 3$

- Exponenciales: todas cortan en 1 o -1

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



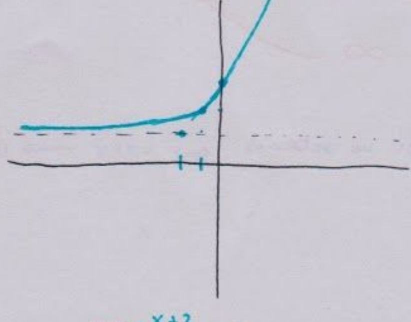
$y = 2^x$



$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

negativo ↓

Fracciones : ←



$y = 2^{x+2} + 1$

Limites de tipo e

Indeterminación $\longrightarrow 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e \quad \text{si } \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{\frac{2n^2+7n+5}{n+4}} = 1^{\infty}$ (indeterminación) $= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{x+2}{3}}\right]^{\frac{3}{x+2}\cdot\frac{2x^2+7x+5}{x+4}} =$

$\frac{n+5}{n+2} = \frac{x+2}{x+2}+\frac{3}{x+2}$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+2}\cdot\frac{2x^3+7x+5}{x+4}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+\cdots}{x^2+\cdots}} = e^{6}$$

Limite de función en un punto: si los dos limites son iguales se pone en el mismo lim.

- limites laterales: $g(x)=\frac{1}{x}$
  - $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

- $\frac{0}{0}$
  - $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{0}{0}$ (indeterminación) $= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} =$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x+3)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$g(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$$

- Cont $g(x) = \mathbb{R}-\{-1,1\}$

- $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+3)}{(x-1)(x+1)} = 4$$

- $x=-1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

$g(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+1}$ si $x\neq 1$

$g(x)=x+3$ si $x\neq 1$ y $x\neq -1$

↳ al final es una recta.

- lim. laterales iguales
  ‖
  discontinuidad evitable

- lim. laterales diferentes.
  ‖
  asíntotas
  $(+\infty/-\infty)$

COMPOSICIONES

$f(x) = 3x^2 \quad g(x) = 2x+1$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

$2 \longrightarrow 12 \longrightarrow 25 \quad [6x^2+1 = 6\cdot 2^2+1 = 25]$

↳ cojo este para ponerlo en $g(x)$

como $f \rightarrow$ dom: $\mathbb{R}$
$g \rightarrow$ no tiene problemas.

$(g\circ f) = g(f(x)) = g(3x^2) = 2\cdot(3x^2)+1 = 6x^2+1$

$\cdot (f\circ g) = f(g(x)) = f(2x+1) = 3(2x+1)^2 = 3(4x^2+1+4x) = 12x^2+12x+3$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{x}$

Para el dominio total $\longrightarrow$ intersecc. dom $f(x)$, dom $g(f(x))$

$(g\circ f) : g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} \longrightarrow x \geq 0 \; ; \; x \neq 0 \longrightarrow x > 0$

Dom $g(f(x)) = (0, \infty)$

↳ dom. $\longrightarrow$ 0 no porque en $f(x)$ no.

$f(x) = \frac{2}{x-3} \quad g(x) = \frac{1}{x-2}$

$g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x-3}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x-3}-2} = \frac{1}{\frac{2-2x+6}{x-3}} = \frac{x-3}{8-2x}$ Dom: $\mathbb{R} - \{3, 4\}$

F. de dom. / 3

INVERSA

$\longrightarrow$ son iguales respecto $y=x$

$x+0 = x \longrightarrow x+(-x) = 0$

$x\cdot 1 = x \longrightarrow x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$f(x) = x \longrightarrow f(x)\circ f^{-1}(x) = x$

Hayamos la función inversa cambiando la y por la x.

$y = 2^x \rightarrow x = 2^y \; ; \; y = \log_2 x$

Para que una función tenga inversa tiene que haber un único valor de x para cada valor de y.

$f(x) = 2^x \qquad f^{-1}(x) = \log_2 x \qquad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$

$(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$

$2^{\log_2 x} = y \; ; \; \log_2 y = \log_2 x \Rightarrow y = x$

$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x$

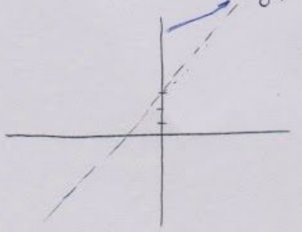
ASÍNTOTAS

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-3} = \lim_{x\to\infty} x+3+\frac{9}{x-3}$$

esto en el infinito vale 0.

El resultado tiene que ser una recta así que el polinomio de arriba tiene que tener un grado mas.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x-3 \\ \hline -x^2+3x & x+3 \\ \quad 3x & \\ \quad -3x+9 & \\ \hline \qquad 9 & \end{array}$$



Si el resultado del límite es cuando nos fijamos en si hay una asíntota oblicua.

- asíntotas horizontales → mirar en el infinito. Ej → $y=0$ es por arriba si te dan valores algo + y viceversa.

$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+x}$ AH → $y=1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2+x} - 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3-x^2-x}{x^2+x} = 0^-$$

porque es más fácil verlo en el 0.

- asíntotas verticales → dom.
- asíntotas oblicuas → cuando no tiene horizontales.
  - → hacemos la división cuando es $\frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$
  - → $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\quad y = mx+n \to y = x+1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1$$

$n \to \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

Posición → $\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx+n)$ → le restamos la asíntota.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1} \to 0^+$$