RESUMENES-COMPLETOS-MATEMATICAS-...

aliciaaltabas

Matemáticas II

2º Bachillerato

Estudios España

TEMA 1: Límites de Funciones

1: Funciones elementales

- Función polinómica: Dom $f(x) = \mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$
  - Funciones constantes: recta paralela al eje de abscisas.
  - Funciones 1º grado: $f(x) = ax+b$
    - si $a>0$ es creciente
    - si $a<0$ es decreciente
    - si $a=0$ es constante
    - a es la pendiente
    - b la ordenada en el origen
    - Dos $// = m$
    - $\perp = -\frac{1}{m}$ o $m' \cdot m = -1$
  - Funciones 2º grado: $f(x) = ax^2+bx+c$, parabola del vértice $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$
    - si $a>0$ es concava
    - si $a<0$ es convexa
    - si no tiene solución no corta al eje OX
    - Corta al eje de coordenadas en $(0,c)$
- Función racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
- Funciones irracionales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, Dom $f(x) = \begin{cases} n \text{ par}: & x \geq 0 \\ n \text{ impar}: & \mathbb{R} \end{cases}$
- Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$
- Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow y = a^x$, Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x>0\}$

PROPIEDADES LOGARÍTMOS
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$
- Cambio base: $\frac{\log_c B}{\log_c a}$

2.- Límites de funciones

- Límite en un pto:

$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x \in \text{Dom} f,\; 0 < |x-a| < \delta : |f(x)-b| < \varepsilon$

- Límites laterales:

$\left(\frac{1}{0}\right)$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = b^+$ si se cumple $0 < x-a < \delta$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = b^-$ si se cumple $0 < -(x-a) < \delta$

$\exists \lim_{x \to a} f(x) \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \lim_{x \to a^+} = \lim_{x \to a^-} \end{cases}$

- Límites en el infinito

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 \mid \forall x \in \text{Dom} f,\; |x| > R : |f(x) - b| < 3$

- Límites infinitos

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in \text{Dom} f,\; 0 < |x-a| < \delta : |f(x)| > M$

- Límites infinitos en el infinito

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists R > 0 \mid \forall x \in \text{Dom} f,\; |x| > R : |f(x)| > M$

- Propiedades (pág 14)

$\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$, $a > 1 \begin{cases} a^{\infty} = \infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$ $a < 1 \begin{cases} a^{\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$, $\infty^{\infty} = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$

3- Indeterminaciones

$\boxed{\frac{0}{0}}$: Operando y factorizando, Regla L'hopital

Ejem: $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\underset{IND}{\frac{0}{0}}$; $\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x-3)}=\frac{1}{-6}$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$: dividir numerador y denominador por la x elevado a mayor exponente.

Ejem: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x3}}=\underset{IND}{\frac{\infty}{\infty}}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{x3}{x^4}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{0\cdot\infty}$ Operar y factorizar, Regla L'hopital

Ejem: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-3}\cdot\sqrt{x^2-1}\right)=\underset{IND}{0\cdot\infty}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-3}=\underset{IND}{\frac{\infty}{\infty}}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-3}=0$ porque gr$(\sqrt{x^2-1})<$ gr(x^2-3)

$\boxed{\infty-\infty}$ Operando /conjugado.

Ejem: $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2+x})=\underset{IND}{\infty-\infty}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{4x^2+x})(x-\sqrt{4x^2+x})}{x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{x-\sqrt{4x^2+x}}=\underset{IND}{\frac{\infty}{\infty}}=-\infty$ pq. gr$(-2x^2-x)>$ gr(dn

$\boxed{1^{\infty}}$ Formula: $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}(g(x)\cdot[f(x)-1])}}$

4- Comparación de infinitos → $a^x >> x^a >> \sqrt{a} >> \log a$

Definición: $f(x)$ es infinito si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

Sean $f(x)$, $g(x)$ dos infinitésimos en $x=a$

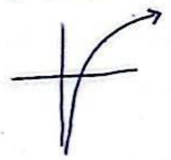
1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ → f es de orden superior $f>>g$

2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ → g es de orden superior $g>>f$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k\in\mathbb{R}$ → f y g son del mismo orden $x=f$

4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ → f y g son equivalentes.

* ln x



$\lim_{x\to 0^-} \nexists$

TABLA INFINITÉSIMOS

$\sin x \approx x$ arcsen $x\approx x$

$1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}$

$\ln(1+x)\approx x$

$\tan x\approx x$

$e^x-1\approx x$

5- infinitésimos ↑ Para cocientes

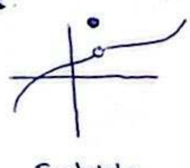
Tabla de infinitésimos en la Ficha2

- En el límite podemos sustituir infinitésimos por sus equivalentes (siempre que sean equivalentes), y productos !!

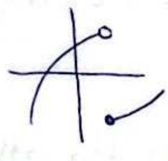
6- Continuidad de una función

f es continua en $x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow \begin{cases}\exists f(a)\\ \exists \lim_{x\to a} f(x)\\ f(a)=\lim_{x\to a} f(x)\end{cases}$ — $\begin{cases}\exists \lim_{x\to a^+} f(x)\\ \exists \lim_{x\to a^-} f(x)\\ \lim_{x\to a^-}=\lim_{x\to a^+} f(x)\end{cases}$

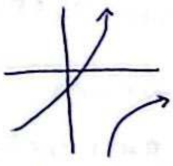
Tipos:



Evitable



Inevitable de salto finito



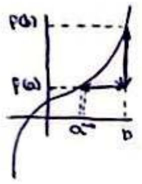
Inevitable de salto infinito.

Ejemplos ejercicios ●

TEMA 2: Derivadas

1.- Derivada de una función en un punto

Definición: Se llama derivada de f en $x=a$ al límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y se denota como $f'(a)$ o $Df(a)$



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to$ $\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$

$\lim_{h\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = f'(a)$

Observaciones:

1) Derivada laterales:

$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$f'(a^-) = \lim_{h\to a^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\to \exists f'(a) \begin{cases} \exists f'(a^-) \\ \exists f'(a^+) \\ f'(a^-) = f'(a^+) \end{cases}$

2) Derivabilidad y continuidad:

f derivable en $x=a \to f$ continua en $x=a$

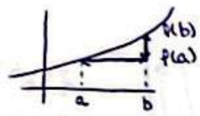
f continua en $x=a \not\to f$ derivable en $x=a$

Derivable $\lim_{x\to 0} f'(x) \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \\ \lim_{x\to 0^-} \end{cases}$

con $\underline{h}$

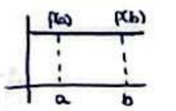
con $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3) f creciente:



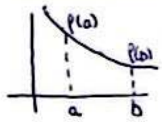
$f'(a) > 0$

f constante:



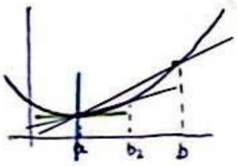
$f'(a) = 0$

f decreciente:



$f'(a) < 0$

4) $f'(a) = m$ pendiente de la recta tangente a f en $x=a$



• r tg en $x=a$: $\begin{cases} P(a, f(a)) \\ m = f'(a) \end{cases}$ Ec. pendiente: $(y - f(a)) = m(x-a)$

• r normal en $x=a$: $\begin{cases} P(a, f(a)) \\ m' = \frac{1}{m} \end{cases}$ $(m \cdot m' = -1)$ Ec normal: $(y - f(a)) = \frac{1}{f'(a)}(x-a)$

$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Ejemplos ● , TABLA DERIVADAS

2.1: Derivada logarítmica

Ejem: $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$ ¿$f'(x)$?

1) Tomar logaritmos: $\ln f(x) = \ln (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$

2) Propiedades log: $\ln f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln(x^2+1)$

3) Derivar: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln(x^2+1) + \operatorname{sen} x \frac{2x}{x^2+1}$

4) Despejar $f(x)$: $f'(x) = f(x) \cdot [\cos \ln(x^2+1) + \operatorname{sen} x \frac{2x}{x^2+1}]$

$f'(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x} \cdot [\cos \ln(x^2+1) + \operatorname{sen} x \frac{2x}{x^2+1}]$

2.2: Derivación implícita

Ejem: $\operatorname{sen}(x+y) = y^2 \cos x$ ¿y'?

1) Derivar: $\cos(x+y) \cdot (1+y') = 2y y' \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot y^2$

2) Despejar: $\cos(x+y) + y' \cos(x+y) = 2yy' \cos x - y^2 \operatorname{sen} x$

$y' \cos(x+y) - 2yy' \cos x = -y^2 \operatorname{sen} x - \cos(x+y)$

$y' = \frac{-y^2 \operatorname{sen} x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y \cos x}$

ojo: $y = f(x)$!!

TEMA 3: Aplicaciones de las derivadas

1.- Regla de L'hopital

Sean dos funciones f y g tales que $\lim_{x\to u} f(x)=0$ y $\lim_{x\to u} g(x)=0$

existe $\lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \exists \lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}$ y si tiene:

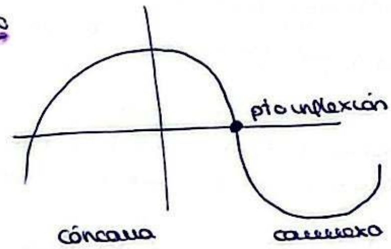
$$\boxed{\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Sirve para indeterminaciones: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty\cdot\infty, 0^0, \infty^0$

* donde u: $\{a\in\mathbb{R}, a^+, a^-, \pm\infty\}$
* idem para: $\lim_{x\to u} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to u} g(x)=\infty$

* Para ind 0^0 o ∞^0: $\ln A = \ln \lim_{x\to 0} f(x)$

2.- Extremos relativos: crecimiento y decrecimiento



1) f derivable en x=a

$f'(a)>0 \to$ f creciente en x=a

$f'(a)<0 \to$ f decreciente en x=a

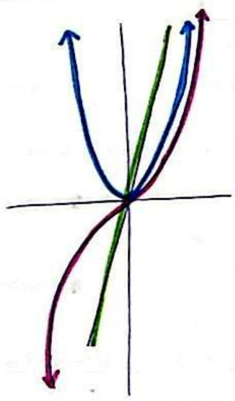
$f'(a)=0 \to$ candidato a max y min

2) f' derivable en x=a

$f''(a)>0 \to$ f convexa en x=a $\cup$

$f''(a)<0 \to$ f cóncava en x=a $\cap$

$f''(a)=0 \to$ x=a candidato a pto inflexión



$f(x^3)$

$f'(x)=36$

$f''(x)=6x$

$f'''(x)=6$

$x\in(-\infty,0)$ $f(x)<0$ dec $f'(x)>0$

$x\in(0,+\infty)$ $f(x)>0$ $f'(x)>0$ crec

2.1) Extremos y pto inflexión

Si $f'(a)=0$

1) $f''(a)>0 \to x=a$ hay un mínimo relativo
2) $f''(a)<0 \to x=a$ hay un máximo relativo
3) $f''(a)=0 \to x=a$ candidato pto inflexión

Si $f''(a)\neq 0$
- $f'''(b)>0$ de $\cap\cup$
- $f'''(b)<0$ de $\cup\cap$
- $f'''(b)\neq 0$ •

• En general:

1º Derivada no nula:

1) Orden par (ultima =0, impar), extremo relativo
2) Orden impar (ultima =0, par), pto inflexión

1) $f'(x)=3x^2$

$\to_{par}$ 2) $f''(x)=6x$ ← ultima no nula par entonces pto inflex

3) $f'''(x)=6$

• El pto de inflexión anula la 2º derivada y cambio de curvatura además cumple que $f'''(b)\neq 0$.

• Los ptos mínimos o máximos anulan la 1º derivada.

3: Problemas de optimización

CASO 1: ejemplo: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, max, min en $[-1,1]$

1. Extremos relativos:

- Dom f: $[-1,1]$
- $f'(x) = 6x^2 + 6x$
- $f'(x) = 0 \iff 6x^2 + 6x = 0 \to 6x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

	−1		0		1
$(x+1)$		+		+	
$6x$		−		+	
$f'(x)$		−		+	
$f(x)$		↘		↗	

- $f''(x) = 12x + 6$
- $f''(0) = 6 > 0 \to x = 0$ es mínimo relativo.

2. Extremos absolutos:

- Como es un intervalo cerrado se puede: $f(-1) = 0$
  $f(0) = -1 \leftarrow$ mínimo absoluto.
  $f(1) = 4$
- Resto de casos:

$\lim_{x \to 1} = 4$
$\to$ -1 es menor que ambos por lo que será mínimo absoluto.
$\lim_{x \to -1} = 0$

CASO 2:

$\to$ Rectangulo $b \cdot h$
$\to$ Área circulo πr^2

1. Función a optimizar: $S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h$

2. Información: $V = 125\ m^3$

$\pi r^2 h = 125$

$h = \frac{125}{r^2 \pi}$

$\downarrow$

$S(r) = \pi r^2 + 2\cancel{\pi} r \frac{125}{\cancel{\pi} r^2}$

$S(r) = \pi r^2 + \frac{250}{r}$

3. Mínimo?

$S'(r) = 2\pi r - \frac{250}{r^2}$

$S'(r) = 0 \iff 2\pi r - \frac{250}{r^2} = 0$, $2\pi r = \frac{250}{r^2} \to r^3 = \frac{250}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 3'41\,m$

4. Máx o min

$S''(r) = 2\pi - 250(-2)\frac{1}{r^3} = 2\pi + \frac{1}{r^3}$

$S''(3'41) = 2\pi + \frac{1}{3'41^3} > 0 \to r = 3'41$ mínimo relativo

5. Absoluto:

Dom $f(x) = (0, +\infty)$

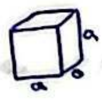
$\lim_{x \to 0} \pi r^2 + \frac{250}{r} = +\infty$
$= r = 3'41$ es un mínimo absoluto.
$\lim_{x \to \infty} \pi r^2 + \frac{250}{r} = +\infty$

6. Solución: $r = 3{,}41\,m$ $h = \frac{125}{\pi \cdot 3'41^2} \simeq 3'42\,m$

Formulas a saber

Cono: • Area: $\pi r g + \pi r^2$
• Volumen: $\frac{\pi r^2 h}{3}$

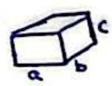
Cubo: • Area: $6a$
• Volumen: a^3



Circulo:
• Area: πr^2
• Perimetro: $2\pi r$

Cilindro: • Área: $2\pi r(r+h)$
• Volumen: $\pi r^2 \cdot h$

Paralelepipedo:
• Area: $2(ab + ac + bc)$
• Volumen: abc



Triangulo:
• Area: $\frac{b \cdot h}{2}$
• Perimetro: suma de los 3 lados

Scanned with CamScanner

TEMA 4: Representación de funciones

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

1- Dom f: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

f continua en $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

2- Puntos de Corte:

Eje x: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2x^3}{x^2-4} \end{cases} \rightarrow \dfrac{2x^3}{x^2-4} = 0 \rightarrow x = 0 \quad P(0,0)$

Eje y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2x^3}{x^2-4} \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{2\cdot 0}{0-4} = 0 \quad P(0,0)$

3- Simetría

PAR: cuando $f(x) = f(-x)$

IMPAR: cuando $f(x) = -f(-x)$

$f(-x) = \dfrac{-2x^3}{x^2-4} = -\dfrac{2x^3}{x^2-4} \rightarrow$ Simetría impar, la f(x) presenta S.I.

4- Asíntotas

$\boxed{A.V}$ rectas $x = k$ donde k son los ptos problemáticos.

$x = 2 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3}{x^2-4} = \dfrac{16}{0} = \underset{\text{INF}}{\infty} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{cases} \rightarrow$ Asíntota V en $x = 2$

$x = -2 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^3}{x^2-4} = \dfrac{-16}{0} = \underset{\text{INF}}{\infty} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \infty \end{cases} \rightarrow$ Asíntota V en $x = -2$

$\boxed{A.H}$ rectas $y = k$ donde $k = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x^2-4} = +\infty$ / $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2-4} = +\infty \rightarrow$ No hay asíntotas horizontales.

$\boxed{A.O}$ rectas $y = mx + n$ donde:

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ / $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) = 0 \rightarrow$ Asíntota O en $y = 2x$

5- Crecimiento y decrecimiento

$f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-4) - 2x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2x^4 - 24x^2}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

$(x^2-4)^2$	+	+	+	+	+	+
(x^2-12)	+	−	−	−	−	+
$2x^2$	+	+	+	+	+	+
	$-\sqrt{12}$	-2	0	2	$\sqrt{12}$	
$f'(x)$	+	−	−	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↘	↗

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-12) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{12}$

f creciente en $x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

f decreciente en $x \in (-\sqrt{12},-2)(-2,2)(2,\sqrt{12})$

6- mínimos y máximos / curvatura

$4x(x^2-4)$

$f''(x) = \dfrac{(4x(x^2-12) + 2x(2x^2))(x^2-4)^2 - (2(x^2-4)(2x))(2x^2(x^2-12))}{(x^2-4)^4} = \dfrac{((8x^3-48x)(x^2-4)^2) - ((4x^3-16x)(2x^4-24x^2))}{(x^2-4)^4} =$

$= \dfrac{8x^5 - 48x^3 - 32x^3 + 192x - 8x^5 + 96x^3}{(x^2-4)^3} = \dfrac{16x^3 + 192x}{(x^2-4)^3} = \dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$

$f(\sqrt{12}) = \dfrac{(16\sqrt{12})(12+6)}{(12-4)^3} = 1'94 \rightarrow f(\sqrt{12}) > 0$

hay min en $x = \sqrt{12}$

$f(-\sqrt{12}) = < 0 \rightarrow$ hay max relativo en $x = -\sqrt{12}$

7- Representación

TEMA 5: Primitiva de una función

Dada una función f, ¿$\exists F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

Ejemplo:

$f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2$
$F_2(x) = x^2 + 6$

$f(x) = 2x^2 + x \rightarrow F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7$

Definición: Dada una función f, a la función F tal que $F' = f$ se le llama primitiva de f, dada una función f, al conjunto de todas sus primitivas:

$\{F + C / C \in \mathbb{R}, F' = f\}$ se le llama integral indefinida de f.

Notación: $\int f(x)dx = F(x) + C$ tq $F'(x) = f(x)$

Reglas de cálculo:
1) $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
2) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

1. Integrales inmediatas

TIPO POTENCIAL

$\int 0\, dx = C$

$\int k\, dx = kx + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int f'(x) \cdot f^n(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$

TIPO LOGARITHICA / EXPONENCIAL

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} + C$

$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

VALOR ABSOLUTO

$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln|f(x)| + C$

TIPO SENO / COSENO

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x)\, dx = -\cos f(x) + C$

$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \operatorname{sen} f(x) + C$

TIPO ARCTAG / ARCSENO

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctag} x + C = -\operatorname{arcotag} x + C$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$

$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctag} f(x) + C$

$\int \frac{f'(x)}{a^2 + (f(x))^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctag} \frac{f(x)}{a} + C$

TIPO TAG / COTAG

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \int (1 + tg^2 x)\, dx = \operatorname{tag} x + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\, dx = \operatorname{cotag} x + C$

} Las compuestas se multiplican por la derivada.

2. Integrales por partes

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$u \xrightarrow{\text{derivar}} du$

$dv \xrightarrow{\text{integrar}} v$

inversas, trigonométricas

L I A T E

logaritmo, algebráicas, exponenciales

derivar → integra

3.- Integrales racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

- **Caso 2**: $gr\,P(x) < gr\,Q(x) \rightarrow$ tiene raíces simples

ejemplo: $\int \frac{6}{x^2-1}\,dx = 6\int \frac{1}{x^2-1}\,dx \underset{\uparrow}{=} 6\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx \underset{\downarrow}{=} 6\left[\int \frac{-1/2}{(x+1)}\,dx + \int \frac{1/2}{(x-1)}\,dx\right] = 6\left[\frac{1}{2}\ln|(x+1)| + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right] + C$

1.º factorizar denominador

2.º transformar el integrando.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \quad \begin{cases} 1 = A(x-1)+B(x+1) \\ 1 = Ax - A + Bx + B \end{cases}$$

$gr\,0 \rightarrow 0$; $-A+B = 1$

$gr\,1 \rightarrow 1$; $A(x) + B(x) = 0$ $\Big\rangle$ $A = -1/2$, $B = 1/2$

- **Caso 2**: $gr\,P(x) < gr\,Q(x) \rightarrow$ tiene raíces múltiples

ejemplo: $\int \frac{3x^2+4x+5}{x^3-3x+2}\,dx \overset{1^{\circ}}{=} \int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x+2)}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int \frac{1}{(x+2)}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)}\,dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x+2| + 2\ln|x+2| - \frac{4}{(x-1)} + C$

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow 3x^2+4x+5 = Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx-2B+Cx+2C \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = A+B \\ 4 = -2A+B+C \\ 5 = A-2B+2C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1 \\ B=2 \\ C=4 \end{array}$$

- **Caso 1**: $gr\,P(x) \geq gr\,Q(x) \rightarrow$ División polinomios.

- **Caso 3**: denominador gr 2 sin raíces reales $\rightarrow$ (ln / arctag) (Pag 130 ej resuelto)

ejemplo: $\int \frac{2x+1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \ln|x^2+9| + \int \frac{1}{9(\frac{x^2}{9}+1)}\,dx = \ln|x^2+9| + \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx =$

$= \ln|x^2+9| + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctag}\,\frac{x}{3} + C$

4.- Cambios de variable para integrar trigonométricas.

PRODUCTOS:

- Hay 1 exponente impar $\rightarrow$ cambio la de exponente par
- Hay 2 exponentes impares $\rightarrow$ cambio la de mayor exponente
- No hay exponente impar $\rightarrow$ $\mathrm{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ / $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

COCIENTES:

- Hay 1 exponente impar $\rightarrow$ cambio la de exponente par
- Hay 2 exponentes impares $\rightarrow$ cambio la del denominador.

ejemplos:

- $\int \mathrm{sen}^3 x \cdot \cos x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\mathrm{sen}^4 x}{4} + C$

  $\mathrm{sen}\,x = t$

  $\cos x = dt$

- $\int \mathrm{tg}\,x \cdot \sec^2 x\,dx = \int \mathrm{tag}\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x}\,dx = -\int \frac{-1}{t^3}\,dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

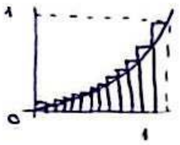
  $\cos x = t$

  $-\mathrm{sen}\,x = dt$

TEMA 6: Integral definida

Objetivos: Integrar para el cálculo de áreas encerradas bajo una curva.

Ejemplo: $f(x) = x^2$



$[\,]\updownarrow f\left(\frac{i}{n}\right)$ donde $i = 1 \dots n$

$\Uparrow$ Partición n sub-intervalos

Área total: $\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} + \dots \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 \dots n^2) =$ (pág 148) $= \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3}$

En el límite $\Rightarrow$ Área total $= \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

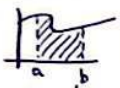
$\updownarrow$

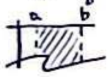
$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

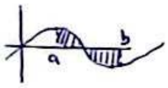
Definición: $f(x)$ encierra un área en el intervalo $[a,b]$, partición de $[a,b]$ en n-subintervalos de $\frac{b-a}{n}$ longitud y extremos en $a = x = 0, x_1, x_2 \dots x_n = b$, se toma pto c_i de cada intervalo $c_i \in (x_{i-1}; x_i) \Rightarrow$ Área: $\lim_{x \to \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \int_a^b f(x)\,dx$

Regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ donde F es cualquier primitiva de $f(x)$

Observaciones:

$f(x) \geq 0$  $\int_a^b f(x)\,dx =$ área limitada por f en $[a,b]$

$f(x) \leq 0$  $\int_a^b f(x)\,dx = -$ área limitada por f en $[a,b]$

$f(x)$ cambia de signo  $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$

Propiedades:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5) $\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

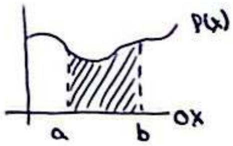
6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

7) $f \geq g \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

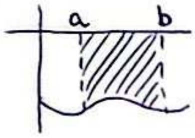
8) $m \leq f \leq M \rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

9) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

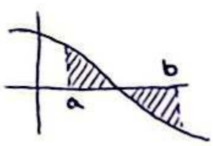
Cálculo de áreas: CASO 1 área encerrada entre $f(x)$ y OX



$A = \int_a^b f(x)\,dx$



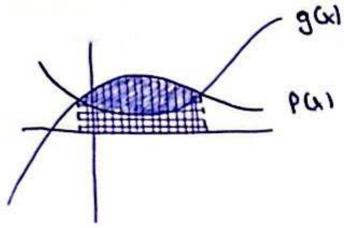
$A = -\int_a^b f(x)\,dx$



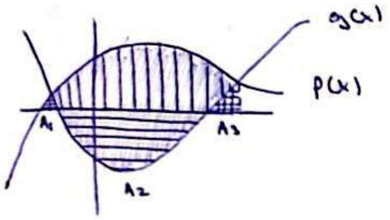
$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

- Ptos corte eje x
- Signo de la función en el intervalo
- Cálculo integral definida.

Cálculo de Áreas: CASO 2: área comprendida entre dos curvas.



Área: $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$



$-\int_a^b g(x)\, dx = -A_1 + A_2 - A_3$

Área: $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

1) Puntos de Corte
2) $f > g$ ó $g > f$ (quien está por arriba) en cada intervalo
3) Cálculo con la integral definida.

{ en ambas ecuaciones se pone una $x = ?$, siempre que ? esté en el intervalo, y se valora

Ej: $f(?) = 0$ y $f(?) = 3$
↓
Por encima.

TEMA 7: Matrices

1. Matrices

Matriz: caja de nº ordenados en filas y en columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ (dimensión)}$$

$a_{ij} \rightarrow$ elemento de la matriz
- $\rightarrow$ columna $1 \leq j \leq n$
- $\rightarrow$ filas $1 \leq i \leq m$

Notación: $A_{m \times n} = (a_{ij})$

- Matrices iguales < mismo dimensión / mismos elementos

  $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ 1 \leq i \leq m \ / \ 1 \leq j \leq n$
- Matrices traspuestas: $B = A^t \Leftrightarrow b_{ji} = a_{ij} \rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrices rectangulares: $m \neq n$
- Matrices fila $\Rightarrow 1 \times n \quad A = (1\,2\,3)_{1 \times 3}$
- Matrices columnas $\Rightarrow m \times 1 \quad A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$
- Matrices cuadradas: $m = n \rightarrow$ matriz de orden n

2. Matrices cuadradas

- Diagonal principal: elementos a_{ij}
- Diagonal secundaria: elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$

$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

diagonal secundaria ↓ ↓ diagonal principal.

- Triangular superior: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- Triangular inferior: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- Matriz diagonal: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Matriz unidad: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriz simétrica: $A = A^t \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- Matriz antisimétrica: $A = -A^t \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} : \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Diagonal principal 0

3. Operaciones con matrices

1) Suma: tienen que ser de la misma dimensión !!, se suma elemento a elemento.

$$S_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$$
$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2) Producto por un escalar: da igual la dimensión, se multiplican todos los elementos

$$\lambda A_{m \times n} = B_{m \times n}$$
$$\lambda a_{ij} = b_{ij}$$

3: Operaciones con matrices

3) Producto:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = P_{m\times p}$$

nº columna A = nº filas B

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

- Observaciones:
  - $M\cdot N \neq N\cdot M$, el producto de matriz no es conmutativo
  - Por tanto: $(A+B)\cdot C = AC + BC$ y $C(A+B) = CA + CB$ distintos
  - Solo es indistintivo con la matriz identidad.

    $IA = AI = A$ $\quad I$: elemento unidad.
  - $(AB)^t = B^t\cdot A^t$
  - $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - $A^2 = A\cdot A$ desarrollo completo solo para A cuadrada.

4: Rango de una matriz

Es el nº de filas (o columnas) linealmente independientes.

Notación: rg (A)

Ejemplo: $A\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ \boxed{5} & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \xrightarrow[F_2-5F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 12 \end{pmatrix}$ rg (2)

objetivo 0

$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 4} \xrightarrow[F_3+4F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $rg(C) = 3$

objetivo 0

5: Matriz inversa

La matriz inversa de A: A^{-1} tq $\underset{n\times m}{(A)}\cdot\underset{m\times n}{(A^{-1})} = I = \underset{m\times n}{(A^{-1})}\underset{n\times m}{(A)}$ para ello la matriz A ha de ser cuadrada.

$n \to m$

Objetivo: $AX = B$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}B$$

$BA + B \to B(A+I)$

$AB + B \to (A+I)B$

- Observaciones:
  - $\exists A^{-1} \iff rg(A) = n$ (orden A)
  - $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

    Demos: $(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A\overbrace{BB^{-1}}^{I}A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Matriz ortogonal: $A^{-1} = A^t$

Ejercicios ejemplos tema 7

Scanned with CamScanner

TEMA 8: Determinantes.

1.- Determinante de una matriz cuadrada

det (A) = |A| = es un nº asociado a la matriz A

$n=2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det$

$n=3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ = REGLA DE SARRUS →

$\rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \, a_{23} \, a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \, a_{22} \, a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \, a_{23} \cdot a_{32}$

Ejemplo: $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4$

$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 30 - (30) = -48$

$n > 3 \rightarrow$ método de los adjuntos.

1) Menor de una matriz A: $M_{ij} \rightarrow$ determinante que obtenemos eliminando los elementos de la fila i y de la columna j de la matriz.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} & \cancel{a_{34}} \\ a_{41} & \cancel{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

2) Adjunto de una matriz A: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} A_{23} = -M_{23} \\ A_{42} = -M_{42} \end{matrix}$

3) |A| = suma de los elementos de una fila o columna por sus adjuntos.

Ejemplo: (fila 1) $\rightarrow |A| = a_{11} \cdot M_{11} - a_{21} \cdot M_{21} + a_{31} M_{31} - a_{41} M_{41}$

2.- Propiedades de los determinantes

1) $\det(C_1, C_2, C_3) + \det(C_1, C_2', C_3) = \det(C_1, C_2 + C_2', C_3)$

2) $\det(C_1, C_2, kC_3) = k \det(C_1, C_2, C_3)$

3) $\det(C_1, 0, C_3) = 0$

4) $\det(C_1, C_1, C_3) = 0$

5) $\det(C_i, \lambda C_i, C_3) = 0$

6) $\det(C_1, C_2, C_1 + C_2) = 0$

(3–6) "cuando el rango es menor que su orden, el det = 0"
$rg(A) < n \rightarrow |A| = 0$

7) $\det(C_1, C_2, C_3) = -\det(C_2, C_1, C_3)$

8) $\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3 + kC_1 + \lambda C_2)$ "si a la columna 3 se le suma una combinación lineal de la C_1 y C_2, su determinante no varía."

9) $\det(A) = \det(A^t)$

10) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

11) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

3.- Cálculo de rango por determinantes

$\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = n$ (A cuadrada de orden n)

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{5\times4}$ → rg máx

$n=2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(m) \geq 2$

$n=3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(m) \geq 3$

$n=4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(m) = 4$

¡Es obligatorio coger el determinante que te asegura el rango anterior!

4.- Cálculo de A^{-1}

Cuando A es cuadrada y $\exists A^{-1} \iff \det(A) \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$

↑ matriz de todos los $\overbrace{\text{adjuntos}}^{\text{signo y menor}}$ de los elementos originales.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1º) $|A| = -6 - 1 - 4 - 3 = -14$

2º) $Adj(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$

3º) $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ 4º) $A^{-1} = \frac{1}{-14} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

5.- Ecuaciones matriciales

Ejemplo: ej 25

a) $BX = C$

$B^{-1}BX = B^{-1}C$

$IX = B^{-1}C$

b) $B + XA = C$

$XA = C - B$

$X\underbrace{AA^{-1}} = (C-B)A^{-1}$

$XI = (C-B)A^{-1}$

c) $XA^2 = A$

$XAA = A$

$XA\underbrace{AA^{-1}} = \underbrace{AA^{-1}}$

$XA = I$

$X\underbrace{AA^{-1}} = IA^{-1}$

$X = A^{-1}$

3: Cálculo rango por GAUSS

$\begin{vmatrix} k & k-1 & k(k-1) \\ k & 1 & k \\ k & 1 & k-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{vmatrix} k & k-1 & k(k-1) \\ 0 & 2-k & k-k(k-1) \\ 0 & 2-k & k-1-k(k-1) \end{vmatrix} = k \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k-1 & k(k-1) \\ 0 & 2-k & 2k-k^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = k(k-2)$

Si $|C| = 0 \iff k=0$ o $k=2 \rightarrow rg(C) = 2$

Si $|C| \neq 0 \iff k \neq 0, 2 \rightarrow rg(C) = 3$

Ejercicios ejemplos del tema 9

TEMA 9: Sistemas de ecuaciones

1.- Forma matricial

$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$

Ejmplo:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ $\quad \underset{\parallel}{A}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & +2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \underset{\parallel}{X}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \underset{\parallel}{B}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

2: Regla de Cramer

Ejemplo: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = -1 \end{cases}$

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & +3 \end{vmatrix} = 6+3-12+2+4+27 = 30$$

3- Sistemas Homogéneos: sistemas con todos los términos independientes $= 0$

$A\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = 0 \rightarrow rg(A) = rg(A^*)$

$A^*\begin{pmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix}$ TRF: $\begin{cases} rg(A) = n \rightarrow S.C.D \quad \exists!\ sol \rightarrow 0_{n\times 1} \\ rg(A) < n \rightarrow S.C.I \\ rg(A) \neq rg(A^*) \rightarrow SI \end{cases}$

4- Sistemas dependientes de parámetros

Ejemplo: ej 39

$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow n=2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg(A) \geq 2$ $\qquad A^*\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \\ 1 & -k & 2 & 2 \end{array}\right)$

$n=3 \quad |A| = -2k - k + 1 + 1 - k^2 + 2 = -k^2 - 3k + 4 \rightarrow \overbrace{k = -4 \text{ ó } k = 1}^{\text{valores críticos a estudiar}}$

$k = -4$ $\quad |A| = 0$

$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $rg\,A^*?$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

- si $k = -4 \quad rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*) = S.I$

$k = 1$ $\quad |A| = 0$

$A^*\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $rg\,A^*?$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

- si $k = 1 \quad rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*) = S.I$
- si $k \neq 4, 1 \quad rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^o \rightarrow S.C.D$

Resolución S.C.D

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k-1 & -1 & -1 \\ 2 & -k & 2 \end{vmatrix}}{-k^2-3k+4} = \frac{-2-k^2+k+2+2-k+2k-2}{-k^2-3k+4} = \frac{-k^2+2k}{-k^2-3k+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-k^2-3k+4} = \frac{2k^2-2k+2-1-k+1+2k-2}{-k^2-3k+4} = \frac{2k^2-k}{-k^2-3k+4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 \\ 1 & -k & 2 \end{vmatrix}}{-k^2-3k+4} = \frac{-2k-k-k+1+1+k^3-k^2+2}{-k^2-3k+4} = \frac{k^3-k^2-4k+4}{-k^2-3k+4}$$

Sol: $\left(\frac{-k^2+2k}{-k^2-3k+4}, \frac{2k^2-k}{-k^2-3k+4}, \frac{k^3-k^2-4k+4}{-k^2-3k+4}\right)$

Ejercicios ejemplos del tema 9 •

TEMA 10: Vectores

1: Conceptos

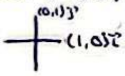
Vector fijo: $\vec{AB}$
- Modulo $|\vec{AB}|$
- Dirección (recta que lo contiene)
- Sentido $\vec{AB} \neq \vec{BA}$

Vector libre: $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ Conjunto de todos los equipolentes a un vector dado $AB = \vec{u}$

Vectores equipolentes: $\vec{AB} \approx \vec{CD} \approx \vec{EF}$ mismo modulo, dirección y sentido.

2: Operaciones

- Combinación lineal de $\{\vec{u_1}, \vec{u_2} \dots \vec{u_n}\}$: $\alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} \dots + \alpha_n\vec{u_n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Vector linealmente dependiente: $\vec{u}$ es L.D de $\{\vec{u_1}, \vec{u_2} \dots \vec{u_n}\}$ si se puede poner como CL de $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_n}\}$
  $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} \dots \alpha_n\vec{u_n}$
- Vector linealmente independiente: cuando no se puede poner como combinación lineal.
- Base $V_3 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ donde $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$, son linealmente independientes.
  ↳ Cualquier vector de V_3 se puede poner como C.L de B → $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \alpha_3\vec{u_3}$ → α coordenadas de $\vec{u}$ en
- Base canónica: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
  $\vec{i} = (1,0,0)$
  $\vec{j} = (0,1,0)$
  $\vec{k} = (0,0,1)$



3- Producto escalar en V_3

Def: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en Bc
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en Bc
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

→

Observaciones:
1) $\vec{u}, \vec{v} \neq 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{u}$
2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}| \cos 0° \rightarrow |\vec{u}|^2$
3) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

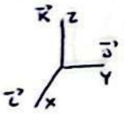
4- Producto vectorial

Def: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ vector tq $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$
- dirección $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$
- sentido: regla mano derecha

Coordenadas: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Demostración:

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$
$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$



$\vec{i} \times \vec{i} = 0$
$\vec{j} \times \vec{j} = 0$
$\vec{k} \times \vec{k} = 0$
↓
$\operatorname{sen} 0 = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
$k \times \vec{i} = \vec{j}$
$k \times \vec{j} = \vec{i}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) =$$
$$= \cancel{u_1v_1\vec{i}\vec{i}} + u_1v_2\vec{i}\vec{j} + u_1v_3\vec{i}\vec{k} + u_2v_1\vec{j}\vec{i} + \cancel{u_2v_2\vec{j}\vec{j}} + u_2v_3\vec{j}\vec{k} + u_3v_1\vec{k}\vec{i} + u_3v_2\vec{k}\vec{j} + \cancel{u_3v_3\vec{k}\vec{k}} =$$
$$= u_1v_2\vec{k} - u_1v_3\vec{j} - u_2v_1\vec{k} + u_2v_3\vec{i} + u_3v_1\vec{j} - u_3v_2\vec{i} =$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

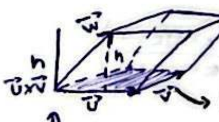
5- Producto mixto de 3 vectores en V_3

Notación: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$, cálculos en coordenadas en Bc

Demostración:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (u_1, u_2, u_3) \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica



→ $Ab = |\vec{u} \times \vec{v}|$

↑ $\cos \alpha = \dfrac{h}{|\vec{w}|}$

$V = Ab \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

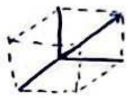
del producto escalar

↓ $\alpha = \text{ang}(\vec{w}, \vec{u} \times \vec{v})$

- Al coger al cuadrado se comprueba la solución antes de elevar

TEMA 11: Rectas y planos en el espacio

1: Vectores en V3



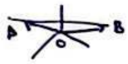
$\vec{OP} = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$

Punto: $P(p_1, p_2, p_3)$

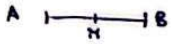
Vector de posición de un punto: $\vec{OP} = (p_1, p_2, p_3)$

Vector definido por dos puntos: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$



Pto medio de un segmento: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$



$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$

2: Rectas en V3

$r \begin{cases} A(a_1, a_2, a_3) \text{ pto conocido por } r \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ vector director de } r \end{cases}$

$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{u}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ Ecuación vectorial de r

En coordenadas:

$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda u_1 \\ y &= a_2 + \lambda u_2 \\ z &= a_3 + \lambda u_3 \end{aligned}}$ Ecuación paramétrica de r

Despejar λ e igualar:

$\boxed{\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}}$ Ecuación continua de r

Operando:

1) $u_2(x-a_1) = u_1(y-a_2)$ $\longrightarrow Ax + By + C'z + D = 0$

$u_2x - u_2a_1 = u_1y - u_1a_2 = 0$

2) $u_3(x-a_1) = u_1(z-a_3)$ $\longrightarrow Ax + B'y + Cz + D = 0$

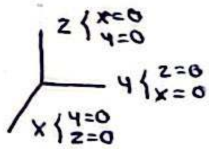
$u_3x - u_3a_1 = u_1z - u_1a_3 = 0$

$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} Ax + By + C'z + D = 0 \\ Ax + B'y + Cz + D = 0 \end{aligned}}$

Ecuaciones implícitas de r

Ec. ejes

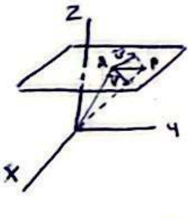
eje x $\begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{i}(1,0,0) \end{cases}$ $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$



3: Ecuaciones en planos V3

$\pi: \begin{cases} A(a_1, a_2, a_3) \rightarrow \text{pto} \in \pi \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ } vectores directores

¿$P(x, y, z) \in \pi$? $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OP}$



$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ecuación vectorial de π

Por coordenadas:

$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}}$ Ecuación paramétrica de π

$\therefore \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AP}\}$ son L.D $\Leftrightarrow$ $\pi: \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

Ecuación general de π