resumen-matematicas-bachillerato...

user_4967575

Matemáticas I

1º Bachillerato

Estudios España

~~Geometría en el espacio~~ GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

Producto escalar

$\bar{v}\cdot\bar{u} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$

$\bar{v}\cdot\bar{u} = 0$ los vectores son $\perp$

↳ unitarios $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1$

Producto vectorial

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

sale un vector perpendicular a $\bar{v}$ y $\bar{u}$.

$\bar{u}\times\bar{v} = 0$ lin. dep.

Área paralelogramo $|\bar{u}\times\bar{v}|$ o $\frac{|\bar{u}\times\bar{v}|}{2}$

$|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot \operatorname{sen}(\widehat{\bar{u},\bar{v}})$

Proyección ortogonal

$$Proy_{\bar{y}}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|}$$

Producto mixto

$[\bar{u},\bar{v},\bar{w}] = 0$ vectores coplanarios.

$$[\bar{u},\bar{v},\bar{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

V. paralelepípedo $|[\bar{u},\bar{v},\bar{w}]|$ → tetaedro $\frac{|[\bar{u},\bar{v},\bar{w}]|}{6}$

Vector unitario

$$\bar{u}_n = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

Vectores paralelos

$\bar{x} \equiv \bar{y}$

$\bar{x}(a_1, a_2 a_3)$ $\bar{y}(b_1 b_2 b_3)$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Punto medio

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

El vector normal de un plano es el vector director de la recta $\perp$ a π.

Para que 3 puntos esten alineados sus vectores deben ser iguales

↓

ej A B C

$\bar{AB}$ $\bar{BC}$ → $\frac{\bar{AB}}{\bar{BC}}$

Para sacar un vector en rectas generales hacemos el determinante con $\bar{i}\ \bar{j}\ \bar{k}$

Posición relativa 2 rectas

↳ vectores
- lin dep
  - coincidientes punto ∈ recta
  - paralelas punto ∉ recta
- lin ind.
  - secantes $\bar{u},\bar{v},\bar{AB}$ dep
  - se cruzan. $\bar{u},\bar{v},\bar{AB}$ indep

Posición relativa r y π.

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases} \rightarrow P(a_1+\lambda u_1, a_2+\lambda u_2, a_3+\lambda u_3)$$

↳ $\pi: ax + by + cz + d = 0$ → sacamos $A\lambda + B = 0$

- $A \neq 0$ secantes
- $A = 0$ $B \neq 0$ paralelas.
- $A = 0$ $B = 0$ r contenida π.

Cálculo de ángulos

↳ 2 rectas. $\cos(\widehat{u,v}) = \frac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

↳ dos planos $\cos(\widehat{\pi' \pi}) = \frac{|u_1 \cdot u_2|}{|u_1||u_2|}$

↳ recta y plano $\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\bar{u}, \bar{v}|}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

$\bar{v}_r \perp \bar{v}_{n\pi}$

si 3 vectores son lin indep forman una base

Distancias

↳ 2 puntos → $\overline{AB}$

↳ punto recta. $d(A,r) = \frac{|\bar{v}_r \times \overline{AB}|}{|\bar{v}_r|}$

se saca un punto de la recta para $\overline{AB}$

↳ punto plano.

$$d(A,\pi) = \frac{|a \cdot a_1 + b\cdot a_2 + c\cdot a_3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

↳ entre rectas

- paralelas. $d(r,s) = d(A,s) = d(B,r)$
- se cruzan: $\frac{|[\bar{u}_r, \bar{v}_s, \overline{AB}]|}{|\bar{v}_r \times \bar{v}_s|}$

↳ dos planos.

$d(\pi_1, \pi) = d(A, \pi_2) = d(B, \pi_1)$

↳ recta y plano.

Saco el punto de la recta y uso la fórmula del punto al plano.

Posición relativa 2 planos

↳ $rg(A) = 2 = rg(A^*)$ secantes

↳ $rg(A) = 1$ $rg(A^*) = 2$ paralelas

↳ $rg(A) = 1 = rg(A^*)$ coincidentes.

Para que dos planos sean coincidentes todos los términos deben ser proporcionales

cuando $|\ | = 0$ los vectores son dep lo que sign. que uno de ellos esta expresado como combinación lineal de los otros

Combinación lineal

$\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$

Ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} x-(P) & y-(P) & z-(P) \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

PROBABILIDAD

Regla de Laplace: $P(A) = \frac{N^o \text{ casos favorables}}{N^o \text{ casos totales}}$

Suceso contrario: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Unión de sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Intersección: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Leyes de Morgan

↳ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

↳ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

Diferencia de sucesos

↳ $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

↳ $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad condicionada

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Sabiendo que a ocurrido B probabilidad de A

Sucesos independientes

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Combinatoria

↳ **Variaciones ordinarias o sin repetición.** (importa el orden.)

$\boxed{V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}}$ n → nº de elementos, m → de cuanto se cogen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6} = 3024$

↳ **Variaciones con repetición** (no importa el orden)

$\boxed{VR_{n,m} = n^m}$ n → nº de elementos, m → de cuanto se cogen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9} = 9^4 = 6561$

↳ **Permutaciones.**

1 2 3 4 $P_4 = V_{4,4} = \frac{4!}{0!} = 4!$

$\boxed{P_r = V_{n,n} = n!}$

↳ **Permutaciones con repetición.**

1 2 3 3 4 4 4

$\boxed{PR_n^{a,b...} = \frac{n!}{a!\, b! \ldots}}$

$PR_7^{2,3} = \frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$

$\boxed{C_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}}$ (no importa el orden)

↳ **Combinaciones**

①②③ ... ㊾ → 6 bolas

$C_{46,6} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{\frac{49!}{43!}}{6!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816$

teorema de Bayes.

$P(X) = P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)$

Distribución binomial.

$X \sim Bin(n, p)$ — n (veces que se realiza el experimento)

$P(X=k) = C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ — p (probabilidad éxito) q (fracaso)

solo es binomial si hay 2 resultados posibles, éxito o fracaso y cada vez que se realiza el experimento la probabilidad es la misma

A y B son sucesos independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Distribución normal

$Z \sim N(0, 1)$ — μ media, σ desviación típica

① $P(z \leq 2{,}16) = 0{,}9846$

② $P(z > 0{,}54) = 1 - (z \leq 0{,}54) = 1 - 0{,}7054 = 0{,}2946$.

③ $P(z > -1{,}15) = (z < 1{,}15) = 0{,}8749$

④ $P(z < -0{,}39) = P(z > 0{,}39) = 1 - (z \leq 0{,}39) = 1 - 0{,}6517 = 0{,}3483$.

⑤ $P(1{,}02 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z < 1{,}02) = 0{,}9772 - 0{,}8461 = 0{,}1311$

⑥ $P(-0{,}83 \leq z \leq -0{,}14) = (0{,}14 \leq z \leq 0{,}83) = (z \leq 0{,}83) - (z < 0{,}14) = 0{,}7967 - 0{,}5557 = 0{,}2410$

⑦ $P(-1{,}14 \leq z \leq 0{,}3) = P(z \leq 0{,}3) - P(z < -1{,}14) = 0{,}6179 - P(z > 1{,}14) = 0{,}6179 - (1 - P(z \leq 1{,}14)) = 0{,}6179 - (1 - 0{,}8729) = 0{,}6179 - 0{,}1271 = 0{,}4908$.

De binomial a normal.

$\mu = \underset{\text{total}}{n} \cdot \underset{\text{éxito}}{p}$. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot \underset{\text{fracaso}}{q}}$

n = veces que se realiza el experimento.

Solo se usa si:

$n > 30$

$n \cdot p > 5$

$n \cdot q > 5$

MATRICES

Multiplicación

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 5\cdot 6 & 2\cdot 5 + 4\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 10(-2) & 6\cdot 5 + 10\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -2 & 40 \end{pmatrix}$$

$2\times 2 \quad 2\times 2$

Estos números siempre deben coincidir.

Se suman y se restan normal.

Trasposición.

$A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $A^t \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ $B^t: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ es simétrica.

2×3

Determinante

De orden 2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$

Solo se puede sacar el determinante en matrices cuadradas

De orden 3: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = [aei + dhc + gbf] - [ceg + fha + bdi]$

Matriz adjunta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -28 & 20 \\ 9 & 18 & 9 \\ -29 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$$

se comprueba multiplicando ambas matrices y el resultado debe ser la matriz identidad.

Traza de una matriz: (solo cuadradas)

↳ suma de todos los términos en la diagonal.

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ pero $tr(AB) \neq tr(A)\cdot tr(B)$

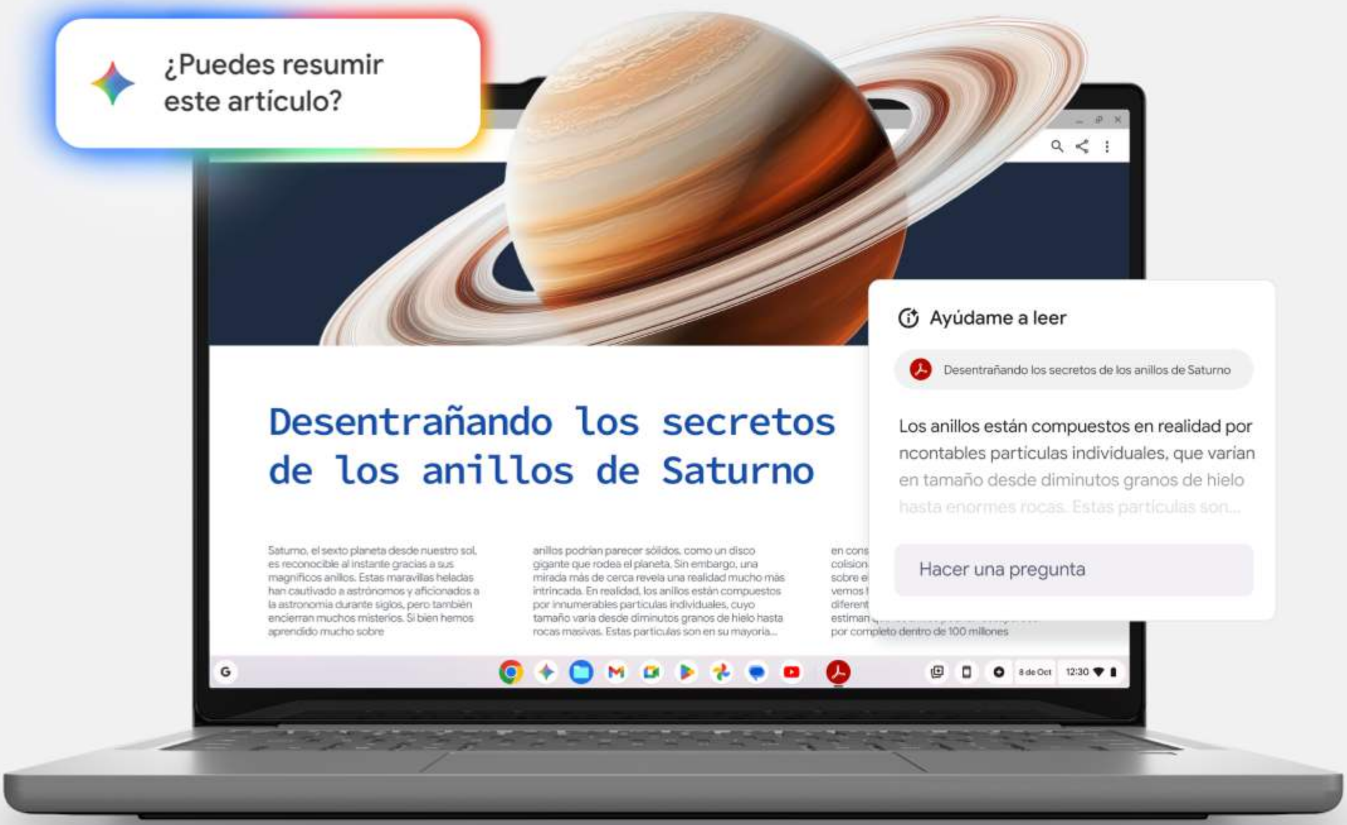
$tr(AB) = tr(BA)$ (Recuerda en general $AB \neq BA$)

lo que implica $tr(CAC^{-1}) = tr(A)$

$tr(A^t) = tr(A)$

chromebook**plus** | con ✦ Gemini

¿Necesitas un resumen?



Resúmenes claros en segundos y mucho más con tu portátil Chromebook y la IA de Google.

SISTEMAS

Teorema de Rouché-Förbenius

1) $rg(A) = rg(A^*) = n$ SCD
2) $rg(A) = rg(A^*) < n$ SCI
3) $rg(A) < rg(A^*)$ SI

Distribución de un sistema (parámetros)

- Averiguamos lo que vale el parámetro igualando a 0 y se discuten las diversas soluciones y los tipos de sistemas.

Resolución SCI

$$\begin{cases} 2x-4y-2z=4 \\ x-2y+z=2 \\ \cancel{2x-4y-2z=4} \end{cases} \xrightarrow{E_1:2} \begin{array}{r} x-2y-z=2 \\ x-2y+z=2 \\ \hline 2x-4y=4 \end{array} \to z=0 \; ; \; x=2+2y$$

$$\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

~~MATRICES~~ II

Tipos de matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
diagonal

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
triangular superior.

(invertible ↓ tiene inversa)

(simétrica $A^t = A$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
antisimétrica

(periódica $k>0$ $A \cdot A \cdot A \ldots = A$)