LIMITES-2BACH.pdf

Garciiaa

Matemáticas II

2º Bachillerato

Estudios España

LÍMITES 2 BACH

1. Álgebra del infinito.

Primero hay que saber trabajar con el infinito. ∞

SUMA Y RESTA

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$a + \infty = \infty$

$a - \infty = -\infty$

$\boxed{\infty - \infty}$ IND

PRODUCTO

$\infty \cdot \infty = \infty$

$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$

$-\infty \cdot \infty = -\infty$

$a \cdot \infty = \infty$

$-a \cdot \infty = -\infty$

$\boxed{\mathbf{0} \cdot \infty}$ IND

$\boxed{\mathbf{0} \cdot (-\infty)}$ IND

DIVISIÓN

$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \frac{-a}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{a} = \infty \qquad \frac{\infty}{-a} = -\infty$

$\frac{-\infty}{a} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-a} = \infty$

$\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ IND

$\frac{\infty}{0} = \pm\infty \qquad \frac{-\infty}{0} = \pm\infty$

$\boxed{\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{0}} \quad \frac{-\boldsymbol{k}}{\mathbf{0}}}$ IND

$\frac{0}{\infty} = 0 \qquad \frac{0}{-\infty} = 0 \qquad \boxed{\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}}$ IND

POTENCIAS

$$a^{\infty}\begin{cases} = \infty & \text{si } 1 < a \\ IND & \text{si } a = 1 \rightarrow \boxed{1^{\infty}} \text{ IND} \\ = 0 & \text{si } -1 < a < 1 \\ IND & \text{si } a = -1 \rightarrow \boxed{(-1)^{\infty}} \text{ IND} \\ \nexists & \text{si } a < -1 \end{cases}$$

$$\infty^{a}\begin{cases} = \infty & \text{si } 0 < a \\ IND & \text{si } a = 0 \rightarrow \boxed{\infty^{0}} \text{ IND} \\ = 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$\boxed{0^0}$ IND RARA

RAÍCES

$\sqrt[a]{\infty} = \infty$

$$\sqrt[a]{-\infty}\begin{cases} = -\infty & \text{si } a \text{ es impar} \\ \nexists & \text{si } a \text{ es par} \end{cases}$$

LOGARITMOS

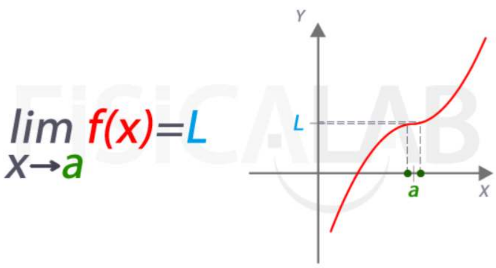
$\log_a \infty = \infty \qquad \log_a -\infty = \nexists$

2. Definición intuitiva de límite.

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende al valor a es el valor L al que se aproximan los valores de la variable y cuando los valores de x están muy próximos al valor a.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

Un límite existe si sus **límites laterales** coinciden y ambos existen:



El **límite lateral por la derecha** es cuando los valores que toma x están muy próximos al valor a por la derecha. (superiores a a) ⟶ $\lim_{x \to a^+} f(x)$

El **límite lateral por la izquierda** es cuando los valores que toma x están muy próximos al valor a por la izquierda. (inferiores a a) ⟶ $\lim_{x \to a^-} f(x)$

3. Resolver límites.

La forma más eficaz para resolver un límite es **sustituir** el valor de x por el valor al que tiende el límite (a). Si las operaciones se pueden realizar sin problemas, ese resultado es el valor del límite (L). Si estas operaciones dan lugar a alguna operación no válida, llegamos a una **indeterminación**. Cada indeterminación se calcula de una manera diferente.

En estos ejercicios es muy importante la **notación:**

- No se pone nada después de una IND. Saltamos de línea copiando el límite original y ahí ya ponemos el procedimiento de la indeterminación.
- Se pone $\lim_{x \to}$ hasta que sustituyamos la x por a.

4. Resolver indeterminaciones.

1. $\infty - \infty$

Para resolver este tipo de indeterminaciones tenemos que quedarnos con el ∞ de **más poder**. Si son polinomios, el que más poder tiene es el que tiene el **mayor grado**. Si no son polinomios seguimos esta lista:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^3} - x\right) = \boxed{\infty - \infty}\ IND$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^3} - x\right) = \infty$$

LISTA DE PODER: Exponenciales > Polinomios > Logaritmos > Senos y cosenos

2. $\frac{\infty}{\infty}$

Para este tipo de inderteminaciones hay varios casos: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ IND$

- Si $poder\ P(x) > poder\ Q(x)$ ⟶ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ ⟶ Siguiendo la ley de los signos.
- Si $poder\ Q(x) > poder\ P(x)$ ⟶ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
- Si $poder\ P(x) = poder\ Q(x)$ ⟶ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\frac{|a|}{|b|}$ ⟶ Donde a y b son los coeficientes de las x de mayor grado del numerador y del denominador. El signo tiene que coincidir con la indeterminación.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{3x} = \boxed{\frac{\infty}{-\infty}}\ IND$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{3x} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2\sqrt{x^4 + 3x^2} + \sqrt{3x^4}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\ IND$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2\sqrt{x^4 + 3x^2} + \sqrt{3x^4}} = \frac{5}{2\sqrt{1} + \sqrt{3}} = \frac{5}{2 + \sqrt{3}}$$

3. $\frac{k}{0}$

Para resolver este tipo de indeterminaciones habrá que **calcular los límites laterales**. Si estos coinciden, el límite existe y vale el valor de los límites laterales. Si no coinciden, el límite no existe.

Para calcular el **límite por la derecha**, habrá que sustituir las x del denominador por $\boldsymbol{a+0,01}$. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Para calcular el **límite por la izquierda**, habrá que sustituir las x del denominador por $\boldsymbol{a-0,01}$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-1}{x-1}=\boxed{\frac{-2}{0}}IND\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x-1}{x-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\\ \neq\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x-1}{x-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\end{cases}\Rightarrow\ \nexists\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+4x+4}=\boxed{\frac{1}{0}}IND\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ =\\ \lim\limits_{x\to -2^-}\frac{2x^2-3x-1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}\Longrightarrow\ \begin{array}{l}\exists\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+4x+4}\\ \lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+4x+4}=\infty\end{array}$$

4. $\frac{0}{0}$

Para resolver este tipo de indeterminaciones hay que:

1. Factorizar numerador y denominador.
2. Simplificar.
3. Volver a evaluar el límite.
4. Si aparece otra indeterminación, aplicamos el procedimiento adecuado.

> **L'Hopital**: Existe un truco en esta indeterminación, que consiste en **derivar el numerador y el denominador** y evaluar otra vez el límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\boxed{\frac{0}{0}}IND$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-2)}=\boxed{\frac{4}{0}}IND\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{0^+}=+\infty\\ \neq\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow\ \nexists\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

5. $0\cdot\infty$

Para resolver este tipo de indeterminaciones tenemos que multiplicar todo por todo.

$$\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=\boxed{\infty\cdot 0}IND$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

6. $\infty - \infty$ con raíces de mismo índice

Para resolver este tipo de indeterminaciones hay que:

1. Multiplicar y dividir por el conjugado.
2. Resolver la identidad notable.
3. Volver a evaluar el límite.
4. Si aparece otra indeterminación, aplicamos el procedimiento adecuado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{2x^3-3}\right)=\boxed{\infty-\infty}\, IND$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{2x^3-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{2x^3-3}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{2x^3-3}\right)}{\left(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{2x^3-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+2x)-(2x^3-3)}{\left(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{2x^3-3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-2x^3+3}{\left(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{2x^3-3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+3}{\left(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{2x^3-3}\right)}=\boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{2x^3-3}\right)=-\infty$$

7. $\infty - \infty$ con resta de fracciones polinómicas

Para resolver este tipo de indeterminaciones hay que:

1. Hacer común denominador.
2. Juntar las fracciones.
3. Operar.
4. Volver a evaluar el límite.
5. Si aparece otra indeterminación, aplicamos el procedimiento adecuado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x+3}-\frac{x^3+2}{x^2-9}\right)=\boxed{\infty-\infty}\, IND$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x+3}-\frac{x^3+2}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-2x)(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{x^3+2}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-2x)(x-3)-x^3-2}{x^2-9}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^2+6x-2}{x^2-9}\right)=\frac{-5}{1}=-5$$

8. $\frac{0}{0}$ con raíces

Para resolver es tipo de indeterminaciones hay que:

1. Multiplicar y dividir por el conjugado.
2. Resolver identidad notable.
3. Factorizar numerador y denominador.
4. Simplificar factor común.
5. Volver a evaluar el límite.
6. Si aparece otra indeterminación, aplicamos el procedimiento adecuado.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x^2-3x+2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-3x+2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\frac{4}{2}=2$$

9. 1^{∞}

Para resolver este tipo de indeterminaciones tendremos que seguir esta fórmula:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

Se tendrá que resolver el límite del exponente del número e, teniendo que restar la fracción algebraica, multiplicarla y evaluando el límite.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}5x^2\cdot\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}5x^2\cdot\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-\frac{x^2+1}{x^2+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}5x^2\cdot\left(\frac{2}{x^2+1}\right)}=e^{\frac{10x^2}{x^2+1}}=e^{10}$$

5. Regla de L'Hôpital.

Esta regla dice que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla se puede usar solo en el caso de que tengamos indeterminaciones del tipo:

$$\frac{0}{0}\quad \text{ò}\quad \frac{\infty}{\infty}$$

6. Ejercicios resueltos.

$$\mathbf{1.}\ \lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)} = \left(e^{(1-1)}-1\right)^{(1-1)} = [0^0]\ IND$$

1. Al haber un exponente en toda la expresión se utilizan logaritmos neperianos para poder bajarlo y transformar la expresión en un producto. Para esto se define una variable L que equivale a:

$$L = \lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

2. Sobre esta igualdad se aplican los logaritmos neperianos a ambos lados, se saca el límite de la expresión, se pone dentro el logaritmo y se baja el exponente.

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)\right]$$

3. Se baja el factor $(x-1)$ al denominador con exponente negativo para poder hacer L'Hopital.

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)}{(x-1)^{-1}}\right] = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\ IND(L'H)$$

4. Realizamos L'Hopital y simplificamos.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\dfrac{e^{(x-1)}}{e^{(x-1)}-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{(x-1)}\cdot(x-1)^2}{1-e^{(x-1)}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]\ IND\ (L'H)$$

5. Volvemos a realizar L'Hopital y simplificar.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{e^{(x-1)}\cdot(x-1)^2+e^{(x-1)}\cdot 2(x-1)}{-e^{(x-1)}}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}\cdot(x^2+1-2x)+e^{(x-1)}\cdot(2x-2)}{-e^{(x-1)}}$$

6. Simplificamos el $e^{(x-1)}$ y operamos arriba evaluamos el límite resultante:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{e^{(x-1)}}\cdot(x^2+1-2x)+\cancel{e^{(x-1)}}\cdot(2x-2)}{-\cancel{e^{(x-1)}}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1\cancel{-2x}\cancel{+2x}-2)}{-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{-1} = 0$$

7. Para terminar hay que recordar que definimos la variable L. Igualamos el resultado y despejamos L.

$$\ln L = 0 \qquad e^0 = L \qquad L = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)} = 1}$$

$$\textbf{2. } \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\right]^{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty} \boldsymbol{IND}$$

1. Para hacer este límite sin saltarse ningún paso, primero vemos a que tiende lo de dentro del corchete, ignorando el exponente. Por tanto definimos una nueva variable como:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] IND\ (L'H)$$

2. Se realiza L'Hopital varias veces para tumbar la indeterminación.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)\cdot 1}{2x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] IND(L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1 \longrightarrow a = 1$$

3. Nos ha dado que el valor de $a = 1$ por tanto ahora vemos a que tiende el límite original.

$$\lim_{x\to\infty}(a)^{\ln x} = [1]^{\infty} IND = e^{\lambda}$$

4. Resolvemos la indeterminación del tipo $[1]^{\infty}$(número e).

$$\lambda = \lim_{x\to\infty}\ln x\cdot(a-1) = \lim_{x\to\infty}\ln x\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1} - \frac{x^2+3x+1}{x^2+3x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln x\cdot\left(\frac{x^2+1+2x}{x^2+3x+1} - \frac{x^2+3x+1}{x^2+3x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln x\cdot\left(\frac{-x}{x^2+3x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x\cdot\ln x}{x^2+3x+1}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] IND\ (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{-1\cdot\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln x - 1}{2x+3}$$

$$= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] IND\ (L'H) = \lim_{X\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

5. Por tanto el límite original quedaría:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = \lim_{x\to\infty}(a)^{\ln x} = [1]^{\infty} IND = e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\right]^{\ln x} = \mathbf{1}}$$

$$\textcolor{blue}{3.}\ \boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x-\sin x}{e^x+x}}=\frac{\infty-\sin\infty}{\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] IND\ (L'H)$$

1. Realizamos L'Hopital 2 veces.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x-\cos x}{e^x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] IND\ (L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x+\sin x}{e^x}$$

2. Si volvemos a realizar L'Hopital entraremos en un bucle ya que en la función hay términos con funciones exponenciales y trigonométricas, las cuales al derivarse varias veces se quedan igual. Por tanto, distribuimos el denominador para quitarnos las funciones exponenciales de un término.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x+\sin x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x}{e^x}+\frac{\sin x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}3+\frac{\sin x}{e^x}$$

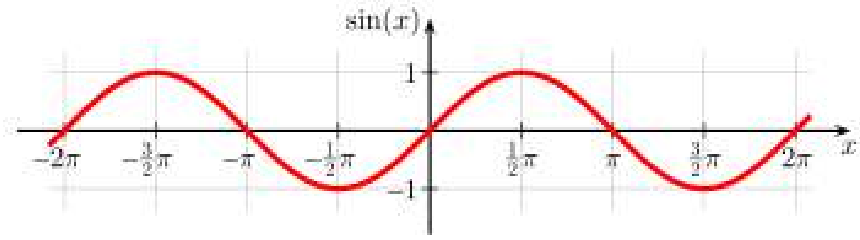
3. Evaluamos el límite.

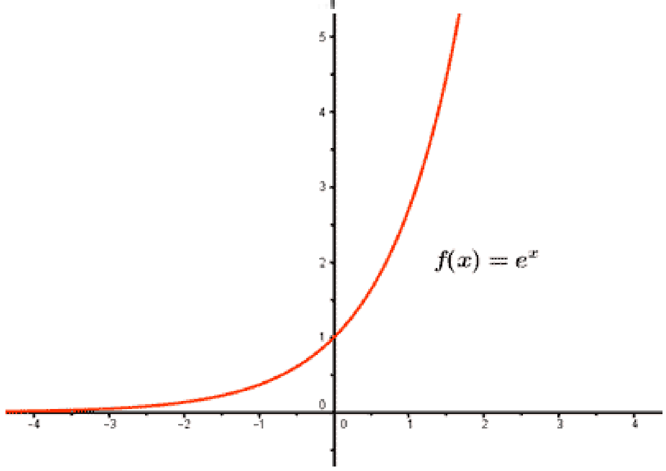
$$\lim_{x\to\infty}3+\frac{\sin x}{e^x}=3+\frac{\sin\infty}{\infty}=3+0=3$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x-\sin x}{e^x+x}=3}}$$

ACLARACIÓN: Al evaluar el límite nos queda una división entre una función seno y una función exponencial. Tenemos que ver cual crece más rápido para determinar el resultado. En este caso la función exponencial crece más rápido, por tanto el denominador crece más rápido, luego la división tiende a 0.

La función seno crece más lento que la exponencial ya que esta función tiene como valores máximos el 1 y -1, mientras que la exponencial no tiene valor máximo.





$$\mathbf{4.}\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{\infty}\left(\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\sin\frac{1}{\infty}}\right)=0\cdot\left(0-\frac{2}{\sin 0}\right)=[0\cdot(-\infty)]IND$$

1. Realizamos distributiva.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sin\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sin\frac{1}{x}}\right)$$

2. Vemos a que tiende el denominador $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ cuando x se va a infinito.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot sin\frac{1}{x}$$

3. Bajamos la x que está multiplicando mediante exponente negativo.

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{x^{-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{sin\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\left[\frac{0}{0}\right]IND\ (L'H)$$

4. Hacemos L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

5. Simplificamos el $\frac{-1}{x^2}$ arriba y abajo y evaluamos el límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}cos\frac{1}{x}=cos\frac{1}{\infty}=cos\,0=1$$

6. Como hemos visto, el denominador $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ tiende a 1 por tanto, reemplazamos este resultado en el límite original.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sin\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-2\right)=\frac{3}{\infty^2}-2=0-2=-2$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sin\frac{1}{x}}\right)=-2}$$

$$\textbf{5. } \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}\right]} = \infty\left[\arctan(\infty)-\frac{\pi}{2}\right] = \infty\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] = [\infty\cdot 0]IND$$

ACLARACIÓN: El $\arctan(\infty)$ es $\frac{\pi}{2}$ ya que cuando esta función se va al infinito, se va aproximando a este valor en concreto.

1. Bajamos al denominador la x que se encuentra fuera multiplicando para así poder hacer L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]IND\ (L'H)$$

2. Hacemos L'Hopital, simplificamos y volvemos a evaluar.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]IND\ (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^x}{-1-e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H)$$

3. Volvemos a hacer L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^x}{-1-e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x}{-2\cdot e^{2x}}$$

4. Simplificamos los términos repetidos y volvemos a evaluar.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x}{-2\cdot e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot\cancel{e^x}+x^2\cdot\cancel{e^x}}{-2\cdot(e^x)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+x^2}{-2e^x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H)$$

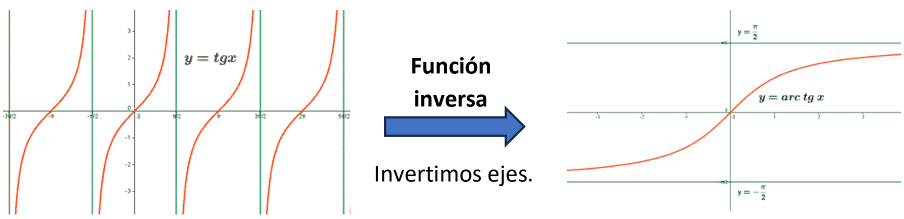
5. Volvemos a hacer L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+x^2}{-2e^x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{2+2x}{-2e^x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H)$$

6. Hacemos L'Hopital una última vez y evaluamos el límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x}{-2e^x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right]IND\ (L'H) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{-2e^x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}\right] = 0}}$$



La función inversa de la tangente se puede pensar como si a la función $\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$ la delimitáramos entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y invirtiésemos sus ejes. (eje X→eje Y; eje Y→eje X)

Entonces, la función $\boldsymbol{f(x) = \arctan x}$ quedaría así. Como se puede ver al tender la x a infinito la función te va devolviendo valores cada vez más próximos a $\frac{\pi}{2}$ por lo tanto tiende a este valor.

$$\textcolor{blue}{6.}\ \boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}}=\frac{4^\infty+5^\infty}{3^\infty+6^\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]IND$$

1. Como las funciones exponenciales a^x al derivarse no se van, si utilizáramos L'Hopital, entraríamos en un bucle en el que la indeterminación no se iría nunca. Por tanto este límite hay que transformarlo en algo que nos sirva para tumbar la indeterminación. Para ello, primero sacamos factor común arriba y debajo de la exponencial con la base más grande. En este caso son 5 y 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\cdot\left(\frac{4^x}{5^x}+1\right)}{6^x\cdot\left(\frac{3^x}{6^x}+1\right)}$$

2. Sacamos los exponentes fuera de las fracciones con paréntesis.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\cdot\left(\frac{4^x}{5^x}+1\right)}{6^x\cdot\left(\frac{3^x}{6^x}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x\cdot\frac{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right)}{\left(\left(\frac{3}{6}\right)^x+1\right)}$$

3. Evaluamos el límite. Como vemos nos quedan fracción las cuales dan números que se encuentran entre -1 y 1. Esto significa que al elevar estos números a infinito, tienden a 0. **(1. álgebra del infinito)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x\cdot\frac{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right)}{\left(\left(\frac{3}{6}\right)^x+1\right)}=0\cdot\frac{0+1}{0+1}=0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=0}}$$