**Laboratorio de Tratamiento Digital de Señales**

**Curso 2020-2021. Sesión 5**

## La DFT. Aplicación al análisis espectral determinista

En esta práctica se ilustran los conceptos básicos del tema 4 de la asignatura de Tratamiento Digital de Señales:

- Muestreo de la Transformada de Fourier con la DFT
- Análisis espectral determinista

## 1. Muestreo de la transformada de Fourier

Considere el pulso cuadrado discreto definido de la siguiente forma:

$$w[n] = \begin{cases} 1, \; 0 \le n \le L-1 \\ 0, \; resto \end{cases}$$

Su transformada de Fourier viene dada por la fórmula:

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} 1 e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega\frac{L-1}{2}} \frac{sen\left(\omega \frac{L}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \; W(0) = L$$

**1.1** $W(\omega)$ es una función continua de $\omega$, de periodo $2\pi$. Si queremos trabajar con $W(\omega)$ de forma práctica tendremos que muestrearla. Según se ha visto en las clases teóricas, tenemos que tomar, al menos, tantas muestras de $W(\omega)$ como muestras tiene $w[n]$. Por tanto, muestrearemos $W(\omega)$ en el conjunto de frecuencias

$$\omega_k = \frac{2\pi}{L} k, \; k = 0, 1, \ldots, L-1$$

Calcule y dibuje el módulo y fase de las muestras de $W(\omega)$ en el periodo $[0, 2\pi[$, para $L = 49$.

**1.2** Aunque el muestreo del apartado anterior es suficiente para la representación de $W(\omega)$, un sobre-muestreo permite ver y calcular con mayor detalle las características de $W(\omega)$. Repita el apartado anterior pero tomando $N = 5L$ muestras, en el conjunto de frecuencias $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$.

**1.3** La secuencia $w[n]$ del apartado 1.1 se denomina "ventana rectangular". Otra ventana muy usada en el tratamiento digital de señales es la "ventana de Hamming":

$$h[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right),\ n = 0, 1, \ldots, L-1 \\ 0,\ resto \end{cases}$$

La transformada de Fourier de la ventana de Hamming es:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n] e^{-j\omega n}$$

Repita los cálculos del apartado 1.1 para esta nueva ventana.

**1.4** Repita el apartado 1.2 para esta nueva ventana.

## 2. Cálculo de las muestras de una transformada de Fourier con la DFT

Dada una secuencia de duración finita $L$

$$x[n] = 0,\ n < 0 \text{ y } n \geq L,$$

las muestras de su transformada de Fourier en el conjunto de frecuencias $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$ vienen dadas por la fórmula

$$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Esta fórmula se corresponde con la ecuación de análisis de la DFT. En el entorno MATLAB la DFT se calcula con el comando `fft(. . .)`, que implementa uno de los algoritmos rápidos de cálculo de la DFT.

**2.1** Repita los cálculos del apartado 1.1, e. d. $N=L$, usando el comando `fft(. . .)`.

**2.2** El sobre-muestreo en frecuencia se calcula especificando una longitud $N$ para la DFT mayor que la duración de la señal $L$, mediante el comando `fft(x,N)`. El rellenado con ceros ("zero padding") lo realiza automáticamente el comando `fft(. . .)`. Repita el apartado 1.2, es decir $N > L$, usando el comando `fft(x,N)`.

**2.3** Repita los cálculos del apartado 1.3 usando el comando `fft(. . .)`.

**2.4** Repita los cálculos del apartado 1.4 usando el comando `fft(. . .)`.

## 3. El comando MATLAB `fftshift(. . .)`

En los apartados anteriores hemos calculado las muestras de la transformada de Fourier en el periodo $[0,2\pi[$. A menudo es más conveniente trabajar con el periodo $[-\pi,\pi[$. Dado que la DFT trabaja en el periodo $[0,2\pi[$, es necesario efectuar una traslación de las muestras del semiperiodo $[\pi,2\pi[$ al semiperiodo $[-\pi,0[$. Esta traslación "especial" la realiza el comando `fftshift(. . .)`. También sería necesario un desplazamiento del eje de frecuencias, pero eso es fácil pues basta restar $\pi$ a los puntos que definen el eje de frecuencias, e. d., $\omega_k - \pi$ .

**3.1** Repita los cálculos del apartado 2.2, pero trabajando en el intervalo de frecuencias $[-\pi,\pi[$. Dibuje una línea horizontal sobre el módulo de la transformada situada 3 dB por debajo del máximo del lóbulo principal. Calcule, con `ginput`, el ancho de banda del lóbulo principal (criterio 3 dB) y la atenuación del lóbulo secundario.

**3.2** Repita los cálculos del apartado 2.4, según se expone en el apartado anterior.

Según lo comentado líneas arriba, el eje de frecuencias entre $[-\pi,\pi[$ se calcula con

```
k=(0:N-1); wk= (2*pi/N)*k - pi  %Eje de frecuencias entre [-pi,pi)
```

## 4. Transformada de Fourier de una señal senoidal.

Considere la señal $x[n]=10\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

**4.1** Calcule 1000 muestras de la transformada de Fourier de la señal $y[n]=w[n]\,x[n]$ en el intervalo de frecuencias $[-\pi,\pi[$, siendo $w[n]$ una ventana rectangular de longitud $L=87$. Dibuje el módulo, en dBs, de las muestras calculadas. Mida el máximo del módulo de la transformada (en el semieje positivo) y compruebe que está en la frecuencia $\frac{\pi}{4}$ y su amplitud verifica la fórmula $\frac{A}{2}L$ ( $A=10$ es la amplitud del coseno).

**4.2** Repita el apartado anterior empleando una ventana de Hamming. En este caso compruebe que la amplitud medida verifica la fórmula $\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{L-1}h[n]$.

**Espectro de un coseno "enventanado"**

$$y[n] = A\cos(\omega_0 n)w(n) \overset{F}{\leftrightarrow} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}F\left[A\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\right] * W(\omega)$$
$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\frac{A}{2}\delta(\omega+\omega_0)+2\pi\frac{A}{2}\delta(\omega-\omega_0)\right) * W(\omega)$$
$$Y(\omega) = \frac{1}{2}AW(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}AW(\omega-\omega_0)$$

## 5. Transformada de Fourier de una señal exponencial.

Considere la señal $x[n] = 10e^{-j\frac{\pi}{4}n}$.

**5.1** Calcule y dibuje (el módulo en dBs) las muestras de la transformada de Fourier de la señal $y[n]= w[n]\,x[n]$ en el intervalo de frecuencias $[-\pi,\pi[$, siendo $w[n]$ una ventana rectangular de longitud $L = 87$. Mida el máximo del módulo de la transformada y compruebe que está en la frecuencia $-\frac{\pi}{4}$ y su amplitud verifica la fórmula $AL$.

**5.2** Repita el apartado anterior empleando una ventana de Hamming. En este caso compruebe que la amplitud medida verifica la fórmula $A\sum_{n=0}^{L-1} h[n]$.

## 6. Análisis espectral (caso determinista) con la DFT.

Considere que

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{P} A_i \cos(2\pi F_i t)$$

es la salida de un sensor que mide la emisión de fuentes de señales de tipo cosenoidal con amplitudes $A_i$ y frecuencias $F_i$ $Hz$. Se sabe que las frecuencias $F_i$ son inferiores a 10 KHz, por lo que la señal $x_c(t)$ se ha muestreado con una frecuencia de muestreo $F_s = 20\ KHz$, obteniéndose una señal $x[n]$ de duración $L = 100$. La señal $x[n]$ se encuentra en el fichero `x1.mat`.

El objetivo de este ejercicio es determinar $P$, el número de componentes cosenoidales de $x_c(t)$, y los pares ($A_i$, $F_i$). Para ello deberá calcular el espectro de $x[n]$ con diferentes ventanas y medir los máximos que puedan corresponder a componentes cosenoidales.

## 6.1 Ventana rectangular

Aplique una ventana rectangular a los datos $x[n]$. Calcule y dibuje el módulo de una DFT de orden $N = 10 * L$ de los datos enventanados. Dado que la señal es real, descarte las muestras de la DFT correspondientes al semiperiodo $[\pi, 2\pi[$ y trabaje en el semieje de frecuencias $[0, \pi[$. Además, emplee un eje de frecuencias en Hz para facilitar la medida de las frecuencias. Para ello considere la correspondencia entre frecuencias discretas – frecuencias analógicas a través del muestreo:

$$\Omega_k T_s = \omega_k$$
$$2\pi F_k T_s = \frac{2\pi}{N} k$$
$$F_k = \frac{F_s}{N} k$$

Por tanto, debe trabajar con los valores de la DFT correspondientes a los índices $0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$ y con el eje de frecuencias (analógicas) $F_k = \frac{F_s}{N} k$, $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$.

Con el comando `[. . .]=ginput` puede calcular fácilmente los pares ($A_i$, $F_i$) de las componentes cosenoidales que usted crea que contiene $x_c(t)$. Considere como criterio que para que dos máximos consecutivos se correspondan con dos componentes cosenoidales debe existir un valle entre ellos de al menos 2 dB de profundidad.

## 6.2 Ventana de Hamming

Aplique una ventana de Hamming a los datos $x[n]$ y repita los cálculos del apartado anterior.

## 6.3 Componentes espectrales

Combine los resultados de los apartados 6.1 y 6.2 y decida cuál es el conjunto de componentes cosenoidales de la señal $x_c(t)$.

**Comentario.** Es conveniente representar los espectros (con ventana rectangular y con ventana de Hamming) en la misma ventana gráfica y con `subplot(2,1,x)`. Así dispondrá de una visión de conjunto de las posibles componentes de la señal.

## 7. Otro ejemplo de Análisis espectral con la DFT.

En el fichero `x2.mat` se encuentran muestras de una señal del tipo

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{P} A_{ic} \cos(2\pi F_{ic} t) + \sum_{i=1}^{Q} A_{ie} e^{j2\pi F_{ie} t} \text{ ,}$$

con ancho de banda inferior a 500 Hz; la frecuencia de muestreo es $F_s = 1000\,\mathrm{Hz}$. Se pide que calcule $P$, $A_{ic}$, $F_{ic}$, $Q$, $A_{ie}$, $F_{ie}$ .

Teniendo en cuenta que la señal es compleja los espectros se tienen que representar en el intervalo de frecuencias $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right[$. Las instrucciones en MATLAB serían:

`k=(0:N-1); ejeF=(Fs/N)*k - Fs/2` (Considere *N* = 10000)

## 8. Otro ejemplo de Análisis espectral con la DFT.

En el fichero `x3.mat` se encuentran muestras de una señal del tipo

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{P} A_{ic} \cos(2\pi F_{ic} t) + \sum_{i=1}^{Q} A_{ie} e^{j2\pi F_{ie} t}$$

con ancho de banda inferior a 10000 Hz y que se ha muestreado con $F_s = 20000\ Hz$. Se pide que calcule $P$, $A_{ic}$, $F_{ic}$, $Q$, $A_{ie}$, $F_{ie}$ y los presente por pantalla con un formato adecuado. El error en la medida de las frecuencias, causado por el efecto de muestreo de la transformada de Fourier, debe ser inferior o igual a $1\ Hz$ (¡Calcule el *N* de esta condición!).

Para el análisis espectral emplee una ventana con anchura del lóbulo principal pequeña y otra ventana con lóbulos secundarios muy atenuados. Puede utilizar el comando `kaiser(. . .)` de MATLAB (ensaye diferentes valores del parámetro `beta`) para generar la segunda ventana.