

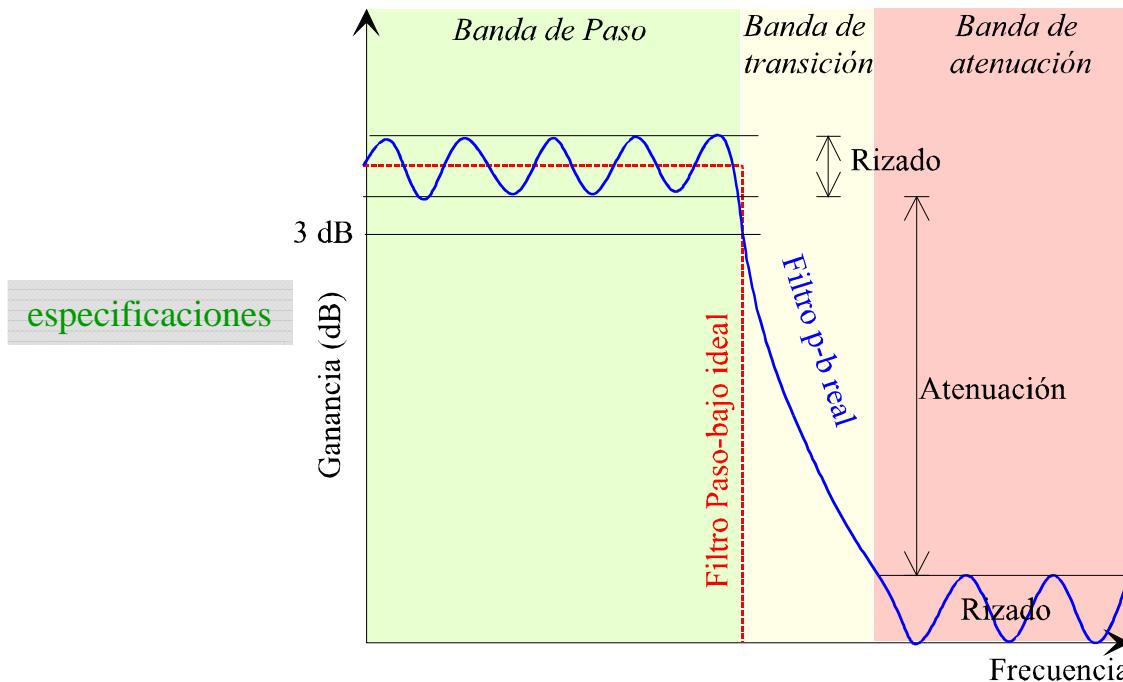
Filtros digitales

Grupo: 31.1

■ Objetivos práctica P4:

- Manejar, diseñar y describir filtros básicos además de filtrar señales:
 - *Filtros **IIR** mediante correspondientes analógicos: Butterworth, Chebyshev, Elíptico*
 - *Filtros **FIR** mediante uso de ventanas.*
 - *Descripción mediante respuesta impulsiva, polos-ceros, respuesta en frecuencia.*
 - *Comparación de los diversos filtros.*
- Sistemas de **fase máxima**, **fase mínima** y **fase mixta** y sus propiedades
 - generación de sistemas con la misma respuesta en magnitud
- Programar y manejar diferentes realizaciones de filtro:
 - *Programación de formas básicas: Secciones de 2º orden (ssō), flujograma sencillo (flujog)*
 - *Aplicación en operaciones básicas de filtrado.*

Comandos MATLAB más importantes



especificaciones

Comandos MATLAB más importantes

■ Repaso de comandos práctica P4:

- Diseñar y describir filtros IIR mediante sus contrapartidas analógicas: Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II, Elíptico
 - $[b, a] = \text{butter}(n, Wn, 'ftype')$ ó $[z, p, k] = \text{butter}(n, Wn, 'ftype')$
 - $[b, a] = \text{cheby1}(n, Rp, Wn, 'ftype')$ ó
 - $[b, a] = \text{cheby2}(n, Rs, Wn, 'ftype')$ ó
 - $[b, a] = \text{ellip}(n, Rp, Rs, Wn, 'ftype')$ ó
 - ■ Si *no se conoce el orden n* -> $[n, Wn] = \text{ellipord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

■ EJEMPLO: filtro Paso-Banda

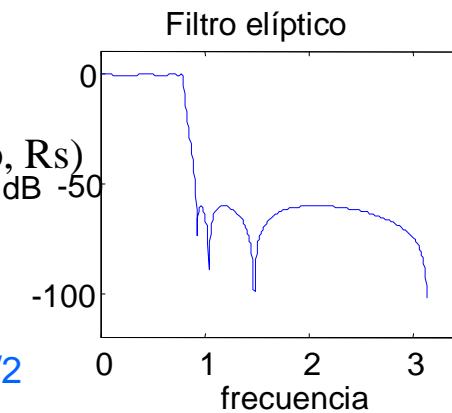
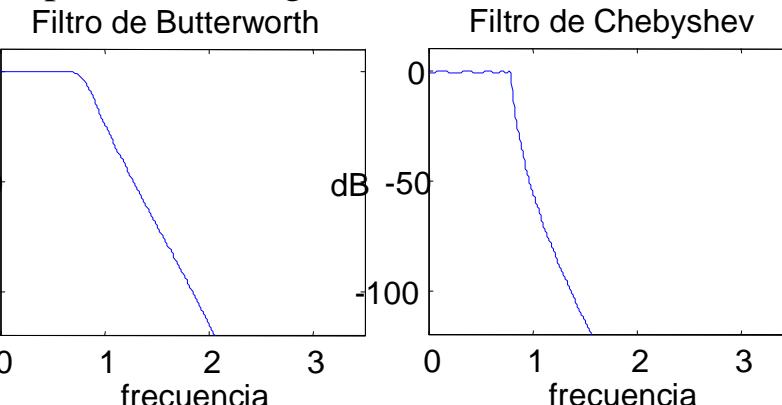
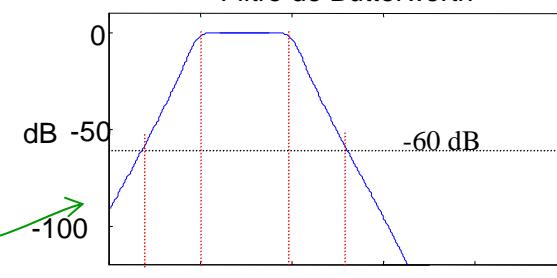
$[n, Wn] = \text{buttord}([1000 2000]/5000, [500 2500]/5000, 1, 60)$

$n=12, Wn=[0.1951 \ 0.4080]$

$\rightarrow [b, a] = \text{butter}(n, Wn)$

Filtro de Butterworth

especificaciones



Comandos MATLAB más importantes

■ Repaso de comandos práctica P4:

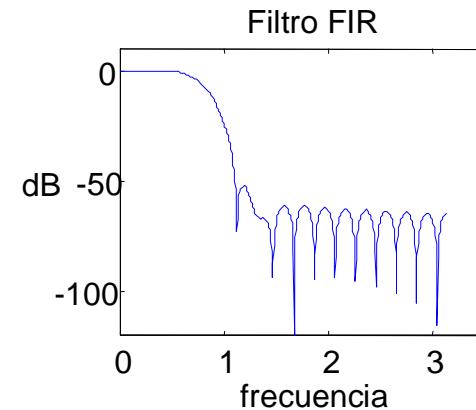
■ Diseñar y describir filtros FIR

– $B = \text{fir1}(N, Wn, 'ftype')$

Coeficientes "b"

Tipo: PB, PA,..

Frecuencia (banda) normalizada



■ La fase en un filtro FIR es lineal

■ ¡ Se necesita un orden mucho mayor que en un filtro IIR!

■ Wn se normaliza al intervalo [0,1], correspondiendo el 1 a $f_s/2$

■ Cálculo del retardo de grupo:

■ $\text{grpdelay}(B, A)$ [G, w] = grpdelay(B, A)

Retardo

Frecuencia

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

■ Manejo extensivo de:

- freqz(), impz(), filter(), zp2tf(), zplane(), unwrap(), angle()..
- subplot(), plot(), stem(), s=cumsum(X), sum(), ...

Reaso Teórico: Tipos de sistemas

Tipos de sistemas (filtros) :

- Filtro **real**: entrada real -> salida real $\Rightarrow H(z)$ es de coeficientes reales y p_k (c_k) **simétricos** respecto al eje real
- Filtro **causal**: $h(n) = 0 ; n < 0$
- Filtro **estable**: $\sum |h(n)| < \infty$ $\Rightarrow p_k$ estrictamente dentro (fuera) de $|z| < 1$ si es causal (anticausal)
- Filtro **FIR**: $\{h(n)\}_0^M ; M < \infty$ \Rightarrow si, además, es causal $\Rightarrow b_n = h(n)$ y $a_n = 0; k \geq 1 \Rightarrow p_k = 0 \forall k$
- Filtro (causal y estable) **fase mínima**: su **fase es la menor posible** de todos los sistemas con la misma $|H(\omega)|$ $\Rightarrow c_k$ dentro del círculo unidad (no en la circunferencia) \Rightarrow **inverso de fase mínima**
 - se cumple que $\int_0^\pi \tau_g(\omega) d\omega = 0 \Rightarrow \tau_g(\omega)$ ha de ser **negativo en algún intervalo**
- Filtro (causal y estable) **fase máxima**: su **fase es la mayor posible** de todos los sistemas con la misma $|H(\omega)|$ $\Rightarrow c_k$ fuera del círculo unidad

Energía
del sistema
de
fase máxima

■ **Energía parcial** (hasta la muestra n): $E(n) = \sum_{k=0}^n |h(k)|^2$

- todos los sistemas con la misma $|H(\omega)|$ tienen la misma energía total ($n \rightarrow \infty$), pero la **energía parcial cumple**:

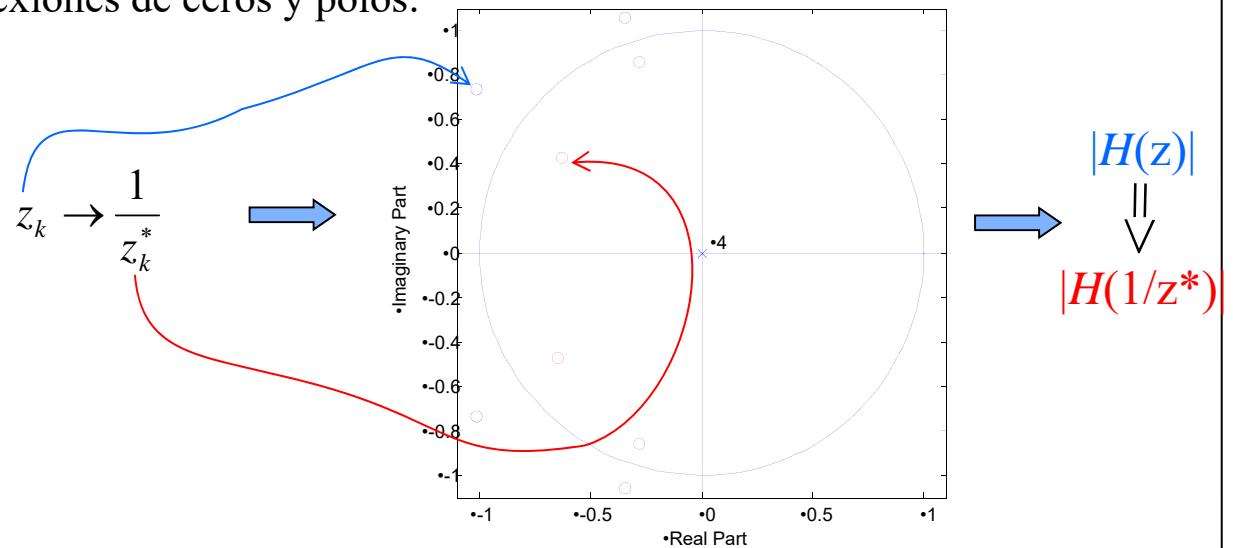
$$E_{\max}(n) \leq E(n) \leq E_{\min}(n); \quad n < \infty$$

Energía del sistema de fase mínima

Sistemas con la misma magnitud $|H(\omega)|$

■ Creación de una familia de sistemas con la misma magnitud de la resp. frecuencia

- Operación de *reflexión respecto circunferencia unidad*: $z_k \rightarrow \frac{1}{z_k^*}$
- Por cada cero hay dos posiciones: “adentro” / “afuera” (reflejada de la de “adentro”)
- $|H(z)|$ es invariante a reflexiones de ceros y polos:



- N ceros + 2 posiciones $\rightarrow 2^N$ Combinaciones dentro-fuera, de las cuales:
 - 1 combinación tiene todos los ceros dentro *Sistema fase mínima*
 - 1 combinación tiene todos los ceros fuera *Sistema fase máxima*
 - $2^N - 2$ combinaciones con parte de los ceros dentro y el resto fuera. *Sistemas fase mixta*

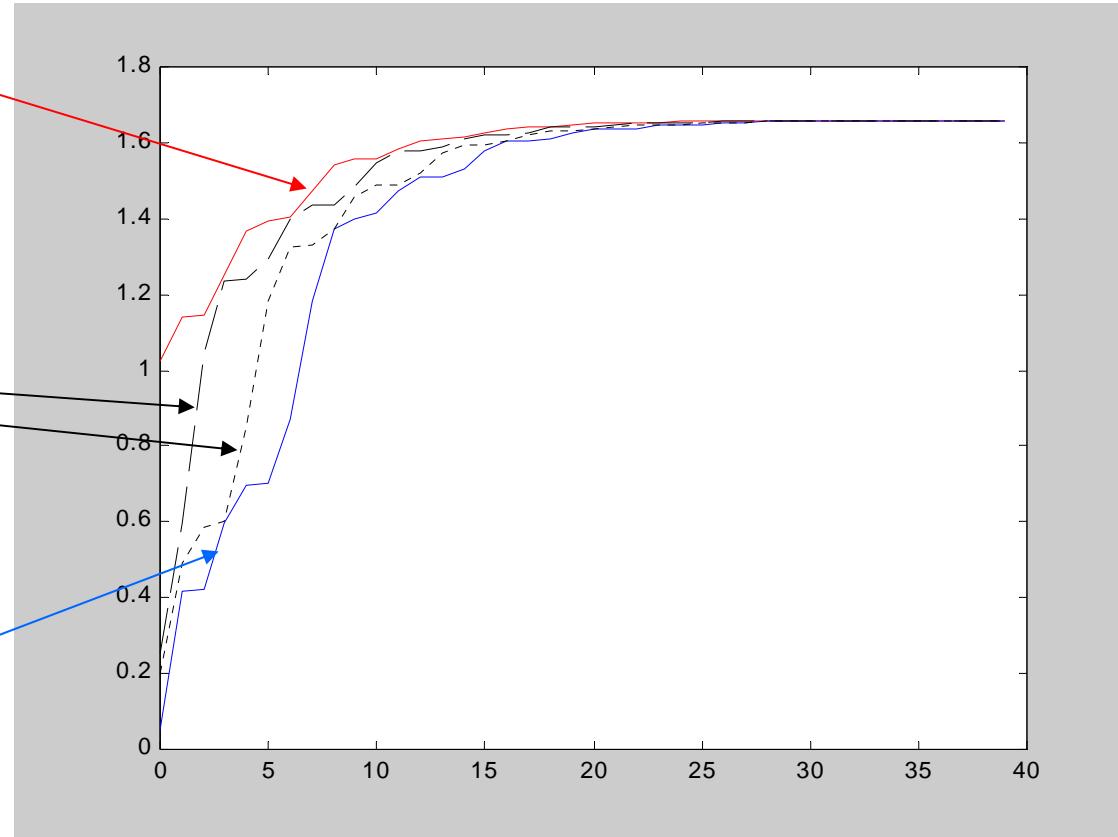
Resultados

Apartado 1.4:

*Sistema de fase mínima
(energía parcial máxima)*

*Sistemas de fase no
mínima*

*Sistema de fase máxima
(energía parcial mínima)*



Realización del Apartado 3

Apartado 3. Sistemas de fase mínima:

■ Se proporcionan los ceros y polos: $z_1 = 0,9e^{j0,6\pi}$; $z_3 = z_1^*$; $z_2 = 1,25e^{j0,8\pi}$; $z_4 = z_2^*$

■ Sistema real \rightarrow coeficientes reales \rightarrow ceros y polos \rightarrow Reales

Parejas compl.-conjung.

■ ~~¿fase mínima?~~

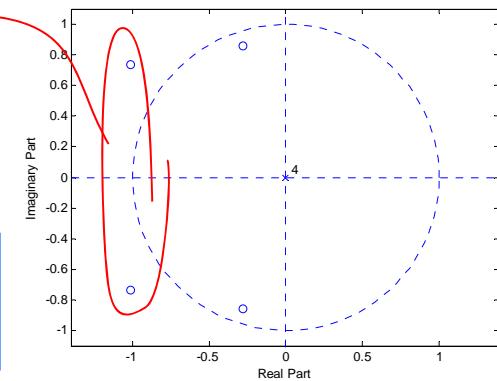
¡Ceros fuera!

$Z = [z_1, z_2, z_3, z_4]$, $P = [p_1, p_2, p_3, p_4]$

$zplane(Z, P)$

$[B, A] = zp2tf(Z, P, k)$

Los coeficientes (A, B) también caracterizan el filtro



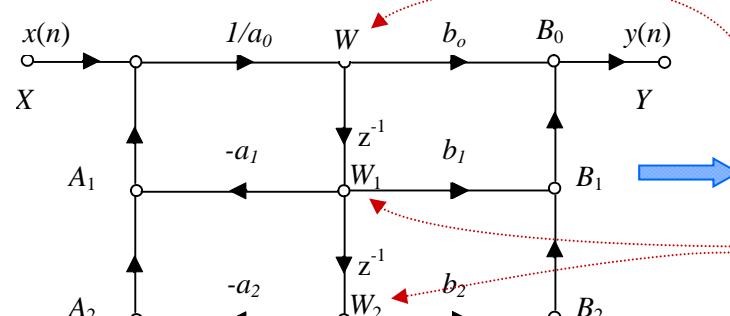
$zplane(B, A)$

Repaso Teórico: Estructuras y programas

■ Programación de sección de 2º orden tipo II:

$$H(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{a_{0k} + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

1. Construir flujograma a partir F. Transferencia



3. Obtener ecuaciones a partir de flujograma

$$\begin{aligned} W &= (x(n) - a_1W_1 - a_2W_2)/a_0 \\ y(n) &= b_0W + b_1W_1 + b_2W_2 \end{aligned}$$

4. Programar ecuaciones

4.1 Inicializar registros

4.2 Filtrar

4.3 Actualizar registros de retardadores

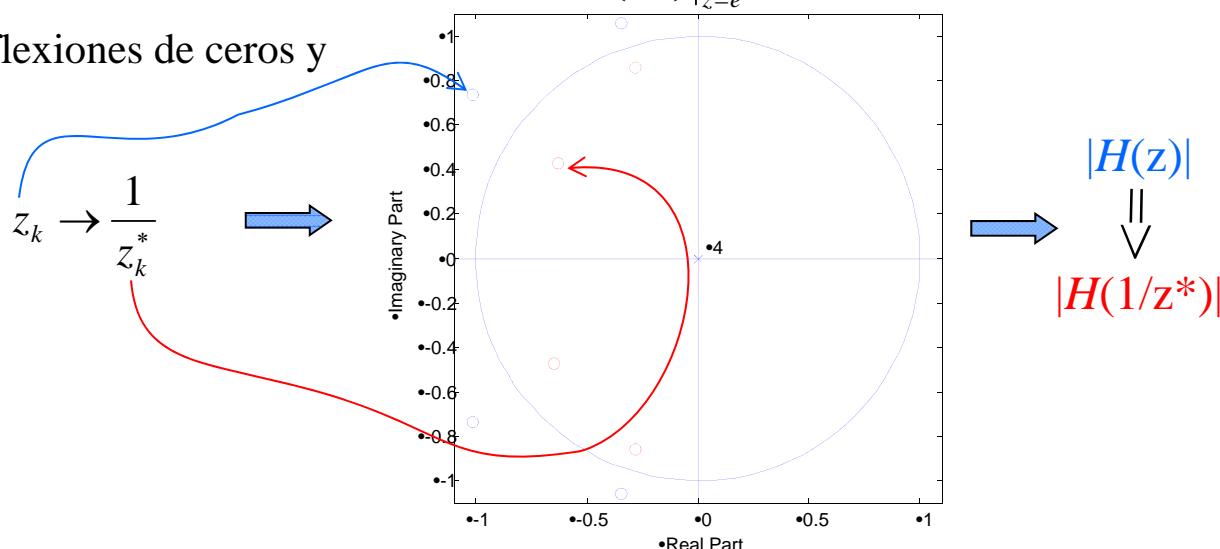
4.3 Devolver estado del sistema

```
% Programa que realiza una sección de 2º orden en forma canónica.
W1 ← c1 % Llevar valores iniciales, ci a los registros de los retardadores
W2 ← c2
% Filtrado:
for n=0:Ntrama % (bucle do, do forever, while, ..., según el lenguaje)
    % Sumas de productos
    W ← (x(n) - a1*W1 - a2*W2)/a0
    y(n) ← b0*W + b1*W1+ b2*W2
    % Actualización ordenada de memoria interna
    W2 ← W1
    W1 ← W
end for
% Llevar valores finales de los registros a cf1 cf12
cf1 ← W1
cf2 ← W2
```

Realización Apartado 3

Apartado 3:

- Función de Transferencia sistema 4º orden: $H_1(z) = k(1 - z_{c1}z^{-1})(1 - z_{c1}^*z^{-1})(1 - z_{c2}z^{-1})(1 - z_{c2}^*z^{-1})$
- La magnitud de $H(z)$ (a_n y b_n reales): $|H_1(\omega)|^2 = H_1(z)H_1^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \Big|_{z=e^{j\omega}}$
- $|H(z)|$ es invariante a reflexiones de ceros y polos:



- Combinaciones

% Datos

```

z1=0.9*exp(1i*0.6*pi);z2=1.25*exp(1i*0.8*pi);

Z1=[z1; z1'; z2; z2']; % no reflejar ningún cero
Z2=[1/z1'; 1/z1; z2; z2']; % reflejar un cero real
Z3=[z1; z1'; 1/z2'; 1/z2 ]; % reflejar otro cero
Z4=[1/z1'; 1/z1; 1/z2'; 1/z2]; % reflejar Ambos ceros

```

P=[0;0;0;0];

% i i Y los 4 polos en el origen !!

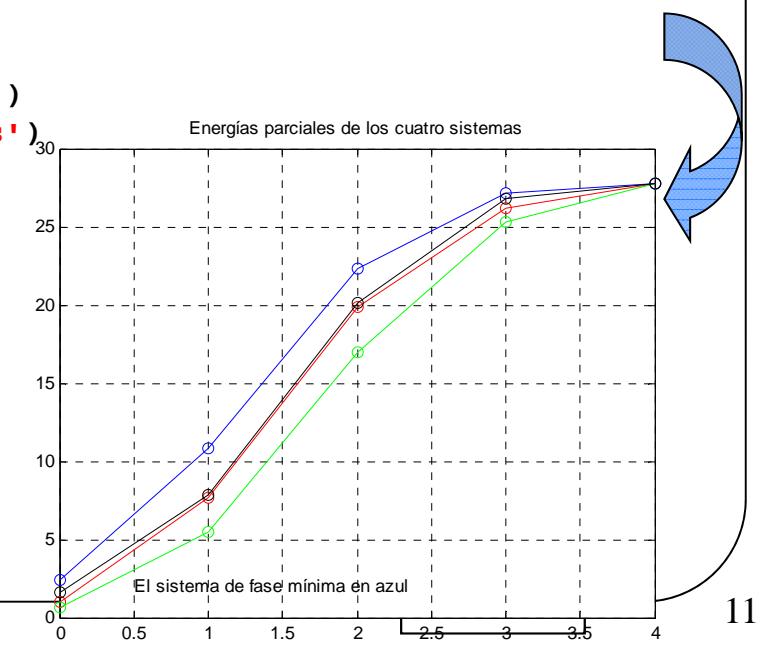
Realización apartado 3

Apartado 3.- Energía parcial:

- Un sistema con respuesta impulsiva $h_l(n)$ tiene energía parcial: $E_l(n) = \sum_{m=0}^n |h_l(m)|^2$
- Se trata de verificar que $E_{\max}(n) \leq E_l(n) \leq E_{\min}(n)$

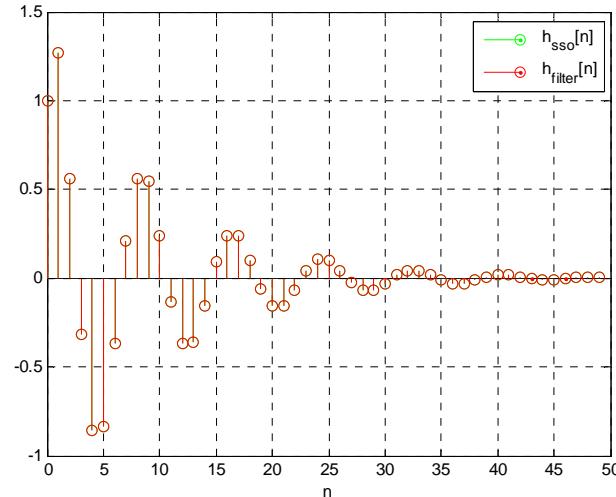
% Resp. impulsivas normalizadas a la ganancia en continua del 1er sistema.

```
h1=zp2tf(Z1,P,1); G1=sum(h1);
h2=zp2tf(Z2,P,1); G2=sum(h2); h2=h2*G1/G2;
h3=zp2tf(Z3,P,1); G3=sum(h3); h3=h3*G1/G3;
h4=zp2tf(Z4,P,1); G4=sum(h4); h4=h4*G1/G4;
.
.
% Energías parciales
E1=cumsum(h1.^2);
E2=cumsum(h2.^2);
E3=cumsum(h3.^2);
E4=cumsum(h4.^2);
n=0:length(h1)-1;
plot(n,E1,'-or',n,E2,'-og',n,E3,'-ob',n,E4,'-ok')
title('Energías parciales de los cuatro sistemas')
xlabel('n'), grid
text(0.5,2,'El sistema de fase mínima en azul')
```



Resultados

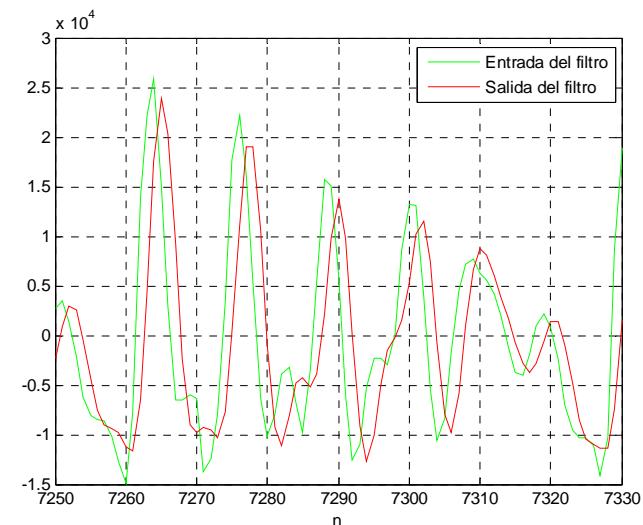
Apartado 1.2:



Apartado 1.3:

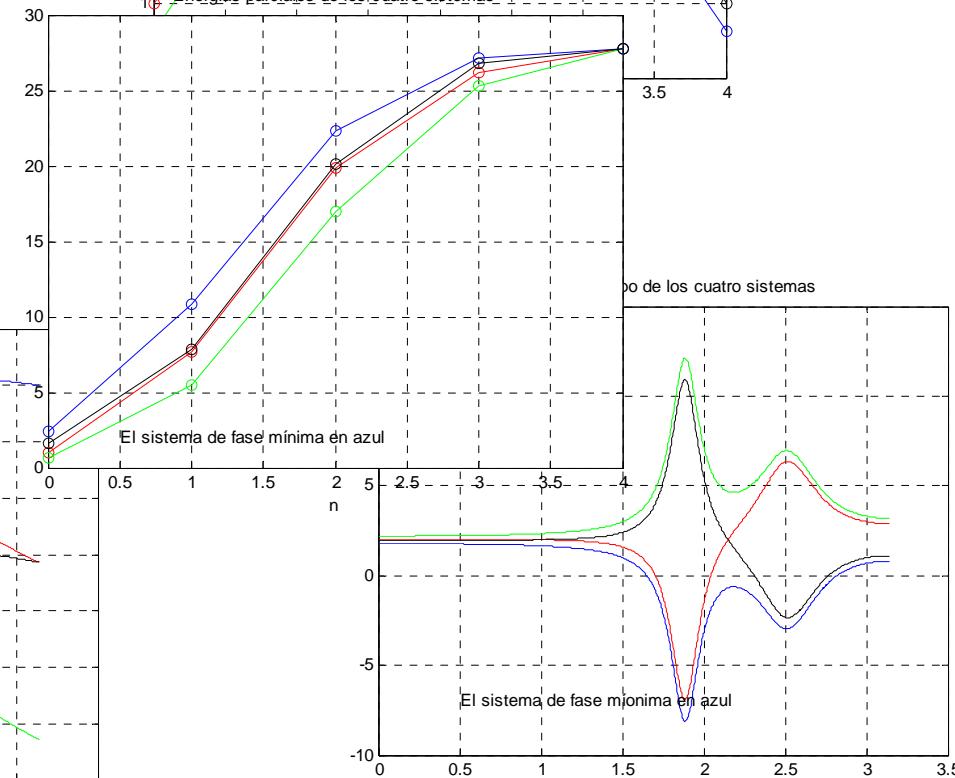
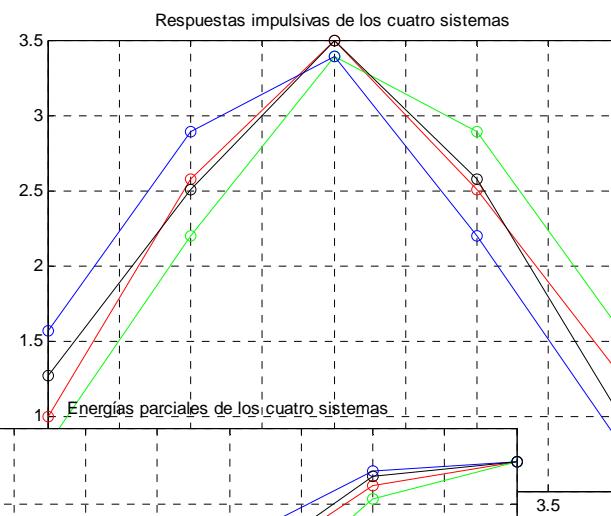
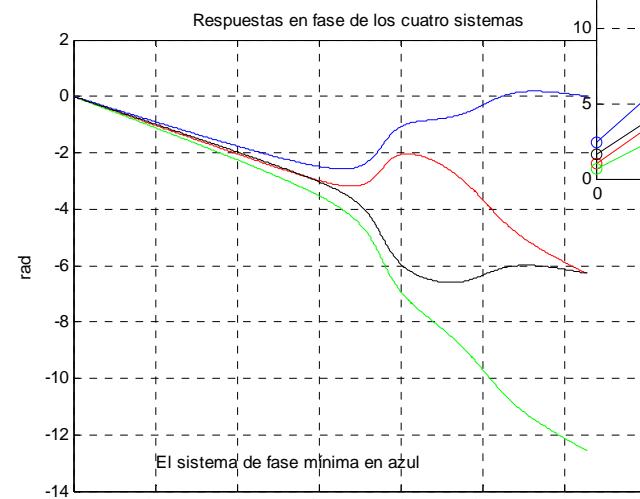
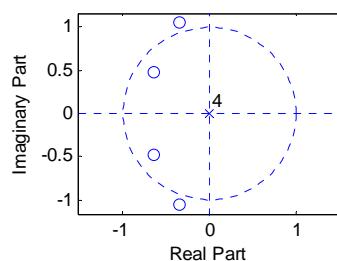
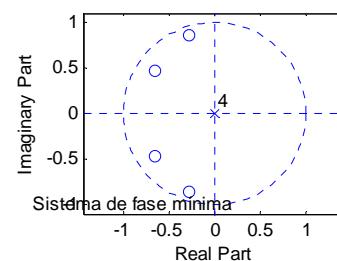
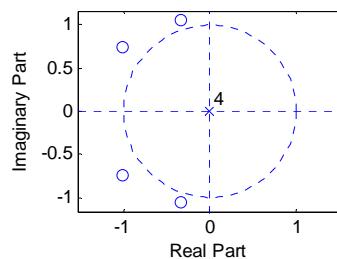
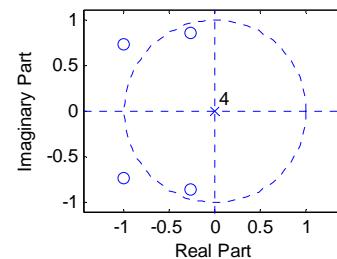
% COMENTARIOS:

% Se aprecia la señal filtrada retrasada
% 1-2 muestras y ligeramente atenuada
%(como era de esperar). La señal
% filtrada se aprecia en la audición más
%de "baja frecuencia", pero perfectamente
% inteligible.



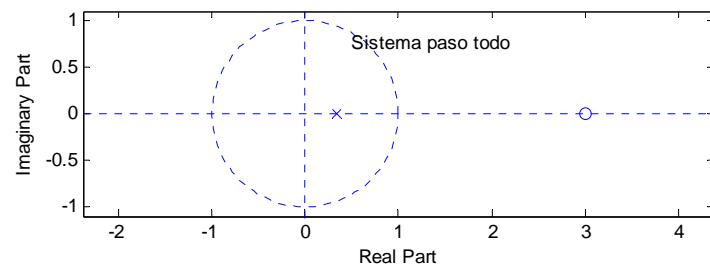
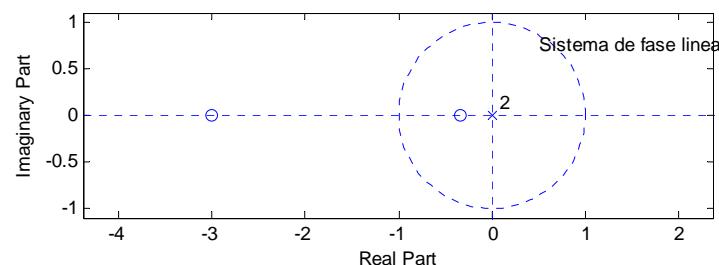
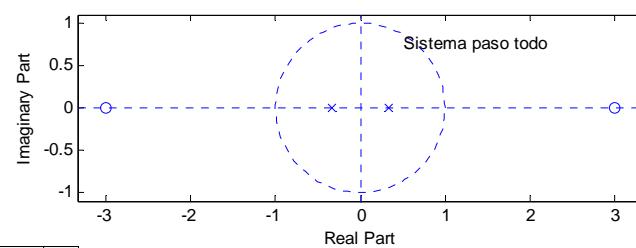
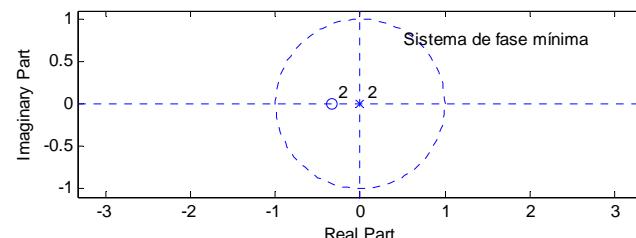
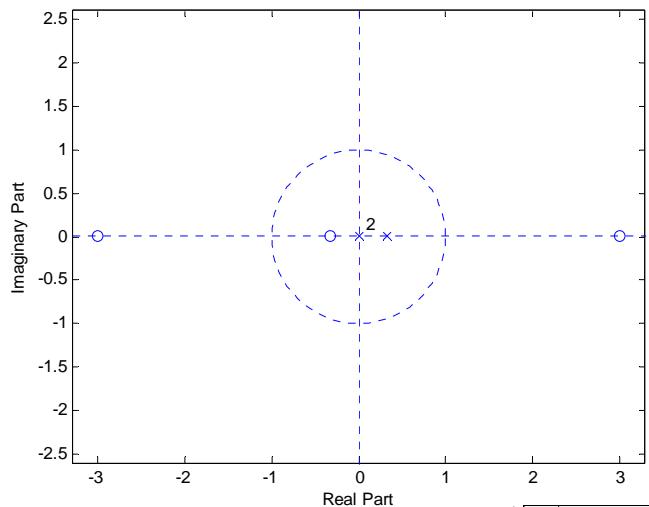
Resultados

Ejercicio 3:



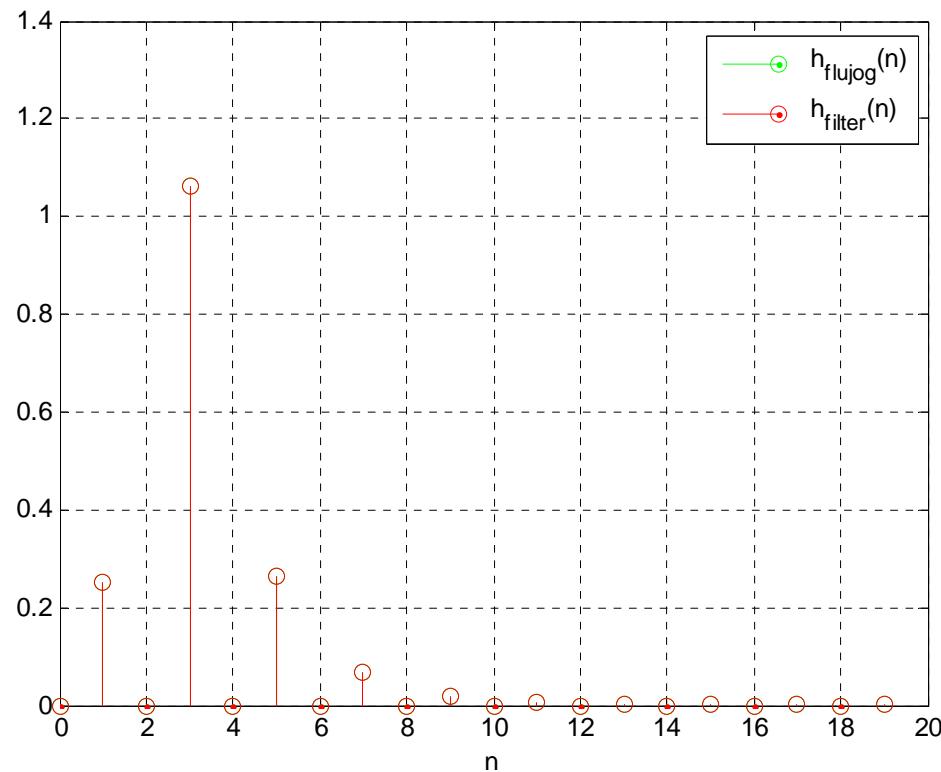
Resultados

Ejercicio 4:



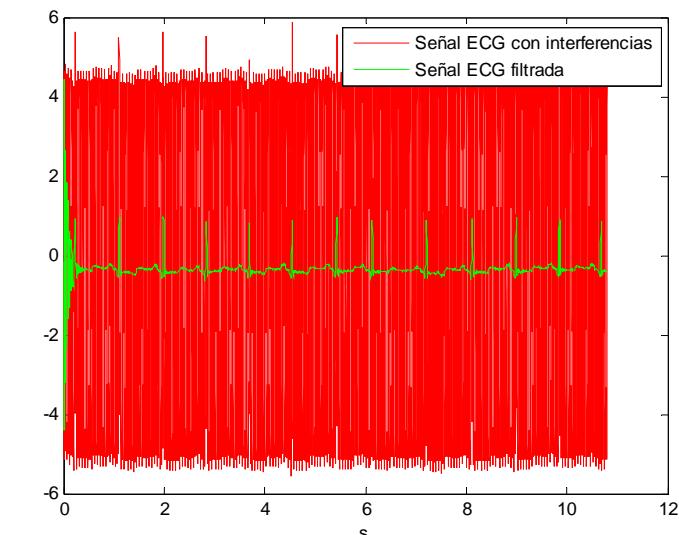
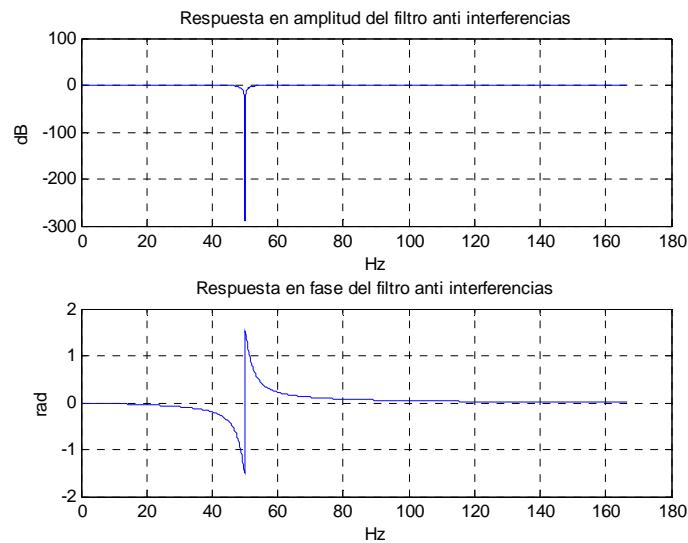
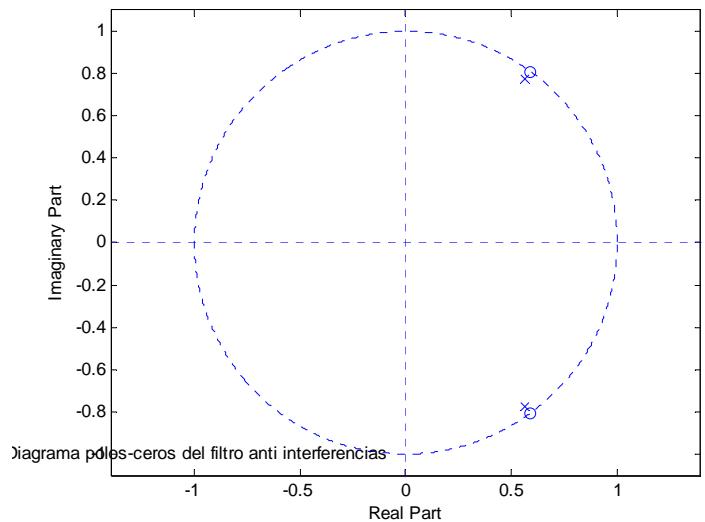
Resultados

Ejercicio Adicional 1:



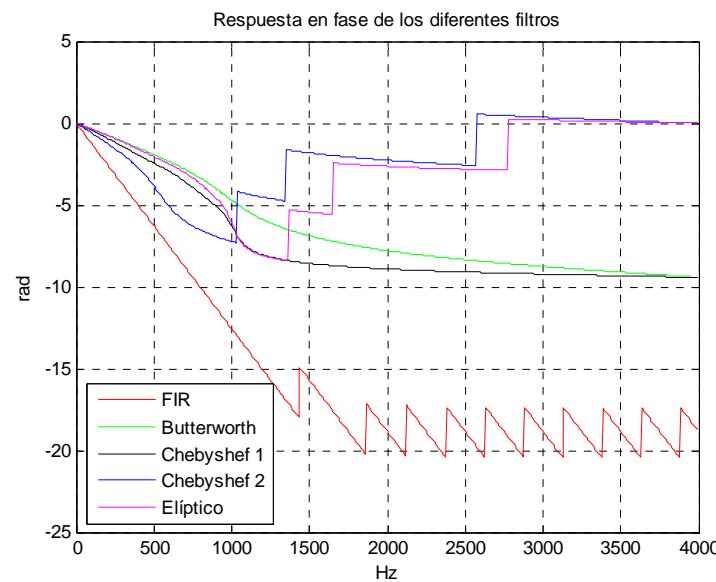
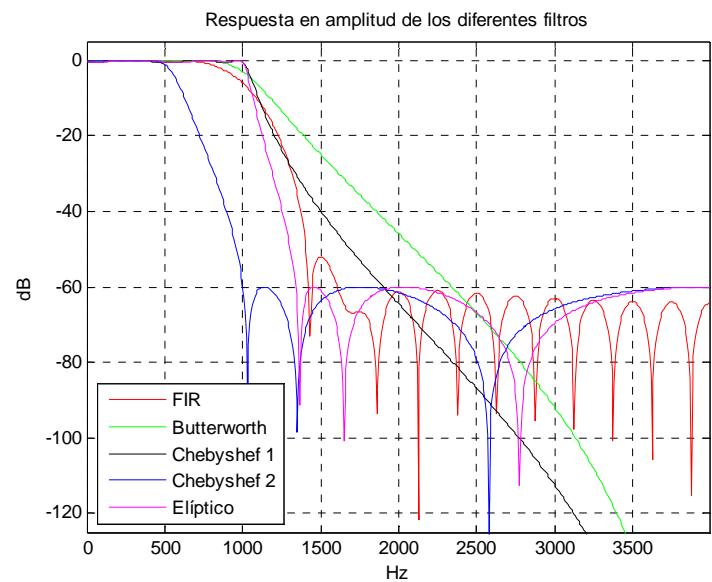
Resultados

Ejercicio Adicional 2:



Resultados

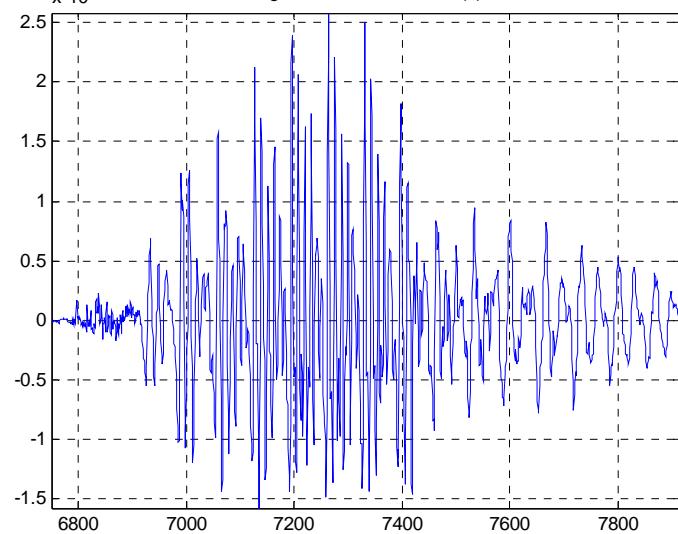
Ejercicio Adicional 3:



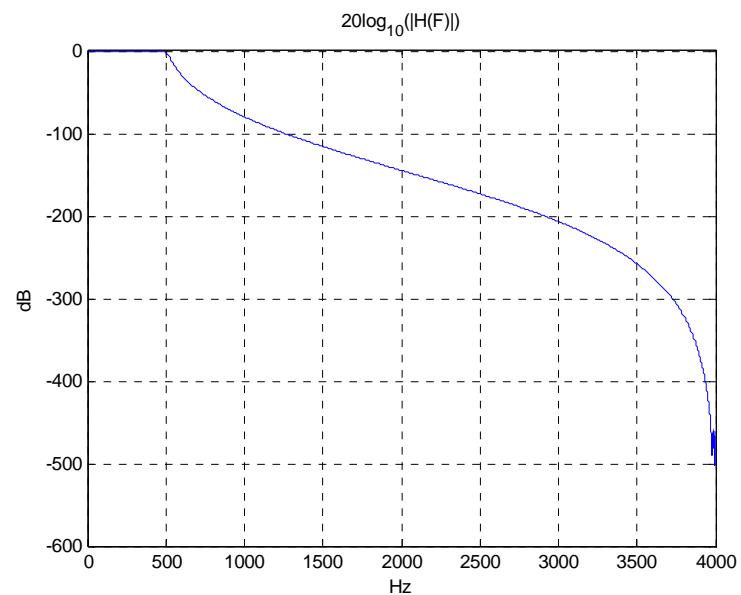
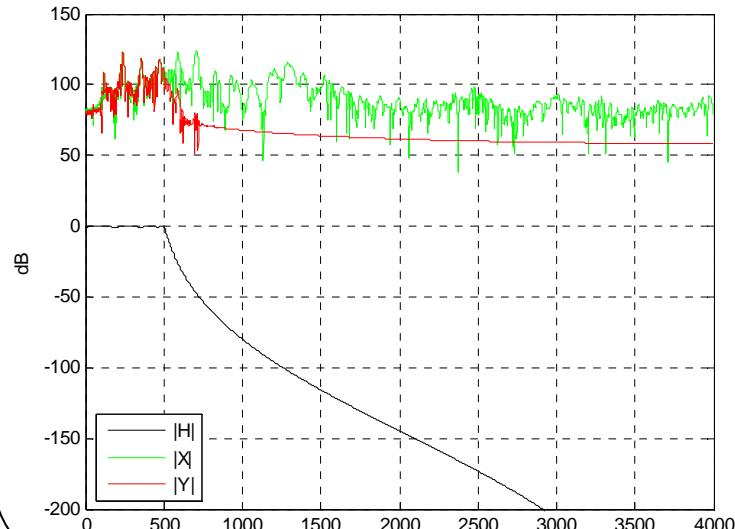
Resultados

Ejercicio Adicional 4:

Segmento de la señal $tds(n)$

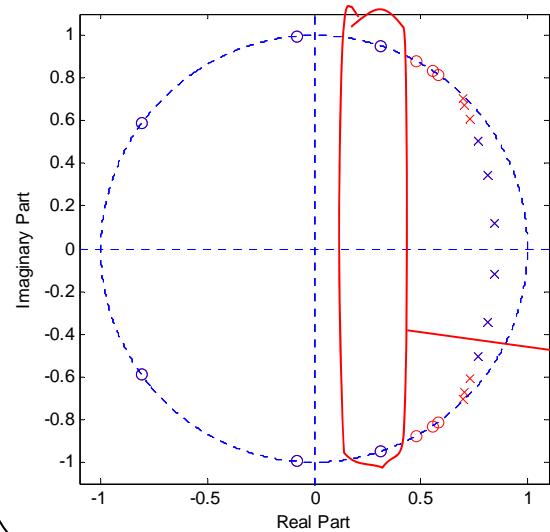
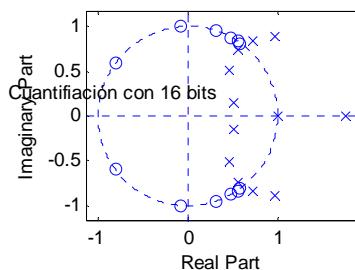
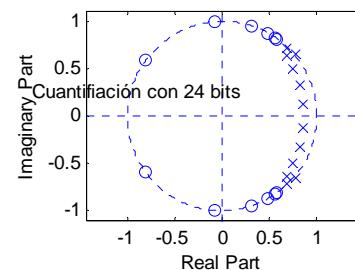
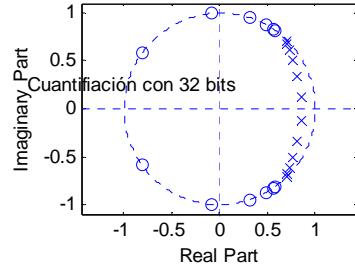
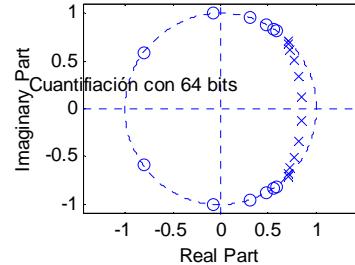
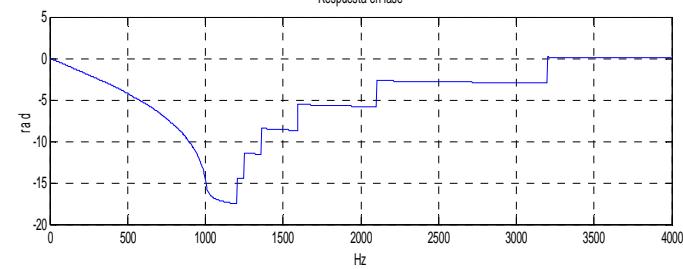
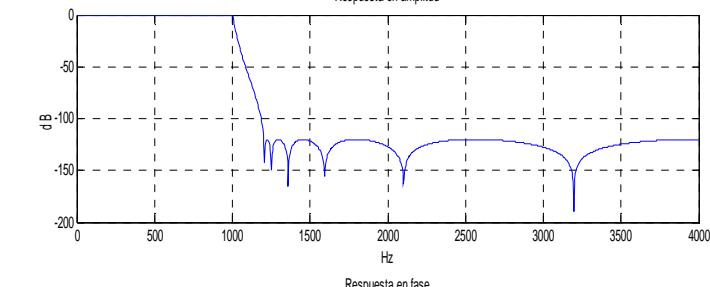


Comprobación gráfica de la relación $20\log_{10}(|Y(F)|) = 20\log_{10}(|X(F)|) + 20\log_{10}(|H(F)|)$



Resultados

Ejercicio Adicional 5:



Los ceros y polos se agrupan en parejas en las secciones de 2º orden