Tema 1

Espacios vectoriales

Ejercicios y Soluciones

1.1. Dados los vectores $u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{Q}^3$, determina para qué valores del parámetro k es $(1, k, 5)$ una combinación lineal de u y v.

Solución.

Para $k = -8$.

1.2. Expresa, cuando sea posible, el vector $(1, 1, 1)$ como combinación lineal de los vectores de la familia $\{(a, 1, 1), (1, a, 1)\,(1, 1, a)\}$ y estudia en qué casos es única dicha expresión.

Solución.

Si $a = 1$, hay infinitas maneras de expresarlo y los coeficientes que aparecen en la combinación lineal son de la forma $t_1 = 1 - t_2 - t_3$, $t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Para $a \neq 1, -2$ hay una única manera, con $t_1 = t_2 = t_3 = \dfrac{1}{a+2}$. Finalmente, si $a = -2$ el vector $(1,\ 1,\ 1)$ no es combinación lineal de los otros tres.

1.3. Escribe, para los valores del parámetro a que lo hagan posible, el vector $(a^2,\ 1,\ 1,\ 3a)$ como combinación lineal de los vectores de la familia

$$\{(a,\ 1,\ 3,\ 6),\ (1,\ -1,\ -1,\ -1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1)\}.$$

Estudia en qué casos dicha expresión es única.

Solución.

Sólo es posible si $a = \dfrac{1}{3}$. En ese caso, los coeficientes son: $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{-4}{9}$ y $t_3 = \dfrac{5}{9}$.

1.4. Comprueba que el vector $(1, 0, -1)$ se puede escribir de distintas maneras como combinación lineal de los vectores $(-3, 2, 1)$, $(1, 2, -3)$ y $(2, -3, 1)$. ¿A qué se debe?

Solución.

Se debe a que los tres últimos vectores no forman base del subespacio que generan.

1.5. Indica cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Halla una base de los que lo sean.

(I) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\}$.

(II) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 1\}$.

(III) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$.

(IV) $\{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$.

(V) $\mathbb{R}\langle(0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\rangle$.

Solución.

(I) S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Una base, por ejemplo, está formada por los vectores $(1,\ 1,\ 0)$ y $(-1,\ 0,\ 1)$.

(II) U no es subespacio vectorial.

(III) W no es subespacio vectorial.

(IV) No es subespacio vectorial.

(V) Sí es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y una base, por ejemplo, está formada por los vectores $(0,\ 1,\ 1)$ y $(0,\ 0,\ 1)$.

1.6. Dada la familia de vectores $\{(1, -1, 0),\ (2, 2, 1),\ (2, 1, 1)\}$

(I) demuestra, utilizando la definición de base, que es una base de $\mathbb{Q}^3$.

(II) Expresa cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

(III) ¿Es $\{(1, -1, 0),\ (2, 2, 1),\ (1, 3, 1)\}$ una base de $\mathbb{Q}^3$?

(IV) Indica qué vectores $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ pueden ser expresados como combinación lineal de esta nueva familia.

Solución.

(I) La familia de vectores considerada es libre en un espacio de dimensión 3 luego es una base de $\mathbb{Q}^3$.

(II) $(x,\ y,\ z) = (x - 2z)(1,\ -1,\ 0) + (x + y - 3z)(2,\ 2,\ 1) + (-x - y + 4z)(2,\ 1,\ 1)$.

(III) No puede ser una base porque es una familia ligada.

(IV) Los del conjunto $\{(x,\ y,\ z) \mid x + y - 4z = 0\}$.

1.7. Encuentra una base e indica la dimensión de cada uno de los subespacios siguientes:

(i) $\mathbb{Q}\langle(1,\,2,\,3),\,(2,\,2,\,4),\,(2,\,1,\,2),\,(2,3,0),\,(5,\,6,\,7)\rangle$, de $\mathbb{Q}^3$.

(ii) $\mathbb{R}\langle(1,\,1,\,-1,\,1),\,(2,\,1,\,3,\,2),\,(2,\,3,\,3,\,1),\,(1,\,-1,\,-1,\,2)\rangle$, de $\mathbb{R}^4$.

(iii) $\{(2x-2y,\,x-y,\,3x-3y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

(iv) $\{(x,\,x+y,\,x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Solución.

Aunque hay más de una base, B, para cada uno de los apartados, damos aquí una de ellas:

(i) $B=\{(1,\,0,\,0),\,(0,\,1,\,0),\,(0,\,0,\,1)\}$ y la dimensión es 3.

(ii) $B=\{(1,\,1,\,-1,\,1),\,(0,\,1,\,5,\,-1),\,(0,\,0,\,10,\,-1)\}$ y la dimensión es 3.

(iii) $B=\{(2,\,1,\,3)\}$ por tanto, la dimensión es 1.

(iv) $B=\{(1,\,0,\,0),\,(0,\,1,\,1)\}$ y la dimensión es 2.

1.8. Comprueba que la familia $\{(1,\,-1,\,1,\,-1),\,(1,\,2,\,2,\,1)\}$ es libre y describe el subespacio que genera. ¿Es la familia dada una base de dicho subespacio? Indica cuál es su dimensión.

Solución.

El subespacio generado es $\{(x,\,y,\,\frac{4x+y}{3},\,\frac{-x+2y}{3}\mid x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,\,y,\,z,\,t)\mid 4x+y-3z=0,\,-x+2y-3t=0\}$. Su dimensión 2 y la familia dada es una base de dicho subespacio.

1.9. Demuestra que las familias de vectores

$$\{(1,2,1),\,(1,3,2)\}\text{ y }\{(1,1,0),\,(3,8,5),\,(2,7,5)\}$$

generan un mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ y halla su dimensión. ¿Por qué no tienen el mismo número de elementos?

Solución.

Se construyen matrices en cuyas filas aparecen, respectivamente, los vectores de cada una de las familias. Se calculan sus correspondientes matrices de Hermite y se observa que las filas no nulas son iguales, por tanto los subespacios que generan las dos familias son iguales. La dimensión de dicho subespacio es 2.

1.10. Dado S el subespacio de $\mathbb{Q}^4$ generado por los vectores $(1,-1,0,-1)$, $(2,-3,-2,5)$ y $(-1,2,2,-6)$.

(I) Encuentra una base de S y describe todos los vectores de dicho subespacio.

(II) Completa la base de S dada en (I) hasta conseguir una base de $\mathbb{Q}^4$.

Solución.

(I) Construimos una matriz que tiene como filas los vectores dados. Para describir los vectores de S, tomamos como base la que se obtiene al llegar hasta la forma normal de Hermite: $\{(1,\ 0,\ 2,\ -8),\ (0,\ 1,\ 2,\ -7)\}$. Los vectores de S son de la forma $(x,\ y,\ 2x+2y,\ -8x-7y)$, con $x,\ y \in \mathbb{R}$.

(II) Una base de $\mathbb{Q}^4$ es, por ejemplo, $\{(1,\ 0,\ 2,\ -8),\ (0,\ 1,\ 2,\ -7),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 1)\}$.

$\boxed{\textbf{1.11.}}$ Dados los conjuntos

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 \mid x = 3z\} \quad \text{y}$$

$$T = \mathbb{Q}\langle(3, 2, 1, 2),\ (3, -3, 1, -3),\ (3, 0, 1, 0)\rangle,$$

(I) prueba que el subespacio T está contenido en S.

(II) Encuentra una base de T y complétala hasta formar una base de S.

(III) Completa esta última hasta conseguir una base de $\mathbb{Q}^4$.

Solución.

(I) Una base de T es $\{(3,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0,\ 1)\}$. Es decir, cualquier vector de T será de la forma $(3x,\ y,\ x,\ y)$ y, por tanto, está en S.

(II) Como $\dim S = 3$, para completar la base de T hasta formar una base de S basta añadir sólo un vector de S (que no esté en T) a cualquier base de T. Por ejemplo, tomamos el vector $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$.

(III) Basta añadir un cuarto vector, que forme junto con los otros tres una familia libre, para obtener una base de $\mathbb{Q}^4$. Por ejemplo, $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$.

$\boxed{\textbf{1.12.}}$ Si A es cualquiera de las matrices siguientes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula bases y las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Fil}(A)$.

Solución.

Una base de Fil A, en el caso de la primera matriz, es $\{(1,\,0,\,2),\,(0,\,-1,\,4),\,(0,\,0,\,2)\}$. En el de la segunda, una base es $\{(1,\,0,\,-1),\,(0,\,1,\,1),\,(0,\,0,\,4)\}$. Y en el caso de la tercera matriz, una base de Fil A es $\{(-1,\,1,\,1),\,(0,\,4,\,0),\,(0,\,0,\,3)\}$. En los tres casos, la dimensión de Fil A es 3.

1.13. Si A es cualquiera de las matrices siguientes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & c & -1 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula, según los valores de los parámetros a, b y c, bases y las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Fil}(A)$.

Solución.

(I) Para cada valor $a \in \mathbb{R}$, una base de Fil A es $\{(1,\,0,\,a),\,(0,\,1,\,2+a),\,(0,\,0,\,-2)\}$ y por tanto su dimensión es 3.

(II) Si $b \neq 0$ una base de Fil A es $\{(1,\,0,\,1),\,(0,\,1,\,1),\,(0,\,0,\,-b)\}$. Si $b = 0$ una base es $\{(1,\,0,\,1),\,(0,\,1,\,1)\}$.

(III) Cuando $c \neq -1$, una base de Fil A es $\{(-1,\,1,\,1),\,(0,\,1,\,-1-c),\,(0,\,0,\,(c+1)^2)\}$. Para $c = -1$ una base es $\{(-1,\,1,\,1),\,(0,\,1,\,0)\}$.

1.14. Justificando la respuesta, dí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(I) Si A es un matriz cuadrada, entonces $\mathrm{Fil}(A) = \mathrm{Col}(A)$.

(II) $\mathrm{Fil}(B) = \mathrm{Fil}(-B)$ y $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Col}(-B)$ para una matriz cualquiera B.

Solución.

(I) Si consideramos, por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que la afirmación no es cierta, aunque dim(Fil A) =dim(Col A).

(II) Es verdadera, ya que $K\langle u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m\rangle = K\langle -u_1, \ldots, -u_i, \ldots, -u_m\rangle$.

1.15. Halla bases y las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Col}(A)$ de las matrices que aparecen en los ejercicios 12 y 13.

Solución.

Cada matriz A del ejercicio12 verifica que $\dim \mathrm{Fil}\, A = 3$. Por tanto, $\dim \mathrm{Col}\, A = 3$ y las correspondientes columnas de cada matriz serán una base del subespacio $\mathrm{Col}\, A$.

Para la primera matriz del ejercicio 13, una base de $\mathrm{Col}\, A$ es, por ejemplo, para cada valor $a \in \mathbb{R}$ $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -2)\}$.

Para la segunda matriz, una base es $\{(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ b,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ cuando $b \neq 0$, y $\{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ cuando $b = 0$.

Para la tercera matriz, una base es $\{(1,\ -1,\ 1),\ (0,\ c+1,\ -1),\ (0,\ 0,\ c+1)\}$ cuando $c \neq -1$, y $\{(1,\ -1,\ 1),\ (0,\ 0,\ -1)\}$ cuando $c = -1$.

1.16. Para cada uno de los sistemas del ejercicio 17 del tema anterior, expresa, si es posible, la columna independiente como combinación lineal de los vectores columna de la matriz de coeficientes del sistema. ¿En qué casos dicha expresión es única?

Solución.

Sólo es posible para los sistemas que han resultado compatibles. Las n-tuplas de escalares que aparecen en las combinaciones lineales son precisamente las soluciones del sistema. La expresión es única cuando el sistema es compatible determinado.

1.17. En los ejercicios 17 y 18 del tema anterior, expresa los conjuntos de soluciones obtenidos como subespacios vectoriales, en el caso de los sistemas homogéneos, y como subespacios trasladados, en los demás casos.

1.18. En $\mathbb{R}_3[x]$ se considera el sistema de vectores $B = [v_1 = x(x-1),\ v_2 = (x-1)(x+1),\ v_3 = x(x+1),\ v_4 = x^3]$,

(I) demuestra que dicho sistema es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(II) Halla la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base B.

(III) Dado el vector $v = 1v_1 + 2v_2 - v_3$, cuyas coordenadas vienen expresadas en función de la base B, determina sus coordenadas en la base canónica.

Solución.

(I) Los vectores de B son un sistema libre de cuatro vectores en un espacio de dimensión 4, por tanto son base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(II) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(III) Las coordenadas del vector en la base canónica son $(-2,\ -2,\ 2,\ 0)$.

1.19. En $\mathbb{Q}^3$ se consideran las bases

$$B = [(1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 0), (0, 0, -1)] \text{ y } \bar{B} = [(0,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 1), (1,\ 1,\ 1)].$$

(I) halla las matrices de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{Q}^3$ a las bases B y $\bar{B}$.

(II) Usando el apartado anterior, calcula la matriz de cambio de base de la base $\bar{B}$ a la base B

(III) Si $v = 3(0,\ 0,\ 1) - 1(0,\ 1,\ 1) + 2(1,\ 1,\ 1)$, determina sus coordenadas en la base B.

Solución.

(I) Las matrices son cambio de base de la base canónica de $\mathbb{Q}^3$ a las bases B y $\bar{B}$ son, respectivamente,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(II) La matriz pedida es $A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(III) Las coordenadas de v en la base B son $(2,\ -1,\ 2)$.

1.20. Dadas

$$B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] \text{ y } \overline{B} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right],$$

dos bases de un subespacio S de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(I) Halla la matriz P de cambio de la base B a la base $\overline{B}$.

(II) Si $\mathbf{v}$ es un vector de S cuyas coordenadas en la base $\overline{B}$ son $(1,\ 1)$, calcula sus coordenadas en la base B.

Solución.

(I) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(II) Las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B son $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$.