



Apellidos:

Nombre: DNI:

Titulación: Grupo:

-
- ✓ **Criterios de puntuación:** para alcanzar la máxima puntuación en un problema, éste debe estar, en su totalidad, correctamente planteado, explicado y resuelto. Se valorará positivamente el orden y la claridad en las respuestas.
 - ✓ **Calculadora:** no está permitido el uso de calculadora de ningún tipo.
 - ✓ **Tiempo:** a partir de la entrega del enunciado tenéis 1.5 horas para resolver el examen.
 - ✓ **log** representa el logaritmo neperiano.
-

1. (1.5 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = \left(\log(2 + y - x^2), \sqrt{x^2 - 2y} \right),$$

determina y representa el dominio de f .

2. (2 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{\sqrt{|x| + |y|}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

estudia la continuidad de f en el punto $(0, 0)$.

3. (2.5 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^4 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Calcula la derivada direccional de f en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ en cualquier dirección dada por el vector unitario $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.
- b) Utilizando el apartado a) y la fórmula $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$, ¿qué puede decirse de la diferenciabilidad de f en el origen?

4. (2.5 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + y + 1,$$

demuestra que $1 \leq f(x, y) \leq 4$ para todo $(x, y) \in D$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}.$$

5. (1.5 puntos) Dada la función $f(x, y) = \log(1 + xy)$,

- a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(0, 0)$.
- b) A partir de la expresión del polinomio de Taylor de grado 2, ¿podemos concluir que f tiene un punto crítico en $(0, 0)$? Si la respuesta es afirmativa, determina si $(0, 0)$ es un mínimo relativo, máximo relativo o un punto silla. Razona las respuestas.

