Tema 4

Preliminares de Cálculo

4.1. Funciones reales de una variable real

Definición 4.1.1 (Función real de una variable real)**.**

Una *función real de una variable real*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una aplicación que hace corresponder a cada elemento x de cierto subconjunto de $\mathbb{R}$ un único número real $y = f(x)$. La variable x se llama *variable independiente* y la variable y *variable dependiente*.

- El subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función f está definida (los posibles valores de la variable independiente) se llama *dominio* de f y se denota $\operatorname{Dom} f$:

  $$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \text{ está bien definido}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

  Si el dominio de una función f no viene dado explícitamente entenderemos que consiste en todos los posibles valores reales de x para los que $f(x)$ tiene sentido.

- Llamamos *recorrido* de f al conjunto de valores de la variable dependiente, lo denotamos $\operatorname{Rec} f$:

  $$\operatorname{Rec} f = \{f(x),\ \ x \in \operatorname{Dom} f\} \subseteq \mathbb{R}.$$

- Llamamos *grafo* de f al subconjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la relación $y = f(x)$:

  $$\text{grafo de } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \in \operatorname{Dom} f\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ es grafo de una función si y sólo si la intersección de G con cada recta vertical es a lo sumo un punto. El dominio de la función consiste en el conjunto de valores x_0 tales que la recta vertical $x = x_0$ corta a G. Por ejemplo, un círculo no es el grafo de ninguna función pero cualquier parábola vertical sí lo es.

Ejemplos 4.1.2. (I) Si $f(x) = \sqrt{x-1}$, entonces $\operatorname{Dom} f = [1, \infty)$ y $\operatorname{Rec} f = [0, \infty)$.

(II) Si $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, entonces $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec} g = (0, 1]$.

(III) Si $h(x) = \ln(x+1)$, entonces $\operatorname{Dom} h = (-1, \infty)$ y $\operatorname{Rec} h = \mathbb{R}$.

(IV) Si

$$I(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 \text{ si } 0 < x < 1, \end{cases}$$

entonces $\operatorname{Dom} l = [-1, 1)$ y $\operatorname{Rec} l = \{-1, 1\}$.

4.2. Límites

Definición 4.2.1 (Límite de una función en un punto)**.** Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 no pertenece necesariamente a $\operatorname{Dom} f$) y $L \in \mathbb{R}$.

- Decimos que L es el *límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$* y escribimos

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

  si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Decimos que L es el *límite cuando x tiende a x_0 por la derecha de $f(x)$* y escribimos

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

  si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- Decimos que L es el *límite cuando x tiende a x_0 por la izquierda de $f(x)$* y escribimos

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $-\delta < x - x_0 < 0$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 4.2.2 (Existencia del límite). *El límite* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe si y sólo si existen* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *y, además, coinciden.*

Ejemplos 4.2.3. (I) $\lim_{x\to 1} 2x + 5 = 7$ porque dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon/2 > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$ entonces $|(2x+5) - 7| = 2|x-1| < \varepsilon$.

(II) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ porque dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \text{mín}\{2\varepsilon/3, 1\} > 0$ tal que si $|x-1| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{|x-1||x+1|}{2(x^2+1)} < \dfrac{3|x-1|}{2} < \varepsilon$.

(III) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe porque $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$.

(IV) $\lim_{x\to 0^+} x^{-2}$ no existe porque si $L > 0$ se tiene que $\left|x^{-2} - L\right| > 1$ para todo $0 < x < (L+1)^{-1/2}$; y si $L \leq 0$ se tiene que $|x^{-2} - L| > 1$ para todo $0 < x < 1$.

También tiene sentido preguntarse qué valores toma la función cuando la variable independiente crece o decrece infinitamente.

Definición 4.2.4 (Límite en el infinito). Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, decimos que L es el *límite cuando x tiende a ∞ de $f(x)$* (respectivamente, cuando x tiende a $-\infty$) y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \left(\text{respectivamente, } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $x > x_0$ (respectivamente, $x < x_0$) entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Análogamente se pueden definir límites infinitos en el infinito.

Teorema 4.2.5 (Órdenes de infinidad). *Para los límites en infinito de las funciones elementales se verifica:*

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x^a = \lim_{x\to\infty} b^x = \lim_{x\to\infty} x^x = \infty$$

siempre que $a > 0$ y $b > 1$. Además, si denotamos $f(x) \underset{x\to x_0}{\ll} g(x)$ el hecho de que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, también tenemos que

$$\ln x \underset{x\to\infty}{\ll} x^a \underset{x\to\infty}{\ll} b^x \underset{x\to\infty}{\ll} x^x$$

siempre que $a > 0$ y $b > 1$.

Teorema 4.2.6 (Propiedades algebraicas y de orden de los límites)**.** *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$*. Entonces,*

(I) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$*,*

(II) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$*,*

(III) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$*, si* $L_2 \neq 0$*,*

(IV) Si existe $\delta_0 > 0$ *tal que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *tal que* $0 < |x - x_0| < \delta_0$*, entonces* $L_1 \leq L_2$*.*

(V) Regla del Sandwich: Si $L_1 = L_2 = L$ *y existe* $\delta_0 > 0$ *tal que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* x *tal que* $0 < |x - x_0| < \delta_0$*, entonces* $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$*.*

Las mismas propiedades se satisfacen para límites por la derecha y por la izquierda.

Equivalencias

Cuando dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, decimos que son *equivalentes cuando* $x \to x_0$, y denotamos $f(x) \underset{x\to x_0}{\approx} g(x)$.

Por las propiedades algebraicas y de orden de los límites, si $f(x) \underset{x\to x_0}{\approx} g(x)$ entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x),$$

es decir, podemos sustituir una función por otra equivalente cuando está multiplicando en un límite.

Las siguientes son las equivalencias más usadas:

(I) si $A_n \neq 0$, $A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n \underset{x\to\infty}{\approx} A_n x^n$

(II) $\operatorname{sen}\theta \underset{\theta\to 0}{\approx} \theta$

(III) $1 - \cos\theta \underset{\theta\to 0}{\approx} \frac{\theta^2}{2}$

(IV) $\ln(1+\theta) \underset{\theta\to 0}{\approx} \theta$ o $\ln\theta \underset{\theta\to 1}{\approx} \theta - 1$

(V) $e^\theta - 1 \underset{\theta\to 0}{\approx} \theta$

4.3. Límites infinitos

Hemos visto en el ejemplo 4.2.3 (iv) que no existe ningún número real que sea $\lim_{x\to 0^+} x^{-2}$. El motivo es que la función x^{-2} crece sin cota cuando x se acerca a 0. Para expresar este tipo de fenómenos se definen los límites infinitos.

Definición 4.3.1 (Límite infinito)**.** Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 no pertenece necesariamente a $\mathrm{Dom} f(x)$), decimos que el *límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$* es *infinito* (respectivamente, *menos infinito*) y escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad (\text{respectivamente, } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Análogamente se pueden definir límites infinitos por la derecha y por la izquierda.

4.3.1. "Álgebra" del infinito

Resultados análogos a los del *Teorema (propiedades algebraicas y de orden de los límites)* se cumplen para límites infinitos:

$\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$

$(\pm\infty)(\pm\infty) = \infty$, $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$

Si $a > 0$, $a(\pm\infty) = \pm\infty$ y si $a < 0$, $a(\pm\infty) = \mp\infty$

$\dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$, $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$

Todos estos resultados se han de leer como propiedades de los límites. Por ejemplo, decir que $\dfrac{1}{0^+} = \infty$ significa que si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $g(x) > 0$ alrededor de x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \infty$.

4.3.2. Casos indeterminados

En los casos siguientes el resultado del límite no puede darse *a priori* mediante un teorema sino que hay que estudiar cada caso particular:

Límites del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Para calcular este tipo de límites se divide numerador y denominador por el término "mayor"(véase el *Teorema de los órdenes de infinidad*) o se usan equivalencias.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+e^x}{5^x-x^5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x/5^x+e^x/5^x}{1-x^5/5^x}=0$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

Límites del tipo $\frac{0}{0}$

Para calcular este tipo de límites se divide numerador y denominador por el factor que tiende a 0 o se usan equivalencias.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-1)}{x-1}=1$,
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x^2+x+1=3$.

Límites del tipo $0\cdot\infty$

Estos límites se pueden expresar como límites de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Límites del tipo $\infty-\infty$

Para calcular este tipo de límites se factoriza la función reduciendo este caso a uno de los casos anteriores; si se trata de diferencias de raíces, se multiplica por el conjugado.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=\infty$, y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3+x+1}\right)=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x-2}{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3+x+1}}=0$.

Límites del tipo ∞^0 y 1^∞

Para calcular este tipo de límites se expresan como una exponencial con base e y se calcula el límite del exponente.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x^2}}=1$,
$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{x-1}}=e$.

4.4. Funciones continuas

Definición 4.4.1 (Función continua)**.** Dados $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $x_0\in\mathbb{R}$ un punto del interior del dominio de f (es decir, existe $\delta>0$ tal que $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\operatorname{Dom} f$), se dice que f es *continua* en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si $\operatorname{Dom} f = [a, b]$, se dice que f es *continua* en a (respectivamente, en b) si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad (\text{respectivamente, } \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)).$$

Si $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que f es *continua* en S si f es continua en cada punto de S.

El grafo de una función continua se puede dibujar sin separar el lápiz del papel.

Teorema 4.4.2 (Propiedades de las funciones continuas). *(I) Si f y g son continuas en $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0; y si además $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0.*

(II) Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Definición 4.4.3 (Discontinuidad). Si f no es continua en x_0, x_0 se dice *discontinuidad* de f. Distinguimos distintos tipos de discontinuidades según sea el $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

- *Discontinuidades evitables:* Una discontinuidad x_0 de f se dice evitable si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe y es finito. El nombre de evitable se debe a que si definiéramos $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ entonces f sería continua en x_0.

  Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ porque $1 \notin \operatorname{Dom} f$ pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

- *Discontinuidades de salto:* Una discontinuidad x_0 de f se dice de salto si existen $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y son finitos pero no coinciden (en particular, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe). El nombre de salto se debe a que en el grafo de la función hay un salto de $|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)|$ unidades en $x = x_0$.

  Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$ porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

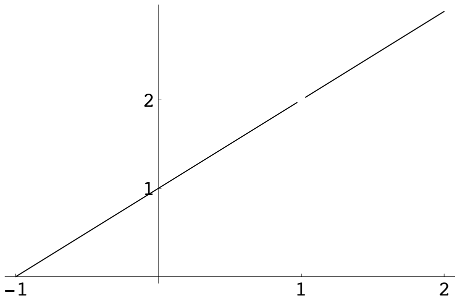
- *Discontinuidades infinitas:* Una discontinuidad x_0 de f se dice infinita si al menos uno de los límites laterales $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ es infinito (en particular, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe). El grafo de la función tiene una asíntota vertical, la recta vertical $x = x_0$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.

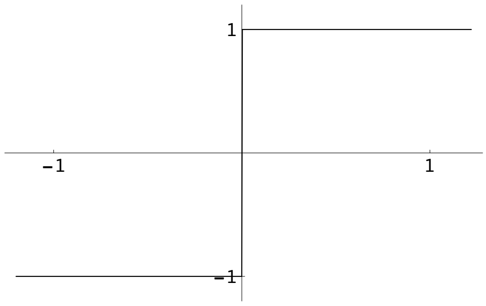
- *Discontinuidades oscilatorias:* Una discontinuidad x_0 de f se dice oscilatoria si uno de los límites laterales $(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x))$ no existe ni es infinito.

  Por ejemplo, la función $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tiene una discontinuidad oscilatoria en $x = 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ni existe ni es infinito.

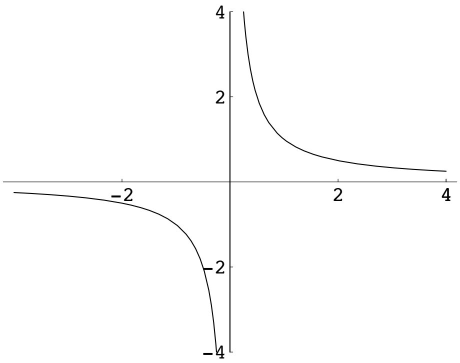
La Figura III muestra el grafo de los ejemplos anteriores.



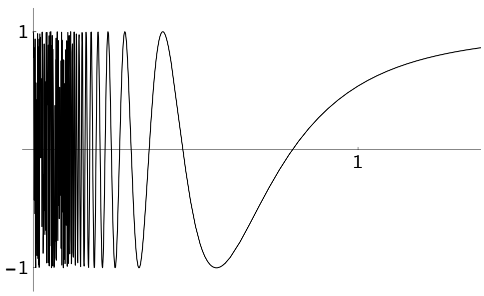
discontinuidad evitable en $x = 1$



discontinuidad de salto en $x = 0$



discontinuidad infinita en $x = 0$



discontinuidad oscilatoria en $x = 0$

Figura III.

Ejemplo 4.4.4. La función *parte entera* de un número real, $f(x) = [x]$, $(x \in \mathbb{R})$, tiene discontinuidades de salto en cada número entero.

Teorema 4.4.5 (Bolzano)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Teorema 4.4.6 (Valor Intermedio)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$ está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = k$.*

Observamos que el *Teorema de Bolzano* y el *Teorema del Valor Intermedio* son equivalentes.

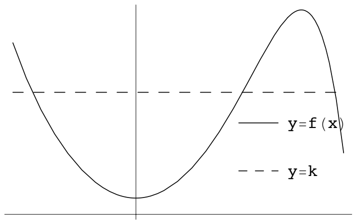


Figura IV. Teorema del Valor Intermedio.

Ejemplo 4.4.7 (Aplicación a la resolución numérica de ecuaciones)**.** Podemos demostrar qque el polinomio $p(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene una raíz entre 0 y 1 y aproximar dicha raíz con un error menor que una décima:
Por el *Teorema de Bolzano*, como $p(0,4) < 0$ y $p(0,5) > 0$, existe una raíz de $p(x)$ entre $0,4$ y $0,5$.

Teorema 4.4.8 (Weierstrass)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ entonces f está acotada en $[a, b]$ y, además, f alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$. Es decir, existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ tal que $\min f = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = \max f$ para todo $x \in [a, b]$.*

4.5. Derivadas de funciones de una variable

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, nos planteamos encontrar un concepto que represente “cuántoz “cómoçambia $f(x)$ cuando x se acerca a x_0. El concepto de derivada viene motivado por los siguientes ejemplos:

Ejemplos 4.5.1. (I) *Velocidad.* Si $s(t)$ representa la posición de un cuerpo que se mueve en una línea recta en función del tiempo, se define su

$$\textit{velocidad media} \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Y si existe

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = v_0,$$

podemos considerar v_0 como la *velocidad instantánea* del cuerpo cuando $t = t_0$.

(II) *Pendiente de la recta tangente* Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0, x_1 en un intervalo abierto $I \subseteq \operatorname{Dom} f$, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ del grafo de f es

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Y si existe

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = m_0,$$

podemos considerar m_0 como la pendiente de la recta tangente al grafo de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Definición 4.5.2 (Derivada). Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

entonces decimos que f es *diferenciable* o *derivable* en x_0 y llamamos a $f'(x_0)$ *derivada* de f con respecto a x en x_0.

De esta manera definimos un nueva función f', la *función derivada*, para la que $\operatorname{Dom} f' \subseteq \operatorname{Dom} f$. Repitiendo el proceso obtenemos las *derivadas sucesivas* f'', f''', ..., $f^{(n}$.

Notación $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

$f^{(n} = y^{(n} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Teorema 4.5.3 (Continuidad de las funciones diferenciables). *Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0; pero existen funciones continuas que no son derivables.*

Ejemplos 4.5.4. (I) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(\pi) = \cos \pi = -1$. Luego la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi, 0)$ es $y = -x + \pi$.

(II) Si $f(x) = |x - 1|$, entonces $f'(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ no existe. Luego $y = |x - 1|$ no tiene tangente en el punto $(1, 0)$ (en efecto, el grafo de la función presenta un "pico.$^{\text{en}}$ ese punto).

(III) . Si $f(x) = (x - 1)^{1/3}$, entonces $f'(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^{1/3}}{x-1} = \infty$. Luego $f(x) = (x - 1)^{1/3}$ no es derivable en 1 (en efecto, el grafo de la función presenta una recta tangente vertical, es decir, sin pendiente real, en el punto $(1, 0)$).

Las consideraciones anteriores indican que el grafo de una función derivable es continuo, *suave* (existe la recta tangente en cada punto) y, además, las tangentes son rectas con pendiente real.

Proposición 4.5.5 (Algebra de derivadas)**.** *Dadas f y g dos funciones derivables en x_0 entonces:*

1. *La función $f+g$ es derivable en x_0 y*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. *) La función $f \cdot g$ es derivable en x_0 y*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

En particular, si $k \in \mathbb{R}$, la función $k \cdot g$ es derivable en x_0 y $(k \cdot g)'(x_0) = k \cdot g'(x_0)$.

3. *Si $g(x_0) \neq 0$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_0 y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

4. *Regla de la cadena: Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces la función $f \circ g$ es derivable en x_0 y*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

4.5.1. Derivación implícita

Supongamos que x e y están relacionadas *de forma implícita* por una ecuación $g(x, y) = 0$ y que se da uno de los siguientes casos:

- La ecuación $g(x, y) = 0$ define y como función de x pero es muy difícil o imposible despejar $y = f(x)$. Por ejemplo, $y^3 + y - x = 0$.
- La ecuación $g(x, y) = 0$ no define globalmente y como función de x pero hay un punto que satisface la ecuación $g(x, y) = 0$ en cuyo entorno el grafo de $g(x, y) = 0$ es el grafo de una función. Por ejemplo, el grafo de $x^2 + y^2 = 1$ no es el grafo una función; pero, por ejemplo, en un entorno del punto $(0, -1)$ dicho grafo corresponde al de la función $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

En ambos casos queremos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ en cada punto. Para ello simplemente se deriva la ecuación $g(x, y) = 0$ con respecto a x teniendo en cuenta que y es una función de x y que al derivar expresiones con y hay que aplicar la *Regla de la cadena*. De esta manera se obtiene una ecuación lineal en $\dfrac{dy}{dx}$, que puede despejarse fácilmente. Se procede análogamente para calcular derivadas sucesivas.

Ejemplos 4.5.6. (I) Si $y^3 + y - x = 0$, entonces $3y^2\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dy}{dx} - 1 = 0$; luego, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3y^2 + 1}$.

(II) Si $x^2 + y^2 = 1$, entonces $2y\dfrac{dy}{dx} + 2x = 0$; luego, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Así, la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el punto $(4/5, 3/5)$ es $3y + 4x = 5$.

Proposición 4.5.7 (Derivada logarítmica)**.** *Si la función* $\ln f(x)$ *es menos complicada que la función* $f(x)$*, se puede calcular* $f'(x) = (\ln f(x))' f(x)$*. Esta técnica se denomina derivada logarítmica.*

Ejemplos 4.5.8. (I) Si $y = (x + 1)^{1/2}(3x + 2)^2(5x + 1)^{-3}$, entonces
$$y' = (x + 1)^{1/2}(3x + 2)^2(5x + 1)^{-3}\left(\frac{1}{2(x + 1)} + \frac{6}{3x + 2} - \frac{15}{5x + 1}\right).$$

(II) Si $y = x^x$, entonces $y' = x^x(1 + \ln x)$.

4.6. Extremos y teoremas clásicos

Definición 4.6.1 (Extremos relativos)**.** Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ se dice *máximo relativo* (respectivamente, *mínimo relativo*) de f si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ (respectivamente, $f(x) \geq f(c)$) para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Teorema 4.6.2 (Condición necesaria para ser extremo relativo)**.** *Si c es un extremo relativo de f y f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.*
Los puntos del $\operatorname{Dom} f$ *en los que la derivada o es 0 o no existe se llaman puntos críticos de f. Los extremos relativos de f son siempre puntos críticos, aunque el recíproco no es cierto.*

Un ejemplo de punto crítico que no es extremo relativo es el punto $x = 0$ para la función x^3.

Definición 4.6.3 (Extremos absolutos)**.** Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que f alcanza su *máximo absoluto* (respectivamente, *mínimo absoluto*) en S en el punto c si $f(x) \le f(c)$ (respectivamente, $f(x) \ge f(c)$) para todo $x \in S$.

El *Teorema de Weierstrass* garantiza que una función continua alcanza sus extremos absolutos en un intervalo cerrado. Éstos se dan o en los extremos relativos o en los extremos del intervalo.

Ejemplos 4.6.4. (I) $f(x) = 27x - 102x^2 + 134x^3 - 75x^4 + 15x^5$ es continua en $[-1,2]$, luego alcanza máximo y mínimo absolutos. Como $f'(x) = 3(x-1)^2(5x-9))(5x-1)$, los puntos críticos de f son $0'2, 1, 1'8 \in [-1,2]$. Comparando $f(-1) = -353$, $f(0'2) = 2'2768$, $f(1) = -1$, $f(1'8) = -4'2768$ y $f(2) = -2$, vemos que el mínimo absoluto de f en $[-1,2]$ es -353 y se alcanza en $x = -1$; y el máximo absoluto de f en $[-1,2]$ es $2'2768$ y se alcanza en $x = 0'2$.

(II) $f(x) = x^{-2}$ no es continua en $[-1,2]$ y tampoco alcanza máximo absoluto. Sin embargo, el mínimo absoluto de f en $[-1,2]$ es $1/4$ y se alcanza en $x = 2$.

Teorema 4.6.5 (Rolle)**.** *Dada f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$ (véase la Figura V).*

Teorema 4.6.6 (Valor Medio)**.** *Dada f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (véase la Figura V).*
En general, si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

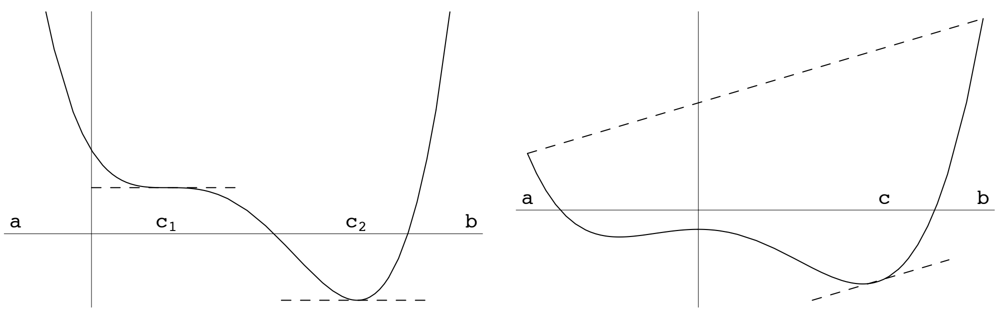


Figura V. Teorema de Rolle   Teorema del valor medio

El Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio son equivalentes.

Ejemplo 4.6.7. Para demostrar que $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ basta aplicar el *Teorema del Valor Medio* a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \theta]$ (o $[\theta, 0]$): existe c entre 0 y θ tal que $|\operatorname{sen}\theta| = |\cos c|\,|\theta| \leq |\theta|$.

Teorema 4.6.8 (Regla de L'Hôpital)**.** *Dadas f y g dos funciones y $a \in \mathbb{R}$, supongamos que*

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$
- *f y g son derivables en $(a, a+\delta)$ para algún $\delta > 0$.*
- *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, a+\delta)$.*
- *(iv)* $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L.$

Entonces, $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L.$

Nota 4.6.9. (I) *Regla de L'Hôpital* se enuncia y demuestra análogamente para límites por la izquierda, límites por ambos lados y límites en infinito.

(II) La *Regla de L'Hôpital* se cumple en todos los casos si en lugar de la primera condición suponemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$.

4.7. Aplicaciones al trazado de curvas

Una de las más notables aplicaciones prácticas del estudio de las de una función es la información que proporcionan sobre el grafo de la función.

Definición 4.7.1 (Función monótona)**.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *estrictamente creciente* (respectivamente, *estrictamente decreciente*) si para cada $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$ se tiene que $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) > f(x_2)$). En ambos casos se dice que f es *estrictamente monótona.*

Teorema 4.7.2 (Monotonía)**.** *Dada f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se verifica que*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*

2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.*

3. *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.*

En particular, si $c \in (a,b)$ es un punto crítico de f y $f'(x) > 0$ si $x \in (a,c)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (c,b)$ (respectivamente, $f'(x) < 0$ si $x \in (a,c)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (c,b)$), entonces c es un máximo (respectivamente, mínimo) relativo de f.

Definición 4.7.3 (Concavidad y convexidad)**.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* (respectivamente, *cóncava*) en un intervalo (a,b) si

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \quad \text{(respectivamente, } \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\text{)}$$

para todo $x_1, x_2 \in (a,b)$ (véase la Figura VI).

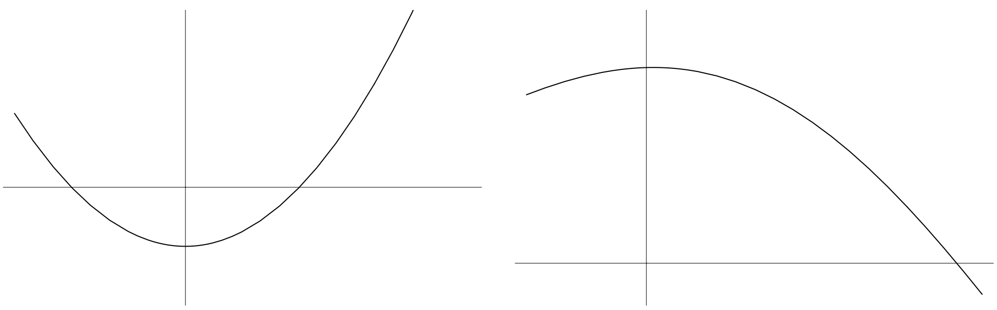


Figura V. Función convexa. Función cóncava.

Teorema 4.7.4 (Concavidad)**.** *Dada f continua en $[a,b]$ y dos veces derivable en (a,b).*

(I) *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es convexa en $[a,b]$.*

(II) *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es cóncava en $[a,b]$.*

(III) *Si $f''(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que 1 en $[a,b]$.*

Un punto $c \in (a,b)$ se llama punto de inflexión de f si existe $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$ (o $f''(x) < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f''(x) > 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$).

La información que proporcionan las derivadas de f sobre el grafo $y = f(x)$ se puede completar considerando sus simetrías, traslaciones y asíntotas.

4.8. Funciones inversas

Definición 4.8.1 (Función inversa)**.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, definimos su *función inversa* $y = f^{-1}(x)$ para cada $x \in \operatorname{Rec} f$, donde y es el único punto en $\operatorname{Dom} f$ para el que $f(y) = x$.

Es claro que toda función estrictamente monótona es inyectiva y por lo tanto tiene inversa.

f^{-1} se llama inversa de f porque f^{-1} y f son elementos inversos respecto a la operación composición de funciones: $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in \operatorname{Rec} f(x)$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f(x)$.

Por la definición, se tiene que $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Rec} f$ y $\operatorname{Rec} f^{-1} = \operatorname{Dom} f$. Además, como $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, los grafos de $y = f^{-1}(x)$ e $y = f(x)$ son simétricos respecto de la recta $y = x$.

Ejemplos 4.8.2.

1. Si $f(x) = x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$, entonces $f^{-1}(x) = x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.
2. Si $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$, entonces $f^{-1}(x) = \ln x \quad (x \in (0, \infty))$.

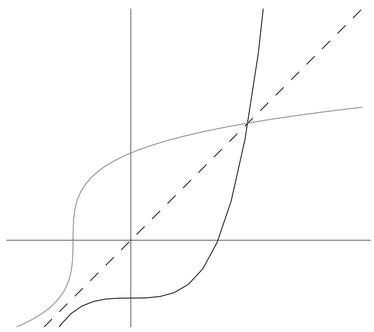


Figura VII. Grafo de una función (en negro), de su función inversa (en gris) y de la recta $y = x$ (en línea discontinua).

Teorema 4.8.3 (Función inversa)**.** *Si f es continua e inyectiva en $[a, b]$, entonces entonces f^{-1} es continua en $f([a, b])$. Si además f es derivable en un punto $x_0 \in [a, b]$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.9. Funciones elementales

4.9.1. Polinomios

Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, $A_n \neq 0$, entonces la función

$$p(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

se dice *polinomio de grado n*.
Si $n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ $(x \in [0, \infty))$ es estrictamente creciente y $[0, \infty)$ es su dominio y su recorrido. Su función inversa

$$f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad (x \in [0, \infty))$$

se denomina *raíz n-ésima*.

La Figura IX muestra el grafo de algunos polinomios.

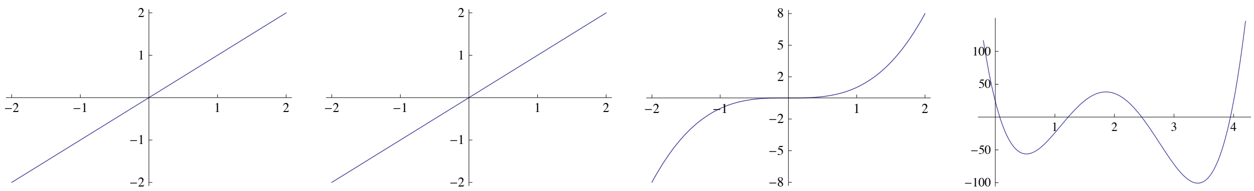


Figura VIII. Grafos de x, x^2, x^3 y $24 - 356x + 489x^2 - 208x^3 + 27x^4$.

La Figura IX muestra el grafo de algunas raíces n-ésimas.

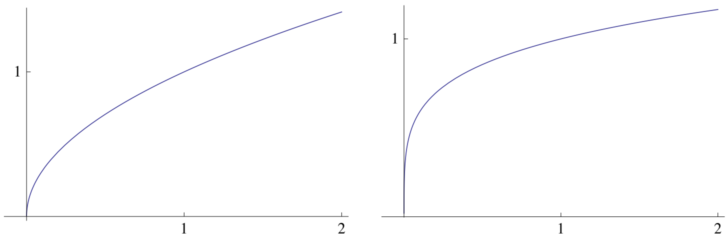


Figura IX. Grafos de $\sqrt{x}$ y $\sqrt[5]{x}$.

Teorema 4.9.1 (Límites de polinomios). *Dados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $p(x)$ un polinomio de grado n, se verifica:*

(I) $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ *para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, es decir, los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$.*

(II) $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = (-1)^n \infty$.

(III) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n}{x^n} = A_n$, *es decir,* $A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n \underset{x\to\infty}{\approx} A_nx^n$ *si* $A_n \neq 0$.

(IV) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, *es decir,* $x^n \underset{x\to\infty}{\ll} e^x$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(V) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es un número real fijo, la función* x^α *es derivable en su dominio (en su dominio menos 0 si* $\alpha < 1$*) y* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$*. En particular, los polinomios son funciones derivables en* $\mathbb{R}$ *y* $(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n)' = A_1 + A_2x + \cdots + A_nnx^{n-1}$.

Teorema 4.9.2 (Límites de raíces n-ésimas)**.** *Dado* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

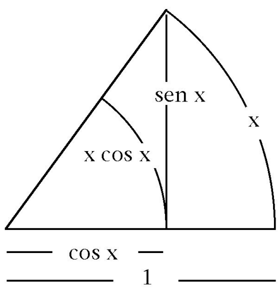
(I) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} x^{1/n} = x_0^{1/n}$ *para todo* $x_0 \in [0,\infty)$*, es decir, la función raíz n-ésima es continua en* $[0,\infty)$.

(II) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/n} = \infty$.

(III) *La función* $x^{1/n}$ *es derivable en* $(0,\infty)$ *y* $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

4.9.2. Funciones trigonométricas

Se define el número $\pi \approx 3'1415926\ldots$ como la mitad de la longitud de una circunferencia de radio 1, y para cada $x \in [0,\pi/2]$ se definen el *seno* y el *coseno* de x según la siguiente figura (Figura X), que representa un arco de longitud x de una circunferencia de radio 1.



Las funciones seno y coseno se extienden de forma que se cumplan las siguientes propiedades:

(I) Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son 2π-periódicas:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(II) La función $\operatorname{sen} x$ es impar y la función $\cos x$ es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se define la *función tangente*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$. El dominio de la función $\operatorname{tg} x$ es $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.

Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ no son inyectivas y por lo tanto no tienen inversa. Sin embargo, si consideramos dichas funciones restringidas a un intervalo en el que sí sean inyectivas podemos definir las funciones trigonométricas inversas:

- La función $f(x) = \operatorname{sen} x \quad (x \in [-\pi/2, \pi/2])$ es estrictamente creciente, su dominio es $[-\pi/2, \pi/2]$ y su recorrido es $[-1, 1]$. Su función inversa

  $$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \quad (x \in [-1, 1])$$

  se denomina *arco seno*. Se tiene que $y = \operatorname{arcsen} x \quad (x \in [-1, 1])$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$ e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- La función $g(x) = \cos x \quad (x \in [0, \pi])$ es estrictamente decreciente, su dominio es $[0, \pi]$ y su recorrido es $[-1, 1]$. Su función inversa

  $$g^{-1}(x) = \arccos x \quad (x \in [-1, 1])$$

  se denomina *arco coseno*. $y = \arccos x \quad (x \in [-1, 1])$ si y sólo si $x = \cos y$ e $y \in [0, \pi]$.

- La función $h(x) = \operatorname{tg} x \quad (x \in (-\pi/2, \pi/2))$ es estrictamente creciente, su dominio es $(-\pi/2, \pi/2)$ y su recorrido es $\mathbb{R}$. Su función inversa

  $$h^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

  se denomina *arco tangente*. Se tiene que $y = \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$ si y sólo si $x = \operatorname{tg} y$ e $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

La Figura XI muestra el grafo de las funciones trigonométricas.

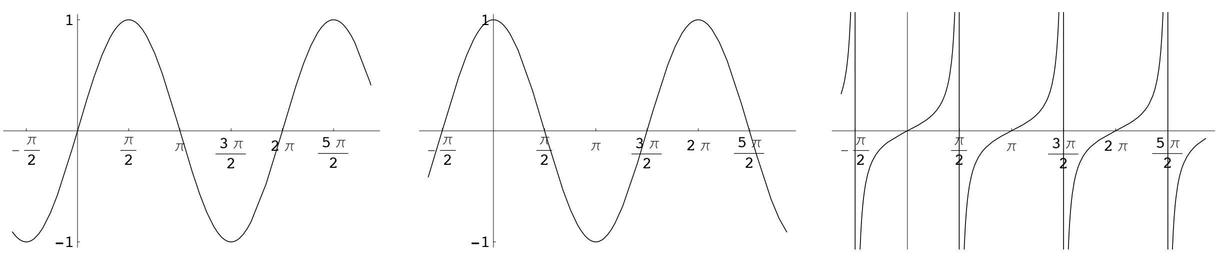


Figura XI. Grafos de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$.

La Figura XII muestra el grafo de las funciones trigonométricas inversas.

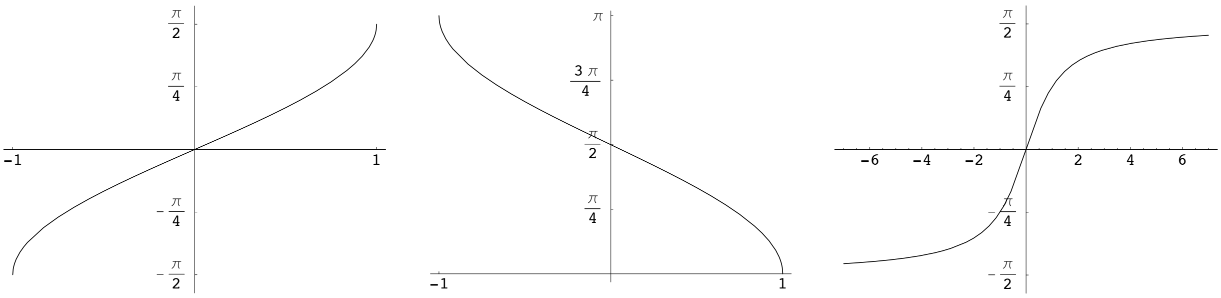


Figura XII. Grafos de $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$ $\operatorname{arctg} x$.

Teorema 4.9.3 (Propiedades de las funciones trigonométricas). *(I) Identidad pitagórica:* $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(II) Identidades de suma de ángulos: $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ *y* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

(III) Si $0 < |x| < \pi/2$ *entonces* $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$.

Teorema 4.9.4 (Límites de las funciones trigonométricas). *(I) Si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$*, es decir, las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *son continuas en* $\mathbb{R}$.

(II) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ *no existen.*

(III) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$*, es decir,* $\operatorname{sen} x \underset{x\to\infty}{\approx} x$ *y* $1-\cos x \underset{x\to 0}{\approx} \dfrac{x^2}{2}$.

(IV) Las funciones $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *son derivables en* $\mathbb{R}$ *y* $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$*. Como consecuencia, la función* $\operatorname{tg} x$ *es derivable en su dominio y* $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Teorema 4.9.5 (Límites de las funciones trigonométricas inversas). *(I) Si* $x_0 \in [-1, 1]$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$*, es decir, las funciones* $\operatorname{arcsen} x$ *y* $\arccos x$ *son continuas en* $[-1, 1]$.

(II) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$*, es decir, la función* $\operatorname{arctg} x$ *es continua en* $\mathbb{R}$.

(III) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$ *y* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, *es decir,* $\operatorname{arcsen} x \underset{x\to 0}{\approx} x$ *y* $\operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\approx} x$.

(IV) *La función* $\operatorname{arcsen} x$ *es derivable en* $(-1,1)$ *y* $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *la función* $\arccos x$ *es derivable en* $(-1,1)$ *y* $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *y la función* $\operatorname{arctg} x$ *es derivable en* $\mathbb{R}$ *y* $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4.9.3. Funciones exponencial y logaritmo

Se define el número $e = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx 2'7182818\ldots$ y la *función exponencial* e^x ($x \in \mathbb{R}$) como la extensión continua de las potencias de e.

La función exponencial es estrictamente creciente, su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $(0,\infty)$. Su función inversa se denomina *logaritmo (neperiano)* y se denota $\ln x$ ($x \in (0,\infty)$). El dominio de $\ln x$ es $(0,\infty)$ y su recorrido es $\mathbb{R}$

Si $a > 0$, se define la función $a^x = e^{x\ln a}$ ($x \in \mathbb{R}$).

La Figura XIII muestra el grafo de las funciones exponencial y logaritmo.

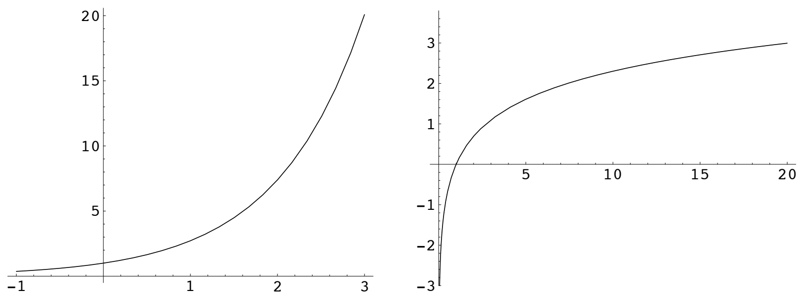


Figura XIII. Grafos de e^x y $\ln x$.

Teorema 4.9.6 (Propiedades de exponenciales y logaritmos). (I) $\ln(e^x) = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $e^{\ln x} = x$ *para todo* $x \in (0,\infty)$.

(II) $e^{x+y} = e^x e^y$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ *para todo* $x, y \in (0,\infty)$.

Teorema 4.9.7 (Límites de exponenciales y logaritmos). (I) *Si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$ *y si* $x_0 > 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x = \ln x_0$, *es decir, las funciones exponencial y logaritmo son continuas en su dominio.*

(II) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ *y* $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = \infty$ *y* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.

(III) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$, *es decir,* $\ln x \underset{x\to\infty}{\ll} x^n \underset{x\to\infty}{\ll} e^x$ *para todo* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

(IV) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ *y* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, *es decir,* $e^x-1\underset{x\to 0}{\approx} x$ *y* $\ln(x+1)\underset{x\to 0}{\approx} x$.

(V) *Si* $a>1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$ *y si* $0<a<1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=0$.

(VI) *Si* $a>0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

(VII) *La función* e^x *es derivable en* $\mathbb{R}$ *y* $(e^x)'=e^x$.

(VIII) *La función* $\ln x$ *es derivable en* $(0,\infty)$ *y* $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

4.10. Aproximaciones de funciones por polinomios: Aproximaciones lineales

Si f es diferenciable en $x=x_0$, entonces la ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en el punto $(x_0,f(x_0))$ es $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Además,

$$\frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\to 0 \ \text{ cuando } \ x\to x_0.$$

Es decir,

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{cuando} \quad x\approx x_0.$$

Definición 4.10.1. Dada una función f diferenciable en $x=x_0$, se llama *aproximación lineal* de $f(x)$, para valores de x cercanos a x_0, a la expresión

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Ejemplo 4.10.2. El valor aproximado de $\sqrt[3]{7{,}9}$ mediante una aproximación lineal se obtiene de la siguiente forma:

$\sqrt[3]{x}\approx 2+\dfrac{1}{12}(x-8)$ cuando $x\approx 8$, luego $\sqrt[3]{7{,}9}\approx 2+\dfrac{1}{12}(7{,}9-8)=1{,}991\hat{6}$.
Esta aproximación es de hecho bastante buena, el error es menor que $0{,}001$.

4.11. Polinomios de Taylor

Una función diferenciable en un punto se puede aproximar cerca de ese punto por un polinomio de grado 1. Si la función admite derivadas de orden superior, se podrá aproximar aún mejor por polinomios de grado superior.

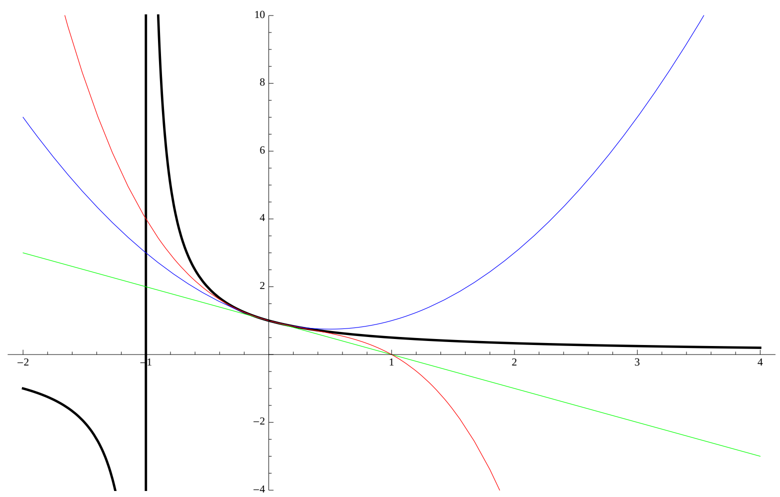
Teorema 4.11.1 (Teorema de Taylor)**.** *Dada f una función tal que $f^{(n+1}$ existe y es continua en $[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$ para algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ existe c entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

El término $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ se llama polinomio de Taylor *de grado n para $f(x)$ cerca del punto $x = x_0$.*
El término $R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se denomina resto n-ésimo *y cumple que* $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Nota 4.11.2. En el teorema anterior, si $x_0 = 0$ el término $P_n(x)$ se denomina *polinomio de MacLaurin* de grado n para $f(x)$ en un entorno del punto $x = 0$.

Ejemplo 4.11.3. Representación gráfica de los polinomios de Maclaurin, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$, de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. En la gráfica aparecen con los colores verde, azul y rojo respectivamente.



Para demostrar el Teorema de Taylor se usa el Teorema de Rolle. En efecto, si se fija $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ y se define, para t entre x_0 y x, la función

$$F(t) = (x - x_0)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(t)}{k!}(x-t)^k - (x-t)^{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - f(x)\Big)$$

las hipótesis del teorema implican que F es continua y diferenciable.
Además, $F(x) = (x - x_0)^{n+1} f(x) = F(x_0)$ y por tanto, por el Teorema de Rolle, existe c entre x_0 y x tal que $F'(c) = 0$. Como $F'(c) = (n+1)(x-c)^n(R_n(x) + P_n(x) - f(x))$, queda probado el resultado.

Por otro lado, si M es el máximo absoluto de $f^{(n+1}(t)$ en $[x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$, se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq \lim\limits_{x \to x_0} \left| \dfrac{M(x-x_0)}{(n+1)!} \right| = 0.$

Polinomios de MacLaurin de las funciones elementales

Función	Polinomio de MacLaurin	Resto
$f(x) = e^x$	$P_n(x) = 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$	$R_n(x) = \dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$
$f(x) = \mathrm{sen} x$	$P_{2n+1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R_{2n+1}(x) = \dfrac{\mathrm{sen} c(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$
$f(x) = \cos x$	$P_{2n}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$R_{2n}(x) = \dfrac{\mathrm{sen} c(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$f(x) = \ln(1+x)$	$P_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$R_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}$
$f(x) = (1+x)^\alpha$	$P_n(x) = 1 + \alpha x + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}$	$R_n(x) = \dbinom{\alpha}{n+1} \dfrac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-\alpha}}$

donde $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$

En todos los casos c es un punto entre 0 y x.

Ejemplo 4.11.4. Calculamos el valor aproximado del número $\ln 3$ con el polinomio de MacLaurin de grado menor o igual que 4 de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ y estimamos el error cometido.

Como
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = (n-1)!\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
entonces
$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \approx P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4}(0)}{4!}x^4 = 2x + \frac{2}{3}x^3.$$
El error de esta aproximación es $|R_4(x)| = \left|\frac{f^{(5}(c)}{5!}x^5\right| = \left|\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1+c)^5} + \frac{1}{(1-c)^5}\right)x^5\right|$ para algún c entre 0 y x.
Queremos calcular el valor aproximado de $\ln 3 = f(1/2)$,
$$\ln 3 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \approx P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{12} = 1{,}08\hat{3}.$$
El error de esta aproximación es $R_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1+c)^5} + \frac{1}{(1-c)^5}\right)\frac{1}{2^5}$ para algún $c \in (0, 1/2)$.
Luego
$$\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| = R_4\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{160}\left(1 + 2^5\right) = 0{,}20625.$$
El valor absoluto del error de esta aproximación es, de hecho, menor que $0{,}02$.

Ejemplo 4.11.5. Calculamos el valor aproximado de $\sqrt[3]{7{,}9}$ con seis decimales exactos.
Aproximaremos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con un polinomio de Taylor centrado en 8:
$$\sqrt[3]{x} \approx P_n(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(8)}{n!}(x-8)^n.$$
El error de esta aproximación es $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-8)^{n+1}\right|$ para algún c entre x y 8.
Calculamos primero las derivadas
$$\frac{d\left(\sqrt[3]{x}\right)}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{d^2\left(\sqrt[3]{x}\right)}{dx^2} = -\frac{2}{3^2}x^{-\frac{5}{3}}, \quad \frac{d^n\left(\sqrt[3]{x}\right)}{dx^n} = -\frac{2\cdot 5\cdots(3n-4)}{3^n}x^{-\frac{3n-1}{3}} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$
Como queremos calcular $\sqrt[3]{7{,}9}$ con seis decimales exactos, tendremos que escoger n tal que
$$|R_n(7{,}9)| = \left|\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(7{,}9-8)^{n+1}\right| \leq 10^{-6} \qquad \text{para todo } c \in (7{,}9,\ 8).$$

Para $n = 3$, se tiene que

$$|R_3(7,9)| = \left| \frac{-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4} c^{-11/3}}{4!} (7,9-8)^4 \right| = \frac{10}{243} c^{-11/3} 10^{-4} \leq \frac{10}{243} 7^{-3} 10^{-4} \leq 10^{-7}.$$

Luego

$$\sqrt[3]{7,9} \approx 2 + \frac{1}{12}(7,9-8) - \frac{1}{288}(7,9-8)^2 + \frac{5}{20736}(7,9-8)^3 = 1,9916317033179012\ldots$$

Esta aproximación tiene, de hecho, ocho seis decimales exactos.

4.12. Anexo Tema 4. Funciones elementales

4.12.1. Identidades trigonométricas

Función seno:
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Función coseno:
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Función tangente:
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Función cosecante:
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Función secante:
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Función cotangente:
$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

Identidades pitagóricas:
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Fórmulas de reducción:
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

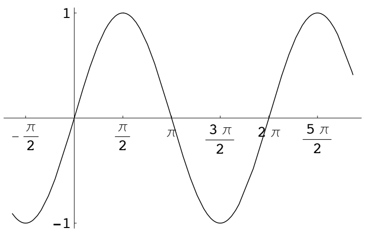
Suma o diferencia de los ángulos:
$$\operatorname{sen}(\theta \pm \varphi) = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\varphi$$
$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$
$$\operatorname{tg}(\theta \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$$

Diferencias de senos y cosenos:
$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\varphi = 2\cos(\tfrac{\theta+\varphi}{2})\operatorname{sen}(\tfrac{\theta-\varphi}{2})$$
$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\operatorname{sen}(\tfrac{\theta+\varphi}{2})\operatorname{sen}(\tfrac{\theta-\varphi}{2})$$

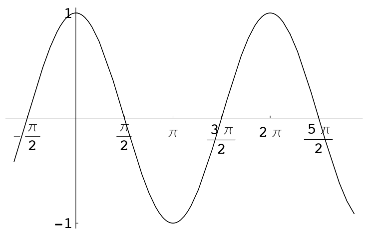
Angulo doble:
$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

Angulo mitad:
$$\operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$$
$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$$

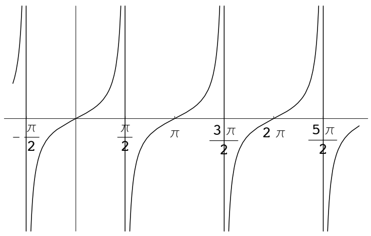
4.12.2. Grafos de las funciones trigonométricas



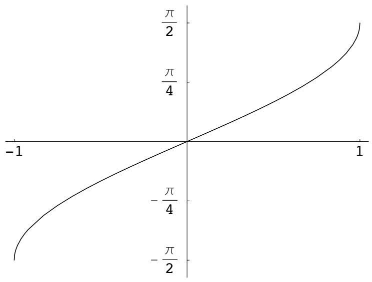
Función seno.



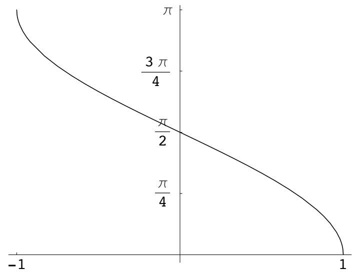
Función coseno.



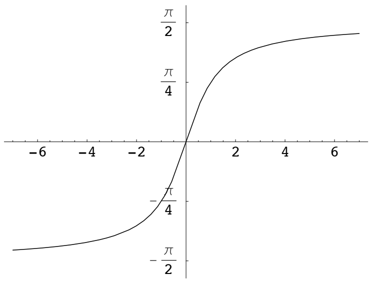
Función tangente.



Función arcoseno.



Función arcocoseno.



Función arcotangente.

4.12.3. Identidades hiperbólicas

Función seno hiperbólico:
$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

Función coseno hiperbólico:
$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

Función tangente hiperbólica:
$$\operatorname{tgh}\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}$$

Identidades pitagóricas:
$$\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1$$
$$1 - \operatorname{tgh}^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta$$

Fórmulas de reducción:
$$\operatorname{senh}(-\theta) = -\operatorname{senh}\theta$$
$$\cosh(-\theta) = \cosh\theta$$

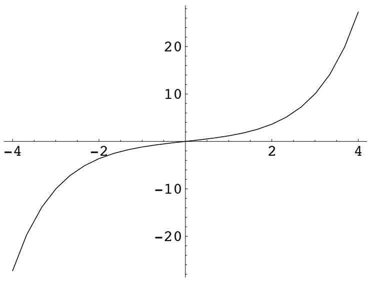
Suma o diferencia de los argumentos:
$$\operatorname{senh}(\theta \pm \varphi) = \operatorname{senh}\theta\cosh\varphi \pm \cosh\theta\operatorname{senh}\varphi$$
$$\cosh(\theta \pm \varphi) = \cosh\theta\cosh\varphi \pm \operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\varphi$$
$$\operatorname{tgh}(\theta \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tgh}\theta \pm \operatorname{tgh}\varphi}{1 \pm \operatorname{tgh}\theta\operatorname{tgh}\varphi}$$

Diferencias de senos y cosenos:
$$\operatorname{senh}\theta - \operatorname{senh}\varphi = 2\cosh(\tfrac{\theta+\varphi}{2})\operatorname{senh}(\tfrac{\theta-\varphi}{2})$$
$$\cosh\theta - \cosh\varphi = 2\operatorname{senh}(\tfrac{\theta+\varphi}{2})\operatorname{senh}(\tfrac{\theta-\varphi}{2})$$

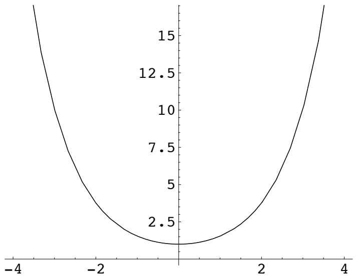
Argumento doble:
$$\operatorname{senh}(2\theta) = 2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta$$
$$\cosh(2\theta) = \cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta$$

Argumento mitad:
$$\operatorname{senh}^2\theta = \tfrac{1}{2}(-1 + \cosh(2\theta))$$
$$\cosh^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cosh(2\theta))$$

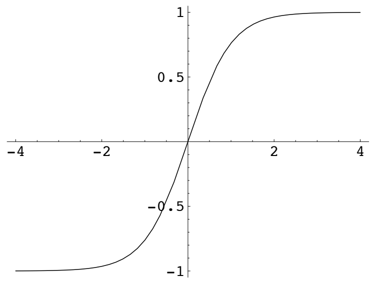
4.12.4. Grafos de las funciones hiperbólicas



Función seno hiperbólico.

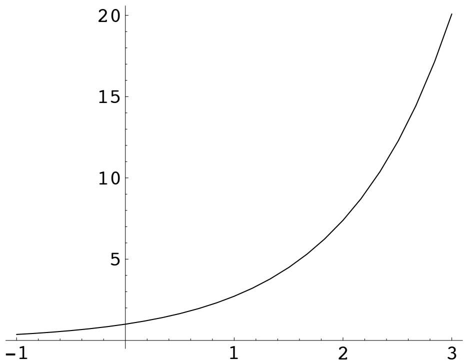


Función coseno hiperbólico.

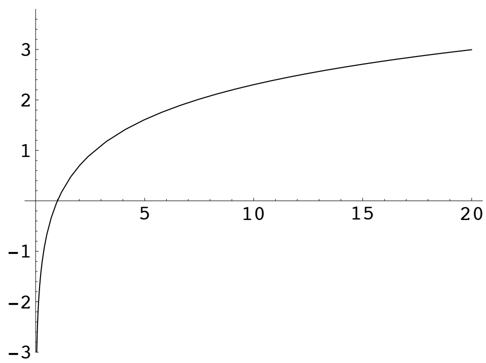


Función tangente hiperbólica.

4.12.5. Grafos de las funciones exponencial e^x y logaritmo (neperiano) $\ln x$



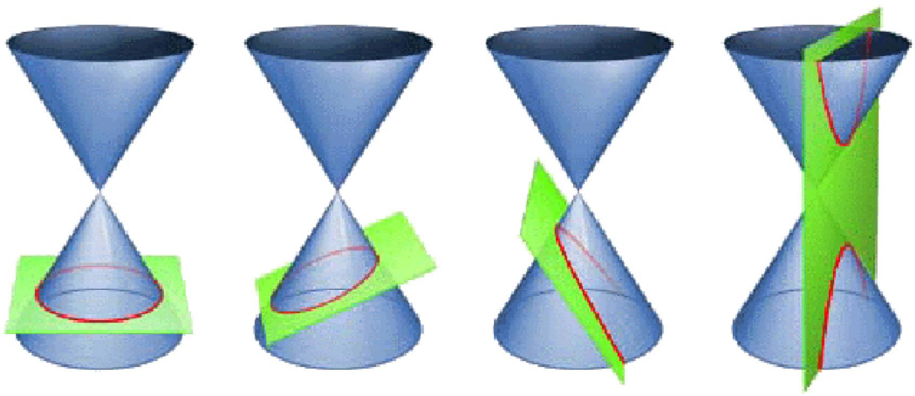
Función exponencial.



Función logaritmo (neperiano).

4.12.6. Cónicas

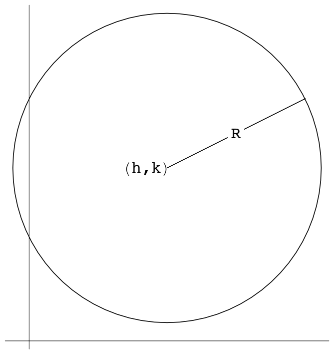
Las *curvas cónicas* son las que resultan de cortar una superficie cónica con un plano. Según sea la inclinación del plano con respecto al eje del cono se obtienen tres tipos de curvas: elipses, hipérbolas y parábolas. La ecuación de todas las cónicas (incluyendo algunos casos "degenerados") es de la forma: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$.



circunferencia elipse parábola hipérbola

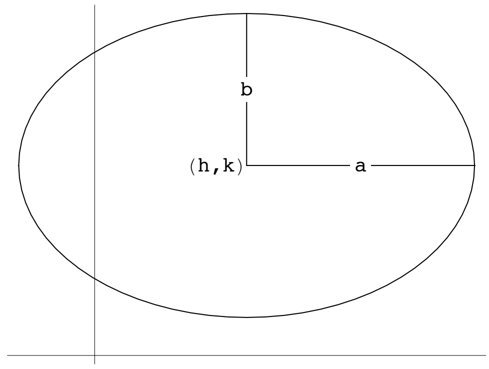
Definición 4.12.1 (Elipse y circunferencia)**.** Se llama *elipse* al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante.
La línea que une los dos focos se denomina *eje principal* de la elipse y la mediatriz de los mismos *eje secundario*. Los puntos donde la elipse corta a sus ejes se llaman *vértices* y el punto medio de los dos focos se llama *centro* de la elipse. El *semieje mayor* M es la mitad de la longitud del eje principal, y el *semieje menor* m es la mitad de la longitud del eje secundario. Es inmediato comprobar que la distancia entre los focos es $c = \sqrt{M^2 - m^2}$. El número $e = c/M$ se denomina *excentricidad* de la elipse.

Si $c = 0$, es decir, si sólo hay un foco (que coincide además con el centro) y los semiejes son iguales $M = m = R$, la elipse se denomina *circunferencia* de radio R:



$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

Circunferencia de centro (h,k) y radio R

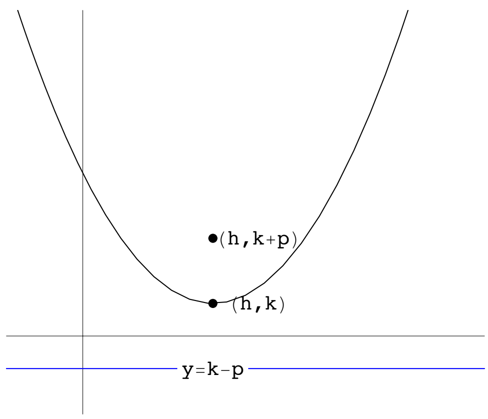


$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Elipse de centro (h,k) y semiejes a y b.

Definición 4.12.2 (Parábola). Se llama *parábola* al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado *foco*, y de una recta fija llamada *directriz*.

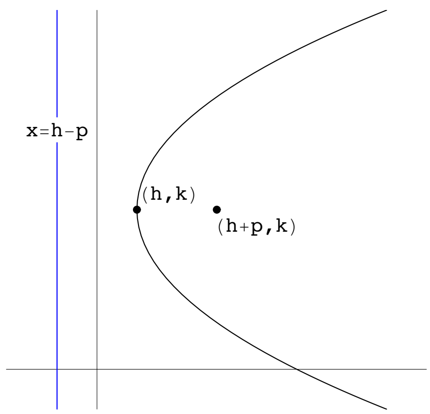
Se llama *eje* de la parábola a la recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz, y se llama *vértice* de la parábola al punto donde ésta corta a su eje.



$4p(y-k)=(x-h)^2$

Parábola de foco $(h,k+p)$

y directriz $y=k-p$



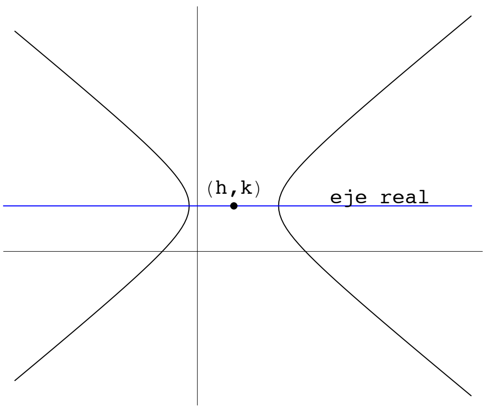
$4p(x-h)=(y-k)^2$

Parábola de foco $(h+p,k)$

y directriz $x=h-p$.

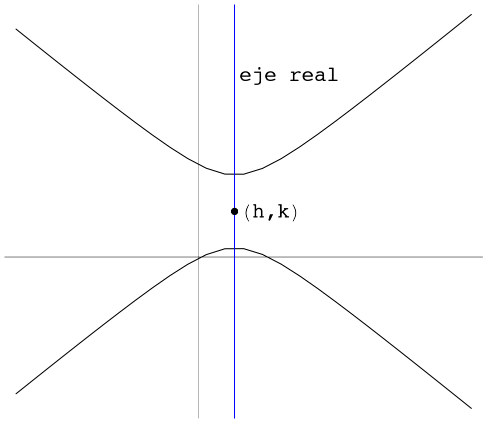
Definición 4.12.3 (Hipérbola). Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante $(2M)$.

La recta que une los dos focos se llama *eje real* de la hipérbola y la mediatriz se llama *eje imaginario* de la hipérbola. El punto donde se cortan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se llama *centro* de la hipérbola y los puntos donde la hipérbola corta al eje real se llaman *vértices* de la hipérbola. El *semieje real* M es la distancia del centro a uno de los vértices, y el *semieje imaginario* es $m = \sqrt{c^2 - M^2}$, donde c la mitad de la distancia entre los focos.



$(x-h)^2 a^2 - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Hipérbola de centro (h, k),
semieje real a y semieje imaginario b.



$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Hipérbola de centro (h, k),
semieje real b y semieje imaginario a.