ESTADÍSTICA
Grado de Ingeniería

Probabilidad

Índice

- Terminología básica de probabilidad.
- Regla de Laplace
- Operaciones con sucesos e independencia.
- Experimentos compuestos.
- Probabilidad condicionada.
- Teorema de la prob. total y teorema de Bayes.

1. Terminología básica de probabilidad

Fenómeno determinista

Dadas unas condiciones de partida → Con certeza → Sucede A

Fenómeno aleatorio

Dadas unas condiciones de partida → incertidumbre →

Puede suceder:
A_1,
A_2
…
A_n

Experimento aleatorio

.- se puede reproducir tantas veces como queramos.
.- sabemos todo lo que puede pasar
.- aunque controlemos las condiciones de partida, no se puede saber con certeza qué sucederá.

Modelo matemático: modelos de distribución de probabilidad

.- asigna un valor a la posibilidad de ocurrencia de cada uno de los acontecimientos que pueden ocurrir

Teoría de la Probabilidad	Estadística Descriptiva
Experimento: Lanzar una moneda de 1 € (no trucada) Espacio muestral Ω = {cara, cruz} X variable aleatoria de estudio -> resultado al lanzar moneda P(X=cara) = P(X=cruz) = 0.5	Tiramos una moneda de 1 € 80 veces y contamos:

Resultado	Frec.	Porcentaje
Cara	38	47,5%
Cruz	42	52,5%

MUESTRAL, ¿qué tipo de variable es "resultado"?

POBLACIONAL, no se puede reproducir

Teoría de la Probabilidad	Estadística Descriptiva

Teoría de la Probabilidad

Experimento: Lanzar un dado.

Espacio muestral Ω =
{1, 2, 3, 4, 5, 6}

X variable aleatoria de estudio
-> resultado al lanzar dado

P(X=1) = 1/6 = 0,16666666…
P(X=2) = 1/6 = 0,16666666…
…
P(X=6) = 1/6 = 0,16666666…

POBLACIONAL, no se puede reproducir

Estadística Descriptiva

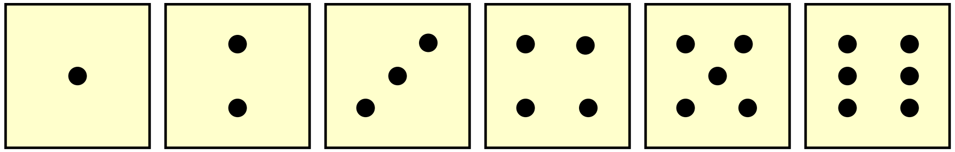
Tiramos una dado 80 veces y contamos cuántas veces sale cada valor:

Valor	Frec.	Porcentaje
1	12	15,00%
2	13	16,25%
3	12	15,00%
4	14	17,50%
5	15	18,75%
6	14	17,50%

MUESTRAL, ¿qué tipo de variable
es “valor”?

Ejemplo: lanzamiento de un dado

Sea el experimento aleatorio “resultado de lanzar un dado”



- Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

- Suceso seguro: “Puntuación es positiva” $C = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Suceso imposible: “El número obtenido es 9” $D = \varnothing$
- Otros Sucesos posibles:

A es el suceso “El número obtenido es par” $A = \{2, 4, 6\}$

B es el suceso “Puntuación mayor que 3” $B = \{4, 5, 6\}$

2. Regla de Laplace

1. Ley de los grandes números

Enfoque frecuentista, basado en la muestra.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{nº de veces que ocurre A en un gran nº de pruebas}}{\text{nº de pruebas}}$$

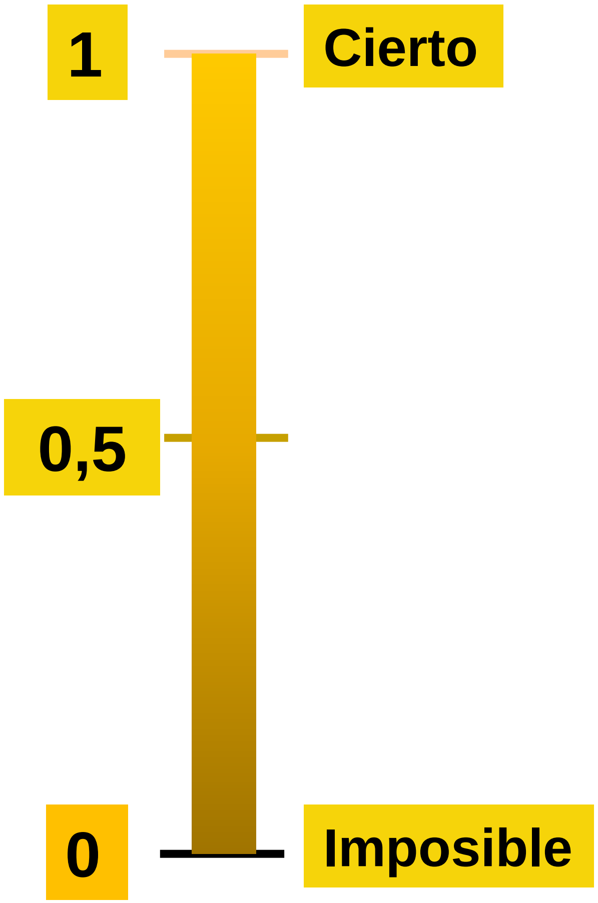
2. Regla de Laplace

Si el número de sucesos elementales es finito y todos puede ocurrir con igual probabilidad (equiprobables), entonces

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles}$$

Definición axiomática de Kolmogorov

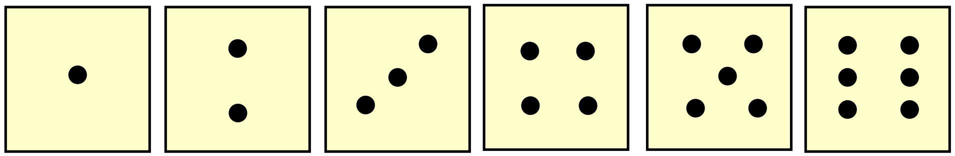
La probabilidad es una aplicación que asigna a cada suceso un número entre 0 y 1



$0 \leq P(A) \leq 1$ Para cualquier suceso A

- $P(\Omega) = 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Si A y B son dos sucesos disjuntos, es decir, con intersección vacía se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejercicio: lanzamiento de un dado



A = “par” -> P(A) = 1/2

B = “mayor que 3” -> P(B) = 1/2

C = “igual a 5” -> P(C) = 1/6

- P(“par” o “mayor que 3”) = 2/3 (forma directa, regla de Laplace)
- P(“par” y “mayor que 3”) = 1/3
- P(“par” o “igual a 5”) = 2/3
- P(“no igual a 5”) = 5/6
- P(“mayor que 3” y “no par”) = 1/6

Ejercicio: baraja cartas

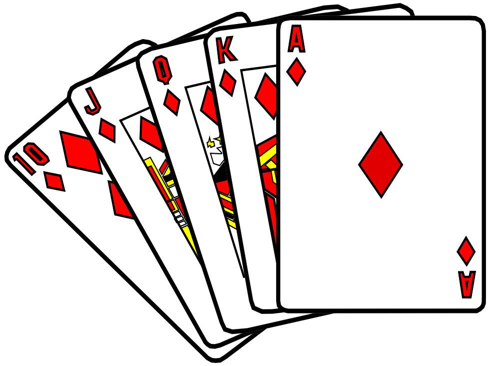
Sea una baraja inglesa de 52 cartas, con cuatro palos:

♥ ♣ ♦ ♠

Sea el suceso "la carta es un as" -> P(As) = 4/52

Sea el suceso "la carta es roja" -> P(roja) = 1/2 = 26/52

P("Roja" o "As") = 28/52



Técnicas de conteo

Principio fundamental del conteo: si un suceso puede romperse en k fases bien diferenciadas, el número total de casos que forman el suceso es igual al producto de las ocurrencias de cada fase.

Una persona tiene 2 pantalones, 3 camisas y 5 jerseys. ¿De cuántas maneras puede combinarse?

2*3*5=30

¿De cuántas maneras se puede rellenar una quiniela?

partido1*partido2* ··· * partido15

3*3*3* ······ *3=3^{15}=**14348907**

Variación con repetición

Con los símbolos {a, b, c, &, #}, ¿cuántas contraseñas de tres símbolos que no se repitan se pueden hacer?

posición 1*posición 2*posición3

5*4*3=60

Variación sin repetición

Con las letras de la palabra RELOJ, ¿cuántas palabras se pueden formar?

5*4*3*2*1=5!=120

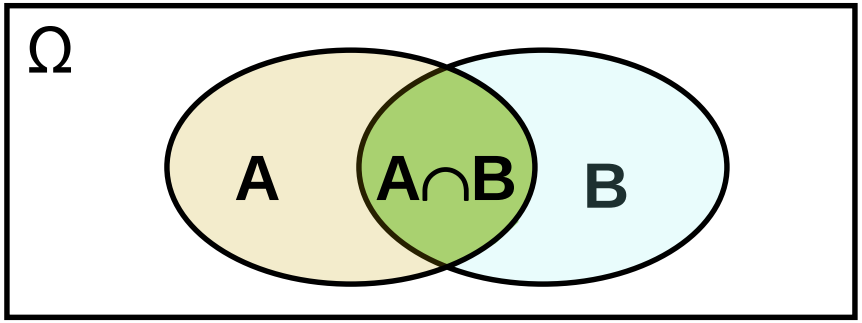
Permutación

3. Operaciones con sucesos

Intersección de sucesos

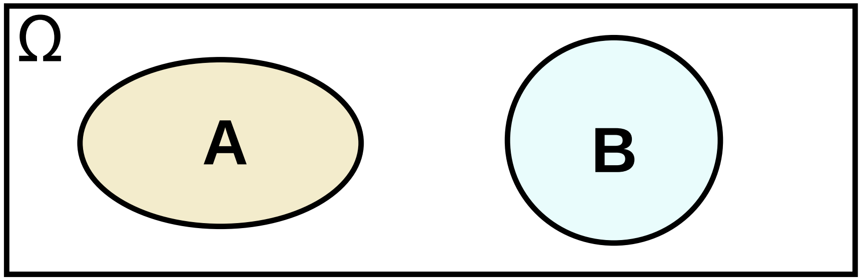
Sólo si independientes

entonces: $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$



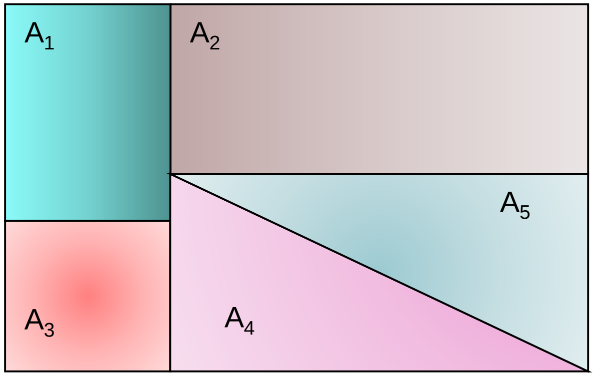
Definición: A y B son Sucesos Incompatibles, Disjuntos o Excluyentes si no tienen ningún resultado en común

es decir, $A \cap B = \emptyset$



Definición: Los sucesos $A_1, A_2 \ldots A_k$ forman una **partición de Ω** si:

- $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad i \neq j$
- $A_1 \cup \ldots \cup A_k = S$

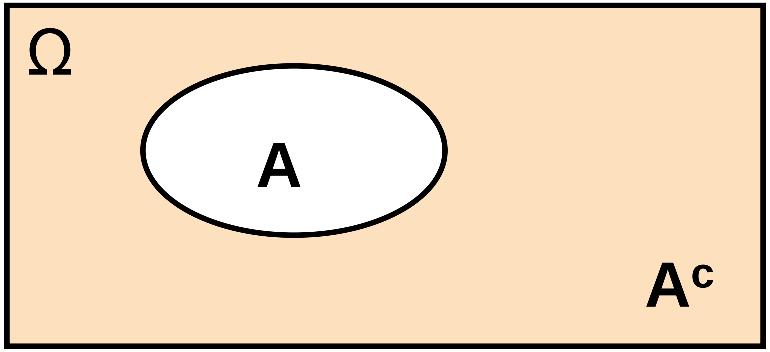


es decir, los sucesos A_i son disjuntos dos a dos

y cubren completamente el espacio muestral.

El Complementario

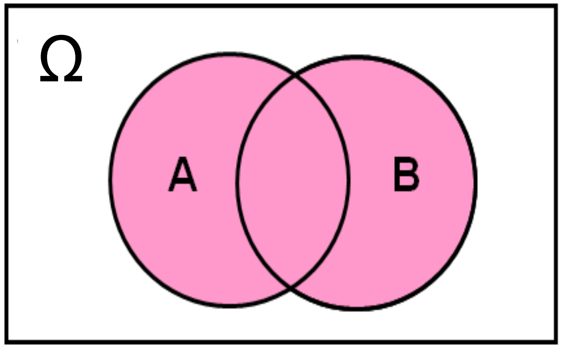
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



La Unión:

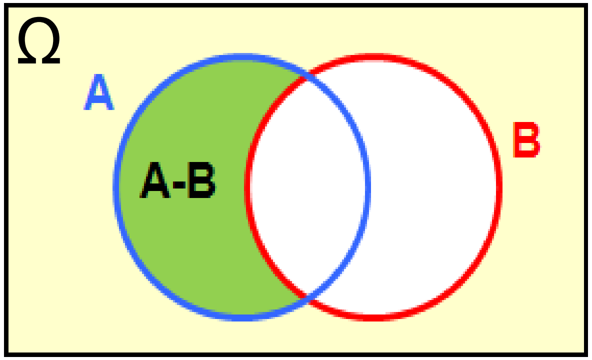
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son disjuntos $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



La Diferencia:

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$



Propiedades de U e ∩

- Conmutativa

  $E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$

  $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$
- Asociativa

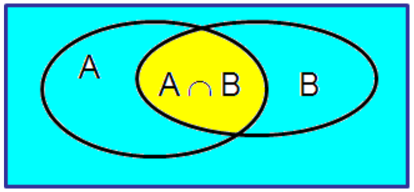
  $E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$

  $E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$
- Distributiva

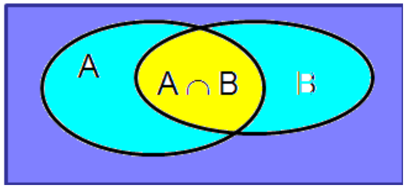
  $E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$

  $E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$
- Leyes de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



- Si los sucesos A y B son independientes, también lo son entonces:

  A y $\overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A}$ y B $\qquad$ $\overline{A}$ y $\overline{B}$

Ejercicio: Aire y CD

En un lote de coches usados el 70% tienen aire condicionado y el 40% tienen lector de CD y el 20% tienen ambos dispositivos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los coches disponga al menos de uno de los dispositivos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche no tenga aire?

c) ¿Cuál es la probabilidad de un coche solo tenga aire?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguno de los dispositivos?

Suma 1

	C D		
AIRE	Si	No	
Si	**0,2**	0,5	**0,7**
No	0,2	0,1	0,3
	0,4	0,6	

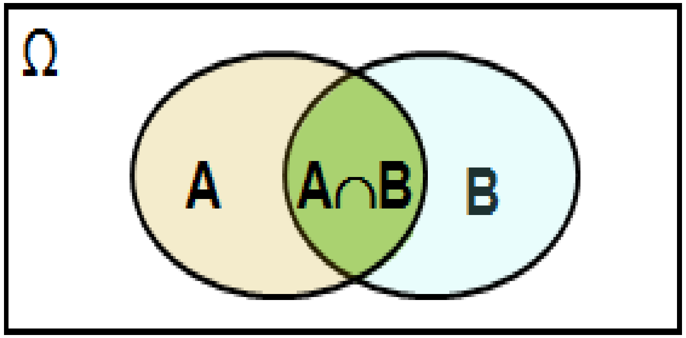
TABLA DE CONTINGENCIA

Independencia Estadística

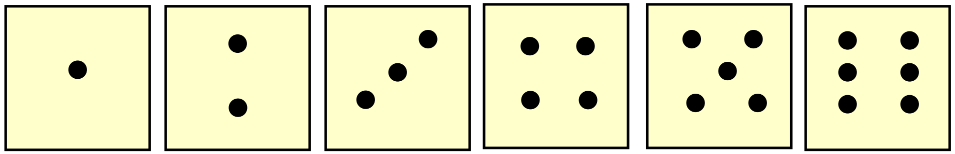
Definición: Los sucesos A y B son **independientes** cuando a la probabilidad de un suceso no le afecta lo que ocurra con el otro suceso

Dos sucesos son estadísticamente **independientes** si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

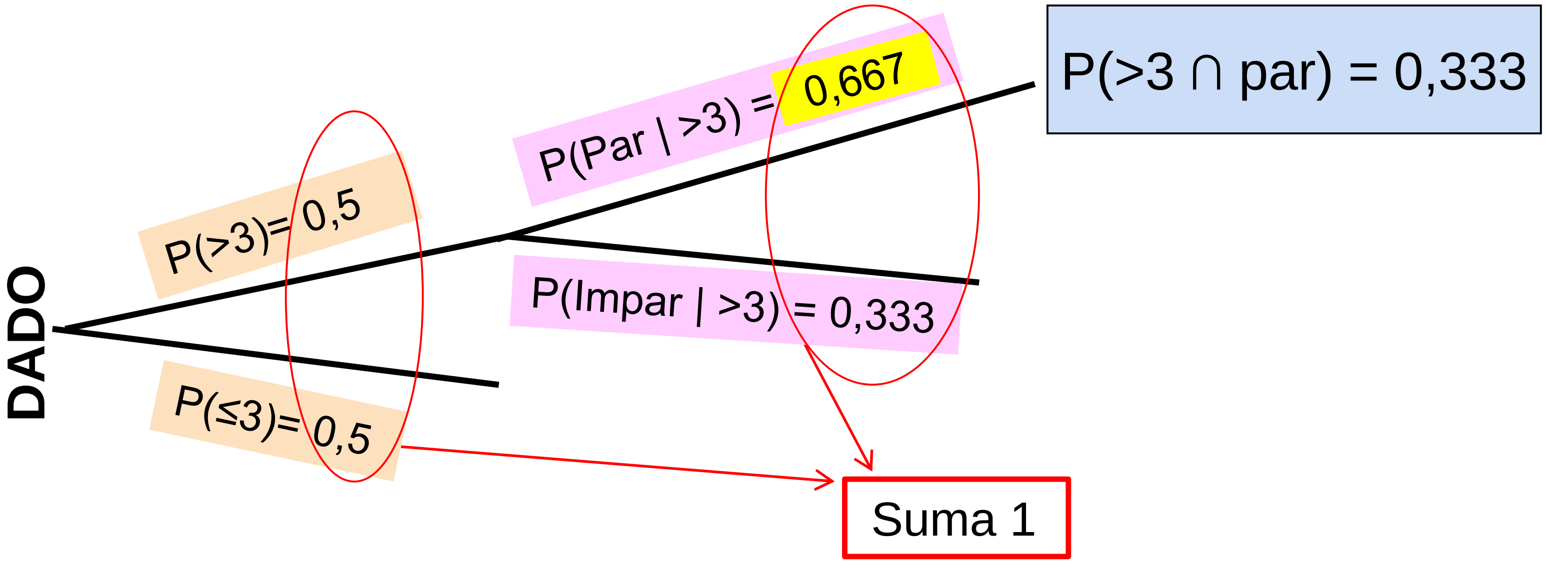


Ejercicio: lanzamiento de un dado (cont)

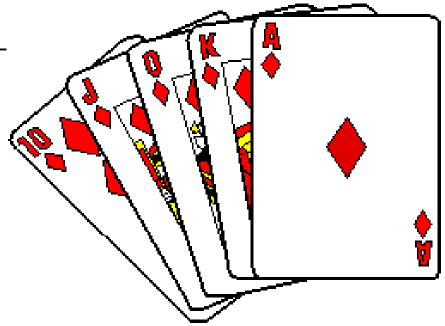


Comprobar que los sucesos “mayor que 3” y “par” **NO son independientes**.

P(“mayor que 3” y “par”) = 1/3 ≠ 1/2 * 1/2 = P(“mayor que 3”) P(“par”)



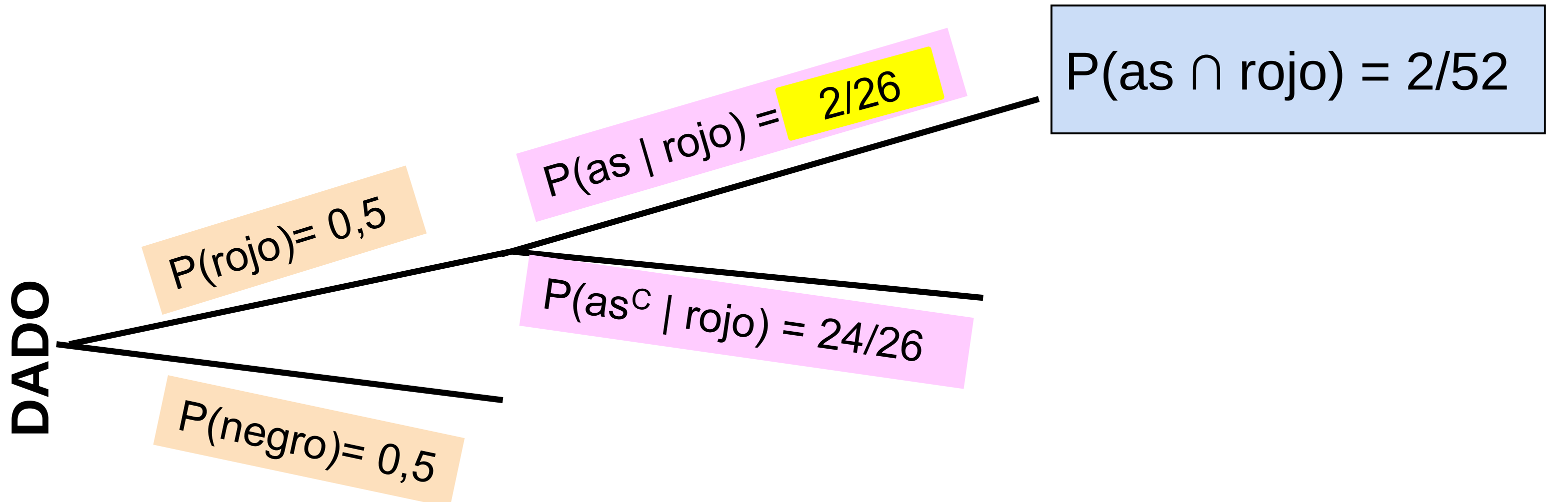
Ejercicio: baraja cartas



♥ ♣ ♦ ♠

Comprobar que los sucesos "rojo" y "as" **SÍ son independientes**.

P("rojo" y "as") = 2/52 =1/26 **=** 1/26 = 26/52 * 4/52 = P("rojo") P("as")



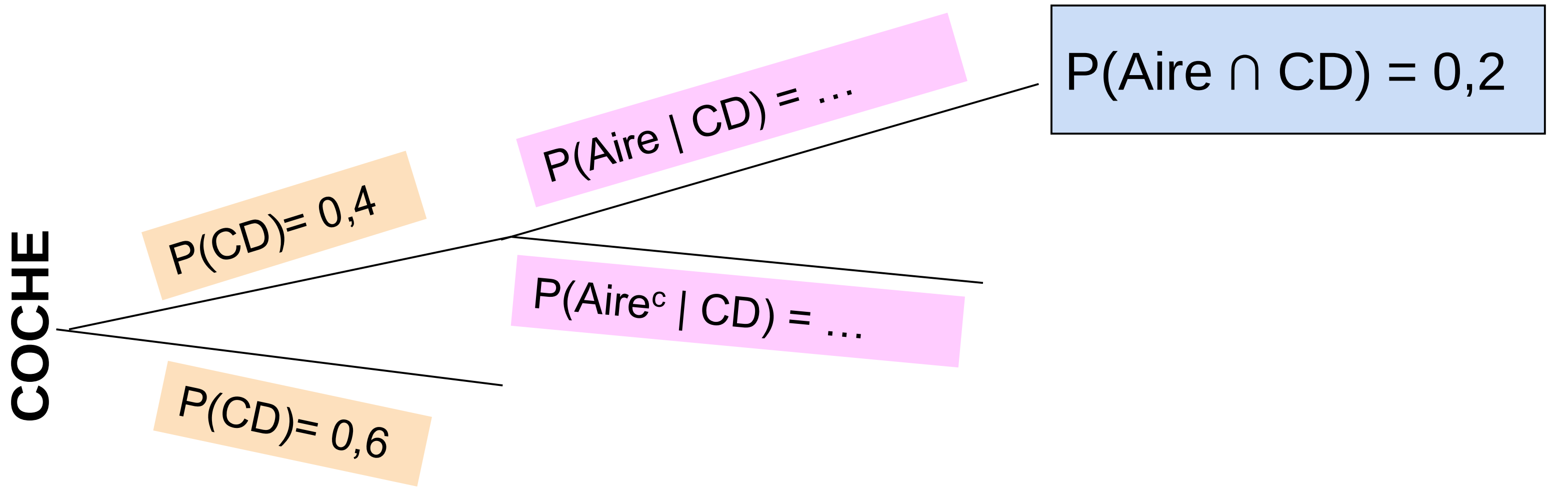
Ejercicio: Aire y CD

TABLA DE CONTINGENCIA

	C D		
AIRE	Si	No	
Si	**0,2**	0,5	**0,7**
No	0,2	0,1	0,3
	0,4	0,6	

Comprobar que los sucesos "**Aire**" y "**CD**" **NO son independientes**.

$$P(Aire) * P(CD) = 0.7*0.4 = 0.28 \neq 0.2 = P(Aire \cap CD)$$



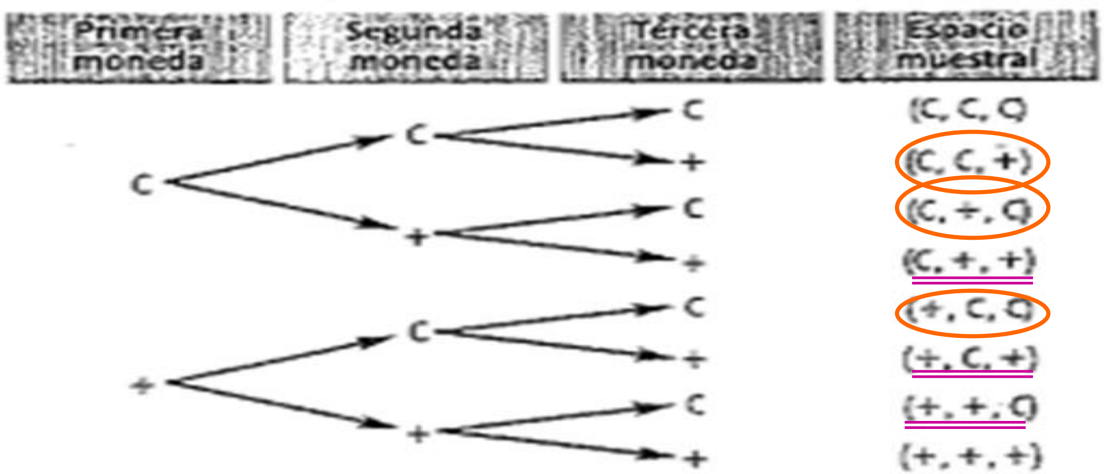
Experimentos compuestos

Diagrama de árbol. Se utiliza en cualquier experimento compuesto.

Si se lanzan 3 monedas al aire y se observa la cara que queda hacia arriba, se estará realizando un experimento compuesto de tres simples. Para obtener el espacio muestral, se construye el siguiente diagrama:

C = «obtener cara»

\+ = «obtener cruz»



Si hay distinción entre las monedas los sucesos en Ω son equiprobables:

Ω = { (CCC), (CC+), (C+C), (C++), (+CC), (+C+), (++C), (+++) }

Si no hay distinción entre las monedas los sucesos no son equiprobables:

Ω = { (CCC), (CC+), (C++), (+++) } ➡

EL NÚMERO COMBINATORIO : $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$C_3^1 = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$

En una caja hay 5 bolas : 3 azules y 2 verdes. Se extrae una bola, se anota el color y se repite el mismo proceso otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 bolas azules?. ¿Cuál es la probabilidad de que la 1ª sea verde y la 2ª azul?

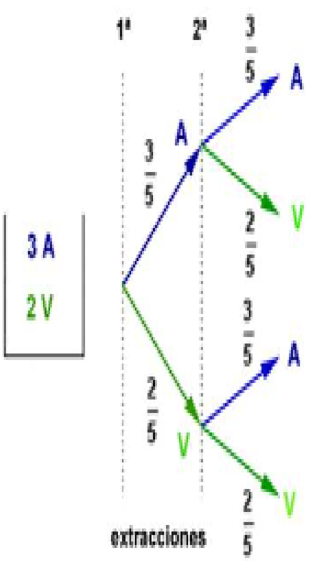
a) Con devolución. $\longrightarrow$ experimentos independientes

b) Sin devolución $\longrightarrow$ experimentos dependientes

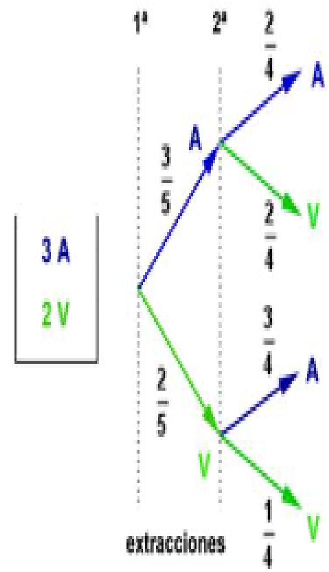
A_i={salir azul en la i-ésima extracción}

DEPENDIENTES = SIN DEVOLUCIÓN

INDEPENDIENTES = CON DEVOLUCIÓN



$$\longrightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$$



$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)$$

Ejercicio: olimpiada matemática

Se dispone de los 4 ases de la baraja. Gana el jugador que consiga dos ases de distinto color. ♥ ♣ ♦ ♠

- Jugador 1 -> extrae un as, mezcla los 4 ases y extrae el otro as
- Jugador 2 -> extrae un as y seguidamente el otro as

¿Cuál de los dos tiene más posibilidades de ganar?

Jugador 1: P(ganar) = P(rojo) P(negro) + P(negro) P(rojo)

= 1/2 * 1/2 + 1/2 * 1/2 = 1/2

Jugador 2: P(ganar) = P(rojo) P(negro) + P(negro) P(rojo)

= 1/2 * 2/3 + 1/2 * 2/3 = 2/3 ⟶ **mas opciones!**

NÚMERO COMBINATORIO : $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Jugador 1: P(ganar) = P(rojo) P(negro) $C_2^1 = 1/2 * 1/2 * \frac{2!}{2!(2-1)!} = 1/2$

Ejercicio: cumpleaños

En un grupo de 10 amigos, ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos cumplan años en días distintos? ¿y la de que al menos dos de ellos cumplan años el mismo día?

X = número de niños que repiten cumpleaños el mismo día

P(todos cumplen en distinto día) $= \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\ldots\frac{357}{365}\frac{356}{365}$ **= 0.8830512**

X=0

P(al menos 2 cumplen el mismo día) = **P(No todos cumplen en distinto día)**

= 1- **P(todos cumplen en distinto día)**

X ≥ 1

X=0

= 1- 0.8830512 = **0.117**

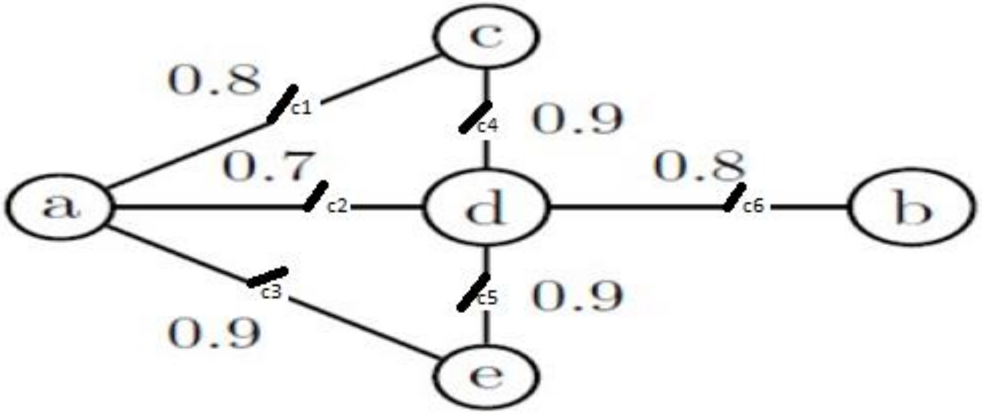
Para el caso de 30 niños.

P(<u>30 niños</u> cumplen en distinto día) = **0.2937**

Ejercicio: circuitos (1.17)

Cada interruptor será un <u>experimento simple</u> de este experimento (circuito) que actúa de forma <u>independiente</u>.

Se indica la probabilidad para cada uno de los interruptores de estar cerrado (c_i). Se pide calcular la probabilidad de que el circuito esté cerrado



Corriente por A = (c1∩c4∩c6)
Corriente por B = (c2∩c6)
Corriente por C = (c3∩c5∩c6)

P(<u>cerrado</u>) = P[(c1∩c4∩c6) ∪ (c2∩c6) ∪ (c3∩c5∩c6))
= P(corriente por A ∪ corriente por B ∪ corriente por C) =
= P(A) + P(B) +P(C) – P(A ∩ B) – P(A ∩ C) – P(B ∩ C) + P(A ∩B ∩C)
= 0.787232

P(corriente por B y corriente por C) = P(c2∩c6∩c3∩c5) = 0,4536

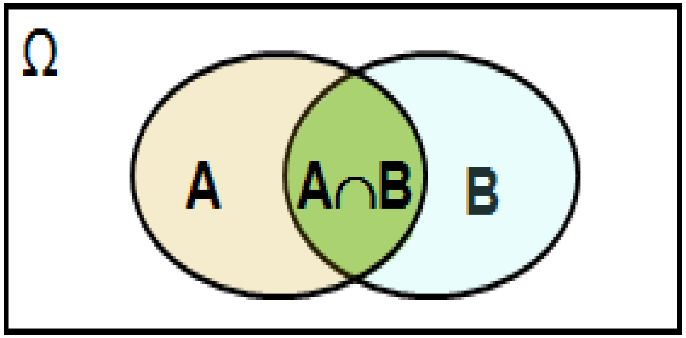
4. Probabilidad Condicional

Independencia Estadística

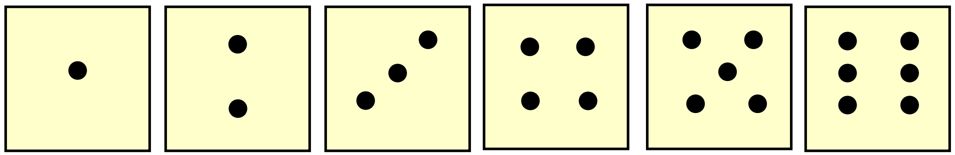
Definición: Los sucesos A y B son **independientes** cuando a la probabilidad de un suceso no le afecta lo que ocurra con el otro suceso

Dos sucesos son estadísticamente **independientes** si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

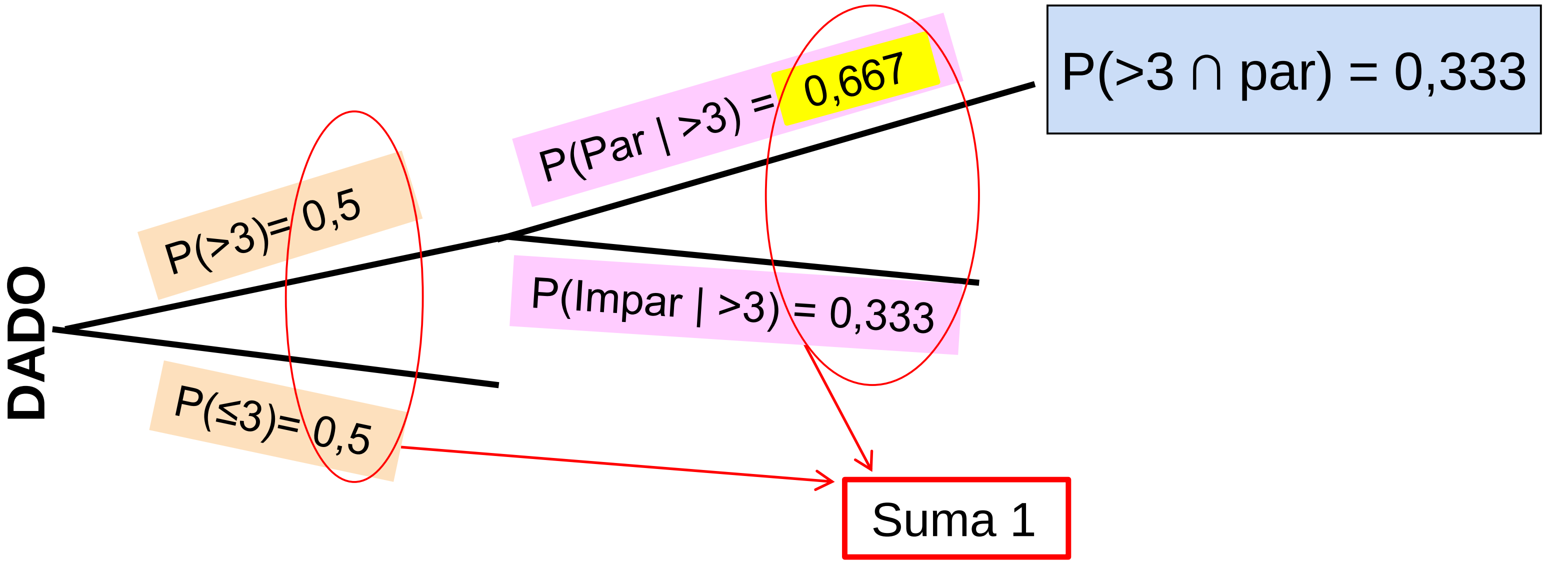


Ejercicio: lanzamiento de un dado (cont)



Comprobar que los sucesos “mayor que 3” y “par” **NO son independientes**.

P(“mayor que 3” y “par”) = 1/3 ≠ 1/2 * 1/2 = P(“mayor que 3”) P(“par”)



Regla de la Multiplicación

- Regla producto o de la multiplicación para dos sucesos A y B:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B)}$$

- también:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)}$$

- Si A y B son independientes, entonces

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A)} \quad \text{si } P(B)>0$$

$$\boxed{P(B \mid A) = P(B)} \quad \text{si } P(A)>0$$

Regla de la Multiplicación:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A | B) \qquad P(A \cap B) = P(A)\, P(B | A)$$

- La **probabilidad condicional** es la probabilidad de un suceso, dado que otro suceso ha ocurrido:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La probabilidad condicional de B dado que A ha ocurrido

siempre que A y B no sean sucesos imposibles.

Observación: P(A|B) y P(B|A) <u>no</u> son sucesos complementarios.

$$P(A | B) = 1 - P(\bar{A} | B)$$

Ejercicio: Aire y CD

TABLA DE CONTINGENCIA

	C D		
AIRE	Si	No	
Si	**0,2**	0,5	**0,7**
No	0,2	0,1	0,3
	0,4	0,6	

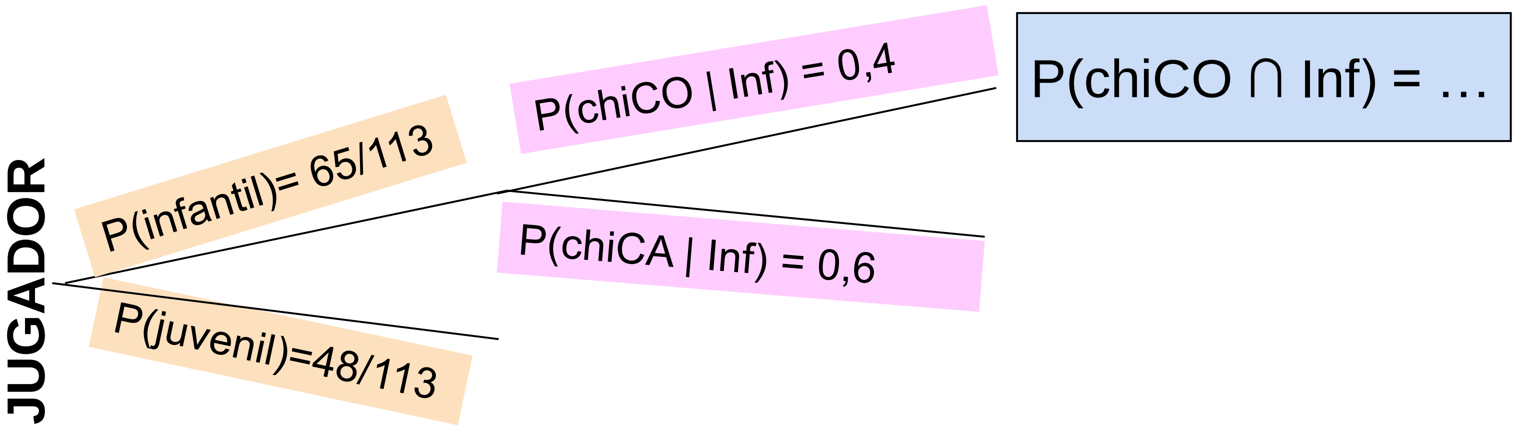
1. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga reproductor de CD si se sabe que tiene aire acondicionado?
2. Si un coche tiene reproductor de CD, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga aire acondicionado?
3. Si un coche no tiene reproductor de CD, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga aire acondicionado?

Ejercicio: torneo baloncesto

En un polideportivo con 113 jugadores se está celebrando un torneo de baloncesto en las categorías infantil y juvenil.

- Si es categoría infantil (con 65 jugadores) el 40% son chicos, 60% chicas.
- Si es categoría juvenil (con 48 jugadores) el 75% son chicos, 25% chicas.

Calcula la probabilidad de que el primer jugador en salir al campo sea un chico de categoría infantil.



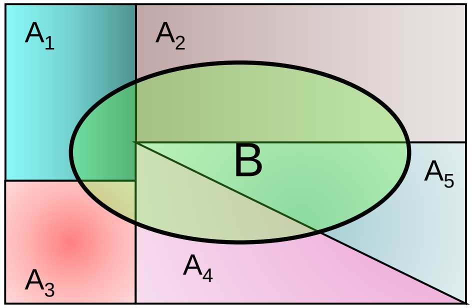
P(Infantil ∩ chico) = P(Infantil) P(chico| Infantil) =

$$= \frac{65}{65+48} \cdot 0{,}40 = \frac{65}{113} \cdot 0{,}40 = 0{,}2301$$

5. Teorema de la Probabilidad Total

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sucesos que forman una partición del espacio muestral Ω tal que $P(A_i) \neq 0$, $i = 1,\ldots,k$

Ω



  - $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad i \neq j$
  - $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$

- Sea B un suceso cualquiera

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)}$$

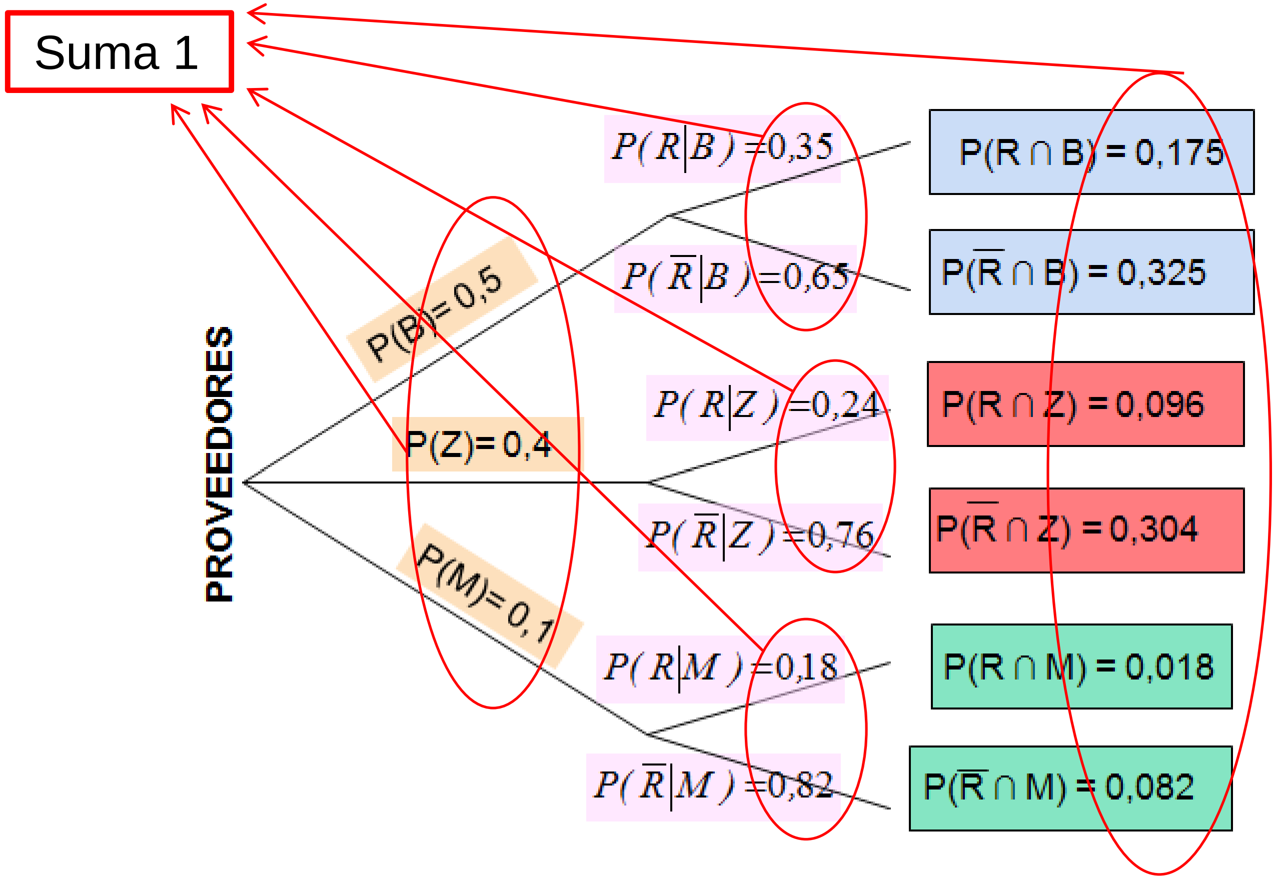
$$\boxed{= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k)}$$

Ejercicio: placas aislantes

Una empresa tiene 3 proveedores de placas aislantes: el 50% del material proviene de un proveedor de Barcelona, el 40% de un proveedor de Zaragoza y el 10% de un proveedor de Madrid.

Todos los proveedores se han comprometido ha utilizar en algunas de sus placas materiales reciclados. El de Barcelona fabrica un 35% de placas con material reciclado, el de Zaragoza un 24% y el de Madrid un 18% de las placas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una placa aislante seleccionada al azar esté realizada con material reciclado?



$$P(R) = P(R \cap B) + P(R \cap Z) + P(R \cap M) =$$

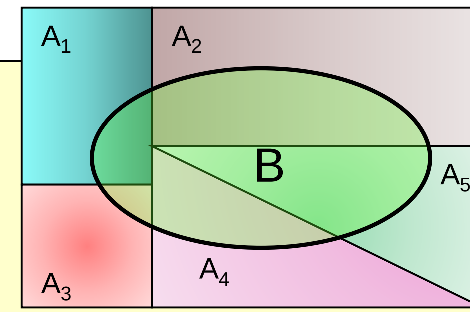
$$= P(B)P(R \mid B) + P(Z)P(R \mid Z) + P(M)P(R \mid M) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}24 + 0{,}1 \cdot 0{,}18 =$$

$$= 0{,}175 + 0{,}096 + 0{,}018 = 0{,}289$$

Teorema de Bayes

- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sucesos que forman una partición del espacio muestral Ω tal que $P(A_i) \neq 0$, $i = 1,\ldots,k$
- Sea B un suceso cualquiera tal que $P(B) \neq 0$



$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

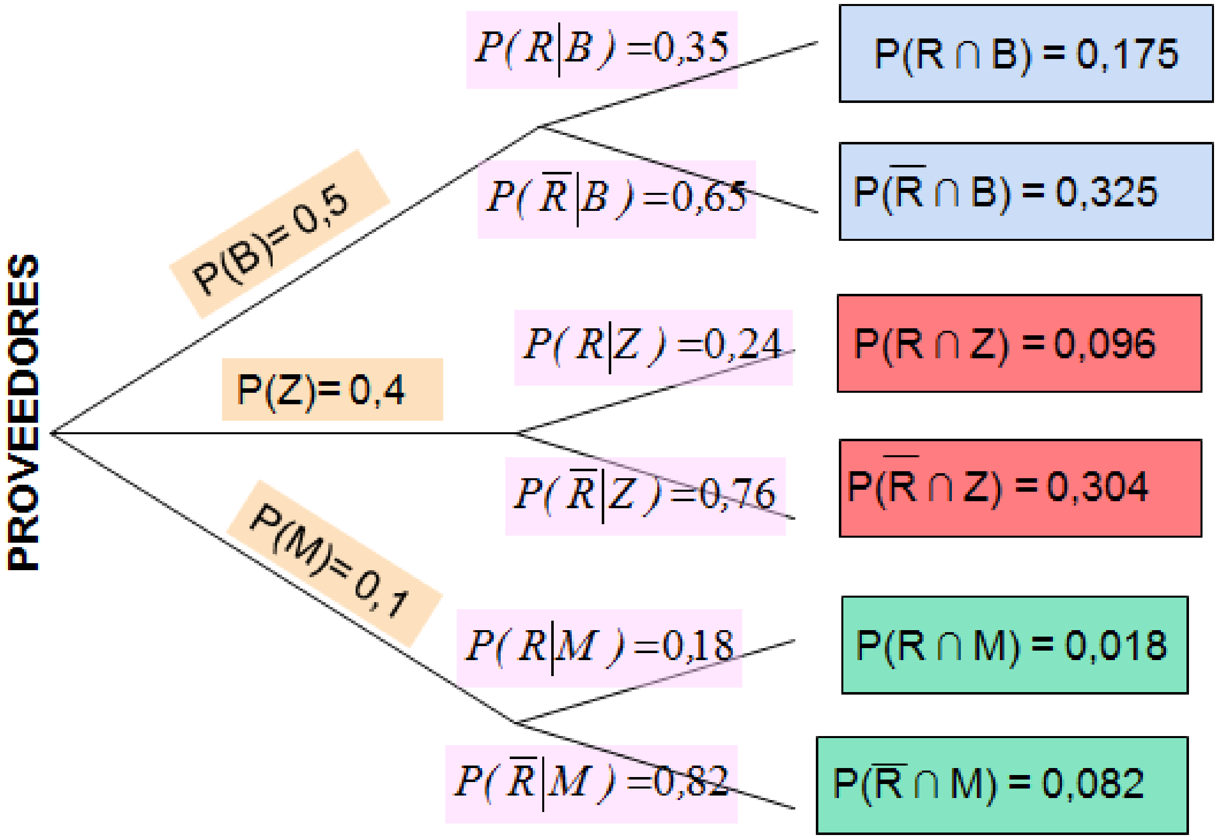
- Probabilidades **a priori**: $P(A_i)$, $i=1,\ldots,k$
- Probabilidades **a posteriori**: $P(A_i|B)$

Observación: P(A|B) y P(B|A) no son sucesos complementarios.

$$P(A \mid B) = 1 - P(\overline{A} \mid B)$$

Ejercicio: placas aislantes (cont)

Siguiendo con el ejemplo de proveedores de placas aislantes:



a) Si una placa aislante está realizada con material reciclado, ¿cuál es la probabilidad de que el proveedor sea el de Barcelona?

b) Si una placa aislante está realizada con material reciclado, ¿cuál es la probabilidad de que el proveedor no sea el de Barcelona?

c) Si una placa aislante no está realizada con material reciclado, ¿cuál es la probabilidad de que el proveedor sea el de Barcelona?