

Objetivos

- Trabajar con los métodos iterativos clásicos de Jacobi y de Gauss-Seidel.
- Analizar las principales características y propiedades de estos métodos numéricos.
- Estudiar la convergencia de estas técnicas numéricas.

4.1. Introducción

Un aspecto importante en el estudio de la transferencia de calor es determinar la distribución de la temperatura en estado estacionario sobre una placa delgada cuando se conoce la temperatura en el contorno. Supongamos que tenemos una placa cuadrada, cuyos bordes se mantienen a una temperatura fija y de la cual se desea conocer la temperatura en los nodos interiores x_1 , x_2 , x_3 y x_4 (véase la Figura 4.1).

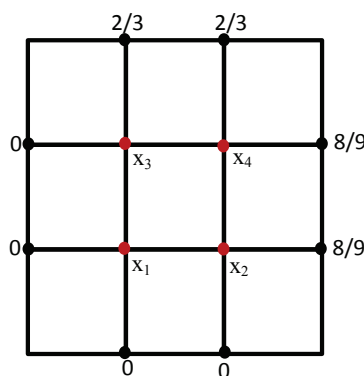


Figura 4.1: Discretización con 4 nodos

Una forma sencilla de obtener una aproximación a la temperatura en estos nodos interiores es aplicar el promedio de las temperaturas de sus nodos adyacentes. Por ejemplo, para el nodo 1 se tiene la relación lineal:

$$x_1 = \frac{1}{4}(0 + 0 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow 4x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

EJERCICIO PROPUESTO

1. Aplica esta aproximación para cada nodo de la placa representada en la Figura 4.1 y comprueba que se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned}
 4x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\
 -x_1 + 4x_2 - x_4 &= 8/9, \\
 -x_1 + 4x_3 - x_4 &= 2/3, \\
 -x_2 - x_3 + 4x_4 &= 14/9,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde la incógnita es el vector de temperaturas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$.

Este mismo procedimiento se puede aplicar a una malla más fina con $n = k^2$ nodos interiores (véase la Figura 4.2), obteniendo en tal caso un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas en el que la matriz de coeficientes es una matriz dispersa (con gran cantidad de elementos nulos) y con una estructura banda. Si el tamaño del sistema, n , es grande, los

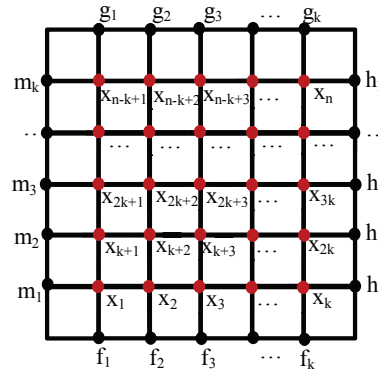


Figura 4.2: Discretización con $n = k^2$ nodos

métodos directos estudiados pueden no ser eficientes (alto coste computacional, requerimientos de memoria de almacenamiento y aparición de errores de redondeo) por lo que se hace necesario recurrir a técnicas numéricas que permitan conocer una solución aproximada del problema.

4.2. Métodos iterativos clásicos

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular. Los *métodos iterativos clásicos*, siguiendo una ley de recurrencia, generan una sucesión de vectores $(\mathbf{x}^{(k)})$ con el fin de aproximar la solución exacta $\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}$:

$$\begin{cases} \text{Dado } \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ recibe el nombre de *matriz de iteración del método* y \mathbf{c} se dice *vector característico del método*.

En cada iteración k se tienen los vectores:

- *Error absoluto* en la iteración k -ésima: $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}$,
- *Residuo* en la iteración k -ésima: $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$.

Además, el método iterativo (4.2) es *convergente* si y sólo si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}^{(k)}\| = 0.$$

En la práctica se van calculando sucesivas aproximaciones $\mathbf{x}^{(k)}$ hasta que se cumple un *criterio de parada o de convergencia* y se detiene el proceso iterativo:

- Si $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < tol$, entonces $\mathbf{x}^{(k)}$ proporciona una aproximación a la solución exacta con una tolerancia tol .
- Fijado un número máximo de iteraciones a realizar max_iter , si $k > max_iter$ el método no alcanza la convergencia con la tolerancia deseada en el número de iteraciones prefijado.

Construcción de métodos iterativos clásicos. Dado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se considera una descomposición de la matriz A en la forma $A = M - N$, con M regular. A partir de una iteración inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, se calculan las sucesivas aproximaciones de la forma:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(M^{-1}N)}_B \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{M^{-1}\mathbf{b}}_c, \quad k \geq 0. \quad (4.3)$$

NOTA. En la práctica la aproximación en la iteración $(k+1)$ -ésima, en lugar de obtenerla a partir de la expresión (4.3), se calcula resolviendo el sistema lineal

$$M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad (4.4)$$

ya que desde el punto de vista computacional es más eficiente.

Teorema. Un método iterativo del tipo (4.3) es convergente para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si y sólo si $\rho(B) = \rho(M^{-1}N) < 1$.¹

En esta práctica nos centramos en los métodos iterativos clásicos de Jacobi y de Gauss-Seidel. Si bien en la actualidad existen técnicas numéricas que resuelven de forma más eficiente grandes sistemas de ecuaciones lineales, estos métodos todavía se utilizan, en ocasiones como aceleradores de convergencia de técnicas más potentes.

Tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel trabajan con la descomposición de la matriz A del sistema en la forma $A = D - E - F$ con

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

¹ $\rho(B)$ es el radio espectral de la matriz B , definido como el máximo de los valores absolutos de los valores propios de la matriz B .

Hemos definido una función en *Maxima* para hallar la descomposición anterior de una matriz A . En primer lugar cargamos el fichero `D_E_F.mac`

```
(%i1) load("C:/.../D_E_F.mac")$
```

Definimos la matriz de coeficientes del sistema (4.1) y la descomponemos:

```
(%i2) A:matrix([4,-1,-1,0],[-1,4,0,-1],[-1,0,4,-1],[0,-1,-1,4]);
```

```
(%o2) 
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i3) [D,E,F]:D_E_F(A);
```

```
(%o3) 
$$\left[ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

```

Observación. En las siguientes secciones consideraremos que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$. En caso de que se anule alguno de estos elementos diagonales, como A es regular, siempre será posible encontrar una permutación adecuada de filas de manera que todos los elementos de la diagonal sean no nulos.

4.3. Método de Jacobi

El método de Jacobi se define tomando $M = D$ (regular, puesto que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$), por lo que $N = E + F$. De este modo, la matriz de iteración del método, B_J , será

$$B_J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F).$$

4.3.1. Jacobi paso a paso

Consideramos la matriz de coeficientes A definida previamente y el vector de términos independientes del sistema (4.1):

```
(%i4) b:matrix([0],[8/9],[2/3],[14/9]);
```

```
(%o4) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

```

Definimos las matrices M y N del método de Jacobi para el sistema (4.1):

```
(%i5) M:D$
      N:E+F$
```

```
(%i7) load("C:/.../triang_inf.mac")$
```

Tomamos como iteración inicial el vector nulo y realizamos cuatro iteraciones (paso a paso) del método de Jacobi aplicado al sistema (4.1):

```
(%i8) x0:zeromatrix(4,1);
```

```
(%o8) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i9) x1:triang_inf(M,N.x0+b);
```

```
(%o9) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

```

```
(%i10) x2:triang_inf(M,N.x1+b);
```

```
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} \frac{7}{72} \\ \frac{23}{72} \\ \frac{19}{72} \\ \frac{35}{72} \end{pmatrix}$$

```

```
(%i11) x3:triang_inf(M,N.x2+b);
```

```
(%o11) 
$$\begin{pmatrix} \frac{7}{48} \\ \frac{53}{144} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{77}{144} \end{pmatrix}$$

```

```
(%i12) x4:triang_inf(M,N.x3+b);
```

```
(%o12) 
$$\begin{pmatrix} \frac{49}{288} \\ \frac{113}{288} \\ \frac{97}{288} \\ \frac{161}{288} \end{pmatrix}$$

```

EJERCICIO PROPUESTO

2. Continúa trabajando con el sistema lineal (4.1). Se pide:

- Calcular el residuo en la cuarta iteración cuando se aplica el método de Jacobi tomando como vector inicial el nulo.
- Hallar tres iteraciones del método de Jacobi partiendo del vector $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 0, 2)^t$.

4.3.2. Algoritmo de Jacobi

Obviamente, desde un punto de vista práctico, no resulta eficiente la aplicación del método de Jacobi paso a paso y al igual que hemos hecho con otros algoritmos, vamos a implementar el método para construir un programa que nos permita resolver sistemas lineales de forma aproximada.

En el fichero `met_jacobi.mac` hemos programado el método de Jacobi creando una función de *Maxima*:

```
[x_aprox, iter]:met_jacobi(A,b,x0,maxiter,tol)
```

con datos de entrada:

- **A**: matriz de coeficientes del sistema,
- **b**: vector de términos independientes,
- **x0**: vector aproximación inicial,
- **maxiter**: número máximo de iteraciones a realizar,
- **tol**: tolerancia.

La función devuelve

- **x_aprox**: la aproximación obtenida,
- **iter**: número de iteraciones realizadas.

EJERCICIO PROPUESTO

3. Continúa trabajando con el sistema lineal (4.1). Se pide:

- a) Abrir el fichero `met_jacobi.mac`, leer atentamente y comprender lo que se está haciendo en esas líneas de código.
- b) ¿Cómo se calcula la nueva iteración? Explicar por qué no es necesario calcular la matriz de iteración B_J para hallar la nueva iteración.
- c) Aplicar el método de Jacobi al sistema (4.1) con una toleración de 10^{-7} y fijando un máximo de 100 iteraciones. Indicar la solución aproximada que se obtiene y cuántas iteraciones se realizan.
- d) Sin hacer ningún cálculo, ¿qué se puede decir sobre el radio espectral de la matriz de iteración, $\rho(B_J)$?
- e) Hallar la solución exacta del sistema (4.1) utilizando la eliminación gaussiana con estrategia de pivotaje. ¿Cuáles son el error absoluto y el residuo en la iteración en la se ha encontrado la solución aproximada?

4.4. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel se define tomando $M = D - E$ (regular, puesto que $a_{ii} \neq 0, \forall i$), por lo que $N = F$. De este modo, la matriz de iteración del método, B_G , será

$$B_G = M^{-1}N = (D - E)^{-1}F.$$

EJERCICIO PROPUESTO

4. Continúa trabajando con el sistema lineal (4.1). Se pide:

- a) Aplicar el método de Gauss-Seidel paso a paso a partir del vector nulo y calcular las tres primeras iteraciones.
- b) Calcular el residuo en la tercera iteración hallada en el apartado anterior.

Al igual que hemos hecho con el método de Jacobi vamos a programar el método de Gauss-Seidel creando la función de *Maxima*:

```
[x_aprox, iter]:met_gauss_seidel(A,b,x0,maxiter,tol)
```

EJERCICIO PROPUESTO

5. Abrir el fichero `met_gauss_seidel.mac` y realizar los siguientes apartados:

- Leerlo atentamente y comprender lo que se está haciendo en esas líneas de código. Completar los puntos suspensivos convenientemente para que quede programado el método de Gauss-Seidel.
 - ¿Qué diferencias hay con el programa del fichero `met_jacobi.mac`?
 - Aplicar el método de Gauss-Seidel al sistema (4.1) con una toleración de 10^{-7} y fijando un máximo de 100 iteraciones. Indicar la solución aproximada que se obtiene y cuántas iteraciones se realizan.
 - Sin hacer ningún cálculo, ¿qué se puede decir sobre el radio espectral de la matriz de iteración, $\rho(B_{GS})$? ¿Cómo piensas que será este valor con respecto al radio espectral de Jacobi, $\rho(B_J)$?
 - ¿Cuáles son el error absoluto y el residuo en la iteración en la que se ha encontrado la solución aproximada?
-

4.5. Convergencia de los métodos habituales

Teorema. Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes si y sólo si el radio espectral de sus matrices de iteración es menor que 1.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *estrictamente diagonal dominante* si para todo $i = 1, \dots, n$ se cumple

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

Teorema. Sea el sistema compatible determinado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es estrictamente diagonal dominante, entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son ambos convergentes.

4.6. Ejercicios propuestos

6. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcula (paso a paso) las tres primeras iteraciones del método de Jacobi tomando como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$, así como el residuo que se obtiene en cada una de ellas.

- b) Analiza las características de la matriz de coeficientes del sistema dado y razona si se satisfacen condiciones suficientes para garantizar *a priori* la convergencia del método.
- c) Calcula la matriz de iteración de Jacobi, B_J , para este sistema. Carga el fichero `radio_espectral.mac`, ejecuta `[val_propios,rho]:radio(Bj)`; para hallar el radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi y razona si este método es convergente cuando se aplica a este sistema.
- d) Carga el fichero `met_jacobi.mac` y aplica el método de Jacobi al sistema anterior trabajando con una tolerancia de 10^{-8} , realizando como máximo 100 iteraciones y tomando como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$.
- e) Repite el apartado anterior tomando como vector de arranque $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)'$ y comprueba que la convergencia no depende del $\mathbf{x}^{(0)}$ elegido.

7. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Aplica el método de Gauss-Seidel (paso a paso) tomando como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$. Explica las dificultades que surgen.
- b) Plantea un sistema equivalente al anterior de manera que sea posible aplicar el método de Gauss-Seidel y además se pueda garantizar *a priori* la convergencia del método.
- c) Carga el fichero `met_gauss_seidel.mac` y encuentra una solución aproximada del sistema, tomando como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$, trabajando con una tolerancia de 10^{-6} y realizando como máximo 50 iteraciones.
- d) Halla el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel y comprueba que es menor que 1.

8. Considera el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 15 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & 15 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 4 & 20 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) A partir de los resultados teóricos que conocemos, ¿se puede garantizar *a priori* la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel?
- b) Encuentra la solución aproximada que se obtiene al aplicar el método de Jacobi al sistema anterior trabajando con una tolerancia de 10^{-8} , realizando como máximo 100 iteraciones y tomando como aproximación inicial el vector nulo.
- c) Aplica el método de Gauss-Seidel para encontrar una aproximación de la solución del sistema considerando los mismos parámetros que en el apartado anterior.
- d) ¿Son convergentes los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel para este sistema?
- e) Sin realizar cálculos adicionales, ¿qué podemos decir de los radios espectrales de las matrices de iteración de cada uno de estos métodos aplicados a este sistema? Hállalos y comprueba tu respuesta.

9. Analiza la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel cuando se aplican a los sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿La convergencia depende del vector inicial? ¿Qué ocurre con los radios espectrales en estos casos?