Tema 3: Cálculo integral en $\mathbb{R}^n$

Primitivas de algunas funciones elementales

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $a \in \mathbb{R},\ a \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int a^x \ln a\ dx = a^x + C$, $a \in \mathbb{R},\ a > 0$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Otras primitivas

- $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \frac{3\operatorname{sen} x}{4} + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(3x) + C$
- $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{3\cos x}{4} + \frac{1}{12}\cos(3x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$

Cambio de variable en $\mathbb{R}^2$

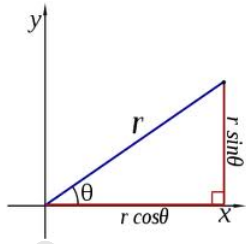
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} (f \circ \boldsymbol{T})(u,v)\left|\mathsf{det}(J\boldsymbol{T}(u,v))\right| du dv$$

donde $J\boldsymbol{T}(u,v)$ es la matriz jacobiana de la biyección continua $\boldsymbol{T} : D^* \to D$

Coordendas polares

$$\boldsymbol{T} : \begin{cases} x = r\,\cos\theta, \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta. \end{cases} \qquad \left|\mathsf{det}(J\boldsymbol{T}(r,\theta))\right| = r\,,$$

$$\boldsymbol{T}^{-1} : \begin{cases} r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$



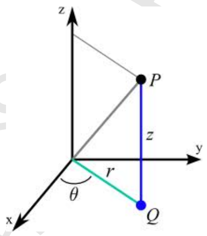
Cambio de variable en $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{Q^*} (f \circ \boldsymbol{T})(u,v,w)\left|\mathsf{det}(J\boldsymbol{T}(u,v,w))\right| du\,dv\,dw$$

donde $J\boldsymbol{T}(u,v,w)$ es la matriz jacobiana de la biyección continua $\boldsymbol{T} : Q^* \to Q$

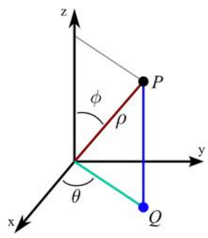
Coordendas cilíndricas

$$\boldsymbol{T} : \begin{cases} x = r\,\cos\theta\,, \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta\,, \\ z = z\,. \end{cases} \qquad \left|\mathsf{det}(J\boldsymbol{T}(r,\theta,z))\right| = r\,,$$



Coordendas esféricas

$$\boldsymbol{T} : \begin{cases} x = \rho\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi\,, \\ y = \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi\,, \\ z = \rho\,\cos\phi\,. \end{cases} \qquad \left|\mathsf{det}(J\boldsymbol{T}(\rho,\theta,\phi))\right| = \rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,,$$



Tema 4: Cálculo vectorial

Campo conservativo

- Un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ se dice *conservativo* si existe un campo escalar f, la función potencial, tal que

$$\boldsymbol{F} = \nabla f$$

Campo conservativo: condición necesaria y suficiente en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}$$

Campo conservativo: condición necesaria en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}\,.$$

Las líneas de campo (curvas integrales) satisfacen la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{F_1(x,y)} = \frac{dy}{F_2(x,y)}\,.$$

Integral de un campo escalar sobre una curva

- Sea una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con $m \in \{2,3\}$ y $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una parametrización de una curva Γ. Se define la *integral de f sobre* Γ como

$$\int_\Gamma f\,ds := \int_a^b f\big(\boldsymbol{x}(t)\big).\|\boldsymbol{x}'(t)\|dt\,.$$

Integral de un campo vectorial sobre una curva

- Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, con $m \in \{2,3\}$ un campo vectorial, y $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una parametrización de una curva Γ. Se define la integral del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre la curva Γ como

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \left(\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right) dt$$

Independencia del camino

- Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial suave definido en un domino abierto y conexo D. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:
  1. $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D.
  2. $\oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ para toda curva Γ cerrada y suave en D.
  3. Dados dos puntos cualesquiera $A, B \in D$, la integral $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ tiene el mismo valor para toda curva suave a trozos desde A hasta B. Si f es una función potencial, $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$

Teorema de Green en el plano

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Integral de un campo escalar sobre una superficie

- Sea una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S. Se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\iint_S f\,dS := \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\, du\,dv\,.$$

Elemento infinitesimal de superficie dS con la parametrización trivial

- Si S puede ser expresada en la forma $z = g(x,y)$, podemos hacer uso de la parametrización trivial $\boldsymbol{T}(x,y) = (x, y, g(x,y))$. En tal caso $\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y = (-g_x, -g_y, 1)$, y el elemento infinitesimal de superficie es

$$dS = \|\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\|\, dx\,dy = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\; dx\,dy\,.$$

Integral de un campo vectorial sobre una superficie

- Dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}$, se define el *flujo* de $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie orientable S como la integral sobre S de la componente normal de $\boldsymbol{F}$.

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS$$

Divergencia

- La *divergencia* de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ se define como

$$div\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Rotacional

- El *rotacional* de un campo vectorial es

$$rot\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

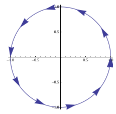
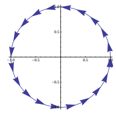
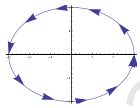
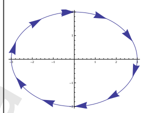
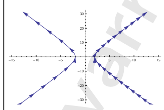
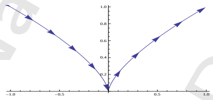
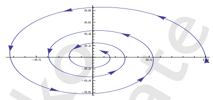
Teorema de la Divergencia

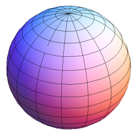
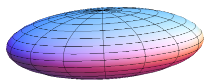
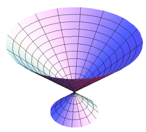
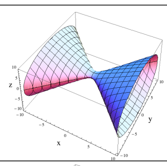
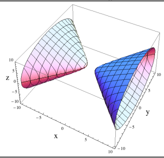
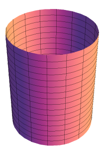
$$\oint_\Gamma (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, ds = \iint_D div\boldsymbol{F}\, dx\,dy \quad (\text{en } \mathbb{R}^2)$$

$$\oiint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS = \iiint_Q div\boldsymbol{F}\, dx\,dy\,dz \quad (\text{en } \mathbb{R}^3)$$

Teorema de Stokes

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (rot\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS$$

Parametrización de algunas curvas en $\mathbb{R}^2$				
Ecuación en cartesianas	Una parametrización	Otra parametrización	Curva	Curva
$x^2+y^2=r^2$	$\begin{cases} x(t)=r\cos t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=r\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t)=r\cos(2t), & t\in[0,\pi] \\ y(t)=r\,\mathrm{sen}(2t), & t\in[0,\pi] \end{cases}$		
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\cos t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t)=a\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\cos t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$		
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\sec t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\tan t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$			
$y^3=x^2$	$\begin{cases} x(t)=t^3, & t\in\mathbb{R} \\ y(t)=t^2, & t\in\mathbb{R} \end{cases}$			
	$\begin{cases} x(t)=a\,e^{bt}\cos t, & t\in\mathbb{R} \\ y(t)=a\,e^{bt}\,\mathrm{sen}\,t, & t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$(a>0, b<0)$		

Parametrización de algunas superficies en $\mathbb{R}^3$		
Ecuación en implícitas	Una parametrización	Superficie
$x^2+y^2+z^2=r^2$ Esfera	$\begin{cases} x(\phi,\theta)=r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \\ y(\phi,\theta)=r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \\ z(\phi,\theta)=r\cos\phi, \end{cases}$	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Elipsoide	$\begin{cases} x(\alpha,\theta)=a\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \\ y(\alpha,\theta)=b\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \\ z(\alpha,\theta)=c\,\cos\phi, \end{cases}$	
$z^2=x^2+y^2$ Cono	$\begin{cases} x(\rho,\theta)=\rho\cos\theta, \\ y(\rho,\theta)=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z(\rho,\theta)=\rho, \end{cases}$	
$x^2-y^2-z^2=-1$ Hiperboloide de 1 hoja	$\begin{cases} x(\rho,\theta)=\pm\sqrt{\rho^2-1}, \\ y(\rho,\theta)=\rho\cos\theta, \\ z(\rho,\theta)=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$	
$x^2-y^2-z^2=1$ Hiperboloide de 2 hojas	$\begin{cases} x(\rho,\theta)=\pm\sqrt{\rho^2+1}, \\ y(\rho,\theta)=\rho\cos\theta, \\ z(\rho,\theta)=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{cases}$	
$a^2=x^2+y^2$ Cilindro	$\begin{cases} x(\rho,\theta)=a\cos\theta, \\ y(\rho,\theta)=a\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z(\rho,\theta)=\rho, \end{cases}$	
$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ Paraboloide elíptico	$\begin{cases} x(u,v)=a\,u, \\ y(u,v)=b\,v, \\ z(u,v)=u^2+v^2, \end{cases}$