Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Asignatura: 242206 Matemáticas II
Departamento: Estadística, informática y matemáticas
Examen: Evaluación continua, parte A
Fecha: 21 de mayo de 2019
Indicaciones para resolverlo

Primer apellido: ....
Segundo apellido: ....
Nombre: ....
DNI: ....
☐ Grupo 2
☐ Grupo 3

A tener en cuenta

- Esta parte corresponde a los temas 4-5 y vale un 45 % de la evaluación continua
- **Criterios de puntuación:** para alcanzar la máxima puntuación en un problema, éste debe estar, en su totalidad, correctamente planteado, explicado y resuelto. Se valorará positivamente el orden y la claridad en las respuestas.
- Para agilizar la tarea de corrección, empezad cada problema en una hoja nueva y entregad los problemas en el mismo orden que están enunciados (independientemente del orden en que los hayáis resuelto).
- La primera hoja que entreguéis debe ser esta carátula completamente rellenada.
- Para evitar extravíos, rellenad la cabecera completa de todas las hojas que entreguéis.
- No entreguéis nada escrito con lápiz ni con color rojo.
- A partir de la entrega del enunciado, tenéis dos horas para resolver este examen.
- log representa el logaritmo neperiano.
- No está permitido el uso de teléfono móvil ni de ningún dispositivo de comunicación.
- No está permitido el uso de calculadoras.

1. (1.5 *puntos*) Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ y $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

   Calcula
$$\iint_D f(x, y)dxdy\,.$$

   Solución: En primer lugar, dibujamos D, que es el recinto delimitado por la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1 (figura 1).

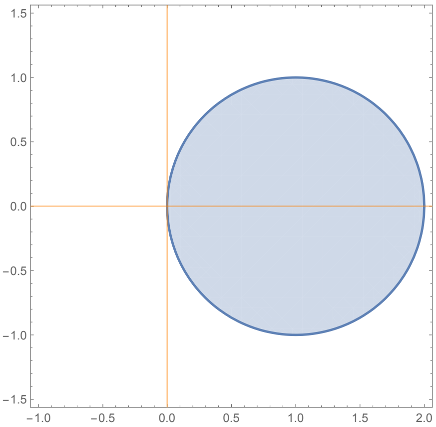

Figura 1: recinto D correspondiente a la pregunta 1

   Hacemos un cambio de variable a polares $x = r\cos\alpha$, $y = r \operatorname{sen}\alpha$, $|J| = r$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y r desde 0 hasta $2\cos\alpha$. Con esto

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\alpha} (r^2 - 2r\cos\alpha)rdr\ d\alpha = \cdots = -\frac{\pi}{2}.$$

   (Ha aparecido una integral de $\cos^4\alpha$ que se ha evaluado utilizando una tabla que está en los formularios).

2. (1.5 *puntos*) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por los paraboloides $z = 4(x - 1)^2 + 4y^2$, y $(x - 1)^2 + y^2 = z - 3$ (puedes ver un dibujo de Q en la figura 2). Calcula el volumen de Q.

   Solución: tenemos que $v(Q) = \iiint_Q 1dxdydz$; aplicamos el teorema de Fubini:

$$\iiint_Q 1dxdydz = \iint_D \left(\int_{4(x-1)^2+4y^2}^{3+(x-1)^2+y^2} dz\right) dxdy\,.$$

   Veamos cuál es el recinto D de $\mathbb{R}^2$: llamamos Γ a la curva intersección de los dos paraboloides; D es el recinto delimitado por la proyección de Γ sobre el plano XY. Se puede ver fácilmente que Γ está contenida en el cilindro $(x - 1)?^2 + y^2 = 1$ (y también está contenida en el plano $z = 4$, lo que puede sernos útil en otras preguntas), por lo que el D es exactamente el recinto considerado en la pregunta 1. Puedes ver un dibujo representativo en la figura 3. La integral anterior, queda

$$-3\iint_D (x^2 + y^2 - 2x) = -3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \text{ (usando el resultado de la pregunta 1)}\,.$$

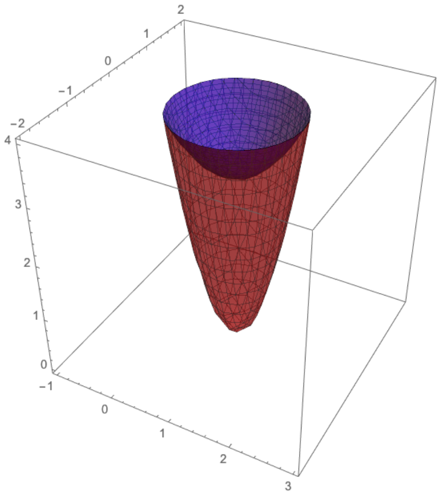

Figura 2: recinto Q correspondiente a la pregunta 2

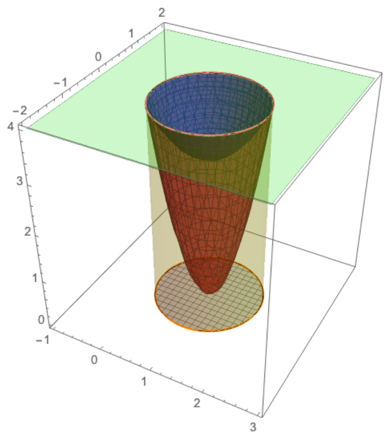

Figura 3: recinto Q y proyecciones correspondientes a la pregunta 2

3. Sea Γ la curva que delimita el recinto D de la pregunta 1

   a) (1 *punto*) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, calcula

   $$\int_\Gamma f \, d\ell \, .$$

   Solución: parametrizamos la curva Γ: una parametrización es

   $$\mathbf{\Phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \tag{1}$$
   $$t \mapsto (1 + \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \tag{2}$$

   Tenemos que $\|\mathbf{\Phi}'(t)\| = 1$ y que $f(\mathbf{\Phi}(t)) = 2 + 2\cos t$; con esto

   $$\int_\Gamma f \, d\ell = \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos t) dt = 4\pi \, .$$

   b) (1.5 *puntos*) Orientamos Γ en sentido positivo, y consideramos el campo vectorial

   $$\boldsymbol{F}(x,y) = \Big(2xy - x^2 y + y\cos(xy),\; xy^2 + x\cos(xy)\Big) \, .$$

Calcula
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \,.$$

Solución: Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green, por lo que
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{F}) dxdy$$
donde

- la integral doble va con signo "+"porque Γ está orientada positivamente
- D es por definición, el recinto de $\mathbb{R}^2$ considerado en la pregunta 1
- calculamos $\nabla \times \boldsymbol{F} = x^2 + y^2 - 2x$.

Con esto, la integral doble es exactamente la calculada en la pregunta 1, con lo que el resultado pedido es $-\dfrac{\pi}{2}\cdot$

4. (2 *puntos*) Sea S la porción de paraboloide $z-3=(x-1)^2+y^2$ considerado en la pregunta 2 y sea $f(x,y,z)=\sqrt{4z-11}$, calcula
$$\iint_S f ds \,.$$

Solución: parametrizamos la superficie S: si llamamos $g(x,y) = 3 + (x-1)^2 + y^2$, una parametrización es
$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &: D \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x,y,g(x,y)) \end{aligned}$$
siendo D, por definición de S, el recinto de $\mathbb{R}^2$ considerado en la pregunta 1. Además

- $\|\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\| = \sqrt{1+g_x^2+g_y^2} = \sqrt{4(x^2+y^2-2x)+5}$
- $f(\boldsymbol{T}(x,y)) = \sqrt{4(x^2+y^2-2x)+5}$.

Con esto
$$\iint_S f ds = \iint_D (4(x^2+y^2-2x)+5) dxdy = 4 \iint_D (x^2+y^2-2x) dxdy + 5a(D) = 4\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5\pi = 3\pi$$
donde, de nuevo, hemos usado el resultado de la pregunta 1 para ahorrarnos cuentas.

5. (1.5 *puntos*) Sea Γ la curva intersección de los paraboloides considerados en la pregunta 2, orientamos Γ de manera que su proyección sobre el plano XY se recorra en sentido positivo (puedes ver un dibujo de Γ en la figura 4). Sea
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z+yz, x+xz, y+xy) \,.$$
Calcula
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \,.$$

Solución: Estamos en condiciones de aplicar el terorema de Stokes
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$$
donde

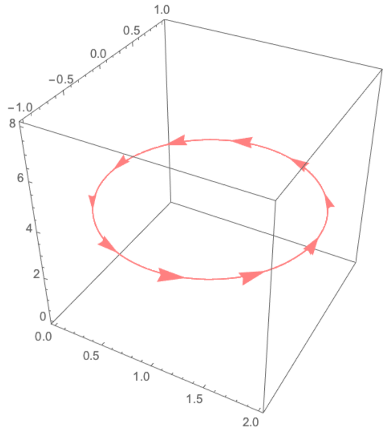

Figura 4: curva Γ correspondiente a la pregunta 5

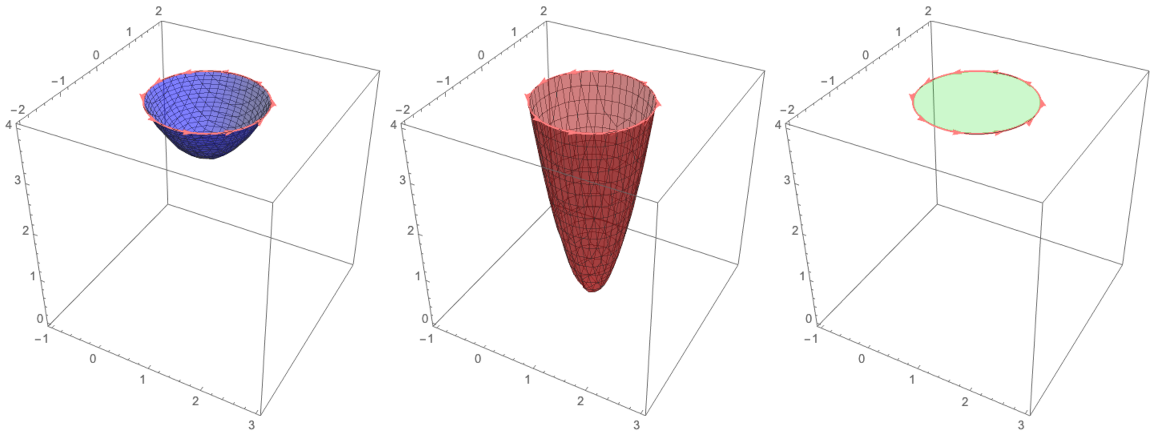

Figura 5: opciones para tomar S en la pregunta 5

- S es cualquier superficie cuyo borde sea Γ, en la pregunta 2 hemos visto que Γ está contenida en el plano $z = 4$ por lo que vamos a tomar como S la porción adecuada del plano $z = 4$. En la figura 5 puedes ver las distintas opciones para elegir S.
- La integral doble irá con signo "+"si la orientación de Γ y la de S son coherentes
- calculamos $\nabla \times \boldsymbol{F} = (1, 1, 1)$.

Parametrizamos S

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} : D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 4) \end{aligned}$$

donde D, es, por definición de Γ el recinto de $\mathbb{R}^2$ considerado en la pregunta 1. El vector normal con esta parametrización es $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$, que tiene un sentido coherente con la orientación especificada para Γ. Con esto

$$\iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \iint_D (1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1) dxdy = a(D) = \pi.$$

6. (1 *punto*) Sea S la superficie que bordea el recinto Q considerado en la pregunta 2, consideramos en vector normal entrante y el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x + x \operatorname{sen} y, y + \cos y, z) \ .$$

Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma \, .$$

Solución: Estamos en condiciones de aplicar el teorema de la divergencia

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = - \iiint_Q \nabla \cdot \boldsymbol{F} dxdydz$$

donde

- la integral triple lleva un signo "$-$" porque el vector normal especificado es entrante
- Q es, por definición de S, el recinto de $\mathbb{R}^3$ considerado en la pregunta 2
- calculamos $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 3$.

Con esto

$$- \iiint_Q \nabla \cdot \boldsymbol{F} dxdydz = -3v(Q) = -\frac{9}{2}\pi,$$

usando el volumen de Q, ya calculado en la pregunta 2.