Tema 5

Cálculo integral en $\mathbb{R}$

Ejercicios y Soluciones

5.1. Evalúa la suma de Riemann para $f(x) = 2-x^2$ correspondiente a una partición del intervalo $[0, 2]$ en 4 subintervalos de igual longitud, tomando los puntos extremos de la derecha de cada subintervalo como puntos de muestra. Haz un dibujo que te ayude a comprender qué representa esa suma de Riemann.

Solución.

La suma de Riemann

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4(f(x), \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x = 0,5(f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2)) \\ &= 0,5[1,75 + 1 + (-0,25) + (-2)] = 0,5(0,5) = 0,25\end{aligned}$$

representa la suma de las áreas de los dos rectángulos que se encuentran por encima del eje x menos la suma de las áreas de los dos rectángulos que se encuentran por debajo del eje de las x.

5.2. Dada a un número real positivo cualquiera, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, divide el intervalo $[0, a]$ en n subintervalos de igual longitud. Utiliza el extremo derecho de cada subintervalo para construir la suma de Riemann asociada a la partición anterior que aproxime la integral definida

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Simplifica todo lo que puedas la expresión resultante.

Solución.

La suma de Riemann $\mathcal{R}_n(f, \mathcal{P})$ de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ asociada para cada n a la partición $\mathcal{P} = \{0 < a/n < 2a/n < \ldots < ka/n < \ldots < (n-1)a/n < a\}$ del intervalo $[0, a]$ es

$$\mathcal{R}_n(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{\sqrt{n^2 + k^2a^2}}$$

5.3. La *parte entera* de un número real x se define como $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$, es decir, $[x]$ es el entero inmediatamente inferior a x. Calcula el valor de la integral definida $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{[x]}\, dx$.

Solución.

La función $1/[x]$ es integrable en $[1, 4]$, ya que es una función acotada en tal intervalo y discontinua solamente en los puntos 2, 3, y 4. En cada intervalo $[n, n+1]$, para $n = 1, 2, 3$, $1/[x]$ difiere de la función constante $1/n$ en tan sólo el punto $n+1$, por lo que sus integrales son iguales. Así, aplicando la aditividad de la integración, se tiene:

$$\int_1^4 \frac{1}{[x]}\,dx = \sum_{n=1}^{3}\int_n^{n+1}\frac{1}{[x]}\,dx = \sum_{n=1}^{3}\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,dx = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

5.4.

Calcula el valor de cada integral definida interpretándola en términos de áreas.

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$

(II) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\log\frac{2+x}{2-x}\,dx.$

(III) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\sqrt{3-x^2+2x}\,dx.$

Solución.

(I) $\pi/2$.

(II) 0.

(III) 2π.

5.5. Utiliza las propiedades elementales de la integral definida para verificar las desigualdades siguientes sin evaluar las integrales:

(I) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}^3(x)\,dx \le \int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}^2(x)\,dx.$

(II) $\displaystyle 2 \le \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx \le 2\sqrt{2}$

(III) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} x\,dx \le \frac{\pi^2}{8}.$

5.6. Si f es una función integrable en $[a,\, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$, demuestra que existe $c \in [a,\, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^c f = \int_c^b f.$

Solución.

La función $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$. Además se puede comprobar que $G(a) = -\displaystyle\int_a^b f = -G(b)$, con lo que aplicando el teorema de Bolzano, se obtiene el resultado.

5.7. Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo T. prueba que

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_x^{x+T} f(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solución.

Sea $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$. Por el teorema fundamental del Cálculo y por la periodicidad de f, resulta que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Luego G es constante. Así, para todo $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = G(0) = \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$.

5.8. En cada uno de los apartados siguientes, halla $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y k constante para que se cumpla la ecuación integral correspondiente:

(I) $\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt + \int_0^x t\,g(t)\,dt = \arctan x + \log\sqrt{1+x^2} + k$ para todo $x > 0$.

(II) $\displaystyle\int_k^x g(t)\,\cos t\,dt = \sin^2 x - \sin x - 2$ para todo $x \in (0, \pi/2)$.

Solución.

(I) Dado que g es continua en $\mathbb{R}$, por el teorema fundamental del Cálculo, las funciones $\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_0^x t\,g(t)\,dt$ son derivables en $\mathbb{R}$. Puesto que se ha de cumplir que

$$\int_1^x g(t)\,dt + \int_0^x t\,g(t)\,dt = \arctan x + \log\sqrt{1+x^2} + k,$$

derivando, resulta que

$$g(x) + xg(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}.$$

Se deduce que $g(x) = 1/(1+x^2)$. En tal caso, sustituyendo en la igualdad dada y evaluando para $x = 0$, se sigue que $k = -\pi/4$.

(II) Razonando análogamente, se deduce que $g(x) = 2\sin x - 1$ y $k = -\pi/2 + 2\pi n$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

5.9.

Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(1+t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x (e^{t^3} - 1)\,dt}$.

Solución.

Aplicando el teorema fundamental del Cálculo, la regla de L'Hôpital, y equivalencias, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \log(1+t)\,dt}{\displaystyle\int_0^{x} (e^{t^3}-1)\,dt} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\log(1+x^2)}{e^{x^3}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$$

5.10. Halla los valores de a y b para los que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{4+t}}\,dt = 1.$$

Solución.

$a = b = 1.$

5.11. Indica razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(I) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

(II) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln 15.$

Solución.

(I) Verdadero.

(II) Falso.

5.12. Calcula las siguientes integrales indefinidas directamente o usando un cambio de variable.

(I) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx$

(II) $\displaystyle\int \frac{1}{2+x^2}dx$

(III) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

(IV) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$

(V) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

(VI) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

Solución.

(I) $\dfrac{x^{1-1/n}}{1-1/n}+C$

(II) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$

(III) $-\dfrac{2(1-x)^{3/2}}{3}+\dfrac{4(1-x)^{5/2}}{5}-\dfrac{2(1-x)^{7/2}}{7}+C$

(IV) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C$

(V) $\operatorname{arctg}(e^x)+C$

(VI) $-2\cos^{1/2} x+\dfrac{2\cos^{5/2} x}{5}+C$

.

5.13. Calcula las siguientes integrales integrando por partes:

(I) $\displaystyle\int \ln x\, dx$

(II) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$

(III) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\ln(\operatorname{tg} x)\, dx$

(IV) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$

(V) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

Solución.

(I) $x\ln x - x + C$

(II) $x\operatorname{sen} x+\cos x + C$

(III) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x\ln|\operatorname{tg} x|+\ln|\cos x|)+C$

(IV) $(12-2x)\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})-(12-6x)\operatorname{sen}(\sqrt{x})+C$

(V) $-\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

5.14. Utiliza el cambio $u=\operatorname{sen} t$ para comprobar que

$$\int \frac{1}{\cos t}\,dt == \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}\right|+C=\ln|\operatorname{tg} t+\sec t|+C$$

5.15. Calcula las siguientes integrales definidas utilizando las sustituciones trigonométricas que se indican:

(I) $\displaystyle\int_0^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx,\qquad 2x=3\operatorname{tg}\theta.$

(II) $\displaystyle\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4-9x^2}\,dx,\qquad 3x=2\operatorname{sen}\theta$, donde $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Solución.

(I) $3/32$

(II) $64/1215$.

5.16. Calcula las siguientes integrales racionales:

(I) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a+1)(x+a)}$

(II) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

(III) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

(IV) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(V) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (usa el cambio $x=\operatorname{tg}(t)$).

(VI) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Solución.

(I) $\displaystyle\ln\left|\frac{x+a}{x+a+1}\right|+C$

(II) $\displaystyle\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

(III) $\displaystyle x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

(IV) $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

(V) $\displaystyle\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

(VI) $\displaystyle\frac{2x-1}{2(2+2x+x^2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$

5.17. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(I) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(II) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(III) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{1/4}}\,dx$ (Usa la sustitución $x=\operatorname{sen}^2\theta$ junto con la identidad $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$).

(IV) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)\,dt$

Solución.

(I) $2\sqrt{x-1}\left(\dfrac{(x-1)^3}{7}+\dfrac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$

(II) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$

(III) $\dfrac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$

(IV) $\dfrac{t\cos\varphi}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$

5.18. Calcula $\displaystyle\int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

(I) utilizando la sustitución trigonométrica $x=\operatorname{tg}\theta$;

(II) por partes.

Solución.

$\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{1+x^2}+C$

5.19. Halla el valor promedio de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ cuando x recorre el intervalo $[1,7]$. (Utiliza la sustitución trigonométrica $x=\sec\theta$.)

Solución.

$\dfrac{1}{6}[\sqrt{48}-\sec^{-1}(7)]$

5.20. La velocidad v de la sangre que fluye por un vaso de radio R y longitud l a una distancia r del eje del vaso es

$$v(r)=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2),$$

donde P, l, y η son constantes positivas. Calcula la velocidad promedio en $[0,R]$ y compárala con la velocidad máxima en ese intervalo.

Solución.

$v_{\text{prom}}=\frac{PR^2}{6\eta l}$. El valor máximo de $v(r)$ se alcanza para $r=0$ y es $v(0)=\frac{PR^2}{4\eta l}>v_{\text{prom}}$.

5.21. Calcula las integrales definidas siguientes

(I) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\theta|\,d\theta$

(II) $\displaystyle\int_{-7}^{7} \frac{x^3\cos x}{x^6+2}\,dx.$

(III) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ (usa el cambio $u=\sqrt{t}$ seguido de integración por partes)

Solución.

(I) 3

(II) 0 (Observa las simetrías del integrando y del intervalo de integración)

(III) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\frac{1}{2}\pi-\ln 2$

5.22. Estudia la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

(I) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx;$

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-2x}\,dx;$

(III) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\,dx;$

(IV) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sec x\,dx;$

(V) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos(\pi x)\,dx;$

(VI) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln x\,dx.$

Solución.

(I) Converge a 6.

(II) Diverge.

(III) Converge a $\pi/2$.

(IV) Diverge.

(V) Diverge.

(VI) Converge a $-1/4$.

5.23. Usando criterios de comparación, determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

(I) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}-x^{1/2}}\,dx;$

(II) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x^{3/2}-x^{1/2}}\,dx$

(III) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx;$

(IV) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{x}+x}\,dx.$

Solución.

(I) Converge por comparación con $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$.

(II) Diverge por comparación con $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x-1}\, dx$.

(III) Converge por comparación con $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$.

(IV) Converge por comparación con $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$.

5.24. Comprueba que la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^a(\ln x)^b}\, dx$:

(I) converge si $a > 1$, para todo b,

(II) converge si $a = 1$ y $b > 1$,

(III) diverge si $a < 1$, para todo b.

Solución.

Los resultados se pueden probar utilizando el criterio de comparación por paso al límite y propiedades de límites en el infinito.

5.25. La integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2} \right) dx$$

converge para cierto valor de C. Determina C y calcula la integral.

Solución.

La integral converge si y sólo si $C = 1$. En ese caso converge a $\ln 2$.

5.26. Demuestra que la función

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{e^t}{\sqrt{|t|}}\, dt$$

está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcula los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$ y determina sus asíntotas.

Solución.

La integral impropia $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{|t|}}\,dt$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ por comparación con $= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,dt$. Los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$ son el $(0,0)$, y $(1/2, f(1/2))$. La única asíntota es la recta horizontal $y = -\sqrt{\pi}$