Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales
1er CURSO
AMPLIACIÓN DE FÍSICA

2. Potencial eléctrico

1. Hallar el gradiente de los campos escalares siguientes: $f_1 = xyz$, $f_2 = (x^2 y + y^2 x)$. ¿Cuál es la variación del valor del campo escalar, obtenida a partir del gradiente, para un desplazamiento $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Obtener también el gradiente del campo escalar $f_3(\rho,\phi,z) = \frac{1}{2}\rho z^2 + \phi$.
2. ¿Cuáles de los siguientes campos vectoriales son conservativos? Obtener el campo escalar del que derivan (*A* es una constante).

   a) $\vec{V} = A\vec{k}$ b) $\vec{V} = (2Axy)\vec{i} + (Ax^2)\vec{j}$ c) $\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + xy\vec{k}$ d) $\vec{V} = \frac{A}{r^2}\vec{u}_r$
3. Dos partículas puntuales cargadas con la misma carga *Q* se encuentran situadas en el eje *x* a una distancia *a* y *–a* del origen. Calcular el trabajo que hay que realizar para traer una carga *Q'* desde el infinito, hasta el origen del sistema de referencia. Si una vez situada en el origen se deja libre la partícula ¿Qué trayectoria seguirá, y cuál será su velocidad en el infinito si su masa es *m*?

4. Obtener el potencial eléctrico que crea un dipolo en el plano *xy* (considerar la carga - *Q* en el eje x, a una distancia -*a* del origen, y la carga + *Q* también situada en el eje x, a una distancia *a*). Obtener también el campo eléctrico a partir del potencial.

5. ¿Cuál es el potencial creado por un anillo uniformemente cargado con una carga *Q,* en el eje perpendicular al plano del anillo que pasa por su centro (suponer que éste es el eje z y el origen del sistema de referencia coincide con el centro del anillo)? A partir de este resultado obtener el potencial y el campo eléctrico que crea un disco de radio *R* y densidad de carga uniforme σ, en el eje perpendicular que pasa por su centro (z).

6. Se colocan dos anillos de radio *R* con sus planos paralelos y con el mismo eje perpendicular que pasa por sus centros. Están cargados de forma uniforme con cargas iguales y de signo contrario + *Q* y – *Q*. La distancia de separación entre los anillos es *d.* Si una carga puntual positiva *q* de masa *m* se deja libre en el centro del anillo positivo, ¿cuál será su velocidad cuando pase por el centro del anillo negativo?

7. Obtener y representar el potencial creado por una distribución plana e infinita de carga, con densidad por unidad de superficie σ constante, sabiendo que el potencial en la distribución vale V_o.

8. Obtener a partir de los resultados del problema 1.10, el potencial eléctrico que crea un cilindro de radio *R* y longitud *L* (*L*>>*R*), cargado con una densidad de carga por unidad de volumen constante ρ_Q. Obtener lo mismo si el cilindro es conductor y la carga total introducida es *Q*. (En ambos casos el potencial en la superficie del cilindro es V_0).

9. Una esfera aislante sólida de radio R_1 se carga de forma homogénea en todo su volumen con una carga total Q. Se rodea con una corteza esférica conductora descargada de radio exterior R_2. Obtener el potencial eléctrico creado por esta configuración en todos los puntos del espacio.

10. En el exterior de una esfera conductora cargada de radio *R* se coloca, concéntrica con ella, una corteza esférica conductora de radio interior 2*R* y exterior 3*R.* El valor de la carga de la corteza esférica es *Q*. ¿Cuál será el valor de la carga de la esfera interna si su potencial es V_o?

11. Obtener el potencial eléctrico de la distribución del ejercicio 1.12 (una esfera de radio *R*, cargada con una densidad de carga dada por $\rho = \rho_0 r$) para todos los puntos del espacio y la energía total de la distribución.

Soluciones (2):

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(f_1) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $\quad df_1 = (yz)\,dx + (xz)\,dy + (xy)\,dz$

$\overrightarrow{\text{grad}}(f_2) = \left(2xy + y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2xy\right)\vec{j} \quad df_2 = \left(2xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy$

$\overrightarrow{\text{grad}}(f_3) = \left(\dfrac{z^2}{2}\right)\vec{u}_\rho + \left(\dfrac{1}{\rho}\right)\vec{u}_\phi + (\rho z)\vec{u}_z$

2. a) Si, $f = Az$ b) Si, $f = Ax^2 y$ c) No d) Si, $f = -\dfrac{A}{r}$

3. $W = \dfrac{QQ'}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad v = \left(\dfrac{QQ'}{\pi\varepsilon_0 ma}\right)^{1/2}$

4. $V(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\left((x-a)^2 + y^2\right)^{1/2}} - \dfrac{1}{\left((\mathrm{x+a})^2 + y^2\right)^{1/2}}\right)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{(x-a)}{\left((x-a)^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{(x+a)}{\left((\mathrm{x+a})^2 + y^2\right)^{3/2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{\left((x-a)^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{y}{\left((\mathrm{x+a})^2 + y^2\right)^{3/2}}\right)\vec{j}\right)$$

5. $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}} \qquad V = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\left(R^2 + z^2\right)^{1/2} - z\right) \qquad \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}}\right)\vec{k}$

6. $v = \left(\dfrac{qQ}{\pi m\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{\left(R^2 + d^2\right)^{1/2}}\right)\right)^{1/2}$

7. $V(x) = V_0 - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$

8. a) $V(\rho) = V_0 + \dfrac{\rho_q}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - \rho^2\right)$ si $\rho < R \qquad V(\rho) = V_0 - \dfrac{\rho_q R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{\rho}{R}\right)$ si $\rho > R$

b) $V(\rho) = V_0$ si $\rho < R \qquad V(\rho) = V_0 - \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\dfrac{\rho}{R}\right)$ si $\rho > R$

9. $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ si $r > R_2 \qquad V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ si $R_1 < r < R_2 \quad V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{2R_1} - \dfrac{r^2}{2R_1^3}\right)$ si $r < R_1$

10. $Q' = \dfrac{1}{5}\left(24\pi\varepsilon_0 R V_0 - 2Q\right)$

11. $V(r) = \dfrac{R^4\rho_0}{4\varepsilon_0 r}$ si $r > R \qquad V(r) = \dfrac{\rho_0}{12\varepsilon_0}\left(4R^3 - r^3\right)$ si $r < R \qquad U = \dfrac{\pi\rho_0^2}{7\varepsilon_0}R^7$