Tema 1

Espacios vectoriales

Hemos visto que las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ son n-tuplas. En este capítulo vamos a estudiar qué relación guardan entre sí las soluciones de un mismo sistema compatible indeterminado: qué tipo de subconjunto forman dentro del conjunto de todas las n-tuplas, que tiene estructura de *espacio vectorial*.

Veremos que en el caso de un sistema homogéneo, estas soluciones forman un *subespacio vectorial*, mientras que en el caso de un sistema no homogéneo compatible, las soluciones forman un *subespacio trasladado*.

1.1. El conjunto de los pares sobre un cuerpo $\mathbb{K}$

El sistema de ecuaciones real $\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$ tiene como única solución la columna nula $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Sin embargo, el sistema de ecuaciones real

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right\}$$

tiene como soluciones $\left\{\begin{array}{r} x=-y \\ y=y \end{array}\right.$, o lo que es lo mismo, todos los pares de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde y es una variable libre. Entre estas soluciones está la solución nula, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que aparece cuando y toma el valor 0.

Si queremos representar gráficamente estas soluciones, utilizaremos dos ejes perpendiculares entre sí, el eje de abcisas y el eje de ordenadas. Llamamos origen de coordenadas a su punto de corte. Cada par de números reales (x^0, y^0) se puede representar como un vector que parte del origen de coordenadas y termina en el punto que tiene como coordenadas (x^0, y^0). Multiplicar un par por un número real t positivo,

$$t(x^0, y^0) = (tx^0,\ ty^0),$$

da como resultado un vector con la misma dirección y sentido que el de partida, pero con su longitud multiplicada por t.

Multiplicarlo por un número real t negativo (no ponemos $-t$),

$$t(x^0,\ y^0) = (tx^0,\ ty^0),$$

da como resultado un vector con la misma dirección que el de partida, con su longitud multiplicada por $|t|$ y con sentido opuesto al dado.

Multiplicarlo por el número real 0, da como resultado el vector nulo:

$$0(x^0,\ y^0) = (0x^0,\ 0y^0) = (0,\ 0).$$

De esta forma, las soluciones del sistema anterior son todos los vectores que tienen la misma dirección que el $u = (-1, 1)$ y los puntos de coordenadas $(-y, y)$ forman una recta que contiene al $(0, 0)$.

1.2. El conjunto de las ternas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$

Consideramos ahora el sistema de ecuaciones real homogéneo

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

que tiene como soluciones $\left\{\begin{aligned} x &= -y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}\right.$, o lo que es lo mismo, todas las ternas de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $y,\ z$ son las variables libres.

Vemos que todas las ternas solución se pueden obtener **combinando linealmente** dos ternas fijas, $u_1 = (-1,\, 1,\, 0)$ y $u_2 = (-1,\, 0,\, 1)$, mediante los diferentes valores reales que van tomando y y z. Entre estas combinaciones encontramos la solución nula, que aparece para $y = 0$ y $z = 0$: $0u_1 + 0u_2$.

Podemos representar todas las ternas reales $(x^0,\, y^0,\, z^0)$ utilizando tres ejes perpendiculares entre sí. Como en el caso de los pares, cada terna se identifica con un vector que parte del origen de coordenadas y termina en el punto que tiene como coordenadas $(x^0,\, y^0,\, z^0)$.

La **combinación lineal** de vectores involucra dos operaciones:

- El producto de un número $t \in \mathbb{R}$ por una terna $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$, para dar como resultado una terna,

$$t(x^0,\, y^0,\, z^0) = (tx^0,\, ty^0,\, tz^0) \in \mathbb{R}^3.$$

- Y la suma interna en $\mathbb{R}^3$:

$$(x^0,\, y^0,\, z^0) + (x^1,\, y^1,\, z^1) = (x^0 + x^1,\, y^0 + y^1,\, z^0 + z^1) \in \mathbb{R}^3.$$

La representación gráfica del producto por escalares tiene la misma interpretación que en el caso $\mathbb{R}^2$.

Para representar gráficamente la suma de dos vectores que parten del origen de coordenadas, consideramos varios casos:

(I) Si los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, la suma es un vector con la misma dirección y sentido que los de partida, y de longitud igual a la suma de las de los vectores dados.

(II) Si los dos vectores tienen la misma dirección y distinto sentido, la suma es un vector con la misma dirección que los de partida, sentido igual al de mayor dirección, y longitud igual a la diferencia de las de los vectores dados.

(III) Si los dos vectores tienen distinta dirección, consideramos el paralelogramo que determinan. El vector suma será la diagonal de dicho paralelogramo que parte del origen de coordenadas.

Esta interpretación de la suma es también válida para pares, interpretados como vectores de $\mathbb{R}^2$.

1.3. El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$

En general, un sistema homogéneo sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $AX = 0$, donde A es una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, X es la columna de n incógnitas y 0 denota la columna nula $m \times 1$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

siempre es compatible porque la n-tupla nula $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ siempre es solución del sistema.

Si suponemos que $\mathrm{rang}(A) = r$, el teorema de Rouché- Fröbenius asegura que:

- Si $r = n$, el sistema es compatible determinado. En ese caso, la única solución posible es la solución nula.

- Pero si $r < n$, entonces hay más de una solución ya que quedan $n - r$ variables libres.

Supongamos, aunque no siempre es así, que estas fueran las $n - r$ últimas variables: $x_{r+1}, \dots, x_n$. Por la forma que tienen los sistemas lineales, una vez escalonados, sus soluciones son siempre del tipo:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_{1r+1}x_{r+1} + \dots + v_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= v_{rr+1}x_{r+1} + \dots + v_{rn}x_n \\ x_{r+1} &= x_{r+1} \\ &\vdots \\ x_n &= x_n \end{aligned},$$

o escrito de otra forma,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} v_{1r+1} \\ \vdots \\ v_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que todas las n-tuplas solución se pueden obtener **combinando linealmente** las n-tuplas,

$$u_1 = (v_{1r+1}, \dots, v_{rr+1}, 1, 0, \cdots, 0), \dots, \; u_{n-r} = (v_{1n}, \dots, v_{rn}, 0, \cdots, 0, 1)$$

mediante los diferentes valores reales que van tomando las variables $x_{r+1}, \dots, x_n$. Entre estas combinaciones encontramos la solución nula, que aparece cuando todas ellas toman el valor 0.

Como ocurría en el caso de los pares o las ternas, la combinación lineal de n-tuplas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ implica usar dos operaciones:

- El producto de un número $t \in \mathbb{K}$ por una n-tupla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, para dar como resultado una n-tupla,

$$t(x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n) \in \mathbb{K}^n.$$

- Y la suma interna en $\mathbb{K}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Esta suma en $\mathbb{K}^n$ cumple las mismas propiedades que cumple suma en el cuerpo $\mathbb{K}$: conmutativa, asociativa, con elemento neutro, $(0, \dots, 0)$, y tal que para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, existe un opuesto, $(-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{K}^n$ que cumple

$$(x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (0, \dots, 0).$$

El producto por escalares verifica las siguientes propiedades:

- $(ts)(x_1, \dots, x_n) = t(s(x_1, \dots, x_n))$.
- $t[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = t(x_1, \dots, x_n) + t(y_1, \dots, y_n)$.

- $(t+s)(x_1,\ldots,x_n) = t(x_1,\ldots,x_n) + s(x_1,\ldots,x_n)$.
- $1(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)$.

Cualquier conjunto V con una suma interna y un producto por escalares de $\mathbb{K}$ que cumplan las propiedades que acabamos de describir para las n-tuplas se llama **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$.

Ejemplos 1.3.1. (I) Como acabamos de ver, el conjunto de las n-tuplas es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En realidad, es el que se toma como modelo para entender qué es un espacio vectorial.

(II) El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0 \in \mathbb{K},\ a_1 \in \mathbb{K}, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\},$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejercicio 1.3.2. Comprueba que $\mathbb{K}_n[x]$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares habituales entre polinomios.

Los elementos de cualquier espacio vectorial V se denominan **vectores**.
Además, los representaremos como vectores e interpretaremos su suma y su producto como la suma de vectores y su producto por escalares.
El neutro de la suma se denota por 0_V.
El opuesto de cada vector $v \in V$ se denota $-v$.

Ejercicio 1.3.3. Representa en el plano como vectores los siguientes polinomios del conjunto $\mathbb{R}_1[x]$:

(I) $1-2x$	(IV) $3x$	(VII) $-(1-2x)$
(II) $2(1-2x)$	(V) $(1-2x)+(2-4x)$	(VIII) -2
(III) $5+0x$	(VI) $5+3x$	(IX) $-(-2)$

Definición 1.3.4. Se dice que un vector $v \in V$ es *combinación lineal* de la familia $\{u_1,\ldots,u_m\}$ de vectores de V si existen escalares $t_1,\ldots,t_m \in \mathbb{K}$ tales que $v = t_1u_1 + \ldots + t_mu_m$.

Observaciones 1.3.5.

(I) En cualquier espacio vectorial V, el vector 0_V es combinación lineal de cualquier familia de vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ya que se puede obtener combinando todos ellos con escalares iguales a cero: $0_V = 0\,u_1 + \cdots + 0\,u_m$.

(II) Para que un vector sea combinación lineal de una familia de vectores, es suficiente que se pueda escribir como combinación lineal de algunos de ellos. Por ejemplo, si v es combinación lineal de $\{u_1,\, u_2\}$, pongamos $v = 2u_1 - 3u_2$, también será combinación lineal de $\{u_1, u_2, u_3\}$ poniendo $v = 2u_1 - 3u_2 + 0u_3$.

(III) En particular, cada u_i es combinación lineal de cualquier familia $\{u_1, \ldots, u_m\}$ a la que pertenece:

$$u_i = 0\,u_1 + \cdots + 0\,u_{i-1} + 1\,u_i + 0\,u_{i+1} + \cdots + 0\,u_m.$$

1.4. Subespacios vectoriales

Hemos visto que, al resolver un sistema **homogéneo** de ecuaciones lineales $AX = 0$, obtenemos todas las combinaciones lineales de unos vectores fijos del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.

> El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de una familia de vectores dados de un espacio vectorial V se llama **subespacio vectorial**.

Este conjunto puede ser un subconjunto S que no llene todo el espacio vectorial V, o puede ser el espacio vectorial V, como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 1.4.1. (I) Las soluciones de sistema real homogéneo

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

son todas las combinaciones lineales del vector $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, el **subespacio vectorial generado por el vector** $u = (-1, 1)$. Se denota por $\mathbb{R}\langle(-1, 1)\rangle$.

Es un subespacio vectorial de dimensión 1 dentro del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y su representación es una recta que pasa por el punto $(0, 0)$.

(II) Las soluciones de sistema real homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{array}\right\}$$

son todas las combinaciones lineales de los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, el subespacio vectorial generado por los vectores $u_1 = (-1,1,0)$ y $u_2 = (-1,0,1)$.

Se denota por $\mathbb{R}\langle(-1,1,0),\ (-1,0,1)\rangle$.

Es un subespacio vectorial de dimensión 2 dentro del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y su representación es un plano que pasa por el punto $(0,0,0)$.

(III) La solución del sistema homogéneo $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ es el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El subespacio vectorial generado por este vector,

$$\mathbb{R}\langle(0,0)\rangle = \{y(0,0) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

da como resultado $\{(0,0)\}$.

Por tanto, el conjunto formado únicamente por el vector $\{(0,0)\}$ es también un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{R}^2$. Se dice que es de dimensión cero por lo que veremos más adelante.

(IV) La solución del sistema homogéneo (formado por una sola ecuación)

$$\left. 0x+0y=0 \right\}$$

es el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, puesto que cualquier vector (x,y) verifica la ecuación dada.

Observa que el espacio vectorial al completo, $\mathbb{R}^2$, es también un subespacio vectorial. Cualquier (x,y) de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$. Tiene dimensión dos y su representación es todo el plano coordenado.

En los ejemplos anteriores, estamos llamando dimensión de un subespacio al mínimo numero de vectores que hacen falta para generarlo. En la siguiente sección, concretaremos mejor el concepto de dimensión de un subespacio. De momento, tenemos el siguiente resultado.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $AX = 0$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un subespacio vectorial contenido en $\mathbb{K}^n$.

Una propiedad importante de los subespacios vectoriales es la siguiente:

Si dos vectores u y v pertenecen a un mismo subespacio vectorial S, entonces cualquier combinación lineal de u y v, $tu + sv$, pertenecerá también a S.

1.5. Dependencia e independencia lineal

Ejemplo 1.5.1. En $\mathbb{R}^2$, el subespacio vectorial generado por los vectores $u_1 = (-1,\ 1)$ y $u_2 = (-2,\ 2)$ es, por definición

$$\mathbb{R}\langle(-1,\ 1),\ (-2,\ 2)\rangle = \{y(-1,\ 1) + z(-2,\ 2) \mid y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

Los vectores que se obtienen son los mismos que los del subespacio vectorial generado únicamente por el vector $u_1 = (-1,\ 1)$, es decir, $\{x(-1,\ 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Lo que ocurre aquí es que el vector $u_2 = (-2,\ 2)$ ya era combinación lineal del $u_1 = (-1,1)$ porque $(-2,2) = 2(-1,1)$. Decimos que los vectores $\{u_1 = (-1,\ 1),\ u_2 = (-2,\ 2)\}$ eran **linealmente dependientes** o que la familia de vectores $\{u_1 = (-1,1),\ u_2 = (-2,2)\}$ era una **familia ligada**.

Por esto, el subespacio generado por $\{(-1,\ 1),\ (-2,\ 2)\}$ no será un subespacio de dimensión 2, sino de dimensión 1.

Ejemplos 1.5.2.

(I) En $\mathbb{R}^3$, la terna $v = (2,\ 1,\ 0)$ es combinación lineal de las ternas $\{u_1 = (1,\ 1,\ 1),\ u_2 = (3,\ 2,\ 1)\}$ ya que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff v = -u_1 + u_2.$$

Por tanto, el subespacio generado por los vectores $\{(1,\ 1,\ 1),(3,\ 2,\ 1),(2,\ 1,\ 0)\}$ es el mismo que el generado por los vectores $\{(1,\ 1,\ 1),(3,\ 2,\ 1)\}$

Definición 1.5.3. Se dice que la familia $\{u_1,\dots,u_m\}$ de vectores de V, con $m\geq 2$, es *ligada* (o que los vectores $u_1,\dots,u_m$ son *linealmente dependientes*) si algún vector u_i es combinación lineal de los demás. En caso contrario, se dice que la familia es *libre* (o que los vectores $u_1,\dots,u_m$ son *linealmente independientes*).

Ejemplos 1.5.4.

(I) En $\mathbb{R}^2$, la familia $\{u_1=(1,-1),\ u_2=(2,\ -2)\}$ es ligada.

(II) En $\mathbb{R}_2[x]$, los vectores $\{u_1=1+x,\ u_2=x+x^2\}$ son linealmente independientes.

(III) En $\mathbb{R}^3$, la familia $\{u_1=(1,\ 1,\ 1),\ u_2=(3,\ 2,\ 1),\ u_3=(2,\ 1,\ 0)\}$ es ligada. Por tanto, también lo será la familia $\{u_1=(1,\ 1,\ 1),\ u_2=(3,\ 2,\ 1),\ u_3=(2,\ 1,\ 0),\ u_4=(9,\ 5,\ 8)\}$, que contiene a la anterior.

(IV) En $\mathbb{R}_2[x]$, los vectores $\{u_1=1+x^2,\ u_2=2-2x,\ u_3=1+2x+3x^2\}$ son linealmente dependientes. Compruébalo como ejercicio.

(V) En cualquier espacio vectorial V, toda familia que contiene al vector cero es ligada.

Nota 1.5.5. La familia formada solo por el vector $\{0_V\}$ se considera **ligada**, mientras que si está formada por un único vector no nulo, $\{u\}$, se considera **libre**.

1.6. Bases y dimensión

Dentro de un espacio vectorial V, cuando queremos estudiar un subespacio vectorial, nos interesa encontrar una familia de vectores que lo genere con el menor número de vectores posible, es decir, una familia en la que ninguno de los vectores sea combinación lineal de los demás. Llamaremos a esta familia **base** del subespacio vectorial dado. Esto incluye al propio espacio vectorial V, del que también nos interesará encontrar una base.

Definición 1.6.1. Cualquier familia de vectores que genere un subespacio vectorial S, $\{u_1,\dots,u_m\}$ es un *sistema generador* de S. Si, además, $\{u_1,\dots,u_m\}$ es una familia libre, diremos que es una *base* de S y diremos también que la **dimensión** de S es m.

Ejemplos 1.6.2.

(I) En $\mathbb{R}^2$, la recta $S = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ es

$$S = \{(x,\, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,\, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, la recta S es el subespacio vectorial generado por el vector $(1,\, 2)$. Por tanto, $\{(1,\, 2)\}$ es un sistema generador de S. Además, como $\{(1,\, 2)\}$ es una familia libre, resulta ser una **base** del subespacio S. Por esto, la dimensión de S es 1.

(II) En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $S = \{(x,\, y,\, z) \mid x - y + 2z = 0\}$ es un plano que pasa por el origen de coordenadas. Además,

$$S = \{(y - 2z,\, y,\, z) \mid y,\, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,\, 1,\, 0) + z(-2,\, 0,\, 1) \mid y,\, z \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, el plano S es el subespacio vectorial generado por los vectores $\{(0,\, 1,\, 2), (0,\, 1,\, 1)\}$. Esta familia de vectores es un sistema generador de S y, como es libre, es también una base de S. Se tiene que $\dim S = 2$.

(III) La familia $\{(0,\, 1,\, 2), (0,\, 1,\, 1),\, (0,\, 2,\, 3)\}$ es un sistema generador del plano S anterior. Pero, como el vector $(0,\, 2,\, 3)$ es combinación lineal de los otros dos, la familia de vectores $\{(0,\, 1,\, 2),\, (0,\, 1,\, 1),\, (0,\, 2,\, 3)\}$ no es base de S.

(IV) El espacio total $\mathbb{R}^3$, es $\{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},\, z \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto se puede expresar como

$$\{x(1,\, 0,\, 0) + y(0,\, 1,\, 0) + z(0,\, 0,\, 1) \mid x,\, y,\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, la familia $\{(1,\, 0,\, 0),\, (0,\, 1,\, 0),\, (0,\, 0,\, 1)\}$ es un sistema generador del espacio $\mathbb{R}^3$. Como es una familia libre, será una base de $\mathbb{R}^3$.

Esto significa que el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ **es un subespacio vectorial**. Además, la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es 3.

(V) En general, la familia $\{e_1 = (1,\, 0, \ldots, 0),\, e_2 = (0,\, 1,\, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0,\, 1)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ denominada *base canónica* o *base natural*. El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ **es un subespacio vectorial** y tiene dimensión n.

(VI) El subespacio vectorial generado por $\{0_V\}$ es el $\{t0_V \mid t \in \mathbb{K}\} = \{0_V\}$. Este subespacio no posee base al ser $\{0_V\}$ una familia ligada y por eso se dice que tiene dimensión 0.

Ejercicio 1.6.3. Encuentra una base del espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ y grado menor o igual que n, $\mathbb{K}_n[x]$, y deduce así que su dimensión es $n+1$.

Hemos visto que un subespacio vectorial puede tener diferentes sistemas generadores. También puede tener diferentes bases. Por ejemplo, las familias $\{(1,\ 2)\}$ y $\{(-1,\ -2)\}$ son distintas bases de un mismo subespacio vectorial. Sin embargo, no va a haber problema con el cálculo de la dimensión de un subespacio vectorial gracias al siguiente resultado:

Teorema 1.6.4. *En un subespacio vectorial no nulo S, que tenga algún sistema generador finito, todas las bases tienen el mismo número de vectores.*

Otra importante afirmación para entender bien el concepto de dimensión es la siguiente:

Teorema 1.6.5. *Si S es un subespacio de un espacio vectorial V y V tiene dimensión finita, entonces*

$$dim\, S \leq dim\, V.$$

Además, no hay ningún subespacio vectorial S, dentro de V, con dimensión igual a $dim\, V$ salvo el propio V.

Dada una familia de vectores de un espacio vectorial V, es claro que generará un subespacio vectorial S. Veamos cómo podemos encontrar una base de dicho subespacio, transformando la familia de vectores dada.

Vamos a ver, una por una, que las transformaciones elementales que vimos para los sistemas de ecuaciones, sirven tambiém para transformar una familia de vectores en otra más sencilla, pero que genera el mismo subespacio vectorial que la de partida.

Transformaciones elementales sobre vectores

Consideramos una familia de vectores de un espacio vectorial cualquiera V: $\{u_1, \ldots, u_m\}$

Tipo I: Permutamos dos vectores entre sí. Entonces

$$\mathbb{K}\langle u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_m\rangle = \mathbb{K}\langle u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_m\rangle.$$

Tipo II: Sustituimos un vector cualquiera u_i por " él mismo más un múltiplo de otro": $u_i + tu_j$ con $i \neq j$. Entonces

$$\mathbb{K}\langle u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_m\rangle =$$

$$\mathbb{K}\langle u_1, \ldots, u_i + tu_j, \ldots, u_j, \ldots, u_m\rangle, \text{ con } t \in \mathbb{K} \text{ e } i \neq j.$$

Tipo III: Multiplicamos un vector cualquiera u_i por un número $t \neq 0$, del cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces

$$\mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_m \rangle = \mathbb{K}\langle u_1, \dots, tu_i, \dots, u_m \rangle, \text{ con } t \in \mathbb{K},\ t \neq 0.$$

Demostración. La demostración se basa en que, si quitamos de una familia de vectores uno que es combinación lineal de los demás, no cambia el subespacio vectorial que se genera. Por supuesto, lo mismo ocurre si añadimos a la familia de vectores algún vector que sea combinación lineal de ellos.

(I) Es evidente.

(II) $\mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m \rangle = \mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_j \dots, u_m; u_i + tu_j \rangle$.

Ahora, como u_i es combinación lineal de $\{(u_i + tu_j),\ u_j\}$ porque $u_i = (u_i + tu_j) - tu_j$, podemos quitar u_i de la familia anterior sin que cambie el subespacio que se genera.

(III) $\mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_m \rangle = \mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_m; tu_i \rangle$ porque tu_i es combinación lineal de la familia $\{u_1, \dots, u_m\}$. Ahora, como también $u_i = (1/t)(tu_i)$ por ser $t \neq 0$, se tiene que

$$\mathbb{K}\langle u_1, \dots, u_i, \dots, u_m; tu_i \rangle = \mathbb{K}\langle u_1, \dots, \overset{i}{\wedge}, \dots, u_m; tu_i \rangle.$$

$\square$

En la práctica, para hallar una base del subespacio generado por una familia de n-tuplas $\{u_1, \dots, u_m\}$, procederemos de la forma siguiente:

- Escribiremos los vectores $u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,..., $u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$, uno debajo de otro:

$$\begin{array}{r} (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{array}$$

- Realizaremos transformaciones elementales sobre la familia dada, hasta conseguir una nueva familia con forma escalonada, que generará el mismo subespacio que la familia de partida.

- Quitaremos las filas nulas, que son linealmente dependientes de las demás.

- Las filas no nulas, ya escalonadas, son linealmente independientes y formarán una base del subespacio.

Ejemplo 1.6.6. Halla una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{u_1 = (0,1,0,-3),\ u_2 = (2,1,0,-1),\ u_3 = (1,0,0,1)\}$:

Escribimos los vectores uno debajo de otro y aplicamos transformaciones elementales sobre ellos:

$$\begin{array}{ccccccc} (0,1,0,-3) & & (1,\ 0,\ 0,\ 1) & & (1,\ 0,\ 0,\ 1) & & (1,\ 0,\ 0,\ 1) \\ (2,1,0,-1) & \mapsto & (2,1,0,-1) & \mapsto & (0,1,0,-3) & \mapsto & (0,1,0,-3) \\ (1,\ 0,\ 0,\ 1) & & (0,1,0,-3) & & (0,1,0,-3) & & (0,\ 0,\ 0,\ 0) \end{array}$$

Cada una de las familias de vectores genera el mismo subespacio que la familia de partida,

$$S = \langle (0,\ 1,\ 0,\ -3),\ (2,\ 1,\ 0,\ -1),\ (1,\ 0,\ 0,\ 1) \rangle.$$

Además, la última de ellas, $\{(1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ -3),\ (0,\ 0,\ 0,\ 0)\}$, genera el mismo subespacio vectorial que $\{(1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ -3)\}$ puesto que el vector $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ es combinación lineal de los demás. Al ser $\{(1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ -3)\}$ una familia escalonada, es fácil ver que es libre. Por tanto, es una base del subespacio S. Y ya podemos decir que $\dim S = 2$.

Además, podemos asegurar que la familia de partida,

$$\{(0,\ 1,\ 0,\ -3),\ (2,\ 1,\ 0,\ -1),\ (1,\ 0,\ 0,\ 1)\},$$

es ligada porque si fuera libre, generaría un subespecio de dimensión 3 y no ha sido así.

Estas transformaciones nos permiten, además, conocer mejor cómo son los vectores de S, sobre todo si llegamos hasta la forma de Hermite de la matriz que se forma con estos vectores:

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ -3) \rangle = \{x(1,\ 0,\ 0,\ 1) + y(0,\ 1,\ 0,\ -3) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,\ y,\ 0,\ x-3y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{(x,\ y,\ z,\ t) \mid z = 0,\ t = x - 3y\} \end{aligned}$$

Si nos fijamos en la matriz que se ha formado al poner un vector debajo de otro,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el subespacio S es el subespacio generado por las filas de A, que se denota $\mathrm{Fil}(A)$. Como se ve al escalonar esta matriz, la dimensión de este subespacio coincide con lo que habíamos llamado **rango** de A.

Definición 1.6.7. En general, llamamos **subespacio de filas** de una matriz A, $m \times n$, al subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores fila de A:

$$\mathrm{Fil}(A) = \mathbb{K}\langle A_1, \dots, A_m \rangle.$$

La dimensión de dicho subespacio se llama **rango por filas** de A.

Ahora ya hemos demostrado que las transformaciones elementales no alteran el subespacio generado por las filas de una matriz. Por tanto, no cambian la dimensión de dicho subespacio, que será siempre $\dim(\mathrm{Fil}\, A)$.

Hemos demostrado así que, al pasar de una misma matriz A a diferentes matrices escalonadas, E_1 y E_2, siempre mediante transformaciones elementales, entonces $\mathrm{rang}\, E_1 = \mathrm{rang}\, E_2$, como habíamos afirmado en el capítulo anterior.

También es posible considerar las columnas de una matriz $m \times n$ como elementos de $\mathbb{K}^m$.

Definición 1.6.8. Llamamos *subespacio de columnas de A* al subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por las columnas de A,

$$\mathrm{Col}(A) = \mathbb{K}\langle A^1, \dots, A^n \rangle.$$

Y llamamos *rango por columnas* de A a la dimensión de dicho subespacio.

Es evidente que, cuando realizamos transformaciones elementales sobre las filas de la matriz A, estamos alterando el subespacio $\mathrm{Col}(A)$. Sin embargo, el rango por columnas de la matriz no se ha alterado, como demuestra el siguiente resultado, uno de los más sorprendentes sobre matrices, que no vamos a demostrar.

Teorema 1.6.9. *Para cualquier matriz A, $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, se tiene:*

$$\mathit{rang}\ \mathit{fil}\, A = \mathit{rang}\ \mathit{col}\, A.$$

Ejemplo 1.6.10. Vamos a hallar el subespacio generado por las columnas de la matriz A del ejemplo anterior, que estará contenido en el espacio $\mathbb{R}^3$. Para ello, realizamos transformaciones elementales sobre los vectores columna de A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\mathrm{Col}\, A = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Obviamente, el subespacio $\mathrm{Col}\, A$, contenido en $\mathbb{R}^3$, es distinto al subespacio $\mathrm{Fil}\, A$, contenido en $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, como afirmaba el teorema anterior,

$$\dim(\mathrm{Fil}\, A) = \dim(\mathrm{Col}\, A),$$

igual a 2 en este ejemplo.

Ejercicio 1.6.11. Comprueba el resultado $\dim(\mathrm{Fil}\, A) = \dim(\mathrm{Col}\, A)$ hallando dichos subespacios cuando A es cada una de las matrices siguientes según el valor de $a \in \mathbb{R}$:

(I) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ (V) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$ (IV) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (VI) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

Cuando hablemos de **rango de una matriz** A, nos referiremos indistintamente a su rango por filas, $\dim(\mathrm{Fil}\, A)$, a su rango por columnas, $\dim(\mathrm{Col}\, A)$, o al número de filas no nulas que tiene cualquiera de las matrices escalonadas que se obtienen mediante transformaciones elementales sobre A.

Mirando ahora de nuevo el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ cualquiera, como aparece en la Sección 1. 3, no solo podemos afirmar que se trata de un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$, sino que podemos concretar ya cuál es su dimensión.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $AX = 0$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un subespacio vectorial de dimensión $n - r$, donde $r = \mathrm{rang}\, A$.

Esta afirmación se basa en que los vectores que generan el subespacio de soluciones,

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_{1r+1} \\ \vdots \\ v_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{1r+2} \\ \vdots \\ v_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

son linealmente independientes al estar escalonados (si se miran de izquierda a derecha y de abajo arriba). Por tanto, este subespacio tiene dimensión igual a $n-r$, donde $r = \operatorname{rang} A$.

1.7. Subespacios trasladados

Consideramos ahora el sistema de ecuaciones real **no homogéneo**,

$$\left. \begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+2z &= 2 \end{aligned} \right\},$$

que tiene como soluciones $\left\{ \begin{array}{l} x = -y-z+1 \\ y = y \\ z = z \end{array} \right.$, o lo que es lo mismo, todas las ternas de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $y,\ z$ son las variables libres. Observemos que el vector $(1,0,0)$ no aparece multiplicado por ninguna variable.

Si llamamos $u_1 = (-1,1,0)$ y $u_2 = (-1,0,1)$, vemos que la solución del sistema es el conjunto de vectores de la forma

$$\{yu_1 + zu_2 + (0,0,1) \mid y,\, z \in \mathbb{R}\} = \{v + (0,0,1) \mid v \in \mathbb{R}\langle u_1,\, u_2 \rangle\}$$

Expresaremos este conjunto como

$$S + (0,0,1),$$

donde $S = \mathbb{R}\langle u_1,\, u_2\rangle = \mathbb{R}\langle(-1,1,0),\,(-1,0,1)\rangle$.

Observemos que S es el subespacio vectorial formado por las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

es decir, un sistema con la misma matriz de coeficientes que el sistema dado, pero con los términos independientes iguales a cero.

La representación gráfica del conjunto $S + (0,0,1)$ en el espacio ordinario $\mathbb{R}^3$ es la de un plano, que ya no pasa por el origen de coordenadas $(0,0,0)$, sino que ha sido *trasladado* por el vector $(0,0,1)$. Observemos además que este vector es una de las soluciones del sistema dado, concretamente la que aparece cuando $y = 0$ y $z = 0$.

En general, dado un sistema compatible pero no homogéneo sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $AX = B$, con $B \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

sabemos que el rango de A tiene que haber sido igual al rango de $(A|B)$. Escalonando el sistema, obtendremos una matriz con r filas no nulas, por lo que podremos despejar r incógnitas y quedarán $n - r$ variables libres.

Si suponemos que estas son las $n-r$ últimas variables, $x_{r+1}, \dots, x_n$, las soluciones de este sistema son siempre del tipo:

$$\begin{aligned} x_1 = v_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + v_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ x_r = v_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + v_{rn}x_n + f_r \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n = x_n \end{aligned},$$

o escrito de otra forma,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} v_{1r+1} \\ \vdots \\ v_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que todas las n-tuplas solución se pueden obtener como suma de un vector del subespacio vectorial de soluciones del sistema $AX = 0$,

$$\mathbb{R} \left\langle \begin{pmatrix} v_{1r+1} \\ \vdots \\ v_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{1r+2} \\ \vdots \\ v_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

trasladado por un vector, $(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0, 0)$, que es solución del sistema de partida $AX = B$.

Definición 1.7.1. Si S es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V y $v \in V$ es un vector cualquiera, llamamos **subespacio trasladado de S por v** al conjunto

$$\{u + v \mid u \in S\}, \text{ que se denota por } S + v.$$

Nota 1.7.2. Es posible que dos vectores distintos de V, $v \neq w$, den lugar al mismo subespacio trasladado de S. Concretamente, $S + v = S + w$ siempre que w sea un vector del subespacio trasladado $S + v$.

Podemos afirmar ya el siguiente resultado:

> El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones compatible $AX = B$ es un subespacio trasladado $S + X^0$, donde
> - S es el sub. vectorial formado por las soluciones del sistema homog. $AX = 0$ y
> - X^0 es una cualquiera de las soluciones del sistema completo $AX = B$.

Por la nota anterior, cualquier solución del sistema compatible $AX = B$ trasladará el subespacio vectorial $AX = 0$ de la misma forma. Por ejemplo, las soluciones del sistema anterior,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{array}\right\},$$

pueden expresarse indistintamente como:

$$\mathbb{R}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ó como } \mathbb{R}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.7.3. Expresa como subespacio vectorial o como subespacio trasladado, según corresponda, la solución de cada uno de los sistemas que se pidió resolver en el tema anterior.

Cuando el sistema es compatible determinado, ¿podemos decir que su solución forma un subespacio vectorial o un subespacio trasladado? ¿Por qué?

1.8. Matriz de cambio de base

Como acabamos de ver todo espacio vectorial finito posee más de una base, aquí vamos a estudiar cómo se relacionan entre ellas.

Definición 1.8.1. Dadas dos bases de un mismo espacio vectorial V, $B_V = [v_1, \ldots, v_n]$ y $\bar{B}_V = [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n]$, como los vectores de $\bar{B}_V$ pertenecen a V se pueden escribir como combinación lineal de los elementos de la base B_V:

$$\begin{array}{rcl} \bar{v}_1 & = & a_{11}\,v_1 + a_{21}\,v_2 + \cdots + a_{n1}\,v_n \\ \bar{v}_2 & = & a_{12}\,v_1 + a_{22}\,v_2 + \cdots + a_{n2}\,v_n \\ \vdots & & \\ \bar{v}_n & = & a_{1n}\,v_1 + a_{2n}\,v_2 + \cdots + a_{nn}\,v_n \end{array}$$

Las igualdades anteriores se expresan matricialmente como

$$(\bar{v}_1,\, \bar{v}_2, \ldots,\, \bar{v}_n) = (v_1\, v_2 \ldots, v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ se denomina **matriz de cambio de base de la base B_V a la base $\bar{B}_V$.**

Observaciones 1.8.2. (I) La matriz A anterior es una matriz cuadrada y regular ya que en sus columnas aparecen las coordenadas de los vectores de la base $\bar{B}_V$ respecto a la base B_V.

(II) Si A es la matriz de cambio de base de la base B_V a la base $\bar{B}_V$, entonces A^{-1} es la matriz de cambio de base de la base $\bar{B}_V$ a la base B_V.

(III) Dado un vector cualquiera $v \in V$, denotando por $(x_1, \ldots, x_n)$ a sus coordenadas en la base B_V y por $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ a sus coordenadas en la base $\bar{B}_V$, se tiene:

$$\begin{aligned} v &= (v_1\, v_2 \ldots, v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \\ &= (v_1, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando las matrices columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\text{ y }\; \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix},$$

la relación entre las coordenadas X y $\bar{X}$ del vector v en las dos bases puede escribirse ahora en forma matricial mediante $X = A\bar{X}$.