242206 Matemáticas II
Grado en ingeniería en tecnologías industriales
Recopilatorio de exámenes

Berta García
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra

11 de febrero de 2019

Índice general

Parte 1

Enunciados

1.1. 28 de marzo de 2017, evaluación continua, parte 1

1.1.1. Grupo 2

1. Dada la función
$$f(x,y) = \arccos\frac{-2x^2 - y^2 + 9}{x^2 + 2y^2}.$$
   (a) (2 puntos) Calcula y dibuja su dominio.
   (b) (2 puntos) Calcula las curvas de nivel de f correspondientes a los niveles $c = 0$, $c = \frac{\pi}{2}$ y $c = \frac{2\pi}{3}$. Haz un dibujo en el que estén, a la vez, el dominio de f y las tres curvas de nivel

   Pista: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

2. Dada la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(1-\cos(2x))}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) (1.5 puntos) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
   (b) (1.5 puntos) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

3. (3 puntos) Sean
$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 - 3$$
   y
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0, y - x - 2 \leq 0, y + x - 2 \leq 0\right\}$$
   (puedes ver un dibujo de D en la figura 2.3). Calcula los extremos absolutos de f en D.

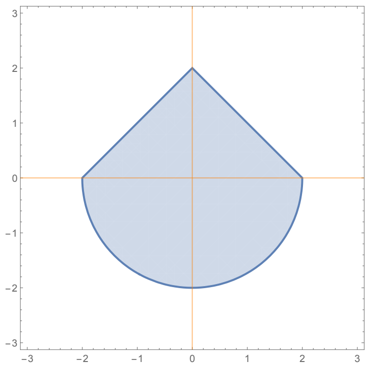


Figura 1.1. Recinto D correspondiente a la pregunta 3

1.2. 16 de mayo de 2017, evaluación continua, parte 2

1.2.1. Grupo 2

1. (1.5 puntos) Sea

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\right\} ,$$

calcula

$$\iint_D (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy\, .$$

2. (1.5 puntos) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z^2 = -2y+4$ (puedes ver un dibujo de Q en la figura 2.5).

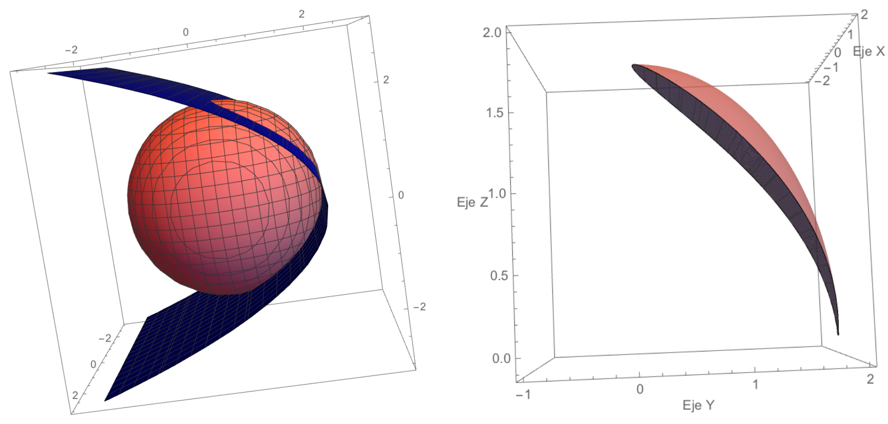


Figura 1.2. Recinto Q correspondiente a la pregunta 2

Calcula

$$\iiint_Q 2z\, dxdydz\,.$$

3. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D de la pregunta 1 y sea $f(x,y) = x + x^4 + (y-1)^2$. Calcula

$$\int_\Gamma f\, d\ell\,.$$

4. (1.5 puntos) Sea S la porción del cilindro parabólico considerado en la pregunta 2 y sea

$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{y-2}{2y-5}}\left(x^2+y^2+z^2-4\right)\,.$$

Calcula

$$\iint_S f\, ds\,.$$

5. (1.5 puntos) Sea Γ la curva considerada en la pregunta 3 orientada positivamente. Sea

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2x + y + y^2 - \frac{1}{3}y^3,\, x + \frac{1}{3}x^3 + 9y^2\right)\,.$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}\,.$$

6. (1.5 puntos) Sea Γ la curva intersección de la porción de esfera y el cilindro parabólico considerados en la pregunta 2 (orientada como prefieras). Sea

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2xy - \frac{y^3}{3} + y^2,\, \frac{x^3}{3} + x^2 + 3y^2,\, 2z\right)\,.$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}\,.$$

7. (1 punto) Sea S la superficie que delimita el recinto Q de la pregunta 2 y sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2,\, -2xy,\, z^2)$ considerando el vector normal exterior. Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

1.3. 28 de marzo de 2017, evaluación continua, parte 3

1. (3.5 *puntos*) Calcula la solución del PVI

$$\begin{cases} y'(t) = & \dfrac{3y(t)^2 + ty(t) + t^2}{t^2 + 2ty(t)}\,, \\ y(1) = & 0. \end{cases}$$

2. (3 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t(\cos t)y(t)^2 + 2t^2 + 2t(\operatorname{sen} t)y(t)y'(t) = 0\,.$$

3. (3.5 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 2\,y'(t) - 3y(t) = 16\,t\,e^{-t}.$$

1.4. 10 de junio de 2017, evaluación de recuperación

1. Dada la función
$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-16}\right)\,.$$
   (a) (0.5 puntos) Calcula y dibuja su dominio.
   (b) (1 punto) Calcula y dibuja, si es posible, las curvas de nivel correspondientes a los niveles $c=-1$ y $c=1$.

2. (a) (1.5 puntos)
   Estudia si la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$
   y el recinto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq 2-3x\,, y \leq 2+3x\,, y \geq -1\}$$
   representado en la figura 2.8 verifican las condiciones del Teorema de Weierstrass.
   En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función f en el recinto D.

   (b) (1.5 puntos)
   Estudia si la función
$$f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$$
   y el recinto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 6\,, x \geq -2\}$$
   representado en la figura 2.9, verifican todas las condiciones del Teorema de Weierstrass.
   En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función f en el recinto D.

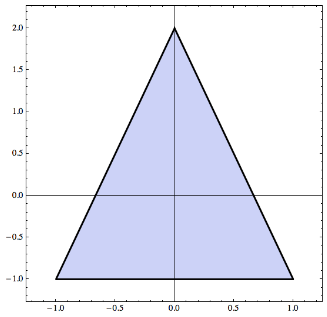


Figura 1.3. Recinto D correspondiente a la pregunta $2a$

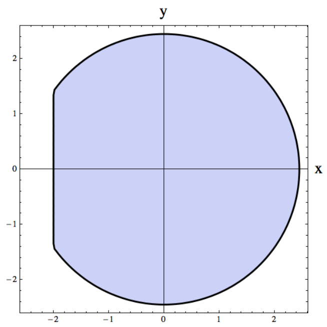


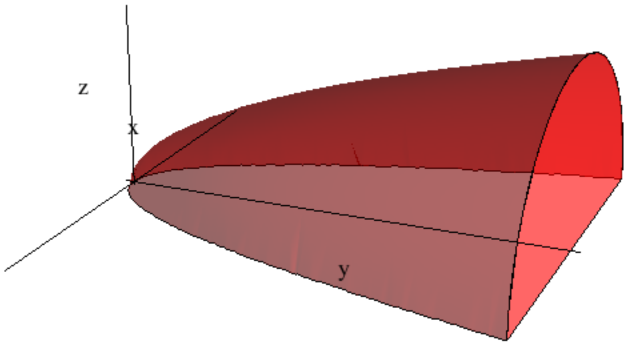
Figura 1.4. Recinto D correspondiente a la pregunta $2b$

3. (2.5 puntos)

   Sea Q el recinto limitado por el paraboloide $y = 2x^2 + z^2$, el plano $y = 2$ y el plano $z = 0$.

   Halla

   $$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz$$



4. (1.5 puntos) Sea el campo vectorial

   $$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(3x^2y + 2y^5, x^3 + 10xy^4 + 2ye^{y^2}\right) ,$$

   y sea Γ cualquier curva regular a trozos que va desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(0, -\frac{1}{3})$. Calcula

   $$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} .$$

5. (1.5 puntos) Consideramos el intervalo $[1,+\infty)$ y el PVI

$$\begin{cases} 2t^2\,y'(t) + t^2\,y(t)^2 + 1 = 0, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Calcula $y(t)$, la solución del PVI, y calcula $y(e)$.

Pista: Puedes utilizar el cambio de variable $u(t) = t\,y(t)$.

1.5. 22 de marzo de 2018, evaluación continua, parte 1

1. Dada la función
$$f(x,y) = \log\left(\frac{-x^2-y^2+4}{x^2+y^2-1}\right).$$
   (a) (2 puntos) Calcula y dibuja su dominio.
   (b) (2 puntos) Calcula $\mathrm{Im} f$ y las curvas de nivel de f, dibujándolas.

2. Dada la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\cos(x^2y^2)\right)}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   (a) (1.5 puntos) Estudia la continuidad de f en $(0,0)$.
   (b) (1.5 puntos) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

3. (3 puntos) Sea
$$f(x,y) = 6x^2 + 4y^3 - 3y^2$$
y
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4 \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1\right\}$$
(puedes ver un dibujo de D en la figura 2.13). Calcula los extremos absolutos de f en D.

1.6. 15 de mayo de 2018, evaluación continua, parte 2

1. (1.5 puntos) Sea
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\right\},$$
calcula
$$\iint_D \left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)\,dxdy\,.$$

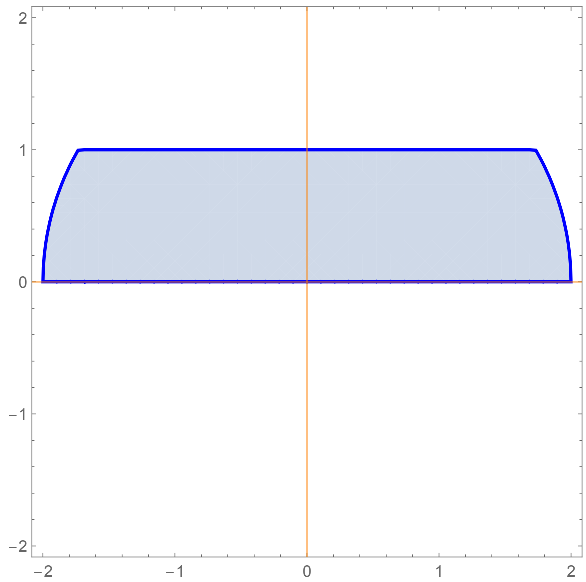


Figura 1.5. Recinto D correspondiente a la pregunta 3

2. (1.5 puntos) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por la hoja inferior del cono $(z-6)^2 = x^2+y^2$ y el paraboloide $z = x^2+y^2$ (puedes ver un dibujo de Q en la figura 2.15).

   Calcula el volumen de Q.

3. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D de la pregunta 1 que queda por debajo de la curva $3y = x^2$. Calcula la longitud de Γ.

4. (1.5 puntos) Sea S la porción del paraboloide considerado en la pregunta 2. Calcula el área de S.

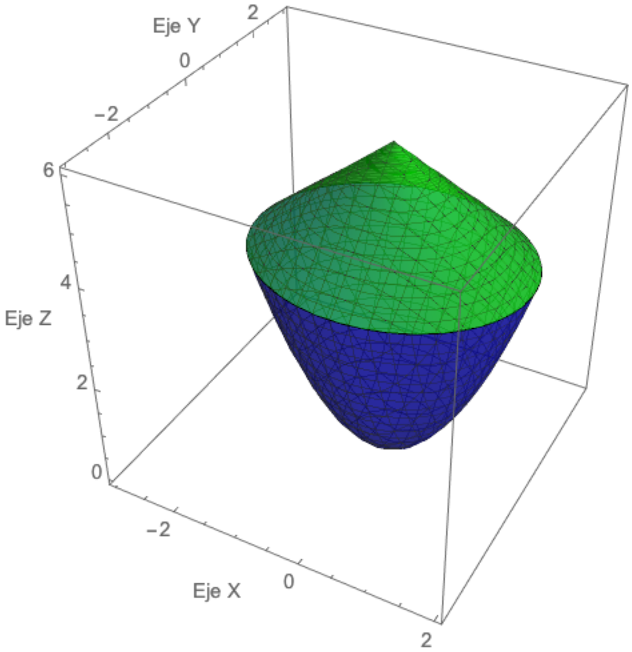


Figura 1.6. Recinto Q correspondiente a la pregunta 2

5. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D considerado en la pregunta 1, orientada positivamente, y sea

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(-\frac{1}{3}\,y\,\sqrt{x^2+y^2} - x^2y + \operatorname{sen} y,\ \frac{1}{3}x\sqrt{x^2+y^2} + xy^2 + x\cos y + x\right).$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}.$$

6. (1.5 puntos) Sea Γ la curva intersección de la porción de cono y el paraboloide considerados en la pregunta 2 (orientada como prefieras). Sea

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y+1, 2x+z^2, -x^2-y^2+2yz\right).$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}.$$

7. (1 punto) Sea S la superficie que delimita el recinto Q de la pregunta 2 y sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x-x^2, 2xy, -xz)$ considerando el vector normal interior. Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

1.7. 2 de junio de 2018, evaluación continua, parte 3

1. (*3.5 puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial:

$$t - 2y(t) - 1 + \big(3t - 6y(t) + 2\big)y'(t) = 0\,.$$

Calcula, si es posible, una solución que verifique $y(1) = \frac{1}{2}$.

2. (3.5 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2 y(t) + t^2 \cos t \cos y(t) + \big(t^3 - t^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} y(t)\big)\, y'(t) = 0\,.$$

3. (3 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

1.8. 15 de junio de 2018, evaluación de recuperación

1. (*1.5 puntos*) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + (x-y)^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ a\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) (0.75 *puntos*) Calcula, si es posible, el valor de a para que f sea continua en $(0,0)$.

   (b) (0.25 *puntos*) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en $(0,1)$.

   (c) (0.25 *puntos*) Calcula la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(0,1)$.

   (d) (0.25 *puntos*) Calcula la derivada direccional de$f$ en el punto $(0,1)$ según la dirección dada por $\boldsymbol{u} = (1,-1)$.

2. (2 *puntos*) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x + y^2$ sobre el recinto D dado por $D = D_1 \cup D_2$, donde

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0,\ y \ge 0,\ x^2 + 4y^2 \le 4\}\,,$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le e^{-x}\}\,,$$

(puedes ver un dibujo de D en la figura 2.18).

Ayuda: $\log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 \simeq 0.347$; $e^{-2} \approx 0.135$

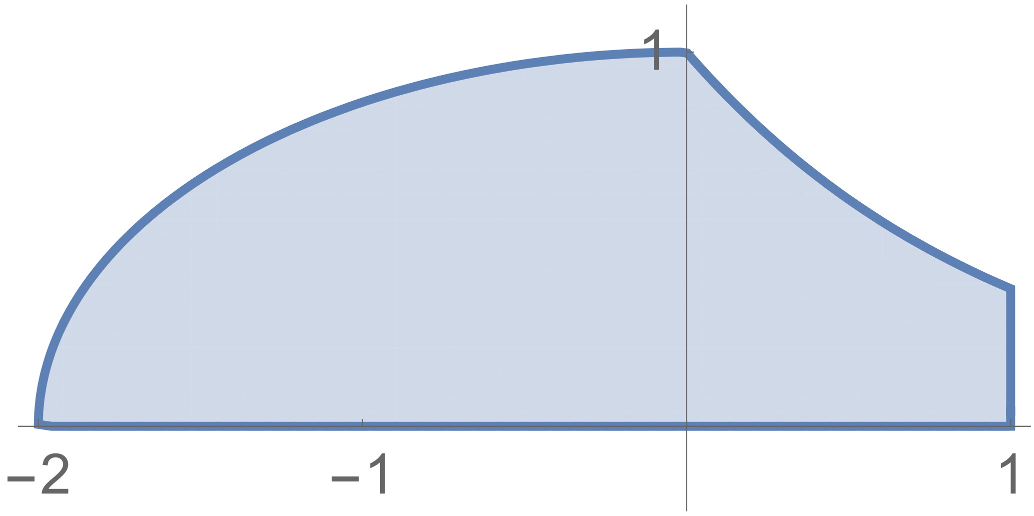


Figura 1.7. recinto correspondiente a la pregunta 2

3. Sea Γ la curva formada por la unión de la porción de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ que queda por debajo de $y = 1$, y el segmento de la recta $y = 1$ interior a dicha circunfencia (puedes ver un dibujo de Γ en la figura 2.19); orientamos Γ positivamente. Sea
$$\boldsymbol{F}(x, y,) = (-y + 1, x)\,.$$
Calcula
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$
de dos formas
   (a) (1.5 *puntos*) Mediante la definición
   (b) (0.5 *puntos*) Utilizando el teorema de Green

4. (a) (0.5 *puntos*) Sea D el círculo de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$ y $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, calcula
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy\,.$$
   (b) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por la hoja inferior del hiperboloide $x^2 + y^2 = (z-5)^2 - 1$ y por la hoja superior del hiperboloide $x^2 + y^2 = (z-1)^2 - 1$ y S la superficie que encierra a Q (puedes ver un dibujo en la figura 2.20). Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ y $\boldsymbol{n}$ el vector normal exterior a S. Calcula
$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$
de dos formas
      (i) (1.5 *puntos*) Mediante la definición
      (ii) (0.5 *puntos*) Utilizando el teorema de la divergencia

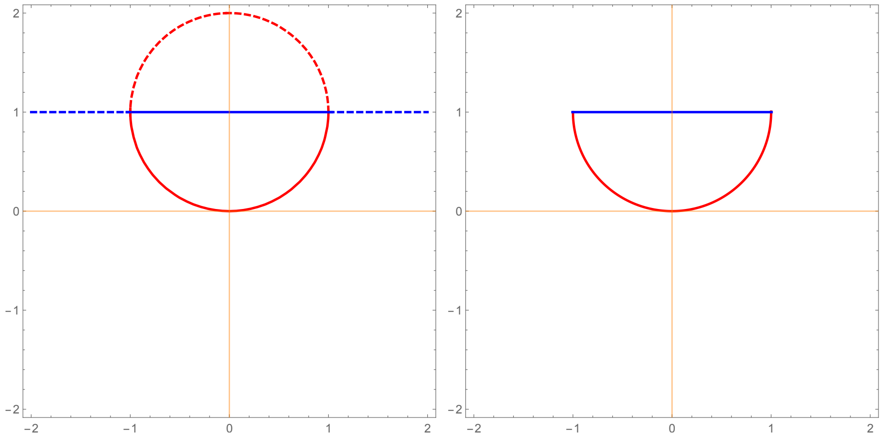


Figura 1.8. Curva Γ correspondiente a la pregunta 3

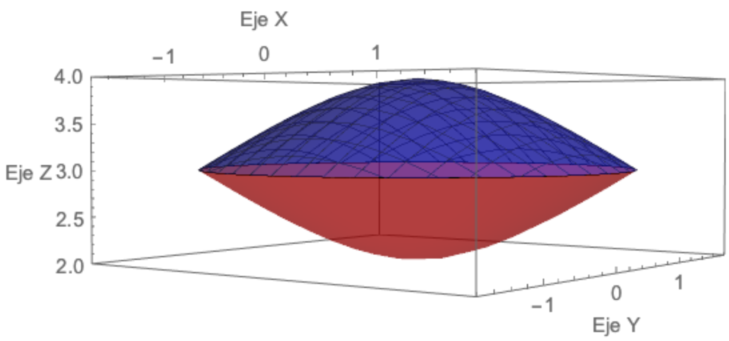


Figura 1.9. Recinto Q y superficie S correspondientes a la pregunta 4

5. (a) (1.25 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2 \cos(y(t))\, y'(t) - 2\,t\, \operatorname{sen}(y(t)) = -1\,,$$

usando el cambio de variable $z(t) = \operatorname{sen}(y(t))$. Calcula también, si es posible, todas las soluciones que verifiquen $y(1) = \pi$.

(b) (0.75 *puntos)* Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 2\,y'(t) - 3\,y(t) = e^{2t}\,.$$

Parte 2

Indicaciones para resolver los exámenes

2.1. 28 de marzo de 2017, evaluación continua, parte 1

2.1.1. Grupo 2

1. Dada la función
$$f(x,y) = \arccos \frac{-2x^2 - y^2 + 9}{x^2 + 2y^2}\,.$$

   (a) (2 puntos) Calcula y dibuja su dominio.
   Solución: debemos imponer
$$x^2 + 2y^2 \neq 0$$
$$-1 \leq \frac{-2x^2 - y^2 + 9}{x^2 + 2y^2} \leq 1\,.$$
   La primera condición se cumple si y solamente si $(x,y) \neq (0,0)$. La segunda condición son dos inecuaciones, que hay que resolver por separado, y luego tomar la interesección de sus soluciones. Tenemos que
$$-1 \leq \frac{-2x^2 - y^2 + 9}{x^2 + 2y^2}$$
   es equivalente a $x^2 - y^2 \leq 9$. La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es la una hipérbola, en forma de "c" y de "c invertida" que tocan al eje horizontal en los puntos de abscisa -3 y 3. Podemos tomar como puntos de referencia, por ejemplo $(-4,0)$, $(0,0)$ y $(4,0)$ para ver qué regiones del plano verifican la inecuación. Por otro lado
$$\frac{-2x^2 - y^2 + 9}{x^2 + 2y^2} \leq 1$$
   es equivalente a $x^2 + y^2 \geq 3$ con lo que los puntos solución son los que están en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ y en la propia circunferencia.

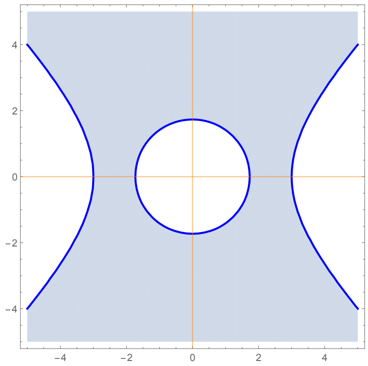


Figura 2.1. Dominio D correspondiente a la pregunta 1a

Recopilando toda la información anterior, ya podemos hacer un dibujo de D (puedes verlo en la figura 2.1).

(b) (2 puntos) Calcula las curvas de nivel de f correspondientes a los niveles $c = 0$, $c = \dfrac{\pi}{2}$ y $c = \dfrac{2\pi}{3}$. Haz un dibujo en el que estén, a la vez, el dominio de f y las tres curvas de nivel

Pista: $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Solución: Tenemos que $\mathrm{Im}f = [0, \pi]$, aunque este dato no es necesario para contestar correctamente a la pregunta. Vamos calculando las curvas de nivel pedidas:

- para el nivel $c = 0$, la ecuación $f(x, y) = 0$ nos lleva a $x^2 + y^2 = 3$, que es una circunferencia contenida en D. Por lo tanto, la curva de nivel es dicha circunferencia, la de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$. En la figura 2.2 está dibujada en color rojo.
- para el nivel $c = \frac{\pi}{2}$, la ecuación $f(x, y) = \frac{\pi}{2}$ nos lleva a
$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$
que es una elipse contenida en D. Por lo tanto, la curva de nivel es dicha elipse, la de centro $(0, 0)$ y semiejes $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y 3. En la figura 2.2 está dibujada en color verde.
- para el nivel $c = \frac{2\pi}{3}$, la ecuación $f(x, y) = \frac{2\pi}{3}$ nos lleva a
$$x^2 = 6$$
que son dos rectas verticales, ambas contenidas en D. Por lo tanto, la curva de nivel son las rectas $x = -\sqrt{6}$ y $x = \sqrt{6}$. En la figura 2.2 está dibujada en color amarillo.

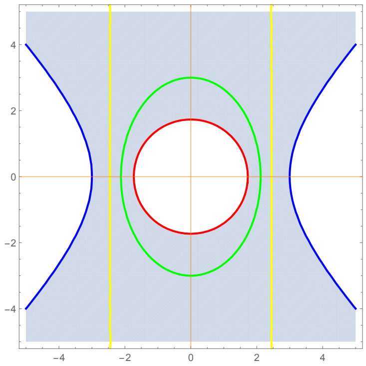


Figura 2.2. Curvas de nivel y dominio correspondientes a la pregunta 1*b*

2. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3(1-\cos(2x))}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

   (a) (1.5 puntos) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
   Solución: En primer lugar, observamos que f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Veamos si f es continua en $(0,0)$. Tenemos que $f(0,0)=0$, vamos ahora a estudiar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

   Dado que

$$f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \frac{2x^2y^3}{x^4+y^4} =: g(x,y)$$

   vamos a estudiar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\,,$$

   que es más sencillo. Consideramos la familia de rectas $y=mx$. Tenemos

$$g(x,mx)=\cdots=\frac{2m^3}{1+m^4}\,x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,\forall m\,,$$

   con lo que el límite es 0 o no existe. Vamos a intentar aplicar la regla del sándwich (a g):

$$0\leq\mid g(x,y)-0\mid = 2\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\,|y| =$$

$$2\sqrt{\frac{x^4}{x^4+y^4}}\sqrt{\frac{y^4}{x^4+y^4}}\,|y|\leq|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

con lo que concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

y, en consecuencia, f en continua en $(0,0)$. Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) (1.5 puntos) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución: En primer lugar debemos estudiar si existe $\nabla f(0,0)$. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) := \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

con lo que $\nabla f(0,0) = 0$. Llamamos

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Tenemos que f es diferenciable si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Además

$$g(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} \frac{2x^2y^3}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} := h(x,y)$$

Estudiamos el límite por rectas de la forma $y = mx$

$$h(x,mx) = \cdots = \frac{2m^3}{(1+m^4)\sqrt{1+m^2}}\,\frac{x}{|x|} \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0\,.$$

Y, así, f no es diferenciable en $(0,0)$.

3. (3 puntos) Sean

$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 - 3$$

y

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0, y - x - 2 \leq 0, y + x - 2 \leq 0\right\}$$

(puedes ver un dibujo de D en la figura 2.3). Calcula los extremos absolutos de f en D.

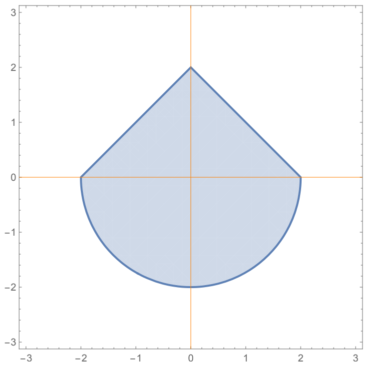


Figura 2.3. Recinto D correspondiente a la pregunta 3

Solución Observemos en primer lugar que D es cerrado y acotado y f es continua en D, por lo que el teorema de Weierstrass nos asegura que f alcanza su máximo y su mínimo en D. Además, $f \in C^2(D)$. Tenemos que $D = \bar{D} = D^o \cup \partial D$ y esta unión es disjunta.

Buscamos puntos candidatos en D^o, la ecuación $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ tiene como única solución $(0, 0)$. Este punto está en D^o, con lo que ya tenemos el primer punto candidato $P_1 = (0, 0)$.

Vamos ahora por ∂D. descomponemos la frontera en varias partes: los tres puntos de corte, que son directamente candidatos: $Q_1 = (-2, 0)$, $Q_2 = (0, 2)$ y $Q_3 = (2, 0)$. Llamamos Γ_1 al segmento de la recta $y = x + 2$, que está en ∂D, salvo los puntos Q_1 y Q_2, Γ_2 al segmento de la recta $y = -x + 2$ que está en ∂D, salvo los puntos Q_2 y Q_3, y Γ_3 al arco de circunferencia que está en ∂D, salvo Q_1 y Q_3.

Vamos por Γ_1, observemos que no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con estudiar la función $r(x) := f(x, x + 2)$ en el intervalo $(-2, 0)$. Tenemos que $r(x) = 2x^3 - (x + 2)^2 - 3$ y que $r'(x) = 0$ en los puntos 1, que no pertenece al intervalo $(-2, 0)$ y $-\frac{2}{3}$ que sí pertenece al intervalo $(-2, 0)$. Por lo tanto, de aquí sacamos un candidato: $R_1 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

Vamos por Γ_2, observemos que no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con estudiar la función $r(x) := f(x, -x + 2)$ en el intervalo $(0, 2)$. Tenemos que $s(x) = 2x^3 - (-x + 2)^2 - 3$ y que $s'(x)$ no se anula en ningún punto. Por lo tanto, de aquí no sacamos candidatos.

Vamos por Γ_3. Los puntos de Γ_3 son

$$\Gamma_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 = 0,\ y - x - 2 < 0,\ y + x - 2 < 0\right\}.$$

Vamos a plantear un problema de multiplicadores de Lagrange. Sea $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Debemos estudiar si el gradiente de g pierde el rango máximo en algún punto de Γ_3. La ecuación $\nabla g(x,y) = (0,0)$ tiene como única solución $(0,0)$ y este punto no está en Γ_3 con lo que, de aquí, no sacamos candidatos. Planteamos ahora los multiplicadores de Lagrange, sea

$$L(x,y,\lambda) = 2x^3 - y^2 - 3 - \lambda(x^2 + y^2 - 4) \ ,$$

La ecuación $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ nos proporciona 6 puntos precandidatos, a saber

$$(-2,0),(2,0),(0,-2),(0,2),\left(-\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{35}}{3}\right),\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{35}}{3}\right).$$

Ahora debemos estudiar cuáles de estos puntos están en Γ_3. Se ve de manera sencilla que los candidatos son $S_1 = \left(-\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ y $S_2 = (0,-2)$.

Evaluando la función en los puntos candidatos, concluimos que el mínimo se alcanza en $(-2,0)$ y el máximo se alcanza en $(2,0)$.

2.2. 16 de mayo de 2017, evaluación continua, parte 2

2.2.1. Grupo 2

1. (1.5 puntos) Sea

   $$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\right\} \ ,$$

   calcula

   $$\iint_D (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy \, .$$

   Solución: Podemos ver un dibujo de D en la figura 2.4.

   Viendo tanto el recinto como el integrando, la mejor opción es hacer el cambio de variable $x = r\cos\alpha$, $y = r \operatorname{sen}\alpha$ con $\alpha \in [0,\pi]$ y r desde 0 hasta $2\operatorname{sen}\alpha$. El valor absoluto del jacobiano es r. Con esto

   $$\iint_D (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy = \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\alpha} (r^2 - 2r\operatorname{sen}\alpha) r \, dr \, d\alpha = \cdots = -\frac{\pi}{2} \, .$$

2. (1.5 puntos) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z^2 = -2y+4$ (puedes ver un dibujo de Q en la figura 2.5).

   Calcula

   $$\iiint_Q 2z \, dxdydz \, .$$

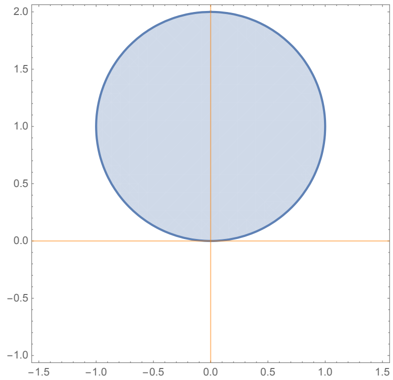


Figura 2.4. Recinto D correspondiente a la pregunta 1

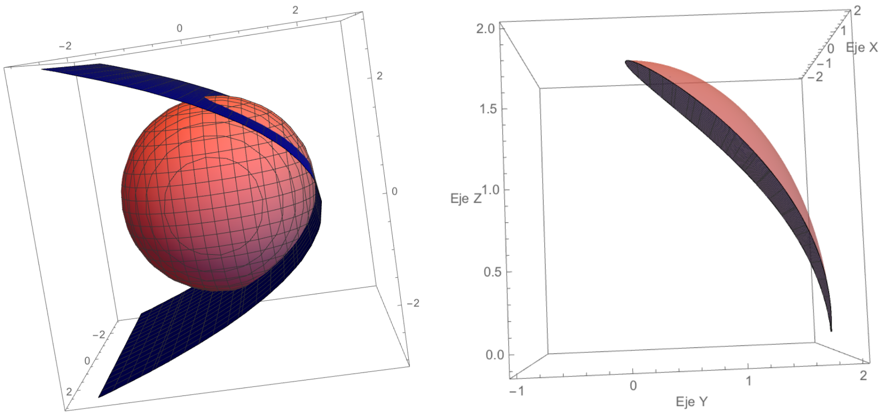


Figura 2.5. Recinto Q correspondiente a la pregunta 2

Solución: Aplicamos en primer lugar el teorema de Fubini:

$$\iiint_Q 2z\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{-2y+4}}^{\sqrt{4-x^2-y^1}} 2zdz \right) dxdy = -\iint_D (x^2+y^2-2y)\, dxdy\,.$$

Para saber cuál es recinto D (proyección de Q sobre el plano xy), llamamos Γ a la curva intersección de las dos superficies. D será el recinto delimitado por la proyección de Γ sobre el plano xy. Puedes ver un dibujo en la figura 2.6. Observamos que, de las ecuaciones de Γ, se deduce que $x^2+y^2-2y=0$ es, en $\mathbb{R}^3$, la ecuación de un cilindro de eje z que contiene a Γ. La proyección de este cilindro en sobre el plano xy es la misma que la proyección de Γ. Con esto, deducimos que D es el recinto considerado en la pregunta 1 así que la integral vale $\dfrac{\pi}{2}$.

3. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D de la pregunta 1 y sea

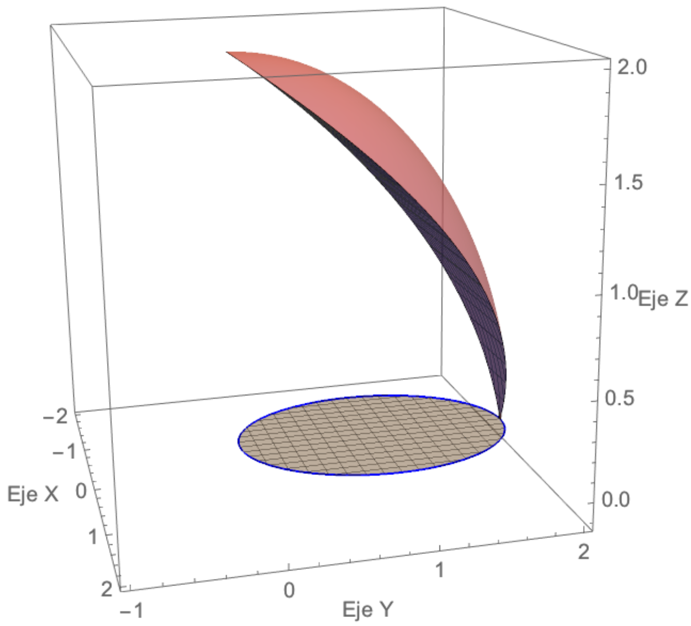


Figura 2.6. Recinto Q y proyección D correspondientes a la pregunta 2

$f(x, y) = x + x^4 + (y-1)^2$. Calcula

$$\int_\Gamma f\, d\ell\,.$$

Solución: Debemos parametrizar Γ:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos\alpha, 1 + \operatorname{sen}\alpha) \end{aligned}$$

es una parametrización de Γ. Tenemos que $\|\mathbf{\Phi}'(t)\| = 1$ y que $f(\mathbf{\Phi}(t)) = \cos\alpha + \cos^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha$, con lo que

$$\int_\Gamma f\, d\ell = \int_0^{2\pi} (\cos\alpha + \cos^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)\, d\alpha = \cdots = \frac{7}{4}\pi\,.$$

4. (1.5 puntos) Sea S la porción del cilindro parabólico considerado en la pregunta 2 y sea

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{y-2}{2y-5}}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)\,.$$

Calcula

$$\iint_S f\, ds\,.$$

Solución: Debemos parametrizar S, podemos utilizar la parametrización trivial:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &: D \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y, \sqrt{-2y+4}\right) , \end{aligned}$$

donde D es, por definición de S, el recinto de $\mathbb{R}^2$ considerado en la preguntas 1 y 2. Si llamamos $g(x, y) := \sqrt{-2y+4}$, tenemos que

$$\|\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2y-5}{y-2}}$$

y que

$$f(\boldsymbol{T}(x, y)) = (x^2 + y^2 - 2y)\sqrt{\frac{y-2}{2y-5}} .$$

Con esto

$$\iint_S f\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi .$$

5. (1.5 puntos) Sea Γ la curva considerada en la pregunta 3 orientada positivamente. Sea

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(2x + y + y^2 - \frac{1}{3}y^3,\; x + \frac{1}{3}x^3 + 9y^2\right) .$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} .$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green. La curva Γ se orienta positivamente y delimita el recinto D considerado en la pregunta 1. Además, $\nabla \times \boldsymbol{F} = x^2 + y^2 - 2y$, con lo que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \iint_D (x^2 + y^2 - 2y)\, dxdy = -\frac{\pi}{2} ,$$

(sin más que usar el resultado de la pregunta 1).

6. (1.5 puntos) Sea Γ la curva intersección de la porción de esfera y el cilindro parabólico considerados en la pregunta 2 (orientada como prefieras). Sea

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(2xy - \frac{y^3}{3} + y^2,\; \frac{x^3}{3} + x^2 + 3y^2,\; 2z\right) .$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} .$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Stokes. Podemos considerar como superficie S tanto la porción de esfera como la porción del cilindro parabólico. Teniendo en cuenta que ya hemos parametrizado el cilindro parabólico en la pregunta 4, lo más sencillo es tomar S la porción del cilindro parabólico. Usando la parametrización que ya habíamos construido, tenemos

$$\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y = (-g_x, -g_y, 1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{-2y+4}}, 1\right) .$$

Además,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(0, 0, x^2 + y^2 - 2y\right) ,$$

y, como podemos tomar la orientación de Γ que deseemos no necesitamos saber el sentido del vector normal a S inducido por $\boldsymbol{T}$, con lo que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} d\sigma = \iint_D \left(0, 0, x^2 + y^2 - 2y\right) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{-2y+4}}, 1\right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(x^2 + y^2 - 2y\right) dxdy = -\frac{\pi}{2} ,$$

(usando la pregunta 1).

7. (1 punto) Sea S la superficie que delimita el recinto Q de la pregunta 2 y sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2,\ -2xy,\ z^2)$ considerando el vector normal exterior. Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma .$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de la divergencia. Dado que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 2z$$

y que el sentido del vector normal a considerar es el exterior, tenemos que

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \iiint_Q 2z \, dxdydz = \frac{\pi}{2},$$

(hemos usado el resultado de la pregunta 2).

2.3. 28 de marzo de 2017, evaluación continua, parte 3

1. (3.5 *puntos*) Calcula la solución del PVI

$$\begin{cases} y'(t) = & \dfrac{3y(t)^2 + ty(t) + t^2}{t^2 + 2ty(t)} , \\ y(1) = & 0. \end{cases}$$

Solución: Resolvemos en primer lugar la ecuación diferencial: dividiendo numerador y denominador entre t^2, expresamos la ecuación como

$$y'(t) = \frac{3\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right) + 1}{1 + 2\left(\frac{y}{t}\right)} ,$$

así que es una ecuación diferencial de orden 1 homogénea. Hacemos el cambio de variable $v = \frac{y}{t}$, y la ecuación transformada es

$$v' = \frac{1}{t} \cdot \frac{v^2+1}{1+2v},$$

que es de variables separables. La solución en v es

$$\operatorname{arctg} v + \log(1+v^2) = \log|t| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio queda la solución de la ecuación diferencial

$$\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{t} + \log \frac{1+y(t)^2}{t^2} = \log|t| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Imponemos ahora que $y(1) = 0$ y sale que $C = 0$, con lo que la solución del PVI es

$$\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{t} + \log \frac{1+y(t)^2}{t^2} = \log|t|.$$

2. (3 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t(\cos t)y(t)^2 + 2t^2 + 2t(\operatorname{sen} t)y(t)y'(t) = 0.$$

Solución: Llamamos

$$\begin{aligned} M(t,y) &:= t(\cos t)y^2 + 2t^2 \\ N(t,y) &:= 2t(\operatorname{sen} t)y. \end{aligned}$$

Tenemos que $M_y - N_t = -2(\operatorname{sen} t)y$, con lo que la ecuación no es diferencial exacta. Veamos si es reducible a diferencial exacta:

$$\frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{1}{t},$$

que depende solamente de t, con lo que existe un factor integrante de la forma $\mu(t)$. Este factor integrante verifica la ecuación

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{t},$$

que es de variables separables. Con esto tenemos que $\mu(t) = \dfrac{1}{t}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial original. Multiplicando la ecuación original por el factor integrante, tenemos

$$(\cos t)y(t)^2 + 2t + 2(\operatorname{sen} t)y(t)y'(t) = 0,$$

que es diferencial exacta. Renombramos

$$\begin{aligned} M(t,y) &:= (\cos t)y^2 + 2t \\ N(t,y) &:= 2(\operatorname{sen} t)y. \end{aligned}$$

Sabemos que existe una función potencial $u(t,y)$ tal que $u_t = M$ y $u_y = N$. Partiendo que $u_y = N$, tenemos que $u = (\operatorname{sen} t)y^2 + g(t)$. Imponiendo a continuación que $u_t = M$ llegamos a que una función g es $g(t) = t^2$. Así $u(t,y) = (\operatorname{sen} t)y^2 + t^2$ es una función potencial. Con esto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$(\operatorname{sen} t)y(t)^2 + t^2 = C\,, C \in \mathbb{R}\,.$$

3. (3.5 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 2\,y'(t) - 3y(t) = 16\,t\,e^{-t}.$$

Solución: Es una ecuación diferencial de orden 2, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea. Sabemos por tanto que su solución general será de la forma

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_{1h}(t) + C_2 y_{2h}(t)\,, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

donde y_{1h} e y_{2h} son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial. Para calcular y_{1h} e y_{2h} resolvemos la ecuación polinómica $r^2 - 2r - 3 = 0$, que tiene como soluciones $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$. Con esto $y_{1h} = e^{-t}$ e $y_{2h} = e^{3t}$. Para calcular y_p usamos el método de los coeficientes indeterminados, que nos propone soluciones particulares de la forma

$$\begin{aligned} y_p(t) &= (at+b)e^{-t}\,,\\ y_p(t) &= t(at+b)e^{-t}\,,\\ y_p(t) &= t^2(at+b)e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Dado que la primera de ellas no es solución de la homogénea, comenzamos intentando una solución particular de la forma $y_p(t) = (at+b)e^{-t}$. Imponiendo que esta y_p sea solución de la ecuación diferencial llegamos a un imposible, así que probamos con $y_p(t) = t(at+b)e^{-t}$. En este caso, para $a = -2$ y $b = 1$, sí tenemos que $y_p = (-2t^2 - t)e^{-t}$ es una solución particular. Con todo lo anterior, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = (-2t^2 - t)e^{-t} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}\,, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

2.4. 10 de junio de 2017, evaluación de recuperación

1. Dada la función

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-16}\right)\,.$$

(a) (0.5 puntos) Calcula y dibuja su dominio.

Solución: Debemos imponer

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-16} > 0\,, \tag{2.1}$$

$$x^2+y^2-16 \neq 0\,. \tag{2.2}$$

Como $x^2+y^2 \geq 0$ en $\mathbb{R}^2$, (2.1) y (2.2) equivalen a

$$x^2+y^2 > 0\,, \tag{2.3}$$

$$x^2+y^2-16 > 0\,. \tag{2.4}$$

Además, si se tiene (2.4), entonces, necesariamente, se tiene también (2.3), así que el dominio serán los puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $x^2+y^2>16$. Estos puntos son el exterior (sin el borde) de la circunferencia del centro $(0,0)$ y radio 4. Puedes ver un dibujo de D en la figura 2.7.

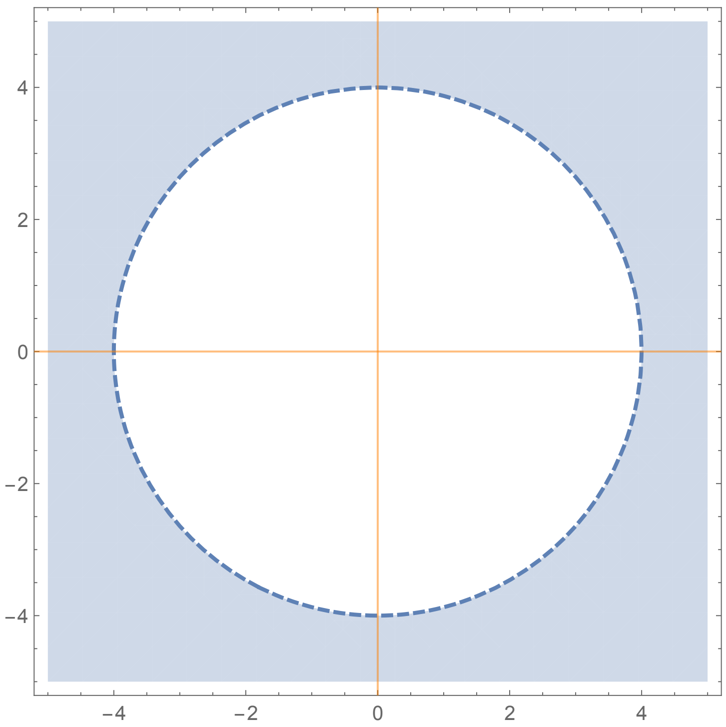


Figura 2.7. Dominio D correspondiente a la pregunta $1a$

(b) (1 punto) Calcula y dibuja, si es posible, las curvas de nivel correspondientes a los niveles $c=-1$ y $c=1$.

Solución: Para $c=-1$ la ecuación $f(x,y)=c$ nos lleva a

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{e}\right)y^2=-\frac{16}{e}$$

lo cual es imposible. Así, $-1 \notin \mathrm{Im}f$ y no procede, por tanto, calcular la curva de nivel correspondiente a este nivel.

Para $c = 1$ la ecuación $f(x, y) = c$ nos lleva a

$$(e-1)\,x^2 + (e-1)\,y^2 = 16e$$

que es la ecuación de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $4\sqrt{\dfrac{e}{e-1}}$. Como el radio de esta circunferencia es mayor que 4, la circunferencia está contenida en D. Así, $1 \in \mathrm{Im}f$ y la curva de nivel correspondiente a este nivel. es dicha circunferencia.

2. (a) (1.5 puntos)

Estudia si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

y el recinto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq 2-3x\,, y \leq 2+3x\,, y \geq -1\}$$

representado en la figura 2.8 verifican las condiciones del Teorema de Weierstrass.

En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función f en el recinto D.

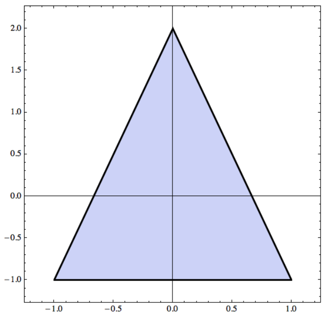


Figura 2.8. Recinto D correspondiente a la pregunta $2a$

Solución: El recinto D es cerrado y acotado. f es continua en $D \setminus \{(0,0)\}$; veamos si f es continua en $(0,0)$, que es un punto de D: Consideramos $y = mx$, familia de rectas que pasan por $(0,0)$. Tenemos que

$$f(x, mx) = \ldots = \frac{m}{1+m^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{m}{1+m^2}\,,$$

con lo que concluimos que f no es continua en $(0,0)$, así que no es cierto que f sea continua en D. En consecuencia, no estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weiersstrass.

(b) (1.5 puntos)
Estudia si la función

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2$$

y el recinto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 6 \,, x \geq -2\}$$

representado en la figura 2.9, verifican todas las condiciones del Teorema de Weierstrass.

En caso afirmativo, halla los extremos absolutos de la función f en el recinto D.

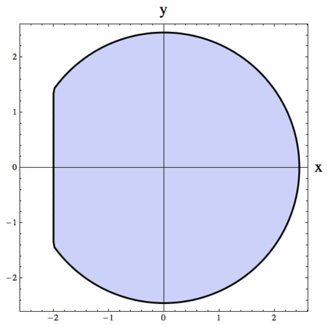


Figura 2.9. Recinto D correspondiente a la pregunta 2b

Solución: D es cerrado y acotado y f es continua en D (es un polinomio), así que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weierstrass, que no asegura que f alcanza sus extremos absolutos en D. Tenemos que $D = \bar{D} = D^o \cup \partial D$ y esta unión es disjunta.

Vamos por D^o: la ecuación $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ tiene como única solución $(-1, 0)$. Como este punto está en D^o, de aquí sacamos un candidato: $P_1 = (-1, 0)$.

Vamos por ∂D: descomponemos ∂D en varias zonas:

- los puntos de corte entre la circunferencia y la recta, que son directamente candidatos: $Q_1 = (-2 - \sqrt{2})$ y $Q_2 = (-2, \sqrt{2})$,
- Γ_1, la porción de la recta $x = -2$ que está en D, excluyendo Q_1 y Q_2,
- Γ_2, la porción de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$ que está en D, excluyendo Q_1 y Q_2.

Vamos por Γ_1: observemos que no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con estudiar $r(y) := f(-2, y)$, con $y \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La ecuación $r'(y) = 0$ tiene como única solución $y = 0$, que está en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. De aquí, sacamos un punto candidato: $R_1 = (-2, 0)$.

Vamos por Γ_2: vamos a plantear un problema de multiplicadores de Lagrange. Sea $g(x, y) := x^2 + y^2 - 6$, tenemos que $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ que sólo pierde el rango máximo en $(0,0)$, que no está en Γ_2: de aquí no sacamos candidatos. Sea $L(x,y,\lambda) := x^2+2x+y^2-\lambda(x^2+y^2-6)$, la ecuación $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$, nos da como puntos precandidatos $(-\sqrt{6},0)$ y $(\sqrt{6},0)$; sólo el segundo de ellos está en Γ_2: de aquí sacamos un candidato, $S_1 = (\sqrt{6},0)$.

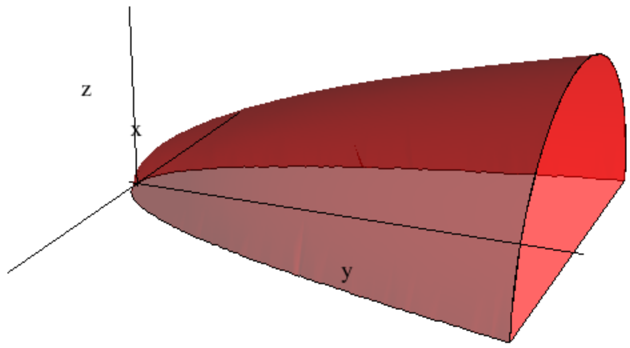
Evaluando f en los puntos candidatos concluimos que f alcanza su mínimo absoluto en P_1 y su máximo absoluto en S_1.

3. (2.5 puntos)

Sea Q el recinto limitado por el paraboloide $y = 2x^2+z^2$, el plano $y = 2$ y el plano $z = 0$.

Halla

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz$$



Solución: En primer lugar aplicamos el teorema de Fubini:

$$\iiint_Q z\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{y-2x^2}} z\,dz\right) dxdy = \frac{1}{2}\iint_D (y-2x^2)\,dxdy,$$

siendo D el recinto de $\mathbb{R}^2$ que resulta al proyectar Q sobre el plano xy. Este recinto es el delimitado por la parábola $y = 2x^2$ y la recta $y = 2$. Puedes ver un dibujo de D en la figura 2.10.

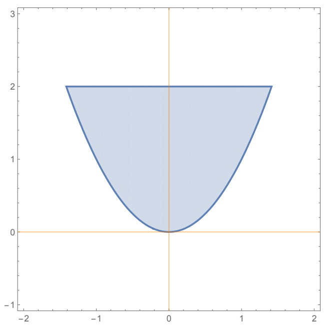


Figura 2.10. Recinto D correspondiente a la pregunta 3

Con esto

$$\frac{1}{2}\iint_D (y-2x^2)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{2}(y-2x^2)\,dx\,dy = \ldots = \frac{16}{15}.$$

4. (1.5 puntos) Sea el campo vectorial
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(3x^2y + 2y^5, x^3 + 10xy^4 + 2ye^{y^2}\right) ,$$
y sea Γ cualquier curva regular a trozos que va desde el punto $(1,0)$ hasta el punto $(0,-\frac{1}{3})$. Calcula
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} .$$
Solución: Observemos que $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ en $\mathbb{R}^2$, luego el campo es conservativo. Por lo tanto, existe una función potencial $f(x,y)$ tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Imponiendo que $f_x = P$, se llega a que $f(x,y) = x^3y + 2xy^5 + g(y)$. Después, como $f_y = Q$ se llega a que una función $g(y)$ es e^{y^2}. Con esto, $f(x,y) = x^3y + 2xy^5 + e^{y^2}$ es una función potencial de $\boldsymbol{F}$. Así
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = f\left(0, -\frac{1}{3}\right) - f(1,0) = e^{\frac{1}{9}} - 1 .$$

5. (1.5 puntos) Consideramos el intervalo $[1,+\infty)$ y el PVI
$$\begin{cases} 2t^2\, y'(t) + t^2\, y(t)^2 + 1 = 0, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$
Calcula $y(t)$, la solución del PVI, y calcula $y(e)$.

Pista: Puedes utilizar el cambio de variable $u(t) = t\, y(t)$.

Solución: Haciendo el cambio de variable sugerido, llegamos a la ecuación $2u't + (u-1)^2 = 0$, que es de variables separables. Para $t \in [1+\infty)$, la solución de la ecuación diferencial en u es
$$\frac{2}{u-1} = \log t + C \,, C \in \mathbb{R} .$$
La condición inicial $y(1) = 3$ se transforma, con el cambio de variable en $u(1) = 3$. Llevando esta condición a la solución general de la ecuación diferencial, nos queda $C = 1$ y así, deshaciendo el cambio tenemos que
$$\log t = \frac{3t - y}{y - t}$$
es la solución del PVI. Sin más que evaluar, se llega a $y(e) = e$.

2.5. 22 de marzo de 2018, evaluación continua, parte 1

1. Dada la función
$$f(x,y) = \log\left(\frac{-x^2 - y^2 + 4}{x^2 + y^2 - 1}\right) .$$

(a) (2 puntos) Calcula y dibuja su dominio.
Solución: Es necesario imponer

$$-x^2 - y^2 + 4 \neq 0\,, \tag{2.5}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0\,, \tag{2.6}$$

$$\frac{-x^2 - y^2 + 4}{x^2 + y^2 - 1} > 0\ . \tag{2.7}$$

La ecuación (2.5) supone excluir la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, la ecuación (2.6) supone excluir la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La ecuación (2.7) supone estudiar tres zonas de $\mathbb{R}^2$: la zona interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ usando, por ejemplo, el punto $(0, 0)$, la corona circular de centro $(0, 0)$, radio interior 1 y radio exterior 2 usando, por ejemplo, el punto $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, y la zona exterior a la circunfencia $x^2 + y^2 = 4$ usando, por ejemplo, el punto $(0, 3)$. Con esto llegamos a que el dominio D es el dibujado en la figura 2.11.

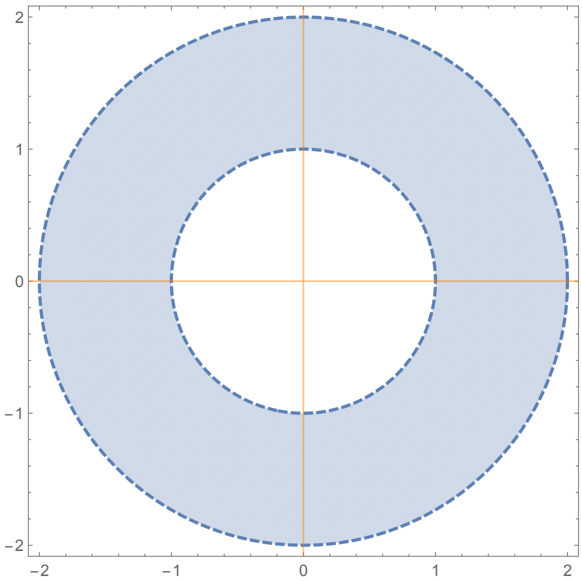


Figura 2.11. Recinto D correspondiente a la pregunta 1a

(b) (2 puntos) Calcula Imf y las curvas de nivel de f, dibujándolas.
Solución: Sea $c \in \mathbb{R}$, planteamos la ecuación $f(x, y) = c$ para ver para qué valores de c tiene solución con $(x, y) \in D$. Esta ecuación nos lleva a:

$$\frac{-x^2 - y^2 + 4}{x^2 + y^2 - 1} = e^c$$

y de aquí llegamos a

$$x^2 + y^2 = \frac{4 + e^c}{1 + e^c}$$

que es la ecuación de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{\dfrac{4+e^c}{1+e^c}}$. Es obvio que tenemos un radio > 0 pero debemos ver, además, los puntos de esta circunferencia están o no en D, lo que es equivalente a plantear el sistema de inecuaciones (en c):

$$1 < \frac{4+e^c}{1+e^c} < 4\,. \tag{2.8}$$

La inecuacion (2.8) es cierta para todo $c \in \mathbb{R}$, de lo que se concluye que $\mathrm{Imf} = \mathbb{R}$ y que las curvas de nivel son circunferencias de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{\dfrac{4+e^c}{1+e^c}}$. Puedes ver las curvas de nivel correspondientes a los valores -1 (rojo), 0 (verde) y 1 (amarillo) en la figura 2.12

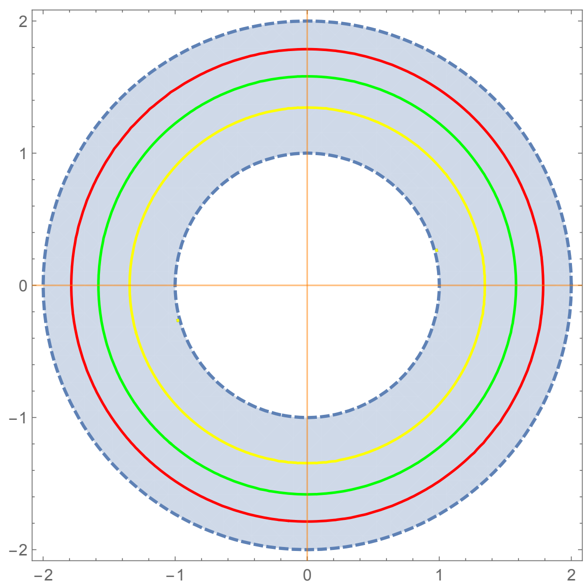


Figura 2.12. Cruvas de nivel correspondientes a la pregunta 1b

2. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\cos(x^2y^2)\right)}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) (1.5 puntos) Estudia la continuidad de f en $(0,0)$.
   Solución: Para estudiar el límite de f podemos aplicar equivalencias (en el orden *adecuado*):

$$f(x,y) \sim \frac{\cos x^2y^2 - 1}{x^6+y^6} \sim -\frac{1}{2}\frac{x^4y^4}{x^6+y^6} =: g(x,y)\,.$$

Estudiamos ahora el límite de g: consideramos la familia de rectas $y = mx$, que pasan por $(0,0)$, tenemos:

$$g(x, mx) = \cdots = -\frac{1}{2}\frac{m^4}{1+m^6}x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,\forall m\,,$$

con lo que las posibilidades son que el límite sea 0 o que no exista. Veamos si podemos aplicar la regla del sándwich (a g):

$$0 \le |g(x,y) - 0| = \frac{1}{2}\frac{x^4y^4}{x^6+y^6} = \frac{1}{2}\frac{|x|^3}{\sqrt{x^6+y^6}}\frac{|y|^3}{\sqrt{x^6+y^6}}|x||y| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^6}{x^6+y^6}}\sqrt{\frac{y^6}{x^6+y^6}}|x||y| \le \frac{1}{2}|x||y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

de donde se deduce que f es continua en $(0,0)$.

(b) (1.5 puntos) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución: En primer lugar, debemos estudiar si existe $\nabla f(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \cdots = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \cdots = 0\,,$$

con lo que $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Veamos ahora si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla(0.0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sea

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla(0.0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

tenemos que

$$h(x,y) = \frac{\log\cos(x^2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^6+y^6)} \underset{(0,0)}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}(x^6+y^6)} =: r(x,y)$$

Estudiamos ahora el límite de r: consideramos la familia de rectas $y = mx$, que pasan por $(0,0)$, tenemos:

$$r(x, mx) = \cdots = -\frac{1}{2}\frac{m^4}{(1+m^6)\sqrt{1+m^2}}|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,\forall m\,,$$

con lo que las posibilidades son que el límite sea 0 o que no exista. Veamos si podemos aplicar la regla del sándwich:

$$0 \leq |r(x,y) - 0| = \frac{1}{2} \frac{x^4 y^4}{(x^6+y^6)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \frac{|x|^3}{\sqrt{x^6+y^6}} \frac{|y|^3}{\sqrt{x^6+y^6}} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} |y| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^6}{x^6+y^6}} \sqrt{\frac{y^6}{x^6+y^6}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} |y| \leq \frac{1}{2}|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

de donde se deduce que f es diferenciable en $(0,0)$.

Nota: si hubiésemos intuido que f era diferenciable en $(0,0)$, podríamos haber empezado por el apartado (b) y el (a) se obtendría como consecuencia directa.

3. (3 puntos) Sea

$$f(x,y) = 6x^2 + 4y^3 - 3y^2$$

y

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

(puedes ver un dibujo de D en la figura 2.13). Calcula los extremos absolutos de f en D.

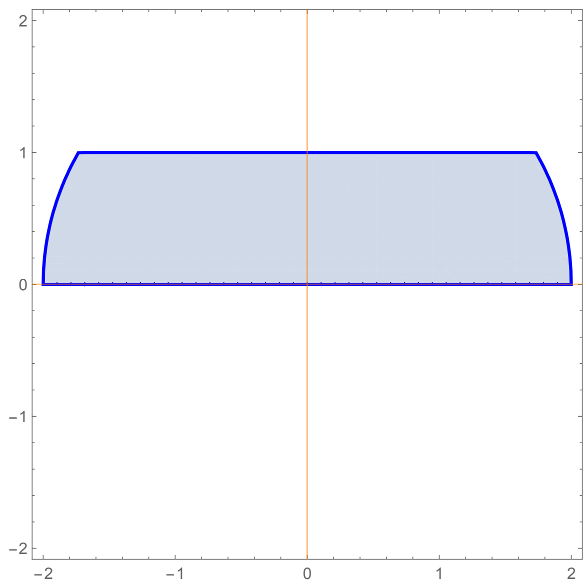


Figura 2.13. Recinto D correspondiente a la pregunta 3

Solución: En primer lugar observamos que D es un recinto cerrado y acotado, y f es continua en D por lo que, por aplicación directa del teorema de Weiertrass se tiene que f alcanza su máximo y su mínimo en D. Separamos $D = \bar{D} = D^o \cup \partial D$ y esta unión es disjunta.

Vamos por D^o: la ecuación $\nabla f(x,y) = (0,0)$ tiene dos soluciones: $(0,0)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. La primera de ellas no está en D^o y la segunda sí. De aquí sacamos un candidato: $P_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Vamos ahora por ∂D: tenemos que estudiar por separado varias partes.

- Los cuatro puntos de corte, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.
- Γ_1: la parte de la curva $y = 1$ que está en D, excluyendo los puntos de corte
- Γ_2: la parte de la curva $y = 0$ que está en D, excluyendo los puntos de corte
- Γ_3: la parte de la curva $x^2 + y^2 = 4$ que está en D, excluyendo los puntos de corte (son dos arcos, pero se puede trabajar en los dos simultáneamente).

Los cuatro puntos de corte son directamente candidatos: $Q_1 = (-2,0)$, $Q_2 = (-\sqrt{3},1)$, $Q_3 = (\sqrt{3},1)$, $Q_4 = (2,0)$.

Vamos por Γ_1: observemos que no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con estudiar $r(x) := f(x,1)$ con $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. La ecuación $r'(x) = 0$ tiene como única solución $x = 0$ que está en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, así que sacamos un candidato: $R_1 = (0,1)$.

Vamos por Γ_2: observemos que no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con estudiar $s(x) := f(x,0)$ con $x \in (-2,2)$. La ecuación $s'(x) = 0$ tiene como única solución $x = 0$ que está en $(-2,2)$, así que sacamos un candidato: $S_1 = (0,0)$.

Vamos por Γ_3: en este caso sí planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange. Sea $g(x,y) := x^2 + y^2 - 4$, la ecuación $\nabla g(x,y) = (0,0)$ tiene como única solución $(0,0)$, que no está en Γ_3, luego de aquí no sacamos candidatos. Sea ahora $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x,y)$. La ecuación $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ tiene varias soluciones, todas ellas en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero no todas ellas en Γ_3. Si cuando vamos resolviendo $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ en la casuística que nos aparece vamos descartando los puntos que no están en Γ_3 (sin arrastrar, por tanto, esas cuentas), llegamos a que de aquí no sacamos candidatos.

Una vez recopilados todos los candidatos, evaluamos f en cada uno de ellos y llegamos a que f alcanza su mínimo absoluto en P_1 y su máximo absoluto en Q_1 y en Q_4.

2.6. 15 de mayo de 2018, evaluación continua, parte 2

1. (1.5 puntos) Sea
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\},$$
calcula
$$\iint_D \left(x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy.$$

Solución: El recinto D está delimitado por la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2, puedes ver un dibujo de D en la figura 2.14.

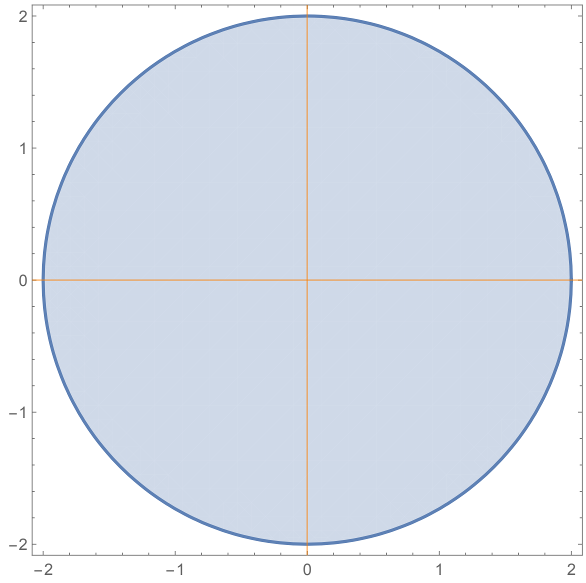


Figura 2.14. Recinto D correspondiente a la pregunta 1

Hacemos el cambio $x = r\cos\alpha$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, el valor absoluto del jacobiano es r, $\alpha \in [0, 2\pi]$ y r va de 0 a 2. Con esto

$$\iint_D \left(x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2 + r\right) r\, dr\, d\alpha = \cdots = \frac{40}{3}\pi.$$

2. (1.5 puntos) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por la hoja inferior del cono $(z-6)^2 = x^2 + y^2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (puedes ver un dibujo de Q en la figura 2.15).

   Calcula el volumen de Q.

   Solución:

$$v(Q) = \iiint_Q 1\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-\sqrt{x^2+y^2}} 1\, dz\right) dxdy = \iint_D \left(6 - \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\right) dxdy\,.$$

Si llamamos Γ a la intersección de las dos superficies, entonces D es el recinto de $\mathbb{R}^2$ delimitado por la proyección de Γ sobre el plano XY. Puedes ver un dibujo de D en la figura 2.16.

Para calcular D, en las ecuaciones de Γ igualamos $x^2 + y^2$ y obtenemos que Γ está contenida en el plano $z = 4$, y, de aquí, que también lo está en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, cuya proyección en el plano XY es la misma que la de Γ y es $x^2 + y^2 = 4$, es decir, D es el recinto considerado en la pregunta 1. Así

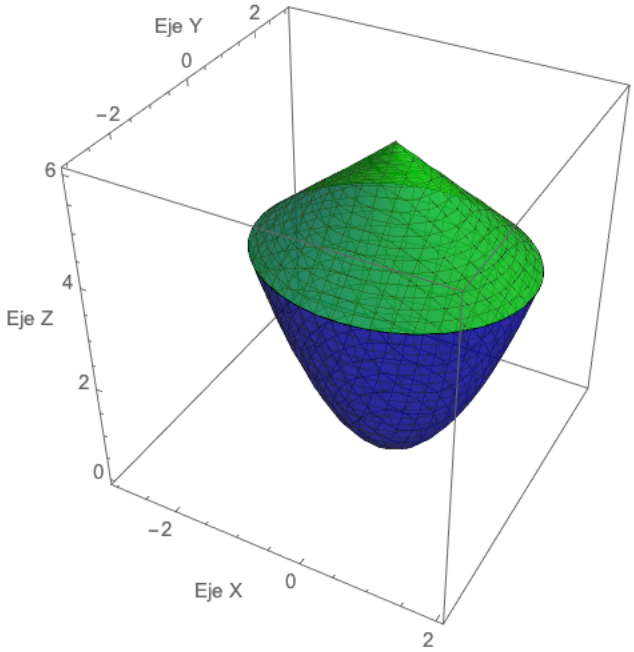


Figura 2.15. Recinto Q correspondiente a la pregunta 2

$$\iint_D \left(6-\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right)dxdy = -\frac{40}{3}\pi + 6a(D) = \frac{32}{3}\pi\,.$$

3. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D de la pregunta 1 que queda por debajo de la curva $3y = x^2$. Calcula la longitud de Γ.

   Solución: La longitud que nos piden es la de la curva dibujada en azul en la figura 2.17.

   Lo más sencillo es calcula la longitud de la curva roja. La longitud pedida será 4π menos la longitud de la curva roja. Sea Γ la curva roja. Vamos a parametrizarla: debemos calcular los puntos de corte entre la circunferencia y la parábola, que son $\left(-\sqrt{3},1\right)$ y $\left(\sqrt{3},1\right)$. Sea $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$[1]. Con esto, una parametrización de Γ es

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}: \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \left(\cos(2t),\operatorname{sen}(2t)\right).\end{aligned}$$

[1]Si no te sabes de memoria este dato, se puede dejar como $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

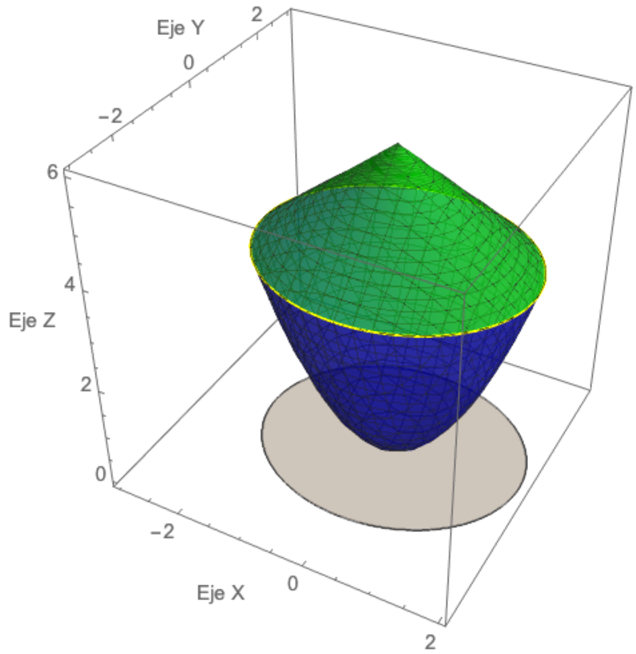


Figura 2.16. Recintos Q y D correspondientes a la pregunta 2

Tenemos que $\|\mathbf{\Phi}'(t)\| = 2$, con esto:

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\, d\ell = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2\, dt = \frac{4}{3}\pi\,,$$

y, así la longitud pedida es $4\pi - \dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{8}{3}\pi$.

4. (1.5 puntos) Sea S la porción del paraboloide considerado en la pregunta 2. Calcula el área de S.

Solución: Tenemos que

$$a(S) = \iint_S 1\, ds\,,$$

así que debemos parametrizar adecuadamente S para poder calcular la integral de superficie. Por definición de S, D es el recinto que ha aparecido en las preguntas 1 y 2. Una parametrización de S es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &: D \to \mathbb{R}^3 \\ &(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)\,. \end{aligned}$$

Si llamamos $g(x, y) = x^2 + y^2$, tenemos que $\|\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Con esto

$$\iint_S 1\, ds = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

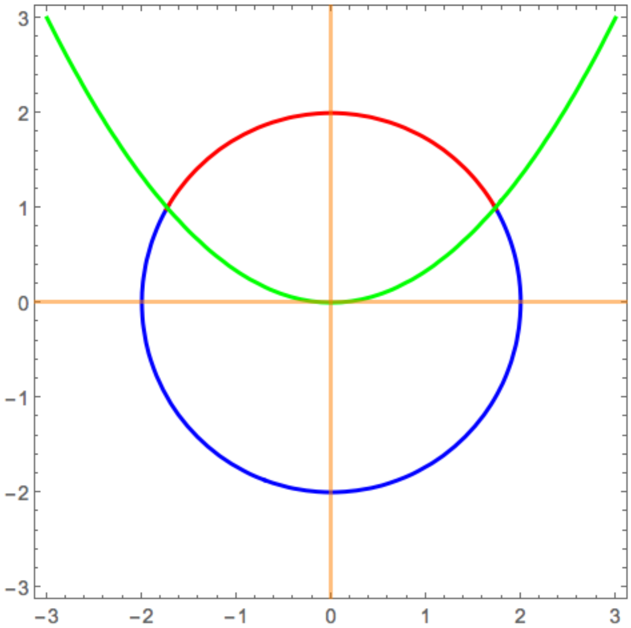


Figura 2.17. Curva correspondiente a la pregunta 3

En la segunda integral hacemos el cambio $x = r\cos\alpha$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $|J| = r$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, 2]$ y nos queda

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\alpha = \ldots = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}\,\pi\,.$$

5. (1.5 puntos) Sea Γ la curva que delimita el recinto D considerado en la pregunta 1, orientada positivamente, y sea

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\left(-\frac{1}{3}\,y\,\sqrt{x^2+y^2}-x^2y+\operatorname{sen}y,\ \frac{1}{3}x\sqrt{x^2+y^2}+xy^2+x\cos y+x\right).$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}\,.$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green. Como la curva se orienta positivamente, tenemos que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=\iint_D \nabla\times\boldsymbol{F}\,dxdy\,.$$

Tenemos que

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2+1\,,$$

con lo cual, podemos usar la pregunta 1:

$$\iint_D \nabla\times\boldsymbol{F}\,dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint_D 1\,dxdy=\frac{40}{3}\pi+a(D)=\frac{52}{3}\pi\,.$$

6. (1.5 puntos) Sea Γ la curva intersección de la porción de cono y el paraboloide considerados en la pregunta 2 (orientada como prefieras). Sea

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(y+1,2x+z^2,-x^2-y^2+2yz\right).$$

Calcula

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}\,.$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Stokes:

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}\ =\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\,d\sigma\,,$$

donde S se puede elegir entre la orción del paraboloide o la porción del cono. Vamos a tomar el paraboloide, ya que lo hemos parametrizado en la pregunta 4. No es necesario comprobar qué sentido del vector normal induce la parametrización $\boldsymbol{T}$, ya que nos no nos han fijado un sentido de recorrido de Γ. Tenemos que

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=(-2y,2x,1)$$

y que

$$\boldsymbol{T}_x\times\boldsymbol{T}_y=(-2x,-2y,1)\,.$$

Con esto

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\,d\sigma=\iint_D(-2y,2x,1)\cdot(-2x,2y,1)\,dxdy=\iint_D 1\,dxdy=a(D)=4\pi\,.$$

7. (1 punto) Sea S la superficie que delimita el recinto Q de la pregunta 2 y sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x - x^2, 2xy, -xz)$ considerando el vector normal interior. Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Solución: Observemos que estamos en condiciones de aplicar el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\iiint_Q \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dxdydz$$

donde el signo negativo viene dado porque se está considerando el vector normal interior. Tenemos que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 2 - x\,.$$

Así

$$-\iiint_Q \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dxdydz = -\iiint_Q 2\, dxdydz + \iiint_Q x\, dxdydz = -2v(Q) + \iiint_Q x\, dxdydz\,.$$

El volumen de Q está calculado en la pregunta 2, mientras que,

$$\iiint_Q x\, dxdydz = \cdots = \int_0^{2\pi} \cos\alpha \int_0^2 \left(6r - r^2 - r^3\right) dr\, d\alpha = K \int_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha = K.0$$

(por lo que no es necesario siquiera calcular la integral en r). Así la integral pedida es $-2v(Q) = -\dfrac{64}{3}\pi$.

2.7. 2 de junio de 2018, evaluación continua, parte 3

1. (*3.5 puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial:

$$t - 2y(t) - 1 + \Big(3t - 6y(t) + 2\Big)y'(t) = 0\,.$$

Calcula, si es posible, una solución que verifique $y(1) = \frac{1}{2}$.

Solución: Para visualizar mejor el cambio de variable adecuado, ponemos unos paréntesis extra en la ecuación:

$$(t - 2y) - 1 + \Big(3(t - 2y) + 2\Big)y' = 0\,.$$

Con esto se ve más fácilmente que el cambio de variable adecuado es $u = t - 2y$; con lo que $y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}u'$ y la ecuación transformada es

$$5u = (3u + 2)u'$$

que es de variables separables. Esta ecuación tiene como solución general

$$\frac{3}{5}u + \frac{2}{5}\log|u| = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deshacemos el cambio y nos queda la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{6}{5}y + \frac{2}{5}\log|t - 2y| = \frac{2}{5}t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Si intentamos imponer la condición inicial $y(1) = \dfrac{1}{2}$ en (2.9) nos quedaría la expresión $\log 0$, que no está definida.

2. (3.5 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2 y(t) + t^2 \cos t \cos y(t) + \Big(t^3 - t^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} y(t)\Big)\, y'(t) = 0\,.$$

Solución: Llamamos

$$M(t,y) := t^2 y(t) + t^2 \cos t \cos y(t)$$
$$N(t,y) := t^3 - t^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} y(t)$$

Tenemos que

$$\frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{2}{t}\,,$$

por lo que la ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(t)$ que la transforma en diferencial exacta. Este factor integrante es una solución de

$$-\frac{2}{t} = \frac{\mu'}{\mu}\,,$$

por lo que podemos tomar $\mu(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante y redefinimos

$$M(t,y) := y(t) + \cos t \cos y(t)$$
$$N(t,y) := t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} y(t)$$

que verifican $M_y - N_t = 0$, así que existe una función potencial $u(x,t)$ tal que $u_t = M$, $u_y = N$. Imponiendo estas dos condiciones llegamos a $u(t,y) = ty + \operatorname{sen} t \cos y$ y la solución de la ecuación diferencial es $u(t,y) = C$, es decir

$$ty(t) + \operatorname{sen} t \cos y(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

3. (3 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Solución: Es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea. Seguimos los pasos para resolver este tipo de ecuaciones: sabemos que la solución es de la forma $y = y_p + C_1 y_{1h} + C_2 y_{2h}$, con y_p una solución particular, y_{1h} e y_{2h} soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

➠ Cálculo de la ecuación diferencial homogénea asociada Para calcular y_{1h} e y_{2h} resolvemos la ecuación polinómica $r^2 - r - 2 = 0$, que tiene como soluciones $r_1 = -1$ y $r_2 = 2$. Con esto, tenemos $y_{1h} = e^{-t}$ e $y_{2h} = e^{2t}$.

➠ Cálculo de una solución particular. Como $q(t) = e^{2t}$, no intentamos hallar y_p de la forma ae^{2t} ya que sería solución de la homogénea. Probamos con $y_p = ate^{2t}$. Imponiendo que esta y_p cumpla la ecuación diferencial, llegamos a que esto es posible si $a = \dfrac{1}{3}\cdot$

➠ Solución general: con lo visto anteriormente, llegamos a

$$y(t) = \frac{1}{3}te^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2.8. 15 de junio de 2018, evaluación de recuperación

1. (*1.5 puntos*) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + (x-y)^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ a\,, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) (0.75 *puntos*) Calcula, si es posible, el valor de a para que f sea continua en $(0,0)$.

   Solución: Estudiamos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: sea $y = mx$ una familia de rectas que pasan por $(0,0)$, tenemos:

$$f(x,mx) = \cdots = \frac{m}{2-m+m^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{m}{2-m+m^2}\,.$$

   Como el límite por rectas depende de la recta, el límite no existe, así que no hay ningún valor de a para el que f sea continua en (0.0).

   (b) (0.25 *puntos*) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ y en $(0,1)$.

   Solución: En el punto (0.0), f no es continua, por lo que no es diferenciable. En el punto $(0,1)$ las derivadas parciales son continuas (se ve a simple vista, no es necesario hacer cálculos), por lo que f es diferenciable.

   (c) (0.25 *puntos*) Calcula la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(0,1)$.

   Solución: Como f es diferenciable en el punto $(0,1)$, la dirección de máximo crecimiento es la del gradiente (normalizado). Dado que $\nabla f(0,1) = (1,0)$ y que $\|\nabla f(0,1)\| = 1$, tenemos que la dirección pedida es $(1,0)$.

   (d) (0.25 *puntos*) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(0,1)$ según la dirección dada por $\boldsymbol{u} = (1,-1)$.

Solución: En primer lugar, se tiene que $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{2}$, por lo que debemos considerar el vector $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Además, como f es diferenciable en $(0,1)$ se verifica que $D_{\boldsymbol{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \boldsymbol{v}$, con lo que se obtiene que $D_{\boldsymbol{v}} f(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (2 *puntos*) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x + y^2$ sobre el recinto D dado por $D = D_1 \cup D_2$, donde

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\right\},$$

(puedes ver un dibujo de D en la figura 2.18).

Ayuda: $\log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 \simeq 0.347$; $e^{-2} \approx 0.135$

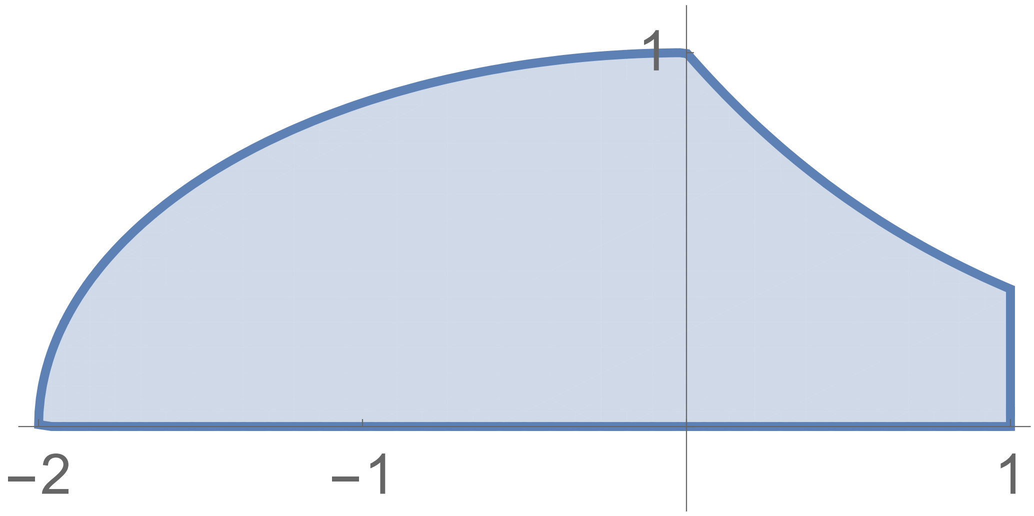


Figura 2.18. recinto correspondiente a la pregunta 2

Solución: En primer lugar observamos que D es cerrado y acotado y f es continua en D por lo que, por aplicación del teorema de Weierstrass prodemos afirmar que f alcanza su máximo y su mínimo en D. Además, $f \in C^2(D)$.

Tenemos que $D = \bar{D} = D^o \cup \partial D$ y esta unión es disjunta.

Vamos por D^o: la ecuación $\nabla f(x,y) = (0,0)$ no tiene solución, por lo que, de aquí, no sacamos candidatos.

Vamos ahora por ∂D: tenemos que estudiar por separado varias partes:

- Los cuatro puntos de corte: P_1, P_2, P_3, P_4.

- Γ_1 la parte de la curva $x^2 + 4y^2 = 4$ que está en D, excluyendo los puntos de corte
- Γ_2 la parte de la curva $y = e^{-x}$ que está en D, excluyendo los puntos de corte
- Γ_3 la parte de la curva $x = 1$ que está en D, excluyendo los puntos de corte
- Γ_4 la parte de la curva $y = 0$ que está en D, excluyendo los puntos de corte

Los cuatro puntos de corte son directamente candidatos: $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = \left(1, \dfrac{1}{e}\right)$, $P_4 = (1, 0)$.

Vamos por Γ_1: debemos considerar $g(x, y) := x^2 + 4y^2 - 4$, con $x \in (-2, 0)$. La ecuación $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ tiene como única solución $(0, 0)$, que no está en Γ_1, luego de aquí no sacamos candidatos. Planteamos la función de Lagrange $L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$. La ecuación $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ no tiene soluciones que, además, verifiquen $x \in (0, 2)$, así que, de aquí, no sacamos candidatos.

Vamos por Γ_2: no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con considerar $h(x) := f(x, e^{-x})$ con $x \in (0, 1)$. La ecuación $h'(x) = 0$ tiene como única solución $x = \dfrac{1}{2}\log 2$, que está en $(0, 1)$, así que de aquí sacamos un candidato $Q_1 = \left(\dfrac{1}{2}\log 2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vamos por Γ_3: no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con considerar $r(y) := f(1, y)$ con $y \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$. La ecuación $r'(y) = 0$ tiene como única solución $y = 0$, que no está en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, así que de aquí no sacamos candidatos.

Vamos por Γ_4: no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta con considerar $s(x) := f(x, 0)$ con $x \in (-2, 1)$. La ecuación $s'(x) = 0$ no tiene soluciones, así que de aquí no sacamos candidatos.

Evaluamos ahora f en los cinco puntos candidatos y concluimos que el mínimo se alcanza en P_1 y el máximo se alcanza en P_3.

3. Sea Γ la curva formada por la unión de la porción de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ que queda por debajo de $y = 1$, y el segmento de la recta $y = 1$ interior a dicha circunfencia (puedes ver un dibujo de Γ en la figura 2.19); orientamos Γ positivamente. Sea
$$\boldsymbol{F}(x, y,) = (-y + 1, x)\,.$$
Calcula
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$
de dos formas

(a) (1.5 *puntos*) Mediante la definición

Solución: Vemos que Γ es una curva regular a trozos, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con Γ_1 la porción adcuada de la circunferencia y Γ_2 la porción adecuada de la recta, así que $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Parametrizamos Γ_1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi_1} : [\pi, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\mapsto (\cos\alpha, 1 + \operatorname{sen}\alpha)\ , \end{aligned}$$

Tenemos que Φ_1 induce el sentido adecuado de recorrido de Γ_1; $\Phi_1'(\alpha) = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$ y, así

$$\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\pi^{2\pi} (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) \cdot (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) d\alpha = \pi\,.$$

Parametrizamos Γ_2:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi_2} : [1, 1] &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, 1)\ , \end{aligned}$$

Tenemos que Φ_2 induce el sentido adecuado de recorrido de Γ_2; $\Phi_2'(x) = (1, 0)$ y, así

$$\int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} (0, x) \cdot (1, 0) dx = 0\,,$$

y, así

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \pi\,.$$

(b) (0.5 *puntos*) Utilizando el teorema de Green

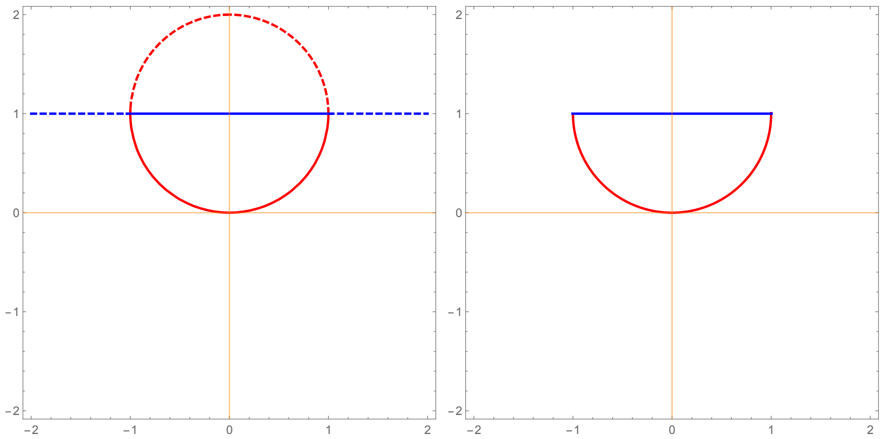


Figura 2.19. Curva Γ correspondiente a la pregunta 3

Solución: Sea D el recinto de $\mathbb{R}^2$ delimitado por Γ, como Γ se recorre en sentido positivo, tenemos que

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \nabla \times \boldsymbol{F}\, dxdy\,.$$

Además $\nabla \times \boldsymbol{F} = 2$, con lo que la integral doble es inmediata y vale π.

4. (a) (0.5 *puntos*) Sea D el círculo de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{3}$ y $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$, calcula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

Solución: Hacemos el cambio de variable $x = r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$ con $\alpha \in [0,2\pi]$ y $r \in \left[0,\sqrt{3}\right]$, el valor absoluto del jacobiano es r y

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{r^2+1}\,r\,dr = \cdots = \frac{14}{3}\pi\,.$$

(b) Sea Q el recinto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por la hoja inferior del hiperboloide $x^2+y^2 = (z-5)^2-1$ y por la hoja superior del hiperboloide $x^2+y^2 = (z-1)^2-1$ y S la superficie que encierra a Q (puedes ver un dibujo en la figura 2.20). Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ y $\boldsymbol{n}$ el vector normal exterior a S. Calcula

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

de dos formas

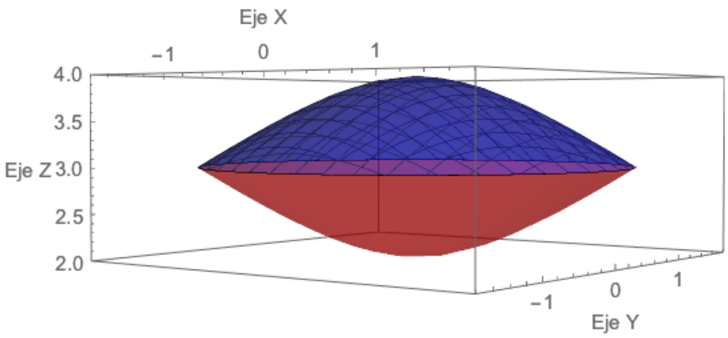


Figura 2.20. Recinto Q y superficie S correspondientes a la pregunta 4

(i) (1.5 *puntos*) Mediante la definición

Solución: S es una superficie regular a trozos. $S = S_1 \cup S_2$ con S_1 la porción adecuada del hiperboloide $x^2+y^2 = (z-5)^2-1$ (en azul) y S_2 la porción adecuada del hiperboloide $x^2+y^2 = (z-1)^2-1$ (en rojo). Vamos a calcular D, el recinto de $\mathbb{R}^2$ que es la proyección de Q sobre el plano xy, ya que este recinto va a aparecer varias veces en el problema. Si llamamos Γ. a la curva intersección de los hiperboloides, entonces D es el recinto delimitado por la proyección de Γ sobre el plano xy. Las ecuaciones de Γ son

$$\begin{cases} x^2+y^2 = (z-5)^2-1 \\ x^2+y^2 = (z-1)^2-1 \end{cases}$$

y de estas ecuaciones se deduce que Γ está también en el plano $z = 3$ y en el cilindro $x^2 + y^2 = 3$, por lo que la proyección de Γ sobre el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ y, en consecuencia, D es el recinto considerado en 4a. Puedes ver un dibujo en la figura 2.21.

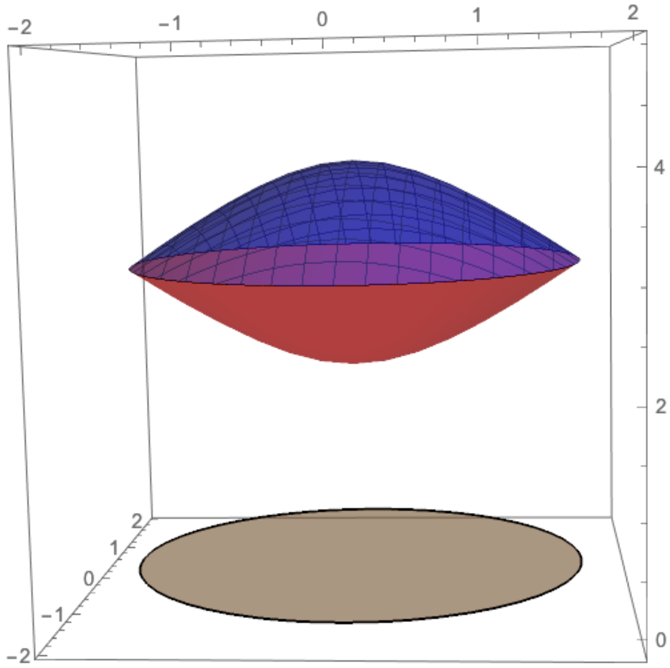


Figura 2.21. Recinto Q, superficie S y proyección correspondientes a la pregunta 4

Parametrizamos S_1: llamamos $g_1(x, y) := 5 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_1} : D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, g_1(x, y)) \ . \end{aligned}$$

El vector normal es

$$\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{T_{1x}} \times \boldsymbol{T_{1y}} = (-g_{1x}, -g_{1y}, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 1 \right) ,$$

tomando, por ejemplo $x = 0$, $y = 0$, vemos que $\boldsymbol{T_1}$ induce el sentido adecuado del vector normal. Además, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T_1}(x, y)) = \left(-y, x, 5 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right)$. Con esto, y llamando A la integral estudiada en 4a

$$\begin{aligned} &\iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n_1} \, d\sigma \\ &= \iint_D \left(-y, x, 5 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 1 \right) dxdy = \\ &= \iint_D \left(5 - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right) = 5a(D) - A = \frac{31}{3}\pi \, . \end{aligned}$$

Parametrizamos S_2: llamamos $g_2(x,y) := 1+\sqrt{x^2+y^2+1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_2} : D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x,y,g_2(x,y)) \ . \end{aligned}$$

El vector normal es

$$\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{T_{2x}} \times \boldsymbol{T_{2y}} = (-g_{2x}, -g_{2y}, 1) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, 1\right) \ ,$$

tomando, por ejemplo $x = 0$, $y = 0$, vemos que $\boldsymbol{T_1}$ induce el sentido opuesto al adecuado del vector normal. Además, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T_2}(x,y)) = \left(-y, x, 1+\sqrt{x^2+y^2+1}\right)$. Con esto, y llamando A la integral estudiada en $4a$

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n_2}\, d\sigma$$

$$= -\iint_D \left(-y, x, 1+\sqrt{x^2+y^2+1}\right)\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, 1\right) dxdy =$$

$$= -\iint_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2+1}\right) = -a(D) - A = -\frac{23}{3}\pi \, .$$

Con esto, la integral pedida vale $\frac{8}{3}\pi$.

(ii) (0.5 *puntos*) Utilizando el teorema de la divergencia

Solución: Como se considera el vector normal exterior, al aplicar el teorema de la divergencia, se tiene

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_Q \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dxdydz \ .$$

Tenemos que $\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z) = 1$, calcularmos ahora $\iiint_Q 1\, dxdydz$:

$$\iiint_Q 1\, dxdydz = \iint_D \int_{1+\sqrt{1+x^2+y^2}}^{5-\sqrt{1+x^2+y^2}} dz\, dxdy = \iint_D \left(4-2\sqrt{1+x^2+y^2}\right) dxdy =$$
$$=4a(D) - 2A = \frac{8}{3}\pi \, .$$

5. (a) (1.25 *puntos*) Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$t^2\cos(y(t))\, y'(t) - 2\,t\,\mathrm{sen}(y(t)) = -1 \, ,$$

usando el cambio de variable $z(t) = \mathrm{sen}(y(t))$. Calcula también, si es posible, todas las soluciones que verifiquen $y(1) = \pi$.

Solución: Con el cambio proporcionado, como $z' = \cos y\, y'$ la ecuación transformada es

$$z' - \frac{2}{t}z = -\frac{1}{t^2} \, ,$$

que es una ecuación diferencial lineal de orden 1, que se resuelve de la manera estándar:

$$z = t^2 \int -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{3t} + Ct^2, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio

$$y(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{3t} + Ct^2\right), \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo ahora $y(1) = \pi$, se llega a $C = -\frac{1}{3}$, es decir

$$y(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{3t} - \frac{1}{3}t^2\right)\,.$$

(b) (0.75 *puntos)* Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 2\,y'(t) - 3\,y(t) = e^{2t}\,.$$

Solución: Es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea. Seguimos los pasos para resolver este tipo de ecuaciones: sabemos que la solución es de la forma $y = y_p + C_1 y_{1h} + C_2 y_{2h}$, con y_p una solución particular, y_{1h} e y_{2h} soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- Cálculo de la ecuación diferencial homogénea asociada Para calcular y_{1h} e y_{2h} resolvemos la ecuación polinómica $r^2 - 2r - 3 = 0$, que tiene como soluciones $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$. Con esto, tenemos $y_{1h} = e^{-t}$ e $y_{2h} = e^{3t}$.
- Cálculo de una solución particular. Como $q(t) = e^{2t}$, intentamos hallar y_p de la forma ae^{2t}. Imponiendo que esta y_p cumpla la ecuación diferencial, llegamos a que esto es posible si $a = -\frac{1}{3}\cdot$
- Solución general: con lo visto anteriormente, llegamos a

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$