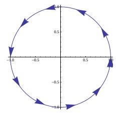
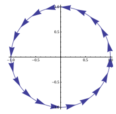
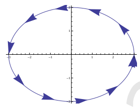
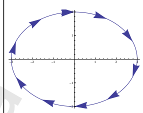
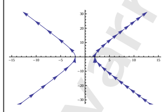
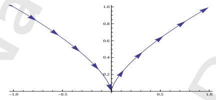
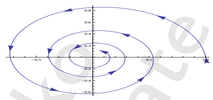
Tema 1: Límites y continuidad en $\mathbb{R}^n$

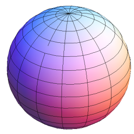
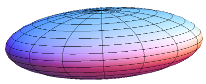
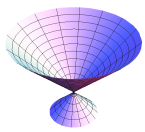
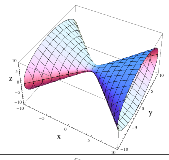
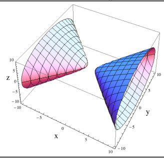
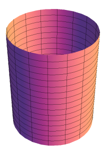
Equivalencias Si $f(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}{\longrightarrow} 0$, entonces:	▪ $\frac{1}{1-f(\boldsymbol{x})} \sim 1+f(\boldsymbol{x})$ ▪ $\operatorname{sen} f(\boldsymbol{x}) \sim f(\boldsymbol{x}) \sim \tan f(\boldsymbol{x}) \sim \operatorname{arc\,sen} f(\boldsymbol{x}) \sim \arctan f(\boldsymbol{x})$ ▪ $1-\cos f(\boldsymbol{x}) \sim \frac{(f(\boldsymbol{x}))^2}{2}$ ▪ $\log(1+f(\boldsymbol{x})) \sim f(\boldsymbol{x})$ ▪ $e^{f(\boldsymbol{x})}-1 \sim f(\boldsymbol{x})$
Orden de infinitud Si $x \to \infty$, los siguientes *infinitos* verifican:	▪ $(\log x)^p \ll x^q \ll a^x \ll x^{kx}\,, \quad a>1\,,\ p,q,k>0.$
Haz de rectas por (x_0,y_0). Haz de parábolas por (x_0,y_0).	▪ $y-y_0=m(x-x_0)$ ▪ $y-y_0=m(x-x_0)^2$

Tema 2: Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

Derivada direccional de f en $\boldsymbol{x_0}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$ unitario:	$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{x_0}) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x_0}+h\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x_0})}{h}$
Diferenciabilidad de f en $\boldsymbol{x_0}$:	$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})-\nabla f(\boldsymbol{x_0})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})}{\lVert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}\rVert}=0$
Plano tangente a f en $\boldsymbol{x_0}$ = (x_0,y_0)	$z=f(\boldsymbol{x_0})+\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x_0})(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x_0})(y-y_0)$
Diferenciabilidad y continuidad	▪ Si f es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$, entonces f es continua en $\boldsymbol{x_0}$
Derivadas parciales continuas y diferenciabilidad	▪ Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,n$, son continuas en $\boldsymbol{x_0}$, entonces f es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$.
Derivada direccional para funciones diferenciables	$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{x_0})=\nabla f(\boldsymbol{x_0})\cdot\boldsymbol{v}\,, \qquad \boldsymbol{v}$ unitario
Ortogonalidad entre el conjunto de nivel y el vector gradiente	▪ Sea $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con $n=2$ ó $n=3$. Si f es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$, entonces el conjunto de nivel que pasa por $\boldsymbol{x_0}$ es ortogonal a $\nabla f(\boldsymbol{x_0})$.
Regla de la cadena	▪ Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ y $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$, entonces $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ y además $J(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x_0})=J\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\big)\cdot J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$
Teorema de Schwartz	▪ Bajo determinadas condiciones de regularidad, las derivadas parciales segundas de f verifican la siguiente igualdad $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x_0})=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x_0})\,.$
Extremos relativos de funciones diferenciables	▪ Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en $\boldsymbol{x_0}$, entonces $\nabla f(\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{0}$.

Matriz simétrica definida positiva, definida negativa y no definida	▪ A es definida positiva si y solo si $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. ▪ A es definida negativa si y solo si $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. ▪ Si A tiene un valor propio $\lambda_i > 0$ y otro valor propio $\lambda_j < 0$, entonces A es no definida.
Caracterización de matriz simétrica definida positiva y negativa. Condición suficiente para matriz simétrica no definida	▪ $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, y $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sus menores principales. Entonces: - A es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. - A es definida negativa si y sólo si $(-1)^i\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. - Si det $(A) \neq 0$ y los menores principales no verifican "$\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$" ni "$(-1)^i\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$", entonces A es no definida.
Criterios de máximo relativo, mínimo relativo y punto de silla	▪ Si $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es definida positiva, f tiene en $\boldsymbol{x_0}$ un mínimo relativo. ▪ Si $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es definida negativa, f tiene en $\boldsymbol{x_0}$ un máximo relativo. ▪ Si $Hf(\boldsymbol{x_0})$ es no definida, f tiene en $\boldsymbol{x_0}$ un punto silla.
Teorema de Weierstrass	▪ Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua en D. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo en D.
Multiplicadores de Lagrange	▪ Los candidatos a extremo relativo de f condicionado a $\boldsymbol{g}$ son los puntos críticos de la función de Lagrange $$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 g_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\boldsymbol{x})$$
Polinomio de Taylor de orden 2 de f en $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$.	▪ $P_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla f(\boldsymbol{x_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^t Hf(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$

Parametrización de algunas curvas en $\mathbb{R}^2$				
Ecuación en cartesianas	Una parametrización	Otra parametrización	Curva	Curva
$x^2+y^2=r^2$	$\begin{cases} x(t)=r\cos t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=r\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t)=r\cos(2t), & t\in[0,\pi] \\ y(t)=r\,\mathrm{sen}(2t), & t\in[0,\pi] \end{cases}$		
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\cos t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} x(t)=a\,\mathrm{sen}\,t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\cos t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$		
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\sec t, & t\in[0,2\pi] \\ y(t)=b\tan t, & t\in[0,2\pi] \end{cases}$			
$y^3=x^2$	$\begin{cases} x(t)=t^3, & t\in\mathbb{R} \\ y(t)=t^2, & t\in\mathbb{R} \end{cases}$			
	$\begin{cases} x(t)=a\,e^{bt}\cos t, & t\in\mathbb{R} \\ y(t)=a\,e^{bt}\,\mathrm{sen}\,t, & t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$(a>0, b<0)$		

Parametrización de algunas superficies en $\mathbb{R}^3$		
Ecuación en implícitas	Una parametrización	Superficie
$x^2+y^2+z^2=r^2$ Esfera	$\begin{cases} x(\alpha,\phi)=r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\alpha, \\ y(\alpha,\phi)=r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\ z(\alpha,\phi)=r\cos\phi, \end{cases}$	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Elipsoide	$\begin{cases} x(\alpha,\phi)=a\;\mathrm{sen}\,\phi\cos\alpha, \\ y(\alpha,\phi)=b\;\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\ z(\alpha,\phi)=c\;\cos\phi, \end{cases}$	
$z^2=x^2+y^2$ Cono	$\begin{cases} x(\rho,\alpha)=\rho\cos\alpha, \\ y(\rho,\alpha)=\rho\;\mathrm{sen}\,\alpha, \\ z(\rho,\alpha)=\rho, \end{cases}$	
$x^2-y^2-z^2=-1$ Hiperboloide de 1 hoja	$\begin{cases} x(\rho,\alpha)=\pm\sqrt{\rho^2-1}, \\ y(\rho,\alpha)=\rho\cos\alpha, \\ z(\rho,\alpha)=\rho\;\mathrm{sen}\,\alpha, \end{cases}$	
$x^2-y^2-z^2=1$ Hiperboloide de 2 hojas	$\begin{cases} x(\rho,\alpha)=\pm\sqrt{\rho^2+1}, \\ y(\rho,\alpha)=\rho\cos\alpha, \\ z(\rho,\alpha)=\rho\;\mathrm{sen}\,\alpha, \end{cases}$	
$a^2=x^2+y^2$ Cilindro	$\begin{cases} x(\rho,\alpha)=a\cos\alpha, \\ y(\rho,\alpha)=a\;\mathrm{sen}\,\alpha, \\ z(\rho,\alpha)=\rho, \end{cases}$	
$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ Paraboloide elíptico	$\begin{cases} x(u,v)=a\,u, \\ y(u,v)=b\,v, \\ z(u,v)=u^2+v^2, \end{cases}$