Estadística, curso 2018-19

Ingeniería en Tecnologías Industriales

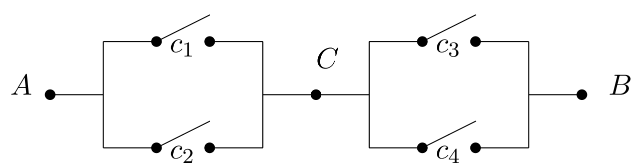
Profesor: Adrián Serrano

Ejercicios del Bloque I

Ejercicio 1.1: Sobre el álgebra de sucesos Sean A, B y C sucesos. Hallar el conjunto que representa a los sucesos definidos por las condiciones siguientes:

- D_1: alguno de los sucesos A o B ocurre.
- D_2: al menos dos de los sucesos A, B o C ocurren.
- D_3: ninguno de los sucesos A o B ocurre.
- D_4: exactamente uno de los sucesos A, B, C ocurre.
- D_5: A y B ocurren pero C no.

Ejercicio 1.2: Sobre el álgebra de sucesos La figura que se presenta a continuación muestra un circuito formado por cuatro conmutadores dispuestos en una serie de dos subcircuitos en paralelo.



Los conmutadores pueden estar abiertos o cerrados, si están cerrados, pasa la corriente, mientras que si están abiertos, no pasa. Designemos por A_i al suceso "el conmutador c_i está cerrado", $i = 1, \ldots, 4$. Expresar en términos de los sucesos A_i, los sucesos:

1. El primer subcircuito está cerrado (la corriente pasa entre A y C).
2. El circuito está cerrado (la corriente pasa entre A y B).
3. El circuito está cerrado y el conmutador c_1 está abierto.
4. Los conmutadores c_1 y c_3 están abiertos y el circuito está abierto.

Ejercicio 1.3: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Plantear un modelo para el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados equilibrados y observar la suma de los resultados. El problema trata de plantear un espacio muestral Ω

y una probabilidad P; pero suele suceder que la elección de Ω influye en la asignación de P. Por ello, conviene meditar bien la situación.

Ejercicio 1.4: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Plantear un modelo para el experimento aleatorio que consiste en lanzar seis veces un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca algún 1? ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan los seis resultados del dado? ¿Cuál es la probabilidad de que no aparezca ningún 2?

Ejercicio 1.5: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Plantear un modelo para el experimento aleatorio que consiste en ordenar en fila, al azar, seis tarjetas numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la última tarjeta sea el número 1?

¿Cuál es la probabilidad de que la última tarjeta sea par? ¿Cuál es la probabilidad de que la primera tarjeta par aparezca en tercer lugar?

Ejercicio 1.6: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Una urna contiene 4 bolas rojas y 3 bolas azules. Plantear un modelo probabilístico para el experimento que consiste en extraer sucesivamente 3 bolas, devolviéndolas a la urna, y observar el color de la última bola. Según ese modelo, ¿cuál es la probabilidad de que la última bola sea azul?

Repetir el ejercicio para extracciones sin devolución.

Ejercicio 1.7: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Plantear un modelo para el experimento aleatorio que consiste en elegir al azar una contraseña de cuatro dígitos del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ donde las letras pueden aparecer tantas veces como se quiera. ¿Cuál es la probabilidad de que empiece por a? ¿Cuál es la probabilidad de que acabe por a? ¿Cuál es la probabilidad de que contenga alguna a? ¿Cuál es la probabilidad de que contenga exactamente una la letra b? ¿Cuál es la probabilidad de que empiece y acabe por vocal?

Repetir el problema en el caso de que las letras de la contraseña no puedan repetirse.

Ejercicio 1.8: Método de cálculo por el complementario Una urna contiene bolas numeradas de 1 a 9. Sacamos bolas al azar, devolviéndolas a la urna una vez anotado el número.

Calcular la probabilidad de que el primer 7 aparezca en la cuarta extracción.

Ejercicio 1.9: Método de cálculo por el complementario Un algoritmo genera dígitos $0, 1, \ldots, 9$, al azar. Si generamos k dígitos, ¿Cuál es la probabilidad, P_k, de que haya al menos dos iguales? Representar gráficamente P_k para $2 \leq k \leq 10$.

Ejercicio 1.10 Cuatro personas entran en una ascensor que está en la planta baja. el ascensor tiene cuatro paradas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera planta no baje nadie? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas bajen en la misma parada? ¿Cuál es la probabilidad de que en alguna planta no baje nadie?

Ejercicio 1.11: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Una caja contiene 4 pilas alcalinas 3 no alcalinas. Plantear un modelo probabilístico para el experimento que consiste en escoger 3 pilas, para colocar en un dispositivo con tres posiciones para las pilas. Según ese modelo, ¿cuál es la probabilidad de que la última pila sea alcalina?

¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean alcalinas?

¿Cuál es la probabilidad de que alguna sea alcalina?

Ejercicio 1.12: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Se van a seleccionar cuatro tipos de uva para hacer un ensayo de vinificación, entre las variedades de tinto, Garnacha, Tempranillo, Cabernet-Sauvignon y Merlot y las de blanco, Albariño, Verdelho, Chardonnay y Moscatel. Plantear un modelo probabilístico para el experimento que consiste en escoger las cuatro variedades para el ensayo.

¿Cuál es la probabilidad de que en el ensayo participen sólo uvas de vino tinto?

¿Cuál es la probabilidad de que en el ensayo participen sólo uvas de vino blanco?

¿Cuál es la probabilidad de que en el ensayo participen dos uvas de vino tinto y dos de vino blanco?

Ejercicio 1.13: Sobre cómo plantear un espacio probabilístico Una fuente de transmisión envía dígitos 0 y 1 al azar y con igual probabilidad. Si la fuente ha enviado 6 dígitos,

¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un cero?

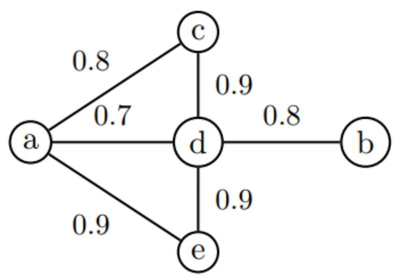
¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 3 ceros?

Ejercicio 1.14 Resolver mediante probabilidad condicionada el siguiente problema resuelto en el tema anterior mediante un modelo estático: una urna contiene bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos bolas al azar. Calcular la probabilidad de que el primer 7 aparezca en la cuarta extracción.

Ejercicio 1.15 De una urna que contiene tres bolas rojas y cuatro azules se extraen tres bolas. Si hay más bolas rojas que azules entre las extraídas, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres bolas rojas?

Ejercicio 1.16 Lanzamos un dado. Si el resultado es menor o igual que 3, lanzamos otra vez el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas sea mayor que 4?

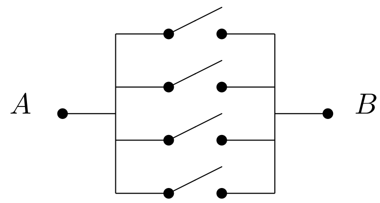
Ejercicio 1.17 Una red de computadores conecta los nodos a y b a través de los nodos c, d y e, como muestra la figura.



Entre cada par de nodos conectados, la conexión puede estar en *on* o en off. En la figura se muestran las probabilidades de que cada conexión esté en *on*, para cada par de nodos adyacentes. Aceptaremos que las conexiones están en *on* o en off independientemente de las demás. Hallar la probabilidad de que los nodos a y b estén conectados en *on*.

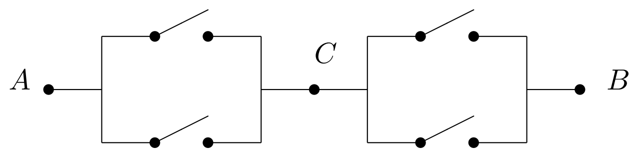
Ejercicio 1.18 Conmutadores en serie y en paralelo.

1. La figura siguiente muestra un circuito con cuatro conmutadores en paralelo. Cada conmutador, con independencia de los demás, deja pasar la corriente con probabilidad p o no deja pasar la corriente con probabilidad $1-p$, tal y como muestra el diagrama.



Se pide hallar la probabilidad de que la corriente pase de A a B.

2. La figura que se presenta a continuación muestra un circuito con dos subcircuitos en serie de dos conmutadores en paralelo cada uno.

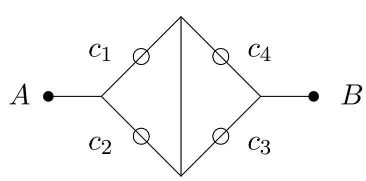


Se pide hallar la probabilidad de que la corriente pase entre A y B.

3. Comparar las probabilidades calculadas en los apartados anteriores en función de p.

Ejercicio 1.19 La siguiente figura muestra un circuito con cuatro conmutadores, c_i, con $1 \leq i \leq 4$.

Un conmutador está cerrado si pasa la corriente entre sus extremos y está abierto si no pasa. El circuito total está cerrado si pasa la corriente entre sus extremos A y B y está abierto si no pasa.



Sea C_i el suceso: " el conmutador c_i está cerrado" y C el suceso " el circuito total está cerrado". Suponemos que los sucesos C_i son independientes y que tienen la misma probabilidad $p = P(C_i)$, con $0 < p < 1$. Se pide:

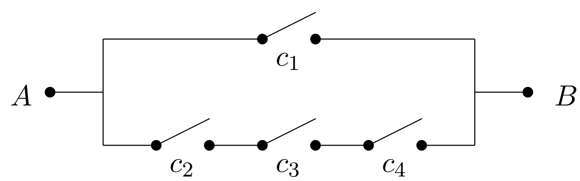
1. Expresar C como unión de sucesos disjuntos y calcular $P(C)$.

2. Calcular $P(C|C_1)$.

3. Calcular $P(C_1|C)$.

Ejercicio 1.20 Consideramos el circuito de la figura siguiente. Los conmutadores están abiertos o cerrados con independencia de los demás. Cada conmutador tiene una probabilidad p de estar abierto. Sean los sucesos:

$$C_i = \text{“el conmutador } c_i \text{ está cerrado ”}, \quad C = \text{“el circuito está cerrado ”}.$$



Se pide calcular $P(C)$ y $P(C_1|C)$.

Ejercicio 1.21 De una urna que contiene 4 bolas azules y una roja, extraemos 2 bolas sin reemplazamiento. Se pide:

1. Encontrar la probabilidad de que la bola roja esté entre las elegidas.
2. Si la primera bola es azul, encontrar la probabilidad de que la bola roja esté entre las elegidas.
3. Sabemos que la última bola es azul, ¿qué probabilidad hay de que la bola roja esté entre las elegidas?

Ejercicio 1.22 Disponemos de dos urnas, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$. La urna $\mathcal{U}_1$ contiene una bola azul y una roja, mientras que la $\mathcal{U}_2$ contiene una bola azul y dos rojas. Extraemos dos bolas sucesivamente de acuerdo con el protocolo siguiente:

1. La primera bola se elige al azar de la urna $\mathcal{U}_1$.
2. Si una bola extraída es azul, la siguiente bola se elige al azar de la urna $\mathcal{U}_1$; si una bola extraída es roja, la siguiente bola se elige de la $\mathcal{U}_2$.
3. Antes de cada nueva extracción, la bola extraída se devuelve a la urna de la que salió.

1. Encontrar la probabilidad de que la última bola sea roja.
2. Encontrar la probabilidad de que la última bola sea roja y de la urna $\mathcal{U}_1$.
3. Si la última bola es roja, ¿qué probabilidad hay de que haya sido elegida de la $\mathcal{U}_1$?

Ejercicio 1.23 Análisis de imágenes En un problema sobre análisis de imágenes de satélite, se quiere asignar un posible cultivo de tres, olivo, pino o cereal, a un punto geográfico. Se sabe que cuando se disponga de una fotografía satélite, el píxel correspondiente a ese punto sólo podrá presentar dos colores: marrón o verde. En la estación del año en que se hizo la foto, la probabilidad de que el píxel sea marrón cuando hay olivo es 0.2, cuando hay pino es 0.1 y cuando hay cereal es 0.7.

En la zona el 60 % del terreno está dedicado a olivo, el 30 % a pino y el 10 % a cereal.

Se pide:

1. Calcular la probabilidad de que el píxel presente color verde.
2. Si el píxel finalmente presenta color verde, ¿qué cultivo asignarías?

Ejercico 1.24 Un radar para detectar exceso de velocidad en una vía de tráfico tiene cierto margen de error. De modo que en el 1 % de los casos en que la velocidad del automóvil se mantiene por debajo del límite de velocidad máxima, el radar puede saltar detectando erróneamente una falta de tráfico. Además también puede fallar no detectando excesos de velocidad, ya que en el 5 % de los casos en que se sobrepasa el límite permitido, el radar no salta. Si un conductor, dad su costumbre, tiene una probabilidad del 40 % de sobrepasar el límite de velocidad, se pide:

1. Calcular la probabilidad de que el conductor sea multado porque el radar detecta exceso de velocidad.
2. Calcular la probabilidad de que si el conductor es multado porque el radar detectó exceso de velocidad, realmente el conductor sobrepasaba la velocidad máxima.