# Tema 2

# Aplicaciones lineales

En este tema vamos a dar una nueva interpretación de una matriz.
Dada una matriz $A$, $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, podemos pensar que esta matriz *transforma* cada vector columna $X \in \mathbb{K}^n$ en un nuevo vector $AX \in \mathbb{K}^m$.
Es decir, la matriz $A$ permite definir una **aplicación** $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que asigna a cada vector $X \in \mathbb{K}^n$, el vector $f_A(X) = AX \in \mathbb{K}^m$.

Una aplicación de un espacio vectorial $V$ en otro espacio vectorial $W$, $f : V \to W$, es una regla que asigna a cada vector $v \in V$ un vector en $W$ que denotamos $f(v)$ y llamamos **imagen** del vector $v$.
Podemos entender también que $f$ *transforma* cada vector $v$ en el vector $f(v)$.

**Ejemplo 2.0.1.** Si $A$ es la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $f_A$ transforma cada vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el vector $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En este caso, $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ produce una **dilatación** en cada vector:

$$f_A(x, y) = (3x, 3y).$$

Observa que la primera columna de la matriz $A$ coincide con $f_A(1, 0)$ y la segunda con $f_A(0, 1)$. De hecho, la imagen de cualquier vector $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ es $xf(1, 0) + yf(0, 1)$:

$$f_A(x, y) = (A^1|A^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xA^1 + yA^2.$$

Podemos comprobar que la aplicación $f_A$ del ejemplo anterior verifica las dos propiedades siguientes:

(a) $f_A(u+v) = f_A(u) + f_A(v)$ para todos $u$, $v \in V$.

(b) $f_A(tv) = t\, f_A(v)$ para todos $v \in V$ y $t \in \mathbb{K}$.

Una aplicación de un espacio vectorial $V$ en otro espacio vectorial $W$, $f : V \to W$, se dice que es **lineal** cuando verifica dos propiedades:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todos $u$, $v \in V$.
- $f(tv) = t\, f(v)$ para todos $v \in V$ y $t \in \mathbb{K}$.

Esto significa que, si conocemos las imágenes de los vectores de una base de $V$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$, ya es suficiente para conocer la imagen de cualquier vector $v \in V$:

$$f(v) = f(t_1u_1 + \cdots + t_nu_n) = f(t_1u_1) + \cdots + f(t_nu_n) = t_1f(u_1) + \cdots + t_nf(u_n).$$

**Ejercicio 2.0.2.** Construye una matriz real $A$, $2 \times 2$ de forma que la aplicación $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ represente un giro en el plano de ángulo $\alpha$ y centro $(0,0)$.
*Ayuda: Como un giro es lineal, basta observar cómo son los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y colocarlos como columnas de $A$.*

**Ejercicio 2.0.3.** Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x+1, y)$ no es lineal. Esta aplicación representa la traslación de cualquier vector $(x,y)$ por el vector $(1,0)$.

El siguiente resultado generaliza lo ocurrido en el ejemplo anterior.

**Teorema 2.0.4.** *Dada cualquier matriz $A$, $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la aplicación $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una aplicación lineal.*

*Demostración.* (a) Si $X^1$ y $X^2$ son vectores columna cualesquiera de $\mathbb{K}^n$, vemos que

$$f_A(X^1 + X^2) = A(X^1 + X^2) = AX^1 + AX^2$$

debido a la propiedad distributiva del producto de matrices respecto de la suma.

Por otro lado, como $f_A(X^1) + f_A(X^2) = AX^1 + AX^2$, podemos asegurar que $f_A(X^1 + X^2) = f_A(X^1) + f_A(X^2)$.

(b) Si $X$ es cualquier vector columna de $\mathbb{K}^n$ y $t \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$f_A(tX) = A(tX) = tAX.$$

Por otro lado, tenemos que

$$tf_A(X) = t(AX)$$

. Es decir podemos asegurar que $f_A(tX) = tf_A(X)$.

$\square$

**Ejemplo 2.0.5.** Vamos a demostrar, de dos formas distintas, que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$ es una aplicación lineal:

- Viendo que la aplicación $f$ verifica las propiedades (a) y (b).

  (a) Si $(x, y, z)$, $(x', y', z')$ son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$, hallamos por un lado
  $f\left((x, y, z) + (x', y', z')\right) =$

  $$= f\left(x + x', y + y', z + z'\right) = \left((x + x') - (y + y'), (y + y') + 2(z + z')\right).$$

  Por otro lado, hallamos $f(x, y, z) + f(x', y', z') =$

  $$= (x-y, y+2z)+(x'-y', y'+2z') = \left((x - y) + (x' - y'), (y + 2z) + (y' + 2z')\right),$$

  que obviamente coincide con la expresión anterior.

  (b) Si $(x, y, z)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ y $t$ un número real cualquiera, hallamos por un lado

  $$f\left(t(x, y, z)\right) = f\left(tx, ty, tz\right) = \left(tx - ty, ty + 2(tz)\right).$$

  Por otro lado, hallamos

  $$tf(x, y, z) = t(x - y, y + 2z) = \left(t(x - y), t(y + 2z)\right),$$

  que coincide con la expresión anterior.

- Viendo que existe una matriz real $A$, $3 \times 2$, de forma que la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ coincide con $f_A$. Para ello, tomando cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vemos que:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es decir, si llamamos $A$ a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $f$ coincide con la aplicación $f_A$. Por el teorema anterior, será lineal.

## 2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

En esta sección vamos a ver que cualquier aplicación de un espacio vectorial $V$ en un espacio vectorial $W$, que sea lineal, se puede expresar mediante alguna matriz.

Para ello, elegiremos una base en el espacio $V$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ahora no podremos poner en las columnas de la matriz $A$ las imágenes de estos vectores, que en general no serán $m$-tuplas. Por ello, elegiremos otra base en el espacio $W$, $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$, y pondremos en las columnas de $A$ las coordenadas de $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ en esta base de $W$.

**Teorema 2.1.1.** *Dada $f : V \to W$, aplicación lineal, fijamos una base de $V$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y una base de $W$, $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Entonces, existe una matriz $A$, $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, tal que, para cada vector $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$,*

$$\left( \begin{array}{c|c|c} A^1 & \dots & A^n \end{array} \right) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix},$$

*coordenadas de $f(v)$ en la base $B_W$.*

*Demostración.* La demostración de este teorema nos dice cómo hallar esa matriz $A$ a partir de la aplicación $f$ dada:

(I) Consideramos la base fijada en $V$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ en el espacio vectorial $V$.

(II) Hallamos sus imágenes por la aplicación $f$: $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$, todos ellos vectores de $W$.

(III) Expresamos cada uno de estos vectores como combinación lineal de la base fijada en $W$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

(IV) Construimos la matriz $A$ poniendo las coordenadas de cada uno de estos vectores en una columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(V) Observemos que esta matriz $A$ es la misma que se obtiene si escribimos las igualdades (III) en forma matricial:

$$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (**)$$

(VI) Comprobamos ahora que, para cada $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$, la columna

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de $f(v)$ en la base $B_W$, es decir, que $f(v) = s_1 w_1 + \cdots + s_m w_m$.

En efecto, como $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$, entonces $f(v) = f(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n)$ y, como $f$ es lineal, tendremos $f(v) = t_1 f(v_1) + \cdots + t_n f(v_n)$, que en forma matricial, da:

$$\begin{aligned} f(v) &= (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \\ &\overset{(**)}{=} (w_1, \ldots, w_m) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}} . \end{aligned}$$

Es decir, las coordenadas de $f(v)$ en la base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ son precisamente la columna que aparece con la llave.

$\square$

**Definición 2.1.2.** La matriz $A$, $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, hallada en el teorema anterior se denomina **matriz asociada a la aplicación $f$ con respecto a la bases $B_V$ y $B_W$.**

**Ejemplo 2.1.3.** Vamos a hallar la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b) + (c - a - d)x + (c + d)x^2$, con respecto a las bases $B_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B_W = \{1, x, x^2\}$.

(I) Hallamos las imágenes por la aplicación $f$ de los vectores de la base de $V = \mathbb{R}_3[x]$:

$$\{f(1) = 1 - x,\ f(x) = 1,\ f(x^2) = x + x^2,\ f(x^3) = -x + x^2\},$$

todos ellos vectores de $W = \mathbb{R}_2[x]$.

(II) Construimos una matriz $A$, $3 \times 4$ que tenga como columnas las coordenadas de estos vectores con respecto a la base $B_W$:

$$A = \left(\begin{array}{r|r|r|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(III) Comprobamos que, para cualquier vector $v = a + bx + cx^2 + dx^3$, se cumple que $f(v)$ tiene como coordenadas en la base $B_W$ la columna que resulta de hacer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ -a + c - d \\ c + d \end{pmatrix},$$

lo cual es cierto.

**Ejercicio 2.1.4.** Utilizando la matriz $A$ hallada en el ejemplo anterior, calcula $f(2 - 5x + 3x^2)$. Comprueba que da el mismo resultado que aplicando directamente la expresión de $f$ sobre el polinomio dado.

## 2.2. Relación entre matrices asociadas a una misma aplicación lineal

Estudiamos ahora qué ocurre si elegimos unas bases distintas en $V$ y $W$ para hallar la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$.

**Teorema 2.2.1.** *Dada una aplicación lineal $f : V \to W$, supongamos que $A$ es su matriz asociada respecto de unas determinadas bases, $B_V$ y $B_W$.*

*Si elegimos ahora unas nuevas bases, $B'_V$ y $B'_W$ relacionadas con las anteriores mediante:*

$$\begin{aligned}(v'_1, \ldots, v'_n) &= (v_1, \ldots, v_n)P \ \ y \\ (w_1, \ldots, w_m) &= (w'_1, \ldots, w'_m)Q\end{aligned}$$

*entonces la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B'_V$ y $B'_W$ es $QAP$.*

*Demostración.* Para cualquier vector $v \in V$, tenemos por un lado $v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$ y por otro, $v' = t'_1v_1 + \cdots + t'_nv_n$, con la relación entre las coordenadas de $v$ dada por

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_n \end{pmatrix}$$

También para $f(v)$ tenemos dos expresiones: $f(v) = s_1w_1 + \cdots + s_mw_m$ y $f(v) = s'_1w'_1 + \cdots + s'_mw'_m$, con la relación

$$\begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \ldots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

Y, además, la matriz $A$ verifica que $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

Buscamos una matriz que relacione las coordenadas $(s'_1, \ldots, s'_m)$ con $(t'_1, \ldots, t'_n)$ y observamos que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1mn} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1mn} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1mn} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz asociada a la aplicación $f$ con respecto a las bases $B'_V$ y $B'_W$ es $QAP$, matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. □

## 2.3. Subespacios vectoriales asociados a $f$

Vamos a definir ahora dos subespacios que aparecen ligados a cualquier aplicación lineal $f : V \to W$ y que pueden calcularse utilizando su matriz asociada.

**Definición 2.3.1.** Dada una aplicación $f : V \to W$, llamamos **imagen de** $f$ al conjunto de vectores $w \in W$ que aparecen como $f(v)$ para algún $v \in V$. Se denota $\operatorname{Im} f$.

No debemos confundir este conjunto con la imagen de un solo vector, $f(v)$. De hecho, el conjunto imagen de $f$ está formado por todas las imágenes de vectores de $V$.

**Teorema 2.3.2.** *Consideramos una base del espacio $V$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces, el conjunto $Im f$ es el subespacio vectorial generado por $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.*

*Demostración.* Los vectores del conjunto $\operatorname{Im} f$ son los que se pueden escribir como $f(v)$ para algún $v \in V$, es decir, como $f(t_1v_1 + \cdots + t_nv_n)$ para algunos valores $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$. Al ser $f$ lineal, esto es lo mismo que $t_1f(v_1) + \cdots + t_nf(v_n)$ para algunos valores $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$.

Por tanto, $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}\langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle$.

□

Si pasamos a coordenadas en una base de $W$, $B_W$, entonces la igualdad anterior se convierte en

$$\mathit{coord}(\text{los vectores de } \operatorname{Im} f) = \mathbb{K}\langle \mathit{coord}(f(v_1)), \ldots, \mathit{coord}(f(v_n))\rangle,$$

precisamente lo que aparece como columnas de la matriz $A$ asociada a $f$ respecto de unas bases $B_V$ y $B_W$.

Por tanto,

$$\mathit{coord}(\text{los vectores de } \operatorname{Im} f) = \mathbb{K}\langle A^1, \ldots, A^n\rangle = \operatorname{Col} A$$

y también:

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Col} A) = \operatorname{rang} A.$$

A la dimensión del subespacio $\operatorname{Im} f$ se le llama también **rango de** $f$. Hemos visto que su valor coincide con el rango de cualquier matriz $A$ asociada a $f$.

**Ejemplos 2.3.3.** (I) Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x, 0)$. Entonces,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \mathbb{R}\langle (1,0), (0,0)\rangle = \mathbb{R}\langle (1,0)\rangle$$

(II) Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (3x, 3y)$. Entonces,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \mathbb{R}\langle (3,0), (0,3)\rangle = \mathbb{R}^2$$

**Ejercicio 2.3.4.** En cada uno de los ejemplos anteriores, halla la matriz $A$ asociada a $f$ respecto de las bases canónicas y comprueba que $\operatorname{Col} A = \operatorname{Im} f$.

En el ejemplo (II) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que cualquier vector del espacio $W = \mathbb{R}^2$ es imagen de algún vector del espacio $V = \mathbb{R}^2$.

Una aplicación lineal $f : V \to W$ se dice **suprayectiva** si cualquier vector $w \in W$ es la imagen de algún $v \in V$, es decir, si se cumple $\operatorname{Im} f = W$.

**Definición 2.3.5.** Dada una aplicación $f : V \to W$, llamamos **núcleo de** $f$ al conjunto de vectores $v \in V$ que verifican $f(v) = 0_W$. Se denota $Ker\, f$.

Considerando la matriz asociada $A$, las coordenadas de los vectores del núcleo en la base $B_V$ verificarán la ecuación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos por el Tema 1 que las soluciones de este sistema forman un subespacio vectorial de dimensión $n-r$, donde $r$ es el rango de la matriz $A$. Por tanto, podemos afirmar que:

El núcleo de cualquier aplicación lineal $f : V \to W$ es un subespacio vectorial de $V$ con $\dim(\ker\, f) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

**Ejercicio 2.3.6.** Halla el núcleo de cada una de las aplicaciones de los ejemplos 2.3.3.

Dada cualquier aplicación lineal $f : V \to W$, el vector $0_V$ siempre está en $\ker\, f$ porque $f(0_V) = 0_W$. Pero $\ker\, f$ puede tener también vectores $v \in V$ con $v \neq 0_V$.

Decimos que la aplicación lineal $f : V \to W$ **no es inyectiva** cuando exista algún vector $v \neq 0_V$ en el núcleo de $f$.

En realidad, basta con que haya dos vectores distintos, $v_1$, $v_2 \in V$ con $f(v_1) = f(v_2)$ para que la aplicación no sea inyectiva. En efecto, si $f(v_1) = f(v_2)$ con $v_1 \neq v_2$, entonces $f(v_1 - v_2) = 0_W$ y aparece un vector $v_1 - v_2 \neq 0_V$ en el núcleo de $f$.

Una aplicación lineal $f : V \to W$ **es biyectiva**
cuando es al mismo tiempo inyectiva y suprayectiva.

Una aplicación lineal biyectiva se llama también **isomorfismo**

Si $f : V \to W$ es biyectiva, cada $w \in W$ es igual a $f(v)$ para un único $v \in V$. Esto supone que se puede definir una nueva aplicación $f^{-1} : W \to V$:

Para cada $w \in W$, definimos $f^{-1}(w)$ como el único vector $v$ que cumple $f(v) = w$.

Esta aplicación se denomina **inversa de** $f$.

**Ejercicio 2.3.7.** Prueba que, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal biyectiva, entonces $f^{-1} : W \to V$ es también una aplicación lineal biyectiva.

Además, si $f : V \to W$ es un isomorfismo, entonces:

(I) $\dim(\ker f) = 0$ y $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim W$.

(II) Por la relación entre las dimensiones que aparecen en (I),

$$\dim V = \dim W.$$

(III) Si $A$ es la matriz $n \times n$ asociada a $f$ respecto de unas bases cualesquiera $B_V$ y $B_W$, entonces:

- $\operatorname{rang} A = n$, por lo que $A$ es una matriz regular.
- La matriz asociada a $f^{-1}$ respecto de las bases $B_W$ y $B_V$ será la inversa de $A$ ya que, con la notación del teorema 2.1.1,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

Los subespacios $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ nos van a permitir encontrar una matriz asociada a cada aplicación lineal $f$ con una forma muy simple, formada únicamente por unos y ceros. Para cada $f$, habrá que buscar las bases adecuadas en las que la matriz sea de ese tipo.

**Teorema 2.3.8.** *Dada $f : V \to W$, aplicación lineal, con $\dim(\operatorname{Im} f) = r$, existen una base $B_V$ y una base $B_W$ respecto de las cuales, la matriz asociada a $f$ es de la forma* $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{m\times n}$,
*donde el bloque $I_r$ es una matriz identidad $r \times r$ y el resto de bloques son bloques formados por ceros.*

*Demostración.* Las bases respecto de las que $f$ tiene como matriz asociada $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, se construyen de la forma siguiente:

(I) Hallamos una base de $\ker f$: Serán $n - r$ vectores linealmente independientes que llamaremos $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$.

(II) Añadimos $r$ vectores hasta obtener una base de $V$, $\{v_1, \ldots, v_r;\ v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ asegurándonos de que esta sea una familia libre.

(III) Hallamos las imágenes de estos vectores, que generan el espacio vectorial $\operatorname{Im} f$:

$$\{f(v_1), \ldots, f(v_r), f(v_{r+1}) = 0_W, \ldots, f(v_n) = 0_W\}$$

(No es necesario calcular los $n - r$ últimos porque es seguro que van a dar cero).

(IV) Como este subespacio tiene dimensión $r$, queda asegurado que $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es una familia libre.

(V) Como primeros vectores de la base $B_W$, tomamos $w_1 = f(v_1), \ldots,\ w_r = f(v_r)$.

(VI) En el caso en que $r < m$, completamos la familia $\{w_1, \ldots, w_r\}$ hasta obtener una base de $W$:

$$\{w_1, \ldots, w_r;\ w_{r+1}, \ldots, w_m\}.$$

Es fácil ver que las bases halladas mediante el procedimiento anterior, verifican que

$$\left\{\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ &\vdots \\ f(v_r) &= w_r \\ f(v_{r+1}) &= 0_W \\ &\vdots \\ f(v_n) &= 0_W \end{aligned}\right.$$

Colocando en columna las coordenadas de estos vectores obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

En el caso en que $r = n$, la dimensión del $\ker f$ sería $n - n = 0$, es decir, $\ker f = 0_V$ y no pondríamos ningún vector en el paso (I). En el paso (II), escribiríamos los vectores de una base cualquiera de $V$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y el resto de los pasos se haría como se indica arriba. $\square$

**Ejemplo 2.3.9.** Consideramos la apliación lineal definida en el Ejemplo 2.0.5,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ definida por } f(x,y,z) = (x-y, y+2z).$$

Cuando las bases de $V$ y $W$ consideradas son las bases canónicas, la matriz asociada a $f$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ y } \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

El núcleo de $A$ lo hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases}$$

Es decir,

$$\ker A = \{(-2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\langle(-2,-2,1)\rangle.$$

(I) Tomamos la base de $\ker f$ como último vector de la que será base de $V = \mathbb{R}^3$: $v_3 = (-2,-2,1)$.

(II) Añadimos vectores hasta obtener una base de $V = \mathbb{R}^3$:

$\{v_1 = (1,0,0);\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (-2,-2,1)\}$ asegurándonos de que esta sea una familia libre y, por tanto, base de $\mathbb{R}^3$.

(III) Hallamos las imágenes de estos vectores, que generan el espacio vectorial $\operatorname{Im} f$:

$$\{f(v_1) = (1,0),\ f(v_2) = (-1,1),\ f(v_3) = (0,0)\}$$

(IV) Es claro que $\{f(v_1) = (1,0), f(v_2) = (-1,1)\}$ es una familia libre.

(V) Tomamos $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (-1,1)$ como primeros vectores de la base que buscamos en $W$.

(VI) En este caso, $\operatorname{Im} f$ coincide con el espacio $\mathbb{R}^2$, luego no hay que añadir ningún vector a la familia $\{w_1 = (1,0),\ w_2 = (-1,1)\}$. Ya es base de $\mathbb{R}^2$.

La matriz asociada a $f$ respecto de las bases $\{v_1 = (1,0,0);\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (-2,-2,1)\}$ y $\{w_1 = (1,0),\ w_2 = (-1,1)\}$ es

$$(I_2|0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2.3.10.** Encuentra la relación que existe entre la matriz $(I_2|0)$ hallada en el ejemplo anterior y la matriz asociada a $f$ con respecto a las bases canónicas.

**Ejercicio 2.3.11.** Dado un isomorfismo o aplicación biyectiva $f : V \to W$, explica cómo será su matriz asociada del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

## 2.4. Operaciones con aplicaciones lineales

Si $f$ y $g$ son aplicaciones lineales de $V$ y $W$, se define la aplicación suma $f+g$ como la aplicación de $V$ en $W$ dada por

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \text{ para todo } v \in V.$$

Es fácil ver que $f+g$ es lineal.

Y se define la aplicación $tf$, para cada $t \in \mathbb{K}$, por

$$(tf)(v) = t\,f(v) \text{ para todo } v \in V \text{ y } t \in \mathbb{K}.$$

También esta aplicación es lineal.

**Teorema 2.4.1.** *Dadas dos aplicaciones lineales $f$, $g$ de $V$ en $W$:*

(I) *La matriz asociada a la aplicación suma $f+g$ respecto de unas bases $B_V$ y $B_W$ será la suma de las matrices asociadas a $f$ y a $g$ con respecto a estas mismas bases.*

(II) *La matriz asociada a la aplicación $tf$ será respecto de unas bases $B_V$ y $B_W$ será el producto por $t$ de la matriz asociada a $f$ con respecto a estas mismas bases.*

Podemos también componer aplicaciones lineales, como se ve en el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.2.** *Dadas las aplicaciones lineales, $f : V \to W$ y $g : W \to U$, fijamos las bases $B_V$, $B_W$ y $B_U$ en los espacios vectoriales $V$, $W$ y $U$, respectivamente. Entonces, se verifica:*

(I) *La aplicación $g \circ f : V \to U$ es lineal.*

(II) *Si $A$ es la matriz asociada a $f$ respecto de las bases $B_V$ y $B_W$ y $B$ es la matriz asociada a $g$ respecto de las bases $B_W$ y $B_U$, entonces la matriz producto $BA$ es la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases $B_V$ y $B_U$.*

*Demostración.*

(I)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(tu + sv) &= g[f(tu + sv)] = g[tf(u) + sf(v)] = tg[f(u)] + sg[f(v)] \\ &= (tg \circ f)(u) + (sg \circ f)(v).\end{aligned}$$

(II) Para cada $v \in V$, denotamos por $X$ sus coordenadas en la base $B_V$. Entonces $AX$ son las coordenadas de $f(v)$ en la base $B_W$ y $B(AX)$ serán las coordenadas de $g[f(v)]$ en la base $B_U$.

Concluimos que $BA$ es la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases $B_V$ y $B_U$.

□

## 2.5. Matriz asocida a un endomorfismo

Estudiamos ahora las aplicaciones lineales $f : V \to W$ en las que el espacio vectorial $W$ es el mismo que el espacio $V$.

Un **endomorfismo** de $V$ es una aplicación lineal del espacio $V$ en sí mismo.

Para hallar la matriz $A$ asociada a un endomorfismo $h : V \to V$, fijaremos **solo una base** de $V$, $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Hablaremos entonces de **matriz asociada al endomorfismo** $h$ **de** $V$ **respecto de la base** $B_V$. Dicha matriz $A$ verificará

$$(h(v_1), \ldots, h(v_n)) = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si se considera otra base de $V$, $B'_V = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, tal que $(v'_1, \ldots, v'_n) = (v_1, \ldots, v_n)P$, la matriz de cambio en el primer espacio vectorial $V$ es $P$, pero la matriz que llamábamos $Q$, de cambio de base en el segundo espacio vectorial, será ahora $P^{-1}$.

La matriz asociada al endomorfismo $h$ en la nueva base $B'_V$ es $P^{-1}AP$.

Las matrices asociadas a un endomorfismo $h : V \to V$ son cuadradas, por lo que podemos preguntarnos si existe alguna base en $V$ respecto de la cual la matriz asociada sea **diagonal**, es decir, de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

para algunos valores $\lambda_1$,...,$\lambda_n$ en el cuerpo $\mathbb{K}$.

*Nota* 2.5.1. Los valores $\lambda_1$,...,$\lambda_n$ de una matriz diagonal no tienen que ser necesariamente distintos. Además, algunos de ellos pueden ser ceros.

No siempre existirá una matriz asociada de este tipo, por lo que tiene sentido la siguiente definición.

Diremos que el endomorfismo $h$ de $V$ es *diagonalizable* si existe alguna matriz asociada a $h$ que sea diagonal.

Veamos cómo tiene que ser una base de $V$, $B_V = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ respecto de la cual la matriz asociada a $h$ sea diagonal. Dicha base se tendrá verificar que

$$(h(v'_1), \dots, h(v'_n)) = (v'_1, \dots, v'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

es decir, cada uno de los vectores de la base tiene que cumplir que $h(v'_i) = \lambda_i v'_i$ para algún $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

**Ejercicio 2.5.2.** Dado un endomorfismo $h : V \to V$, la matriz $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ es diagonal. ¿Por qué no la consideramos ahora como matriz asociada al endomorfismo $h$?

## 2.6. Vectores y valores propios

**Definición 2.6.1.** Dado un endomorfismo $h$ de $V$

(I) Decimos que un número $\lambda \in \mathbb{K}$ es *valor propio de h* si existe algún $v \in V$ (además del $0_V$) con $h(v) = \lambda v$.

(II) Cualquier vector $v \neq 0$ que cumpla $h(v) = \lambda v$ se llamará *vector propio de h* asociado al valor propio $\lambda$.

Para encontrar los valores y vectores propios de un endomorfismo $h : V \to V$, utilizamos la matriz $A$ asociada a alguna base que tomamos como referencia, $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, que consideramos fijo de momento, buscamos vectores $v \in V$ con $h(v) = v$ cuyas coordenadas verifiquen la ecuación:

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow \lambda X - AX = 0 \Longleftrightarrow (\lambda I_n - A)X = 0.$$

Las soluciones $X \in \mathbb{K}^n$ serán las coordenadas, en la base $B_V$, de los vectores $v$ que buscamos. Podemos encontrarnos dos situaciones:

- Que la solución sea solamente la columna $X = 0$, que corresponde al vector $v = 0$. Esto ocurrirá cuando el rango de la matriz $(\lambda I_n - A)$ sea igual a $n$, o lo que es lo mismo, $|\lambda I_n - A| \neq 0$.

  En este caso, el valor $\lambda$ que estamos considerando no es valor propio del endomorifismo $h$.

- Que la solución tenga vectores no nulos, además del $X = 0$, es decir, que forme un subespacio vectorial no nulo. Esto ocurrirá cuando el rango de la matriz $(\lambda I_n - A)$ sea igual a algún $r < n$, o lo que es lo mismo, $|\lambda I_n - A| = 0$.

  En este caso, el valor $\lambda$ que estamos considerando es un valor propio del endomorfismo $h$ y los vectores propios para ese valor $\lambda$ formarán un subespacio vectorial de dimensión $n - r$, que denotaremos por $S(\lambda)$.

Los valores propios, por tanto, son los $\lambda \in \mathbb{K}$ que hacen $|\lambda I_n - A| = 0$.

En la práctica, para hallar los valores y vectores propios de $h$ utilizando la matriz $A$, procederemos de la forma siguiente:

(I) Hallamos el determinante $|\lambda I_n - A|$, que resulta ser un polinomio del tipo

$$p_h(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

denominado **polinomio característico de** $h$ o también **polinomio característico de** $A$, $p_A(\lambda)$.

(II) Resolvemos la ecuación $|\lambda I_n - A| = 0$:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

denominada **ecuación característica de** $h$ o también **ecuación característica de** $A$.

(III) Cada uno de los valores $\lambda \in \mathbb{K}$ obtenidos en (II) es un valor propio de $h$ ó **valor propio de** $A$. Para cada uno de ellos, resolvemos el sistema $(\lambda I_n - A) = 0$, que dará siempre como solución un subespacio vectorial de dimensión $n - \operatorname{rang}(\lambda I_n - A)$, denominado **subespacio fundamental de** $A$ **asociado al valor propio** $\lambda$.

(IV) Los vectores de $V$ cuyas coordenadas son las soluciones de (III) forman también un subespacio vectorial denominado **subespacio fundamental de** $h$ **asociado al valor propio** $\lambda$, que se denota $S(\lambda)$.

*Nota* 2.6.2. Dado que el polinomio característico de $h$ se ha definido utilizando la matriz $A$, podemos preguntarnos si ese polinomio saldría distinto al elegir otra matriz asociada a $h$, todas ellas de la forma $P^{-1}AP$, para alguna matriz $P$ regular. Veamos cuál sería el polinomio característico calculado con una de esas matrices:

$$\begin{aligned}&|\lambda I_n - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}I_nP - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda I_nP - P^{-1}AP| = \\ &= |P^{-1}(\lambda I_n - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I_n - A| \cdot |P| = |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - A|,\end{aligned}$$

es decir, el mismo que con la matriz $A$, luego no hay problema en utilizar una matriz u otra.

**Ejemplo 2.6.3.** Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $h(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$. Para encontrar sus valores y vectores propios, consideramos la matriz $A$ asociada a $h$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$B_V = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}, \text{ que es } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(I)

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2\lambda.$$

(II) Resolvemos la ecuación $|\lambda I_3 - A| = 0$: $(\lambda-3)^2\lambda = 0$, o lo que es lo mismo, hallamos las raíces del polinomio característico: $\lambda = 3$ (raíz doble) y $\lambda = 0$.

(III)
- Para $\lambda = 3$, resolvemos el sistema $(\lambda I_3 - A)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que da como soluciones $\left\{ \begin{array}{l} x = y - z \\ y = y \\ z = z \end{array} \right.$ ó $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Para $\lambda = 0$, resolvemos el sistema $(\lambda I_3 - A)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que da como soluciones $\left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{array} \right.$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(IV) Los subespacios fundamentales del endomorfismo $h$ son:

- $S(3) = \mathbb{R}\langle(1,1,0), (-1,0,1)\rangle$, formado por todos los vectores propios de valor propio $\lambda = 3$, además del vector $(0,0,0)$.
- $S(0) = \mathbb{R}\langle(1,-1,1)\rangle$, formado por todos los vectores propios de valor propio $\lambda = 0$, además del vector $(0,0,0)$.

**Ejercicio 2.6.4.** Observa que $\lambda = 0$ puede ser uno de los valores propios de un endomorfismo $h$. En ese caso, comprueba que el subespacio fundamental $S(0)$ coincide exactamente con el núcleo de $A$.

¿Puede ser $\lambda = 0$ valor propio de un endomorfismo inyectivo?

En el ejemplo anterior, podemos construir una matriz del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ formada únicamente por vectores propios:

$$B'_V = \{v'_1 = (1,1,0),\ v'_2 = (-1,0,1),\ v'_3 = (1,-1,1)\}.$$

Como $h(v'_1) = 3v'_1$, $h(v'_2) = 3v'_2$ y $h(v'_3) = 0v'_3$, la matriz asociada a $h$ con respecto a esta base será:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matriz diagonal.}$$

La relación de esta matriz $D$ con $A$ viene dada por $D = P^{-1}AP$, donde $P$ es la matriz de cambio de base de $B_V$ a $B'_V$, que aparece al escribir la expresión:

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.6.5.** Se dice que una matriz $A$, $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es **diagonalizable** si existe una matriz regular $P$, $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, tal que $P^{-1}AP = D$, matriz diagonal.

La matriz $A$ del ejemplo anterior es diagonalizable según esta definición. Pero no todas lo son.

**Ejemplo 2.6.6.** Veamos si la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es o no diagonalizable. Esta es la matriz asociada en base canónica al endomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y, y)$$

Sus valores propios son las soluciones de

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Aparece solo el valor propio $\lambda = 1$, que es raíz doble del polinomio característico.

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$ se calculan resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que da como soluciones el subespacio fundamental $S(1) = \mathbb{R}\langle(1,0)\rangle$.

Como no podemos encontrar dos vectores propios de $h$ linealmente independientes, no es posible dar una base de $\mathbb{R}^2$ en la que la matriz asociada a $h$ sea diagonal.

Dicho de otra forma, no existe matriz regular $P$ con $P^{-1}AP = D$, matriz diagonal.

Los siguientes resultados nos ayudarán a saber si un endomorfismo $h$, o bien su matriz $A$ asociada en alguna base, es o no diagonalizable. Para todos ellos:

Consideramos un espacio vectorial $V$ de dimensión $n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

**Lema 2.6.7.** *Supongamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es una raíz con multiplicidad $s$ del polinomio característico de $h$. Entonces, la dimensión del subespacio fundamental $S(\lambda)$ es menor o igual que $s$.*

**Teorema 2.6.8.** *Dado un endomorfismo $h$ de $V$, llamamos a sus valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, todos ellos distintos entre sí.*

*Tomamos una base de vectores propios de cada subespacio fundamental:*

$$\{v_{11}, \ldots, v_{1m_1}\} \text{ en } S(\lambda_1); \ldots; \{v_{k1}, \ldots, v_{km_k}\} \text{ en } S(\lambda_k).$$

*Entonces, la familia de vectores propios que resulta al unir todas ellas es libre.*

Al ser libre, esta familia podrá formar parte de la base de vectores propios que buscamos. El problema es que no siempre tendremos suficientes vectores propios de $h$ linealmente independientes para formar una base de $V$:

| |
|---|
| La familia libre $\{v_{11}, \ldots, v_{1m_1}; \ldots ; v_{k1}, \ldots, v_{km_k}\}$ que aparece en el teorema anterior será base de $V$ solo cuando $m_1 + \cdots + m_k$ sea igual a $n$. |

**Teorema 2.6.9.** *Supongamos que*

$$dim\, S(\lambda_1) + \cdots + dim\, S(\lambda_k) = n.$$

*Entonces, existen $n$ vectores propios de $h$ linealmente independientes y, por tanto, $h$ es diagonalizable.*

*En caso contrario,*

$$dim\, S(\lambda_1) + \cdots + dim\, S(\lambda_k) < n$$

*En este caso, no podemos hallar $n$ vectores propios de $h$ linealmente independientes y, por tanto, $h$ no es diagonalizable.*

Como consecuencia de este teorema tenemos que,

**Proposición 2.6.10.** *Si un endomorfismo $h$ de $\mathbb{K}^n$ tiene $n$ valores propios distintos, entonces $h$ siempre es diagonalizable.*