EXAMEN CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
26 de enero de 2017

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales e incógnitas x, y, z, t:
$$\begin{cases} ax - ay + az - at = -a \\ -ax + y - az + at = -1 \\ ax + (2-a)y + az + (2-a)t = a \end{cases}$$

   (I) (*1 pto.*) Estudia la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

   (II) Particularizamos el sistema anterior para el valor $a = 1$ del parámetro:
$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ -x + y - z + t = -1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$
   Llamamos A a la matriz de coeficientes y B al vector columna formado por los términos independientes de dicho sistema.

   (a) (*0,3 ptos.*) Obtén una base del subespacio $\mathrm{C}ol(A)$.

   (b) (*0,7 ptos.*) Calcula la proyección ortogonal de B sobre $\mathrm{C}ol(A)$.

   (c) (*1,3 ptos.*) Halla la solución aproximada de norma mínima del sistema.

2. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que:
   - $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 = z - x\}$,
   - $f(1,\, 0,\, 1) = (0,\, 1,\, 1)$,
   - el vector $(0,\, 0,\, 1)$ es un vector propio de valor propio $a \neq 0$.

   (I) (*0,6 ptos.*) Escribe A, la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.

   (II) (*1,4 ptos.*) Determina, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, cuándo f es diagonalizable.

   (III) (*1,4 ptos.*) Cuando f sea diagonalizable, halla una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

3. Dada $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{(t-1)e^t}{t^2+1}\, dt$,

   (I) (*2,2 ptos.*) halla los máximos y mínimos relativos de $F(x)$. Estudia el crecimiento y decrecimiento de $F(x)$

   (II) (*1,1 ptos.*) Halla el límite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{e^{x^2} - 1}$.