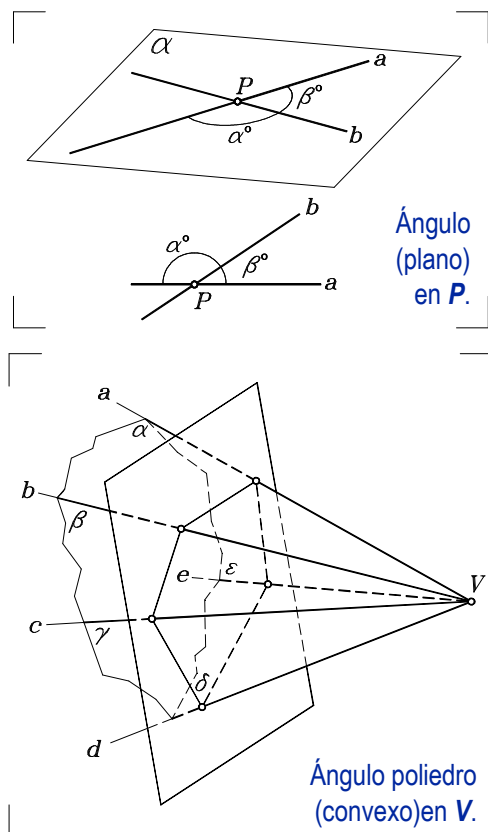


**Tema 12: Relaciones angulares. Medida y construcción.**

1. Operaciones de **medida de ángulos** en el Sistema Diédrico
  - A. Ángulo entre dos rectas
  - B. Ángulo entre recta y plano
  - C. Ángulo de dos planos
2. Operaciones de **construcción** de rectas y planos **con condiciones angulares**
  - A. Rectas que forman un ángulo con un plano dado
  - B. Planos que forman un ángulo con otro dado
  - C. Rectas que forman un ángulo con otra dada
  - D. Planos que forman un ángulo con una recta dada

0

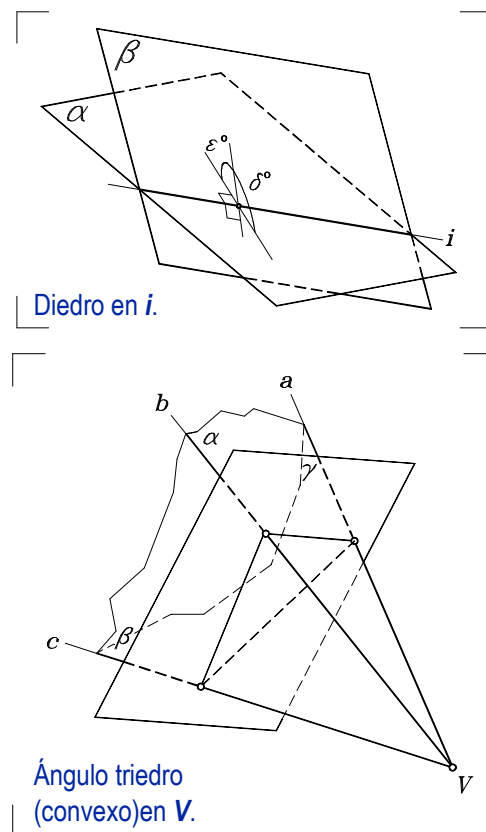


Ángulo  
(plano)  
en  $P$ .

Ángulo poliedro  
(convexo) en  $V$ .

**ÁNGULO  
DIEDRO  
TRIEDRO  
POLIEDRO**

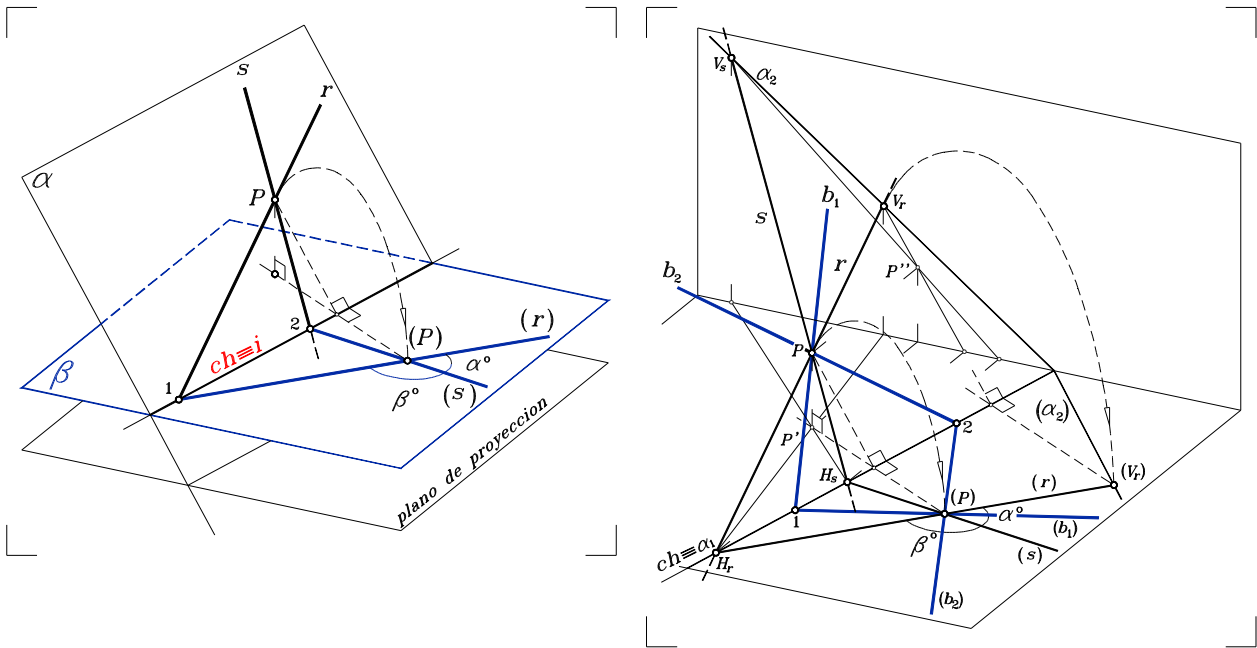
Definición.  
Elementos.  
Designación.  
Tipos.  
Bisectriz.  
Bisector.



Diedro en  $i$ .

Ángulo triedro  
(convexo) en  $V$ .

## ÁNGULO DE DOS RECTAS Posiciones relativas. Redefinición de ángulo.



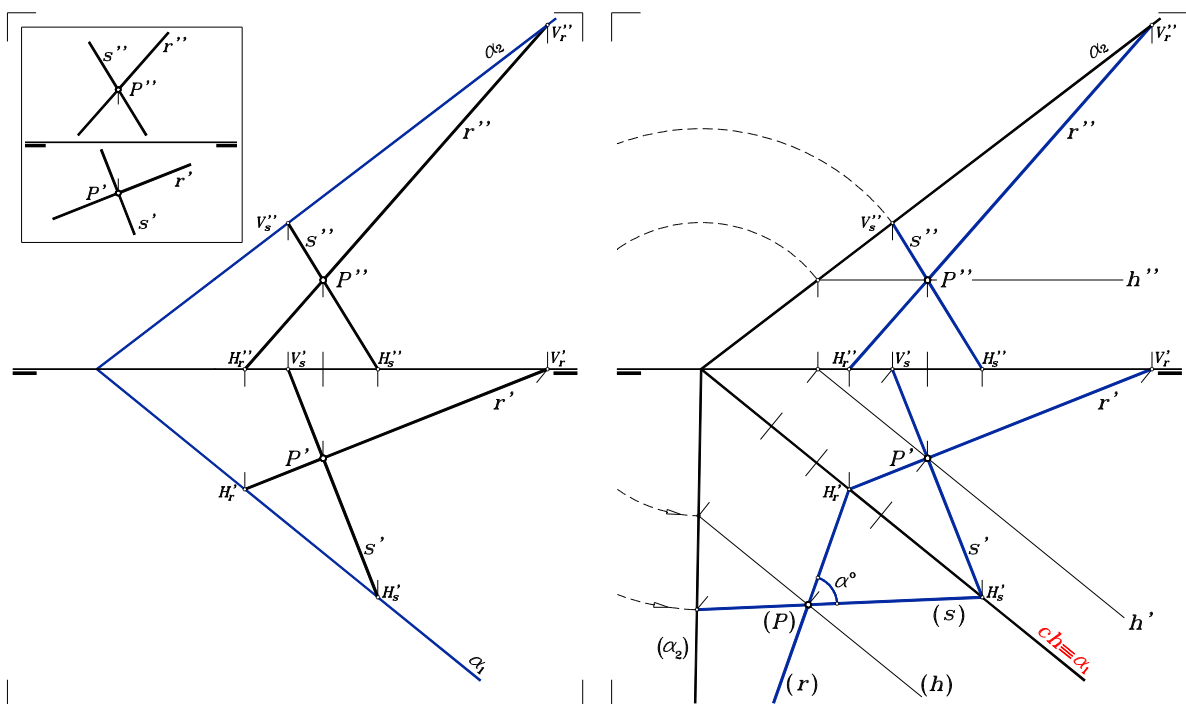
Ángulo de dos rectas que se CORTAN

**Medida de ángulos.**

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE DOS RECTAS



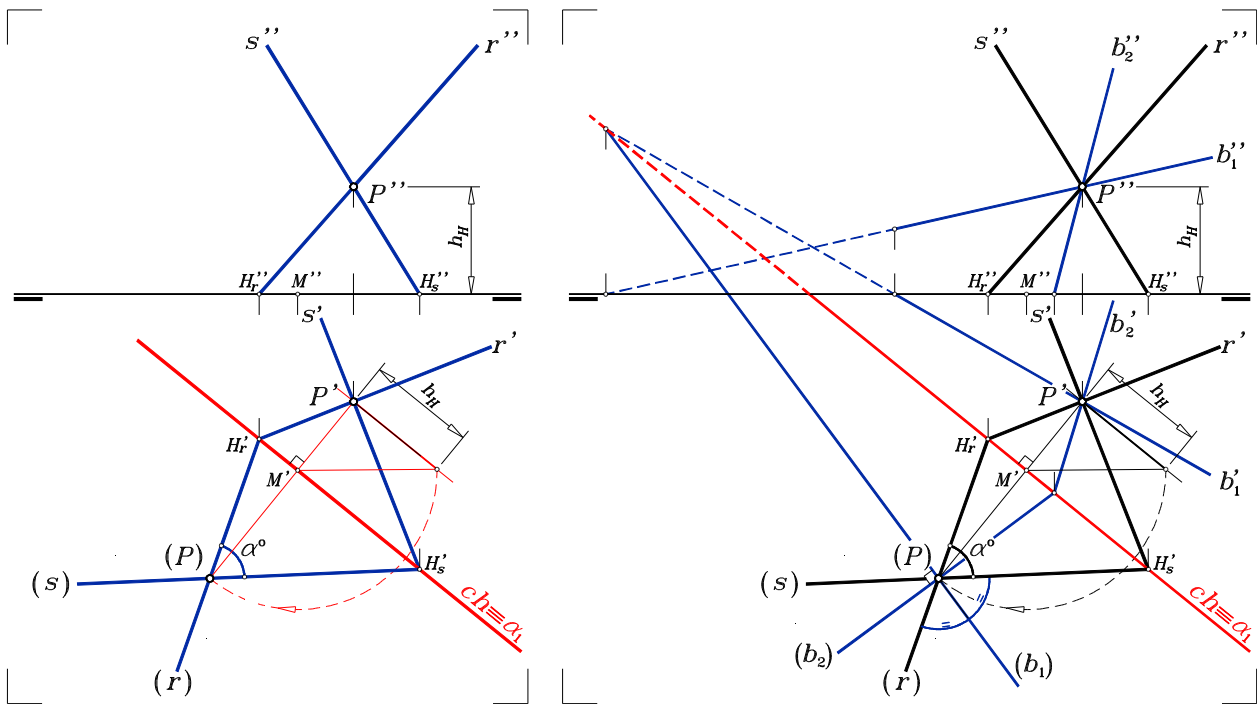
Operaciones generales. Abatimientos.

**Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.**

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE DOS RECTAS



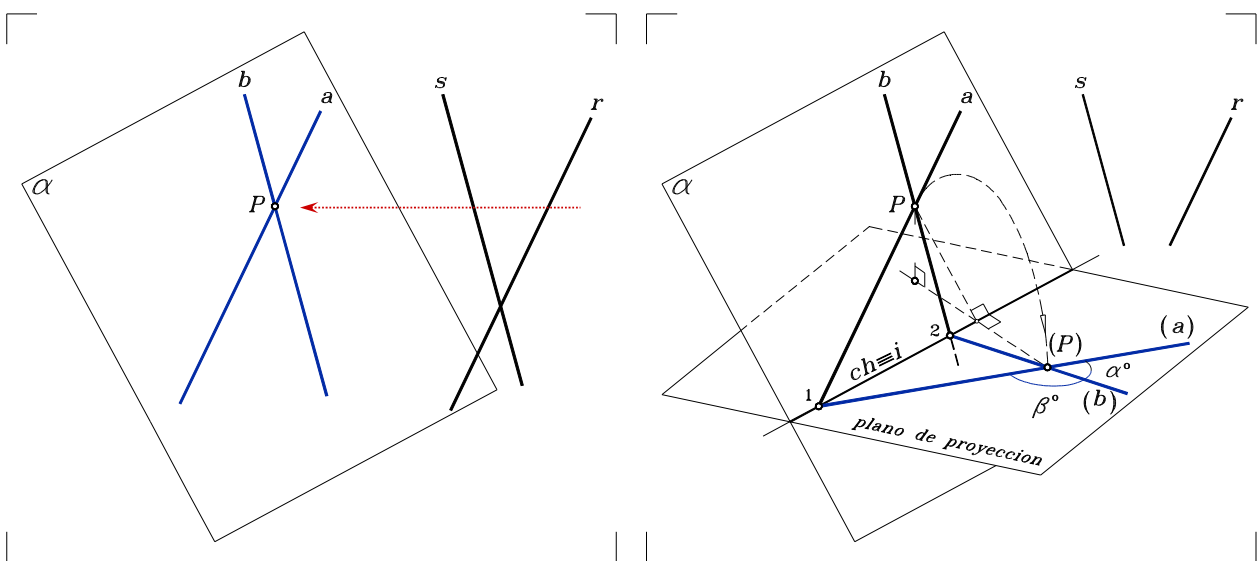
Operaciones reducidas. Trazado de bisectrices.

Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

ÁNGULO DE DOS RECTAS Posiciones relativas. Redefinición de ángulo.



Ángulo de dos rectas que se CRUZAN

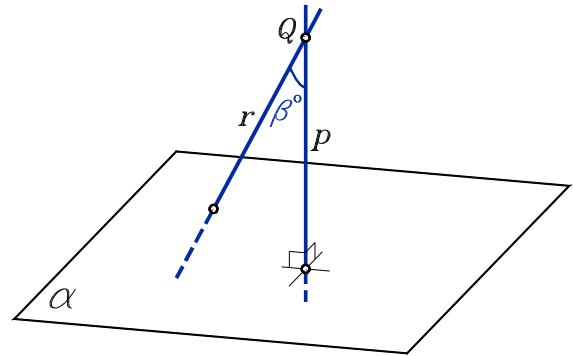
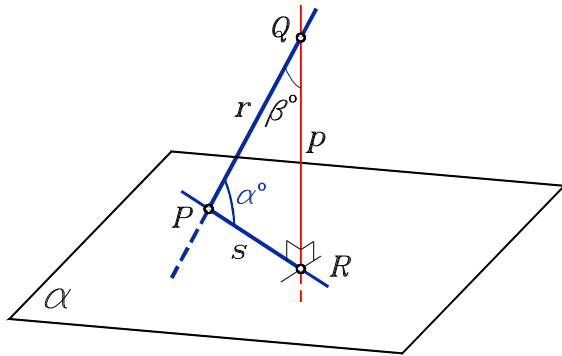
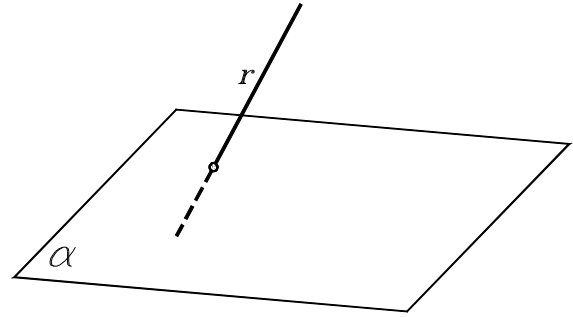
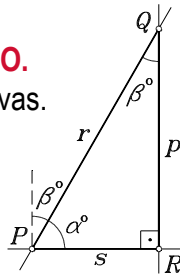
Medida de ángulos.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE RECTA Y PLANO.

Posiciones relativas.  
Definición.



Magnitud y posición

- 1)  $Q$  en  $r$
- 2)  $p$
- 3)  $R$
- 4)  $P$
- 5)  $s = PR$
- 6)  $\alpha^\circ$  en  $P$

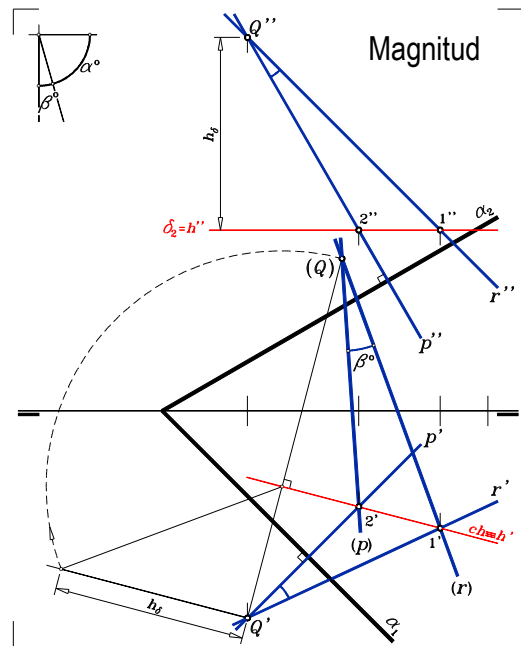
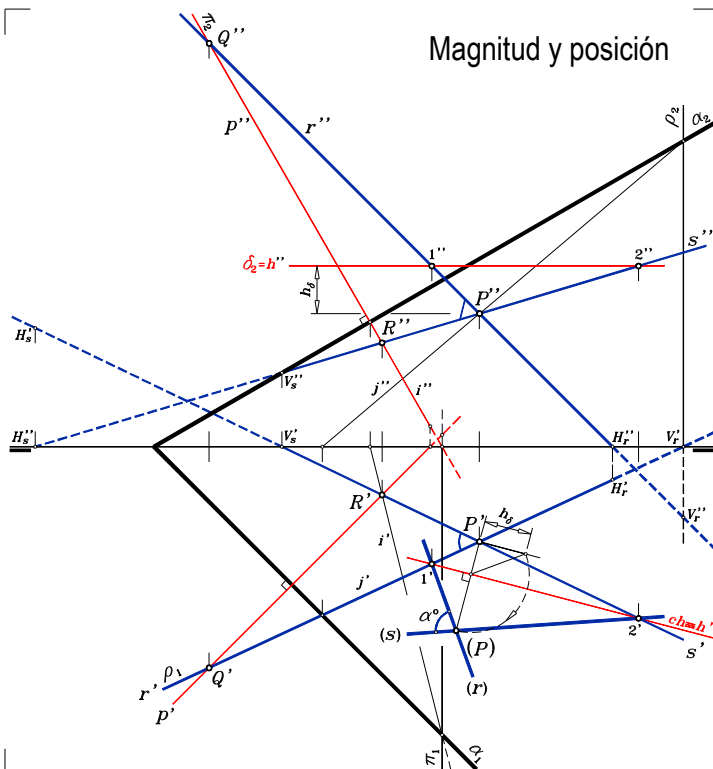
Magnitud

- 1)  $Q$
- 2)  $p$
- 3)  $\beta^\circ$  en  $Q$

## Medida de ángulos.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]



## ÁNGULO DE RECTA Y PLANO

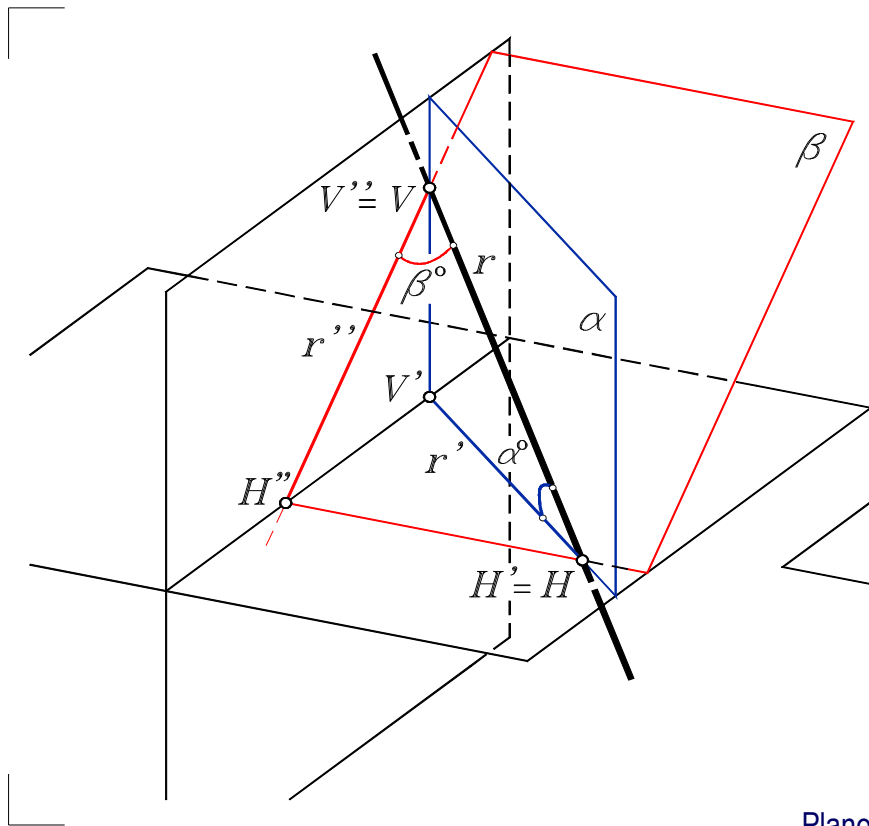
Operaciones generales

## Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE RECTA Y PLANO DE PROYECCIÓN



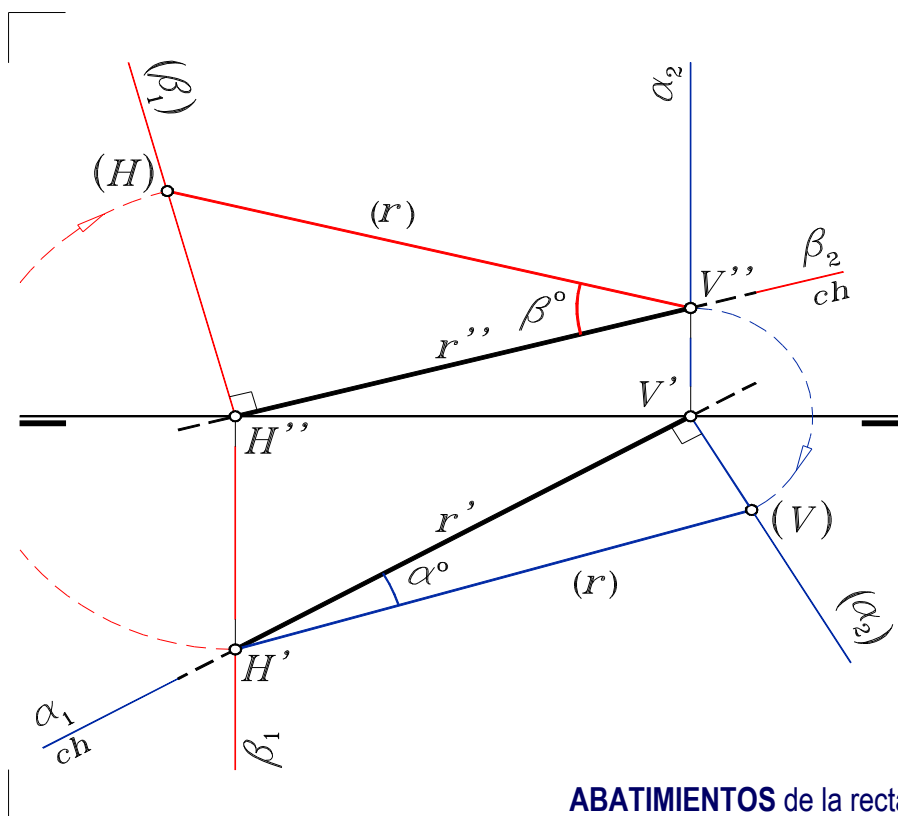
Planos proyectantes de la recta

Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE RECTA Y PLANO DE PROYECCIÓN



ABATIMIENTOS de la recta en sus proyectantes

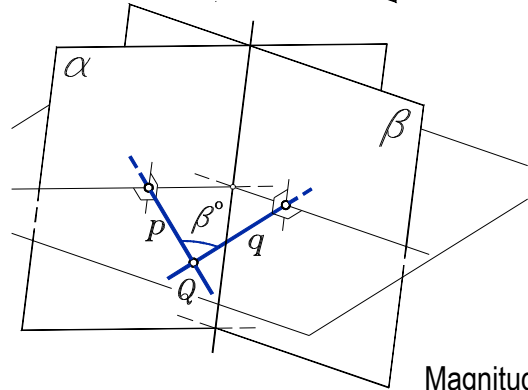
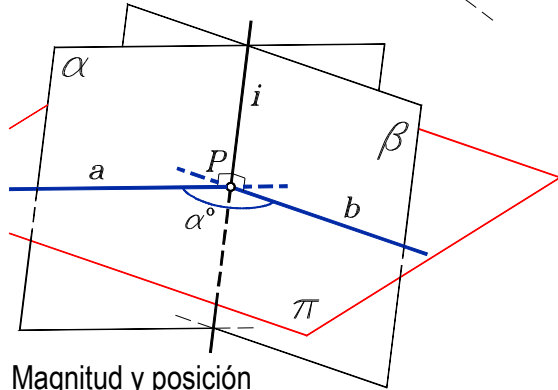
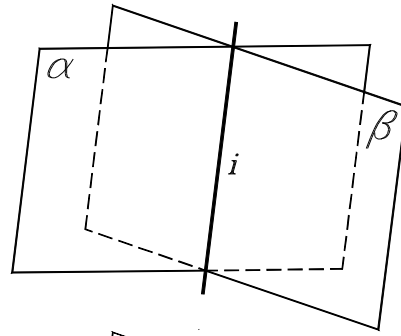
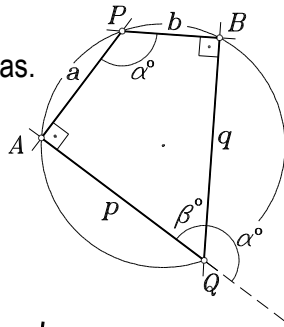
Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE DOS PLANOS

Posiciones relativas.  
Definición.



Magnitud y posición

- |                  |                          |
|------------------|--------------------------|
| 1) $i$           | 4) $a$                   |
| 2) $P$ en $i$    | 5) $b$                   |
| 3) $\pi$ por $P$ | 6) $\alpha^\circ$ en $P$ |

Magnitud

- |        |                         |
|--------|-------------------------|
| 1) $Q$ | 3) $q$                  |
| 2) $p$ | 4) $\beta^\circ$ en $Q$ |

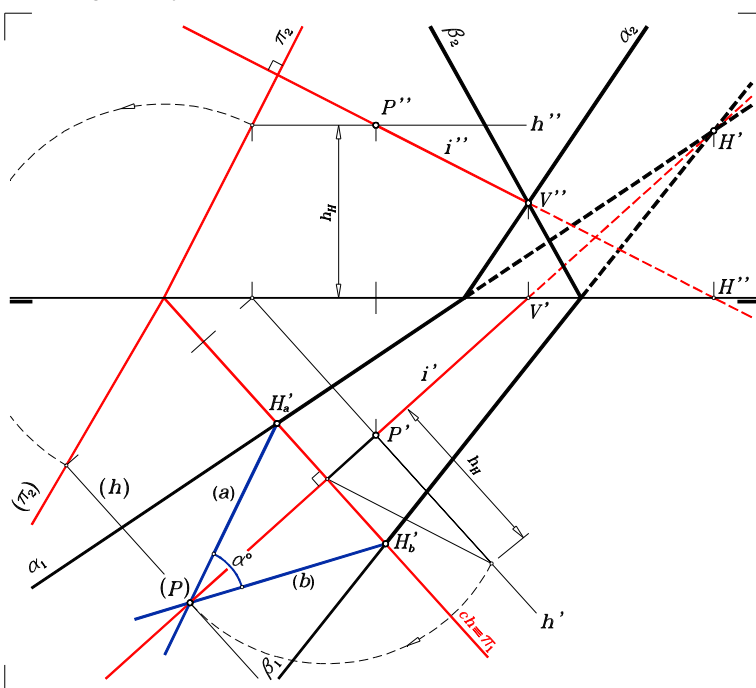
### Medida de ángulos.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

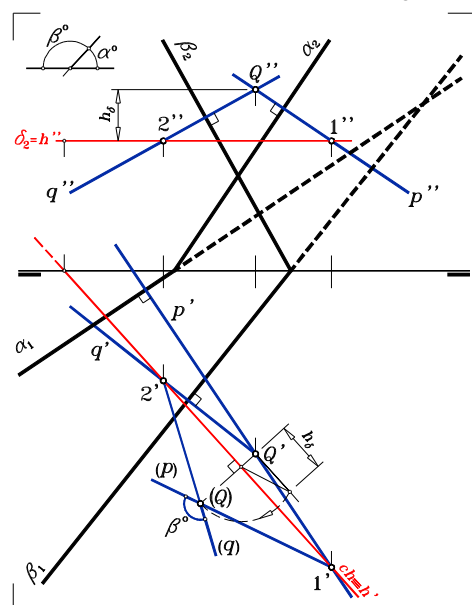
[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE DOS PLANOS

Magnitud y posición



Magnitud



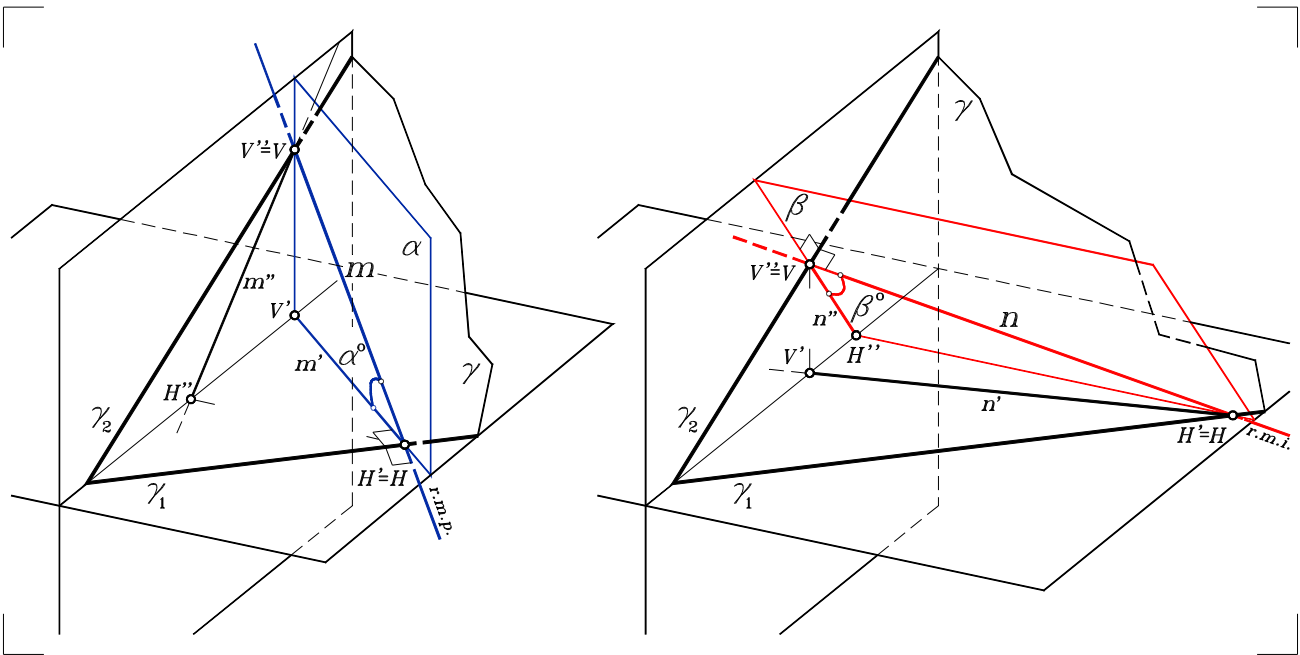
Operaciones generales. Abatimientos.

### Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE UN PLANO OBLICUO CON LOS DE PROYECCIÓN



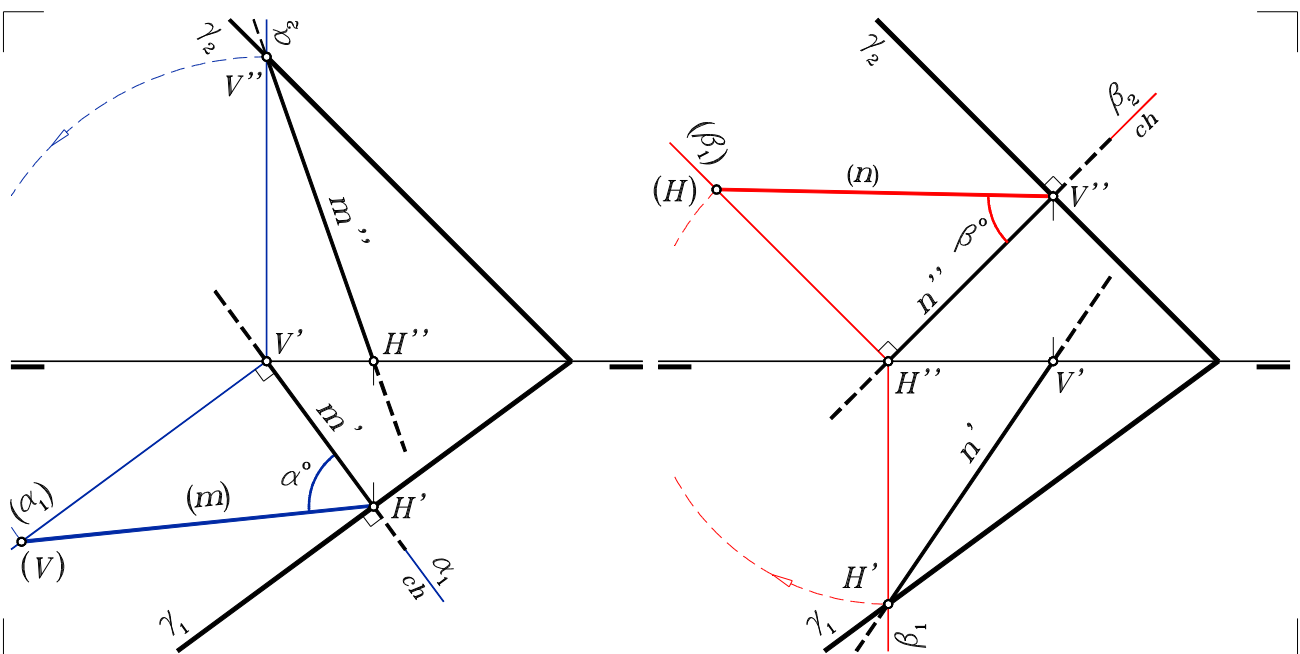
Rectas de máxima pendiente e inclinación del plano

Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]

## ÁNGULO DE UN PLANO OBLICUO CON LOS DE PROYECCIÓN



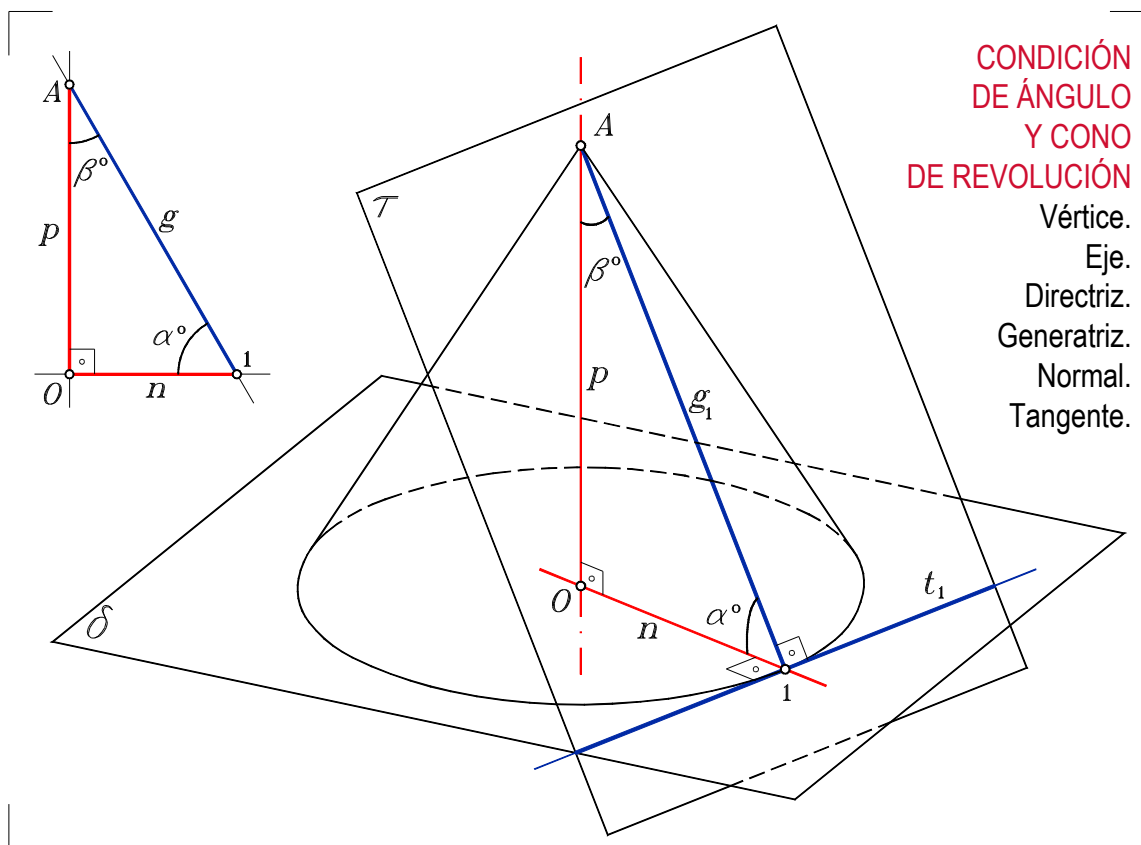
ABATIMIENTOS

de las rectas de máxima pendiente e inclinación del plano, en sus proyectantes

Operaciones de medida de ángulos en el Sistema Diédrico.

Dos rectas. Recta y plano. Dos planos.

[12.1 MEDIDA DE ÁNGULOS]



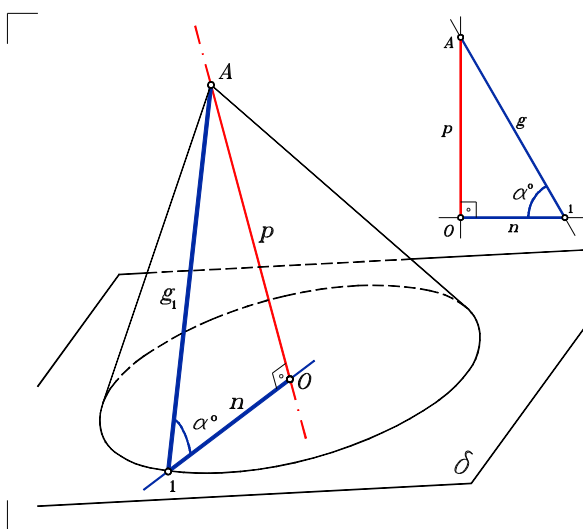
### Construcciones con condiciones de ángulos.

Relaciones angulares en el CONO DE REVOLUCIÓN.

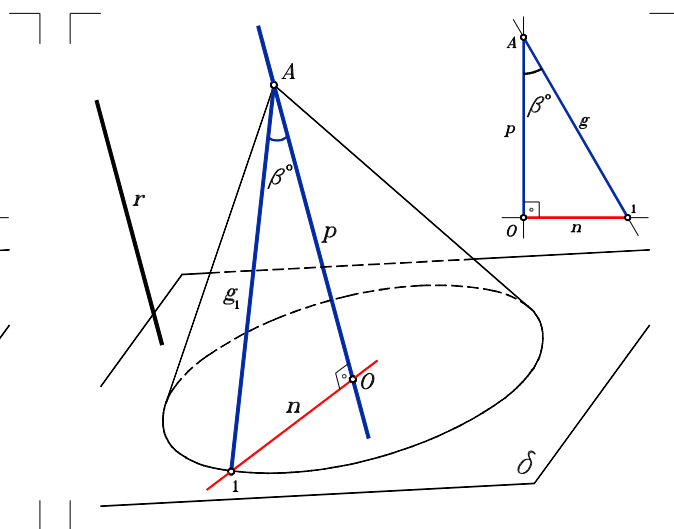
[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

Lugar geométrico de las RECTAS que forman determinado ángulo:

Con un plano.



Con otra recta.



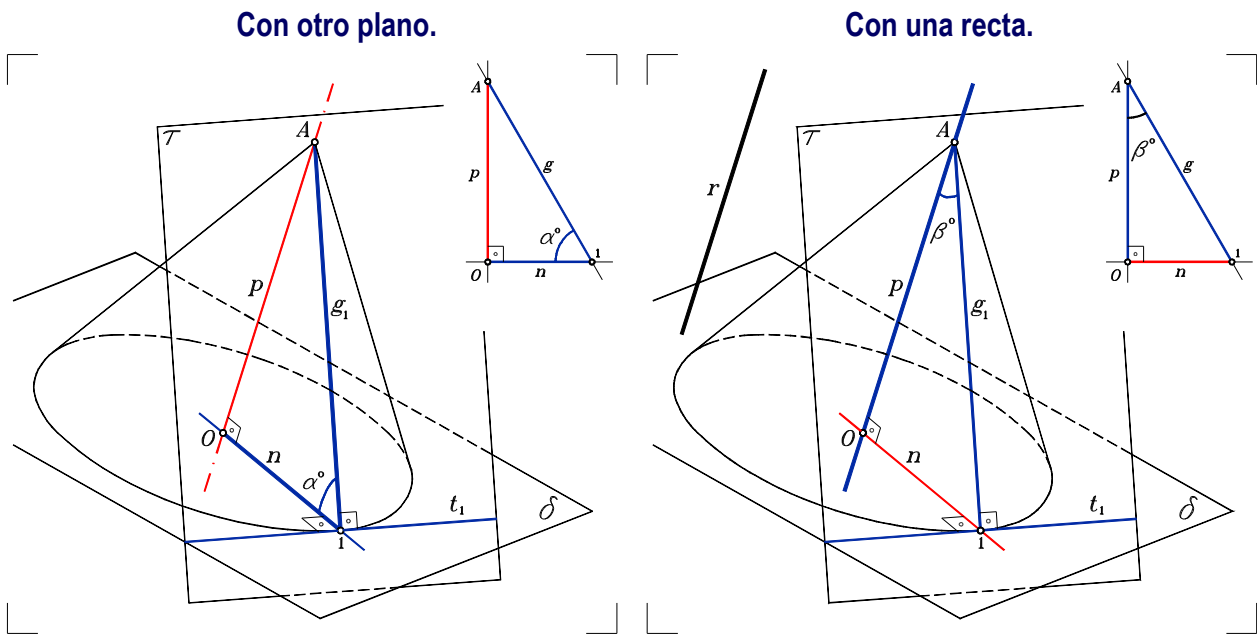
### Construcciones con condiciones de ángulos.

Relaciones angulares en el CONO DE REVOLUCIÓN.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]



Lugar geométrico de los PLANOS que forman determinado ángulo:



**Construcciones con condiciones de ángulos.**

Relaciones angulares en el CONO DE REVOLUCIÓN.

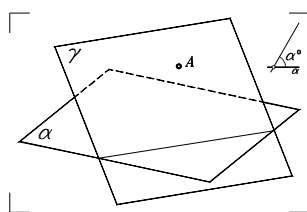
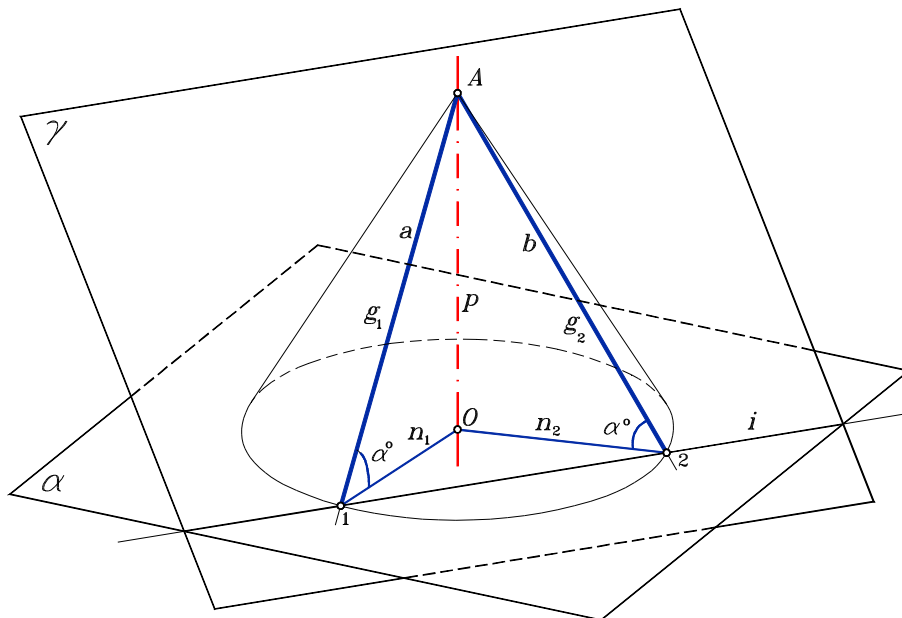
**[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]**

<b>Construir:</b>		<b>Que formen determinado ángulo:</b>
① Rectas	De un plano	Por un punto del plano
	-----	Con otro plano
②	Paralelas a un plano	Por un punto del espacio
③ Planos	Conteniendo una recta	-----
	-----	Con otro plano
④	Paralelos a una recta	Por un punto del espacio
⑤ Rectas	De un plano	Por un punto del plano
	-----	Con otra recta
⑥	Paralelas a un plano	Por un punto del espacio
⑦ Planos	Conteniendo una recta	-----
	-----	Con otra recta
⑧	Paralelos a una recta	Por un punto del espacio

**Operaciones de construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.**

Síntesis. Casos generales.

**[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]**

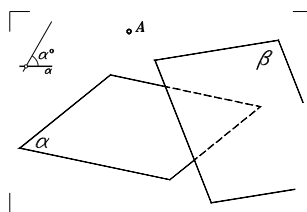
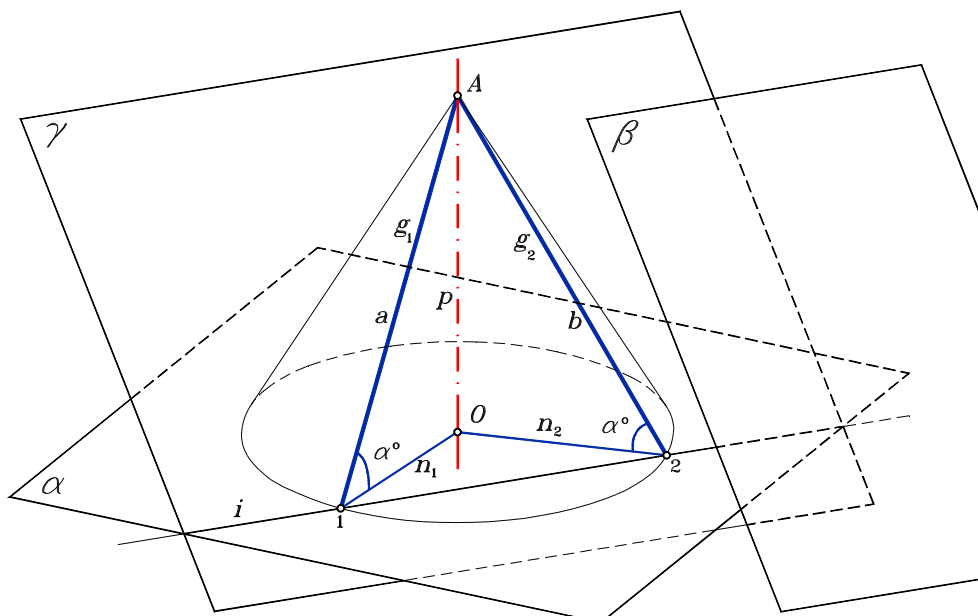


- 1) **Determinar las rectas  $a$  y  $b$  del plano  $\gamma$  que pasan por un punto  $A$  de él y forman  $\alpha^\circ$  con otro plano  $\alpha$**
1.  $\alpha, \gamma, A$  en  $\gamma$  ángulo de  $\alpha^\circ$  con  $\alpha$
  2.  $p \perp \alpha$  por  $A$  de  $\gamma$
  3.  $O = p \cap \alpha$
  4. Distancia  $p = AO$
  5.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  6. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\alpha$
  7.  $i = \alpha \cap \gamma$
  8.  $1, 2 = i \cap$  circunferencia, en  $\alpha$
  9.  $a = A1 = g_1$ , y  $b = A2 = g_2$

1

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

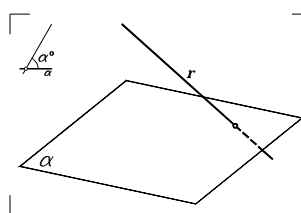
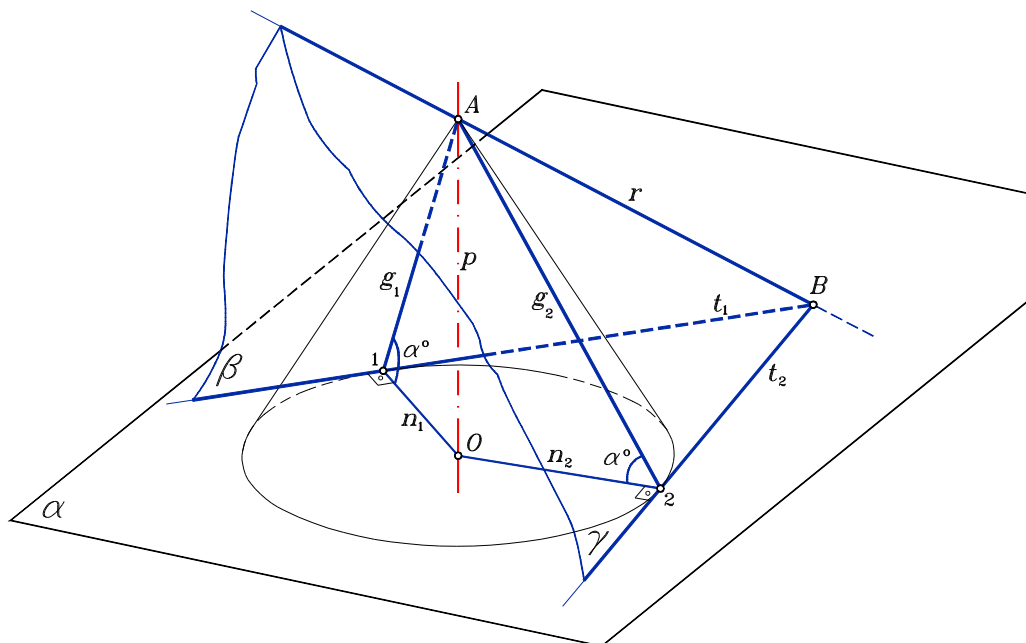


- 2) **Determinar las rectas  $a$  y  $b$  que pasan por un punto  $A$  del espacio, son paralelas a un plano  $\beta$ , y forman  $\alpha^\circ$  con otro plano  $\alpha$**
1.  $\alpha, \beta, A$ , ángulo de  $\alpha^\circ$  con  $\alpha$
  2.  $\gamma \parallel \beta$ , por  $A$
  3.  $p \perp \alpha$ , por  $A$
  4.  $O = p \cap \alpha$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\alpha$
  8.  $i = \alpha \cap \gamma$
  9.  $1, 2 = i \cap$  circunferencia, en  $\alpha$
  10.  $a = A1 = g_1$ , y  $b = A2 = g_2$

2

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

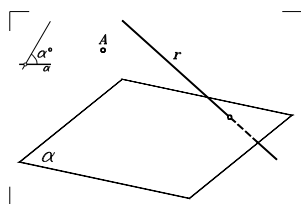
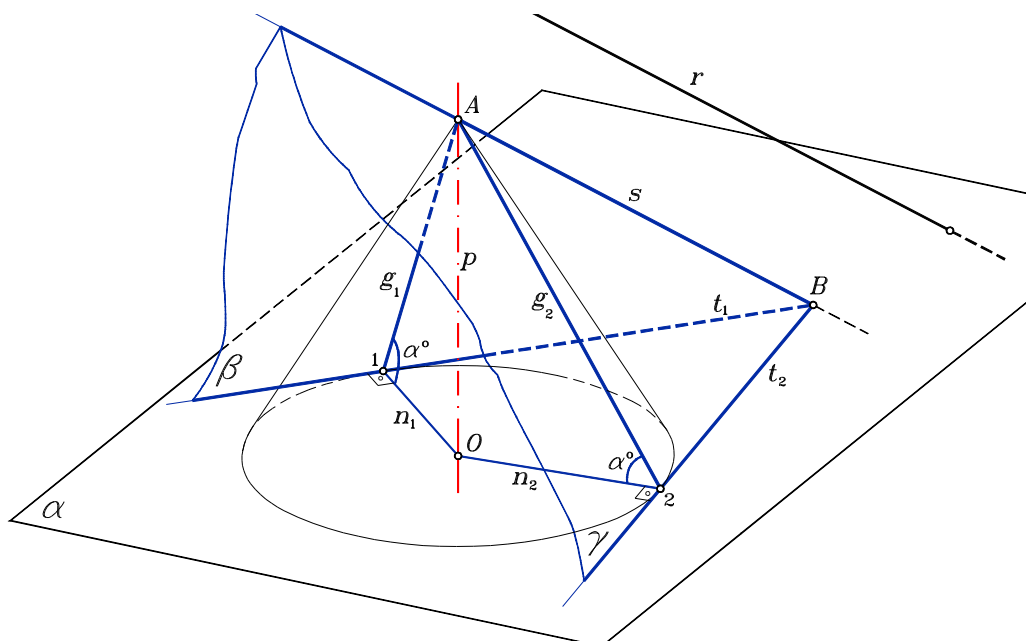


- 3) **Determinar los planos  $\beta$  y  $\gamma$  que pasan por una recta  $r$ , y forman  $\alpha^\circ$  con otro plano  $\alpha$**
1.  $\alpha \perp r$ , ángulo de  $\alpha^\circ$  con  $\alpha$
  2.  $A$  en  $r$
  3.  $p \perp \alpha$ , por  $A$
  4.  $O = p \cap \alpha$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\alpha$
  8.  $B = r \cap \alpha$
  9.  $t_1 = B1, t_2 = B2$  (en  $\alpha$ )
  10.  $g_1 = A1, g_2 = A2$
  11.  $\beta = AB1 (g_1, t_1, r), \gamma = Ab2 (g_2, t_2, r)$

3

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

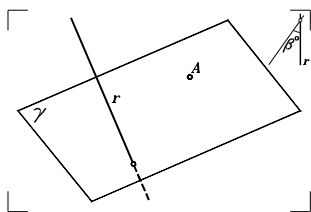
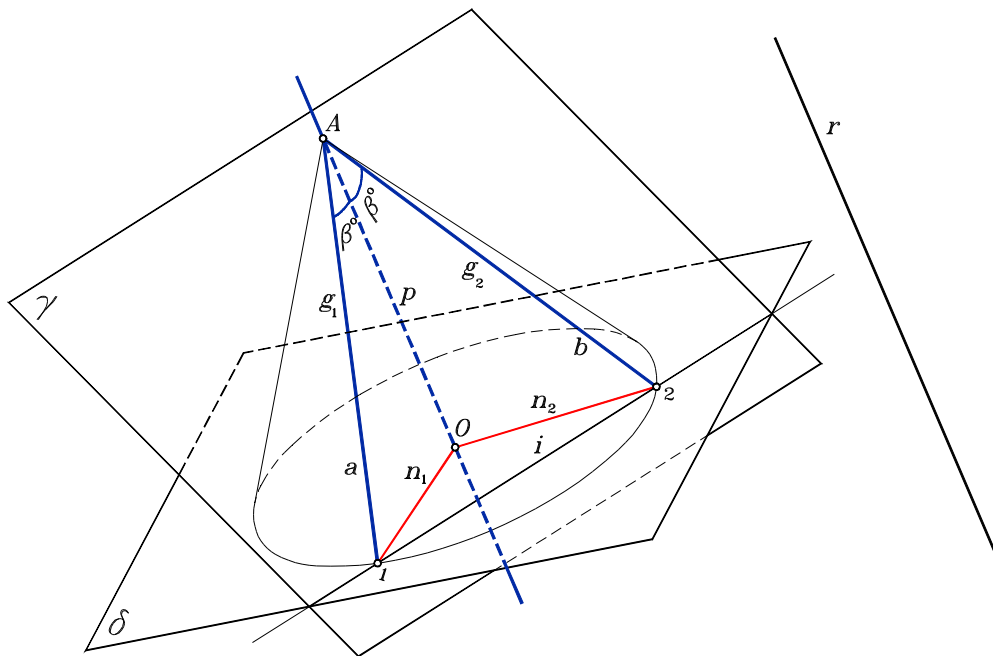


- 4) **Determinar los planos  $\beta$  y  $\gamma$  que pasan por un punto  $A$  del espacio, son paralelos a una recta  $r$ , y forman  $\alpha^\circ$  con otro plano  $\alpha$**
1.  $\alpha \perp r, A$ , ángulo de  $\alpha^\circ$  con  $\alpha$
  2.  $s \parallel r$ , por  $A$
  3.  $p \perp \alpha$ , por  $A$
  4.  $O = p \cap \alpha$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\alpha$
  8.  $B = s \cap \alpha$
  9.  $t_1 = B1, t_2 = B2$  (en  $\alpha$ )
  10.  $g_1 = A1, g_2 = A2$
  11.  $\beta = AB1 (g_1, t_1, r), \gamma = Ab2 (g_2, t_2, r)$

4

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

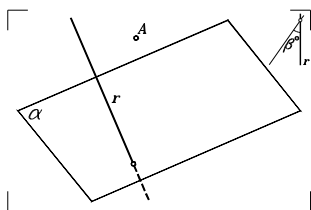
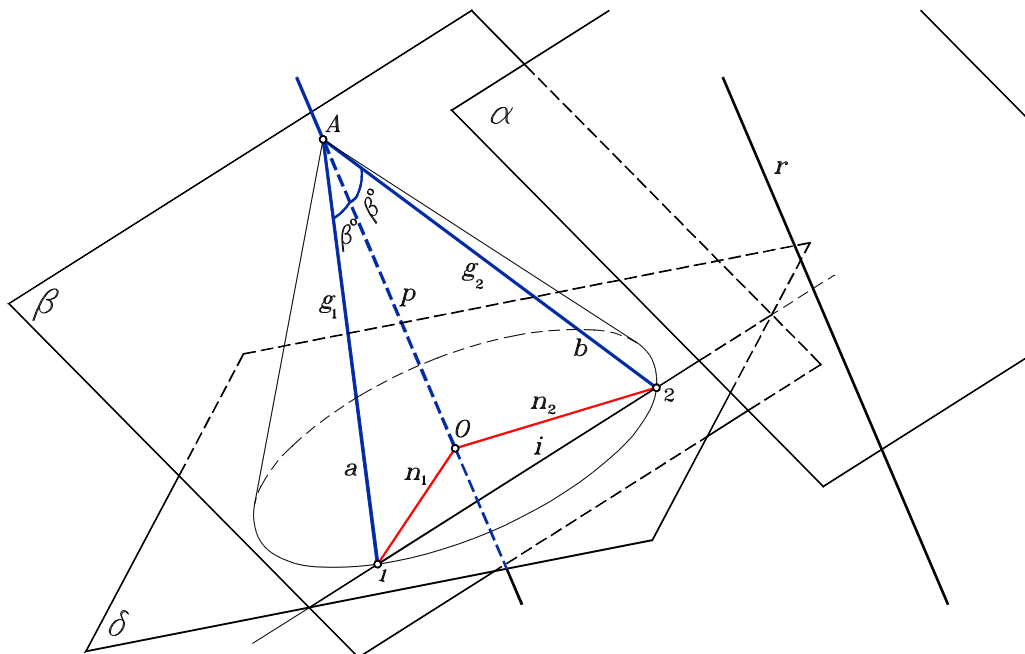


- 5) Determinar las rectas  $a$  y  $b$  del plano  $\gamma$  que pasan por un punto  $A$  de él y forman  $\beta^\circ$  con la recta  $r$ .
1.  $r, \gamma, A$  en  $\gamma$  ángulo de  $\beta^\circ$  con  $r$
  2.  $p \parallel r$ , por  $A$
  3.  $\delta \perp p$ , por  $O$  de  $p$
  4. Distancia  $p = AO$
  5.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  6. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\delta$
  7.  $i = \gamma \cap \delta$
  8.  $1, 2 = i \cap$  circunferencia, en  $\delta$
  9.  $a = A1 = g_1$ , y  $b = A2 = g_2$

5

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

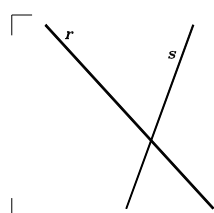
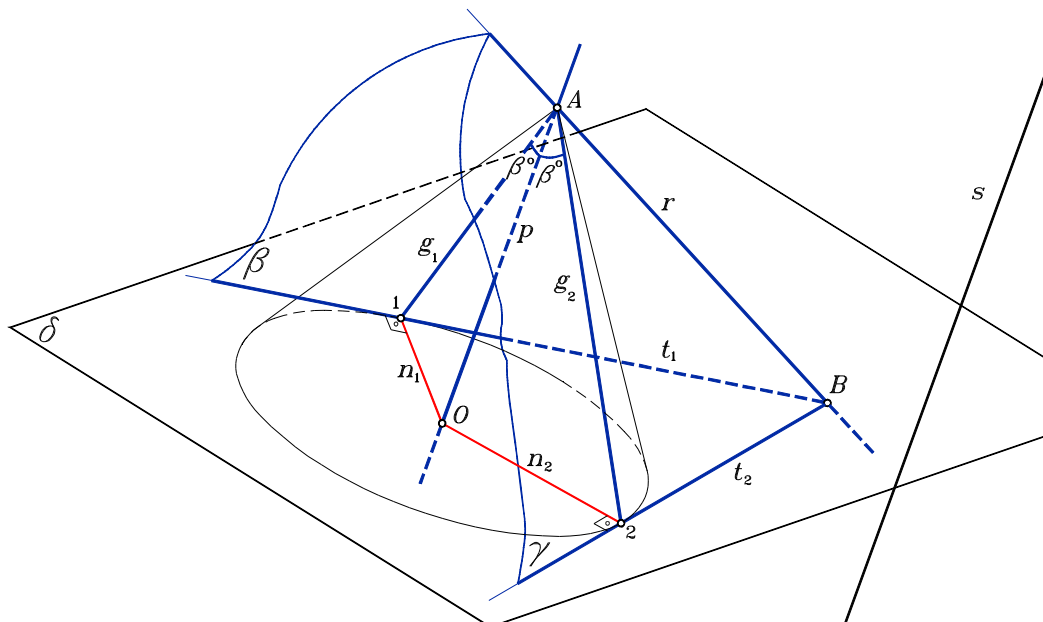


- 6) Determinar las rectas  $a$  y  $b$  que pasan por un punto  $A$  del espacio, son paralelas a un plano  $\alpha$  y forman  $\beta^\circ$  con la recta  $r$ .
1.  $r, \alpha, A$ , ángulo de  $\beta^\circ$  con  $r$
  2.  $\beta \parallel \alpha$ , por  $A$
  3.  $p \parallel r$ , por  $A$
  4.  $\delta \perp p$ , por  $O$  de  $p$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n =$  radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\delta$
  8.  $i = \beta \cap \delta$
  9.  $1, 2 = i \cap$  circunferencia, en  $\delta$
  10.  $a = A1 = g_1$ , y  $b = A2 = g_2$

6

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]

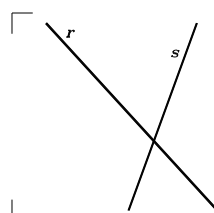
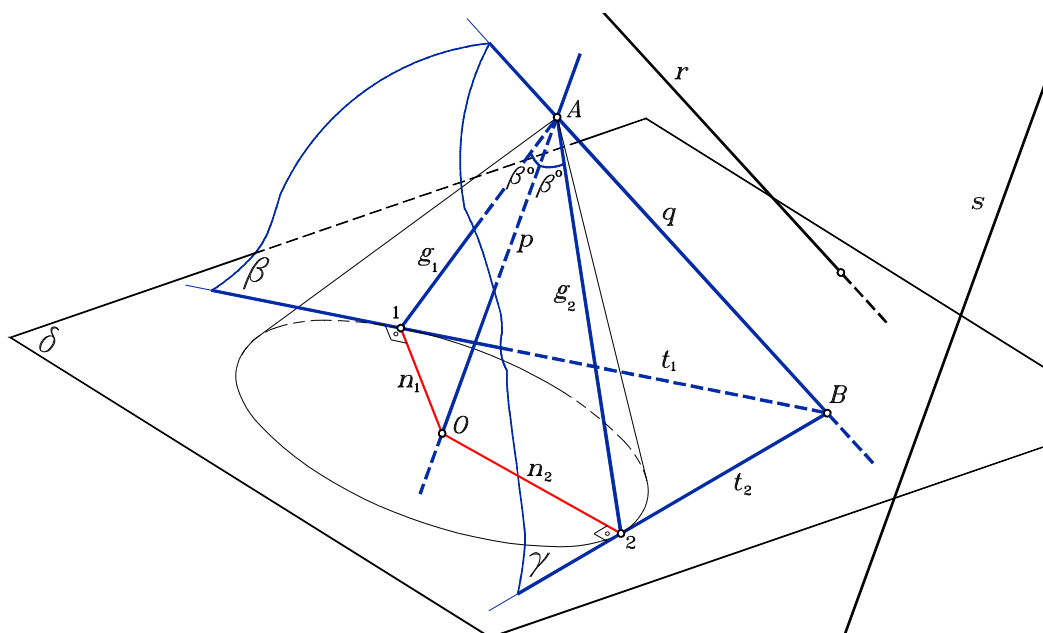


- 7) **Determinar los planos  $\beta$  y  $\gamma$  que pasan por una recta  $r$ , y forman  $\beta$  con otra recta  $s$ .**
1.  $r, s$ , ángulo de  $\beta$  con  $s$
  2.  $A$  en  $r$
  3.  $p \parallel s$ , por  $A$
  4.  $\delta \perp p$  por  $O$  de  $p$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n$  = radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\delta$
  8.  $B = r \cap \delta$
  9.  $t_1 = B1, t_2 = B2$  (en  $\delta$ )
  10.  $g_1 = A1, g_2 = A2$
  11.  $\beta = AB1 (g_1, t_1, r), \gamma = Ab2 (g_2, t_2, r)$

7

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]



- 8) **Determinar los planos  $\beta$  y  $\gamma$  que pasan por un punto  $A$  del espacio, son paralelos a una recta  $r$ , y forman  $\beta$  con otra recta  $s$ .**
1.  $r, s, A$ , ángulo de  $\beta$  con  $s$
  2.  $p \parallel s$ , por  $A$
  3.  $q \parallel r$ , por  $A$
  4.  $\delta \perp p$  por  $O$  de  $p$
  5. Distancia  $p = AO$
  6.  $n$  = radio de directriz (figura auxiliar)
  7. Circunferencia (centro  $O$ , radio  $n$ ) en  $\delta$
  8.  $B = q \cap \delta$
  9.  $t_1 = B1, t_2 = B2$  (en  $\delta$ )
  10.  $g_1 = A1, g_2 = A2$
  11.  $\beta = AB1 (g_1, t_1, q), \gamma = Ab2 (g_2, t_2, q)$

8

Construcción de rectas y planos con condiciones de ángulos.

[12.2 CONSTR. CONDIC. ÁNGULOS]