Tema 3

Aplicaciones lineales

Ejercicios y Soluciones

3.1. Considera el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \mathbb{R}\langle(-1, 1, 0),\ (0, 2, 1)\rangle.$$

(I) Determina $S^\perp$.

(II) Halla una base ortonormada de S y una base ortonormada de $S^\perp$. Comprueba que, uniéndolas, se obtiene una base ortonormada del espacio $\mathbb{R}^3$.

(III) Construye una matriz P que tenga como columnas los vectores de la base ortonormada anterior. ¿Es P una matriz ortogonal?

(IV) Construye una matriz Q que tenga como filas los vectores de la base ortonormada anterior. ¿Es Q una matriz ortogonal?

Solución.

(I) $S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -\frac{z}{2}\}$.

(II) Una base ortonormada de S es $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0),\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$.

Una base de $S^\perp$ es $\{(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$.

Es claro que, al unirlas, obtenemos una base de $\mathbb{R}^3$.

(III) Si escribimos P como una matriz de 1×3 bloques (sus columnas), comprobamos que $P'P = I_3$.

(IV) Es claro que $Q = P'$. De (iii) se deduce que $P' = P^{-1}$, por lo que se cumple $PP' = I_3$. Esto es $Q'Q = I_3$, por lo que Q es una matriz ortogonal.

3.2. Dado el subespacio de $S = \mathbb{R}\langle(2, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$,

(I) calcula la proyección ortogonal del vector $(1, 2, 3)$ sobre S.

(II) Expresa el vector $(1, 2, 3)$ como suma de un vector de S y de un vector de $S^\perp$.

Solución.

La proyección ortogonal de $v = (1, 2, 3)$ sobre S es $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{3})$. Además,

$$(1, 2, 3) = (\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{3}) + (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-1}{3}),$$

donde el vector $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{3}) \in S$ y el vector $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-1}{3}) \in S^\perp$.

3.3. Dado el subespacio $S = \mathbb{R}\langle(1,2,3,1),(0,1,2,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, determina la proyección ortogonal del vector $(1,-1,1,-1)$ sobre S.

Solución.

El vector $\dfrac{1}{3}(2,1,0,-1)$.

3.4. Comprueba que toda matriz Q ortogonal $n \times n$ transforma cada vector columna $X \in \mathbb{R}^n$ en otro vector QX con igual norma que X.

Solución.

$\| QX \|^2 = (QX)'QX = X'Q'QX = X'X = \| X \|^2.$

3.5. Sea A cada una de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Halla los subespacios fundamentales de A y comprueba que son ortogonales dos a dos.

(II) Encuentra una matriz ortogonal P tal que $P'AP$ sea diagonal.

Solución.

(I) Para la primera matriz, $S(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z\}$ y
$S(-4) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z,\ y = z\}$.
Para la segunda, $S(-3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - 2z\}$ y
$S(6) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{z}{2},\ y = -z\}$.

(II) Una posible matriz ortogonal P en cada caso, es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

3.6. Sea A cada una de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Encuentra una base ortonormada de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de A.

(ii) Encuentra, a partir de la base hallada en el apartado anterior, una matriz ortogonal P tal que $P'AP$ sea diagonal.

Solución.

Una posible matriz P ortogonal en cada caso es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

(i) Halla los subespacios $\ker A$ y $(\ker A)^{\perp}$.

(ii) Demuestra que cada uno de los subespacios anteriores coincide con un subespacio fundamental. ¿A qué valor propio corresponde cada uno de ellos?

(iii) Halla una matriz P, ortogonal, con $P'AP$ diagonal.

Solución.

(i) $\ker A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ y $(\ker A)^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

(ii) $\ker A = S(0)$ y $(\ker A)^{\perp} = S(3)$.

(iii)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

3.8. Para cada número real a definimos la matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(I) Demuestra que A_a es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$ y halla P, ortogonal, con $P^{-1}A_aP$ diagonal.

(II) Utilizando lo anterior, dí cuál es el rango de A_a según los valores de a y calcula su inversa cuando exista.

(III) Halla A_a^{13}.

Solución.

(I) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la matriz A_a es simétrica y, por lo tanto, diagonalizable.

Por ejemplo, la matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

verifica $P'A_aP = D_a$, con $D_a = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

(II) El rango de A_a coincide con el rango de D_a. Es igual a 3 si $a \neq 1, -2$. Es igual a 2 si $a = -2$ y es igual a 1 si $a = 1$.

La matriz A_a sólo tiene inversa cuando $r \neq 1, -2$. Como $A_a = PD_aP'$, su inversa en esos casos es $A_a^{-1} = PD_a^{-1}P'$, donde

$$D_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

(III) $A_a^{13} = PD_a^{13}P'$, donde

$$D_a^{13} = \begin{pmatrix} (a+2)^{13} & 0 & 0 \\ 0 & (a-1)^{13} & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)^{13} \end{pmatrix}.$$

3.9. Calcula la solución de norma mínima de cada uno de los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned} y+2z&=1\\ -2x+2y-2z+2t&=2\\ x-y+z&=-1\\ 2x-2y+2z-2t&=-2\end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y-z&=0\\ x-y+z&=2\\ x-4y+4z&=6\end{aligned}\right\}.$$

Nota: Observa que los dos sistemas anteriores son compatibles y por tanto, no es necesario hallar soluciones aproximadas.

Solución.

La solución de norma mínima del primer sistema es $(x, y, z, t) = \frac{1}{7}(-3, 5, 1, 0)$.

La del segundo es $(x, y, z) = \frac{1}{3}(2, -2, 2)$.

3.10. Halla la solución aproximada de norma mínima de los sistemas

$$\left.\begin{aligned} 1{,}2x+1{,}6y&=1\\ 0{,}9x+1{,}2y&=1\\ -4x+3y&=1\end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x-y&=2\\ 2x-2y&=3\\ 3x+3y&=1\end{aligned}\right\}.$$

Solución.

La solución aproximada de norma mínima del primer sistema es $(x, y) = (0'176,\ 0'568)$. La del segundo es $(x, y) = \frac{1}{30}(29, -19)$.

3.11. En el plano ordinario,

(I) encuentra la recta que más se ajuste a los puntos

$$(0,\ 1),\ (\tfrac{1}{4},\ 0),\ (\tfrac{1}{3},\ 1),\ (\tfrac{1}{2},\ 1),\ (1,\ 2).$$

(II) Halla la parábola que más se ajusta a dichos puntos.

Solución.

(I) $y = \frac{20}{27}x + \frac{7}{16}$.

(II) $y = \frac{1368}{539}x^2 - \frac{3558}{2695}x + \frac{446}{539}$.

3.12. (I) Calcula la proyección ortogonal del vector $(-2, 4, -4, -3)$ sobre el subespacio $S = \mathbb{R}\langle(1, 2, -1, 1),\, (0, 1, -1, 0)\rangle$.

(II) Utilizando el resultado anterior, halla la solución aproximada de norma mínima del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2z &= -2 \\ 2x + y + 5z &= 4 \\ -x - y - 3z &= -4 \\ x + 2z &= -3 \end{aligned}\right\}.$$

Solución.

(I) La proyección ortogonal del vector es $C = (-2, 3, -5, -2)$.

(II) La solución aproximada de norma mínima del sistema es $(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(-6, 13, 1)$.

3.13. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(I) calcula la proyección ortogonal del vector B sobre el subespacio de columnas de A.

(II) Utilizando el apartado anterior, determina la solución aproximada de norma mínima del sistema

$$\left.\begin{aligned} -y + z &= 2 \\ -x + y + z &= -1 \\ -x + 2z &= 4 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Solución.

(I) La proyección ortogonal del vector es $C = (2, 1, 3, -1)$.

(II) La solución aproximada de norma mínima del sistema es $(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(-1, -2, 4)$.

3.14. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(I) comprueba que el vector $C = AZ$ es ortogonal al vector $B - C$. Deduce que C es la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\operatorname{Col} A$ y que Z es una solución aproximada del sistema $AX = B$.

(II) Halla $\operatorname{Ker} A$ y todas las soluciones aproximadas del sistema $AX = B$.

(III) De entre todas ellas, encuentra la que tiene norma mínima.

Solución.

(I) Calculamos $C = AZ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es claro que su producto escalar es cero, es decir que $B - C$ es ortogonal a C. Observemos, además, que el vector C genera el subespacio $\operatorname{Col} A$.

Ahora, como $B = C + (B - C)$ con $C \in \operatorname{Col} A$ y $B - C$ ortogonal a $\operatorname{Col} A$, podemos asegurar que C es la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\operatorname{Col} A$.

Z es una solución aproximada de $AX = B$ ya que verifica que $AZ = C$, donde C es la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\operatorname{Col} A$.

(II) $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Fil} A)^{\perp} = \mathbb{R}\langle(1, -1)\rangle$.

Las soluciones aproximadas del sistema $AX = B$ son las soluciones ordinarias de $AX = C$, con C igual a la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\operatorname{Col} A$. Como Z era una solución de dicho sistema y acabamos que calcular el $\operatorname{Ker} A$ podemos deducir que todas las soluciones pedidas son de la forma $(x,\, y) = (1,\, 0) + t(1,\, -1) = (1 + t,\, -t),\ \ t \in \mathbb{R}$.

(III) De entre todas las soluciones aproximadas, la de norma mínima es la que es ortogonal a $\operatorname{Ker} A$. Es decir, la que se obtiene con $t = \frac{-1}{2}$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(I) calcula la proyección ortogonal del vector $B = (1,\, 3,\, -1)$ sobre el subespacio de columnas de A.

(II) Determina la solución aproximada de norma mínima del sistema

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y + z + t = 3 \\ \qquad\quad x + z = -1 \end{cases}$$

Solución.

(I) Es claro que una base del subespacio $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}\langle(1, 1, 1), (-1, 1, 0)\rangle$. Así la proyección ortogonal de B es un vector, $C = x(1, 1, 1) + y(-1, 1, 0)$, verificando que $B - C$ es ortogonal a los vectores de una base de $\mathrm{Col}(A)$. Es decir,

$$B \cdot (1, 1, 1) - x(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) - y(-1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$$
$$B \cdot (-1, 1, 0) - x(1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) - y(-1, 1, 0) \cdot (-1, 1, 0) = 0.$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos que

$$C = 1(1, 1, 1) + 1(-1, 1, 0) = (0, 2, 1).$$

(II) La solución aproximada de norma mínima será el único vector solución del sistema $AX = C$ perpendicular a $\mathrm{Ker}(A)$.

Es fácil ver que $\mathrm{Ker}(A) = \mathbb{R}\langle(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\rangle$ y que la solución buscada tiene que verificar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 2 \\ x + z = 1 \\ x - z = 0 \\ y - t = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este nuevo sistema de ecuaciones obtenemos que la solución aproximada de norma mínima es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.