

# **ESTADÍSTICA**

## **V.A. discreta parte II**

# Índice

- Bernoulli
- Geométrica
- Binomial
- Poisson

# Distribución de Bernoulli

## Experimento de Bernoulli

solo son posibles dos resultados: éxito o fracaso. Podemos definir una variable aleatoria discreta  $X$  tal que:

éxito  $\rightarrow 1$

fracaso  $\rightarrow 0$

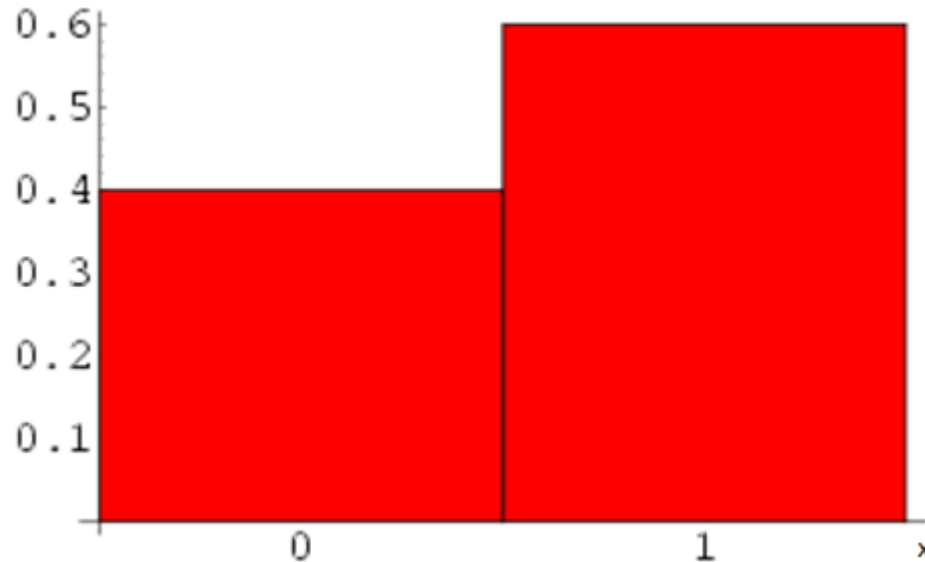
Si la **probabilidad de éxito** es  $p$  y la de **fracaso**  $1 - p$ , podemos construir una función de probabilidad:

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

Un típico experimento de Bernoulli es el lanzamiento de UNA moneda con probabilidad  $p$  para cara y  $(1-p)$  para cruz.

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

$f(x)$  for  $p = 0.6$



Veremos, más adelante, que la distribución de Bernoulli es un caso particular de la distribución Binomial con  $n = 1$ .

Función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - p, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Ejercicio: Calcular la esperanza y la varianza de la distribución de Bernoulli.

$$E[X] = \mu = \sum_{i=0}^1 x_i P(X = x_i) =$$

$$0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{i=0}^1 x_i^2 P(X = x_i) - p^2$$

$$= 0^2 \cdot f(0) + 1^2 \cdot f(1) - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

# Distribución geométrica

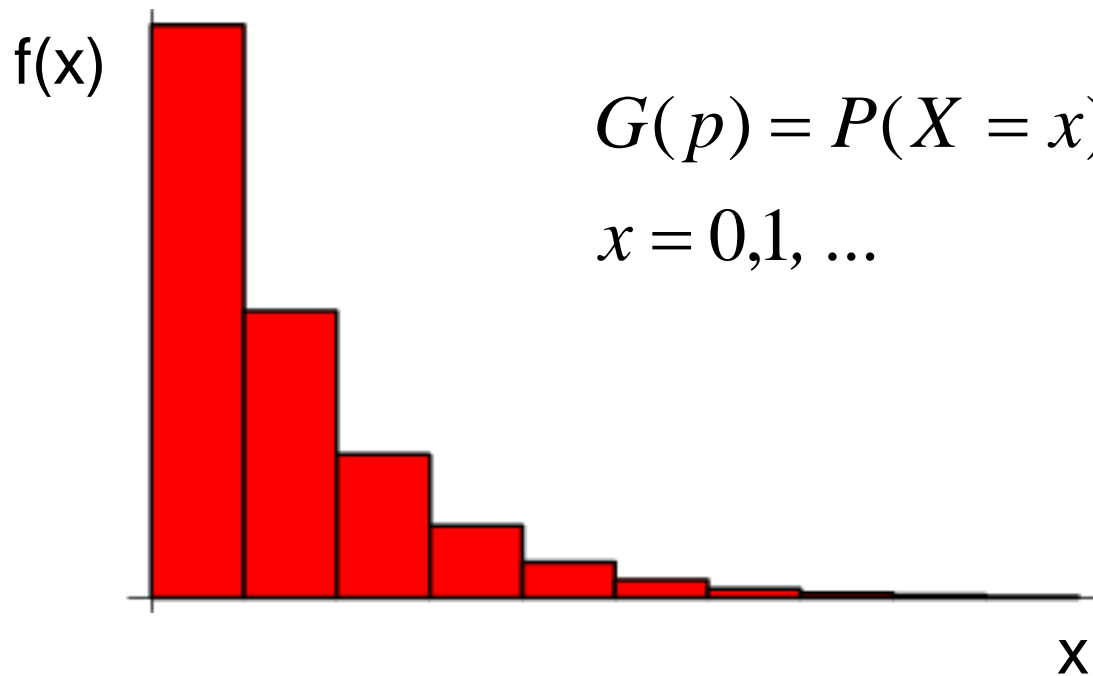
Consideremos el siguiente experimento:

Partimos de un experimento de Bernoulli donde la probabilidad de que ocurra un suceso es  **$p$  (éxito)** y la probabilidad de que no ocurra  **$q = 1 - p$  (fracaso)**.

Repetimos nuestro experimento hasta conseguir el primer éxito.

Definimos la variable aleatoria  $X$ , como el **número de FRACASOS hasta que se obtiene el primer éxito**. Entonces:

$$G(p) = P(X = x) = (1 - p)p,$$
$$x = 0, 1, \dots$$



$$G(p) = P(X = x) = (1 - p)^x p,$$

$$x = 0, 1, \dots$$

Función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_i (1 - p)^{xi} p = 1 - q^{x+1}$$

$$E(X) = \frac{1 - p}{p}$$

Falta de memoria

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s-1) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{N}$$

$$Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

## Ejercicio: moléculas raras

La probabilidad de que una muestra de aire contenga una molécula rara es 0.01. Si se supone que las muestras son independientes respecto a la presencia de la molécula. Determine cuál es la probabilidad de que sea necesario analizar 125 muestras para detectar una molécula rara.

$X$  = examinar moléculas hasta que aparece una rara (éxito)  
 $X \approx \text{Ge} (p = 0.01)$

$$P(X = 124) = (1 - 0.01)^{124} \cdot 0.01$$



**Ejercicio 73.** Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta que aparece un 6. Si  $X$  mide el número del lanzamiento hasta que ocurre. Se pide:

- a). ¿Qué función de probabilidad tiene la variable aleatoria  $X$ ?
- b). Calcular  $P(X = 2)$ .
- c). Calcular  $P(X > 4)$ .

a)  $X$  = lanzar el dado hasta que aparece un 6 (éxito)

$$X \approx \text{Ge} (p = 1/6)$$

b)  $P(X = 2) = (1 - 1/6)^2 \cdot 1/6$

Probabilidad de obtener el primer 6 en la 3ª tirada

c)  $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

d) Probabilidad de que se necesiten más de 4 fracasos [=por lo menos 5 fracasos].

**Ejercicio 94.** Se lanza un dado todas las veces necesarias hasta que aparece un 6. Si sabemos que no salió en la primera tirada, ¿cuál es la probabilidad de necesitar más de 3 lanzamientos?

**Ejercicio 94.** Sea  $X$  el número de lanzamientos hasta encontrar un 6, con  $p = 1/6$ , entonces

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [1 - (5/6)^1]$$
$$P(X > 2 | X > 0) = \frac{q^3}{q^1} = q^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,694$$

**Ejercicio 76.** Tres personas A, B, y C lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6 gana. Si  $p$  es la probabilidad de sacar un 6 y  $q = 1 - p$ , ¿cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

**Ejercicio 76.** Gana A cuando ocurren los siguientes sucesos

$$6, \overline{6666}, \overline{66666666}, \overline{6666666666} \dots$$

razonando análogamente para B y C, se tiene:

$$\begin{aligned} P(A) &= p + p q^3 + p q^6 + \dots \\ &= \frac{p}{1 - q^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= p q + p q^4 + p q^7 + \dots \\ &= \frac{p q}{1 - q^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= p q^2 + p q^5 + p q^8 + \dots \\ &= \frac{p q^2}{1 - q^3} \end{aligned}$$

# Distribución de Poisson

Consideramos una v.a.  $X$  que cuenta el **número de veces que un determinado suceso ocurre en una unidad** (normalmente de tiempo o de espacio) y verifica:

- 1) Si se considera una unidad inferior (superior), la probabilidad de que ocurra un determinado número de sucesos se reduce (aumenta) proporcionalmente.
- 2) El número de veces que ocurre un suceso durante el momento considerado es independiente del número de veces que ocurre dicho suceso en otro momento.
- 3) Sean  $X_i$  v.a. que se distribuyen como Poisson ( $\lambda_i$ ). Entonces  $\sum X_i$  se distribuye como Poisson ( $\sum \lambda_i$ )

Entonces  $X$  es una v.a. que sigue una distribución de Poisson

**Ejemplo:** Sea  $X$  el número de clientes que han entrado en una tienda de alimentación a lo largo de un mes.

Asumiendo que  $X$  sigue una **distribución de Poisson** se verifica que:

- 1) Supongamos que el **número medio de clientes es 400 al mes**. Entonces si  $X$  es Poisson se ha de cumplir que el número medio de clientes a los **dos meses es 800** y el número medio de clientes **a la semana es 100**.
- 2) Además tiene que ocurrir que **el número de clientes en un determinado mes**, por ejemplo, octubre, sea **independiente del número de clientes que hubo en otro mes**, por ejemplo, septiembre. (En este caso sería suponer que no hay clientela fija).
- 3) Supongamos que el **número medio de clientes** que han entrado a la **farmacia es 120 al mes**. Luego, el número de clientes **entre la tienda de alimentación y la farmacia** se distribuye como **Poisson** de media **520 clientes al mes**.

La función de probabilidad de la **poisson**:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda > 0$$

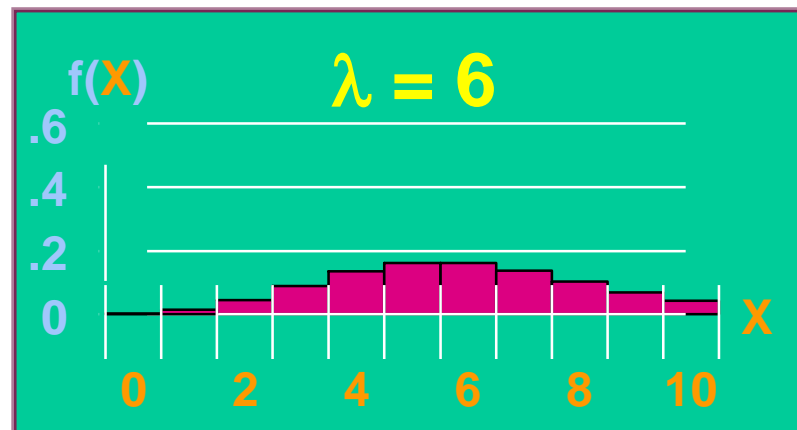
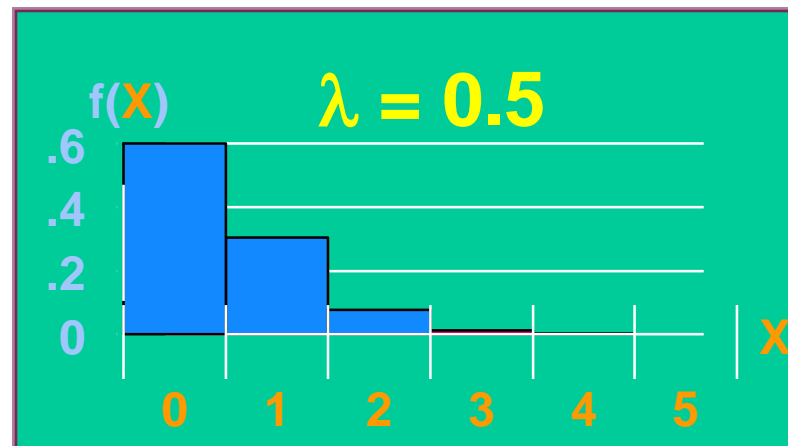
## Media

$$\mu = E(X) = \lambda$$

## Varianza

$$\sigma^2 = \lambda$$

Nota: el máximo de la distribución se encuentra en  $x \approx \lambda$



La función de distribución de la **poisson**:

Tabla A.2: Distribución de Poisson.  $P(P(\lambda) \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

<i>x</i>	$\lambda$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

# Ejercicio: aterrizaje aviones

El número medio de aviones que usan una pista de aterrizaje en un aeropuerto es 2 cada media hora. Suponiendo que siguen una ley de Poisson.

- a) ¿cuál es la probabilidad de que en media hora el número de llegadas sea 5 o mayor?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un cuarto de hora aterricen más de 4 aviones?

a)  $P(X \geq 5) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)] =$

$$1 - [(2^0 e^{-2})/1 + (2^1 \cdot e^{-2})/1 + (2^2 \cdot e^{-2})/2 + (2^3 \cdot e^{-2})/6 + (2^4 \cdot e^{-2})/24] = 0.052$$

*b) Sea Y el número de aviones que aterrizan en esa pista cada cuarto de hora. Entonces Y es una Poisson de parámetro 1:*

$$P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4)] =$$

$$1 - [(1^0 \cdot e^{-1})/1 + (1^1 \cdot e^{-1})/1 + (1^2 \cdot e^{-1})/2 + (1^3 \cdot e^{-1})/6 + (1^4 \cdot e^{-1})/24] = 0.003725$$

**Ejercicio 81.** La centralita telefónica de un hotel recibe un número de llamadas por minuto que sigue una ley de Poisson con media 0,5. Determinar la probabilidad de que en un minuto al azar:

- a). Se reciba una única llamada.
- b). Se reciban un máximo de dos llamadas.
- c). La centralita quede bloqueada, sabiendo que no puede realizar más de 3 conexiones por minuto.

**Ejercicio 81.** La variable  $X$  número de llamadas por minuto sigue una distribución de Poisson  $Po(\lambda = 0,5)$ , luego

a). 
$$P(X = 1) = e^{-0,5} \frac{0,5}{1!} = 0,303$$

b). 
$$P(X \leq 2) = e^{-0,5} + e^{-0,5} \frac{0,5}{1!} + e^{-0,5} \frac{0,5^2}{2!} = 0,986$$

c).

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\ &= 1 - e^{-0,5} - e^{-0,5} \frac{0,5}{1!} - e^{-0,5} \frac{0,5^2}{2!} - e^{-0,5} \frac{0,5^3}{3!} \\ &= 0,002 \end{aligned}$$



# Distribución binomial

La distribución binomial aparece cuando estamos interesados en el **número de veces que un suceso  $A$  ocurre (éxitos) en  $n$  intentos independientes de un experimento.**

Supongamos que el experimento consta de  $n$  intentos y definamos la variable aleatoria:

*$X = \text{Número de veces que ocurre } A.$*

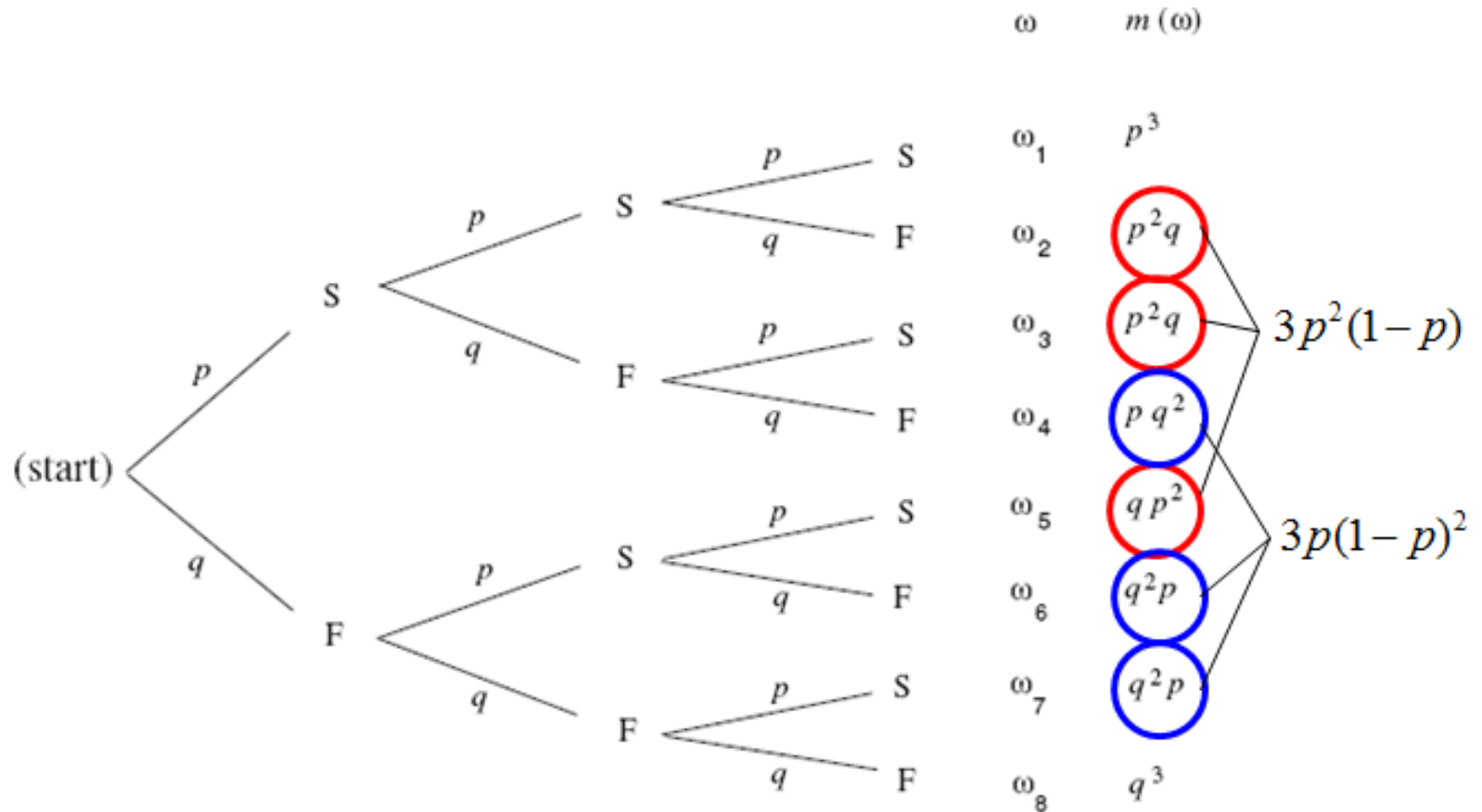
Si consideramos uno de estos valores, digamos el valor  $x$  , i.e. en  $x$  de los  $n$  intentos ocurre  $A$  y en  $n - x$  no.

Entonces la probabilidad de cada posible ordenación es  $p^x q^{n-x}$  y existen  $\binom{n}{x}$  idénticas ordenaciones.

# Experimento aleatorio: 3 lanzamientos de una moneda.

Sea  $X$  = Número de veces que sale cara.

Luego,  $X$  puede tomar los valores  $0, 1, \dots, n=3$



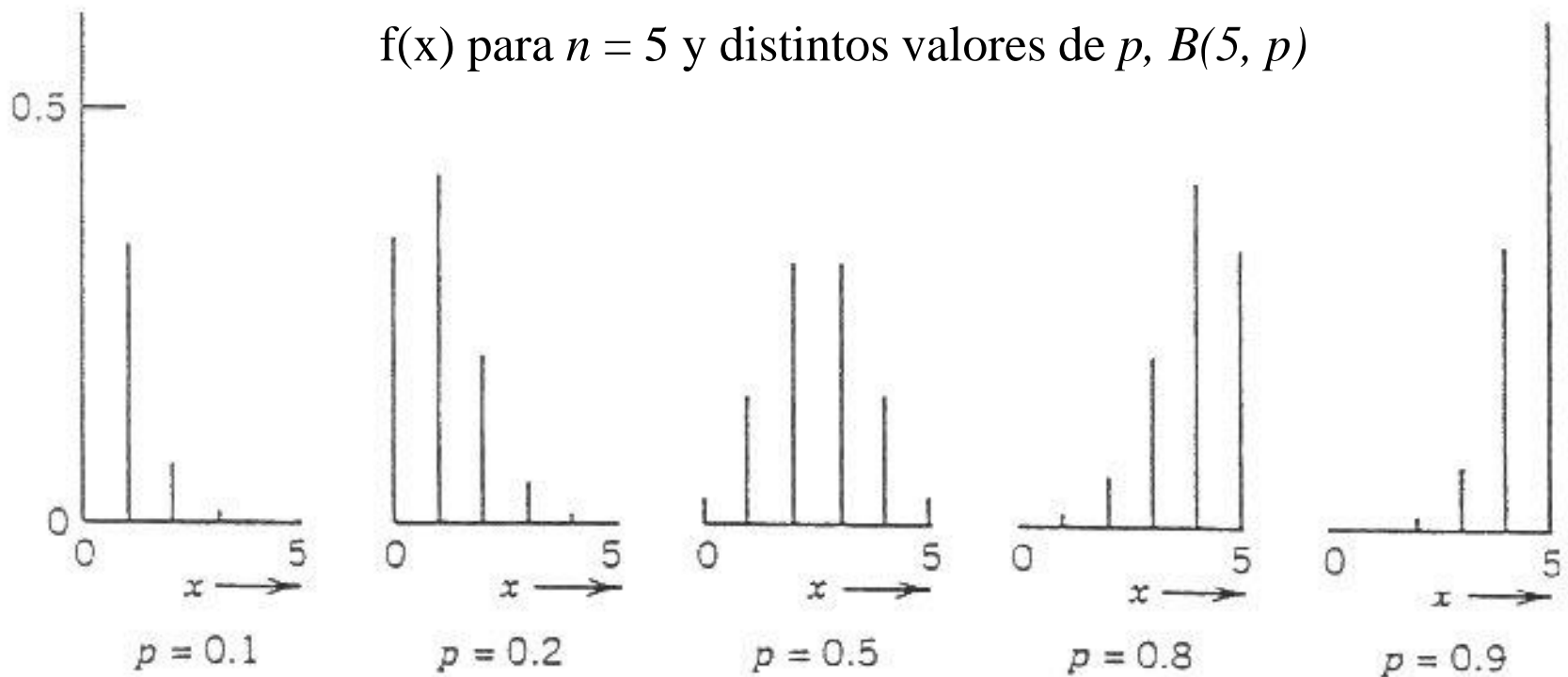
$$P(\text{cara}) = P(\text{éxito}) = p.$$

$$P(\text{cruz}) = P(\text{fracaso}) = 1 - p = q.$$

La función de probabilidad de la **binomial**:

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$f(x)$  para  $n = 5$  y distintos valores de  $p$ ,  $B(5, p)$



## La función de distribución de la **binomial**:

Tabla A.1: Distribución Binomial.  $P(B(n, p) \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

[illegible]

**Ejercicio 67.** Si la probabilidad de acertar en un blanco es  $1/5$  y se hacen 10 disparos de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de acertar por lo menos dos veces?

**Ejercicio 67.** Sea  $X$  el número de aciertos de entre 10 disparos.

$$X \equiv \text{Bin}(10; \frac{1}{5})$$

luego:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &\Rightarrow 1 - q^{10} - 10 p q^9 \end{aligned}$$

# Características de la distribución binomial

## Media

$$\mu = E(X) = n p$$

$$\mu_A = 5 \cdot 0.1 = 0.5$$

$$\mu_B = 5 \cdot 0.5 = 2.5$$

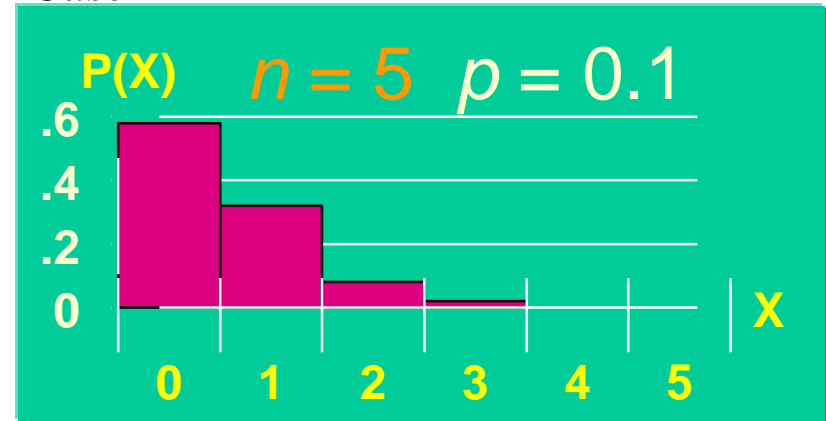
## Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

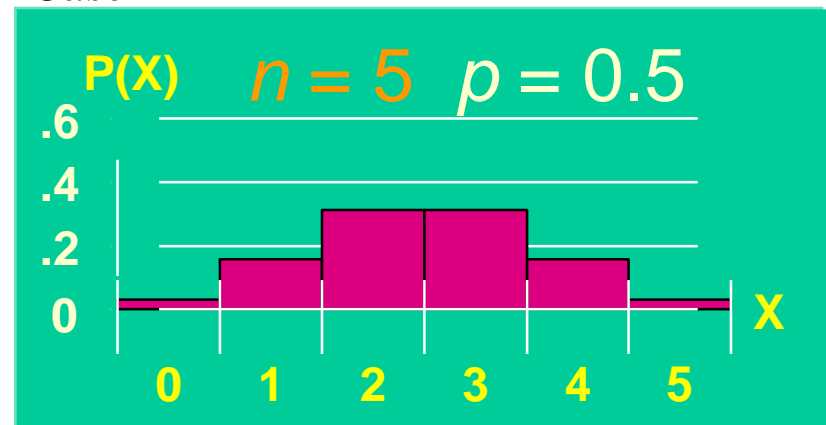
$$\sigma_A = \sqrt{5 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)} = 0.67$$

$$\sigma_B = \sqrt{5 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = 1.1$$

*Caso A*



*Caso B*



**Ejercicio 93.** El departamento de matemáticas propone un examen de test consistente en 25 cuestiones. Cada cuestión tiene 5 respuestas listadas. Si un estudiante no conoce la respuesta correcta de ninguna cuestión y prueba suerte, calcular:

- a). ¿Cuál es el número esperado de respuestas correctas y su desviación típica?
- b). Si se pasa el examen cuando se responden correctamente 13 cuestiones, ¿cuál es la probabilidad de que pase el alumno que ha probado suerte?

**Ejercicio 93.** Sea  $X$  el número de aciertos a las 25 cuestiones, entonces  $X \sim B(25; p = 0,2)$ .

- a). El número esperado de aciertos es  $E[X] = np = 5$ .  
 $\text{Var}[X] = npq = 4$ , luego desviación 2 aciertos
- b). La probabilidad de que pase el alumno que ha probado suerte

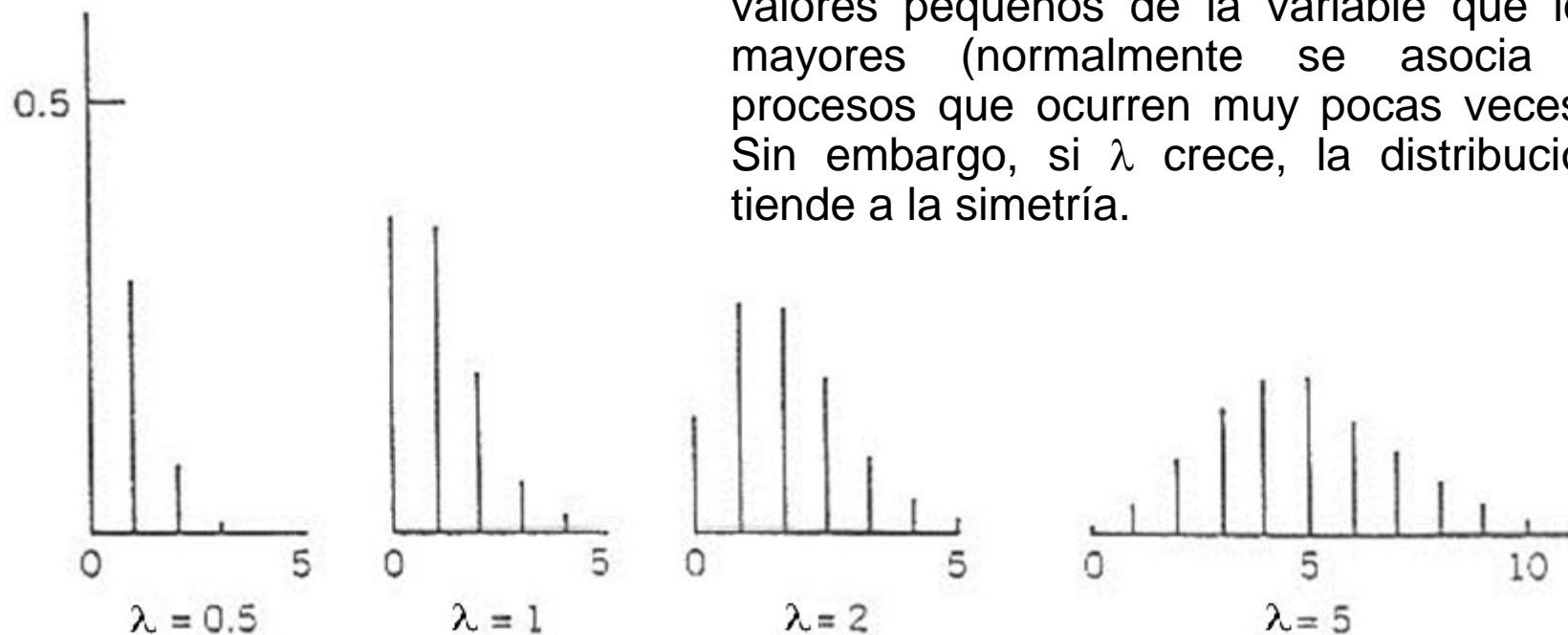
$$P(X \geq 13) = \sum_{i=13}^{i=25} \binom{25}{i} p^i q^{25-i} = 0,004$$



La distribución de Poisson se obtiene como aproximación de una **distribución binomial**.

$$np = \lambda \quad \text{para 'n grande' (n > 30) y 'p pequeño' (p < 0,1)}$$

La distribución de Poisson es asimétrica, siendo en general más probables los valores pequeños de la variable que los mayores (normalmente se asocia a procesos que ocurren muy pocas veces). Sin embargo, si  $\lambda$  crece, la distribución tiende a la simetría.



Distribución de Poisson para varios valores de  $\lambda$ .



# Ejercicio: fabricar televisores

Si la probabilidad de fabricar un televisor defectuoso es  $p = 0.01$ , ¿cuál es la probabilidad de que en un lote de 100 televisores contenga a lo sumo 2 televisores defectuosos?

*Sea  $X$  la v.a. que contabiliza el número de televisores defectuosos*

*Se tiene como el suceso  $A$ : “No hay más de 2 televisores defectuosos”*

La **distribución binomial**  
nos daría el resultado exacto:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

$$P(A) = P(X \leq 2) = \binom{100}{0} \left(\frac{99}{100}\right)^{100} + \binom{100}{1} \left(\frac{99}{100}\right)^{99} \left(\frac{1}{100}\right) + \binom{100}{2} \left(\frac{99}{100}\right)^{98} \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0.9206$$

Podemos aproximar con una **distribución de Poisson**  
con  $\lambda = np = 1$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, \dots)$$

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx e^{-1} \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 0.9197$$

# Ejercicio: enfermedad de muy baja probabilidad

Cierta enfermedad tiene una probabilidad muy baja de ocurrir,  $p = 1/100.000$

Suponiendo que estamos en una ciudad con 500.000 habitantes:

- a) Calcular el número esperado de habitantes que la padecen.
- b) Calcular la probabilidad de que haya más de 3 personas con dicha enfermedad.

- a) Sea la v.a.  $X$  que contabiliza el número de personas que padecen la enfermedad. Claramente sigue un **modelo binomial**, pero puede ser **aproximado a Poisson**:

$$X \sim \mathbf{B} \left( n = 500.000, p = \frac{1}{100.000} \right) \Rightarrow X \approx \mathbf{Poi}(\lambda = 5)$$

Así el número esperado de personas que padecen la enfermedad es

$$\mathbf{E}[X] = 5$$

$$\mathbf{Var}[X] = 5$$

Existe una gran dispersión, y no sería extraño encontrar que en realidad hay muchas más personas o menos que están enfermas.

- b) La probabilidad de que haya más de tres personas enfermas es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[X > 3] &= 1 - \mathcal{P}[X \leq 3] \\ &= 1 - \mathcal{P}[X = 0] - \mathcal{P}[X = 1] - \mathcal{P}[X = 2] - \mathcal{P}[X = 3] \\ &= 1 - \frac{e^{-5 \cdot 0}}{0!} - \frac{e^{-5 \cdot 1}}{1!} - \frac{e^{-5 \cdot 2}}{2!} - \frac{e^{-5 \cdot 3}}{3!} \\ &= 0,735 \end{aligned}$$

# TABLA RESUMEN

Distribución	F. de densidad	Esperanza	Varianza	Observaciones
Bernoulli $B(1, p)$	$p^x q^{1-x} \quad x = 0, 1$	$p$	$pq$	
Binomial $B(n, p)$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$	$np$	$npq$	Si $n > 30$ y $p < 0.1$ es Poisson (Si $np \geq 5$ es Normal)
Poisson $P(\lambda)$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 0, 1, \dots$	$\lambda$	$\lambda$	Permite cambiar $\lambda$ , es decir, la unidad de tiempo (Si $\lambda > 30$ es Normal)
Geométrica $G(p)$	$pq^x \quad x = 1, \dots$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	Falta de memoria

## Definición:

**Bernoulli:** v.a.  $X$  es equivalente a una  $\text{Bin}(n=1, p)$

**Binomial:** v.a.  $X$  considera el  $n^\circ$  de éxitos en  $n$  pruebas independientes

**Poisson:** v.a.  $X$  considera el  $n^\circ$  de *sucesos raros* en cierto tiempo

**Geométrica:** v.a.  $X$  considera el  $n^\circ$  de FRACASOS hasta obtener el primer éxito.