

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Curso 2018/2019

Resumen de Fundamentos de Física

Mecánica y Termodinámica

Carlos Sáenz Gamasa

Departamento de Ciencias. Universidad Pública de Navarra

Índice general

I	Mecánica	1
1.	Cinemática	3
1.1.	Movimiento y trayectoria	3
1.2.	Posición, velocidad, aceleración	5
1.2.1.	Vector de posición \vec{r}	5
1.2.2.	Velocidad \vec{v}	7
1.2.3.	Aceleración \vec{a}	9
1.3.	El problema fundamental en cinemática	9
1.4.	Movimiento Circular	10
1.4.1.	Variables angulares	10
1.4.2.	Vectores de posición, velocidad y aceleración	12
1.5.	Componentes intrínsecas de la aceleración	13
1.6.	Movimiento relativo	15
2.	Leyes de Newton	29
2.1.	Momento lineal, \vec{p}	29
2.2.	Leyes de Newton	30
2.3.	Principio de superposición	31
2.4.	Algunas fuerzas comunes	31
2.4.1.	Peso, $m\vec{g}$	31
2.4.2.	La Fuerza Normal, \vec{N}	32
2.4.3.	Tensión en una cuerda, \vec{T}	32
2.4.4.	Fuerza ejercida por un muelle, $-kx$	33
2.4.5.	Fuerza de rozamiento o fricción, \vec{f}	34
2.5.	Sistemas de referencia no inerciales	35
2.6.	Momento Angular \vec{L}	36
2.7.	Momento de una fuerza, \vec{M}	38
3.	Trabajo y energía	57
3.1.	Trabajo W y energía cinética E_c	57
3.2.	Teorema trabajo-energía	58
3.3.	Fuerzas conservativas. Energía potencial.	59
3.3.1.	Energía potencial asociada al peso $m\vec{g}$	61

3.3.2. Energía potencial en un muelle	62
3.4. Energía mecánica E	62
3.5. Principio de conservación de la energía mecánica	63
3.6. Comentarios al concepto de energía	63
4. Sistemas de partículas	79
4.1. Centro de Masas (CM)	80
4.2. Momento lineal	81
4.3. Fuerzas y Segunda Ley de Newton para el sistema de partículas	82
4.3.1. Principio de conservación del momento lineal	83
4.4. Energía cinética	84
4.5. Trabajo	84
4.6. Momento angular y momento de fuerzas	86
4.7. Conservación del momento angular	87
4.8. Colisiones	87
5. Sólido rígido	101
5.1. Cuerpos sólidos, densidad	101
5.2. Vectores velocidad y aceleración angulares	103
5.3. Momento angular \vec{L}	104
5.3.1. Cálculo del Momento de Inercia	106
5.3.2. Teorema de Steiner	106
5.3.3. Momento de inercia en cuerpos planos	107
5.4. Energía cinética de rotación	107
5.5. Momento de las fuerzas \vec{M}	108
II Termodinámica	119
6. Temperatura y calor	121
6.1. Sistema, entorno,...	121
6.2. Equilibrio. Ecuación de estado	123
6.3. Procesos cuasiestáticos	123
6.4. Principio Cero de la Termodinámica. Temperatura	124
6.5. Dilatación térmica	125
6.6. Calor, Q	126
6.7. Capacidad calorífica. Calor específico	127
6.7.1. Ley de Dulong-Petit	127
6.8. Transiciones de fase y calor latente, L	128
6.9. Calorimetría	129
6.9.1. Calorímetros	129
6.10. Potencia	129

7. Primer principio de la Termodinámica	133
7.1. Trabajo W	133
7.2. Energía interna U	134
7.3. Primer principio de la Termodinámica	134
7.4. Procesos termodinámicos en un gas ideal	134
7.4.1. Proceso isoterma (T constante)	135
7.4.2. Proceso isocoro (V constante)	136
7.4.3. Proceso isóbaro (P constante)	137
7.4.4. Proceso adiabático ($Q = 0$)	138
7.4.5. Procesos cíclicos	139
8. Máquinas térmicas. Segundo principio de la Termodinámica	143
8.1. Máquinas térmicas	143
8.1.1. Motor	144
8.1.2. Refrigerador	145
8.1.3. Bomba de calor	145
8.2. Segundo principio de la termodinámica	146
8.3. Procesos reversibles y máquina de Carnot	146
A. Unidades	161
A.1. Magnitudes, dimensiones y unidades	161
A.2. Sistemas de unidades	162
A.3. Sistema Internacional (SI) de unidades	163
A.3.1. Unidades básicas del SI	163
A.3.2. Unidades derivadas en el SI	165
A.3.3. El radián. Un caso especial	166
A.4. Unidades de uso frecuente que no pertenecen al SI	167
A.5. Operando con unidades	167
A.5.1. Cambio de unidades	168
B. Derivadas	171
B.1. Notación	172
B.2. Derivadas de las funciones elementales	172
B.3. La derivada: una operación lineal	173
B.4. Derivada del producto de dos funciones	173
B.5. Derivada del cociente de dos funciones	174
B.6. Regla de la cadena	174
B.7. Derivada de la función inversa	175
B.8. Derivada segunda y siguientes	176
B.9. Derivadas parciales	177
B.10. Derivadas parciales segundas	177
B.11. Diferencial de una función	178

Parte I

Mecánica

Capítulo 1

Cinemática

Introducción

La mecánica trata fundamentalmente con objetos en movimiento y el primer paso ha de ser conocer con detalle de que forma podemos describir el movimiento de los cuerpos. Éste es el ámbito de la cinemática. En este capítulo nos centraremos en la cinemática de una partícula, que trataremos de forma general para un movimiento que en principio puede ser en las tres dimensiones del espacio.

1.1. Movimiento y trayectoria

Sobra decir que cuando un cuerpo se mueve, su posición va cambiando. Un coche que viaja entre dos ciudades recorre todos y cada uno de los puntos de la carretera entre ellas. Un ave migratoria también recorre todo un largo camino, que no podemos asociar a una carretera o a un camino material, entre dos lugares. Ese camino definido por el propio movimiento de la partícula es la trayectoria.

La trayectoria es la sucesión geométrica de los puntos ocupados por el móvil durante su movimiento.

Si se conoce la trayectoria se puede determinar la posición de una partícula especificando la distancia recorrida desde una referencia concreta, por ejemplo la ciudad de origen en el caso del coche. Si denotamos a esta distancia con la letra s entonces el punto de partida se corresponde con $s = 0$. A todos los efectos s funciona como una coordenada medida sobre la trayectoria. Si s_A y s_B son las coordenadas de los puntos A y B entonces

$$\Delta s = s_B - s_A \quad (1.1)$$

Es la distancia entre los puntos A y B medida sobre la trayectoria.

La carretera es una forma fácil de visualizar una trayectoria, pero la trayectoria, como en el caso del ave migratoria, no se corresponde con un camino “sólido”. Es una curva en el espacio.

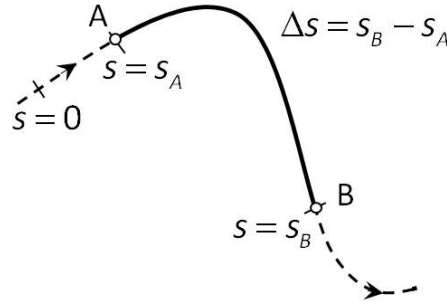


Figura 1.1: La distancia s recorrida sobre la trayectoria nos sirve de coordenada para identificar cualquier punto de la misma. Para dos puntos A y B la diferencia $\Delta s = s_B - s_A$ es la distancia entre ambos, medida sobre la trayectoria.

Como la partícula se mueve podemos ver s como una función del tiempo t . Si t_A y t_B son los tiempos en los que nos encontramos en A y B entonces

$$\Delta t = t_B - t_A \quad (1.2)$$

Es el tiempo que tarda en ir de A a B .

Dos coches que hacen el mismo viaje por la misma carretera tendrán que recorrer exactamente la misma distancia entre los puntos A y B . Sin embargo pueden hacerlo en tiempos Δt distintos. Para distinguirlos podemos utilizar lo que se denomina rapidez promedio

La rapidez promedio v_{prom} de un móvil entre dos puntos de la trayectoria es el cociente:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.3)$$

donde Δs y Δt son la distancia recorrida sobre la trayectoria entre ambos puntos y el tiempo empleado en hacerlo, respectivamente. En el SI de unidades se mide en m/s si bien se emplean otras muchas unidades según la situación, como por ejemplo km/h en el caso de vehículos.

La llamamos rapidez y no velocidad porque se trata de conceptos distintos, como veremos luego. El adjetivo “promedio” tiene que ver con el hecho de que para su cálculo usamos la distancia total recorrida sobre la trayectoria Δs y el tiempo total empleado en hacerlo Δt .

La rapidez promedio no nos da información de lo que ocurre en puntos intermedios del trayecto. Si queremos una información más detallada podemos pensar en calcular esta rapidez promedio tomando puntos más próximos entre sí. De hecho podemos pensar en tomar puntos infinitamente próximos entre sí, lo que equivale a pensar en Δt infinitamente pequeños ($\Delta t \rightarrow 0$). Al tomar este límite en (1.3) la rapidez pasa a ser una función definida para cada instante t , ya no es un valor promedio y definimos:

La rapidez v de un móvil como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.4)$$

Siendo s el espacio recorrido sobre la trayectoria, medida desde un punto de referencia arbitrario perteneciente a dicha trayectoria y siendo t el tiempo, contado desde un cierto valor de referencia arbitrario.

La rapidez se mide en m/s en el SI de unidades, si bien otras unidades como por ejemplo km/h son también muy comunes.

1.2. Posición, velocidad, aceleración

Vamos ahora a describir el movimiento mediante el uso de vectores. Para ello elegimos un punto de referencia O en el espacio y sobre él construimos un sistema de coordenadas cartesianas cuyos tres ejes denominaremos X , Y y Z . La dirección positiva de los ejes de coordenadas está determinada por los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} respectivamente (Figura 1.2).

1.2.1. Vector de posición \vec{r}

En un sistema de coordenadas cartesianas como el de la figura (1.2) la posición de un móvil en un instante t se corresponde con un punto del espacio. Un punto que queda especificado sin ambigüedad por sus tres coordenadas (x, y, z) . Como un móvil va cambiando de posición, estas tres coordenadas son en general funciones del tiempo y por tanto la posición vendrá especificada por tres funciones del tiempo $(x(t), y(t), z(t))$.

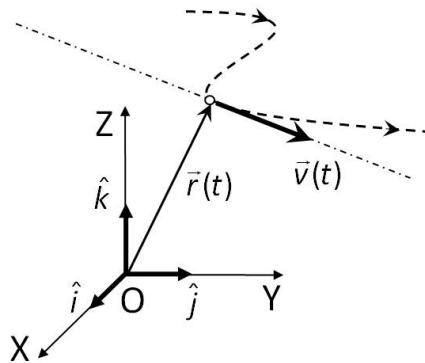


Figura 1.2: Vector de posición \vec{r} y velocidad \vec{v}

Una forma equivalente de representar esta información es mediante lo que se conoce como el vector de posición. Un vector que representamos como una flecha que va del origen de coordenadas al punto ocupado por el móvil.

El **vector de posición** \vec{r} es el vector que tiene su origen en el origen del sistema de coordenadas O y su extremo en la posición que ocupa la partícula. En coordenadas cartesianas \vec{r} viene dado por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1.5)$$

Donde x , y y z son las coordenadas de la partícula en cada uno de los ejes, o equivalentemente las componentes del vector de posición \vec{r} .

- El módulo del vector de posición, que aquí representaremos simplemente como r (esto es, con la misma letra pero sin flechita) es:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.6)$$

Y es la longitud del vector \vec{r} , la distancia recta desde origen de coordenadas O al punto P señalado por \vec{r} .

- Tanto las coordenadas x , y , y z como el propio vector de posición \vec{r} y su módulo r son longitudes y se miden en m en el SI internacional.
- Desde luego, si una partícula se mueve respecto al observador O su posición irá cambiando en el tiempo. El vector de posición es por tanto una función del tiempo, cada una de sus componentes son funciones del tiempo. Explícitamente podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.7)$$

Dejando claro que tanto las componentes como el propio vector son funciones del tiempo. Como ésto es así siempre, no es necesario escribir todo el rato el “(t)” y así podemos simplificar la escritura. Entenderemos en adelante que la dependencia de la posición con el tiempo está siempre implícita.

- Mientras no haya posibilidad de confusión podemos utilizar simplemente el término **posición** para referirnos al vector de posición o a cualquier otra forma de especificar este parámetro, siempre y cuando quede claro en el contexto.

En el apartado anterior veíamos que la diferencia Δs representaba la distancia entre dos puntos, medida sobre la trayectoria. De forma análoga podemos calcular aquí la diferencia $\Delta \vec{r}$, por ejemplo:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (1.8)$$

Y el módulo de este vector

$$\Delta r = |\Delta \vec{r}| \quad (1.9)$$

es la distancia, en línea recta, del punto A al punto B . Como puede verse en la figura (1.3) Δr no es igual a la distancia Δs recorrida por el móvil porque la trayectoria es curva. De la figura podemos deducir que $\Delta s \geq \Delta r$ y que la igualdad $\Delta s = \Delta r$ solo se produce cuando la trayectoria, entre ambos puntos, es recta.

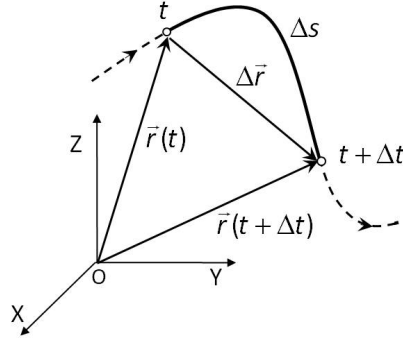


Figura 1.3: El espacio recorrido Δs y el vector $\Delta \vec{r}$ entre dos puntos de la trayectoria separados un tiempo Δt

Sabemos de la geometría elemental que para cualquier curva, un fragmento suficientemente pequeño de ella se parecerá mucho a un segmento recto¹. Es decir, según vamos aproximando los puntos que utilizamos para calcular Δs y Δr , estos dos valores se irán pareciendo cada vez más. En el límite, cuando los dos puntos se encuentran infinitamente próximos entre sí, ambos valores coinciden.

Al aproximar infinitamente ambos puntos el incremento Δs se hace infinitamente pequeño y lo representamos con el símbolo ds , que denominamos *diferencial de s*. Análogamente $d\vec{r}$ es el *diferencial de \vec{r}* y podemos verlo como el vector que conecta dos puntos infinitamente próximos de la trayectoria (figura 1.4). Finalmente $dr = |d\vec{r}|$ es el módulo de $d\vec{r}$, su longitud.

Tal y como hemos dicho, cuando ambos puntos están infinitamente próximos al distancia recta (dr) y la distancia medida sobre la trayectoria (ds) son idénticas, es decir:

$$ds = dr = |d\vec{r}| \quad (1.10)$$

Por otra parte $d\vec{r}$ es un vector que conecta dos puntos de la trayectoria infinitamente próximos entre sí. Es decir $d\vec{r}$ es un vector tangente a la trayectoria, algo que no pasaba con $\Delta \vec{r}$

1.2.2. Velocidad \vec{v}

La velocidad de una partícula mide exactamente cómo varía la posición con el tiempo, es decir, es la derivada de la posición respecto del tiempo. Como la posición es un vector, también lo es la velocidad.

La velocidad \vec{v} es la derivada del vector de posición respecto del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.11)$$

¹Desde un punto de vista puramente matemático esto no es cierto y existen ejemplos de curvas que no lo cumplen. Esos casos tienen poco que ver con trayectorias seguidas por objetos reales y podemos olvidarnos de ellos.

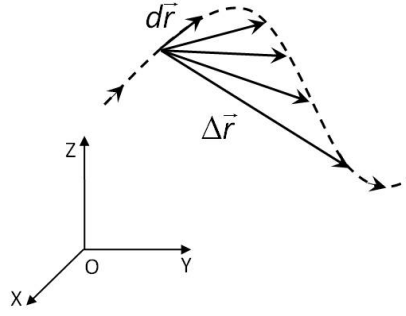


Figura 1.4: Al hacer $\Delta t \rightarrow 0$ y aproximar infinitamente los puntos que definen $\Delta \vec{r}$, éste vector tiende al vector tangente $d\vec{r}$

La rapidez v es el módulo del vector velocidad:

$$v = |\vec{v}| \quad (1.12)$$

La velocidad y la rapidez se miden en $m s^{-1}$ en el SI de unidades.

Como vector, \vec{v} en coordenadas cartesianas viene dado por:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (1.13)$$

Donde v_x , v_y y v_z son las componentes del vector velocidad \vec{v} en cada uno de los ejes. En general tanto \vec{v} como sus componentes son funciones del tiempo t :

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k} \quad (1.14)$$

Cada una de las componentes de la velocidad es simplemente la derivada de la correspondiente componente del vector de posición, es decir:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.15)$$

Al vector velocidad así definido se le denomina a veces velocidad instantánea, ya que es la velocidad en el instante t . Se le denomina instantánea para diferenciarla de la velocidad promedio. No obstante cuando decimos simplemente velocidad siempre nos referimos a la velocidad instantánea definida en (1.11)

A partir de la definición (1.11) se deduce inmediatamente que:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad (1.16)$$

Por tanto los vectores $d\vec{r}$ y \vec{v} son proporcionales (dt es un escalar) o, dicho de otra forma, **$d\vec{r}$ y \vec{v} son siempre paralelos**. Como $d\vec{r}$ es un vector tangente a la trayectoria, el vector velocidad \vec{v} también lo es.

La ecuación (1.11) o equivalentemente la ecuación (1.16) son el punto de partida para obtener \vec{r} a partir de \vec{v} .

1.2.3. Aceleración \vec{a}

La aceleración de una partícula mide exactamente cómo varía la velocidad con el tiempo, es decir, es la derivada de la velocidad

La aceleración \vec{a} es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.17)$$

En el SI de unidades la aceleración se mide en m/s^2 .

Como vector, \vec{a} en coordenadas cartesianas viene dado por:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (1.18)$$

Donde a_x , a_y y a_z son las componentes del vector aceleración \vec{a} en cada uno de los ejes. Desde luego, en general tanto \vec{a} como sus componentes son funciones del tiempo t :

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \hat{i} + a_y(t) \hat{j} + a_z(t) \hat{k} \quad (1.19)$$

Y cada una de las componentes cartesianas de la aceleración es simplemente la derivada de la correspondiente componente de la velocidad, es decir:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (1.20)$$

Como hacíamos con la velocidad en el apartado anterior, podemos reescribir (1.17)

$$d\vec{v} = \vec{a} dt \quad (1.21)$$

En este caso el vector aceleración, a diferencia de la velocidad, no tiene por que ser tangente a la trayectoria ya que aunque \vec{v} es tangente a la trayectoria $d\vec{v}$ no tiene por que serlo.

Como antes, tomando (1.17) o equivalentemente (1.21) podremos calcular \vec{v} a partir de \vec{a} .

1.3. El problema fundamental en cinemática

Es muy importante darse cuenta que si uno conoce la posición de una partícula para cualquier instante de tiempo, es decir $\vec{r}(t)$ para todo instante t , entonces lo sabe todo sobre el movimiento. A partir de \vec{r} la \vec{v} o la \vec{a} por ejemplo se obtienen simplemente derivando respecto del tiempo. Sin embargo, en la realidad, no solemos conocer $\vec{r}(t)$ a priori. Mas bien determinar $\vec{r}(t)$ suele ser el objetivo en muchas situaciones. Como veremos al estudiar las Leyes de Newton, muchas veces lo que conocemos (con suerte) son las fuerzas que actúan sobre una partícula, lo que equivale a conocer la aceleración de la partícula. El problema será obtener el vector de posición \vec{r} a partir de la aceleración \vec{a} . Matemáticamente este proceso es integrar. Precisamente este proceso no va a ser tan fácil porque integrar una función puede ser difícil, incluso imposible (al menos analíticamente). Esta situación se resume en la figura 1.5.

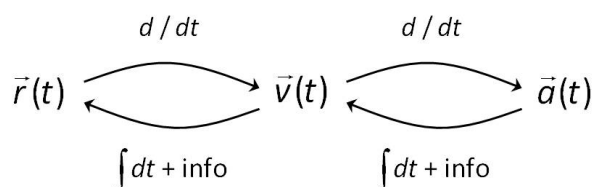


Figura 1.5: Relación entre las variables cinemáticas

1.4. Movimiento Circular

El movimiento circular es muy importante porque es muy común. Basta pensar en cualquier maquinaria, motor o mecanismo para encontrar un sin fin de piezas como ejes, ruedas, engranajes, etc que giran de una u otra forma. El movimiento circular es, además, un buen ejemplo para profundizar en el significado y relación de las distintas variables cinemáticas.

En el movimiento circular el móvil se mueve sobre una circunferencia. La circunferencia es una figura geométrica estupenda porque es muy sencilla. La circunferencia es una figura plana definida como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro punto denominado centro. La distancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro se denomina radio.

En un sistema de coordenadas cartesianas la ecuación de una circunferencia de radio r , situada en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas O es:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.22)$$

Donde x e y son las coordenadas cartesianas de cualquier punto P de la circunferencia. Como puede verse en la figura, la relación (1.22) no es mas que el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo formado por el radio r (hipotenusa) y a las coordenadas x e y (catetos).

Lo que hace simple a la circunferencia es que podemos utilizar un ángulo para especificar la posición de cualquier punto P sobre ella. Como sabemos el ángulo θ se define a partir de la longitud de un arco s de circunferencia y ambas magnitudes cumplen la relación:

$$s = r\theta \quad (1.23)$$

1.4.1. Variables angulares

Tanto el ángulo θ como el arco s nos sirven para especificar la posición de un punto P . Simplemente tenemos que definir una referencia para ambos. Referido al sistema de coordenadas cartesianas anterior (figura 1.6), se mide el ángulo respecto del eje positivo de las X , siendo el ángulo positivo si se contabiliza en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido antihorario). De esta forma el ángulo $\theta = 0$ corresponde con el punto P_0 de coordenadas $x = r$, $y = 0$. Para mantener la validez de la relación (1.23) mediremos la

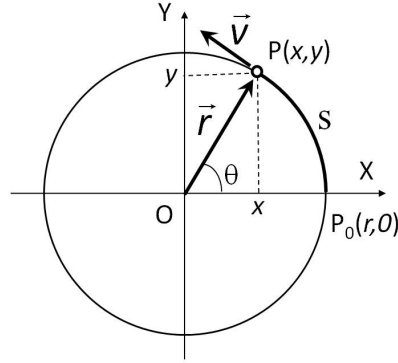


Figura 1.6: Movimiento circular.

longitud del arco de circunferencia s también desde ese punto. Evidentemente, en función de las necesidades, tanto el ángulo como el arco pueden medirse desde otra posición

Supongamos que un móvil se mueve siguiendo esta circunferencia y que en el instante inicial $t = 0$ se encuentra en el punto P_0 . Supongamos que el móvil se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj y que tras un cierto tiempo t se encuentra en el punto P . Como en cualquier movimiento podemos definir la distancia recorrida sobre la trayectoria s tomando como referencia el punto inicial P_0 . En este caso s es la longitud del arco de circunferencia que va de P_0 a P . Para cada instante de tiempo t el móvil se encontrará en un punto P distinto y por tanto $s = s(t)$ es una función del tiempo.

El arco s y el ángulo θ se relacionan mediante (1.23) y si una de ellas es función del tiempo la otra también. Explícitamente:

$$s(t) = r \cdot \theta(t) \quad (1.24)$$

Para medir el cambio del ángulo con el tiempo definimos al

Velocidad angular ω como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.25)$$

La velocidad angular ω mide el ritmo al que cambia el ángulo respecto del tiempo. La velocidad angular en el SI se mide en rad/s . Otras unidades comunes pueden ser revoluciones por minuto (rev/min o rpm) o revoluciones por segundo (rev/s o rps). La velocidad angular es positiva si el móvil se mueve en sentido antihorario (θ aumenta con el tiempo) y negativa si se mueve en sentido horario (θ decrece con el tiempo).

Y análogamente, para medir el cambio de la velocidad angular con el tiempo, se define

Aceleración angular α como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.26)$$

Que mide el ritmo al que cambia la velocidad angular. En el SI se mide en rad/s^2 .

1.4.2. Vectores de posición, velocidad y aceleración

También podemos especificar la posición de la partícula en la circunferencia mediante un vector de posición \vec{r} (figura 1.6). Siendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ las coordenadas cartesianas, podemos escribir \vec{r} como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} = r (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad (1.27)$$

Y derivando, calcula \vec{v} y \vec{a} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (1.28)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + r\alpha (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (1.29)$$

Si nos fijamos en las expresiones anteriores, los términos entre paréntesis son vectores de módulo 1, es decir, vectores unitarios. Si definimos los vectores \hat{r} y $\hat{\theta}$

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (1.30)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (1.31)$$

$$|\hat{r}|^2 = |\hat{\theta}|^2 = 1 \quad (1.32)$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \quad (1.33)$$

El vector \hat{r} tiene la misma dirección y sentido que el vector \vec{r} . El vector $\hat{\theta}$ es tangente a la circunferencia y lleva el sentido del ángulo θ creciente, es decir, sentido antihorario.

En función de estos vectores unitarios podemos reescribir la posición, velocidad y aceleración como:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (1.34)$$

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta} \quad (1.35)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\theta} \quad (1.36)$$

El vector aceleración \vec{a} queda así escrito como la suma de dos términos. El primero $(-r\omega^2\hat{r})$ es un vector dirigido hacia el centro de la circunferencia, ya que su dirección es $-\hat{r}$. El segundo término $(r\alpha\hat{\theta})$ lleva la dirección del vector $\hat{\theta}$, que es la dirección de la velocidad \vec{v} , si bien el sentido dependerá de si α es positiva o negativa.

Teniendo en cuenta que \hat{r} y $\hat{\theta}$ son vectores mutuamente perpendiculares, estas dos componentes de la aceleración también lo son. De acuerdo con la dirección que tiene cada una de ellas, a la primera, dirigida hacia el centro de la circunferencia, le llamaremos **aceleración centrípeta** \vec{a}_c y a la segunda, que es tangente a la circunferencia, **aceleración tangencial** \vec{a}_t

Usando estas definiciones podemos escribir

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t \quad (1.37)$$

$$\vec{a}_c = -r\omega^2 \hat{r} \quad (1.38)$$

$$\vec{a}_t = r\alpha \hat{\theta} \quad (1.39)$$

Cuyos módulos cumplen

$$a_c = |\vec{a}_c| = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad (1.40)$$

$$a_t = |\vec{a}_t| = r|\alpha| \quad (1.41)$$

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \quad (1.42)$$

La utilidad de descomponer la aceleración en sus componentes centrípeta y tangencial tiene su razón de ser en que estas componentes representan dos efectos distintos. Pensemos por ejemplo en el caso particular de un movimiento circular con velocidad angular constante. En este caso $\alpha = 0$ luego $\vec{a}_t = 0$ y $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t = \vec{a}_c = -r\omega^2 \hat{r}$.

Por tanto, aunque el móvil se mueve con velocidad angular constante, la aceleración no es cero. No hay que olvidar que la aceleración \vec{a} es un vector que mide el cambio temporal de la velocidad \vec{v} . Un vector puede cambiar en módulo o bien en la dirección y sentido en el que apunta. En el caso de un movimiento circular con velocidad angular constante el módulo de la velocidad $v = \omega/r$ también permanece constante pero la dirección del vector \vec{v} cambia continuamente, ya que en cada posición de la circunferencia \vec{v} es siempre tangente. La aceleración centrípeta está asociada al cambio en la dirección de \vec{v} y no al cambio su magnitud.

Por otra parte, si $\alpha \neq 0$ entonces la aceleración tangencial tampoco se anula. La componente a_t de \vec{a}_t en la dirección de $\hat{\theta}$ es:

$$a_t = r\alpha = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d(v/r)}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad (1.43)$$

La aceleración tangencial nos indica cómo cambia la componente de la velocidad a la cual recorreremos la circunferencia. El hecho de que la aceleración angular sea o no nula no afecta a la expresión de la aceleración centrípeta, si bien es cierto que cuando $\alpha \neq 0$ entonces ω no es constante y por tanto $v = r\omega$ tampoco. Esto quiere decir que el valor de a_c irá cambiando con el tiempo.

1.5. Componentes intrínsecas de la aceleración

La idea de descomponer la aceleración en dos componentes con significado propio puede hacerse para cualquier movimiento. Estas componentes se llaman componentes intrínsecas de la aceleración.

Sabemos que

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad (1.44)$$

Y que $d\vec{r}$ y \vec{v} son tangentes a la trayectoria. Llamando \hat{t} al vector unitario tangente (módulo 1) que tiene la misma dirección y sentido que \vec{v} , podemos escribir:

$$\vec{v} = v\hat{t} \quad (1.45)$$

Esta expresión sirve para enfatizar que por un lado la velocidad puede cambiar porque cambie su módulo, es decir, nos movemos más rápido sobre la trayectoria, pero por otra parte puede cambiar porque cambie su dirección en el espacio. El vector velocidad, como tal, puede variar por uno cualquiera de estos motivos o por los dos, según el movimiento.

Derivando la expresión anterior respecto del tiempo se obtiene la aceleración \vec{a} que se puede escribir de forma general como:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.46)$$

El primer vector, \vec{a}_t tiene la dirección de \hat{t} , es un vector (aceleración) tangente a la trayectoria. A esta componente de la aceleración se denomina **aceleración tangencial**. La componente de \vec{a}_t en la dirección de \vec{v} es $a_t = dv/dt$ la derivada de la rapidez respecto del tiempo. Es decir, mide la aceleración sobre la trayectoria.

El vector \vec{a}_n es un vector (aceleración) siempre perpendicular a la trayectoria, es decir, siempre perpendicular (normal) a la velocidad. Esta componente de la aceleración se denomina **aceleración normal**.

En el caso del movimiento circular, la aceleración normal coincide con lo que llamábamos aceleración centrípeta. El nombre de centrípeta, que literalmente significa “dirigido al centro”, se suele reservar para el movimiento circular. El nombre de aceleración normal se aplica a cualquier movimiento. Podemos definir el “vector normal” \hat{n} como el vector unitario (módulo 1) en la dirección de la aceleración normal y así escribir

$$\vec{a}_t = a_t\hat{t} \quad (1.47)$$

$$\vec{a}_n = a_n\hat{n} \quad (1.48)$$

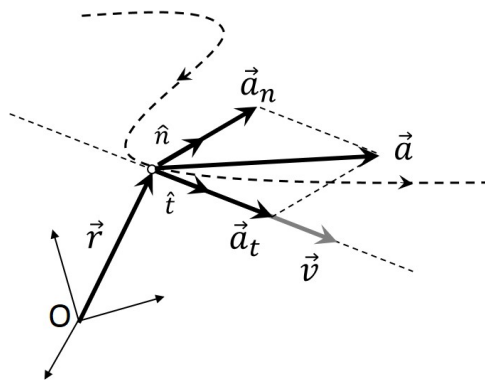


Figura 1.7: Componentes intrínsecas de la aceleración \vec{a}_n , \vec{a}_t y vectores unitarios tangente \hat{t} y normal \hat{n}

Donde los vectores unitarios \hat{t} y \hat{n} cumplen

$$|\hat{t}|^2 = |\hat{n}|^2 = 1 \quad (1.49)$$

$$\hat{t} \cdot \hat{n} = 0 \quad (1.50)$$

La similitud existente con lo que hemos visto en el movimiento circular nos permite definir

El radio de curvatura R en un punto de la trayectoria es el radio de la circunferencia correspondiente a un movimiento circular que tenga idénticos valores de velocidad y aceleración normal a los que existen en dicho punto. Si v y a_n son los módulos de la velocidad y de la aceleración normal en dicho punto. El radio de curvatura viene dado por

$$R = \frac{v^2}{a_n} \quad (1.51)$$

En cada punto de la trayectoria el radio de curvatura puede ser distinto (figura 1.8). Puede demostrarse que el radio de curvatura coincide con el radio de la circunferencia tangente en dicho punto. Como se muestra en la figura, la circunferencia tangente es siempre interior a la curva descrita por la trayectoria. De hecho su centro está en la dirección de la aceleración normal. La circunferencia tangente será pequeña si R es pequeño, lo que significa que la trayectoria se curva fuertemente. Si R es grande indica una curva suave. Si la $\vec{a}_n = 0$ el radio de curvatura es $R = \infty$, es decir se trata de una línea una recta. Esto se corresponde perfectamente con el hecho de que cuando $\vec{a}_n = 0$ el movimiento es rectilíneo.

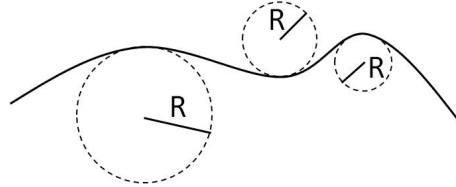


Figura 1.8: Radio de curvatura.

1.6. Movimiento relativo

Para describir el movimiento de una partícula hemos usado un sistema de coordenadas: tres ejes orientados y fijos en algún lugar. Las componentes del vector de posición en ese sistema representan la posición de la partícula medida sobre los ejes (coordenadas de la partícula). Evidentemente si un segundo observador, situado en otro lugar, quiere describir el movimiento de la misma partícula puede colocar su sistema de coordenadas en otro sitio, e incluso con otra orientación, de forma que sus tres ejes de coordenadas no

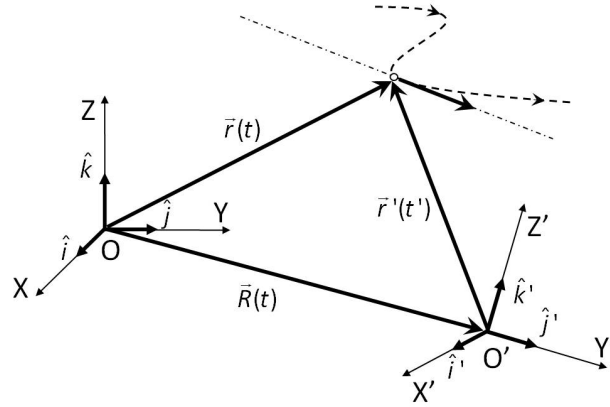


Figura 1.9: El movimiento de una partícula visto desde los observadores O y O'

tienen por que ser paralelos a los que usa el primer observador. El vector de posición para este segundo observador será distinto, en tanto que las coordenadas de la partícula en sus ejes serán otras. En otras palabras, el movimiento es relativo, depende del observador que lo describe.

Por otro lado, como se trata de la misma partícula, debe existir una relación entre lo que ven y describen ambos observadores. Ésto es precisamente lo que nos interesa ahora. Vamos a pensar en una partícula que se está moviendo y en dos observadores O y O' que describen dicho movimiento. En este apartado utilizaremos primas ($'$) para distinguir todas aquellas variables que hacen referencia al observador O' . Así \vec{r} será el vector de posición según el observador O y \vec{r}' será el vector de posición según el observador O' . Análogamente para el resto de variables.

Quizás uno está pensando que los observadores están quietos, pero esto no tiene por qué ser así. Desgraciadamente el movimiento de un observador respecto del otro puede complicar mucho el estudio del movimiento relativo. La principal complicación surge cuando uno de los observadores está girando respecto del otro. Esta situación, a pesar de ser relativamente frecuente, no la trataremos en este curso.

Por el contrario, sí vamos a permitir que los observadores se puedan desplazar uno respecto del otro, pero siempre manteniendo la orientación relativa de sus ejes de coordenadas.

Fijémonos en la figura (1.9). Tenemos los dos observadores y cada uno tiene su propio sistema de referencia. El observador O usa el sistema cartesiano X, Y y Z cuyos vectores direccionales son \hat{i}, \hat{j} y \hat{k} . El tiempo para el observador O es t y por ejemplo, el vector de posición de la partícula es

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.52)$$

Donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las coordenadas de la partícula en los ejes X, Y y Z , y son funciones del tiempo ya que la partícula se mueve.

Análogamente, el observador O' utiliza su propio sistema de coordenadas cartesianas X' , Y' y Z' cuyos vectores direccionales son \hat{i}' , \hat{j}' y \hat{k}' , en principio distintos a los del observador O . El tiempo para el observador O' es t' y por ejemplo, el vector de posición de la partícula es

$$\vec{r}'(t') = x'(t')\hat{i}' + y'(t')\hat{j}' + z'(t')\hat{k}' \quad (1.53)$$

En la figura hemos dibujado también $\vec{R}(t)$. Este vector tiene su origen en O y acaba en O' . Es el vector de posición de O' visto desde O . El vector $\vec{R}(t)$ esta “escrito” en el sistema O . Como hemos admitido que los observadores se muevan uno respecto del otro este vector es una función del tiempo, en concreto del tiempo t medido por el observador O . Dicho todo esto, y de acuerdo con la figura (1.9), la relación entre $\vec{r}(t)$, $\vec{R}(t)$ y $\vec{r}'(t')$ es muy fácil, ya que se cumple evidentemente que:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t') \quad (1.54)$$

Ahora, para simplificar el estudio haremos las siguientes hipótesis:

- Consideraremos que el tiempo t medido por el observador O y el tiempo t' medido por el observador O' son iguales, es decir

$$t = t' \quad (1.55)$$

Esta condición, que estrictamente hablando no es cierta, se puede considerar válida siempre y cuando las velocidades de partículas y sistemas de referencia sean mucho menores que la velocidad de la luz. Si no fuese así sería necesario utilizar las expresiones relativistas.

En este sentido, y a partir de ahora, no hace falta distinguir entre los tiempos de uno u otro sistema. De hecho, siendo el mismo tiempo para ambos, podemos evitar escribir el “(t)” todo el rato.

- Los sistemas de coordenadas asociados a los observadores O y O' se pueden desplazar uno respecto del otro pero siempre de forma paralela, es decir, sin cambiar la orientación relativa de sus ejes. En otras palabras, permitimos que los sistemas de coordenadas se desplacen, incluso aceleradamente uno del otro, pero no permitimos que roten uno respecto del otro. Esto se traduce en que los vectores unitarios \hat{i} , \hat{i}' , \hat{j} , \hat{j}' , \hat{k} y \hat{k}' pueden considerarse constante en el tiempo. Si no fuese así, al calcular las derivadas temporales aparecerían términos que nosotros no vamos a considerar aquí.

Con estas simplificaciones la ecuación anterior queda:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad (1.56)$$

Ahora todo depende de una única variable tiempo t . Podemos derivar esta expresión respecto del tiempo, lo que nos dará una ecuación en velocidades:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad (1.57)$$

Donde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ es la velocidad de la partícula vista por O , $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt$ es la velocidad de la partícula vista por O' y $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ es la velocidad del observador O' , visto por O .

Finalmente, podemos volver a derivar, ahora la ecuación (1.57) y obtener la relación entre las aceleraciones

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' \quad (1.58)$$

Donde $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ es la aceleración de la partícula vista por O , $\vec{a}' = d\vec{v}'/dt$ es la aceleración de la partícula vista por O' y $\vec{A} = d\vec{V}/dt$ es la aceleración del observador O' , visto por O . Usaremos esta ecuación (1.58) en el próximo capítulo.

Ejemplo 1.1. Desde lo alto de una torre (24 m) se lanza horizontalmente una piedra que cae al suelo a 18 m de la base de la torre. ¿Con qué velocidad se lanzó la piedra? ¿Con qué velocidad choca contra el suelo?

Solución:

El movimiento de caída libre bajo la acción de la gravedad es un ejemplo de movimiento con aceleración constante \vec{a}_0 , cuyas ecuaciones del movimiento son:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 \quad (1a)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t \quad (1b)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 \quad (1c)$$

Donde en este caso la aceleración \vec{a}_0 es la aceleración de la gravedad

$$\vec{a}_0 = \vec{g}$$

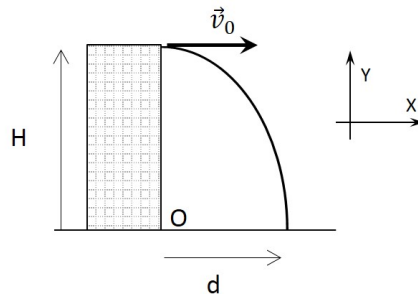
Resolver el problema requiere:

- Particularizar estas ecuaciones para la situación concreta.
- Elegir un sistema de coordenadas y transcribir las ecuaciones vectoriales (1)

Vamos a elegir un sistema de ejes XY con origen en la esquina inferior de la torre, O , de tal forma que el eje X será horizontal y positivo hacia la derecha y el eje Y vertical y positivo hacia arriba (figura). Tomaremos el origen de tiempos ($t = 0$) en el momento en el que la piedra es lanzada.

Usando estos ejes podemos identificar los distintos elementos en (1)

- La gravedad está dirigida verticalmente hacia abajo, $\vec{g} = -g\hat{j}$, con $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- La velocidad inicial solamente tiene componente horizontal (positiva) $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$
- Inicialmente el objeto se encuentra en $\vec{r}_0 = H\hat{j}$



Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones (1) escritas en componentes, quedan

$$a_x = 0 \quad (2a)$$

$$a_y = -g \quad (2b)$$

$$v_x = v_0 \quad (2c)$$

$$v_y = -gt \quad (2d)$$

$$x = v_0 t \quad (2e)$$

$$y = H - gt^2/2 \quad (2f)$$

Estas ecuaciones nos dan las componentes de la aceleración, velocidad y posición en cualquier instante de tiempo t . También son válidas para el instante particular $t = t_s$ en el que la piedra impacta con el suelo y del cual sabemos ambas coordenadas ($x = d = 18\text{ m}$, $y = 0$)

Para obtener el tiempo que tarda la piedra en caer al suelo t_s podemos usar (2f) con $y = 0$.

$$0 = H - gt_s^2/2$$

$$t_s = \sqrt{2H/g} = 2.21\text{ s}$$

En $t = t_s$ la piedra impacta en $x = d$. Usando (2e)

$$d = v_0 t_s$$

$$v_0 = \frac{d}{t_s} = \frac{18}{2.21} = 8.14\text{ m/s}$$

Que es la velocidad con que se lanzó la piedra.

En cuanto a la velocidad en el momento del impacto, de acuerdo con (2c) sabemos que la componente horizontal es constante durante toda la caída y su valor es $v_x = v_0 = 8.14\text{ m/s}$.

La componente vertical puede obtenerse de (2d) sustituyendo el tiempo t por su valor en el momento del impacto $t = t_s$

$$v_y = -gt_s = -9.81 \cdot 2.21 = -21.68\text{ m/s}$$

Y con ambas componentes, el valor de la velocidad es

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = 8.14 \hat{i} - 21.68 \hat{j}\text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8.14^2 + (-21.68)^2} = 23.16\text{ s}$$

Ejemplo 1.2. Una partícula se desplaza en el eje X con una aceleración dada por la ecuación $a = 3t^2$ donde t está en s y a en m/s^2 . En el instante $t = 0$ su velocidad es de 2 m/s y su posición es $x = 3 \text{ m}$. Determinar la velocidad y posición de la partícula en el instante $t = 2 \text{ s}$.

Solución:

En este ejemplo la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

no es constante, sino que es una función del tiempo. Esto quiere decir que para encontrar la velocidad v debemos integrar directamente (1). Como el movimiento transcurre en el eje X no es necesario usar vectores y podemos utilizar únicamente las componentes. Como se sobreentiende que todas las componentes son componentes en el eje X no hará falta utilizar el subíndice 'x' y lo hemos omitido en (1) y en las siguientes expresiones.

En este caso integrar (1) es sencillo, ya que la aceleración es directamente una función del tiempo. Basta sustituir su valor en (1)

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ a dt &= dv \\ 3t^2 dt &= dv \end{aligned} \quad (2)$$

Y ahora integrar. Como en muchas ocasiones podemos optar por dos métodos. O bien realizamos las integrales definidas, identificando convenientemente los límites de integración, o bien realizamos las integrales indenifidas y evaluamos las constantes de integración a posteriori.

Vamos a hacerlo por ambos métodos.

Integral definida

Para ello debemos identificar los límites de integración. Sabemos que en $t = 0$ la velocidad es $v = 2 \text{ m/s}$. Podemos usar estos valores como límite inferior de las integrales. Para el límite superior dejaremos las variables t y v y así obtener la función $v(t)$. Las integrales son inmediatas.

$$\begin{aligned} \int_0^t 3t^2 dt &= \int_2^v dv \\ [t^3]_0^t &= [v]_2^v \\ t^3 &= v - 2 \\ v &= t^3 + 2 \end{aligned} \quad (3)$$

En $t = 2 \text{ s}$ la velocidad será

$$v = 2^3 + 2 = 10 \text{ m/s}$$

Para obtener la posición podemos seguir un procedimiento análogo, ya que v es una función del tiempo.

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt} \\v dt &= dx \\(t^3 + 2)dt &= dx\end{aligned}\tag{4}$$

Para los límites de integración tendremos en cuenta (límite inferior) que en $t = 0$ la coordenada $x = 3 \text{ m}$. De nuevo dejaremos el límite superior con las variables t y x .

$$\begin{aligned}\int_0^t (t^3 + 2)dt &= \int_3^x dx \\[(1/4)t^4 + 2t]_0^t &= [x]_3^x \\(1/4)t^4 + 2t &= x - 3 \\x &= t^4/4 + 2t + 3\end{aligned}\tag{5}$$

Y en $t = 2 \text{ s}$ la posición será

$$x = 2^4/4 + 2 \cdot 2 + 3 = 11 \text{ m}$$

Integral indefinida

Si queremos hacer las integrales indefinidas partimos de las mismas expresiones. Para la velocidad integramos (2), pero sin poner los límites en las integrales. Al obtener las primitivas nos saldrá una constante de integración.

$$\begin{aligned}\int dv &= \int 3t^2 dt \\v &= t^3 + v_0\end{aligned}\tag{6}$$

Hemos escrito la constante de integración como v_0 por dos motivos. En primer lugar debe tener dimensiones de velocidad, ya que todos los términos de la expresión son velocidades. Por otra parte hemos puesto el subíndice '0' para indicar que se trata de una constante.

Para evaluar la constante de integración usamos que la velocidad es $v = 2 \text{ m/s}$ en el instante $t = 0$. Insertando estos dos valores en (6) obtenemos v_0

$$\begin{aligned}2 &= 0^3 + v_0 \\v_0 &= 2 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Con lo que recuperamos el resultado (3)

De forma análoga podemos hacer para encontrar la posición, a partir de (4)

$$\begin{aligned}\int dx &= \int (t^3 + 2)dt \\x &= (1/4)t^4 + 2t + x_0\end{aligned}$$

Y ahora, usando que en $t = 0$ la coordenada $x = 3 \text{ m}$

$$3 = (1/4) \cdot 0^4 + 2 \cdot 0 + x_0$$
$$x_0 = 3 \text{ m}$$

Y también recuperamos el resultado (5)

Notas:

- Al poner los límites en las integrales definidas como en (3) debemos mantener la correspondencia de los límites superior e inferior en ambos lados. Podemos poner los límites inferiores $t = 0$ y $v = 2 \text{ m/s}$ y dejar los superiores como t y v o bien podemos poner t y v como límites inferiores y $t = 0$ y $v = 2 \text{ m/s}$ como límites superiores.

Esto es porque al cambiar los límites de orden el signo de la integral cambia.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Pero si cambiamos los límites en ambos lados, los dos cambios de signo se cancelan.

Ejemplo 1.3. Una canoa lleva una velocidad v_0 . Después de parar el motor, ésta tiene una aceleración de sentido opuesto a su velocidad y directamente proporcional al cuadrado de esta; es decir $dv/dt = -kv^2$, siendo k una constante.

- Demuéstrese que el valor v de la velocidad en el instante t después de parar el motor está dado por $1/v = 1/v_0 + kt$
- Pruébese que la distancia x recorrida en un tiempo t es $x = (1/k) \ln(1 + v_0 kt)$
- Demuéstrese que la velocidad después de recorrer una distancia x es $v = v_0 e^{-kx}$

Solución:

En este ejemplo la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad (1)$$

No es contante. Esto quiere decir que para encontrar la velocidad v debemos integrar directamente (1). Integrar es siempre un paso delicado. En este caso podemos llevar todo lo que depende de v a un lado, y todo lo que depende de t al otro.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv^2 \\ \frac{dv}{v^2} &= -k dt \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora (2) puede integrarse. Muchas veces podemos optar por realizar una integral definida o una indefinida, siendo ambos procedimientos equivalentes. En este caso haremos una integral definida. Para ello necesitamos poner los límites de integración. Como sabemos que en $t = 0$ la velocidad es v_0 podemos poner estos valores en el límite inferior.

Como límite superior usaremos t y v , para así, al evaluar los límites, ambas variables quedarán en la expresión final

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -k \int_0^t dt$$

En la integral en ' dt ' hemos extraído $-k$ ya que es constante.

Ambas integrales son inmediatas. El signo '-' resultante de la integral en dv se va a cancelar con el existente en el miembro de la derecha.

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v &= -k [t]_0^t \\ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} &= kt \end{aligned} \quad (3)$$

Y obtenemos el resultado exigido en el apartado (a).

Para obtener la posición x a partir de la velocidad debemos integrar otra vez:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ v dt &= dx \end{aligned} \quad (4)$$

Con v obtenida a partir de (3)

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

Sustituyendo en (4) e integrando. Usaremos como límite inferior la condición de que $x = 0$ en $t = 0$ y dejaremos el límite superior con las variables x y t

$$\begin{aligned} dx &= \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt \\ \int_0^x dx &= \int_0^t \frac{v_0}{1 + kv_0 t} dt \\ [x]_0^x &= \frac{1}{k} [\ln(1 + kv_0 t)]_0^t \\ x &= \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 t) \end{aligned} \tag{5}$$

Que es el resultado del apartado (b).

Para obtener el resultado del apartado (c) podemos usar (5) para despejar $t = t(x)$

$$t = \frac{1}{k} \frac{e^{kx} - 1}{v_0}$$

Y sustituirlo directamente en (3) por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} &= kt \\ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} &= \frac{e^{kx} - 1}{v_0} \\ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} &= \frac{e^{kx}}{v_0} - \frac{1}{v_0} \\ \frac{1}{v} &= \frac{e^{kx}}{v_0} \end{aligned}$$

De donde obtenemos el resultado deseado

$$v = v_0 e^{-kx}$$

Notas:

- En este problema el movimiento ocurre en una sola dimensión (eje X). No es necesario utilizar vectores y se simplifican los cálculos.

Ejemplo 1.4. La velocidad de una partícula que se mueve en un círculo de radio $R=2$ m se incrementa con una aceleración constante de 4.4 m/s^2 . En el instante en que la aceleración total de la partícula es de 6 m/s^2 , ¿Cuál es la velocidad de la partícula?

Solución:

Un cuerpo que describe un movimiento circular está siempre sometido a una aceleración normal o centrípeta \vec{a}_n , dirigida al centro de la circunferencia. El valor de esta aceleración depende del módulo de la velocidad v y del radio de la circunferencia R

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

Por otra parte, si el cuerpo describe un movimiento circular acelerado, como en este caso, además de la aceleración centrípeta estará sometido a una aceleración tangencial \vec{a}_t cuyo valor indica el ritmo al que cambia el módulo de la velocidad

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

La aceleración total \vec{a} de un cuerpo que describe un movimiento circular es la suma vectorial de la centrípeta y de la tangencial

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad (3)$$

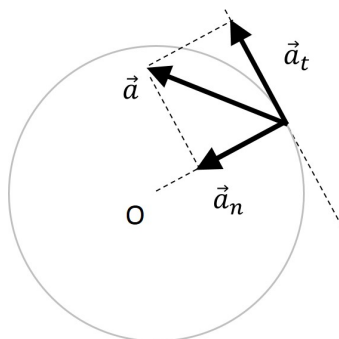
Como \vec{a}_n y \vec{a}_t son mutuamente perpendiculares los módulos de las aceleraciones en (3) están relacionados por el teorema de pitágoras

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 \quad (4)$$

El problema nos dice que $a = 6 \text{ m/s}^2$ y que $a_t = 4.4 \text{ m/s}^2$. A partir de estos valores (4) nos proporciona el valor de a_n que luego podemos usar en (1) para obtener v .

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{6^2 - 4.4^2} = 4.08 \text{ m/s}^2$$

$$v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{4.08 \cdot 2} = 2.86 \text{ m/s}$$



Ejemplo 1.5. El movimiento de un cuerpo está descrito por el vector posición $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} - 2t\hat{j} + 4\hat{k}$. Determinar su trayectoria así como la velocidad, la aceleración tangencial, la aceleración normal y el radio de curvatura en el instante $t = 2$ s.

Solución:

En la ecuación $\vec{r}(t)$ se encuentra toda la información del movimiento. Por ejemplo podemos obtener \vec{v} y \vec{a} sin más que derivar respecto del tiempo.

$$\vec{r} = t^2\hat{i} - 2t\hat{j} + 4\hat{k} \quad (1a)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\hat{i} - 2\hat{j} \quad (1b)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{i} \quad (1c)$$

En $t = 2$ s estos vectores son

$$\vec{r} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k} \text{ m} \quad (2a)$$

$$\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} \text{ m/s} \quad (2b)$$

$$\vec{a} = 2\hat{i} \text{ m/s}^2 \quad (2c)$$

A partir de la velocidad \vec{v} en (2b) podemos determinar el vector unitario tangente \hat{t} en el instante $t = 2$ s sin más que dividirla por su módulo.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \text{ m/s} = 4.47 \text{ m/s}$$

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{4\hat{i} - 2\hat{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{i} - \hat{j}) \quad (3)$$

La aceleración tangencial \vec{a}_t es la proyección de \vec{a} en la dirección tangente. Su valor a_t se obtiene haciendo el producto escalar:

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{t} = 2\hat{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{i} - \hat{j}) = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1.79 \text{ m/s}^2$$

Como $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ y \vec{a}_n y \vec{a}_t son mutuamente perpendiculares, se cumple que

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

A partir de la cual podemos obtener a_n

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - 1.79^2} = 0.89 \text{ m/s}^2$$

El radio de curvatura R se obtiene de la expresión

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{0.89} = 22.5 \text{ m}$$

Ejemplo 1.6. El pasajero de un barco que viaja en línea recta hacia el Este a 18 nudos observa que el chorro de humo de las chimeneas forma un ángulo de 20° con la estela que deja el barco en el agua. El viento sopla de Sur a Norte. Suponemos que el humo que sale por la chimenea adquiere la misma velocidad que el viento (medida respecto de la superficie del agua) tan pronto como sale de la chimenea. Con estos datos, calcúlese la velocidad del viento.

Podemos dar la velocidad en nudos, que es la unidad habitual usada en relación con la navegación. En cualquier caso, 1 nudo equivale a 1 milla (náutica) por hora o aproximadamente $1 \text{ nudo} = 1.852 \text{ km/h}$.

Solución:

Se trata de relacionar la velocidad del viento medida por dos observadores, que en este caso ambos son inerciales, que se mueven uno respecto del otro. Vamos a considerar:

- El observador O a un observador en reposo respecto de la superficie del mar. Este observador ve el viento con una velocidad \vec{v} que es la que queremos determinar. Respecto de O el barco se mueve con velocidad \vec{V}
- El observador O' es el pasajero, situado en el barco. Ve que el humo, es decir el viento, se mueve respecto de él con velocidad \vec{v}'

La relación entre las velocidades viene dada por:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad (1)$$

De donde podemos despejar directamente

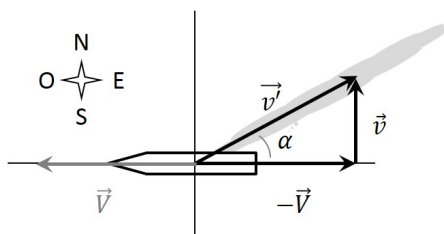
$$\vec{v}' = \vec{v} + (-\vec{V}) \quad (2)$$

Lo he escrito de esta forma, dejando el signo menos dentro del paréntesis, para dejar claro que el vector \vec{v} es la suma vectorial de dos vectores, el vector \vec{v}' y el vector $(-\vec{V})$, como se muestra en la figura. De la figura podemos escribir

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{v}'|}{|-\vec{V}|} = \frac{v}{V}$$

Y por tanto

$$v = \tan \alpha \cdot V = \tan 20^\circ \cdot 18 = 6.55 \text{ nudos} = 12.13 \text{ km/h}$$



Capítulo 2

Leyes de Newton

Introducción

En el capítulo 1 nos preocupábamos de describir el movimiento de los cuerpos. Es ahora el momento de pensar en la causa del movimiento, o como veremos con más precisión enseguida, en las causas del cambio en el estado de movimiento de un cuerpo. La causa de que el movimiento de un cuerpo cambie es la fuerza. Por fuerza entendemos en general un tipo de acción de un cuerpo sobre otro. El peso de los cuerpos, empujar un cuerpo sobre una superficie para moverlo, tirar de un cuerpo mediante una cuerda para izarlo son ejemplos de situaciones en las que intervienen fuerzas que además identificamos fácilmente con situaciones de la experiencia cotidiana.

Para poder relacionar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo con su efecto en el movimiento necesitamos una “receta” adecuada. Esta receta son las Leyes de Newton, fundamentales en todo lo que resta de la Mecánica.

2.1. Momento lineal, \vec{p}

Cuando pretendemos mover un cuerpo, sabemos que su masa es un factor a tener en cuenta. Es más fácil mover un objeto ligero que otro pesado. Es más fácil cambiar el movimiento de un cuerpo ligero que de uno pesado. La masa m no importaba en el capítulo anterior, pero ahora va a ser esencial. Precisamente para considerar la masa de los cuerpos en movimiento se define una nueva cantidad, el momento lineal.

Momento lineal o cantidad de movimiento \vec{p} de una partícula de masa m y velocidad \vec{v} es

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

El momento lineal en el SI de unidades se mide en kgms^{-1} , unidad que no tiene nombre especial.

2.2. Leyes de Newton

En términos del momento lineal, las Leyes de Newton son:

Primera ley o Ley de Inercia. Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme a lo largo de una línea recta a menos que sea obligado a cambiar dicho estado por la acción de una fuerza sobre él.

Segunda ley. El cambio en el momento lineal de una partícula es proporcional a la fuerza aplicada y se produce en la dirección de ésta.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.2)$$

En caso de que la masa m de la partícula sea constante, entonces se reduce simplemente a:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ si } m \text{ es constante} \quad (2.3)$$

En el SI de unidades la unidad de fuerza es el newton (N), siendo $N \equiv kgms^{-2}$.

Tercera ley o ley de acción y reacción A cada acción siempre se opone una reacción igual y contraria; las fuerzas mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en sentidos opuestos.

De acuerdo con la figura (2.1), siendo \vec{F}_{12} la fuerza sobre la partícula 1 debido a la presencia de la partícula 2 (acción) y siendo \vec{F}_{21} la fuerza sobre la partícula 2 debido a la presencia de la partícula 1 (reacción), se cumple:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \quad (2.4)$$

Las leyes de Newton son válidas para los observadores inerciales. **Un observador inercial es aquél que verifica las condiciones de la primera ley.** En otras palabras, un observador inercial no está sometido a ninguna aceleración. A diferencia de la velocidad la aceleración es una magnitud absoluta y un observador siempre puede determinar su propia aceleración. En la última sección de este capítulo se analizará cómo un observador no inercial puede usar las ecuaciones de la dinámica (la segunda ley de Newton)

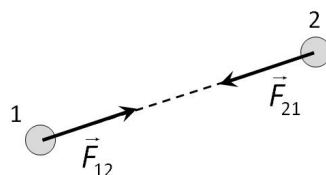


Figura 2.1: Tercera ley de Newton o ley de acción y reacción.

2.3. Principio de superposición

A todos los efectos la fuerza se describe matemáticamente como un vector. Cuando actúan diversas fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ sobre una partícula, el efecto total de todas ellas puede describirse simplemente mediante el efecto de una única fuerza \vec{F} (llamada a veces fuerza resultante o simplemente fuerza total sobre la partícula) igual a la suma vectorial de las anteriores. Se dice por tanto que las fuerzas verifican el principio de superposición:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (2.5)$$

Cuando tratamos con muchas fuerzas, bien podríamos escribir la ecuación (2.3) como

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (2.6)$$

Donde se entiende que $\sum_i \vec{F}_i$ engloba todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

2.4. Algunas fuerzas comunes

Sin ánimo de ser exhaustivos, veamos algunos ejemplos de fuerzas que aparecen habitualmente.

2.4.1. Peso, $m\vec{g}$

El peso de un cuerpo es quizás la fuerza más común en nuestra experiencia cotidiana. Se debe a la atracción gravitatoria entre el cuerpo y la Tierra y es una fuerza dirigida siempre hacia abajo y de valor

$$m\vec{g} \quad (2.7)$$

Donde \vec{g} es la aceleración de la gravedad y cuyo módulo g varía ligeramente según el lugar en el que nos encontremos. Nosotros tomaremos como referencia, sobre la superficie terrestre, $g = |\vec{g}| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

Conviene recordar que la dirección “abajo” realmente es “hacia el centro de la Tierra”¹ y que es la dirección de la gravedad la que precisamente define la dirección “abajo” en la superficie terrestre.

Se puede tomar la gravedad \vec{g} como un vector constante siempre y cuando no nos alejemos mucho de la superficie terrestre (comparado con el radio de la Tierra) y siempre y cuando no comparemos la gravedad en dos lugares muy alejados en la superficie terrestre, pues la superficie terrestre es curva y \vec{g} viene a ser perpendicular a la superficie terrestre, supuesta ésta esférica.

¹Aproximadamente

2.4.2. La Fuerza Normal, \vec{N}

Como ya hemos visto en más de una ocasión, usamos la palabra normal como sinónimo de perpendicular. Cuando dos cuerpos están en contacto, la Fuerza Normal es la fuerza entre ellos, perpendicular a la superficie de contacto. La designaremos con el símbolo \vec{N} . Su módulo depende de las circunstancias concretas del contacto, como se puede ver en los ejemplos de la figura (2.2) donde se ha supuesto que no existe rozamiento entre las superficies (el rozamiento lo trataremos en el siguiente apartado).

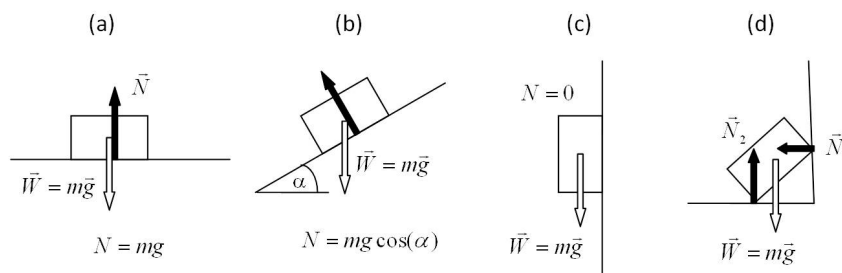


Figura 2.2: La fuerza Normal siempre es perpendicular a la superficie. Su módulo depende de las situaciones.

En el caso (a) de la figura un cuerpo descansa sobre una superficie horizontal. El cuerpo está en reposo y por tanto $\sum \vec{F}_i = 0$. Sobre este cuerpo actúa el peso $m\vec{g}$, que está dirigido hacia abajo y la normal \vec{N} ejercida por la superficie horizontal sobre el cuerpo, y que compensa exactamente al peso. Por tanto el módulo aquí es $N = mg$.

En el caso (b) el cuerpo descansa sobre una superficie inclinada un ángulo α respecto de la horizontal. Aunque el cuerpo se desplace, lo hará paralelo a la superficie. En la dirección perpendicular a la superficie no hay aceleración y por tanto las fuerzas en esa dirección deben dar una resultante nula. Aquí el módulo de la normal ha de ser igual a la componente del peso perpendicular a la superficie, $N = mg \cos \alpha$.

En (c) la superficie de contacto es vertical. Como el peso del cuerpo es vertical, no ejerce ningún tipo de fuerza sobre la superficie vertical, la normal ha de ser cero $\vec{N} = 0$.

Finalmente, el caso (d) muestra una situación en la cual existen dos fuerzas normales \vec{N}_1 y \vec{N}_2 actuando sobre el cuerpo, ya que este apoya en dos superficies simultáneamente.

2.4.3. Tensión en una cuerda, \vec{T}

Cuerdas, hilos, alambres, sirgas y objetos similares son comunes en muchas situaciones ya sea para sostener cuerpos o para transmitir fuerzas entre ellos. La tensión en una cuerda (o similar) es la fuerza que usamos para describir el efecto de una cuerda conectada a un objeto.

Las cuerdas reales, cuando las tensamos, se estiran. Unas más y otras menos. Este comportamiento elástico complica todos los análisis y nosotros supondremos siempre que la cuerda es inextensible. Ésto suele ser una muy buena aproximación en la mayor parte de los casos.

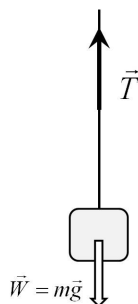


Figura 2.3: Tensión en una cuerda.

Imaginemos una masa m que cuelga del techo mediante una cuerda inextensible (Figura 2.3). Desde luego, si no estuviese la cuerda el objeto se caería por su propio peso. La cuerda lo mantiene en equilibrio, luego $\sum \vec{F}_i = 0$ sobre el cuerpo. Por un lado tenemos su peso $m\vec{g}$ dirigido hacia abajo. Por otro lado tenemos la fuerza que hace la cuerda sobre el objeto, la tensión \vec{T} , que compensa exactamente el peso, y que está dirigida hacia arriba. En este ejemplo, si nos preguntamos ¿con qué fuerza tira la cuerda del objeto? la respuesta es: con una fuerza igual al peso del objeto.

Ahora bien, la cuerda está unida al techo, ¿con qué fuerza tira la cuerda del techo?. Está claro que el techo sostiene al objeto y a la cuerda, así que la fuerza que hace el techo (hacia arriba) sobre el extremo superior de la cuerda será la suma de los pesos del objeto y de la cuerda. La cuerda, en ese punto, hace sobre el techo la misma fuerza pero dirigida hacia abajo (es la reacción).

Si la masa de la cuerda es pequeña comparada con la del objeto, no habrá mucha diferencia entre las fuerzas en estos dos puntos. En general las masas de las cuerdas, alambres o hilos que usamos para sostener o conectar objetos son mucho menores que las de los propios objetos y podemos pensar, con muy buena aproximación, que dichas cuerdas tienen masa nula. Si en este ejemplo pensamos que la cuerda no tiene masa, las fuerzas en ambos puntos serían iguales e iguales al peso del objeto. De hecho, si cortásemos la cuerda por cualquier punto yuviésemos que hacer nosotros el papel de la cuerda, tendríamos que hacer siempre la misma fuerza, que sería la tensión de la cuerda en dicho punto, igual al peso del objeto.

En una cuerda inextensible y sin masa, la tensión T es la misma en todos los puntos de la cuerda entre dos objetos. A estas cuerdas a veces se les llama cuerdas ideales. Como norma nosotros siempre consideraremos que las cuerdas son ideales.

2.4.4. Fuerza ejercida por un muelle, $-kx$

Cuando estiramos un muelle éste reacciona, oponiéndose a nuestro esfuerzo. Igualmente, cuando comprimimos un muelle su reacción es de oposición, intentando estirarse otra vez. En ambos casos el muelle responde a nuestra acción mediante una reacción en dirección opuesta. Como se trata de fuerzas y deformaciones en una única dirección podemos obviar el carácter vectorial de ambos y trabajar solamente con las componentes.

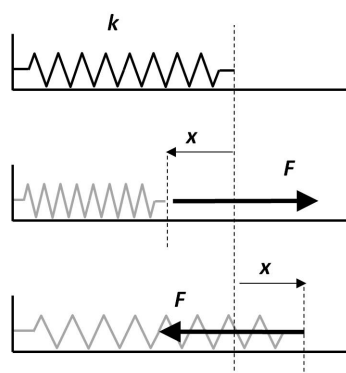


Figura 2.4: Fuerza en un muelle.

Todo muelle presenta una longitud dada cuando está en reposo. Con ayuda de la figura (2.4) pensemos en un muelle horizontal y que se encuentra inicialmente relajado, ésto es, no está ni estirado ni comprimido. Llamemos x a la deformación del muelle, que será $x = 0$ inicialmente. Si comprimimos el muelle hacia la izquierda ($x < 0$) la fuerza restauradora del muelle será hacia la derecha ($F > 0$). Si por el contrario, estiramos el muelle ($x > 0$) la fuerza recuperadora será entonces hacia la izquierda ($F < 0$).

Se comprueba además que si las deformaciones del muelle no son muy grandes, el valor de la fuerza es proporcional al valor de la deformación. Combinando esta idea con la del signo relativo de fuerza y deformación podemos escribir que la ecuación que relaciona ambos es:

$$F = -kx \quad (2.8)$$

Siendo k una constante que se mide en N/m y que depende del muelle. Esta relación se denomina Ley de Hooke y se verifica en otras situaciones similares, no solamente con muelles.

2.4.5. Fuerza de rozamiento o fricción, \vec{f}

Cuando se pretende deslizar un cuerpo sobre otro aparece una fuerza en la superficie de contacto que se opone a dicho movimiento de desplazamiento. Este tipo de fuerzas se denominan de rozamiento o fricción y las vamos a representar con una “f” minúscula \vec{f} . Se trata de fuerzas que son siempre paralelas a la superficie de contacto entre los cuerpos.

El valor de la fuerza de rozamiento depende de dos factores. Uno es la naturaleza de las superficies en contacto. Por ejemplo es fácil deslizar un objeto sobre hielo pero difícil sobre un suelo de goma.

El otro factor es si existe o no movimiento relativo de los objetos. Por ejemplo, si tratamos de empujar horizontalmente un objeto que descansa sobre una superficie cualquiera, con una fuerza pequeña, el objeto no se moverá. La razón es la fuerza de rozamiento entre el objeto y la superficie, que se opone a la que nosotros hacemos, llegando a compensarla. Esto se denomina rozamiento estático. Si aumentamos la fuerza

sobre el objeto, llegará un momento en que comience a moverse. Sigue existiendo una fricción, un rozamiento con la superficie, pero no es suficiente para evitar el movimiento. Este rozamiento que se produce cuando el objeto se mueve se denomina rozamiento cinético. Para un mismo objeto y superficie, el valor del rozamiento estático o cinético no tiene por qué ser igual.

Rozamiento estático se da cuando no existe movimiento relativo entre las superficies. La fuerza de rozamiento \vec{f} es siempre paralela a las superficies y su módulo f es

$$f \leq \mu_e N \quad (2.9)$$

Donde N es el módulo de la fuerza normal entre las superficies en contacto y μ_e es un coeficiente adimensional denominado coeficiente de rozamiento estático y cuyo valor depende de la naturaleza de las superficies.

Rozamiento cinético se da cuando existe movimiento relativo entre las superficies. La fuerza de rozamiento \vec{f} es siempre paralela a las superficies y su módulo f es

$$f = \mu_c N \quad (2.10)$$

Donde N es el módulo de la fuerza normal entre las superficies en contacto y μ_c es un coeficiente adimensional denominado coeficiente de rozamiento cinético y cuyo valor depende de la naturaleza de las superficies.

Como vemos la fuerza de rozamiento estática tiene un valor máximo. Si en el ejemplo anterior, al empujar horizontalmente el cuerpo superamos ese valor, entonces el cuerpo se moverá. A partir de ese momento deberemos considerar el rozamiento cinético. Los valores de los coeficientes de rozamiento varían mucho dependiendo de los materiales en contacto. Por otra parte, para idénticos materiales, los coeficientes estático y cinético no tienen por qué ser iguales y muchas veces el cinético es menor (pero no mayor). Por ese motivo cuesta más comenzar a mover algo arrastrándolo que mantener el movimiento una vez empezado.

2.5. Sistemas de referencia no inerciales

Las Leyes de Newton son válidas para un observador inercial, esto es, que no está sujeto a aceleración. En la práctica hay muchas situaciones donde nos interesa describir un movimiento desde el punto de vista de un observador que está acelerado, observador no inercial. Conviene recordar aquí lo que se vió en el capítulo anterior sobre el movimiento relativo.

Supongamos que tenemos dos observadores: el observador O es un observador inercial y el observador O' es un observador no inercial que se mueve, respecto de O , con una aceleración \vec{A} . Ambos quieren describir el movimiento de la misma partícula, como hacíamos en el capítulo 1, pero ahora nos interesa conocer qué pasa con las fuerzas.

Como el observador O es inercial, puede aplicar la Segunda Ley de Newton y escribir:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.11)$$

Donde se entiende que \vec{F} es la fuerza total actuando sobre la partícula. Esta fuerza tiene su origen en interacciones tales como el peso, tensiones en cuerdas, fuerzas normales, muelles, etc.

Para ver que pasa con el observador no inercial O' podemos usar la relación existente entre las aceleraciones medidas por ambos observadores (1.58).

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' \quad (2.12)$$

Que ahora podemos sustituir en (2.11) obteniendo

$$\vec{F} = m(\vec{A} + \vec{a}') = m\vec{A} + m\vec{a}' \quad (2.13)$$

Si queremos que esto se parezca a la segunda ley, escrita para el observador O' lo podemos reescribir

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}' \quad (2.14)$$

Llegados a este punto vemos que tenemos un término nuevo en la ecuación, el término $-m\vec{A}$. Desde luego tiene dimensiones de fuerza y, si lo incluimos en la “lista de fuerzas” actuando sobre la partícula, entonces esta ecuación es como la segunda ley de Newton. Pero se trata de una “fuerza” un tanto curiosa ya que tiene su origen en el propio movimiento acelerado del observador O' . Si la aceleración de O' es muy grande, este término será también grande. Si es pequeña entonces este término también lo será. Además la dirección de esta “fuerza” es siempre opuesta a la dirección de la aceleración de O' , \vec{A} .

El término $-m\vec{A}$ no es por tanto una fuerza como las que estamos acostumbrados y cuyo origen es una interacción directa entre cuerpos. Sin embargo, usándolo podemos seguir aplicando la Segunda Ley de Newton incluso desde sistemas de referencia no inerciales. A este término le llamaremos “fuerza no inercial” para dejar claro su origen.²

2.6. Momento Angular \vec{L}

El momento angular \vec{L} es uno de los conceptos más importantes de la física. En su definición utilizaremos el producto vectorial de dos vectores. El producto vectorial aparece en muchas ocasiones cuando de alguna forma entra en juego el concepto de rotación.

²Existen otros nombres alternativos que pueden encontrarse en los libros como “fuerza ficticia” o “pseudofuerza”. Aquí he preferido el término “fuerza no inercial” porque deja claro su origen, salvo por el cual este término es, a todos los efectos, tan “real” como las demás.

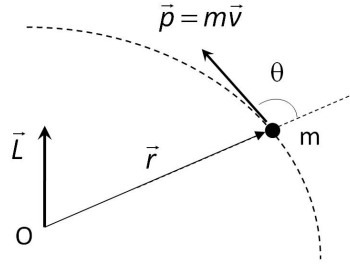


Figura 2.5: Momento angular \vec{L} de una partícula respecto de un punto O .

El Momento Angular \vec{L} respecto de un punto O de una partícula que se mueve con momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ es el producto vectorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.15)$$

Donde \vec{r} es el vector que va de O a la partícula. Por su propia definición se trata de un vector contenido en la recta perpendicular al plano definido por los vectores \vec{r} y \vec{p} . El sentido de \vec{L} viene dado por la “regla del tornillo” girando \vec{r} sobre \vec{p} por el camino más corto y su módulo es

$$L = |\vec{L}| = rp \sin \theta = mrv \sin \theta \quad (2.16)$$

Siendo θ el ángulo que forman los vectores \vec{r} y \vec{p}

El momento angular se mide, en el SI de unidades, en $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$, que no tiene un nombre especial.

De la definición se deduce inmediatamente que \vec{L} puede anularse si se dan una o varias de las siguientes circunstancias.

$$\vec{L} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 & , \vec{r} \text{ y } \vec{p} \text{ son paralelos } (\theta = 0) \text{ o antiparalelos } (\theta = \pi) \\ \vec{r} = 0 & , \text{ el punto } O \text{ coincide con la partícula} \\ \vec{p} = 0 & , \text{ la partícula no se mueve respecto de } O \text{ } (\vec{v} = 0) \end{cases}$$

Un caso particularmente importante es el de una partícula de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} constante (figura 2.6). Su momento lineal \vec{p} también es constante y la trayectoria es una línea recta.

Si calculamos el momento angular respecto de O , entonces \vec{L} es perpendicular al plano que contiene a \vec{r} y \vec{p} , tal y como se ha dibujado. Su módulo viene dado por (2.16)

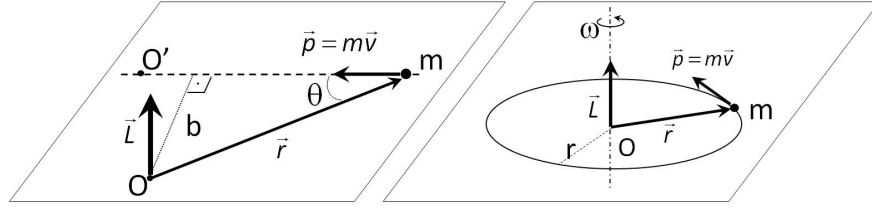


Figura 2.6: Momento angular \vec{L} de una partícula que se mueve con \vec{p} constante (izquierda) y de una partícula que se mueve con movimiento circular (derecha).

y teniendo en cuenta que la distancia entre O y la recta que describe la partícula es $b = r \sin \theta$, entonces

$$L = mrv \sin \theta = mvb \quad (2.17)$$

Que es una constante, pues tanto m , v y b lo son. A b se le denomina parámetro de impacto y es el valor de la distancia entre la partícula y el punto O en el momento de máximo acercamiento. Si calculamos el momento angular desde un punto O' situado sobre la recta que describe la partícula entonces \vec{r} y \vec{p} serán antiparalelos ($\theta = \pi$, $\sin \theta = 0$) y $\vec{L}' = 0$. O si uno prefiere, a la vista de la ecuación (2.17), el momento angular se anula ya que el parametro de impacto $b = 0$.

Otro caso especialmente interesante es cuando la partícula se mueve en una circunferencia, siendo la velocidad angular ω (figura 2.6). La circunferencia tiene centro O y desde luego define un plano, que se ha dibujado en la figura. El momento angular respecto de O será perpendicular a ese plano y su sentido viene dado por la regla del tornillo.

En este caso el momento angular es perpendicular al plano que contiene la circunferencia descrita por m (tanto \vec{r} como \vec{p} están en dicho plano). Si ω es la velocidad angular de m respecto de O (no necesariamente constante) entonces la velocidad lineal es $v = r\omega$. Teniendo en cuenta esto, el módulo del momento angular es:

$$L = |\vec{L}| = mrv = mr^2\omega \quad (2.18)$$

En caso de que ω y r sean constantes, entonces el momento angular también lo es. Si calculamos el momento angular respecto de un punto O' que no coincide con el centro de la circunferencia, por ejemplo en el mismo eje que O pero situado por debajo o por encima del plano, entonces el momento angular tendrá una componente fuera del eje. Es decir, en general el momento angular no tiene porque ser paralelo al eje de rotación.

2.7. Momento de una fuerza, \vec{M}

En muchas ocasiones un cuerpo está obligado a girar respecto de un punto o un eje fijos. En esos casos la experiencia nos dice que el efecto de una fuerza depende del lugar de aplicación de dicha fuerza respecto del punto o eje (por ejemplo al abrir una puerta).

En ocasiones esta relación es importante aunque no exista un eje de rotación fijo. Para describir estas ideas se define:

El Momento de Fuerzas \vec{M} de una fuerza \vec{F} respecto de un punto O es el producto

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.19)$$

Donde \vec{r} es el vector que va del punto O al punto de aplicación de la fuerza.

Se trata por tanto de un vector en la recta perpendicular al plano definido por los vectores \vec{r} y \vec{F} cuyo sentido viene dado por la “regla del tornillo” girando \vec{r} sobre \vec{F} por el camino más corto y cuyo módulo es

$$M = |\vec{M}| = rF \sin \theta \quad (2.20)$$

Siendo θ el ángulo que forman los vectores \vec{r} y \vec{F} .

El momento de fuerzas a veces se denomina torque y su valor, como en el caso del momento angular, depende del punto O elegido. En el SI de unidades se expresa normalmente en newtons \times metro, Nm siendo $Nm = kgm^2s^{-2}$. Aunque sus dimensiones (fuerza \times longitud) coinciden con las de la energía y el trabajo, no se utiliza el julio. Esta unidad (Nm) no tiene un nombre especial.

Por su propia definición \vec{M} puede anularse si se dan una o varias de las siguientes circunstancias.

$$\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 & , \vec{r} \text{ y } \vec{F} \text{ son paralelos } (\theta = 0) \text{ o antiparalelos } (\theta = \pi) \\ \vec{r} = 0 & , \text{ la fuerza se aplica en el mismo punto } O \\ \vec{F} = 0 & , \text{ no se aplica fuerza alguna} \end{cases}$$

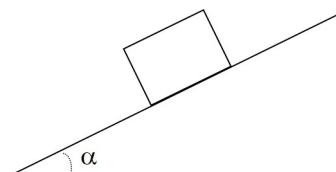
Derivando respecto del tiempo la ecuación (2.15) se comprueba que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2.21)$$

Ecuación cuya importancia, en dinámica de rotación, es comparable a la Segunda Ley de Newton y que nos será de gran utilidad en el contexto del movimiento del sólido rígido.

Ejemplo 2.1. Un bloque de masa $M=2$ kg se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 40^\circ$ con la horizontal. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano inclinado son respectivamente $\mu_e = 0.4$ y $\mu_c = 0.3$.

- Determinar si el bloque deslizará por el plano inclinado.
- En caso afirmativo, calcular la aceleración del bloque.
- Para los coeficientes de rozamiento establecidos. Calcular el valor máximo que puede tener el ángulo α para que el bloque no deslice.



Solución:

El bloque tiene tendencia a deslizarse hacia abajo por el plano inclinado debido a su propio peso. Esta tendencia será mayor cuanto mayor sea el ángulo α . Si el bloque se desliza o no dependerá también del valor de la fuerza de rozamiento.

Para resolver este problema necesitaremos utilizar la Segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

que nos relaciona fuerzas y aceleración para un cuerpo.

Para ello debemos

- Identificar las fuerzas y escribir la Segunda Ley de Newton para el cuerpo.
- Transcribir estas ecuaciones a un sistema de referencia concreto.

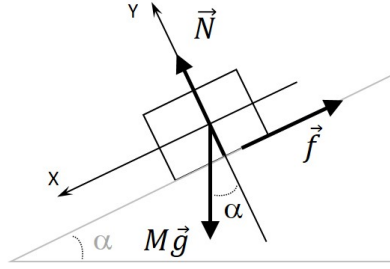
Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tal y como se muestran en la figura, son: su propio peso $M\vec{g}$; la fuerza normal \vec{N} que ejerce la superficie del plano inclinado sobre el cuerpo, y que es perpendicular al plano inclinado, y la fuerza de rozamiento \vec{f} , paralela al plano inclinado.

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a} \quad (1)$$

Utilizaremos un sistema de coordenadas cartesianas XY con el eje X paralelo al plano inclinado y positivo hacia abajo y con el eje Y perpendicular al plano inclinado y positivo hacia arriba.

Con nuestra elección de ejes XY la aceleración del bloque \vec{a} solamente puede tener no nula la componente X. Por tanto (1) se traduce en

$$\begin{aligned} Mg \sin \alpha - f &= Ma_x & (\text{eje X:2a}) \\ -Mg \cos \alpha + N &= 0 & (\text{eje Y:2b}) \end{aligned}$$



Para que el bloque deslice la aceleración debe ser $a_x \geq 0$, es decir, debemos verificar si se cumple la relación:

$$Mg \sen \alpha - f \stackrel{?}{\geq} 0 \quad (3)$$

El coeficiente de rozamiento estático es mayor que el cinético ($\mu_e > \mu_c$). Eso significa que la fuerza de rozamiento es mayor cuando el bloque está en reposo que cuando desliza. Si el bloque empieza a moverse, ya no se parará.

Estando en reposo, la fuerza de rozamiento es $f \leq \mu_e N$, con μ_e el coeficiente de rozamiento estático. El valor máximo de la fuerza de rozamiento será $f_{max} = \mu_e N$ con la normal N dada por (2b)

$$\begin{aligned} N &= Mg \cos \alpha \\ f_{max} &= \mu_e N = \mu_e Mg \cos \alpha \end{aligned}$$

Que sustituimos en la ecuación (3)

$$\begin{aligned} Mg \sen \alpha - \mu_e Mg \cos \alpha &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ Mg (\sen \alpha - \mu_e \cos \alpha) &\stackrel{?}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Para que deslice la cantidad dentro del paréntesis debe ser ≥ 0 . En nuestro caso

$$\sen \alpha - \mu_e \cos \alpha = \sen 40^\circ - 0.4 \cos 40^\circ = 0.34 > 0$$

Y por lo tanto el bloque deslizará, lo que responde a la primera pregunta del problema (a).

Como el bloque desliza podemos calcular la aceleración usando (2a) y (2b) y teniendo en cuenta que, al haber movimiento, la fuerza de rozamiento será:

$$f = \mu_c N \quad (3)$$

Siendo μ_c el coeficiente de rozamiento cinético. Usando (3) en las ecuaciones (2a) y (2b):

$$\begin{aligned} Mg \sen \alpha - f &= Ma_x \\ Mg \sen \alpha - \mu_c N &= Ma_x \\ Mg \sen \alpha - \mu_c Mg \cos \alpha &= Ma_x \\ g (\sen \alpha - \mu_c \cos \alpha) &= a_x \end{aligned}$$

Numéricamente, la solución al apartado (b) es:

$$a_x = g (\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha) = 9.81 (\sin 40^\circ - 0.3 \cos 40^\circ) = 4.05 \text{ m/s}^2$$

Finalmente en el apartado (c) volvemos a encontrar la situación en que el cuerpo está a punto de deslizarse, por tanto la fuerza de rozamiento se corresponde con la fuerza máxima en caso de rozamiento estático $f_{max} = \mu_e N$ que usaremos junto con las ecuaciones (2a) y (2b). Además tendremos en cuenta que al no haber movimiento $a_x = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} Mg \sin \alpha - f &= 0 \\ Mg \sin \alpha - \mu_e N &= 0 \\ Mg \sin \alpha - \mu_e Mg \cos \alpha &= 0 \\ \sin \alpha - \mu_e \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Que podemos resolver para el ángulo α tal y como se nos pide

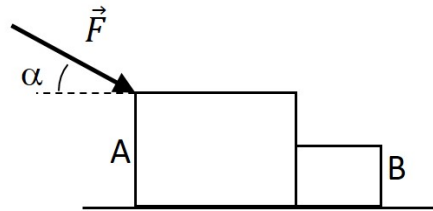
$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \mu_e \\ \alpha &= \arctan \mu_e = \arctan(0.4) = 21.8^\circ \end{aligned}$$

Que como vemos es menor que 40° , por lo que el bloque deslizaba en las condiciones de los apartados (a) y (b)

Notas:

- La elección del sistema de coordenadas es arbitraria y siempre tenemos libertad para elegir el que mejor nos parezca. Elegir adecuadamente simplifica las operaciones y la resolución del problema.
- En este problema no ha sido necesario usar la masa M del bloque en ninguno de los apartados, podíamos haber obviado ese dato.

Ejemplo 2.2. Dos bloques A y B se hallan en contacto sobre un plano horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre cada bloque y el plano son 0.1 y 0.2 respectivamente. Una fuerza constante se aplica sobre el bloque A formando un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la horizontal de modo que ambos bloques se ven empujados con una aceleración de 0.3 m/s^2 . Sabiendo que la masa de A es de 10 kg y la masa de B es 5 kg, calcular la fuerza de contacto entre los bloques y el valor de la fuerza F .



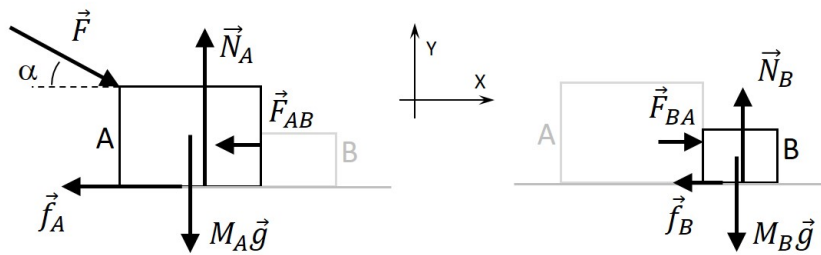
Solución:

La Segunda Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ nos relaciona fuerzas y aceleración para un cuerpo. Cuando se tienen varios cuerpos, como en este caso, hay que plantearla para cada uno de ellos. La relación existente en el movimiento de los cuerpos o en su interacción mutua implica que sus ecuaciones del movimiento también estarán relacionadas.

Por tanto la estrategia a seguir será:

- Identificar las fuerzas y escribir la Segunda Ley de Newton para cada cuerpo.
- Transcribir estas ecuaciones a un sistema de coordenadas concreto.
- Tener en cuenta las relaciones existentes entre ambos cuerpos.

Para cada uno de los bloques las fuerzas son las que se muestran en la figura



En el caso del bloque A tenemos la fuerza externa \vec{F} , de la cual sabemos su orientación pero no su módulo, que es una de las preguntas del problema. Además actúan sobre A, a lo largo de la dirección vertical, su propio peso $M_A\vec{g}$ y la fuerza normal \vec{N}_A ejercida por la superficie horizontal. En la dirección horizontal, paralela a la superficie, tenemos la fuerza de rozamiento \vec{f}_A , que estará dirigida en sentido contrario al movimiento, y la fuerza \vec{F}_{AB} debida a la presencia del bloque B.

$$\vec{F} + M_A\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{f}_A + \vec{F}_{AB} = M_A\vec{a}_A \quad (1)$$

En esta ecuación es importante resaltar el papel de la fuerza \vec{F}_{AB} . La interacción entre cuerpos se traduce en la aparición de fuerzas entre ellos. La fuerza \vec{F}_{AB} es la fuerza que B ejerce sobre A, y por tanto hay que tenerla en cuenta para estudiar el movimiento de A. Análogamente el cuerpo A ejerce una fuerza sobre B, \vec{F}_{BA} que tendremos en cuenta al escribir la Segunda Ley de Newton para B. Estas fuerzas verifican la Tercera Ley de Newton y por tanto:

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

Que, como hemos visto, equivale a decir que ambas fuerzas tienen igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos. Como tienen igual módulo se cumplirá, y utilizaremos más adelante, que

$$F_{AB} = F_{BA}$$

Como el movimiento es horizontal y hacia la derecha vamos a elegir, como se muestra en la figura, un sistema de coordenadas XY con X horizontal y positivo hacia la derecha y con Y vertical y positivo hacia arriba.

Sabemos que ambos bloques se desplazan horizontalmente con la misma aceleración, por tanto las componentes X de la aceleración de A y B son iguales, y podemos llamarla simplemente a_x . La componente vertical de las aceleraciones de A y B es cero. Así la ecuación (1) en componentes cartesianas queda:

$$F \cos \alpha - f_A - F_{AB} = M_A a_x \quad (2a)$$

$$-F \sin \alpha - M_A g + N_A = 0 \quad (2b)$$

En el caso del bloque B, y en la dirección vertical, deberemos tener en cuenta su propio peso $M_B \vec{g}$ y la fuerza normal \vec{N}_B . En la dirección horizontal la fuerza de rozamiento \vec{f}_B y la fuerza \vec{F}_{BA} debida a la presencia del bloque A.

$$M_B \vec{g} + \vec{N}_B + \vec{f}_B + \vec{F}_{BA} = M_B \vec{a}_B \quad (3)$$

Que, como en el caso anterior, podemos escribir para los ejes XY de la figura. De nuevo la aceleración horizontal es simplemente a_x , como la del bloque A.

$$-f_B + F_{BA} = M_B a_x \quad (4a)$$

$$-M_B g + N_B = 0 \quad (4b)$$

Como el sistema se está desplazando, los módulos de las fuerzas de rozamiento sobre A y B tienen un valor bien definido y son $f_A = \mu_A N_A$ y $f_B = \mu_B N_B$ donde μ_A y μ_B son los coeficientes de rozamiento cinético entre los bloques A y B y la superficie, que en este caso son distintos.

Usando además $F_{AB} = F_{BA}$ para eliminar uno de ellos, por ejemplo F_{BA} , las ecuaciones (2a), (2b), (4a) y (4b) quedan finalmente:

$$F \cos \alpha - \mu_A N_A - F_{AB} = M_A a_x \quad (5a)$$

$$-F \sin \alpha - M_A g + N_A = 0 \quad (5b)$$

$$-\mu_B N_B + F_{AB} = M_B a_x \quad (5c)$$

$$-M_B g + N_B = 0 \quad (5d)$$

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (F , N_A , F_{AB} y N_B) que se resuelve fácilmente. Por ejemplo, de las ecuaciones (5c) y (5d) se puede eliminar N_B obteniendo directamente que

$$F_{AB} = M_B (a_x + \mu_B g) = 5 \cdot (0.3 + 0.2 \cdot 9.81) = 11.3 \text{ N}$$

Que es la fuerza entre bloques ($F_{AB} = F_{BA}$). Usando este resultado en (5a) y (5b) y eliminando N_A obtenemos el otro resultado requerido, el valor de la fuerza F sobre el bloque A.

$$F = \frac{M_A (a_x + \mu_A g) + F_{AB}}{\cos \alpha - \mu_A \sin \alpha} = \frac{10 \cdot (0.3 + 0.1 \cdot 9.81) + 11.3}{\cos 30^\circ - 0.1 \cdot \sin 30^\circ} = 29.5 \text{ N}$$

Notas:

- Para transcribir una ecuación vectorial a componentes hace falta elegir un sistema de coordenadas. El sistema de coordenadas no tiene por que ser el mismo para todos los cuerpos del problema.

Ejemplo 2.3. Una partícula de $M=1$ kg se mueve en el plano XY sometida a una fuerza $\vec{F} = (3 + 12t^2)\hat{i} + \hat{j}$, escrita en unidades del Sistema Internacional. En el instante inicial la partícula está en reposo en el origen de coordenadas. Calcular el vector de posición cuando han transcurrido 2s.

Solución:

En este ejemplo una partícula está sometida a una fuerza que no es constante sino que depende del tiempo t . Esto nos obligará a integrar directamente la ecuación del movimiento.

Partiendo de la Segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Y teniendo en cuenta que tenemos una única fuerza \vec{F}

$$\vec{a} = \frac{1}{M}\vec{F} = (3 + 12t^2)\hat{i} + \hat{j} \quad (1)$$

Donde hemos usado $M=1$ kg. La aceleración así escrita está en unidades del SI. La idea ahora es seguir el esquema

$$\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r} \quad (2)$$

Para llegar al vector de posición \vec{r} . En un primer paso obtenemos la velocidad \vec{v} a partir de la definición de velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como \vec{a} es función del tiempo, esta ecuación puede integrarse directamente, sin más que sustituir el valor de la aceleración

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \vec{a}dt \\ d\vec{v} &= \left[(3 + 12t^2)\hat{i} + \hat{j} \right] dt \end{aligned} \quad (3)$$

A la hora de integrar expresiones como esta muchas veces tenemos dos opciones: hacer una integral definida (con límites) o hacer una integral indefinida y evaluar la constante de integración después.

Integral definida

En este caso debemos poner límites a la integral. Para ello necesitamos utilizar las condiciones iniciales que establece el problema. Concretamente sabemos que en $t = 0$ la partícula está en reposo, es decir $\vec{v} = 0$. Estos dos valores están emparejados y los podemos usar, por ejemplo, en el límite inferior de la integral. Para el límite superior usaremos los valores t y \vec{v} . De esta forma, al resolver la integral y evaluar los límites se

obtendrá la velocidad \vec{v} en función del tiempo t .

$$\begin{aligned}\int_0^{\vec{v}} d\vec{v} &= \int_0^t \left[(3 + 12t^2)\hat{i} + \hat{j} \right] dt \\ \int_0^{\vec{v}} d\vec{v} &= \hat{i} \left(3 \int_0^t dt + 12 \int_0^t t^2 dt \right) + \hat{j} \int_0^t dt \\ [\vec{v}]_0^{\vec{v}} &= \hat{i} \left(3 [t]_0^t + 12 [t^3/3]_0^t \right) + \hat{j} [t]_0^t \\ \vec{v} &= \hat{i} (3t + 4t^3) + \hat{j}t\end{aligned}$$

Y tenemos el vector velocidad \vec{v} completamente determinado. De forma análoga podemos ahora obtener \vec{r} a partir de \vec{v} volviendo a integrar.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Como antes, ahora \vec{v} es función del tiempo y podemos integrar directamente.

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \vec{v}dt \\ d\vec{r} &= \left[\hat{i} (3t + 4t^3) + \hat{j}t \right] dt\end{aligned}\tag{4}$$

Integrando con límites tendremos usaremos que en $t = 0$ la posición es $\vec{r} = 0$ y dejaremos el otro límite con las variables t y \vec{r} .

$$\begin{aligned}\int_0^{\vec{r}} d\vec{r} &= \int_0^t \left[\hat{i} (3t + 4t^3) + \hat{j}t \right] dt \\ \int_0^{\vec{r}} d\vec{r} &= \hat{i} \left(3 \int_0^t t dt + 4 \int_0^t t^3 dt \right) + \hat{j} \int_0^t t dt \\ [\vec{r}]_0^{\vec{r}} &= \hat{i} \left(3 [t^2/2]_0^t + 4 [t^4/4]_0^t \right) + \hat{j} [t^2/2]_0^t \\ \vec{r} &= \hat{i} (3t^2/2 + t^4) + \hat{j}t^2/2\end{aligned}$$

Una vez tenemos $\vec{r}(t)$ lo podemos utilizar para encontrar el vector de posición en cualquier instante. El problema nos lo pide concretamente en $t = 2$ s, es decir:

$$\vec{r}(t = 2 \text{ s}) = 22\hat{i} + 2\hat{j} \text{ m}$$

A esta solución podemos llegar igualmente realizando las integrales sin límites:

Integral indefinida

En este caso no ponemos límites a la integral. Eso significa que al resolver las integrales aparecerán las correspondientes constantes de integración que deberemos determinar usando las condiciones iniciales establecidas en el problema.

Retomando la ecuación (3) volvemos a hacer las integrales, esta vez sin límites.

$$\begin{aligned}\int d\vec{v} &= \int \left[(3 + 12t^2)\hat{i} + \hat{j} \right] dt \\ \int d\vec{v} &= \hat{i} \left(3 \int dt + 12 \int t^2 dt \right) + \hat{j} \int dt \\ \vec{v} &= \hat{i} (3t + 4t^3) + \hat{j}t + \vec{v}_0\end{aligned}$$

A diferencia que en el caso anterior, ahora nos aparece una constante de integración. Todos los términos de la ecuación son vectores, y por tanto esta constante debe ser un vector. De igual forma, todos los términos se corresponden con velocidades, luego esta constante es una velocidad. Por ese motivo la hemos llamado \vec{v}_0 donde el 0 hace referencia a que es una constante. Para evaluar \vec{v}_0 usamos la condición de que en $t = 0$ la velocidad $\vec{v} = 0$. Basta observar la expresión anterior para comprobar que esto implica necesariamente que $\vec{v}_0 = 0$ lo que nos proporciona el mismo resultado que antes.

Análogamente podríamos obtener \vec{r} usando integrales indefinidas. A partir de (4) e integrando sin límites

$$\begin{aligned}\int d\vec{r} &= \int \left[\hat{i} (3t + 4t^3) + \hat{j}t \right] dt \\ \int d\vec{r} &= \hat{i} \left(3 \int t dt + 4 \int t^3 dt \right) + \hat{j} \int t dt \\ \vec{r} &= \hat{i} (3t^2/2 + t^4) + \hat{j}t^2/2 + \vec{r}_0\end{aligned}$$

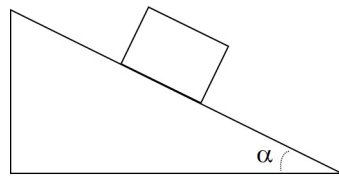
Como antes obtenemos una constante de integración, que tiene que ser un vector y tener dimensiones de longitud (un vector de posición). Por eso la denominamos \vec{r}_0 donde el 0 indica que es una constante. Para evaluarla usamos la condición de que en $t = 0$ el vector de posición es $\vec{r} = 0$. Basta inspeccionar la expresión anterior para ver que esto implica necesariamente que $\vec{r}_0 = 0$, lo que nos da el mismo resultado que en el caso de integración con límites.

Notas:

- En este ejemplo las constantes de integración son cero. Esto no es siempre así.

Ejemplo 2.4. Un bloque de masa M se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. La superficie de contacto entre bloque y plano inclinado es muy lisa y podemos considerarla sin rozamiento.

- ¿Cuánto tardará el bloque en deslizarse una distancia D sobre el plano inclinado, partiendo del reposo (respecto del plano)?
- Si ahora aceleramos el plano inclinado con una aceleración \vec{A} ¿Cuál es el valor de \vec{A} necesario para evitar el movimiento del bloque respecto de la rampa?
- Suponer ahora que existe un coeficiente de rozamiento μ entre el bloque y la rampa y repetir los apartados anteriores. Compare las soluciones



Solución:

Apartado (a)

El bloque tiene tendencia a deslizarse hacia abajo por el plano inclinado debido a su propio peso. Esta tendencia será mayor cuanto mayor sea el ángulo α . No hay fuerzas de rozamiento. Para resolver este problema necesitaremos utilizar la Segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

que nos relaciona fuerzas y aceleración para un cuerpo.

Para ello debemos

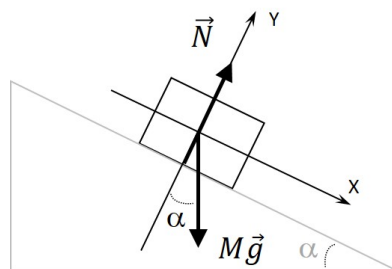
- Identificar las fuerzas y escribir la Segunda Ley de Newton para el cuerpo.
- Transcribir estas ecuaciones a un sistema de coordenadas concreto.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tal y como se muestran en la figura, son: su propio peso $M\vec{g}$ y la fuerza normal \vec{N} que ejerce la superficie del plano inclinado sobre el cuerpo.

Utilizaremos un sistema de coordenadas cartesianas XY con el eje X paralelo al plano inclinado y positivo hacia abajo y con el eje Y perpendicular al plano inclinado y positivo hacia arriba. El bloque se deslizará a lo largo del eje X y solamente la componente X de la aceleración a_x será distinta de 0 ($a_y = 0$)

La Segunda Ley de Newton queda:

$$M\vec{g} + \vec{N} = M\vec{a} \quad (1)$$



Y transcrita a los ejes XY

$$Mg \sen \alpha = Ma_x \quad (\text{eje X:2a})$$

$$-Mg \cos \alpha + N = 0 \quad (\text{eje Y:2b})$$

La aceleración a_x se obtiene inmediatamente de (2a):

$$a_x = g \sen \alpha \quad (3)$$

Esta aceleración es constante. El movimiento del bloque relativo al plano es un movimiento uniformemente acelerado que parte del reposo $\vec{v}_0 = 0$ en $t = 0$. La relación entre distancia recorrida sobre el plano D y el tiempo t desde que liberamos el bloque será:

$$D = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (4)$$

Y por tanto, el tiempo empleado en recorrer la distancia D es

$$t = \sqrt{\frac{2D}{a_x}} \quad (5)$$

En nuestro caso a_x viene dada por (3), luego el resultado del apartado (a) es:

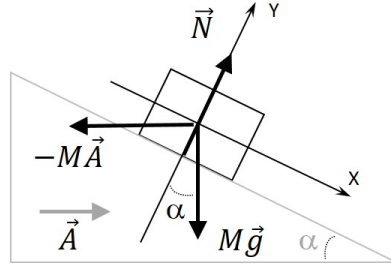
$$t = \sqrt{\frac{2D}{g \sen \alpha}} \quad (6)$$

Apartado (b)

Ahora aceleramos el plano inclinado con una aceleración \vec{A} horizontal hacia la derecha. Describir el movimiento del bloque desde el plano inclinado parece más sencillo, pero ahora un observador sobre el plano inclinado ha dejado de ser un observador inercial, pues está acelerado.

Sin embargo hemos visto que un observador no inercial puede seguir utilizando la Segunda Ley de Newton para describir el movimiento del bloque si incluye la fuerza no inercial $-M\vec{A}$ donde M es la masa del bloque y \vec{A} la aceleración del sistema de referencia no inercial.

Las fuerzas quedarían ahora:



Y la Segunda Ley de Newton , incluyendo la fuerza no inercial:

$$M\vec{g} + \vec{N} + (-M\vec{A}) = M\vec{a} \quad (7)$$

Donde, respecto de (1), hemos añadido la fuerza no inercial (entre paréntesis). Ahora, en los ejes XY las componentes de la ecuación (7) quedan:

$$Mg \sin \alpha - MA \cos \alpha = Ma_x \quad (\text{eje X:8a})$$

$$-Mg \cos \alpha + N - MA \sin \alpha = 0 \quad (\text{eje Y:8b})$$

De donde podemos obtener el valor de la aceleración a_x

$$a_x = g \sin \alpha - A \cos \alpha \quad (9)$$

Si queremos, como pide este apartado, que el bloque no se deslice respecto del plano inclinado, entonces debemos forzar $a_x = 0$ en la ecuación (9) obteniendo para A

$$A = g \tan \alpha \quad (10)$$

Obsérvese que si A es menor que el valor (10) entonces $a_x > 0$ en (9), lo que significa que el bloque se desliza hacia abajo.

Si por el contrario A es mayor que el valor (10) entonces $a_x < 0$ en (9) lo que significa que el bloque se desliza hacia arriba, subiendo por el plano.

Apartado (c)

En el caso de que haya rozamiento entre el bloque y el plano inclinado debemos incluir también la fuerza de rozamiento \vec{f} en la ecuación (7), por tanto:

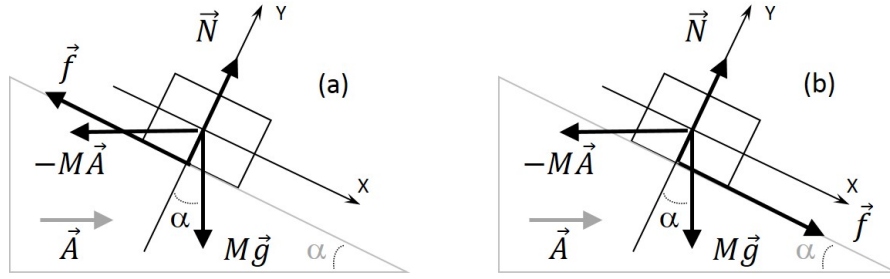
$$M\vec{g} + \vec{N} + (-M\vec{A}) + \vec{f} = M\vec{a} \quad (11)$$

Ahora bien, como decíamos unos párrafos más arriba, si la aceleración \vec{A} es pequeña, el bloque tendrá tendencia a caer por el plano inclinado. En este caso la fuerza de rozamiento, que se opondrá a esa tendencia, será paralela al plano inclinado y dirigida hacia arriba, como en caso (a) de la siguiente figura. En cuanto al valor de f , si suponemos que el bloque se desliza, entonces $f = \mu N$.

Teniendo en cuenta ambas cosas, la ecuación (11) en coordenadas queda:

$$Mg \sin \alpha - MA \cos \alpha - \mu N = Ma_x \quad (\text{eje X:12a})$$

$$-Mg \cos \alpha + N - MA \sin \alpha = 0 \quad (\text{eje Y:12b})$$



Que puede resolverse para obtener la aceleración:

$$a_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - A(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \quad (13)$$

Que es válida si el bloque desliza hacia abajo.

Si el bloque desliza hacia arriba, entonces la fuerza de rozamiento es paralela al plano pero dirigida hacia abajo, como en caso (b) de la figura.

Para este caso las ecuaciones en coordenadas son como en el caso anterior, sin más que cambiar $-\mu N$ por $+\mu N$ en la ecuación (12a). La aceleración será:

$$a_x = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - A(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \quad (14)$$

El tiempo empleado en recorrer una distancia D se obtiene de (5) pero usando la nueva aceleración dada por (13) o (14) según el caso.

Ahora las condiciones de equilibrio se obtienen de (13) y (14) obligando a que $a_x = 0$. La ecuación (13) nos da la aceleración A mínima y la ecuación (14) nos da la aceleración A máxima para que el bloque permanezca en equilibrio respecto del plano inclinado.

$$A_{min} = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}$$

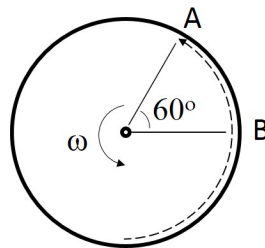
$$A_{max} = \frac{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}$$

Notas:

- En el apartado (b) se ha obtenido el valor de A para que el bloque no se deslice por el plano inclinado. Esto no significa que el bloque esté en reposo. En el eje horizontal el plano inclinado, y el bloque con él, tienen una aceleración A hacia la derecha.
- Como es lógico, si en el último apartado hacemos $\mu = 0$ en las expresiones de A_{min} y A_{max} entonces ambas coinciden entre sí y con el valor de $A = g \tan \alpha$ del caso sin rozamiento.

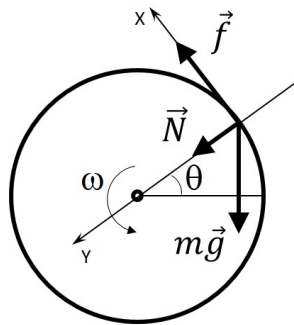
Ejemplo 2.5. El tambor cilíndrico de una secadora automática tiene de diámetro $D = 50$ cm y gira con una velocidad constante sobre su eje horizontal de simetría. Una prenda de 50 g describe la trayectoria indicada en la figura de manera que abandona la pared del tambor en el punto A.

- (a) ¿Cuál es la velocidad constante de rotación del tambor en revoluciones por minuto?
- (b) Averiguar en el punto B el valor de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la prenda, así como la fuerza normal que realiza la prenda sobre el tambor.



Solución:

El movimiento de la prenda está determinado por la Segunda Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. En la siguiente figura hemos dibujado las fuerzas que actúan sobre la prenda en un punto cualquiera de la trayectoria, identificado por el ángulo θ .



En primer lugar tenemos su peso $m\vec{g}$, que evidentemente estará siempre dirigido verticalmente hacia abajo.

En segundo lugar tenemos la normal \vec{N} ejercida por la superficie del tambor. Como esta fuerza es perpendicular a la superficie, su dirección será radial y dirigida hacia el eje del tambor.

En tercer y último lugar tenemos la fuerza de rozamiento \vec{f} . Aunque el problema no lo especifica, debe haber necesariamente una fuerza de rozamiento, pues de otro modo la prenda nunca sería arrastrada hacia arriba por la pared del tambor. Por esto mismo, dado el sentido de rotación del tambor, la fuerza \vec{f} debe ser como se ha dibujado.

Mientras se mueve sin deslizar por la pared del tambor la prenda describe un movimiento circular. Esto implica que está sometida a una aceleración centrípeta \vec{a} radial y dirigida al eje del tambor. El valor de esta aceleración depende de la velocidad angular de rotación ω . Como ω es constante la prenda no posee aceleración angular, y tampoco aceleración tangencial. La aceleración de la prenda es únicamente la aceleración centrípeta.

$$|\vec{a}| = a_c = \omega^2 R \quad (1)$$

Siendo $R = D/2 = 0.25 \text{ m}$ el radio del tambor

Por tanto, la Segunda Ley de Newton queda

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = \vec{a} \quad (2)$$

Con el módulo de \vec{a} dado por (1)

Para resolver el problema debemos elegir un sistema de coordenadas, por ejemplo el sistema XY de la figura, donde el eje Y lleva la dirección radial, positivo hacia el eje, y el eje X lleva la dirección tangencial, positivo en la dirección del movimiento.

Con estos ejes, la ecuación (2) se traduce en:

$$-mg \cos \theta + f = 0 \quad (\text{eje X:3a})$$

$$mg \sin \theta + N = m\omega^2 R \quad (\text{eje Y:3b})$$

Estas ecuaciones son generales, para cualquier punto de la trayectoria de la prenda, desde abajo hasta el momento de separación en A. Podemos usarlas para estudiar puntos concretos, como los que nos pide el problema.

En el punto A la prenda se separa. El momento de la separación se caracteriza porque deja de haber contacto entre la prenda y el tambor, es decir, en A la normal $N = 0$ en la ecuación (3b). En ese punto concreto $\theta = 60^\circ$ Por tanto

$$mg \sin \theta = m\omega^2 R$$

De donde

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta}{R}} = \sqrt{\frac{9.81 \sin 60^\circ}{0.25}} = 5.83 \text{ rad/s} = 55.7 \text{ rpm}$$

Que es la velocidad angular necesaria para que la prenda se desprenda del tambor en el punto A.

Por otra parte, para averiguar la fuerza de rozamiento en el punto B volvemos a retomar las ecuaciones (3), en concreto (3a) teniendo en cuenta que en B $\theta = 0$ y por tanto

$$-mg + f = 0$$

Luego

$$f = mg = 0.05 \cdot 9.81 = 0.49 \text{ N}$$

De acuerdo con (3b) en B, cuando $\theta = 0$, la fuerza normal proporciona toda la aceleración centrípeta y la fuerza normal será

$$N = m\omega^2 R = 0.05 \cdot 5.83^2 \cdot 0.25 = 0.42 \text{ N}$$

Notas:

- La elección de los ejes XY radial-tangencial es una opción. Igualmente podría haberse hecho con unos ejes XY horizontal-vertical por ejemplo.
 - A partir de que la prenda se desprende del tambor en A la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Sin embargo no caerá verticalmente pues en el momento de desprenderse en A lleva una velocidad $v = \omega R$ tangencial, formando un ángulo $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ respecto de la horizontal. Sería por tanto un caso de 'tiro parabólico'.
 - Fíjese que para obtener ω no hemos necesitado saber la masa de la prenda. Todas las prendas se separan del tambor en el mismo punto, independientemente de su masa.
-

Capítulo 3

Trabajo y energía

Introducción

Uno de los conceptos físicos más útiles es el de la energía. Es un concepto que está presente en todos los campos de la física, en todas las aplicaciones prácticas y en muchas situaciones de la vida cotidiana (basta echarle un vistazo al recibo de la luz). En este capítulo se analizan los principales aspectos relacionados con la energía desde el punto de vista de la mecánica.

3.1. Trabajo W y energía cinética E_c

Para empezar haremos algunas definiciones.

La Energía cinética E_c de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v viene dada por la expresión

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

Que como $\vec{p} = m\vec{v}$ puede ponerse también

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (3.2)$$

La unidad de energía cinética en el SI es el julio (J), $J \equiv kg\ m^2s^{-2}$

El trabajo infinitesimal dW realizado por una fuerza \vec{F} a lo largo de un desplazamiento $d\vec{r}$ es el producto escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.3)$$

De la propia definición de trabajo (3.3) se deduce que el trabajo es cero bajo las siguientes circunstancias

- Si la fuerza que actúa es nula ($\vec{F} = 0$)

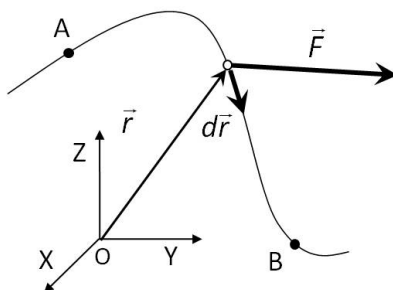


Figura 3.1: El trabajo W puede calcularse para cualquier trayectoria y fuerza.

- Si la partícula no se mueve, no hay desplazamiento ($d\vec{r} = 0$)
- Si fuerza y desplazamiento son mutuamente perpendiculares ($\vec{F} \perp d\vec{r}$)

El trabajo W_{AB} realizado por una fuerza \vec{F} desde el punto A hasta el punto B a lo largo de una trayectoria concreta es la integral de todos los trabajos infinitesimales dW a lo largo de dicha trayectoria:

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.4)$$

La unidad del trabajo en el SI es el julio (J), $J \equiv kg \, m^2 s^{-2}$. Si sobre una partícula actúan varias fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ es posible calcular el trabajo realizado por cada una de ellas W_1, W_2, \dots , y el trabajo total sería simplemente la suma de todos ellos, $W = W_1 + W_2 + \dots$.

3.2. Teorema trabajo-energía

Trabajo y variación de energía cinética están relacionados. Esta relación constituye un importante teorema:

El Teorema Trabajo-Energía afirma que el trabajo realizado por la fuerza total aplicada a una partícula es igual a la variación de energía cinética experimentada por la partícula.

$$W = \Delta E_c \quad (3.5)$$

Por supuesto es también cierto en su versión diferencial

$$dW = dE_c \quad (3.6)$$

- En algunos libros de texto a este teorema se le denomina “Teorema de las fuerzas vivas”

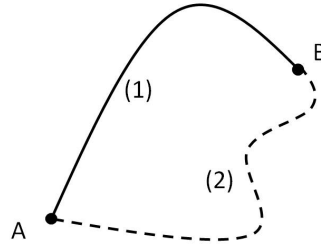


Figura 3.2: En principio el trabajo realizado por una fuerza depende del camino.

3.3. Fuerzas conservativas. Energía potencial.

Para calcular el trabajo realizado por una fuerza de un punto a otro es necesario conocer el camino que ha seguido la partícula. De un punto a otro pueden seguirse diferentes caminos. En principio el trabajo asociado a cada camino puede ser diferente (figura 3.2). Sin embargo existen fuerzas en las que el trabajo no depende del camino seguido. En base a esta característica las fuerzas se agrupan en dos grandes familias.

Fuerzas conservativas son aquellas fuerzas para las cuales el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos es independiente del camino seguido para ir de uno al otro.

Dicho de otra forma, si (1) y (2) son dos caminos entre los puntos A y B , entonces

$$W_{AB}^{(1)} = W_{AB}^{(2)}, \text{ para cualquier pareja de caminos (1) y (2)} \quad (3.7)$$

Fuerzas no conservativas son aquellas para las cuales el trabajo depende del camino. Es decir

$$W_{AB}^{(1)} \neq W_{AB}^{(2)}, \text{ para alguna pareja de caminos (1) y (2)} \quad (3.8)$$

Como para una fuerza conservativa el trabajo no depende del camino, no tenemos que especificar el camino a la hora de calcularlo. De hecho, sabiendo el punto inicial y final, podemos elegir el camino que más nos convenga a la hora de calcular el trabajo (aunque este camino no se corresponda con el camino real seguido por la partícula). En el caso de fuerzas conservativas podemos hablar simplemente de W_{AB} .

Si para una fuerza conservativa el trabajo realizado al ir de un punto A a otro B no depende del camino, entonces solamente puede depender de los puntos inicial A y final B . Más concretamente, siendo el trabajo una integral en coordenadas espaciales ($d\vec{r}$), el trabajo solamente puede depender de las coordenadas de los puntos inicial A y final B .

Por tanto, en caso de una fuerza conservativa, es posible escribir el trabajo como

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \quad (3.9)$$

Donde E_p es una función que depende exclusivamente de las coordenadas de cada punto y se denomina **Energía Potencial**. $E_p(A)$ y $E_p(B)$ es el valor de esta función en los puntos A y B . Es decir, el que resulta de sustituir los valores de las coordenadas de A y B en la función E_p . La razón por la que se ha elegido este orden concreto $E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$ quedará clara un poco más adelante.

Desde luego, si (3.9) se cumple, también se cumplirá para desplazamientos infinitesimales, es decir

$$dW = -dE_p \quad (3.10)$$

Y por tanto E_p puede calcularse como:

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.11)$$

La energía potencial tiene las mismas dimensiones que el trabajo y en el SI se mide en julios (J). A partir de la ecuación (3.11), siendo una integral sin límites, está claro que la energía potencial es una función definida salvo una constante aditiva arbitraria. Esta constante arbitraria no tiene ninguna importancia física. De hecho para calcular el trabajo entre dos puntos usando (3.9) hay que calcular la diferencia de energía potencial entre ambos puntos. La constante aditiva desaparece al hacer esta diferencia.

Sabemos que la relación (3.11) implica que la fuerza \vec{F} debe poderse obtener de E_p derivando. Nosotros solamente vamos a tratar situaciones en las cuales la energía potencial depende exclusivamente de una coordenada, por ejemplo x , de forma que $E_p = E_p(x)$. En este caso la ecuación (3.11) queda

$$E_p(x) = - \int F(x) dx \quad (3.12)$$

y para obtener $F(x)$ a partir de $E_p(x)$:¹

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx} \quad (3.13)$$

Todo esto está muy bien y veremos que es muy útil, pero ¿cómo saber si una fuerza es conservativa o no?. En realidad hay un método infalible, pero requiere el uso de operadores diferenciales, que no trataremos este curso². Nosotros utilizaremos una técnica menos elegante pero igualmente válida. Si queremos saber si una fuerza es conservativa, entonces intentaremos calcular la energía potencial usando (3.12). Si obtenemos una función exclusivamente de las coordenadas, entonces será una energía potencial y la fuerza conservativa. Si esto no es posible, la fuerza no es conservativa.

Algunas de las fuerzas más comunes son conservativas. Por ejemplo cualquier fuerza \vec{F} constante (en módulo, dirección y sentido por supuesto) es conservativa. Un caso especialmente importante de fuerza constante es el peso de los cuerpos. Las fuerzas que están

¹La relación vectorial general entre la fuerza \vec{F} y la energía potencial E_p es $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$, donde $\vec{\nabla} E_p$ es el gradiente de E_p . El gradiente es un operador diferencial que se estudiará en otros cursos.

²Una fuerza \vec{F} es conservativa si y solo si su rotacional es cero, es decir, si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

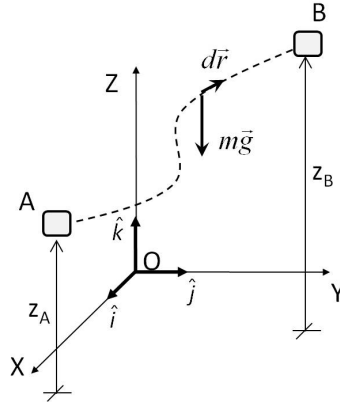


Figura 3.3: Energía potencial: peso

siempre dirigidas a un punto del espacio (fuerzas centrales) también son conservativas como por ejemplo la fuerza de atracción gravitatoria dada por la Ley de la Gravitación Universal de Newton o la fuerza entre cargas eléctricas dada por la Ley de Coulomb.

En el otro lado, el de las fuerzas no conservativas, también encontramos ejemplos comunes como son las fuerzas de rozamiento entre superficies o las fuerzas viscosas en fluidos.

Es momento ahora de calcular la energía potencial en un par de ejemplos importantes.

3.3.1. Energía potencial asociada al peso $m\vec{g}$

El peso $m\vec{g}$ de una partícula puede considerarse constante si la gravedad \vec{g} lo es. Esto es una buena aproximación siempre que no estemos considerando puntos muy alejados entre sí, en altura o sobre la superficie terrestre. Para calcular la energía potencial usamos (3.11). En este caso la fuerza es el peso, $\vec{F} = m\vec{g}$

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m \int \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad (3.14)$$

En el sistema de coordenadas de la figura (3.3) el eje Z es el eje vertical. Sabemos que \vec{g} solamente tiene componente vertical dirigida hacia abajo, es decir $\vec{g} = -g\hat{k}$. Por otro lado $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior se obtiene

$$E_p = mgz + E_{p0} \quad (3.15)$$

Donde E_{p0} es la constante de integración, que tiene evidentemente dimensiones de energía. Se trata de una constante arbitraria que podemos elegir a nuestra conveniencia. Como vemos E_p solo depende de z , la coordenada vertical, la altura de la partícula medida desde el plano XY . Desde luego se trata de una función que depende exclusivamente de las coordenadas, en este caso de la coordenada vertical z solamente. No hay duda que se trata de una energía potencial.

Muchas veces vemos la energía potencial como $E_p = mgz$ donde z es la altura medida desde algún sitio. Así escrita se ha elegido la constante de integración como $E_p = 0$ en $z = 0$. Una elección por comodidad y tan válida como otra cualquiera.

Como ya hemos dicho, el valor de la constante de integración es arbitrario. Como la fuerza es la derivada de la energía potencial, cualquier constante dará contribución nula al derivar. Por ejemplo el trabajo realizado por el peso para llevar la partícula de A a B (figura 3.3) es

$$W_{AB} = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)] = -(mgz_B - mgz_A) = -mg(z_B - z_A) \quad (3.16)$$

Donde $(z_B - z_A)$ es la altura de B medido desde A .

3.3.2. Energía potencial en un muelle

Ya hemos visto en varias ocasiones la fuerza $F = -kx$ (Ley de Hooke) que corresponde con la fuerza ejercida por un muelle, dentro de lo que se denomina régimen elástico. En esta fuerza nos hemos limitado a una dimensión, aquí especificada por la coordenada x que mide la deformación del muelle desde su posición de reposo ($x = 0$). Para calcular la energía potencial podemos usar (3.12) directamente, sustituyendo F por $-kx$

$$E_p(x) = -\int F(x)dx = \frac{1}{2}kx^2 + E_{p0} \quad (3.17)$$

En este caso, la constante arbitraria suele escogerse de forma que la energía potencial del muelle es cero cuando el muelle se encuentra en su longitud natural, esto es sin estar ni estirado ni comprimido. Esto se corresponde con hacer $E_{p0} = 0$ en $x = 0$ y nos queda

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.18)$$

3.4. Energía mecánica E

Como hemos clasificado las fuerzas en dos grupos, también podemos clasificar el trabajo de las fuerzas en dos grupos. Vamos a denominar W_C al trabajo realizado por las fuerzas conservativas y W_{NC} el de las fuerzas no conservativas. De esta forma el trabajo total puede escribirse como:

$$W = W_C + W_{NC} \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta el teorema trabajo-energía (3.5) y que el trabajo de las fuerzas conservativas se puede poner (3.9) como $W_C = -\Delta E_p$

$$W_C + W_{NC} = \Delta E_c \quad (3.20)$$

$$-\Delta E_p + W_{NC} = \Delta E_c \quad (3.21)$$

$$W_{NC} = \Delta E_c + \Delta E_p \quad (3.22)$$

A la izquierda tenemos el trabajo de las fuerzas no conservativas. Es una cantidad que depende del camino que elegimos para ir de un punto a otro. A la derecha tenemos la energía cinética, que depende de la velocidad de la partícula, y la energía potencial, que depende de la posición de la partícula. Definimos

Energía Mecánica E de una partícula es la suma de su energía cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p \quad (3.23)$$

Por tanto

$$W_{NC} = \Delta E \quad (3.24)$$

Que es una de las ecuaciones más importantes que nos vamos a encontrar en el curso.

La energía mecánica depende de la velocidad y posición de la partícula. Es lo que denominamos una función de estado. Basta con saber que velocidad tiene la partícula y dónde está para saber el valor de la energía mecánica. No importa de donde vino la partícula o qué camino siguió para llegar. No depende de la historia de la partícula. Solo de su posición y velocidad. En este sentido podemos decir que la partícula tiene una energía mecánica.

El trabajo de las fuerzas no conservativas sí depende del camino seguido. No es una función de estado. La partícula “no tiene trabajo”, no se puede asignar un trabajo a un estado concreto de la partícula. El trabajo de las fuerzas no conservativas depende de la historia de la partícula.

3.5. Principio de conservación de la energía mecánica

Antes poníamos ejemplos de fuerzas conservativas y no conservativas. Supongamos que sobre una partícula actúan exclusivamente fuerzas conservativas. Entonces $W_{NC} = 0$ y nos encontramos con otro resultado de gran importancia.

El Principio de Conservación de la Energía Mecánica establece que cuando sobre una partícula actúan exclusivamente fuerzas conservativas ($W_{NC} = 0$), entonces la energía mecánica de la partícula no varía ($\Delta E = 0$), es decir, permanece constante.

3.6. Comentarios al concepto de energía

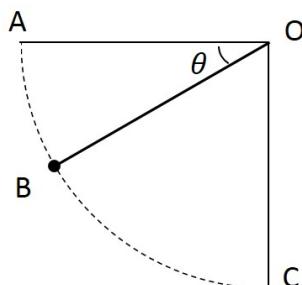
Antes de acabar este capítulo conviene aclarar algunas cuestiones que pueden dar lugar a confusión. En el capítulo 7 se establece el Primer Principio de la Termodinámica, que en palabras dice que la energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma. Aquí hemos visto que la energía mecánica E no tiene por qué permanecer constante. Si hay fuerzas no conservativas, E puede variar.

Ambas ideas no son contradictorias. En el capítulo de termodinámica al que hacemos referencia hablamos de la energía en el sentido de “toda la energía”. Aquí estamos hablando de energía mecánica, que *no es toda la energía*. Por ejemplo lanzamos un objeto con cierta velocidad inicial, para que se deslice por el suelo. En este caso el objeto posee inicialmente una energía mecánica, es la energía cinética debida a que tiene una velocidad. Tras recorrer cierta distancia el rozamiento con el suelo detendrá el objeto. La energía cinética será cero. Evidentemente la energía mecánica de este objeto ha variado, debido a que la fuerza de rozamiento, como ya hemos dicho, es una fuerza no conservativa.

Desde el punto de vista de “toda la energía” sin embargo la energía sigue siendo la misma. La energía cinética inicial se ha transformado en calor. La fricción hace que las superficies en contacto se calienten (frota las manos por ejemplo). Esta energía disipada en forma de calor, diluida por el suelo y el objeto, no se considera en el término E de la energía mecánica, y por tanto aparece como “energía mecánica pérdida” en el proceso. Si considerásemos todas las formas de energía y todos los objetos involucrados en el problema, la energía total, a la que se refiere el primer principio de la termodinámica *SÍ* permanece constante.

También conviene darse cuenta que la energía es un concepto muy útil, pero es realmente un concepto abstracto. La energía potencial, y por tanto la energía mecánica, está definida salvo una constante arbitraria. Y arbitrario significa exactamente eso, que podemos darle cualquier valor. No tiene sentido hablar de la energía en forma absoluta. Solamente las diferencias de energía tienen significado físico. Por ejemplo podemos medir una fuerza sin ambigüedad, pero no una energía. Al fin y al cabo, la fuerza depende de la derivada de la energía potencial, o dicho de otra forma, de la diferencia de energía, no del valor absoluto de la energía.

Ejemplo 3.1. Una partícula de masa m está suspendida de un punto fijo mediante una cuerda sin masa de longitud R . La partícula se libera sin velocidad inicial desde la posición A. Encontrar la velocidad lineal y angular en un punto cualquiera B de la trayectoria como función del ángulo θ . Particularizar el resultado para el punto C.



Solución:

El movimiento de esta partícula está determinado por dos fuerzas: su propio peso $m\vec{g}$ y la tensión en la cuerda \vec{T} . Nos piden la velocidad lineal v y angular ω para un punto cualquiera de la trayectoria. Estas dos variables están relacionadas por el radio de la circunferencia R

$$v = \omega R \quad (1)$$

Y encontrar una u otra es prácticamente equivalente. Para ello tenemos varias posibilidades.

- Utilizar la Segunda Ley de Newton para encontrar la velocidad a partir de la aceleración.
- Mediante el Teorema Trabajo-Energía
- Con el Principio de Conservación de la Energía Mecánica

Y como se trata de un ejemplo, lo resolveremos por los tres métodos.

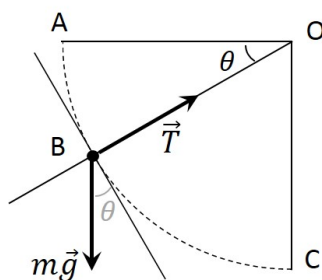
Metodo 1: Segunda Ley de Newton

Podemos calcular la aceleración a partir de las fuerzas que actúan sobre la masa m .

$$\begin{aligned} \sum F &= m\vec{a} \\ m\vec{g} + \vec{T} &= m\vec{a} \end{aligned} \quad (2)$$

Para continuar debemos expresar esta ecuación en un sistema de coordenadas concreto. Vamos a elegir, como es habitual en casos de movimiento circular, un sistema de ejes a lo largo de las direcciones radial (positivo hacia el centro O de la circunferencia) y tangente (positivo en la dirección del movimiento. Los vectores direccionales de estos ejes (que no vamos a utilizar aquí) serían los vectores \hat{n} y \hat{t} que hemos usado en otras ocasiones.

La aceleración \vec{a} como sabemos tiene componentes en ambos ejes, la componente normal a_n en la dirección radial y la componente tangencial a_t en la dirección tangente.



En estos ejes, la ecuación (2) queda

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta + T &= ma_n && \text{(eje radial:3a)} \\ mg \cos \theta &= ma_t && \text{(eje tangencial:3b)} \end{aligned}$$

La aceleración tangencial está directamente relacionada con el módulo de la velocidad (que es la velocidad lineal a lo largo de la trayectoria) $a_t = dv/dt$. Haciendo esta sustitución en (3b) y eliminando las masas m que se cancelan en ambos lados.

$$g \cos \theta = \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

La ecuación (4) tiene dos términos, escritos uno a cada lado del signo '='. Así escrita no podemos hacer la integral porque tenemos tres variables: θ , v y t . Tenemos primero que transformar la expresión para dejar solamente dos variables.

Queremos saber la velocidad v en la posición de un punto cualquiera de la trayectoria, especificada por el ángulo θ . Por ello nos conviene mantener estas dos variables y proceder a eliminar el tiempo t .

Matemáticamente se trata de un cambio de variable y el procedimiento utiliza la regla de la cadena de las derivadas. En este caso queremos eliminar el tiempo t que aparece en la derivada dv/dt . Para hacer la integral deberíamos tener un $dv/d\theta$ así que esto nos guía el camino. Expandiremos la derivada dv/dt utilizando la regla de la cadena y derivando a través de la variable intermedia θ . Es decir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \omega = \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{R} \quad (5)$$

Hemos tenido en cuenta la definición de velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ y, en el último paso, la relación (1). Este procedimiento ha hecho desaparecer la variable t a costa de introducir en la ecuación el radio R que es una constante, y la velocidad v que es una de las variables que queríamos mantener.

Con este cambio de variable podemos reescribir (4) e integrar. Haremos integrales definidas con la condición inicial $v(\theta = 0) = 0$ en el límite inferior y dejando las variables

θ y v en el límite superior.

$$\begin{aligned}
 \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{R} &= g \cos \theta \\
 v dv &= gR \cos \theta d\theta \\
 \int_0^v v dv &= gR \int_0^\theta \cos \theta d\theta \\
 [v^2/2]_0^v &= gR [\sin \theta]_0^\theta \\
 v^2 &= 2gR \sin \theta \\
 v &= \sqrt{2gR \sin \theta}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Y por tanto

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2g \sin \theta}{R}} \tag{7}$$

El caso particular del punto C se caracteriza por un valor $\theta = \pi/2$. En consecuencia $\sin \theta = 1$ y las velocidades son

$$v(C) = \sqrt{2gR} \quad \omega(C) = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

Metodo 2: Teorema Trabajo-Energía

Este teorema nos dice que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética. Lo podemos expresar bien en forma diferencial o bien en forma integral.

$$dW = dE_c \tag{8a}$$

$$W_A^B = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) \tag{8b}$$

La energía cinética en el punto A es cero, ya que la partícula parte del reposo. En B $E_c(B) = mv_B^2/2$ y saber $E_c(B)$ nos lleva inmediatamente a v_B . La ecuación (8b) queda:

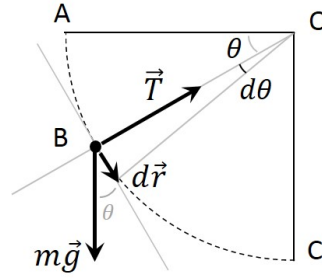
$$W_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2, \tag{9}$$

y como conocemos las fuerzas sobre la partícula, la idea es calcular el trabajo W_A^B entre los puntos A y B de la figura y utilizarlo en (9) para hallar v_B . Al calcular el trabajo debemos incluir todas las fuerzas. Afortunadamente, como consecuencia de su propia definición, el trabajo total de varias fuerzas puede calcularse simplemente sumando los trabajos individuales de cada una de ellas, en nuestro caso el peso y la tensión.

$$W_A^B = W_A^B(Peso) + W_A^B(Tensión)$$

El punto de partida para calcular el trabajo realizado por una fuerza cualquiera \vec{F} es:

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{10}$$



En esta expresión \vec{F} es la fuerza en cuestión ($m\vec{g}$ o \vec{T}) y $d\vec{r}$ es un vector infinitesimal a lo largo de la trayectoria (figura). Como se recordará, su módulo $dr = ds$ es el segmento de trayectoria, en este caso un arco infinitesimal de circunferencia subtendido por un ángulo $d\theta$. Arco y ángulo se relacionan a través del radio

$$dr = ds = R d\theta \quad (11)$$

En el caso del peso

$$W_A^B(Peso) = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B mg \cos \theta \cdot dr \quad (12)$$

Para integrar (12) necesitamos reescribir el integrando en función de una única variable. Una elección lógica es cambiar dr por $d\theta$ usando (11). Así el integrando se convierte en una función exclusiva de θ . Podemos entonces explicitar los límites de integración ya que el punto A corresponde con $\theta = 0$ y B con un ángulo θ cualquiera.

$$W_A^B(Peso) = \int_A^B mg \cos \theta \cdot dr = \int_0^\theta mgR \cos \theta d\theta = mgR [\sin \theta]_0^\theta = mgR \sin \theta \quad (13)$$

Mucho más fácil es calcular el trabajo de la tensión. Si nos fijamos en la figura, la tensión \vec{T} lleva la dirección radial mientras que $d\vec{r}$ es un vector tangente. Esto quiere decir que ambos vectores son mutuamente perpendiculares y que su producto escalar $\vec{T} \cdot d\vec{r} = 0$, por tanto

$$W_A^B(Tensión) = 0$$

Y el trabajo es simplemente el debido al peso. Llevando todo esto a la ecuación (9)

$$\begin{aligned} mgR \sin \theta &= \frac{1}{2} m v_B^2 \\ 2gR \sin \theta &= v_B^2 \end{aligned}$$

Obtenemos exactamente el mismo resultado que antes para la velocidad v y por tanto el mismo para la velocidad angular ω

Metodo 3: Principio de Conservación de la Energía Mecánica

Para resolverlo en términos de energías, nuestro punto de partida es la relación general.

$$W_{NC} = \Delta E \quad (14)$$

Que nos dice que la variación de energía mecánica total $\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_c$ se debe al trabajo de las fuerzas no conservativas W_{NC} .

En nuestro caso tenemos dos fuerzas. En primer lugar el peso $m\vec{g}$ que entra en (14) a través de la energía potencial gravitatoria, que luego pondremos. En segundo lugar la tensión \vec{T} que como hemos visto antes, no hace trabajo. Por tanto en este caso no existe trabajo de fuerzas no conservativas y $W_{NC} = 0$

Esta es precisamente la condición para que se verifique el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, que podemos escribir simplemente como

$$\Delta E = 0 \quad (15)$$

La ecuación (15) es una ecuación que relaciona la energía mecánica de dos puntos, por ejemplo A y B. Elegimos B porque queremos saber v_B , que aparecerá en la ecuación a través de la energía cinética en B. Elegimos A porque sabemos todo sobre A (velocidad, posición). En el fondo (15) es una única ecuación, y podemos tener una única incógnita (v_B)

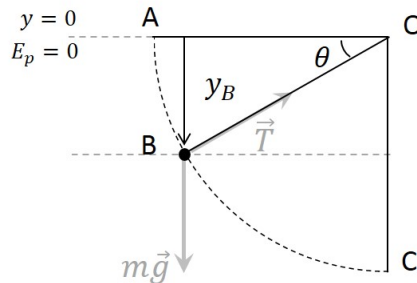
$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 \\ \Delta E_p + \Delta E_c &= 0 \\ [E_p(B) - E_p(A)] + [E_c(B) - E_c(A)] &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora debemos identificar cada término de (16). La energía potencial es una función de las coordenadas únicamente y en este problema solamente tenemos energía potencial asociada al peso. Podemos establecer un origen arbitrario para la energía potencial, por ejemplo podemos asignar energía potencial nula en la situación inicial del problema, cuando la masa está en el punto A $E_p(A) = 0$.

La energía potencial gravitatoria es $E_p = mgy$ donde y es la coordenada de la partícula, medida desde el punto de referencia de energía, en este caso A, y positiva hacia arriba. Por tanto la energía potencial de la partícula en la posición B será $E_p(B) = mgy_B$, siendo y_B negativa (es un valor negativo de la coordenada y)

A la vista de la figura, $y_B = -R \sin \theta$, por tanto la energía potencial de B es $E_p(B) = -mgR \sin \theta$

En cuanto a la energía cinética, es nula en A ($v_A = 0$) y en B es $mv_B^2/2$.



Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (16) queda

$$[-mgR \sin \theta - 0] + \left[\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 \right] = 0$$

De donde se despeja inmediatamente el valor de v_B que coincide con el obtenido en los apartados anteriores (como no podía ser de otra forma, claro)

$$v = \sqrt{2gR \sin \theta}$$

Y a partir de este valor, los demás resultados se obtienen como en el primer apartado.

Notas:

- Siempre es bueno conocer varios métodos para hacer las cosas. Nunca se sabe cuál será más fácil.
- La técnica utilizada para eliminar una variable en la ecuación (4) es muy útil, pero no siempre posible (¡lástima!)
- La tensión no hace trabajo, y tampoco tiene una energía potencial asociada. Hay que tener en cuenta que la energía potencial asociada a una fuerza no es otra cosa que el trabajo que hace la fuerza, cambiado de signo.
- Si uno se fija atentamente descubre la relación entre los métodos. En el primer método hemos tenido que integrar y en los otros no ¿por qué?. Porque la integral que hemos hecho en el primer método es la integral que hay que hacer para relacionar el trabajo y la energía cinética en el Teorema Trabajo-Energía. Podemos decir que el Teorema Trabajo-Energía incorpora esa integral desde el principio.
Los métodos 2 y 3 también se parecen mucho. En el primero hemos tenido que calcular el trabajo del peso, integrando. En el segundo no ¿por qué?. Porque en el segundo usamos la energía potencial, que no es otra cosa que la integral que hemos hecho en el apartado 2, cambiada de signo.
- Por este motivo suele ser más sencillo hacer las cosas 'por energías'. Si podemos plantear un problema usando solamente términos de energías nos ahorraremos unas cuantas integrales...
- No es de extrañar que el Principio de Conservación de la Energía Mecánica se denomine a veces 'primera integral del movimiento'

Ejemplo 3.2. Una bola de 5 kg de masa se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 20 m/s. La bola alcanza una altura máxima de 15 m. Encontrar la energía perdida por fricción con el aire.

Solución:

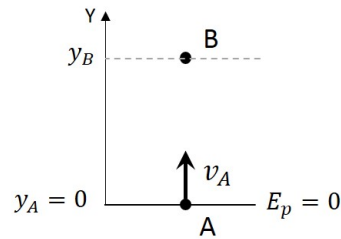
La fuerza de fricción con el aire hace que la energía mecánica E de la bola disminuya mientras sube. Al haber una fuerza no conservativa nuestro punto de partida, como es habitual, será la relación general.

$$W_{NC} = \Delta E \quad (1)$$

El trabajo de la fuerza no conservativa W_{NC} es lo que queremos saber. Para ello debemos evaluar ΔE , que será negativa (la bola pierde energía)

Para evaluar (1) hay que identificar las fuerzas conservativas existentes. En este caso se trata solamente del peso y ya sabemos que tiene una energía potencial asociada mgy donde y es la altura medida desde la referencia $E_p = 0$.

Vamos a llamar A al punto de lanzamiento en el suelo ($y_A = 0$) y le asignamos a este punto el valor de referencia $E_p(A) = 0$. Llamaremos B al punto más alto de la trayectoria, que se encuentra a una altura y_B del suelo.



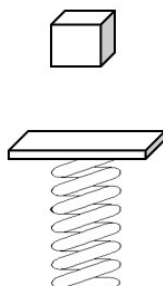
En cuanto a la energía cinética, es $mv_A^2/2$ en el punto A y 0 en el punto B, donde $v_B = 0$. Teniendo en cuenta todo esto, obtenemos el resultado pedido

$$\begin{aligned} W_{NC} &= \Delta E_p + \Delta E_c = [E_p(B) - E_p(A)] + [E_c(B) - E_c(A)] \\ &= [mgy_B - 0] + \left[0 - \frac{1}{2}mv_A^2\right] \\ &= mgy_B - \frac{1}{2}mv_A^2 = 5 \cdot 9.81 \cdot 15 - \frac{1}{2}5 \cdot 20^2 = -264.25 \text{ J} \end{aligned}$$

Notas:

- Como habíamos anticipado W_{NC} es **negativo** pues el trabajo de la fuerza (no conservativa) de fricción **reduce** la Energía Mecánica del sistema.

Ejemplo 3.3. Un bloque de masa $m=1$ kg se deja caer sobre una plataforma de masa despreciable que está unida a un muelle. El bloque se deja caer desde una altura de 5.00 m medida respecto de la plataforma. Tras el impacto el bloque llegará a encontrarse momentáneamente en reposo (máxima compresión en el muelle). En este instante la compresión del muelle es 25.0 cm. Encontrar la velocidad del bloque cuando la compresión del muelle es 15 cm.



Solución:

En este problema intervienen dos fuerzas y las dos son conservativas.

Por un lado el peso del bloque $m\vec{g}$ que tiene asociada una energía potencial gravitatoria $E_{pg} = mgy$ donde y es la altura medida respecto de la referencia $y = 0$ en la que tomamos $E_{pg} = 0$

Por otro lado tenemos el muelle, que tiene asociada la fuerza dada por la ley de Hooke $-kx$ donde x es el alargamiento o compresión respecto de la posición relajada del muelle $x = 0$. En el caso del muelle la energía potencial elástica $E_{pe} = kx^2/2$ la tomaremos con la referencia $E_{pe} = 0$ cuando $x = 0$.

El ejemplo describe tres situaciones del sistema. Una situación inicial, situación A en la siguiente figura, en la que dejamos caer el bloque sobre el muelle. Una situación B en la que el bloque ha comprimido el muelle y se encuentra momentáneamente en reposo. Una situación C en la que el muelle está parcialmente comprimido respecto del caso B, y el bloque tiene cierta velocidad.

Aunque se nos pide la velocidad del bloque en C v_C , vamos a tener que determinar primero el valor de la constante elástica del muelle k , que no es conocida inicialmente.

Por este motivo nuestra estrategia será la siguiente: primero usaremos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica entre los puntos A y B para obtener k . Luego haremos lo mismo entre los puntos A y C para obtener v_C

Como ambas fuerzas son conservativas, el Principio de Conservación de la Energía Mecánica nos dice que

$$\Delta E = 0 \quad (1)$$

Y en este caso, al considerar la energía potencial en la ecuación (1) debemos tener en cuenta tanto la energía potencial gravitatoria E_{pg} como la elástica E_{pe} . La ecuación (1)

queda

$$\Delta E_{pg} + \Delta E_{pe} + \Delta E_c = 0 \quad (2)$$

Como es habitual, debemos usar (2) comparando las energías en dos situaciones concretas. Como hemos dicho, comenzaremos comparando las situaciones A y B

$$[E_{pg}(B) - E_{pg}(A)] + [E_{pe}(B) - E_{pe}(A)] + [E_c(B) - E_c(A)] = 0 \quad (3)$$

Ahora tendremos en cuenta que en A y B la velocidad es nula y por tanto $E_c(A) = E_c(B) = 0$.

En cuanto a la energía potencial gravitatoria, vamos a tomar la referencia de $E_{pg} = 0$ en la posición inicial del bloque (situación A). Por tanto $E_{pg}(A) = 0$. En la situación B, dado que el bloque ha descendido, la energía potencial debe ser menor, es negativa. Si la altura inicial del muelle respecto de la plataforma h y la compresión del muelle en la situación B x_B las tomamos como cantidades positivas, entonces la coordenada vertical del bloque en B es $-(h + x_B)$ y su energía potencial $E_{pg}(B) = -mg(h + x_B)$

Finalmente, la energía potencial elástica en A es $E_{pe}(A) = 0$ (muelle sin comprimir) y en B, con una compresión x_B , es $E_{pe}(B) = kx_B^2/2$. Sustituyendo todos estos valores en (3) nos queda

$$[-mg(h + x_B) - 0] + \left[\frac{1}{2}kx_B^2 - 0 \right] + [0 - 0] = 0$$

En esta ecuación todo es conocido salvo la constante elástica del muelle k cuyo valor es

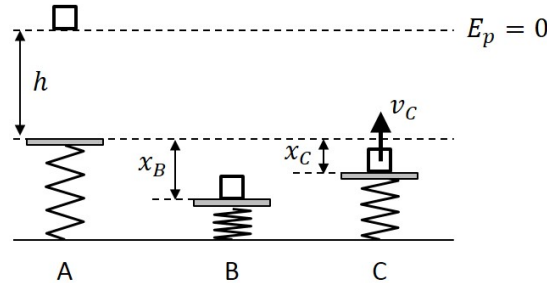
$$k = \frac{2mg(h + x_B)}{x_B^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 9.81(5.00 + 0.25)}{0.25^2} = 1648 \text{ N/m} \quad (4)$$

Una vez conocida k planteamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica entre los puntos A y C

$$[E_{pg}(C) - E_{pg}(A)] + [E_{pe}(C) - E_{pe}(A)] + [E_c(C) - E_c(A)] = 0$$

$$[-mg(h + x_C) - 0] + \left[\frac{1}{2}kx_C^2 - 0 \right] + \left[\frac{1}{2}mv_C^2 - 0 \right] = 0 \quad (5)$$

Donde $x_C = 0.15 \text{ m}$ es ahora el valor de la compresión del muelle y donde tenemos el término cinético $mv_C^2/2$ debido a que la velocidad en C no es nula.



De (5) se obtiene v_C inmediatamente

$$v_C = \left[2g(h + x_C) - \frac{k}{m}x_C^2 \right]^{1/2} = \left[2 \cdot 9.81(5.00 + 0.15) - \frac{1648}{1}0.15^2 \right]^{1/2} = 8.0 \text{ m/s}$$

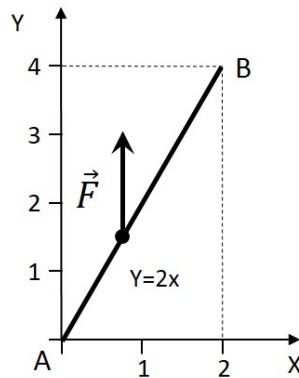
Que es el resultado solicitado.

Notas:

- En el caso C se ha pintado la velocidad hacia arriba, lo que correspondería a un momento temporal posterior al caso B. Igualmente podríamos haber puesto, para una misma compresión en el muelle, la velocidad hacia abajo. Ésto se correspondería con un momento anterior al caso B. El resultado sería el mismo en cuanto al módulo de la velocidad v_C
 - Una vez conocido k podríamos haber obtenido v_C usando en (2) los puntos B y C en lugar de A y C. La energía mecánica E es la misma en A, B, C y en cualquier otra situación intermedia. Esto es así porque la Energía Mecánica se conserva en este problema, tiene siempre el mismo valor.
-

Ejemplo 3.4. Una fuerza $\vec{F} = 4y\hat{j}$ actúa sobre una partícula de masa $m = 0.1 \text{ kg}$ mientras ésta se mueve sobre una varilla lisa de ecuación $y = 2x$, siendo y la dirección vertical, desde el origen A (0,0) hasta el punto B (2,4). Si la velocidad de la partícula en la posición A es de 10 m/s, calcular:

- El trabajo realizado por la fuerza F sobre la partícula desde A hasta B
- La velocidad de la partícula en B
- La aceleración de la partícula en B



Solución:

Para calcular el trabajo W_A^B realizado por la fuerza \vec{F} desde A hasta B tenemos que calcular la integral

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

A lo largo de la trayectoria establecida por la ecuación $y = 2x$.

Para ello tenemos que evaluar el producto escalar dentro de la integral. Ya tenemos el vector fuerza $\vec{F} = 4y\hat{j}$, nos falta determinar el vector $d\vec{r}$.

En general el vector de posición \vec{r} en coordenadas cartesianas es

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

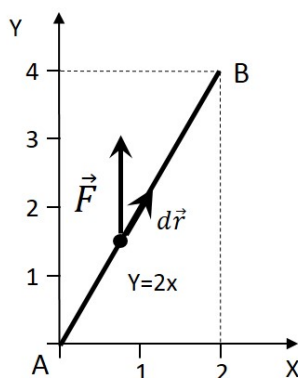
Y el vector $d\vec{r}$ es simplemente el diferencial del anterior

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

En nuestro ejemplo podemos obviar la coordenada z (o considerarla $z = 0$) que es siempre constante ya que el movimiento ocurre en el plano XY. Por tanto $dz = 0$ y $d\vec{r}$ es

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

Ahora podemos hacer el producto escalar en (1)



$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4y\hat{j} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = 4ydx\hat{j} \cdot \hat{i} + 4ydy\hat{j} \cdot \hat{j} = 4ydy \quad (2)$$

Donde hemos tenido en cuenta los productos escalares de los vectores unitarios. Concretamente $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ y $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$. Insertando ahora (2) en (1) podemos resolver la integral. Los límites de integración 'genéricos' A y B pueden explicitarse ahora en función de la variable de integración ya que $y = 0$ en A e $y = 4$ en B.

$$W_A^B = \int_0^4 4ydy = [2y^2]_0^4 = 32 \text{ J} \quad (3)$$

A la hora de calcular la velocidad usaremos la relación entre trabajo y energía. Como y es el eje vertical, debemos también tener en cuenta el peso, a través de la energía potencial mgy asociada a él. Tomando como referencia $E_p = 0$ el punto A ($y_A = 0$), la energía potencial en B es mgy_B con $y_B = 4 \text{ m}$. Además tendremos en cuenta que $E_c(A) = 0$, pues parte del reposo.

Además de la fuerza \vec{F} y del peso $m\vec{g}$ sobre la masa también actúa una normal N ejercida por la varilla. Como \vec{N} es perpendicular al desplazamiento $d\vec{r}$ el trabajo asociado a la normal es cero y no aparece en la ecuación de la energía.

$$W_A^B = \Delta E = \Delta E_p + \Delta E_c$$

$$W_A^B = [E_p(B) - E_p(A)] + [E_c(B) - E_c(A)]$$

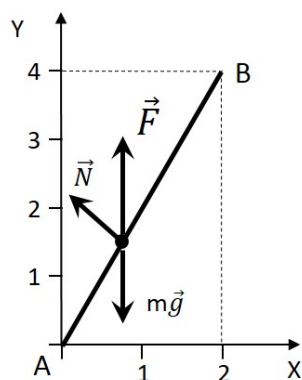
$$W_A^B = [mgy_B - 0] + \left[\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 \right]$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m} (W_A^B - mgy_B)} = \sqrt{\frac{2}{0.1} (32 - 0.1 \cdot 9.81 \cdot 4)} = 23.7 \text{ m/s}$$

Finalmente, la aceleración en el punto B se obtiene de la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Como la partícula está ensartada en la varilla el movimiento será a lo largo de ésta. En la dirección de la varilla solamente las componentes de la fuerza \vec{F} y del peso tiene



componente no nula. Si α es el ángulo que forma la varilla con la vertical y llamando a a la aceleración en la dirección de la varilla:

$$F \cos \alpha - mg \cos \alpha = ma$$

En el punto B ($y_B = 4 \text{ m}$) y $\vec{F} = 16\hat{j} \text{ N}$. Del propio dibujo podemos calcular la longitud de la varilla como $L = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ y por tanto $\cos \alpha = 4/(2\sqrt{5}) = 2/\sqrt{5}$. La ecuación anterior queda

$$16 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 0.1 \cdot 9.81 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.1a$$

Y

$$a = 134.3 \text{ ms}^{-2}$$

Aunque el ejercicio está resuelto, podemos aprovechar para preguntarnos como se calcularía el trabajo de la fuerza \vec{F} si utilizamos otro camino para ir de A a B.

Por ejemplo, pensemos en un camino formado por dos tramos. El primer tramo (1) va verticalmente del punto A (0,0) al punto C (0,4). El segundo tramo (2) va horizontalmente del punto C al punto B (2,4).

Para calcular el trabajo debemos hacerlo en cada uno de los tramos por separado, aprovechando la aditividad del trabajo.

$$W_A^B = W_A^C(1) + W_C^B(2)$$

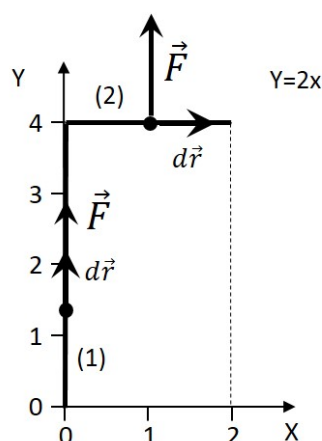
Y para cada camino identificar el valor de $d\vec{r}$.

Como se ve en la figura, en el caso del camino (1) el $d\vec{r} = dy\hat{j}$. El producto escalar (2) queda ahora

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 4y\hat{j} \cdot dy\hat{j} = 4ydy$$

Exactamente igual que en (2) y por tanto la integral (3) también dará el mismo resultado

$$W_A^C(1) = 32 \text{ J}$$



En el camino (2) $d\vec{r} = dx\hat{i}$ es perpendicular a $\vec{F} = 4y\hat{j}$ y su producto escalar es 0. Esto hace que el trabajo también sea 0 para este camino.

$$W_C^B(2) = 0$$

Así que el trabajo de la fuerza para este camino es

$$W_A^B = W_A^C(1) + W_C^B(2) = 32 + 0 = 32 \text{ J}$$

Como en el enunciado original. Evidentemente los otros apartados del ejercicio darían idénticos resultados, pues nada cambia en la ecuación de la energía mecánica.

Notas:

- Si nos fijamos con atención, la expresión (2) se obtiene sin tener en cuenta la ecuación de la trayectoria en ningún momento. No se hace uso de que $y = 2x$. En realidad, si la ecuación de la trayectoria fuese una función cualquiera $y = y(x)$, nada cambiaría en la solución. Esto es así porque realmente F es una fuerza conservativa, y por tanto el trabajo no depende del camino. Por eso el otro ejemplo de trayectoria también da el mismo valor del trabajo.

Capítulo 4

Sistemas de partículas

Introducción

Hasta ahora hemos estudiado en detalle el movimiento de una partícula. Partícula que hemos supuesto puntual, lo que en la práctica significa que sus dimensiones son muy pequeñas o bien que su estructura interna es irrelevante para el problema en cuestión.

Sin embargo los objetos reales suelen ser complejos, su estructura es importante y están formados por más de una partícula. Es decir, los objetos reales son sistemas de partículas. Para poder tratar estos sistemas necesitamos generalizar y extender lo que hemos visto para una partícula. Ese es precisamente el objetivo de este capítulo.

Todo este capítulo descansa en una idea fundamental: el centro de masas de un cuerpo. Este es el primer concepto que vamos a definir. Es muy útil porque, como veremos, el problema de describir el movimiento de un sistema de partículas puede separarse en dos problemas independientes. Uno es describir el movimiento del centro de masas del sistema y otro el de las partículas respecto del centro de masas. Esta separación simplificará enormemente el estudio de los sistemas de partículas. Por otro lado nos obligará a trabajar frecuentemente con varios sistemas de referencia simultáneamente.

Si el sistema tiene N partículas podemos identificar cada una de ellas con un número. Así tendremos la partícula 1, la partícula 2,...etc hasta la partícula N . Para identificar una partícula cualquiera usaremos letras. Así la partícula i o la partícula j hacen referencia a alguna de las partículas del sistema, sin especificar cual.

Un Sistema de Partículas es un conjunto de N partículas puntuales.

Cada partícula tiene su propia masa m_i y su posición viene especificada por el correspondiente vector de posición \vec{r}_i . Desde luego cada partícula i tiene su propia velocidad \vec{v}_i , aceleración \vec{a}_i , momento lineal $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$,... etc ($i = 1, 2, \dots, N$).

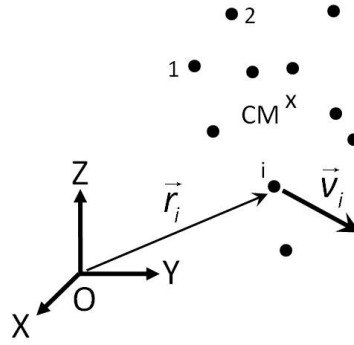


Figura 4.1: Sistema de N partículas $i = 1, 2, \dots, N$

La masa del sistema de partículas M o masa total es la suma de las masas individuales de cada una de las partículas que forman el sistema.

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.1)$$

4.1. Centro de Masas (CM)

El Centro de Masas (CM) es un concepto fundamental para el estudio del sistema de partículas. La razón es que, para un observador externo, el complejo movimiento de un sistema de partículas se va a poder describir por un lado como el movimiento del propio Centro de Masas, como si fuese una partícula con la masa total M de todo el sistema, y por otro lado el movimiento de las partículas individuales respecto del CM.

Para las cantidades referidas al centro de masas o al sistema como un todo utilizaremos en general letras mayúsculas.

El CM es un punto en el espacio y como tal su posición, su velocidad o su aceleración puede especificarse mediante vectores. Así, con la ayuda de la figura (4.1) definimos:

El Centro de Masas (CM) del sistema de partículas es el punto (lugar geométrico) cuyas coordenadas vienen especificadas por el vector de posición \vec{R}_{CM} calculado como

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (4.2)$$

La velocidad del CM, \vec{V}_{CM} es la derivada de \vec{R}_{CM} respecto del tiempo.

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (4.3)$$

La aceleración del CM, \vec{A}_{CM} es la derivada de \vec{V}_{CM} respecto del tiempo.

$$\vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \quad (4.4)$$

En estas expresiones M es la masa total del sistema y m_i , \vec{r}_i , \vec{v}_i y \vec{a}_i son respectivamente la masa, posición, velocidad y aceleración de la partícula i con $i = 1, 2, \dots, N$.

El centro de masas de un sistema de partículas es un lugar geométrico. No tiene por qué coincidir con la posición de una de las partículas (aunque podría hacerlo). Como las partículas se mueven, sus posiciones \vec{r}_i son funciones del tiempo y la posición del CM \vec{R}_{CM} también. El CM se mueve, no es un punto fijo en el espacio.

4.2. Momento lineal

En general, definir magnitudes globales del sistema de partículas suele ser fácil. Simplemente sumamos la contribución de cada una de las partículas. Por ejemplo, para el caso del momento lineal podemos definir el momento lineal total del sistema de partículas:

El momento lineal total \vec{P} del sistema de partículas es la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas que lo forman, es decir

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (4.5)$$

Donde $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ es el momento lineal de la partícula i con $i = 1, 2, \dots, N$.

Si nos fijamos en (4.5) y la comparamos con (4.3) comprobamos inmediatamente que:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM} \quad (4.6)$$

Este resultado es muy importante. El momento lineal total puede asignarse directamente al CM. Como si el CM fuese una partícula de masa M , la masa total del sistema que se mueve con la velocidad dada por (4.3).

Podemos calcular también el momento lineal total, pero visto desde un observador situado en el CM del sistema.

El momento lineal total \vec{P}' referido al CM del sistema de partículas es la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas, referidos al CM, es decir

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i \quad (4.7)$$

Donde $\vec{p}'_i = m_i \vec{v}'_i$ es el momento lineal de la partícula i con $i = 1, 2, \dots, N$, medido por un observador situado en el CM.

Ahora bien, si pensamos en (4.6), la velocidad del CM vista respecto del propio CM es 0. Por tanto

$$\vec{P}' = 0 \quad (4.8)$$

Esta propiedad es realmente definitoria del CM y la que en última instancia hace que el CM de un sistema de partículas sea tan útil.¹ Este resultado puede demostrarse teniendo en cuenta la relación entre las velocidades vistas por un observador externo O y por otro O' en el CM: $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i$ que ya conocemos.

4.3. Fuerzas y Segunda Ley de Newton para el sistema de partículas

Sabemos que a través de la Segunda Ley de Newton las fuerzas son las responsables últimas del movimiento, o más concretamente, de los cambios en el movimiento de las partículas. En un sistema de partículas, cada una de ellas estará sometida a fuerzas y cada una de ellas obedecerá la Segunda Ley de Newton. Las fuerzas sobre una partícula del sistema pueden ser, o bien debidas a la interacción con partículas del sistema, o bien debidas a la interacción con partículas externas al sistema de partículas.

Fuerzas internas al sistema de partículas son aquellas que se dan entre partículas del sistema. Llamaremos $\vec{F}_{int,i}$ a la suma de todas las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i .

Las fuerzas internas sobre la partícula i tienen su origen en el resto de partículas del sistema. Si sumamos las fuerzas internas sobre todas las partículas del sistema la Tercera Ley de Newton nos asegura que se van a cancelar dos a dos, dando una suma total nula:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{int,i} = 0 \quad (4.9)$$

Cuando tratamos al sistema como “un todo” esta propiedad simplifica mucho el análisis.

Fuerzas externas al sistema de partículas son aquellas que se dan entre cualquiera de las partículas y otros cuerpos ajenos al sistema. Llamaremos $\vec{F}_{ext,i}$ a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i .

¹Para ser exactos, todos los puntos que se encuentren en reposo respecto del CM tienen la misma propiedad.

Podemos denominar fuerzas externas al sistema \vec{F}_{ext} a la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre todas las partículas del sistema:

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext,i} \quad (4.10)$$

Por tanto, sobre una partícula i del sistema, la fuerza total que actúa sobre ella \vec{F}_i podrá ponerse como

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{ext,i} \quad (4.11)$$

Si pensamos en el sistema de partículas como un todo, podemos calcular la suma de todas las fuerzas \vec{F}_i que actúan sobre todas las partículas que lo componen. Si hacemos eso encontramos que:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{ext} \quad (4.12)$$

Ahora queremos obtener una expresión de la Segunda Ley de Newton para el sistema de partículas. Para ello, derivamos respecto del tiempo el momento lineal total \vec{P} y usamos el resultado (4.9) y la definición (4.10), obteniendo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad (4.13)$$

Otro resultado muy importante. Aquí \vec{P} es el momento lineal total, que sabemos es $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$, es decir, el momento lineal que correspondería a una única partícula con la masa igual a la masa total del sistema y con velocidad igual a la velocidad del CM. Por otro lado \vec{F}_{ext} es la suma de todas las fuerzas cuyo origen es externo al sistema. No influye en esta ecuación las fuerzas internas entre las partículas. Si M es constante entonces

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{A}_{CM} \quad (4.14)$$

Que es completamente análoga a la Segunda Ley de Newton para una partícula puntual. Dicho de otra forma, el CM se comporta como una partícula de masa M sometida a la acción de las fuerzas externas al sistema y como tal obedece la Segunda Ley de Newton. El movimiento del CM está determinado exclusivamente por las fuerzas externas.

4.3.1. Principio de conservación del momento lineal

Una consecuencia inmediata de (4.13) es que si sobre un sistema de partículas $\vec{F}_{ext} = 0$ entonces $d\vec{P}/dt = 0$ y por tanto \vec{P} es constante. Fijarse para que $\vec{F}_{ext} = 0$ no significa que no hay fuerzas externas, sino que su suma vectorial se anula. Este resultado es fundamental y se conoce como

El principio de conservación del momento lineal establece que si sobre un sistema de partículas la suma de todas las fuerzas exteriores es nula, entonces el momento lineal total del sistema permanece constante.

4.4. Energía cinética

Siguiendo con la idea de generalizar las expresiones que tenemos para una partícula al sistema de partículas le toca el turno a la energía cinética E_c . Lo lógico es definir la energía cinética del sistema de partículas como la suma de las energías cinéticas individuales

La energía cinética del sistema de partículas, o energía cinética total E_c es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del sistema

$$E_c = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad (4.15)$$

La energía cinética del sistema de partículas referida al CM, E'_c es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas medida desde el observador situado en el CM.

$$E'_c = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) \quad (4.16)$$

Al relacionar estas definiciones se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + E'_c \quad (4.17)$$

De nuevo podemos separar una magnitud, la energía cinética, en dos partes. Por un lado la energía cinética que correspondería a una partícula cuya masa es la masa total del sistema de partículas M y que se mueve con velocidad igual a la velocidad del CM del sistema \vec{V}_{CM} y por otro la energía cinética de las partículas, tal y como la mediría un observador colocado en el CM del sistema.

4.5. Trabajo

La suma de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, en general, le producirán una aceleración que a su vez producirá un cambio en su velocidad. El trabajo realizado por todas las fuerzas sobre la partícula W_i es igual a la variación de energía cinética de esa partícula ΔE_{ci} , de acuerdo con el importante teorema trabajo-energía.

$$W_i = \Delta E_{ci} \quad (4.18)$$

Como en el apartado anterior, nuestra idea fundamental será distinguir aquellas fuerzas que son externas al sistema de las que son internas y que tienen su origen en la interacción de las partículas que lo forman.

En el caso de una partícula podemos distinguir el trabajo realizado por fuerzas externas al sistema $W_{ext,i}$ y el trabajo realizado por fuerzas internas al sistema $W_{int,i}$. Como las fuerzas son o bien externas o bien internas, es evidente que

$$W_i = W_{ext,i} + W_{int,i} \quad (4.19)$$

Desde el punto de vista del sistema de partículas también tenemos un conjunto de fuerzas que actúan sobre él y que es el resultado de todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas que lo forman. Nos preguntamos ahora que relación habrá entre el trabajo de estas fuerzas y la variación de energía cinética del sistema de partículas. Siguiendo nuestra estrategia, habitual ya, de definir magnitudes relativas a todo el sistema de partículas sin más que sumar las magnitudes correspondientes a cada una de las partículas, podemos definir

El trabajo total W como el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema.

$$W = \sum_{i=1}^N W_i \quad (4.20)$$

El trabajo total realizado por fuerzas externas W_{ext} como el trabajo realizado por todas las fuerzas externas al sistema.

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^N W_{ext,i} \quad (4.21)$$

El trabajo realizado por las fuerzas internas W_{int} como el trabajo realizado por todas las fuerzas internas al propio sistema.

$$W_{int} = \sum_{i=1}^N W_{int,i} \quad (4.22)$$

Evidentemente, como las fuerzas solo pueden ser o bien externas o bien internas, se cumplirá

$$W = W_{ext} + W_{int} \quad (4.23)$$

Ya hemos definido en el apartado anterior la energía cinética total del sistema como la suma de las energías cinéticas. Por tanto, sin más que sumar (4.18) sobre todas las partículas del sistema se obtiene la generalización del teorema trabajo-energía para un sistema de partículas.

$$W = \Delta E_c \quad (4.24)$$

Es decir

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_c \quad (4.25)$$

Supongamos ahora que las fuerzas internas son conservativas. En ese caso el trabajo realizado por las fuerzas internas puede ponerse como la variación, con signo negativo, de una energía potencial interna $E_{p_{int}}$, es decir

$$W_{int} = -\Delta E_{p_{int}} \quad (4.26)$$

Si además tenemos en cuenta el resultado (4.17), entonces

$$W_{ext} = \Delta E_c - W_{int} \quad (4.27)$$

$$W_{ext} = \Delta \left(\frac{1}{2} M V_{CM}^2 \right) + \Delta E'_c + \Delta E_{p_{int}} \quad (4.28)$$

Tanto $\Delta E'_c$ como $\Delta E_{p_{int}}$ son energías que pueden considerarse “del sistema” ya que están referidas al CM o bien a fuerzas internas únicamente. Si llamamos energía mecánica interna E'_{int} a la suma

$$E'_{int} = E'_c + E_{p_{int}} \quad (4.29)$$

Entonces

$$W_{ext} = \Delta \left(\frac{1}{2} M V_{CM}^2 \right) + \Delta E'_{int} \quad (4.30)$$

4.6. Momento angular y momento de fuerzas

Como hemos hecho ya con otras magnitudes, definimos en primer lugar el momento angular total del sistema de partículas para un observador O y para un observador en el CM:

Momento angular total \vec{L} respecto de un punto O es la suma de los momentos angulares de todas las partículas del sistema, calculados respecto de O .

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (4.31)$$

Donde $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ es el momento angular de la partícula i respecto del punto O siendo \vec{r}_i y \vec{p}_i su posición y momento lineal respectivamente.

Momento angular total \vec{L}' respecto del CM es la suma de los momentos angulares de todas las partículas del sistema, calculados respecto del CM.

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N \vec{L}'_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \quad (4.32)$$

Donde ahora $\vec{L}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i$ es el momento angular de la partícula i respecto del CM.

Como en apartados anteriores, al relacionar ambas expresiones se obtiene:

$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} + \vec{L}' \quad (4.33)$$

El momento angular total de un sistema de partículas visto desde un observador O inercial es igual al momento angular del sistema, visto desde el CM más el momento angular respecto de O de una masa igual a la masa total del sistema y que se encuentra y mueve como el CM del sistema. Un resultado en la línea de los obtenidos antes.

Finalmente, queremos disponer de una ecuación análoga a la (2.21) pero para un sistema de partículas. Como pasaba en el caso de la Segunda Ley de Newton para el sistema de partículas (4.13) la distinción entre momentos de las fuerzas externas e internas vuelve a ser decisiva.

Más concretamente, supondremos que todas las fuerzas internas del sistema de partículas son fuerzas centrales. Al sumar sobre todas las partículas del sistema la contribución al momento de fuerzas de las fuerzas internas se cancela. Por tanto, respecto del sistema como un todo, solamente tenemos que considerar los momentos de las fuerzas externas. De esta forma se obtiene la importante relación:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \quad (4.34)$$

Una ecuación totalmente análoga a la que teníamos en el caso de una partícula. Hay que fijarse que una partícula, por definición, no tiene estructura y no tiene sentido hablar de fuerzas internas ni de momento realizado por las fuerzas internas. En el caso de una partícula todas las fuerzas que pueden influir en su movimiento son exteriores a ella. Es decir, esta ecuación (4.34) es válida para un sistema de partículas y también para una sola partícula.

4.7. Conservación del momento angular

Si suponemos que $\vec{M}_{ext} = 0$ entonces, en la ecuación (4.34) $d\vec{L}/dt = 0$ y \vec{L} es un vector constante en el tiempo. Esto nos lleva a un importante principio de gran utilidad práctica.

El Principio de Conservación del Momento Angular establece que si la suma de los momentos de las fuerzas externas se anula ($\vec{M}_{ext} = 0$) entonces el Momento Angular permanece constante ($\vec{L} = cte$).

Como \vec{L} es perpendicular al plano que contiene la velocidad, si \vec{L} es constante dicho plano será siempre el mismo, por tanto el movimiento de la partícula tendrá lugar en un plano.

4.8. Colisiones

Las colisiones, los choques de dos partículas, son un problema especialmente interesante como aplicación de lo que hemos visto en el capítulo sobre sistemas de partículas. Todos los días podemos ver ejemplos de colisiones. pelotas contra raquetas o paredes, objetos que caen e impactan en el suelo, golpes entre piezas de una máquina, choques entre vehículos, etc.

Aunque sean ejemplos muy diversos, en todos ellos la colisión es un proceso relativamente rápido. Desde luego, durante la colisión habrá una fuerte interacción entre los dos cuerpos y entre ellos existirán fuerzas cuya naturaleza puede ser muy complicada.

Estas fuerzas son difíciles de estudiar, pero en cualquier caso podremos afirmar que son internas al sistema que forman ambas partículas. Siendo fuerzas internas, no afectan al momento lineal total. Por otro lado, al ser el choque un proceso muy rápido, el efecto de las fuerzas externas, si las hubiera, puede en general despreciarse. Si el "choque" es una interacción que se prolonga en el tiempo habría que estudiar el efecto de las fuerzas externas durante el proceso.

Nosotros asumiremos que el choque se produce en un $\Delta t \rightarrow 0$. El momento lineal total \vec{P} se conserva. Supongamos el choque de dos partículas de masas m_1 y m_2 . Llamemos \vec{v}_1 y \vec{v}_2 a sus velocidades antes del choque y \vec{u}_1 y \vec{u}_2 a sus velocidades después del choque. La conservación del momento lineal nos dice que:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \quad (4.35)$$

Además del momento lineal podemos pensar también en la energía cinética. La energía cinética no tiene por que ser igual antes y después del choque. Llamamos factor Q a la variación de energía cinética, $Q = \Delta E_c = E_{c,después} - E_{c,antes}$, que puede tener los siguientes valores:

$$Q = \begin{cases} = 0 & , \text{ la energía cinética se conserva, choque perfectamente elástico} \\ < 0 & , \text{ se pierde energía cinética, choque inelástico endoérgico} \\ > 0 & , \text{ se gana energía cinética, choque inelástico exoérgico} \end{cases}$$

En el caso de una colisión perfectamente elástica la energía se conserva y por tanto tendríamos

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \quad (4.36)$$

Una colisión puede resolverse, muchas veces de forma ventajosa, desde el sistema de referencia CM. En este sistema $\vec{P}' = 0$ lo que simplifica cálculos. Utilizando como siempre variables con *prima* (') para el CM, la relación (4.35) pasaría a ser

$$m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 = 0 \quad (4.37)$$

El factor Q también puede calcularse para un observador situado en el CM, Q' . Es fácil demostrar, a partir de la relación (4.17) que $Q' = Q$. La variación de energía cinética es la misma en ambos sistemas de referencia (en cualquier sistema de referencia).

Ejemplo 4.1. Una masa de 4 kg y moviéndose a 1.2 m/s, choca frontalmente con masa de 5 kg que se mueve a 0.6 m/s en el mismo sentido. Encontrar:

- Las velocidades después del choque y el cambio de momento lineal de cada masa si $Q = 0$
- Repetir el apartado (a) suponiendo que la segunda masa se mueve en sentido opuesto a la primera
- Repetir (a) y (b) si las masas continúan moviéndose juntas después del choque

Solución:

En una colisión las fuerzas son internas al sistema de partículas. Por tanto el momento lineal total \vec{P} no varía permanece constante, cumpliéndose $\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{despues}$.

Como el choque tiene lugar en una única dimensión podemos obviar el carácter vectorial en las velocidades y momentos lineales. A la hora de considerar el signo de las componentes de estos vectores, tomaremos como positivo el sentido 'hacia la derecha' y negativo 'hacia la izquierda'.

Caso (a) ($v_1 = 1.2$ m/s, $v_2 = 0.6$ m/s, Elástico)

Llamaremos v_1 y v_2 a las velocidades de las partículas 1 y 2 antes de la colisión. Llamaremos u_1 y u_2 a sus velocidades después de la colisión.



Escrito en componentes, la conservación del momento lineal nos lleva a

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1)$$

Como $Q = \Delta E_c = 0$ la energía cinética se conserva en el choque. Es un choque perfectamente elástico. Como $E_{c,antes} = E_{c,despues}$ tenemos

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \quad (2)$$

Sustituyendo en (1) y (2) los valores de las masas $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 5$ kg y de las velocidades (que ambas son hacia la derecha, y por tanto positivas) $v_1 = 1.2$ m/s y $v_2 = 0.6$ m/s nos queda

$$4u_1 + 5u_2 = 7.8 \quad (3a)$$

$$4u_1^2 + 5u_2^2 = 7.56 \quad (3b)$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo, despejando u_1 en (3a)

$$u_1 = \frac{1}{4}(7.8 - 5u_2) \quad (4)$$

y sustituyendo en (3b) nos da una ecuación de segundo grado en u_2

$$11.25u_2^2 - 19.5u_2 + 7.652 = 0 \quad (5)$$

Que una vez resulta nos proporciona dos soluciones para u_2 y sus correspondientes parejas de soluciones para u_1 usando (4)

$$u_2 = 1.133 \text{ m/s} \rightarrow u_1 = 0.534 \text{ m/s} \quad (6a)$$

$$u_2 = 0.600 \text{ m/s} \rightarrow u_1 = 1.20 \text{ m/s} \quad (6b)$$

Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado han de mirarse con cuidado. En este caso la segunda solución (6b) no tiene lógica. Las partículas tienen la misma velocidad que antes del choque. Matemáticamente esta solución debe aparecer, pues las condiciones iniciales cumplen las ecuaciones (1) y (2) de partida. Pero la solución no tiene lógica pues significaría que la partícula 1 'atraviesa' a la 2, sobrepasándola, algo que va en contra de la hipótesis misma de que ambas partículas chocan (al menos en el sentido clásico de partícula....)

Por otra parte la solución (6a) sí es lógica, pues ambas partículas siguen moviéndose en este caso hacia la derecha, pero la partícula 2 con mayor velocidad que la 1. Por tanto (6a) es la solución de este apartado.

Para evaluar el cambio en el momento lineal de cada masa hay que calcular Δp (de nuevo solo la componente a lo largo de la dirección del movimiento, positivo hacia la derecha). Simplemente hay que calcular la diferencia de momento lineal después-antes.

$$\Delta p_1 = m_1 u_1 - m_1 v_1 = 4 \cdot 0.534 - 4 \cdot 1.20 = -2.66 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p_2 = m_2 u_2 - m_2 v_2 = 5 \cdot 1.133 - 5 \cdot 0.60 = 2.66 \text{ kgm/s}$$

Como el momento lineal total del sistema P no cambia (solamente actúan fuerzas internas) $\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ y por tanto $\Delta p_1 = -\Delta p_2$, como era de esperar.

Solución desde el CM del sistema

Este problema podría haberse resuelto realizando los cálculos desde el Centro de Masas CM del sistema. A las velocidades en el sistema CM las denotaremos con 'prima' (') Para ello es necesario

- Calcular la velocidad del centro de masas V_{CM}
- Transformar las velocidades iniciales v_1 y v_2 al sistema CM obteniendo v'_1 y v'_2
- Resolver (1) y (2) en el CM y obtener las velocidades tras el choque u'_1 y u'_2
- Transformar las velocidades u'_1 y u'_2 medidas en el CM al sistema de referencia original u_1 y u_2

Con el plan trazado, procedemos. Primer calculamos V_{CM} de su propia definición

$$V_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 1.20 + 5 \cdot 0.60}{4 + 5} = 0.8667 \text{ m/s}$$

Obtenemos las velocidades en el sistema CM

$$v'_1 = v_1 - V_{CM} = 1.20 - 0.8667 = 0.3333 \text{ m/s} \quad (7a)$$

$$v'_2 = v_2 - V_{CM} = 0.60 - 0.8667 = -0.2667 \text{ m/s} \quad (7b)$$

En el CM las dos partículas tienen que moverse en sentidos opuestos, pues $P' = 0$. La situación sería como en la siguiente figura



La ecuación (1) se simplifica ahora, ya que en el sistema de referencia del CM el momento lineal total es siempre nulo $P' = 0$. La ecuación que relaciona la energía cinética antes y después sigue siendo válida, sin más que sustituir las velocidades por sus equivalentes con 'prima'

$$\begin{aligned} m_1 u'_1 + m_2 u'_2 &= 0 \\ m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 &= m_1 u'^2_1 + m_2 u'^2_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores de masas y velocidades

$$4u'_1 + 5u'_2 = 0 \quad (8a)$$

$$4u'^2_1 + 5u'^2_2 = 0.80 \quad (8b)$$

Y, como en (3), despejando por ejemplo u'_1 en (8a)

$$u'_1 = -5u'_2/4$$

y sustituyendo en (8b) nos da la ecuación de segundo grado

$$11.25u'^2_2 = 0.4 \quad (9)$$

Con las soluciones

$$u'_2 = 0.2667 \text{ m/s} \rightarrow u'_1 = -0.3333 \text{ m/s} \quad (10a)$$

$$u'_2 = -0.2667 \text{ m/s} \rightarrow u'_1 = 0.3333 \text{ m/s} \quad (10b)$$

Como pasaba en las soluciones (6), hay que mirar con cuidado y comprobar la lógica del resultado. En este caso la solución (10b) se corresponde con la situación inicial, no hay

choque, las partículas se 'atravesan' una a la otra. Esta solución no es la que andamos buscando. La solución correcta aquí es (10a).

Podemos finalmente recuperar los valores para el observador inercial original sin más que revertir el cambio (7)

$$u_1 = u'_1 + V_{CM} = -0.3333 + 0.8667 = 0.534 \text{ m/s} \quad (11a)$$

$$u_2 = u'_2 + V_{CM} = 0.2667 + 0.8667 = 1.133 \text{ m/s} \quad (11b)$$

Que son, como esperábamos, idénticos a los obtenidos antes.

Podemos también calcular las variaciones de momento lineal $\Delta p'_1$ y $\Delta p'_2$ vistas por el sistema de referencia CM

$$\Delta p'_1 = m_1 u'_1 - m_1 v'_1 = 4 \cdot (-0.3333) - 4 \cdot 0.3333 = -2.66 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p'_2 = m_2 u'_2 - m_2 v'_2 = 5 \cdot 0.2667 - 5 \cdot (-0.2667) = 2.66 \text{ kgm/s}$$

El mismo resultado que antes. Como el momento lineal del CM no cambia (no hay fuerzas externas, V_{CM} constante) entonces, para cada partícula $\Delta p = \Delta p'$. Da igual en que sistema de referencia lo calculemos.

Caso (b) ($v_1 = 1.2 \text{ m/s}$, $v_2 = -0.6 \text{ m/s}$, Elástico)

Si la masa m_2 se mueve en sentido opuesto, es decir hacia la izquierda, entonces $v_2 = -0.6 \text{ m/s}$ en (1). La ecuación (2) queda igual, pues aparecen los cuadrados de las velocidades únicamente. Las ecuaciones quedan

$$4u_1 + 5u_2 = 1.8$$

$$4u_1^2 + 5u_2^2 = 7.56$$

Y su solución

$$u_2 = 1.00 \text{ m/s} \rightarrow u_1 = -0.80 \text{ m/s} \quad (12a)$$

$$u_2 = -0.60 \text{ m/s} \rightarrow u_1 = 1.20 \text{ m/s} \quad (12b)$$



Siguiendo el razonamiento de los otros casos, aquí la solución correcta es la (12a). Las variaciones del momento lineal ahora son

$$\Delta p_1 = m_1 u_1 - m_1 v_1 = 4 \cdot (-0.80) - 4 \cdot 1.20 = -8.0 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p_2 = m_2 u_2 - m_2 v_2 = 5 \cdot 1.00 - 5 \cdot (-0.60) = 8.0 \text{ kgm/s}$$

Que desde luego tienen el mismo módulo pero signos opuestos.

Solución desde el CM del sistema

Como en el caso (a) podemos resolver (b) realizando los cálculos desde el Centro de Masas CM del sistema. La estrategia y el método es el mismo.

Primer calculamos V_{CM} de su propia definición

$$V_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 1.20 + 5 \cdot (-0.60)}{4 + 5} = 0.20 \text{ m/s}$$

Obtenemos las velocidades en el sistema CM

$$v'_1 = v_1 - V_{CM} = 1.20 - 0.20 = 1.00 \text{ m/s} \quad (13a)$$

$$v'_2 = v_2 - V_{CM} = (-0.60) - 0.20 = -0.80 \text{ m/s} \quad (13b)$$

Visto desde el CM tendríamos una situación similar al caso (a) (ver figura anterior) con las masas aproximándose y, después del choque, alejándose del CM.

Las ecuaciones (1) y (2) quedan

$$\begin{aligned} 4u'_1 + 5u'_2 &= 0 \\ 4u'^2_1 + 5u'^2_2 &= 7.20 \end{aligned}$$

Y las soluciones

$$u'_2 = 0.80 \text{ m/s} \rightarrow u'_1 = -1.00 \text{ m/s} \quad (14a)$$

$$u'_2 = -0.80 \text{ m/s} \rightarrow u'_1 = 1.00 \text{ m/s} \quad (14b)$$

Donde la solución correcta es la (14a). De nuevo Podemos recuperar los valores para el observador inercial sin más que sumarle la velocidad del CM

$$u_1 = u'_1 + V_{CM} = (-1.00) + 0.20 = -0.80 \text{ m/s} \quad (15a)$$

$$u_2 = u'_2 + V_{CM} = 0.80 + 0.20 = 1.00 \text{ m/s} \quad (15b)$$

Finalmente calcularíamos las variaciones de momento lineal como en el caso anterior. Ya sabemos que saldrá el mismo valor que cuando se resuelve desde el sistema inercial original.

Caso (c)

Finalmente se pide recalcular (a) y (b) en caso de que las dos masas queden unidas tras el choque. Si las masas quedan unidas entonces el choque ya **no es elástico** y existirá una pérdida de energía cinética, y por tanto negativa, $Q = \Delta E_c < 0$.

Como la velocidad tras el choque es común a ambas partículas, la ecuación de conservación del momento lineal es suficiente para averiguar su valor. Así, tras la colisión, tenemos una sola partícula de masa $m_1 + m_2$ moviéndose a velocidad u

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

Si nos fijamos, (16) no es otra cosa que la definición de la velocidad del CM del sistema ($u = V_{CM}$). La velocidad V_{CM} no cambia en ningún momento, pues las fuerzas son internas al sistema.



Por tanto, en el primer caso ($v_1 = 1.2 \text{ m/s}$, $v_2 = 0.6 \text{ m/s}$, Inelástico)

$$v_1 = 1.2 \text{ m/s}, v_2 = 0.60 \text{ m/s} \rightarrow u = V_{CM} = 0.8667 \text{ m/s}$$

A partir de lo cual podemos calcular la variación de momento lineal de cada partícula ($u_1 = u_2 = u$) que, como no podía ser de otra manera, suman cero

$$\Delta p_1 = m_1 u - m_1 v_1 = 4 \cdot 0.8667 - 4 \cdot 1.20 = -1.333 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p_2 = m_2 u - m_2 v_2 = 5 \cdot 0.8667 - 5 \cdot 0.6 = 1.333 \text{ kgm/s}$$

Solución desde el CM del sistema

Desde luego, podemos hacerlo usando un sistema de referencia en el CM. La principal novedad ahora es que las masas quedan juntas tras el choque. Después del choque las dos masas no se mueven respecto del CM y $u'_1 = u'_2 = u' = 0$.



- Calculamos la velocidad del centro de masas V_{CM} .

$$V_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 1.20 + 5 \cdot 0.60}{4 + 5} = 0.8667 \text{ m/s} \quad (17)$$

- Transformamos las velocidades iniciales v_1 y v_2 al sistema CM obteniendo v'_1 y v'_2

$$v'_1 = v_1 - V_{CM} = 1.20 - 0.8667 = 0.3333 \text{ m/s} \quad (18a)$$

$$v'_2 = v_2 - V_{CM} = 0.60 - 0.8667 = -0.2667 \text{ m/s} \quad (18b)$$

- Como $P' = 0$ y ambas partículas quedan juntas tras el choque $u'_1 = u'_2 = u' = 0$. No hace falta ni resolver la ecuación (1) (o la solución es obvia... como uno quiera)
- Podemos ahora calcular la variación en los momentos lineales

$$\begin{aligned}\Delta p'_1 &= m_1 u' - m_1 v'_1 = 0 - 4 \cdot 0.3333 = -1.333 \text{ kgm/s} \\ \Delta p'_2 &= m_2 u' - m_2 v'_2 = 0 - 5 \cdot (-0.2667) = 1.333 \text{ kgm/s}\end{aligned}$$

- y también transformar si así lo deseamos las velocidades $u'_1 = u'_2 = u' = 0$ medidas en el CM al sistema de referencia original u_1 y u_2

$$\begin{aligned}u_1 &= u'_1 + V_{CM} = 0 + 0.8667 = 0.8667 : \text{ m/s} \\ u_2 &= u'_2 + V_{CM} = 0 + 0.8667 = 0.8667 : \text{ m/s}\end{aligned}$$

Que son iguales, e iguales a las del método anterior, pues ambas partículas se mueven juntas tras el choque.

El segundo caso, el caso (b), ($v_1 = 1.2 \text{ m/s}$, $v_2 = 0.6 \text{ m/s}$, Inelástico) se resuelve de la misma forma, sin más que cambiar los valores numéricos. Los resultados:

$$v_1 = 1.2 \text{ m/s}, v_2 = -0.60 \text{ m/s} \rightarrow u = V_{CM} = 0.20 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &= m_1 u - m_1 v_1 = 4 \cdot 0.20 - 4 \cdot 1.20 = -4.0 \text{ kgm/s} \\ \Delta p_2 &= m_2 u - m_2 v_2 = 5 \cdot 0.20 - 5 \cdot (-0.6) = 4.0 \text{ kgm/s}\end{aligned}$$

Y calculado respecto al CM, con $V_{CM} = 0.20 \text{ m/s}$.

$$\begin{aligned}v'_1 &= v_1 - V_{CM} = 1.20 - 0.20 = 1.0 \text{ m/s} \\ v'_2 &= v_2 - V_{CM} = -0.60 - 0.20 = -0.80 : \text{ m/s}\end{aligned}$$

Como $P' = 0$ y ambas partículas quedan juntas, la solución para la velocidad tras el choque es $u'_1 = u'_2 = u' = 0$. Finalmente podemos hallar las variaciones de momento lineal (que, por supuesto, coinciden con los hallados antes)

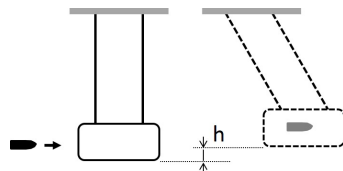
$$\begin{aligned}\Delta p'_1 &= m_1 u' - m_1 v'_1 = 0 - 4 \cdot 1.0 = -4.0 \text{ kgm/s} \\ \Delta p'_2 &= m_2 u' - m_2 v'_2 = 0 - 5 \cdot (-0.8) = 4.0 \text{ kgm/s}\end{aligned}$$

Notas:

- La solución (6b) tendría lógica si las partículas no chocan, simplemente la 1 adelanta a la 2 porque se mueve, por ejemplo, en una dirección paralela que no le lleva a colisionar.

- Nótese que en (10) las soluciones (correcta e incorrecta) se diferencian únicamente en el signo de las velocidades. Esto se debe a que el momento lineal total debe anularse necesariamente en el sistema de referencia CM. Por esa misma razón la ecuación (9) es una ecuación donde solamente aparece el cuadrado de la velocidad u_2'
-

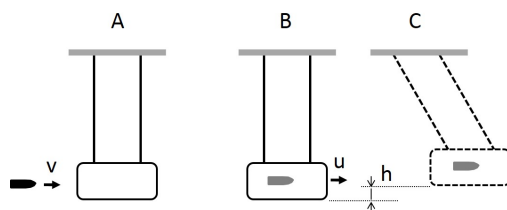
Ejemplo 4.2. En la figura se muestra un péndulo balístico, que se usa para determinar la velocidad de una bala (masa m) midiendo la altura h a la que el bloque (masa M) se eleva después de que la bala se ha incrustado en él. Demostrar que la velocidad de la bala está dada por la expresión: $v = (M + m)\sqrt{2gh}/m$



Solución:

En el péndulo balístico la bala impacta en el bloque y luego el conjunto se eleva hasta detenerse. Se trata de relacionar la velocidad de la bala v con la altura alcanzada por el péndulo cuando se detiene h . Para estudiar el proceso podemos considerar tres situaciones.

- Una primera situación antes del impacto (A en la figura) en el que la bala lleva todo el momento lineal y la energía cinética.
- Una segunda situación, B, en la que el choque ya ha tenido lugar. La bala se ha incrustado ya en el bloque pero el sistema bloque+bala sigue en su posición vertical. Esto es una aproximación, ya que en la realidad el péndulo habría comenzado a levantarse en el tiempo que dura el impacto. Esta aproximación simplifica el cálculo y, teniendo en cuenta que el impacto es rápido.
- Una situación C, que se alcanza tras el movimiento de péndulo del sistema bloque+bala. En C el péndulo se ha detenido momentáneamente (luego comenzará a bajar otra vez, claro) y el sistema ha subido una altura h respecto de su posición inicial.



El paso de la situación A a B es una colisión sin presencia de fuerzas externas. Sabemos que en ella se conserva el momento lineal. Esto nos permite relacionar la velocidad de la bala v con la del sistema bloque+bala tras el choque u . Como el movimiento es en

una dimensión podemos usar las componentes del momento lineal.

$$\begin{aligned}
 P(\text{antes}) &= P(\text{después}) \\
 mv &= (M + m)u \\
 u &= \frac{mv}{M + m}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde u es la velocidad del CM del sistema bloque+bala. Como el choque es inelástico (ambos cuerpos quedan juntos tras el choque) la energía cinética no se conserva en el proceso $A \rightarrow B$ y $Q = \Delta E_c < 0$.

En paso de la situación B a C solamente actúa el peso de los cuerpos (conservativo) y las tensiones en las cuerdas, que no hacen trabajo. Por tanto, tomando como referencia de energía potencial gravitatoria la situación B ($E_p(B) = 0$)

$$\begin{aligned}
 W_{NC} = \Delta E &= \Delta E_p + \Delta E_c \\
 0 &= [E_p(C) - E_p(B)] + [E_c(C) - E_c(B)] \\
 0 &= [(M + m)gh - 0] + \left[0 - \frac{1}{2}(M + m)u^2\right] \\
 u &= \sqrt{2gh}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Eliminando u de (1) y (2) obtenemos la expresión requerida para v

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

Aunque el problema no lo pregunta, podemos calcular la pérdida de energía en el choque. Usando (1) para sustituir la velocidad u

$$\begin{aligned}
 Q = \Delta E_c &= E_c(B) - E_c(A) \\
 &= \frac{1}{2}(M + m)u^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M + m} \right) mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-M}{M + m} \right) mv^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Que como vemos, es negativo.

Podemos calcular también la variación relativa de energía cinética. Cuando se quiere calcular la variación relativa se toma siempre como referencia la situación inicial, en este caso A.

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{E_c(B) - E_c(A)}{E_c(A)} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{-M}{M+m} \right) mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{-M}{M + m}$$

Si por ejemplo $M = 20m$ entonces

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{-M}{M + m} = \frac{-20m}{20m + m} = -0.9524$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} (\%) = -0.9524 \times 100 = -95.24 \%$$

Ya que es frecuente dar este tipo de resultados en porcentaje. Para $M = 20m$ el 95.24 % de la energía cinética de la bala se perdería en la colisión. Esta energía se convertiría en calor y en el trabajo de deformación del bloque de masa M.

Capítulo 5

Sólido rígido

Introducción

Hasta ahora las partículas que forman un sistema de partículas se han considerado en general “libres”, es decir, aunque existen fuerzas internas y por tanto relaciones entre ellas, pueden en principio moverse de una forma relativamente independiente. En muchos cuerpos y objetos que nos interesa estudiar esto no es así. Si pensamos por ejemplo en las piezas de una máquina o elementos de una estructura nos encontramos con objetos cuya forma y dimensiones permanecen básicamente inalterables durante el movimiento. Un sólido rígido es aquél sólido donde las distancias relativas de sus partes, de las partículas que lo componen, pueden considerarse constante. El sólido rígido se “mueve como un todo”. Hacer las distancias entre partículas constantes en el tiempo introduce simplificaciones en la descripción del sistema. El sólido rígido además es el tipo de cuerpo que vamos a encontrarnos con mayor frecuencia en la práctica.

5.1. Cuerpos sólidos, densidad

Algunas veces un sólido rígido puede estar formado por un número N de partículas como veíamos en el capítulo anterior. Otras veces tendremos que considerar sólidos extensos con formas simples (cilindros, discos, esferas,...) o complejas. En estos casos sería poco práctico describir el cuerpo mediante un conjunto finito de N partículas. En su lugar supondremos que el cuerpo es un continuo y utilizaremos la densidad para describir la distribución de masa en el cuerpo. Los sumatorios (\sum) darán paso a integrales (\int).

A la hora de definir la densidad conviene distinguir tres situaciones según se pueda considerar que la masa del cuerpo está distribuida en un volumen, en una superficie o a lo largo de una curva.

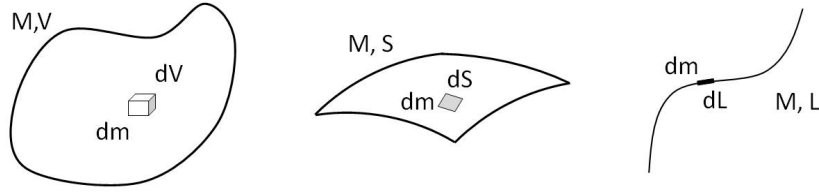


Figura 5.1: El elemento de masa dm puede referirse a un elemento de volumen dV , de superficie dS o de longitud dL según sea la forma del cuerpo.

La densidad de masa ρ es la masa por unidad de volumen, definida para cada punto del cuerpo como:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (5.1)$$

En el SI de unidades se mide en kg/m^3 y en principio puede variar a lo largo del cuerpo. Si ρ es constante, entonces la relación anterior queda simplemente

$$\rho = M/V \quad (5.2)$$

Siendo M y V la masa y volumen total del cuerpo.

La densidad superficial de masa σ es la masa por unidad de superficie, definida para cada punto del cuerpo como:

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \quad (5.3)$$

En el SI de unidades se mide en kg/m^2 . Puede variar a lo largo del cuerpo. Si σ es constante, entonces la relación anterior queda simplemente

$$\sigma = M/S \quad (5.4)$$

Siendo M y S la masa y la superficie total del cuerpo.

La densidad lineal de masa λ es la masa por unidad de longitud, definida para cada punto del cuerpo como:

$$\lambda = \frac{dm}{dL} \quad (5.5)$$

En el SI de unidades se mide en kg/m . Puede variar a lo largo del cuerpo. Si λ es constante, entonces la relación anterior queda simplemente

$$\lambda = M/L \quad (5.6)$$

Siendo M y L la masa y la longitud total del cuerpo.

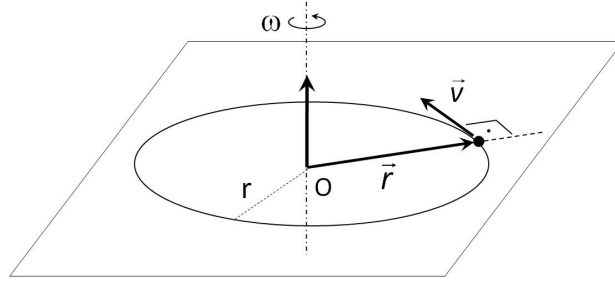


Figura 5.2: Velocidad angular $\vec{\omega}$ de una partícula que se mueve con movimiento circular.

5.2. Vectores velocidad y aceleración angulares

La dinámica de una partícula en rotación está determinada por la ecuación (2.21) que relaciona las dos magnitudes vectoriales fundamentales \vec{L} y \vec{M} , análoga a la Segunda Ley de Newton pero para rotaciones. Por otra parte, de forma natural el movimiento de rotación se describe mediante velocidades angulares (ω) y aceleraciones angulares (α), que son magnitudes escalares. El análisis se facilita mucho si convertimos estas variables angulares en vectores, dotándoles de un significado coherente de dirección y sentido. Lo que haremos es definir estos vectores a lo largo del "eje de giro" que representan, dándoles el sentido especificado por la "regla del tornillo".

Imaginemos una partícula girando en una circunferencia. La circunferencia está contenida en un plano, definimos:

El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ como el vector perpendicular al plano de giro, con el sentido dado por la "regla del tornillo" aplicada a ω y cuyo módulo es el valor (absoluto) de la velocidad angular (figura 5.2).

El vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ como el vector perpendicular al plano de giro, con el sentido dado por la "regla del tornillo" aplicada a α y cuyo módulo es el valor (absoluto) de la aceleración angular.

Para el movimiento circular de la figura (5.2) el vector velocidad \vec{v} viene ahora dado por el producto vectorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.7)$$

Para comprobarlo hay que fijarse que en el movimiento circular \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares (figura 5.2) y por tanto, hallando el módulo en la expresión anterior

$$v = |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(90^\circ) = r\omega \quad (5.8)$$

Que es lo que ya habíamos estado usando hasta ahora. Además el producto vectorial nos dice que \vec{v} es perpendicular tanto a $\vec{\omega}$ como a \vec{r} , como es el caso y también nos da el sentido correcto. Desde luego se cumple que:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (5.9)$$

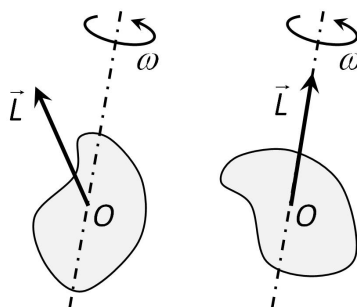


Figura 5.3: Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje el momento angular \vec{L} respecto de un punto del eje puede estar dirigido en cualquier dirección (izquierda). cuando \vec{L} está dirigido a lo largo del eje de rotación se dice que el eje de rotación es un eje principal (derecha)

5.3. Momento angular \vec{L}

En el caso del movimiento circular de la figura (5.2) el momento angular respecto del punto O es, como vimos en la sección (2.6) perpendicular al plano que contiene la circunferencia y por tanto lleva la misma dirección y sentido que el vector $\vec{\omega}$ definido antes. Esto significa que podemos escribir:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \quad (5.10)$$

Es muy importante darse cuenta que \vec{L} y $\vec{\omega}$ son paralelos porque \vec{L} se ha calculado respecto de O , el centro de la circunferencia. En otro punto distinto, incluso del eje de giro, esto no sería cierto.

Pensemos en un sólido que gira alrededor de un eje. Todas las partículas que lo forman giran también. Como sus posiciones relativas son fijas, todas giran con la misma velocidad angular, si bien los radios de giro son diferentes. Unas estarán más cerca que otras del eje de giro.

Nos gustaría tener una ecuación como (5.10) pero que se pudiese utilizar para todo el sólido. Elegido un punto para calcular el momento angular el problema que tenemos es que los momentos angulares individuales de cada una de las partículas del sólido no serán, en general, paralelos al eje de rotación. Es decir, para un caso cualquiera, el momento angular total del sólido \vec{L} no tiene porque ser paralelo a $\vec{\omega}$ (figura 5.3).

Si \vec{L} no es paralelo a $\vec{\omega}$ entonces no pueden ser simplemente proporcionales como en (5.10). La relación más general posible entre ellos será:

$$\vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega} \quad (5.11)$$

Donde \tilde{I} se denomina Tensor de Inercia. Está ecuación representa una relación matricial entre \vec{L} y $\vec{\omega}$. Para el punto donde calculamos el momento angular, y una vez elegidos unos ejes cartesianos, la relación entre \vec{L} y $\vec{\omega}$ es una matriz. Esta matriz será en principio distinta para cada punto del sólido.

Por lo tanto, la situación es compleja. Afortunadamente la mayor parte de las veces las cosas se simplifican enormemente gracias a que el tensor de inercia tiene una propiedad muy importante

- El Tensor de Inercia es un tensor simétrico. Para un punto cualquiera y unos ejes cualesquiera, la matriz que representa el tensor de inercia es una matriz simétrica.

Un resultado fundamental del álgebra lineal nos dice que toda matriz simétrica es diagonalizable, es decir:

- En cada punto de un cuerpo rígido se puede encontrar un sistema de ejes XYZ cartesianos en los cuales la matriz correspondiente al tensor de inercia es diagonal.

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_X & 0 & 0 \\ 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix}$$

- Los ejes XYZ en los que el tensor de inercia es diagonal se denominan ejes principales de inercia.

Como vemos, en el sistema de ejes principales el tensor de inercia es mucho más sencillo. Para ver un poco mejor la importancia de los ejes principales vamos a ver que ocurre cuando un cuerpo gira alrededor de un eje principal. Supongamos que XYZ son los ejes principales y que el cuerpo gira alrededor del eje Z . Por tanto su velocidad angular será un vector en la dirección del eje Z , $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_X & 0 & 0 \\ 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_Z \omega_z \end{pmatrix} = I_Z \vec{\omega} \quad (5.12)$$

Es decir, el momento angular también es un vector con la dirección del eje Z . Lo mismo habría pasado si el cuerpo hubiese girado alrededor del eje X o del eje Y . Esto ocurre porque el eje de giro es un eje principal. Por tanto

- Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje principal el momento angular \vec{L} y la velocidad angular $\vec{\omega}$ son vectores paralelos en la dirección del eje (principal) de giro y se cumple una relación lineal entre ellos

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (5.13)$$

Donde I es una magnitud escalar que se denomina momento de inercia. El valor de I depende de cuál es el eje de giro.

Algunas propiedades referentes a los ejes principales de inercia.

- Todos los puntos pertenecientes al mismo eje principal de inercia son equivalentes a la hora de calcular el valor del momento angular (por ello tiene sentido referirse a un eje, y no a un punto)
- En cualquier punto de un cuerpo siempre existen, al menos, tres ejes principales de inercia mutuamente perpendiculares.
- Los ejes de simetría (de la distribución de masa) de un cuerpo son ejes principales de inercia.
- Cualquier eje de rotación paralelo a uno de los ejes principales de inercia que pasan por el CM de un cuerpo es también un eje principal de inercia.
- En cuerpos que pueden considerarse planos, cualquier eje perpendicular al plano del cuerpo es eje principal de inercia.

5.3.1. Cálculo del Momento de Inercia

Si comparamos las expresiones (2.18) y (5.13) vemos que para una partícula de masa m que gira en una circunferencia de radio r , el momento de inercia respecto del eje perpendicular (y calculado para el centro de la circunferencia) es

$$I = mr^2 \quad (5.14)$$

Para un sistema de N partículas que gira alrededor de un eje principal de inercia, el momento de inercia I se calcula sumando el momento de inercia de cada una de ellas respecto de dicho eje:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (5.15)$$

Siendo m_i y r_i la masa y la distancia al eje de giro de la partícula i . Para un cuerpo sólido que gira alrededor de un eje principal de inercia, el momento de inercia I se calcula:

$$I = \int_{\text{Cuerpo}} r^2 dm \quad (5.16)$$

Donde r es la distancia al eje de giro del elemento de masa dm y la integral se extiende a todo el cuerpo.

5.3.2. Teorema de Steiner

Este teorema relaciona el momento de inercia de un eje principal que pasa por el CM del cuerpo con el de otro eje paralelo a él.

Teorema de Steiner Si I_{CM} es el momento de inercia respecto de un eje principal que pasa por el CM de un cuerpo de masa M , entonces el momento de inercia I respecto de un eje paralelo al primero y separado una distancia d de éste será:

$$I = I_{CM} + Md^2 \quad (5.17)$$

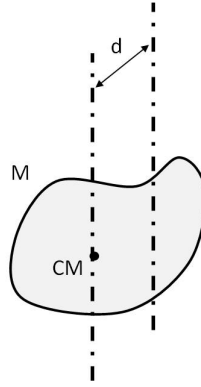


Figura 5.4: Teorema de Steiner.

5.3.3. Momento de inercia en cuerpos planos

En los cuerpos planos se cumplen relaciones entre los momentos de inercia que pueden facilitar su cálculo en determinadas circunstancias.

A la vista de la figura (5.5), sea Z un eje perpendicular al plano definido por el cuerpo. Ya sabemos que se tratará necesariamente de un eje principal. Llamemos I_Z al momento de inercia del cuerpo alrededor de dicho eje. Sean ahora los ejes X e Y , mutuamente perpendiculares y contenidos en el plano del cuerpo. Si I_X e I_Y son los respectivos momentos de inercia respecto de estos ejes, entonces se cumplirá:

$$I_Z = I_X + I_Y \quad (5.18)$$

5.4. Energía cinética de rotación

Cuando un sólido gira alrededor de un eje las velocidades lineales de cada una de sus partículas o partes son distintas. Sin embargo todas las partículas tienen la misma velocidad angular. Por ello resulta mucho mas sencillo expresar la energía cinética en función de la velocidad angular de rotación.

Para un cuerpo sólido que gira con velocidad angular ω respecto de un eje la energía cinética (de rotación) E_c puede calcularse como:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5.19)$$

Donde I es el momento de inercia respecto de dicho eje.

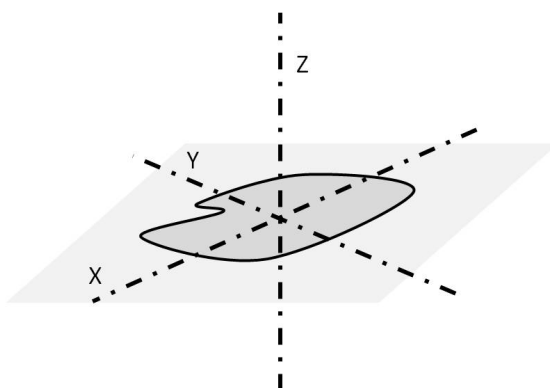


Figura 5.5: Momentos de inercia en cuerpos planos.

5.5. Momento de las fuerzas \vec{M}

Utilizando los resultados ya vistos en el capítulo sobre sistemas de partículas (4.34) sabemos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \quad (5.20)$$

Si suponemos que el cuerpo gira alrededor de un eje principal de momento de inercia I constante, podemos usar (5.13) y obtener:

$$\vec{M}_{ext} = I\vec{\alpha} \quad (5.21)$$

Donde $\vec{\alpha}$ es el vector aceleración angular. Esta ecuación viene a ser la análoga a la Segunda Ley de Newton para la rotación.

Ejemplo 5.1. Un hombre de masa $m = 80 \text{ kg}$ se encuentra en el centro de una escalera de longitud $L = 2 \text{ m}$ y masa despreciable. Tiene como puntos de apoyo el suelo y la esquina superior de la pared de altura $h = 1 \text{ m}$. El ángulo que forma la escalera con el suelo es $\alpha = 45^\circ$. Suponiendo que hay rozamiento en el extremo de la escalera que está en contacto con el suelo y no lo hay en el otro, ¿Cuál es el valor mínimo que tiene que tener el coeficiente de rozamiento para que exista el equilibrio, y cuánto vale la fuerza que ejerce la pared sobre la escalera?

Solución:

Este es un ejemplo de estática del sólido rígido. Las fuerzas que actúan sobre el sólido (la escalera) son tales que tanto la suma de fuerzas \vec{F}_i como la suma de momentos de las fuerzas \vec{M}_i se anulan y el sistema permanece en reposo.

En consecuencia, para una situación como ésta se cumple

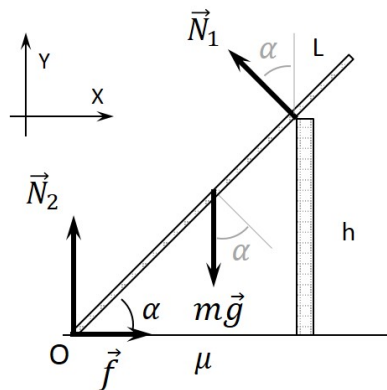
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (1a)$$

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (1b)$$

En este ejemplo se nos pregunta por el coeficiente de rozamiento μ entre la escalera y el suelo. Este coeficiente de rozamiento influirá en el valor de la fuerza de rozamiento, que entrará en las ecuaciones (1). Nuestra estrategia es identificar todas las fuerzas presentes en el sistema y utilizar las ecuaciones (1a) y (1b) para resolverlo.

Las fuerzas presentes son (figura):

- El peso del hombre $m\vec{g}$. Esta fuerza está aplicada en la mitad de la escalera. En cuanto a la escalera, se nos dice que tiene una masa despreciable, así que no hace falta tenerla en cuenta.
- La normal \vec{N}_1 en el punto de contacto entre la escalera y la pared. Esta fuerza es perpendicular a la superficie de contacto, en este caso perpendicular a la escalera.



- La normal \vec{N}_2 en el punto O de contacto entre la escalera y el suelo. Esta fuerza es perpendicular a la superficie de contacto, es decir, perpendicular al suelo.
- La fuerza de rozamiento \vec{f} entre la escalera y el suelo. La tendencia de la escalera es a resbalarse, lo que haría que el punto de contacto O con el suelo se alejase de la pared. Por tanto, si la fuerza de rozamiento se opone a esto, ha de estar dirigida hacia la pared, como se ha dibujado.

La Segunda Ley de Newton, la ecuación (1a), queda

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{f} = 0$$

Y transcrita a los ejes XY de la figura

$$-N_1 \sin \alpha + f = 0 \quad (\text{eje X:2a})$$

$$-mg + N_2 + N_1 \cos \alpha = 0 \quad (\text{eje Y:2b})$$

Al no haber deslizamiento el rozamiento f corresponde a un rozamiento estático y por tanto $f \leq \mu N_1$. Pero se nos pregunta el coeficiente de rozamiento mínimo para que no resbale. Para responder a esto hemos de pensar en la situación límite en la que la escalera está a punto de resbalar. En ese momento la fuerza de rozamiento es igual a la máxima posible y es $f = \mu N_1$. Sustituyendo este valor en (2) se obtiene:

$$-N_1 \sin \alpha + \mu N_2 = 0 \quad (\text{eje X:3a})$$

$$-mg + N_2 + N_1 \cos \alpha = 0 \quad (\text{eje Y:3b})$$

Que como vemos son dos ecuaciones con tres incógnitas (N_1 , N_2 y μ). Necesitamos otra ecuación, que será la ecuación (1b).

La ecuación (1b) nos dice que la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la escalera es cero. Para aplicar la ecuación (1b)

- Elegimos el punto O respecto del cual calcularemos los momentos de las fuerzas.

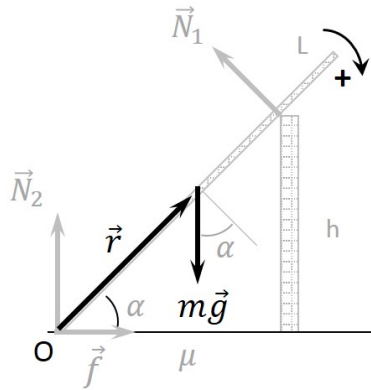
Cualquier punto puede servir para esto, pero una elección adecuada seguramente simplificará los cálculos. Nosotros vamos a elegir el punto O de la figura, que se corresponde con el punto de contacto de la escalera con el suelo.

la razón para elegir este punto es la siguiente: tenemos 4 fuerzas en el problema ($m\vec{g}$, \vec{N}_1 , \vec{N}_2 y \vec{f}) lo que significa que, en principio, la ecuación (1b) incluirá 4 momentos de fuerzas, uno por cada fuerza.

Ahora bien, si nos fijamos en la figura, las fuerzas \vec{N}_2 y \vec{f} están aplicadas sobre el mismo punto O . Esto significa que ninguna de estas dos fuerzas hace momento respecto de este punto ($\vec{r} = 0$).

Utilizando como punto de referencia O , solamente tenemos que calcular los momentos de las fuerzas debidos al peso $m\vec{g}$ y a la normal en el punto de contacto con la pared \vec{N}_1

Fijémonos primero en el peso $m\vec{g}$. El vector de posición desde el punto O al punto de aplicación de este peso, la mitad de la escalera, es \vec{r} . Ambos vectores se encuentran



en el plano del dibujo. El momento de fuerzas debido al peso $\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$ será un vector perpendicular al plano del dibujo, y de acuerdo con la regla del producto vectorial (tornillo), dirigido hacia adentro del dibujo. Podemos llamar al eje perpendicular al dibujo, eje Z.

Respecto del punto O el peso tiende a hacer girar a la escalera en el sentido de las agujas del reloj, señalado como '+' en el dibujo.

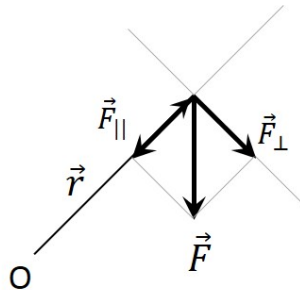
En cuanto al módulo del momento de fuerzas debido al peso, observemos la siguiente figura donde en lugar del peso hemos llamado a la fuerza \vec{F} . Esta fuerza se puede poner como la suma de dos componentes, una perpendicular a la dirección de \vec{r} , \vec{F}_\perp , y otra paralela a \vec{r} , \vec{F}_\parallel , que en este caso lleva sentido contrario. El producto vectorial de dos vectores paralelos (antiparalelos) es cero, por tanto

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel) = \vec{r} \times \vec{F}_\perp + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_\parallel}_{=0} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$$

En otras palabras, solamente la componente de la fuerza en la dirección perpendicular a \vec{r} hace momento. Como \vec{r} y \vec{F}_\perp son perpendiculares y el coseno del ángulo que forman es 1, el módulo de este momento es

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r} \times \vec{F}_\perp| = rF_\perp$$

En el caso que nos ocupa, el peso $m\vec{g}$ del hombre situado en la mitad de la escalera,

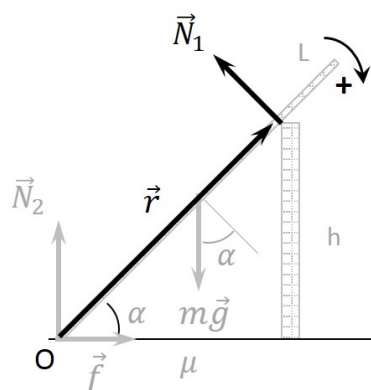


la componente perpendicular del peso es $mg \cos \alpha$ y $|\vec{r}| = L/2$, con L la longitud de la escalera.

De acuerdo con esto, el momento debido al peso está dirigido hacia adentro del dibujo y su módulo es

$$M(\text{peso}) = mgL \cos \alpha / 2$$

En el caso del momento de fuerzas asociado a \vec{N}_1 , ésta fuerza es perpendicular a la escalera y al vector \vec{r} que va de O al punto de aplicación de \vec{N}_1 .



El momento de esta fuerza será un vector perpendicular al plano del dibujo y dirigido hacia afuera, en sentido opuesto al caso anterior. De acuerdo con el problema ($h = 1 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$) la longitud de \vec{r} en este caso es $|\vec{r}| = \sqrt{2} \text{ m}$ y el módulo del momento

$$M(N_1) = \sqrt{2} N_1$$

Como los dos momentos de fuerzas (peso y normal) son vectores sobre el eje perpendicular al plano del dibujo, eje Z, podemos trabajar con sus componentes. Vamos a tomar como sentido positivo el asociado al momento del peso, hacia adentro del dibujo. Esto se corresponde con la tendencia que tiene el peso en hacer girar la escalera en el sentido de las agujas del reloj, marcado con un '+' en las figuras. Consideraremos esa dirección positiva.

La normal \vec{N}_1 por su parte realiza un momento dirigido hacia afuera del dibujo. Esta fuerza tiende a hacer girar a la escalera en el sentido contrario de las agujas del reloj, negativo respecto del sentido '+' definido en las figuras.

Con estas consideraciones, la ecuación (1b) de momentos, escrita en componentes a lo largo del eje Z perpendicular al dibujo y tomando el sentido hacia adentro (rotación en el sentido de las agujas del reloj) como positivo.

$$mgL \cos \alpha / 2 - \sqrt{2} N_1 = 0 \quad (\text{eje Z: 3c})$$

Usando ahora las ecuaciones (3a, 3b y 3c) podemos resolver el problema y encontrar μ y N_1 . Por ejemplo, teniendo en cuenta que $\alpha = 45^\circ$ y $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ y que $L = 2 \text{ m}$ la ecuación (3c) nos da directamente el valor de N_1

$$N_1 = mg/2 = 392.4 \text{ N}$$

Ahora, despejando de (3b) N_2

$$N_2 = mg - N_1 \cos \alpha$$

Podemos completar (3a) y obtener el valor mínimo de μ

$$\mu = \frac{N_1 \sin \alpha}{N_2} = \frac{(mg/2)(\sqrt{2}/2)}{mg - (mg/2)(\sqrt{2}/2)} = \frac{\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = 0.547$$

Notas:

- Si los momentos de las fuerzas están todos ellos sobre un mismo eje (dirección) podemos trabajar, como en este ejemplo, con sus componentes. Para ello hay que definir un sentido positivo y escribir las componentes con su signo.
 - En la práctica, momentos a lo largo de un eje representan tendencias de giro en el plano perpendicular, así que podemos pensar, en lugar de en componentes, en sentidos de giro. Para todos los momentos de fuerzas que tienden a hacer girar al sistema en un sentido (por ejemplo horario) escribimos sus componentes como positivas. Para todos los momentos de fuerzas que tiendan a hacer girar al sistema en el sentido opuesto (antihorario) escribimos sus componentes como negativas.
-

Ejemplo 5.2. Calcular el momento de inercia de una plancha homogénea de lados a y b y masa M respecto de un eje que pasa por su centro de masas y es perpendicular a ella.

Solución:

El punto de partida para calcular el momento de inercia de un sólido es la integral

$$I = \int_{\text{cuerpo}} r^2 dm \quad (1)$$

Que se extiende a todo el cuerpo en cuestión.

En este ejemplo se trata de una plancha rectangular de lados a y b y debemos calcular I para un eje perpendicular que pasa por su centro de masas CM. Como la plancha es homogénea, su CM coincide con su centro geométrico. La situación sería la representada en la figura

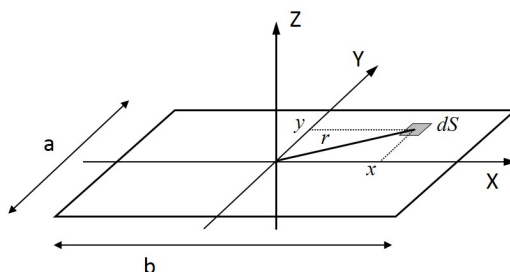
Para resolver el problema tenemos que escribir (1) para nuestro caso concreto, identificando con cuidado cada uno de los elementos que aparecen en la integral. Para ello necesitamos primero establecer un sistema de coordenadas adecuado, que se adapte a la geometría del cuerpo. Nosotros usaremos ejes cartesianos centrados en el CM del cuerpo de forma que el eje Z sea el eje respecto del cual queremos calcular el momento de inercia I , como se indica en la figura.

Sabemos que el momento de inercia de una masa puntual m situada a una distancia r del eje de rotación es $r^2 m$. En el caso de sólidos como éste, nos imaginamos que el sólido está formado por un número infinito de masas infinitamente pequeñas dm cada una de ellas a una distancia r del eje. Cada masa infinitesimal contribuye con un momento de inercia $r^2 dm$. La integral (1) no es más que la suma de la contribución a I de todas estas infinitas partes en las que dividimos 'imaginariamente' el cuerpo.

Por eso debemos comenzar eligiendo un dm . Como este cuerpo es plano, tiene dos dimensiones, podemos pensar en un pequeño elemento de superficie dS , también diferencial. En coordenadas cartesianas dS será un 'cuadradito' de lados dx y dy localizado en las coordenadas x e y medidas desde el CM.

Así, en este caso, la distancia r del elemento dm al eje de giro vendrá dada simplemente por

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$



Y también podremos escribir la masa dm como

$$dm = \sigma dS \quad (3)$$

Siendo σ la densidad superficial de masa. Aquí, al tratarse de un rectángulo homogéneo, la densidad superficial de masa es constante en toda la plancha y su valor igual a la masa total M dividida por la superficie del rectángulo, ab ,

$$\sigma = \frac{M}{ab} \quad (4)$$

Insertando (2), (3) y (4) en (1) la integral se convierte en una integral de superficie, escrita en términos de las variables x e y .

$$I = \int_{\text{cuerpo}} (x^2 + y^2) \frac{M}{ab} dx dy \quad (5)$$

Como las variables son explícitas, podemos colocar los límites de integración y hacerla. Para extender la integral a todo el rectángulo la variable x toma valores desde $-b/2$ a $b/2$ y la variable y toma valores desde $-a/2$ a $a/2$

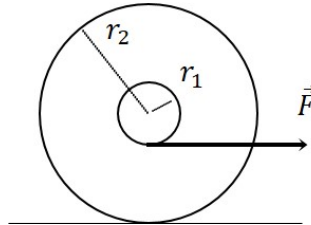
$$I = \frac{M}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy (x^2 + y^2)$$

Que ya podemos resolver

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{M}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} dx \left[x^2 a + \frac{a^3}{12} \right] \\ &= \frac{M}{ab} \left[\frac{x^3}{3} a + \frac{a^3}{12} x \right]_{-b/2}^{b/2} \\ &= \frac{M}{ab} \left[\frac{ab^3}{12} + \frac{a^3 b}{12} \right] \\ &= \frac{M(a^2 + b^2)}{12} \end{aligned}$$

Obteniendo el resultado solicitado

Ejemplo 5.3. Considérese un yoyó de masa M y radios r_1 y r_2 , que está sometido a una fuerza horizontal F y rueda sin deslizar. a) encontrar la aceleración de su centro de masas. b) Encontrar el valor de la máxima fuerza F que se puede aplicar al yoyó para que éste no deslice. El coeficiente de rozamiento entre el yoyó y el suelo es μ . (Tómese $I = Mr_2^2/2$)



Solución:

Este es un ejemplo de rodadura. El movimiento de traslación del CM del yoyó (hacia la derecha) está acompasado del giro del yoyó (en el sentido de las agujas del reloj).

Vamos a tener que considerar tanto las ecuaciones de traslación del CM como las de rotación alrededor del eje del yoyó. Conviene siempre definir un 'sentido positivo global' a la hora de escribir las distintas ecuaciones.

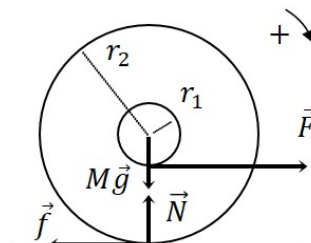
Por ejemplo, si asignamos el sentido positivo al movimiento de traslación hacia la derecha, entonces deberemos considerar positivo el sentido de rotación en la dirección de las agujas del reloj. Si por el contrario consideramos positivo el sentido de movimiento de traslación hacia la izquierda, entonces deberemos considerar positivo el sentido de rotación en la dirección contraria a la agujas del reloj.

Para resolver este problema, primero debemos identificar las fuerzas que actúan sobre este yoyó: la fuerza \vec{F} , su propio peso $M\vec{g}$, la normal en la superficie horizontal \vec{N} y la fuerza de rozamiento \vec{f} (ver siguiente figura).

El CM, sometido a todas estas fuerzas externas, ha de verificar la Segunda Ley de Newton. Llamando \vec{a} a la aceleración del CM (que será horizontal)

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}$$

$$\vec{F} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a} \quad (1)$$



Que podemos transcribir a los ejes X (horizontal, positivo hacia la derecha) e Y (vertical, positivo hacia arriba).

$$F - f = Ma \quad (\text{eje X:2a})$$

$$-Mg + N = 0 \quad (\text{eje Y:2b})$$

Por otro lado, los momentos de las fuerzas externas, calculados respecto del CM del yoyo, deben también verificar:

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\alpha} \quad (3)$$

Donde $I = Mr_2^2/2$ es el momento de inercia del yoyo y $\vec{\alpha}$ el vector aceleración angular. En cuanto a los momentos de las fuerzas, debemos estudiar cada fuerza por separado.

El peso $M\vec{g}$ está aplicado directamente sobre el CM del yoyo. Por tanto no hace momento de fuerzas.

Tampoco hace momento la normal \vec{N} . Esta fuerza se aplica en el punto de contacto con el suelo. El vector \vec{r} que va del CM al punto de contacto es (anti)paralelo a \vec{N} y por tanto su producto vectorial también se anula.

Solamente las fuerzas \vec{F} y \vec{f} hacen momento respecto del eje que pasa por el CM. Como tanto los vectores de posición \vec{r} que van del CM al punto de aplicación de estas fuerzas, como las fuerzas mismas están en el plano del dibujo, los momentos de las fuerzas estarán dirigidos a lo largo de la dirección perpendicular al dibujo. Como en otras ocasiones podemos utilizar simplemente las componentes de estos momentos.

A la hora de asignar signo a estas componentes tendremos en cuenta lo dicho al principio de este ejemplo y consideraremos positivos los momentos de fuerzas que tienden a hacer girar al sistema en el sentido de las agujas del reloj (identificado con un '+' en la figura). Consideraremos negativas las componentes de los momentos que tienden a hacer girar al sistema en sentido contrario (antihorario).

Así la fuerza \vec{F} tiende a hacer girar al sistema en sentido antihorario. Como \vec{r} y \vec{F} son perpendiculares, su momento será simplemente $-Fr_1$, ya que r_1 es la distancia del CM al punto de aplicación de \vec{F} .

En cuanto a la fuerza de rozamiento \vec{f} , tiende a hacer girar al yoyo en el sentido positivo (horario) y en este caso la componente será fr_2 . La ecuación (3) nos queda

$$-Fr_1 + fr_2 = \frac{1}{2}Mr_2^2\alpha \quad (4)$$

Las ecuaciones (2a), (2b) y (4) nos permiten estudiar el movimiento del yoyo en cualquier situación, son generales.

Sobre estas ecuaciones podemos ahora imponer la condición de rodadura. Si el yoyo rueda sin deslizar su aceleración lineal (horizontal) a y su aceleración angular α están relacionadas por la condición de rodadura

$$a = \alpha r_2 \quad (5)$$

Por otra parte, el problema nos pregunta por la fuerza máxima (F_{max}) que puede hacerse sin que el yoyó deslice. Para entender qué implica ésto debemos entender el papel de la fuerza F y de la fuerza de rozamiento f .

La fuerza F tira del yoyó hacia la derecha. Cuanto mayor sea F mayor será también la aceleración lineal del CM, a .

Sin embargo la fuerza F tiende a hacer girar al yoyó en sentido contrario al de rodadura. Es la fuerza de rozamiento f la que proporciona el momento de fuerzas necesario para el giro en el sentido positivo. La fuerza de rozamiento en el punto de contacto es una fuerza de rozamiento estática y tiene un valor máximo μN , en otras palabras, será capaz de proporcionar una aceleración angular α máxima. En consecuencia, si la fuerza F supera un cierto valor F_{max} , la relación de rodadura (5) no podrá satisfacerse y el yoyó girará y se desplazará, pero habrá deslizamiento.

Así que para resolver el problema tenemos en primer lugar que obligar a que se cumpla (5) $a = \alpha r_2$ y en segundo lugar usar el caso límite en el que $f = \mu N$. En esas circunstancias las ecuaciones (2a), (2b) y (4) nos darán F_{max}

$$F_{max} - \mu N = Ma \quad (6a)$$

$$-Mg + N = 0 \quad (6b)$$

$$-F_{max}r_1 + \mu Nr_2 = \frac{1}{2}Mr_2^2 \left(\frac{a}{r_2} \right) \quad (6c)$$

De donde podemos despejar F_{max}

$$F_{max} = \frac{3\mu Mg}{1 + 2\frac{r_1}{r_2}}$$

Parte II

Termodinámica

Capítulo 6

Temperatura y calor

Introducción

La termodinámica estudia la energía y su transformación desde un punto de vista amplio y general. Como tal, la termodinámica puede aplicarse al estudio de muchos temas como por ejemplo las propiedades de nuevos materiales, las características de motores y máquinas o el estudio del clima. Como otras ciencias está basada en una serie de principios o postulados fundamentales, que no pueden deducirse de otros, y que son dictados por la experiencia.

6.1. Sistema, entorno,...

Para empezar es conveniente dar algunas definiciones y fijar algunas ideas que nos serán útiles a lo largo de los siguientes capítulos.

Sistema es el objeto o la parte aislada en el que estamos interesados y cuyo comportamiento queremos estudiar.

Entorno es todo lo que rodea al sistema.

Universo es la unión del sistema y el entorno.

Frontera es la superficie, real o imaginaria, que delimita el sistema. Dentro de la frontera está el sistema y fuera el entorno.

Aunque en principio el entorno engloba todo el universo a excepción del propio sistema, en la práctica basta considerar como entorno aquella parte del universo que interacciona con el sistema. La parte del universo no afectada por la presencia del sistema es irrelevante a la hora de estudiar un problema concreto.

El sistema y el entorno pueden, o no, interactuar entre sí. Por ejemplo puede haber un intercambio de masa entre ambos o pueden estar conectados por una pared móvil que permita variaciones de volumen entre ellos. Esta interacción se produce a través de la frontera. Esto nos lleva a clasificar las fronteras (paredes) en función del tipo de interacción que permiten entre sistema y entorno.

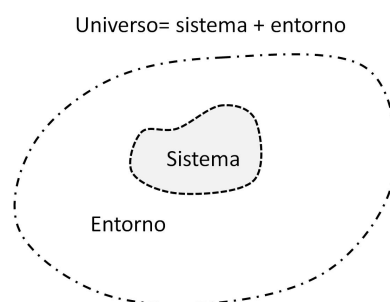


Figura 6.1: Sistema, entorno y universo.

En relación a su movilidad, las paredes pueden ser:

Rígidas aquellas que no pueden desplazarse y por tanto no permiten el cambio de volumen del sistema.

Móviles aquellas que pueden desplazarse.

En relación a su capacidad de transportar o no el calor, se clasifican como:

Adiabáticas aquellas que no permiten el paso del calor.

Diatérmanas aquellas que permiten el paso del calor.

En función de su permeabilidad a la materia, las paredes pueden clasificarse en:

Impermeables aquellas que no permiten el paso de materia.

Permeables aquellas que permiten el paso de materia.

Las paredes rígidas o móviles controlan la posibilidad del sistema de realizar trabajo mecánico. Las paredes adiabáticas y diatérmanas controlan los flujos de calor. Éstas son las paredes que nos interesan más. En general consideraremos que nuestras paredes son impermeables y la cantidad de materia del sistema será constante.

Teniendo en cuenta esta interacción con el entorno, los sistemas pueden clasificarse en varios tipos.

Sistema aislado cuando su frontera impide el intercambio de cualquier tipo de materia o energía con el entorno.

Sistema cerrado cuando su frontera permite el intercambio de energía pero impiden el de materia con el entorno.

Sistema abierto cuando su frontera permite tanto el intercambio de energía como el de materia con el entorno.

Nosotros estamos interesados principalmente en los sistemas cerrados. Por un lado interaccionan con su entorno, lo que es necesario si estamos pensando en cualquier aplicación práctica. Por otro lado la cantidad de materia del sistema permanece constante, lo que simplifica su análisis en comparación con un sistema abierto.

Frecuentemente un sistema aislado está formado por dos o más sistemas, subsistemas, que interaccionan entre sí y es esta relación entre ellos lo que nos interesa estudiar.

6.2. Equilibrio. Ecuación de estado

Cualquier sistema termodinámico podrá ser descrito mediante parámetros o variables que podemos medir, como el volumen V o la presión P o cualquier otra relevante para una situación concreta. Además de poder medirlos podemos actuar sobre el sistema modificando alguno de estos parámetros, algo que viene determinado por el tipo de pared. Modificar uno de estos parámetros, por ejemplo el volumen, puede tener consecuencias en otros, por ejemplo en la presión.

Conviene distinguir dos tipos de estados en las que puede encontrarse un sistema termodinámico cualquiera:

Estado de equilibrio es aquel en el que las distintas variables que utilizamos para describir el estado (P, V, \dots) tienen unos valores definidos y no varían en tanto que las condiciones externas al sistema no se modifiquen.

Estado de no equilibrio o desequilibrio es cualquier estado que no esté en equilibrio termodinámico.

En un estado de equilibrio existe una relación entre las variables necesarias para describir el sistema. Esta relación se conoce con el nombre de ecuación de estado y en ella no aparece explícitamente el tiempo.

Una ecuación de estado relaciona las variables termodinámicas de un sistema y puede escribirse como:

$$F(P, V, \dots) = 0 \quad (6.1)$$

Donde P y V representan la presión y el volumen. Los puntos suspensivos (...) indican que otras variables podrían aparecer en la ecuación de estado dependiendo del problema concreto que estemos considerando. Por ejemplo podría aparecer la imanación al estudiar un material bajo la acción de campos magnéticos.

La ecuación de estado del gas ideal, $PV = nRT$, es un ejemplo de ecuación de estado que puede ponerse de la forma anterior fácilmente ($PV - nRT = 0$).

6.3. Procesos cuasiestáticos

Un sistema termodinámico que permanece siempre en el mismo estado es poco interesante. Normalmente estaremos interesados en sistemas que sufren cambios de algún tipo. Por otro lado, si queremos que la ecuación de estado sea válida, un sistema debe estar siempre en equilibrio termodinámico. Esta aparente contradicción se soluciona mediante una idealización de los procesos reales que nos lleva a definir dos tipos de procesos:

Proceso cuasiestático es aquel proceso o transformación en el que el sistema se encuentra en todo momento en un estado de equilibrio y por tanto las variables que utilizamos para describir el estado (P, V, \dots) verifican en todo momento la ecuación de estado.

Proceso no cuasiestático es cualquier proceso que no sea cuasiestático.

El sistema no verifica la ecuación de estado durante el proceso.

En la realidad todos los procesos son no cuasiestáticos. El proceso cuasiestático es una idealización y como tal hay que verlo. Sin embargo, en la práctica, muchos de los procesos reales pueden verse como procesos cuasiestáticos. Nosotros siempre supondremos que los procesos son cuasiestáticos.

6.4. Principio Cero de la Termodinámica. Temperatura

Dos sistemas separados por una pared diatérmica alcanzarán un estado de equilibrio entre ellos que se denomina equilibrio térmico. El equilibrio térmico entre sistemas es el protagonista del Principio Cero de la Termodinámica que dice lo siguiente

Principio Cero de la Termodinámica: Dos sistemas en equilibrio térmico con un tercero están en equilibrio térmico entre sí.

A partir de este principio se demuestra que para cada sistema puede definirse una variable T , que es función del resto de variables $T = T(P, V, \dots)$ y que tiene el mismo valor para cualesquiera sistemas que se encuentren en equilibrio térmico. Esta función no es otra cosa que la temperatura T .

Escalas de temperatura

Para medir la temperatura vamos a utilizar dos escalas diferentes:

Escala centígrada. La unidad es el grado centígrado $^{\circ}\text{C}$ que está definida asignando el valor 0°C a la temperatura de equilibrio de las fases sólida y líquida del agua a presión atmosférica y el valor 100°C a la temperatura de equilibrio de las fases líquida y vapor del agua a presión atmosférica.

Escala Kelvin. Escala absoluta de temperaturas (temperatura termodinámica). La unidad es el kelvin K . Definida a partir del punto triple del agua. Un valor absoluto de temperatura fijado por el valor único de presión $P = 611.73 \text{ Pa}$ y temperatura $T = 273.16 \text{ K}$ en la que coexisten las tres fases sólido, líquido y vapor del agua. En la escala centígrada el punto triple del agua se encuentra a 0.01°C .

La relación entre ambas escalas es:

$$T(^{\circ}\text{C}) = T(K) - 273.15 \quad (6.2)$$

Es necesario saber que:

- En general, cuando la temperatura T aparece en una fórmula, ha de expresarse en kelvin. Por ejemplo en la ecuación de estado de los gases ideales $PV = nRT$.
- En las expresiones donde aparecen diferencias de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ es indiferente utilizar los valores en $^{\circ}\text{C}$ o en kelvin, ya que el resultado numérico es el mismo.

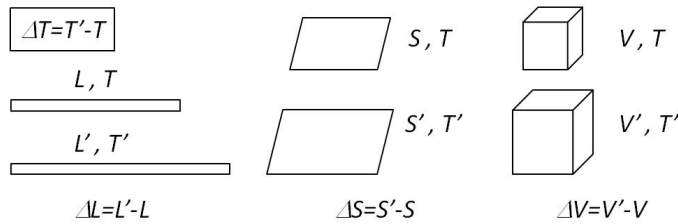


Figura 6.2: La dilatación térmica es el cambio en las dimensiones de un cuerpo cuando la temperatura varía de un valor T a otro T' . La longitud L , superficie S y volumen V a una temperatura T tendrán unos valores distintos L' , S' y V' a otra temperatura T' .

6.5. Dilatación térmica

La dilatación térmica es el cambio en las dimensiones de un cuerpo causado por un cambio en su temperatura. En principio esto es así en los cuerpos sólidos y líquidos y en ellos nos centraremos en este tema. En el caso de los gases también podemos cambiar su temperatura pero el volumen que ocupa lo determina el recipiente que los contiene. Por este motivo no tiene las mismas connotaciones que para el caso de sólidos y líquidos. Nos ocuparemos de la dilatación de los gases en el capítulo correspondiente.

Cuando la temperatura de un cuerpo pasa de un cierto valor T a otro T' sus dimensiones cambian. Consideraremos tres casos (Figura 6.2):

Dilatación lineal. Cuando estamos interesados solamente en el cambio de una de las dimensiones del cuerpo, como la longitud de una barra delgada por ejemplo. Si L y L' son las longitudes a las temperaturas T y T' , la variación de longitud viene dada por $\Delta L = L' - L$

Dilatación superficial. Cuando estamos interesados solamente en el cambio de dimensiones de una superficie. Si S y S' representan la superficie (área) a las temperaturas T y T' , la variación en la superficie vendrá dada por $\Delta S = S' - S$

Dilatación volumétrica. Cuando estamos interesados en el cambio del volumen del cuerpo. Se aplica a sólidos y líquidos. Si V y V' son los volúmenes a las temperaturas T y T' , la variación de volumen viene dada por $\Delta V = V' - V$

Siendo $\Delta T = T' - T$ la variación de temperatura, ésta se traduce en variaciones de longitud, superficie o volumen que vienen determinadas por unos coeficientes que dependen del material o sustancia del que está hecho el cuerpo. Estos coeficientes se resumen en la tabla (6.1)

Finalmente, conviene tener en cuenta que:

- Los coeficientes de dilatación pueden ser a su vez función de la temperatura o de otros factores.

- Los coeficientes de dilatación son generalmente positivos pero existen importantes casos en los cuales son negativos.
- En los cuerpos sólidos los huecos y cavidades dilatan con un coeficiente de dilatación igual al del material que conforma el cuerpo.
- Es equivalente expresar los coeficientes de dilatación en K^{-1} o en $^{\circ}C^{-1}$ ya que en su definición aparecen exclusivamente diferencias de temperatura.

6.6. Calor, Q

En general cuando calentamos un sistema, su temperatura se incrementa (la excepción a esto son las transiciones de fase que veremos más adelante). El calor, que denominaremos con la letra Q es la transferencia de energía originada por las diferencias de temperatura.

Es importante definir un criterio para el signo de Q . Nosotros consideraremos $Q > 0$ si la temperatura T del sistema aumenta y $Q < 0$ si T disminuye. Es decir consideramos positivo el calor cuando este “entra en el sistema”.

El calor tiene las mismas unidades que la energía. En el Sistema Internacional de Unidades se mide por tanto en julios (J) aunque existen otras unidades de uso común. De ellas la más importante es la caloría (cal).

Caloría: Cantidad de calor necesaria para elevar $1^{\circ}C$, de $14.5^{\circ}C$ a $15.5^{\circ}C$, la temperatura de un gramo de agua pura a una presión de 1 atmósfera.

Existen definiciones alternativas que conducen a ligeras modificaciones del valor de esta unidad. No existe ambigüedad en la definición del julio por lo que en este sentido es más recomendable. No obstante siendo la caloría una unidad muy utilizada es necesario saber utilizar ambos. Nosotros usaremos el factor de conversión:

$$1cal = 4.186J$$

Tabla 6.1: Coeficientes de dilatación térmica

Dilatación		Coeficiente	Unid.	Observaciones
Lineal	$\Delta L = \alpha L \Delta T$	$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}$	K^{-1}	Solo cuerpos sólidos A veces aparece como α_L
Superficial	$\Delta S = \alpha_S S \Delta T$	$\alpha_S = \frac{1}{S} \frac{dS}{dT}$	K^{-1}	Solo cuerpos sólidos $\alpha_S = 2\alpha$ en sólidos isótropos
Volumétrica	$\Delta V = \beta V \Delta T$	$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$	K^{-1}	Cuerpos sólidos y líquidos A veces aparece como α_V $\beta = 3\alpha$ en sólidos isótropos

Es habitual encontrarse múltiplos de estas unidades como la kilocaloría ($kcal$) o el kilojulio (kJ).

6.7. Capacidad calorífica. Calor específico

Para pequeños incrementos de temperatura dT , o equivalentemente para pequeños aportes de calor dQ , se encuentra que ambos incrementos son proporcionales:

$$dQ = C \cdot dT \quad (6.3)$$

A C se **denomina capacidad calorífica** y se mide en JK^{-1} en el S.I. de unidades. En caso de que la capacidad calorífica C no varíe en el rango de temperaturas de interés podemos calcular el calor absorbido o cedido Q para una variación de temperatura $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$ como:

$$Q = C \cdot \Delta T \quad (6.4)$$

Para una sustancia pura se encuentra que la capacidad calorífica es proporcional a la masa m de sustancia:

$$C = mc \quad (6.5)$$

Donde c se **denomina calor específico** y se mide en $Jkg^{-1}K^{-1}$ en el S.I. de unidades. El calor específico depende solamente de que sustancia se trate. Por ejemplo, el calor específico del agua se ha utilizado para definir la caloría. Para el agua $c = 1calg^{-1}K^{-1} = 4.184Jkg^{-1}K^{-1}$. El calor específico, expresado en el S.I., es la cantidad de calor necesaria para elevar $1K$ ($1^{\circ}C$) la temperatura de $1kg$ de sustancia.

Algunas veces resulta útil el **calor específico molar** c' , es decir la cantidad de calor necesaria para elevar $1K$ ($1^{\circ}C$) la temperatura de $1mol$ de sustancia. La relación con el anterior viene dada por:

$$c' = Mc \quad (6.6)$$

Donde M es la masa molar de la sustancia. Evidentemente c' se mide en $Jmol^{-1}K^{-1}$. Si consideramos el calor específico como un constante a lo largo del intervalo de temperaturas de interés entonces (6.3) junto con (6.5) nos permiten escribir:

$$dQ = mc dT \quad (6.7)$$

Y en caso de que c pueda considerarse constante en un intervalo de temperaturas de interés:

$$Q = mc\Delta T \quad (6.8)$$

6.7.1. Ley de Dulong-Petit

El calor específico depende de las condiciones en las cuales se absorbe el calor. En particular podemos distinguir entre calor específico a volumen constante c_V y el calor específico a presión constante c_P . Habitualmente se suele medir c_P por ser experimentalmente más sencillo. Sin embargo, en el caso de los sólidos los cambios de volumen son

muy pequeños (para variaciones moderadas de temperatura y a cualquier presión) por lo que $c_V \approx c_P$.

En el caso de sólidos la Ley de Dulong-Petit proporciona una estimación simple de c_V . Simplemente establece que el valor de c'_V , es decir el calor específico molar a volumen constante, es el mismo para todas las sustancias sólidas:

$$c'_V = 24.94 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (6.9)$$

Esta ley se cumple con buena aproximación para muchas sustancias, como por ejemplo la mayor parte de los metales, si bien es cierto que hay notables excepciones.

6.8. Transiciones de fase y calor latente, L

El cambio de fase es el proceso por el cual una sustancia pasa de una fase a otra, por ejemplo de sólido a líquido (fusión) o de líquido a gas (vaporización). Durante el cambio de fase la sustancia absorbe o cede calor, pero su temperatura no cambia. Se encuentra que la cantidad de calor absorbido o cedido durante un cambio de fase es una propiedad de cada sustancia. A este calor se denomina calor latente.

Calor Latente de Fusión L_f es el calor absorbido (cedido) por unidad de masa durante la fusión (solidificación).

Calor Latente de Vaporización L_v es el calor absorbido (cedido) por unidad de masa durante la vaporización (licuefacción).

Calor Latente de Sublimación L_s es el calor absorbido (cedido) por unidad de masa durante la sublimación.

En el SI de unidades el calor latente se mide en J/kg pero otras unidades, como cal/g son comunes.

Evidentemente, el calor total absorbido o cedido durante una transición de fase dependerá también de la cantidad de masa m de la sustancia que experimenta dicha transición.

$$Q_f = mL_f \quad (6.10)$$

$$Q_v = mL_v \quad (6.11)$$

$$Q_s = mL_s \quad (6.12)$$

Pueden definirse calores latentes para otros cambios de fase (por ejemplo cambios de estructura cristalina). Las expresiones anteriores solamente nos indican la cantidad de calor. Es necesario considerar su signo con cuidado ya que por ejemplo Q_f será positivo si el material se funde (absorbe calor del medio) pero negativo si se solidifica (cede el calor al medio).

Para dos fases cualesquiera, la temperatura a la que pueden coexistir en equilibrio depende de la presión. En la práctica muchos cambios de fase de interés ocurren a presión atmosférica. Cuando el cambio de fase ocurre a una presión de 1 atm se dice que el cambio de fase ocurre a presión normal. Así podemos definir:

Punto de fusión normal, PFN es la temperatura de equilibrio de las fases líquida y sólida a la presión de 1 atm.

Punto de ebullición normal, PEN es la temperatura de equilibrio de las fases líquida y gas (vapor) a la presión de 1 atm.

Punto de sublimación normal, PSN es la temperatura de equilibrio de las fases sólida y vapor a la presión de 1 atm.

6.9. Calorimetría

En un sistema aislado que contiene cuerpos a diferente temperatura el calor fluye de unos a otros hasta que se alcanza el equilibrio térmico. Cada cuerpo absorberá o cederá una cantidad de calor Q_i que contabilizaremos positiva ($Q_i > 0$) cuando absorbe calor, o negativa ($Q_i < 0$) cuando lo cede. La absorción o cesión de calor puede estar relacionada con un cambio en la temperatura del cuerpo o bien con un cambio de fase, en cuyo caso la temperatura de dicho cuerpo no varía (o bien una sucesión de ambas situaciones).

Si el proceso tiene lugar en un recinto aislado, el calor solamente puede fluir entre los cuerpos. La conservación de la energía obliga a que la suma, con sus respectivos signos, de todos los términos Q_i sea cero. Es decir, si tenemos N cuerpos, entonces al mezclarlos:

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N = \sum_{i=1}^N Q_i = 0 \quad (6.13)$$

A la hora de calcular cada uno de los Q_i habrá que tener cuidado de considerar si existen posibles cambios de fase en las distintas sustancias presentes.

6.9.1. Calorímetros

Los experimentos de calorimetría se realizan en unos recipientes especiales denominados calorímetros. Idealmente se trata de recipientes que aíslan perfectamente su contenido del exterior, de forma que la energía no puede fluir desde el exterior al interior del recipiente o viceversa.

Idealmente un calorímetro no participaría en los intercambios de calor entre las sustancias que contiene, pero esto no es así. Los calorímetros reales absorben o ceden energía en forma de calor a las sustancias que contiene. Por tanto en la ecuación (6.13) hay que añadir un término Q_C que tenga en cuenta este efecto. Frecuentemente los calorímetros se utilizan con agua y sufren la misma variación de temperatura del agua que contienen. Por tanto puede verse el efecto neto del calorímetro como equivalente a cierta cantidad de agua M_C y el calor absorbido o cedido por el calorímetro como $Q_C = M_C c_{agua} \Delta T$.

6.10. Potencia

Calentar 1 litro de agua de 20°C a 30°C requiere una cantidad de calor concreta ($10^4 \text{ cal} = 4.186 \cdot 10^4 \text{ J}$). Ahora bien, no es lo mismo calentar el agua en 1 minuto que

en 1 hora. Aunque el resultado final es el mismo y la cantidad de calor transferida es la misma, el calor se transfiere a un ritmo mayor en el primer caso. Cuando queremos especificar el ritmo al que cambia la energía de un sistema, o el ritmo al que realizamos un trabajo mecánico o, como en este caso, el ritmo al que transferimos calor de un sistema a otro, utilizamos el concepto de potencia P (no confundir esta “ P ” con la presión, el contexto nos dirá a cual nos estamos refiriendo)

La potencia P en el contexto del calor se define como la derivada temporal de Q :

$$P = \frac{dQ}{dt} \quad (6.14)$$

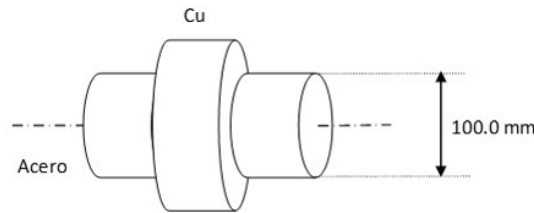
Donde t es el tiempo. Es decir, es energía por unidad de tiempo (como toda potencia) y se mide por tanto en vatios ($W \equiv J/s$) en el S.I. de unidades. Es frecuente encontrar múltiplos del vatio como el kilovatio (kW) o incluso megavatio (MW) y gigavatio (GW).

Muchas veces el calor se transfiere de forma continua y regular en el tiempo. En estos casos la potencia es constante durante todo el proceso y puede calcularse simplemente como:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad (6.15)$$

Que no es otra cosa sino la potencia media. Ahora Q es el calor total transferido y Δt es el tiempo total empleado en ello. Para la mayor parte de las aplicaciones que nos interesan la ecuación (6.15) será la que utilizaremos.

Ejemplo 6.1. Una abrazadera de cobre de 100.0 mm de diámetro interior rodea a un cilindro de acero de 100.0 mm de diámetro exterior, de forma que no queda ninguna holgura entre ellas cuando se encuentran a temperatura ambiente (20°C). Se desea separar ambas piezas, para lo cual es necesario que exista entre ellas una holgura (diferencia entre sus radios) de 0.1 mm. Para crear esa holgura procedemos a calentar las piezas, aprovechando así sus diferentes coeficientes de expansión térmica ($\alpha_{\text{cobre}} = 17 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ y $\alpha_{\text{acero}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$). ¿Qué temperatura será necesario alcanzar para separar estas piezas?



Solución:

Al calentar las piezas, sus dimensiones cambiarán y sus radios aumentarán. A la temperatura inicial $T_0 = 20^\circ\text{C}$ el radio de ambas piezas es $r_0 = 100.0/2 = 50.0 \text{ mm}$. Cuando las calentemos a una temperatura T las piezas dilatarán y sus nuevos radios r_{acero} y r_{cobre} pueden calcularse a partir del incremento en la temperatura y de los respectivos coeficientes de dilatación lineal. Llamando $\Delta T = T - T_0$:

$$r_{\text{acero}} = r_0 (1 + \alpha_{\text{acero}} \Delta T)$$

$$r_{\text{cobre}} = r_0 (1 + \alpha_{\text{cobre}} \Delta T)$$

La condición para poder separarlos es que los radios se diferencien en 0.1 mm. Usando las ecuaciones anteriores, esta condición nos proporciona el valor necesario de ΔT . Usando mm para los valores de los radios, tenemos:

$$r_{\text{cobre}} - r_{\text{acero}} = 0.1$$

$$r_0 (1 + \alpha_{\text{cobre}} \Delta T) - r_0 (1 + \alpha_{\text{acero}} \Delta T) = 0.1$$

$$r_0 (\alpha_{\text{cobre}} - \alpha_{\text{acero}}) \Delta T = 0.1$$

$$50.0 (17 \cdot 10^{-6} - 11 \cdot 10^{-6}) \Delta T = 0.1$$

$$\Delta T = 333 \text{ K}$$

Un incremento de temperatura de 333 K es también un incremento de temperatura de 333°C . La temperatura que necesitamos alcanzar será

$$T = 20^\circ\text{C} + 333^\circ\text{C} = 353^\circ\text{C}$$

Ejemplo 6.2. Hallar la cantidad de agua a 50°C que es necesario echar en un calorímetro donde tenemos 10 kg de hielo a -8°C , para que en el equilibrio final tengamos agua y hielo a partes iguales. (calor específico del hielo $c_h = 0.5 \text{ kcal kg}^{-1}\text{K}^{-1}$; calor latente de fusión del hielo $L_f = 80 \text{ kcal kg}^{-1}$)

Solución:

El estado final es una mezcla de hielo y agua. Esto quiere decir que la temperatura final del sistema es 0°C , la temperatura del cambio de fase. Como el estado final contiene hielo, el hielo sufrirá primero un calentamiento y una vez que toda la masa de hielo se encuentre a 0°C , parte de él se fundirá.

Inicialmente teníamos 10 kg de hielo. Si M es la masa de agua caliente añadida (en kg), entonces la masa total del sistema final será $M + 10$. Esta masa total se reparte por igual en agua líquida y hielo. En el estado final la masa total de agua (hielo) será:

$$\frac{M + 10}{2} = M/2 + 5 \quad (1)$$

Llamemos Q_a al calor cedido por la masa M de agua caliente ($Q_a < 0$) y Q_h al calor total absorbido por el hielo ($Q_h > 0$). Al tratarse de un sistema aislado

$$Q_a + Q_h = 0 \quad (2)$$

Para calcular Q_a tenemos en cuenta el calor específico del agua $c_a = 1 \text{ kcal kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

$$Q_a = Mc_a\Delta T = M \cdot 1 \cdot (0 - 50) = -50M \quad (3)$$

Para calcular Q_h podemos considerar dos términos. El primero, Q_{h1} , debido al incremento de temperatura, que afecta a toda la masa del hielo (10 kg). Teniendo en cuenta el calor específico del hielo $c_h = 0.5 \text{ kcal kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ su valor será

$$Q_{h1} = 10 \cdot 0.5 \cdot [0 - (-8)] = 40 \text{ kcal}$$

Y por otra parte la fusión del hielo absorberá una cantidad de calor Q_{h2} . La masa de hielo que se funde es la original (10 kg) menos la masa de hielo en el estado final ($M/2 + 5$) dada por (1). Usando el calor latente de fusión L_f

$$Q_{h2} = [10 - (M/2 + 5)] \cdot L_f = (5 - M/2) \cdot 80 = 400 - 40M$$

El calor total absorbido por el hielo en el proceso completo

$$Q_h = Q_{h1} + Q_{h2} = 40 + (400 - 40M) = 440 - 40M \quad (4)$$

Insertando (3) y (4) en (2) obtenemos el valor de la masa de agua añadida M

$$\begin{aligned} Q_a + Q_h &= 0 \\ (-50M) + (440 - 40M) &= 0 \\ M &= 4.89 \text{ kg} \end{aligned}$$

Capítulo 7

Primer principio de la Termodinámica

Introducción

El primer principio de la termodinámica es la conservación de la energía. Todos conocemos eso de “*La energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma*”. Se trata en este capítulo de enunciar esta idea de una forma precisa y de aplicarla a diversas situaciones.

7.1. Trabajo W

El concepto de trabajo mecánico en términos de fuerza \vec{F} y desplazamiento $d\vec{r}$ es conveniente reformularlo, sobre todo para nosotros que trabajaremos principalmente con gases, en términos de presión P y cambio de volumen dV . Esto es fácil sin más que tener en cuenta que la presión es la fuerza por unidad de superficie. Por tanto el trabajo realizado por un gas que sufre una variación de su volumen viene dado por:

$$dW = PdV \quad (7.1)$$

Así definido el trabajo será positivo ($dW > 0$) cuando el gas aumente su volumen ($dV > 0$, expansión) y negativo ($dW < 0$) cuando disminuya su volumen ($dV < 0$, compresión). El trabajo es nulo ($dW = 0$) si no hay cambio de volumen ($dV = 0$).

Para un proceso que lleve a nuestro sistema de un estado inicial i a otro final f ($i \rightarrow f$) el trabajo vendrá dado por:

$$W = \int_i^f PdV \quad (7.2)$$

El trabajo W tiene una clara interpretación en un diagrama $P - V$ como el área bajo la curva $P = P(V)$.

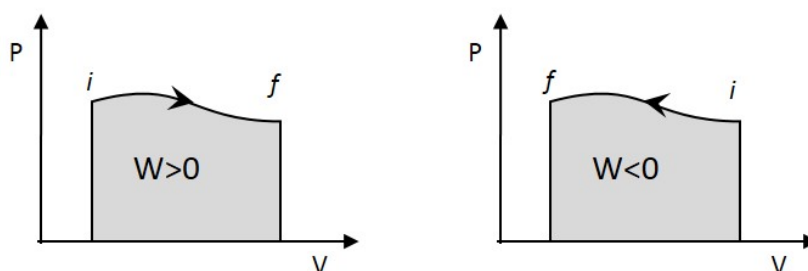


Figura 7.1: En el diagrama P-V o diagrama de Clausius el trabajo W en un proceso se identifica con el área encerrada bajo la curva.

7.2. Energía interna U

La Energía Interna U es la energía cinética asociada al movimiento de sus partículas y a la energía potencial asociada a la interacción entre ellas. La energía interna es una función de estado y depende exclusivamente del valor de las variables termodinámicas (P, V, \dots).

La energía interna U es la suma de la energía cinética interna, es decir la energía cinética medida respecto del centro de masas del sistema, y la energía potencial interna, es decir la asociada a las interacciones entre las partículas del sistema.

7.3. Primer principio de la Termodinámica

El primer principio de la Termodinámica establece de forma precisa la idea que comentábamos en la introducción de este capítulo: la conservación de la energía. Para un proceso infinitesimal:

$$dU = dQ - dW \quad (7.3)$$

O bien para un proceso cualquiera:

$$\Delta U = Q - W \quad (7.4)$$

El primer principio de la termodinámica es de validez general y uno de los principios fundamentales de la ciencia. Nótese que en (7.3) y (7.4) la energía es una función de estado, mientras que el calor y el trabajo no lo son y sus valores dependen del proceso concreto.

7.4. Procesos termodinámicos en un gas ideal

Un gas ideal es un sistema de partículas que no interaccionan entre ellas, salvo cuando chocan. Muchos gases se comportan como un gas ideal cuando la densidad es

suficientemente baja. Esto ocurre a bajas presiones y altas temperaturas. En la práctica, dentro de un amplio rango de valores de presión y temperatura, la mayor parte de los gases puede tratarse como un gas ideal con buena aproximación.

En el caso de un gas ideal, dado que no existe interacción entre moléculas mas allá de los choques entre ellas, la energía interna es simplemente la energía asociada al movimiento atómico/molecular. La energía interna es exclusivamente energía cinética, que macroscópicamente identificamos mediante la temperatura. En consecuencia la energía interna de un gas ideal depende exclusivamente de la temperatura.

La ecuación de estado del gas ideal es:

$$PV = nRT \quad (7.5)$$

Donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura y n el número de moles. La constante R se denomina constante de los gases ideales y su valor es:

$$R = 8.314 \frac{J}{mol K} = 0.008206 \frac{atm l}{mol K} = 1.987 \frac{cal}{mol K} \quad (7.6)$$

La ecuación de estado de los gases ideales fue obtenida en primer lugar de forma experimental y posteriormente justificada a partir de la teoría microscópica.

Relativo a gases, un proceso termodinámico hará que un gas pase de un estado inicial i a otro estado final f , en principio diferente. Existen infinidad de procesos posibles, si bien algunos de ellos tienen una mayor relevancia por sus características especiales. En cualquier caso nos referiremos siempre a procesos cuasiestáticos. Salvo que se diga lo contrario se supondrá siempre que la cantidad de gas no varía, es decir, el número de moles n permanece constante.

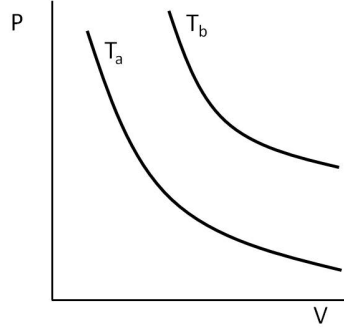
7.4.1. Proceso isoterma (T constante)

Un proceso isoterma es aquel en el que la temperatura T permanece constante. En un gas ideal, si la temperatura permanece constante también lo será el producto PV , es decir:

$$T \text{ constante} \Rightarrow PV = nRT = \text{constante} \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \quad (7.7)$$

Por tanto, para una temperatura T determinada, la presión P será inversamente proporcional al volumen V . En un diagrama PV un proceso isoterma es una hipérbola equilátera que tiene los ejes P y V como asíntotas. Esta curva se denomina isoterma y es de gran utilidad práctica. En la figura se han dibujado dos isotermas, correspondientes a dos temperaturas distintas T_a y T_b siendo $T_b > T_a$. Nótese que dos isotermas distintas no pueden cortarse y que la isoterma de temperatura mayor (T_b) está "por encima" de la isoterma de temperatura menor (T_a). Una isoterma es la curva que representa todos los estados posibles del sistema con la misma temperatura.

En un gas ideal la energía interna U depende exclusivamente de la temperatura, por tanto, como en un proceso isoterma la temperatura no varía:

Figura 7.2: Isotermas de un gas ideal ($T_b > T_a$)

$$\Delta U = 0 \quad (7.8)$$

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica (7.4), si $\Delta U = 0$ entonces, para un proceso isoterma:

$$Q = W \quad (7.9)$$

El trabajo W (o el calor Q) en un proceso isoterma entre un estado inicial i y un estado final f se calcula utilizando la definición de trabajo (7.2) y la ecuación de la isoterma (7.7) y viene dado por:

$$Q = W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (7.10)$$

Donde V_i y V_f son los volúmenes inicial y final respectivamente. Como PV permanece constante también se cumplirá en particular que $P_i V_i = P_f V_f$ y por tanto $\frac{V_f}{V_i} = \frac{P_i}{P_f}$, de forma que el trabajo (y calor) puede calcularse de forma análoga si conocemos las presiones inicial y final como:

$$Q = W = nRT \ln \left(\frac{P_i}{P_f} \right) \quad (7.11)$$

7.4.2. Proceso isocoro (V constante)

Un proceso isocoro es aquel en el que el volumen V permanece constante. En un diagrama PV (figura 7.3) se corresponde con un segmento vertical. Durante el proceso la presión puede aumentar (derecha en la figura) o disminuir (izquierda en la figura).

La característica más notable de un proceso isocoro es que al ser el volumen constante no se realiza ningún trabajo, es decir $W = 0$. De acuerdo con el Primer Principio esto nos dice que la variación de energía interna y el calor transferido durante el proceso serán iguales.

$$\Delta U = Q \quad (7.12)$$

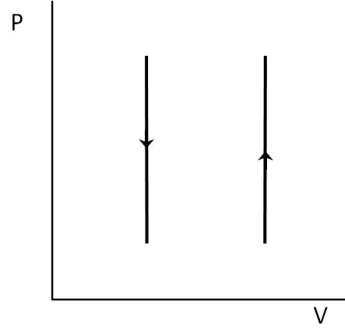


Figura 7.3: Proceso isocoro en un gas ideal. La presión y la temperatura pueden disminuir (izquierda) o aumentar (derecha).

El calor Q en un proceso a volumen constante se calcula como:

$$dQ = nc_V dT \quad (7.13)$$

o bien, integrando esta ecuación, como:

$$Q = nc_V \Delta T \quad (7.14)$$

Donde c_V es el **calor específico molar a volumen constante** y es una propiedad del gas. En el sistema internacional de unidades se mide en $Jmol^{-1}K^{-1}$. De acuerdo con (7.12), (7.13) y (7.14)

$$dU = nc_V dT \quad (7.15)$$

$$\Delta U = nc_V \Delta T \quad (7.16)$$

Dos estados cualesquiera de un gas ideal siempre pueden conectarse mediante procesos isotermos e isocoros. Como la energía interna es una función de estado las expresiones anteriores para dU y ΔU son válidas para cualquier proceso termodinámico en un gas ideal, aunque no sea isocoro.

7.4.3. Proceso isóbaro (P constante)

Un proceso isóbaro es aquel en el que la presión P permanece constante. En un diagrama PV (figura 7.4) se corresponde con un segmento horizontal.

El trabajo W en un proceso isóbaro entre un estado inicial i y otro final f se calcula a partir de su definición (7.2) teniendo en cuenta que la presión P es constante:

$$W = P\Delta V \quad (7.17)$$

Donde $\Delta V = V_f - V_i$. Por otro lado el calor Q se calcula para un proceso infinitesimal como:

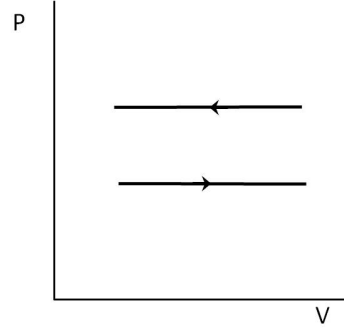


Figura 7.4: Proceso isóbarico en un gas ideal. El volumen y la temperatura pueden disminuir (arriba) o aumentar (abajo)

$$dQ = nc_P dT \quad (7.18)$$

o bien, integrando esta ecuación, como

$$Q = nc_P \Delta T \quad (7.19)$$

Donde c_P es el **calor específico molar a presión constante** y es una propiedad del gas. En el sistema internacional de unidades se mide en $Jmol^{-1}K^{-1}$.

Por otra parte, como ya se ha dicho, la variación de energía interna en un gas ideal es siempre:

$$\Delta U = nc_V \Delta T \quad (7.20)$$

El calor específico molar a volumen constante c_V y a presión constante c_P son dos propiedades del gas y varían de uno a otro. Sin embargo, para un gas ideal y utilizando el primer principio de la termodinámica (7.3) puede demostrarse la siguiente relación:

La relación de Mayer establece que, para un gas ideal:

$$c_P - c_V = R \quad (7.21)$$

7.4.4. Proceso adiabático ($Q = 0$)

El proceso adiabático es aquel en el que no se produce transferencia de calor entre el sistema y el entorno, es decir:

$$Q = 0 \quad (7.22)$$

Por tanto, de acuerdo con el primer principio, la variación de energía interna será igual a menos el trabajo durante el proceso.

$$\Delta U = -W \quad (7.23)$$

Teniendo en cuenta que para un gas ideal la variación de energía interna es siempre

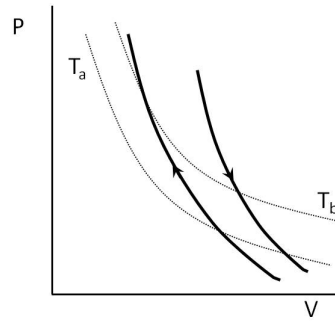


Figura 7.5: Proceso adiabático en un gas ideal

$$\Delta U = nc_V \Delta T \quad (7.24)$$

Entonces, para cualquier proceso adiabático entre un estado inicial i y otro final f :

$$\Delta U = -W = nc_V \Delta T \quad (7.25)$$

En la figura (7.5) se muestran dos procesos adiabáticos en un diagrama PV . Uno de ellos es una compresión (izquierda) y otro una expansión (derecha). Se han dibujado también, en línea punteada, dos isotermas de temperaturas T_a y T_b con $T_a < T_b$. Podemos ver como las adiabáticas son curvas que cortan a las isotermas, son mas "empinadas" que una isoterma. La temperatura cambia durante un proceso adiabático. A partir del primer principio de la termodinámica (7.3) puede demostrarse que a lo largo de una adiabática se cumple la relación

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (7.26)$$

Donde γ se denomina **constante adiabática** y está definida como el cociente:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (7.27)$$

De acuerdo con la relación de Mayer (7.21), c_P es siempre mayor que c_V y por tanto $\gamma > 1$ en cualquier gas ideal.

Lo interesante de la constante adiabática γ es que su valor depende principalmente de la estructura molecular del gas, de si éste es monoatómico (por ejemplo los gases nobles), diatómico (por ejemplo O_2 o N_2), triatómico (vapor de agua, dióxido de carbono,...) etc. Por ejemplo, típicamente $\gamma = 1.67$ en los gases monoatómicos y $\gamma = 1.40$ en los gases diatómicos.

7.4.5. Procesos cíclicos

En un proceso cíclico, o simplemente ciclo, el sistema parte de un estado inicial i , cambia el valor de sus variables de estado y finalmente alcanza un estado f que coincide con el inicial, es decir $i = f$.

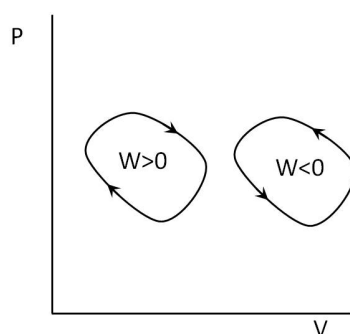


Figura 7.6: En un ciclo recorrido en el sentido de las agujas del reloj el trabajo es positivo. Si el ciclo se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj el trabajo es negativo

Dado que la energía interna es una función de estado, en un ciclo la variación de energía interna es cero:

$$\Delta U = 0 \quad (7.28)$$

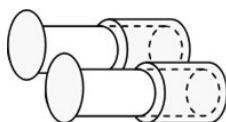
Esto es cierto de forma general y no solamente para un gas ideal. Del primer principio de la termodinámica (7.4) se deduce inmediatamente que para un ciclo

$$Q = W \quad (7.29)$$

Sin conocer los detalles de los procesos que conforman el ciclo no es posible saber el valor concreto del trabajo W y el calor Q . Con ayuda de la figura (7.6) podemos establecer de forma general que para un ciclo que en el diagrama P-V se recorre en el sentido de las agujas del reloj el trabajo W , que no es otra cosa que el área encerrada dentro del ciclo, es positivo ($W > 0$). Si por el contrario el ciclo se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj entonces $W < 0$.

En general, las máquinas térmicas que nos interesa estudiar funcionan mediante ciclos termodinámicos. Aquellas que se caracterizan por un trabajo $W > 0$ producen trabajo sobre el exterior, son motores. Aquellas máquinas que se caracterizan por un $W < 0$ consumen trabajo para su funcionamiento y su interés radica en los flujos de calor durante el ciclo. Éstas últimas son los refrigeradores y bombas de calor que se estudian en el siguiente capítulo.

Ejemplo 7.1. Una locomotora choca contra un amortiguador neumático formado por dos cilindros gemelos de 25 cm de diámetro y 75 cm de longitud donde hay aire a 100 kPa y 22°C, haciendo retroceder 60 cm los émbolos del cilindro. Calcular la presión y la temperatura final del aire encerrado y el trabajo de compresión en cada cilindro suponiendo que el proceso es adiabático. ($c_V = 20.78 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\gamma = 1.4$)



Solución:

El impacto de la locomotora produce una rápida compresión de los émbolos y en consecuencia del gas en su interior. Dada la rapidez del proceso podemos considerarlo adiabático. Esto nos permite relacionar las presiones, volúmenes y temperaturas antes del choque (estado 1) con las de después del choque (estado 2).

Por ejemplo, las presiones y volúmenes se relacionan a través de la ecuación de la adiabática

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (1)$$

Para calcular los volúmenes V_1 y V_2 tenemos en cuenta la sección S del cilindro y las longitudes $L_1 = 0.75 \text{ m}$ y $L_2 = 0.75 - 0.60 = 0.15 \text{ m}$

$$S = \pi \left(\frac{0.25}{2} \right)^2 = 0.04909 \text{ m}^2$$

$$V_1 = S \cdot L_1 = 0.04909 \cdot 0.75 = 0.03682 \text{ m}^3$$

$$V_2 = S \cdot L_2 = 0.04909 \cdot 0.15 = 0.00736 \text{ m}^3$$

Es útil fijarse $V_1/V_2 = L_1/L_2 = 1/5$. Podemos ahora resolver la ecuación (1) para obtener la presión tras el choque P_2 , sabiendo que la presión antes del choque es $P_1 = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = P_1 \left(\frac{S \cdot L_1}{S \cdot L_2} \right)^\gamma = P_1 \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^\gamma = 10^5 \left(\frac{0.75}{0.15} \right)^{1.40} = 9.518 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Para calcular la temperatura T_2 podemos usar la ecuación de estado del gas ideal $PV = nRT$. Para ello debemos conocer el número de moles n , que puede obtenerse usando esta ecuación en el estado 1, con $T_1 = 273 + 22 = 295 \text{ K}$

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{10^5 \cdot 0.03682}{8.314 \cdot 295} = 1.50 \text{ mol}$$

Y ahora T_2

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{9.518 \cdot 10^5 \cdot 0.00736}{1.50 \cdot 8.314} = 562 \text{ K}$$

Finalmente, para calcular el trabajo podemos usar el primer principio de la termodinámica ($\Delta U = Q - W$), teniendo en cuenta que al ser un proceso adiabático $Q = 0$ y entonces

$$W = -\Delta U = -nc_V \Delta T = -1.50 \cdot 20.78(562 - 295) = -8322 \text{ J}$$

Capítulo 8

Máquinas térmicas. Segundo principio de la Termodinámica

Introducción

El segundo principio de la termodinámica admite varias formulaciones equivalentes. En la teoría termodinámica el segundo principio se enuncia normalmente en términos de la entropía S . Sin embargo nosotros lo haremos de otra forma. Nuestro interés es el estudio de las máquinas térmicas: motores, refrigeradores y bombas de calor. Es posible enunciar el segundo principio en una forma directamente relacionada con estas máquinas.

8.1. Máquinas térmicas

Esencialmente una máquina térmica intercambia trabajo y calor con el entorno. Para cuantificar los intercambios de calor es útil definir el concepto de:

Reservorio o foco de calor: Una reserva de energía capaz de absorber o ceder cualquier cantidad de calor sin que esto afecte a su temperatura, que permanece constante.

El foco de calor se caracteriza por su temperatura. Las máquinas térmicas funcionan siempre entre dos focos de calor de temperatura distinta y con los cuales intercambian calor. Teniendo en cuenta esto, llamaremos

T_H a la temperatura del foco caliente.

Q_H al calor total transferido entre el sistema y el foco caliente.

T_C a la temperatura del foco frío.

Q_C al calor total transferido entre el sistema y el foco frío.

Desde luego, el calor total Q en el ciclo es $Q = Q_H + Q_C$.

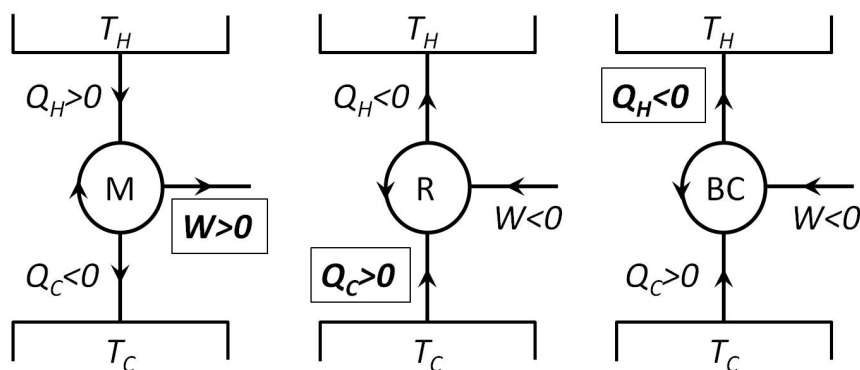


Figura 8.1: Máquinas térmicas: Motor (izquierda), Refrigerador (centro) y Bomba de Calor (derecha)

Cada máquina térmica, en función de sus características, presentará también distinto signo en los valores de W , Q_H y Q_C .

En cada una de estas máquinas térmicas se define un parámetro para evaluar el rendimiento en la realización de su cometido.

8.1.1. Motor

Un ejemplo de motor es el motor de combustión interna. Absorbe un calor ($Q_H > 0$) de la mezcla cuando explota. La temperatura T_H de la mezcla al explotar es siempre la misma. Los restos de la mezcla ya quemada son expulsados al exterior llevándose con ellos calor ($Q_C < 0$) estando el exterior a una temperatura T_C , también constante. Como resultado de su funcionamiento se produce un trabajo útil sobre el exterior ($W > 0$). Un motor se corresponde con un ciclo termodinámico que se recorre en el sentido de las agujas del reloj, como el representado en la figura (8.1) y que hemos indicado con una M .

Como en cualquier ciclo, $\Delta U = 0$ y por tanto $W = Q = Q_H + Q_C$. En el motor Q_H representa el aporte de calor necesario para que el motor funcione y W el trabajo obtenido. Para medir cuan eficiente es un motor es necesario tener en cuenta ambas cantidades y definimos:

Rendimiento de un motor η es el cociente

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \quad (8.1)$$

Teniendo en cuenta que necesariamente $W \leq Q_H$, entonces el rendimiento tendrá que ser $\eta \leq 1$. Es evidente que cuanto mayor sea η mejor será el motor, en el sentido que será más eficiente y que la cantidad de energía perdida en forma de calor Q_C será menor. ¿Podría ser el rendimiento $\eta = 1$?. Precisamente será el segundo principio de la termodinámica el que nos responderá a esta pregunta.

8.1.2. Refrigerador

Un refrigerador es una máquina diseñada para extraer calor del foco frío. En el diagrama PV se corresponde con un ciclo que se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj (marcado con una R en el esquema de la figura 8.1).

Un ejemplo de refrigerador es el de la nevera en la cocina. En este caso tenemos que proporcionar un trabajo ($W < 0$) para que funcione, esto se hace mediante un motor eléctrico que se alimenta de la corriente. El ciclo termodinámico seguido por el gas dentro de los tubos que recorren la nevera absorbe calor ($Q_C > 0$) del interior de la nevera, a temperatura T_C , y lo cede al exterior ($Q_H < 0$) a temperatura T_H .

Como antes, $\Delta U = 0$ y $W = Q = Q_H + Q_C$. En el refrigerador Q_C representa el calor extraído del foco frío, lo que nos interesa, y W el trabajo necesario que debemos aportar desde el exterior. Para cuantificar la eficiencia definimos:

Coeficiente de eficacia de un refrigerador COP_R es el cociente

$$COP_R = -\frac{Q_C}{W} \quad (8.2)$$

Donde el signo menos asegura que COP_R es una cantidad definida positiva. El subíndice R se refiere a refrigerador, para distinguirlo del que veremos a continuación. En este caso, por construcción, $COP_R \geq 1$.

8.1.3. Bomba de calor

Una bomba de calor es una máquina diseñada para introducir calor al foco caliente. En el diagrama PV se corresponde con un ciclo que se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj (marcado con BC en el esquema de la figura 8.1).

Un ejemplo es sería una bomba de calor para calentar una vivienda. En invierno la bomba de calor extrae calor del exterior ($Q_C > 0$), a temperatura T_C , y lo bombea en el interior de la vivienda ($Q_H < 0$) a una temperatura T_H mayor que la del exterior. Para que la bomba de calor funcione es necesario suministrarle un trabajo ($W < 0$).

De nuevo $\Delta U = 0$ y $W = Q = Q_H + Q_C$. En la bomba de calor Q_H representa el calor insertado en el foco caliente y es el parámetro de interés, mientras que W el trabajo necesario que debemos aportar desde el exterior. En este caso definimos:

Coeficiente de eficacia de una bomba de calor COP_{BC} es el cociente

$$COP_{BC} = \frac{Q_H}{W} \quad (8.3)$$

Así definido COP_{BC} es una cantidad siempre positiva. El subíndice BC se refiere a bomba de calor. Por construcción $COP_{BC} \geq 1$.

8.2. Segundo principio de la termodinámica

El segundo principio de la termodinámica puede enunciarse de varias formas, todas ellas equivalentes. En el contexto de las máquinas térmicas suelen utilizarse dos enunciados equivalentes del segundo principio:

Enunciado de Kelvin-Planck establece que no es posible un proceso cíclico cuyo único resultado sea la absorción de calor de un foco y la conversión íntegra de este calor en trabajo.

Enunciado de Clausius establece que no es posible un proceso cíclico cuyo único resultado sea la absorción de calor de un foco frío y su transferencia íntegra a un foco caliente.

- En los enunciados anteriores la palabra *cíclico* es fundamental. Por ejemplo en una expansión isoterma entre dos estados, y que por tanto no es un proceso cíclico, todo el calor absorbido es íntegramente convertido en trabajo.
- Puede demostrarse que los enunciados de Kelvin-Planck y de Clausius son equivalentes.
- Sabemos que si ponemos en contacto dos cuerpos a diferente temperatura el calor siempre fluye del cuerpo caliente al frío. El proceso contrario, en el que el cuerpo caliente se calienta aún más y el frío se enfría aún más, violaría el enunciado de Clausius y nunca se observa.
- Otra forma de enunciar el segundo principio es a partir de la entropía S , que nosotros no veremos aquí.

8.3. Procesos reversibles y máquina de Carnot

De acuerdo con el segundo principio el rendimiento de un motor por ejemplo no puede ser $\eta = 1$. Aparentemente sin embargo, podría ser cualquier número próximo a 1 como por ejemplo 0.999. Sin embargo esto no es así, existe un límite al rendimiento de un motor. Incluso en una máquina donde eliminamos todas las posibles las pérdidas de energía por rozamiento, flujo de calor, etc el rendimiento estará limitado.

Esto nos lleva a definir un tipo especial de procesos:

Procesos reversibles son aquellos que cumplen las siguientes condiciones:

- Son cuasiestáticos, de forma que el sistema se encuentre siempre infinitesimalmente cerca de un estado de equilibrio.
- No tienen pérdidas de energía debido a la fricción, a fuerzas viscosas o fuerzas disipativas de cualquier tipo.
- No existen transferencias de energía en forma de calor debido a diferencias finitas de temperatura.

Procesos irreversibles aquellos que no son reversibles.

Una máquina que sigue un ciclo termodinámico formado exclusivamente por procesos reversibles se denomina máquina reversible o máquina de Carnot.

Es fácil ver que en la práctica es imposible crear una máquina que funcione de esta forma. No obstante, sí es posible pensar en un ciclo termodinámico reversible, es decir, formado por procesos reversibles. Este ciclo se denomina ciclo de Carnot y en un gas ideal está formado por dos isothermas y dos adiabáticas, recorridas cuasiestáticamente. Puede demostrarse, utilizando el segundo principio y la idea de máquina reversible, el siguiente e importante teorema:

Teorema de Carnot: Ningún motor trabajando entre dos focos de calor puede ser más eficiente que un motor reversible que trabaje entre dichos focos.

Y también se demuestra que:

- Todos los motores reversibles tienen el mismo rendimiento.
- El rendimiento de un motor de Carnot no depende de la sustancia de trabajo, solamente de las temperaturas de los focos frío y caliente.

Puesto que el rendimiento de un motor de Carnot no depende de la sustancia de trabajo, podemos calcularlo a partir del ciclo de Carnot en un gas ideal. El rendimiento obtenido es válido para cualquier máquina de Carnot.

El rendimiento η_C de un motor de Carnot que trabaja entre dos temperaturas T_H y T_C ($T_H > T_C$) es:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_H} \quad (8.4)$$

Este resultado es muy importante ya que, conocidas las temperaturas de trabajo, fija el valor máximo del rendimiento de cualquier motor térmico que podamos imaginar. A partir del teorema de Carnot y del rendimiento anterior es posible demostrar la existencia de una escala absoluta de temperaturas (escala Kelvin).

Una máquina reversible puede operarse tanto en el sentido de las agujas del reloj, como motor, como en el sentido contrario a las agujas del reloj, como refrigerador o bomba de calor. En estos dos últimos casos el rendimiento, definido mediante los coeficientes de eficiencia correspondientes, también depende exclusivamente de la temperatura de los focos frío y caliente.

El coeficiente de eficacia COP_R de un refrigerador de Carnot que trabaja entre dos temperaturas T_H y T_C ($T_H > T_C$) es:

$$COP_R(Carnot) = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (8.5)$$

El rendimiento COP_{BC} de una bomba de calor Carnot que trabaja entre dos temperaturas T_H y T_C ($T_H > T_C$) es:

$$COP_{BC}(Carnot) = \frac{T_H}{T_H - T_C} \quad (8.6)$$

Ejemplo 8.1. Un mol de un gas ideal ($\gamma = 1.4$) está inicialmente a la presión de una atmósfera y a una temperatura de 0°C . El gas se calienta a volumen constante hasta una temperatura $T_2 = 150^\circ\text{C}$ y después se expande adiabáticamente hasta que su presión es de nuevo de una atmósfera. El gas se comprime ahora a presión constante hasta volver al estado inicial.

- Dibujar el diagrama PV del ciclo completo
- ¿Cuál es la temperatura T_3 a la que llega después de la expansión adiabática?
- Calcular el rendimiento del ciclo
- Calcular el rendimiento de un motor de Carnot que operase entre las mismas temperaturas extremas

Solución:

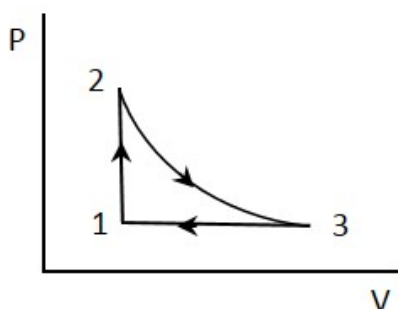
En primer lugar dibujamos el ciclo.

Siendo 1 es el estado inicial, el proceso $1 \rightarrow 2$ es un proceso a volumen constante. Como la temperatura aumenta, debe aumentar la presión.

El proceso $2 \rightarrow 3$ es una expansión adiabática, la presión disminuye hasta el valor original y el volumen aumenta.

Finalmente, el proceso $3 \rightarrow 1$ nos lleva, a presión constante, al estado inicial.

El ciclo completo será por consiguiente como el de la figura:



Podemos calcular presión, volumen y temperatura en los estados 1, 2 y 3. Usaremos unidades del SI (Presión en Pa, volumen en m^3 , temperatura en K) Los datos que sabemos por el planteamiento del problema son:

Estado	$P(\text{Pa})$	$V(\text{m}^3)$	$T(\text{K})$
1	$1.013 \cdot 10^5$		273.15
2			423.15
3	$1.013 \cdot 10^5$		

Además sabemos que el número de moles es $n = 1 \text{ mol}$.

Usando la ecuación de estado del gas ideal $PV = nRT$ es inmediato calcular el volumen V_1 del estado 1.

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{1 \cdot 8.314 \cdot 273.15}{1.013 \cdot 10^5} = 0.02242 \text{ m}^3$$

Que también es el volumen del estado 2, $V_2 = V_1$

La presión en el estado 2

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{1 \cdot 8.314 \cdot 423.15}{0.02242} = 1.569 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Y la tabla anterior queda ahora

Estado	$P(\text{Pa})$	$V(\text{m}^3)$	$T(\text{K})$
1	$1.013 \cdot 10^5$	0.02242	273.15
2	$1.569 \cdot 10^5$	0.02242	423.15
3	$1.013 \cdot 10^5$		

Para determinar el volumen y temperatura del estado 3 tenemos en cuenta que el proceso $2 \rightarrow 3$ es adiabático y, por ejemplo

$$P_3 V_3^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$V_3 = \left(\frac{P_2}{P_3} \right)^{1/\gamma} V_2 = \left(\frac{1.569 \cdot 10^5}{1.013 \cdot 10^5} \right)^{1/1.40} \cdot 0.02242 = 0.03064 \text{ m}^3$$

Y ahora

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.03064}{1 \cdot 8.314} = 373.33 \text{ K}$$

Esto completa toda la información de los estados 1, 2 y 3 y responde, entre otras cosas, a la pregunta (b) sobre la temperatura del estado 3.

Estado	$P(\text{Pa})$	$V(\text{m}^3)$	$T(\text{K})$
1	$1.013 \cdot 10^5$	0.02242	273.15
2	$1.569 \cdot 10^5$	0.02242	423.15
3	$1.013 \cdot 10^5$	0.03064	373.33

Para calcular el rendimiento solicitado en el apartado (c) hay que calcular los intercambios de energía en cada uno de los 3 procesos y en el ciclo completo. Antes de hacer ningún cálculo podemos utilizar lo que ya sabemos sobre cada uno de los procesos. Nuestro punto de partida será

Proceso	$\Delta U(J)$	$Q(J)$	$W(J)$
$1 \rightarrow 2$			0
$2 \rightarrow 3$		0	
$3 \rightarrow 1$			
Ciclo	0		

Ya que $W_{12} = 0$ por tratarse de un proceso a volumen constante y $Q_{23} = 0$ por tratarse de un proceso adiabático. Además sabemos que la variación de energía interna de un ciclo es $\Delta U_{ciclo} = 0$

Además tendremos siempre en mente el primer principio de la termodinámica, que nos relaciona ΔU , Q y W para cualquier proceso.

$$\Delta U = Q - W \quad (1)$$

Como se trata de un gas ideal, para cualquier proceso la variación de energía interna ΔU viene dada por:

$$\Delta U = nc_V \Delta T \quad (2)$$

A partir de γ podemos calcular los valores de los calores específicos a volumen constante c_V y a presión constante c_P ya que

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c_P}{c_V} \\ c_P - c_V &= R \end{aligned}$$

Implica que

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8.314}{1.40 - 1} = 20.78 \text{ Jmol}^{-1} \text{K}^{-1} \\ c_P &= \gamma c_V = 1.40 \cdot 20.78 = 29.10 \text{ Jmol}^{-1} \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Y usando la ecuación (2) calculamos ahora las variaciones de energía interna para cada proceso

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= nc_V \Delta T_{12} = 1 \cdot 20.78(423.15 - 273.15) = 3117 \text{ J} \\ \Delta U_{23} &= nc_V \Delta T_{23} = 1 \cdot 20.78(373.33 - 423.15) = -1035 \text{ J} \\ \Delta U_{31} &= nc_V \Delta T_{31} = 1 \cdot 20.78(273.15 - 373.33) = -2082 \text{ J} \end{aligned}$$

Nótese que efectivamente se cumple $\Delta U_{ciclo} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$. De hecho podríamos haber calculado dos de ellos y el tercero haberlo obtenido de esta relación.

Con estos cálculos la tabla anterior queda como sigue

Ahora, utilizando el primer principio, ecuación (1), y teniendo en cuenta que $W_{12} = 0$ y $Q_{23} = 0$

Proceso	$\Delta U(J)$	$Q(J)$	$W(J)$
$1 \rightarrow 2$	3117		0
$2 \rightarrow 3$	-1035	0	
$3 \rightarrow 1$	-2082		
Ciclo	0		

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = 3117 \text{ J}$$

$$W_{23} = -\Delta U_{23} = 1035 \text{ J}$$

Para el proceso $3 \rightarrow 1$ podemos calcular el calor, al tratarse de un proceso a presión constante

$$Q_{31} = n c_P \Delta T_{31} = 1 \cdot 29.10(273.15 - 373.33) = -2915 \text{ J} \quad (2)$$

Y el trabajo mediante el primer principio

$$\Delta U_{31} = Q_{31} - W_{31}$$

$$W_{31} = Q_{31} - \Delta U_{31} = -2915 - (-2082) = -833 \text{ J}$$

Con estos valores, y sumando calores y trabajos para el ciclo, se completa la tabla

Proceso	$\Delta U(J)$	$Q(J)$	$W(J)$
$1 \rightarrow 2$	3117	3117	0
$2 \rightarrow 3$	-1035	0	1035
$3 \rightarrow 1$	-2082	-2915	-833
Ciclo	0	202	202

Ahora es fácil calcular el rendimiento. Desde luego se trata de un motor ($W = 202 \text{ J} > 0$ que absorbe calor solamente en el proceso $1 \rightarrow 2$ ($Q_H = Q_{12}$). El rendimiento η será

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{Q_{12}} = \frac{202}{3117} = 0.0648$$

Es decir, un 6.48 %.

Un motor de Carnot que trabajase entre esos mismos focos de temperatura máxima y mínima tendría un rendimiento

$$\eta_c = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{273.15}{423.15} = 0.3545$$

Es decir, un 35.45 %

Ejemplo 8.2. Una masa de un gas ($\gamma = 1.67$) a 27°C y a una presión de 2 atmósferas ocupa un volumen de 0.05 m^3 en un estado inicial 1. El gas se expande adiabáticamente hasta alcanzar otro estado 2 y, a continuación, se calienta a volumen constante hasta alcanzar un estado 3 desde el cual, en un proceso isoterma, vuelve al estado inicial. El trabajo realizado por el gas en el proceso adiabático es de 800 calorías.

- Representar los procesos en un diagrama PV
- Calcular la presión volumen y temperatura en los estados 1, 2 y 3
- Calcular el trabajo, calor y variación de energía interna en todos los procesos, expresados en julios.
- ¿Qué representa este ciclo: un motor o un refrigerador? De acuerdo con la respuesta a esta pregunta, evaluar su rendimiento

Solución:

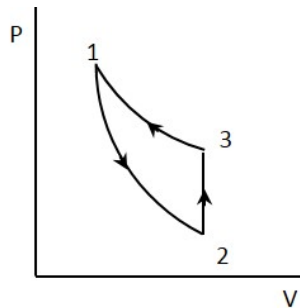
En primer lugar dibujamos el ciclo.

El proceso $1 \rightarrow 2$ es una expansión adiabática. El volumen aumenta y la presión disminuye.

El proceso $2 \rightarrow 3$ es un proceso a volumen constante, como el gas se calienta, su presión aumenta.

Finalmente, el proceso $3 \rightarrow 1$ es un proceso isoterma que comprime el gas hasta el estado inicial.

El ciclo completo será por consiguiente como el de la figura:



Como el ciclo se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj, el trabajo será negativo y por lo tanto podemos anticipar que representa un refrigerador o una bomba de calor.

Como lo necesitaremos después, vamos primero a calcular el valor de los calores específicos molares a presión y volumen constante.

Teniendo en cuenta que $\gamma = 1.67 = 5/3$ y sabiendo que

$$\begin{aligned}\gamma &= c_P/c_V \\ c_P - c_V &= R\end{aligned}$$

se obtiene

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{5/3 - 1} = \frac{3}{2}R = 12.47 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$c_P = \gamma c_V = \frac{5}{3} \frac{3}{2}R = \frac{5}{2}R = 20.78 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Nuestros datos iniciales, en unidades del SI (Presión en Pa , volumen en m^3 , temperatura en K) son los de la siguiente tabla, donde tenemos en cuenta que como el proceso $3 \rightarrow 1$ es isoterma $T_3 = T_1$

Estado	$P(Pa)$	$V(m^3)$	$T(K)$
1	$2.026 \cdot 10^5$	0.05	300
2			
3			300

Con los datos del estado 1 podemos además calcular el número de moles.

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{2.026 \cdot 10^5 \cdot 0.05}{8.314 \cdot 300} = 4.06 \text{ mol}$$

No es posible completar la información de la tabla usando simplemente la ecuación de estado del gas ideal y las ecuaciones de la adiabática o la isoterma. Es necesario recurrir al dato de que el trabajo en el proceso adiabático es 800 cal.

Usando el primer principio de la termodinámica $\Delta U = Q - W$ y teniendo en cuenta que en el proceso adiabático $1 \rightarrow 2$, $Q_{12} = 0$ y que el trabajo es $W_{12} = 800 \text{ cal} = 800 \times 4.186 \text{ J} = 3349 \text{ J}$:

$$W_{12} = -\Delta U_{12}$$

$$W_{12} = -nc_V \Delta T_{12}$$

$$3349 = -4.06 \cdot 12.47 \cdot (T_2 - 300)$$

$$T_2 = 234 \text{ K}$$

Sabiendo T_2 podemos calcular V_2 a partir de la ecuación de la adiabática

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

$$V_2^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} V_1^{\gamma-1}$$

$$V_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 = \left(\frac{300}{234} \right)^{\frac{1}{1.67-1}} 0.05 = 0.0724 \text{ m}^3$$

Lo que nos permite, usando la ecuación de estado del gas ideal $PV = nRT$, calcular la presión P_2

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{4.06 \cdot 8.314 \cdot 234}{0.0724} = 1.091 \cdot 10^5 \text{ Pa (1.08 atm)}$$

Finalmente, en el estado 3 $V_3 = V_2 = 0.0724 \text{ m}^3$ y la presión

$$P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{4.06 \cdot 8.314 \cdot 300}{0.0724} = 1.399 \cdot 10^5 \text{ Pa (1.38 atm)}$$

Con esto quedan determinados los valores de P , V y T en los tres estados

Estado	$P(\text{Pa})$	$V(\text{m}^3)$	$T(\text{K})$
1	$2.026 \cdot 10^5$	0.05	300
2	$1.091 \cdot 10^5$	0.0724	234
3	$1.399 \cdot 10^5$	0.0724	300

Ahora tenemos que calcular ΔU , Q y W en cada proceso y en el ciclo. A priori sabemos que $1 \rightarrow 2$ es adiabático con $Q_{12} = 0$ y $W_{12} = -\Delta U_{12} = 3349 \text{ J}$. El proceso $2 \rightarrow 3$ es isocoro y $W_{23} = 0$. Finalmente el proceso $3 \rightarrow 1$ es isoterma y $\Delta U_{31} = 0$.

Proceso	$\Delta U(\text{J})$	$Q(\text{J})$	$W(\text{J})$
$1 \rightarrow 2$	-3349	0	3349
$2 \rightarrow 3$			0
$3 \rightarrow 1$	0		
Ciclo	0		

Lo más rápido para calcular ΔU_{23} es tener en cuenta que la variación de energía interna en el ciclo es nula, es decir $\Delta U_{\text{ciclo}} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$. Como $\Delta U_{31} = 0$ entonces $\Delta U_{23} = -\Delta U_{12} = 3349 \text{ J}$

Además, como $W_{23} = 0$ el primer principio nos dice

$$\Delta U_{23} = Q_{23} - W_{23}$$

$$\Delta U_{23} = Q_{23}$$

$$Q_{23} = 3349 \text{ J}$$

El proceso $3 \rightarrow 1$ es isoterma, $\Delta U_{31} = 0$ y

$$Q_{31} = W_{31} = nRT_3 \ln \left(\frac{V_1}{V_3} \right) = 4.06 \cdot 8.314 \cdot 300 \ln \left(\frac{0.05}{0.0724} \right) = -3749 \text{ J}$$

Ya solo resta hallar el calor y trabajo total del ciclo (sumando sus respectivas columnas) para completar la tabla

Vemos como $Q_{\text{ciclo}} = W_{\text{ciclo}} = -400 \text{ J}$ es negativo. Esto lo sabíamos ya que el ciclo se recorre en sentido anti-horario.

Proceso	$\Delta U(J)$	$Q(J)$	$W(J)$
$1 \rightarrow 2$	-3349	0	3349
$2 \rightarrow 3$	3349	3349	0
$3 \rightarrow 1$	0	-3749	-3749
Ciclo	0	-400	-400

Por tanto este ciclo puede representar un refrigerador o una bomba de calor. De acuerdo con la pregunta (d) debemos elegir un refrigerador.

El coeficiente de eficacia del refrigerador COP es

$$COP = \frac{-Q_C}{W}$$

Donde Q_C es el calor extraído del foco frío y, con nuestro convenio de signos, corresponde a la suma de todos los flujos de calor positivos. En nuestro caso $Q_C = Q_{23} = 3349 J$. Por otra parte el trabajo total en el ciclo es $W_{ciclo} = -400 J$. Insertando estos valores en la expresión anterior

$$COP = \frac{-3349}{-400} = 8.4$$

Ejemplo 8.3. Una nevera desarrolla un ciclo de refrigeración que absorbe calor del congelador a un ritmo de $192 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ por día, cuando la temperatura del congelador es de -5°C y la temperatura del aire de alrededor de la nevera es 22°C . Determinar la potencia mínima para accionar esta nevera.

Solución:

No tenemos detalle del ciclo termodinámico seguido por esta nevera. Sólomente conocemos las temperaturas de trabajo del foco caliente $T_H = 22 + 273 = 295 \text{ K}$ y del foco frío $T_C = (-5) + 273 = 268 \text{ K}$. Debemos asumir que se trata de un refrigerador reversible trabajando entre estas dos temperaturas.

Para cualquier refrigerador definimos el Coeficiente de Rendimiento COP como

$$COP = \frac{-Q_C}{W} \quad (1)$$

Siendo Q_C el calor absorbido del foco frío (positivo) y W el trabajo realizado por el ciclo (negativo, pues realizamos trabajo sobre él)

El valor del COP dado por la ecuación (1) depende de los detalles del ciclo. Si suponemos un ciclo reversible (Carnot), entonces el COP depende exclusivamente de las temperaturas de los focos frío (T_C) y caliente (T_H) y viene dado por

$$COP = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (2)$$

Como conocemos las temperaturas, podemos utilizar (2) para obtener el COP . Conociendo el COP y el calor absorbido del foco frío en un día ($Q_C = 192 \cdot 10^3 \text{ kJ}$) podemos usar (1) para obtener el trabajo W en un día

$$COP = \frac{T_C}{T_H - T_C} = \frac{268}{295 - 268} = 9.93$$

Que llevamos a (1)

$$\begin{aligned} COP &= \frac{-Q_C}{W} \\ W &= \frac{-Q_C}{COP} = \frac{-192 \cdot 10^3}{9.93} = -19.3 \cdot 10^3 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Si pensamos en el trabajo realizado desde el exterior, entonces simplemente lo consideraremos positivo

Asumiendo que la potencia P es constante, para calcularla basta dividir el trabajo por la duración Δt de un día, en segundos.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{19.3 \cdot 10^3}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0.223 \text{ kW} = 223 \text{ W}$$

Apendices

Apéndice A

Unidades

Introducción

Un asunto recurrente en la física y en cualquier ciencia en general es el uso adecuado de las unidades de las distintas magnitudes con las que se trabaja, que se miden, etc. Es habitual encontrar que una misma magnitud, por ejemplo la energía, se pueda expresar en diversas unidades (julios, ergios, calorías, $\text{amt} \cdot \text{l}$, kWh, eV, ...). A una misma cantidad de la magnitud le corresponden distintos valores numéricos en función de la unidad que estemos utilizando. Así por ejemplo 1 caloría de energía son 4.186 julios.

Dado que usamos los valores numéricos para obtener resultados concretos, es necesario utilizar las unidades de una forma coherente a la hora de realizar cálculos. En este apéndice revisaremos algunos aspectos prácticos a tener en cuenta.

A.1. Magnitudes, dimensiones y unidades

Viendo un coche podríamos decir que su velocidad es 90 km/h. También podríamos decir que su velocidad es 25 m/s. En este ejemplo la velocidad es lo que llamamos una magnitud. Una **magnitud física** es una propiedad que puede ser medida de alguna forma. Velocidad, aceleración o temperatura son ejemplos de magnitudes físicas.

En el ejemplo hemos usado dos posibles unidades de velocidad: km/h y m/s. Una **unidad** es una cantidad estandarizada que utilizamos como comparación a la hora de realizar una medida. Por ejemplo una longitud de 2.5 metros (2.5 m) es una longitud 2.5 veces mayor que una longitud de referencia estándar que hemos llamado metro (m).

El segundo (s) y la hora (h) son dos unidades de tiempo. Cada una expresa una duración temporal perfectamente definida y ambas son válidas. El tiempo puede expresarse en una gran cantidad de unidades (h, s, días, años...) pero todas ellas se refieren a un mismo concepto: tiempo. Decimos que tiempo es una **dimensión**. Longitud o temperatura son otras posibles dimensiones

Volviendo al ejemplo del coche, la velocidad es una magnitud cuyas unidades siempre representan el cociente de una longitud dividida por un tiempo. Decimos que la velocidad tiene dimensiones de longitud/tiempo. Las distintas unidades, como km/h y m/s reflejan

este hecho. En realidad podemos utilizar muchísimas unidades de velocidad, pero siempre serán un cociente longitud/tiempo.

Utilizar diferentes unidades afecta al valor numérico de la magnitud. En el ejemplo teníamos dos velocidades: 90 km/h y 25 m/s. Lo interesante es que en realidad ambos valores se refieren exactamente a la misma velocidad. Son dos formas equivalentes de escribir lo mismo. El valor numérico (90 y 25) es diferente simplemente porque hemos usado dos unidades de velocidad diferentes (km/h y m/s)

Dado que el valor numérico de una magnitud depende de las unidades utilizadas es necesario ser cuidadoso a la hora de hacer cálculos para resolver cualquier problema, ya que una utilización incorrecta de las unidades puede provocar fácilmente un error.

A.2. Sistemas de unidades

Existe un número enorme de magnitudes físicas diferentes. Cada una de ellas puede expresarse en un gran número de unidades. Esto sería un serio problema si no se pudiese organizar las cosas de una manera razonable. Este es el objetivo de los sistemas de unidades.

Pensemos en primer lugar en las magnitudes físicas. Aunque su número es muy grande (longitud, tiempo, frecuencia, campo eléctrico, campo magnético, temperatura, energía....) existen muchas relaciones entre ellas. Por ejemplo velocidad=espacio/tiempo es una relación entre velocidad, longitud y tiempo. Como están relacionadas, sus dimensiones (unidades) también lo están y por tanto no son independientes unas de otras. En realidad el número de dimensiones independientes es bastante reducido. Por ejemplo longitud y tiempo se consideran dimensiones básicas. Otras como la velocidad (longitud/tiempo) o la aceleración (longitud/tiempo al cuadrado) pueden escribirse en función de las anteriores.

En la práctica solamente hacen falta siete dimensiones fundamentales o básicas y afortunadamente muchos sistemas de unidades (salvo en algunos un tanto especializados) utilizan las mismas.

Una vez elegidas las dimensiones fundamentales hay que definir la unidad básica de medida. Aquí es donde existen muchas posibilidades. Por ejemplo muchos sistemas de unidades consideran la masa como dimensión fundamental pero la unidad básica de medida cambia de uno a otro. En el Sistema Internacional de unidades (SI) la unidad básica es el kilogramo (kg). En el sistema cegesimal (cgs) es el gramo (g) y en el sistema imperial de unidades, usado en los países anglosajones, es la onza (oz).

Para complicar un poco las cosas, existen unidades específicas que propiamente no pertenecen a ningún sistema de unidades, pero que por razones históricas están muy arraigadas, incluso en su uso cotidiano. Ejemplos de esto pueden ser la caloría (cal) que es una unidad de energía, la atmósfera (atm) como unidad de presión o el grado centígrado ($^{\circ}\text{C}$) como unidad de temperatura.

Nosotros vamos a utilizar fundamentalmente el **Sistema Internacional (SI) de unidades**, que es el más utilizado en el mundo. Sin embargo deberemos conocer también unidades como la caloría, la atmósfera o el grado centígrado dado que son de uso común.

Tabla A.1: Dimensiones y unidades del Sistema Internacional (SI) de unidades

Magnitud básica	Dimensión	Unidad	Símbolo	aparece como...
Longitud	L	metro	m	l, x, r , etc
Tiempo	T	segundo	s	t
Masa	M	kilogramo	kg	m
Intensidad de corriente eléctrica	I	amperio	A	I, i
Temperatura	Θ	kelvin	K	T
Cantidad de sustancia	N	mol	mol	n
Intensidad luminosa	J	candela	cd	I

A.3. Sistema Internacional (SI) de unidades

A.3.1. Unidades básicas del SI

El Sistema Internacional de unidades está basado en un conjunto reducido de siete magnitudes/dimensiones básicas. Éstas son las que se muestran en la Tabla A.1 y cuya definición es la siguiente:

Longitud: metro (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ segundos

Tiempo: segundo (s) es la duración de $9\,192\,631\,770$ períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del cesio-133 (^{133}Cs)

Masa: kilogramo (kg) es la masa de un cilindro de aleación de Platino-Iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas

Intensidad de corriente eléctrica: amperio (A) es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro, en el vacío, produciría una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud

Temperatura: kelvin (K) es la fracción $1/273.16$ de la temperatura del punto triple del agua

Cantidad de sustancia: mol (mol) es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 12 gramos de carbono-12 (^{12}C)

Intensidad luminosa: candela (cd) es la unidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ Hz y cuya intensidad energética en dicha dirección es $1/683$ vatios por estereorradián

Estas dimensiones/unidades fueron elegidas por varias razones, entre las cuales la más importante es que pueden ser definidas y medidas con gran precisión. De ellas la última, la intensidad luminosa, es un tanto especial ya que tiene que ver con la respuesta del sistema visual humano a la luz. En cualquier caso no vamos a necesitar esta unidad en el presente curso.

El SI contempla la formación de múltiplos y submúltiplos de estas unidades básicas mediante el uso de prefijos. Solamente se contemplan múltiplos y submúltiplos del sistema decimal (potencias de 10). La lista completa de prefijos y su significado en potencias de 10 está en la Tabla A.2.

Tabla A.2: Prefijos del Sistema Internacional (SI)

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Unos prefijos son más comunes que otros. Es habitual encontrarnos mm (milímetros) o cm (centímetros) pero es raro encontrar Ym (yottametros). Los prefijos siempre van "pegados" a la unidad y equivalen a multiplicar la unidad por la potencia de 10 correspondiente. Por ejemplo el prefijo 'm' (mili) en la unidad mA (miliamperio) equivale a multiplicar por 10^{-3} la unidad A (amperio). Los prefijos se pueden usar también con unidades derivadas (que veremos a continuación) y que no pertenecen al conjunto de unidades básicas. Por ejemplo el vatio (W) es una unidad de potencia y se trata de una unidad derivada. Podemos escribir kW o MW para referirnos a kilovatios o megavatios respectivamente.

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$2.6 \text{ MW} = 2.6 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$200 \text{ nm} = 200 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

A.3.2. Unidades derivadas en el SI

Cualquier unidad que no pertenece a las siete básicas se denomina unidad derivada. El número de magnitudes/unidades derivadas es muy grande y muchas veces hacen referencia a magnitudes importantes, por lo que su uso es muy frecuente. Basta pensar en magnitudes como la fuerza, la energía o la carga eléctrica.

En el SI muchas magnitudes derivadas tienen unidades con nombre propio. Así la fuerza se mide en newtons (N), la energía en julios (J) y la carga eléctrica en culombios (C). Sin embargo newtons, julios y culombios no son unidades básicas sino derivadas. Esto significa que equivalen a una combinación concreta de unidades básicas. Por ejemplo el newton $N = \text{kg m s}^{-2}$. La Tabla A.3 muestra algunas de las magnitudes derivadas más comunes junto con sus unidades en el SI y su equivalencia en unidades básicas. A veces las unidades de una magnitud derivada pueden expresarse mediante la combinación de otras unidades del SI. Por ejemplo la unidad de presión (fuerza/superficie) en el SI es el pascal (Pa), sin embargo a veces se expresa como N/m^2 que es una unidad equivalente. La Tabla A.3 recoge algunos casos en la última columna.

Tabla A.3: Algunas magnitudes derivadas cuyas unidades SI tienen nombre especial.

Magnitud	Unidad	en SI básicas		otros...
Ángulo	radián	rad	- -	grado ($^{\circ}$)
Fuerza	newton	N	kg m s^{-2}	
Energía	julio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	
Presión	pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	N m^{-2}
Potencia	vatio	W	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-3}$	J s^{-1}
Carga eléctrica	culombio	C	A s	
Potencial eléctrico	voltio	V	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$	
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$	V A^{-1}

Como podemos ver en los ejemplos de la tabla, en el SI las unidades de cualquier magnitud equivalen a una combinación de las unidades básicas. Esta combinación consiste en el producto de unidades básicas que están elevadas a una potencia. Cuáles son las unidades básicas que aparecen y cuál es su exponente varía de un caso a otro.

Podemos pensar que las unidades derivadas del SI, como el newton o el julio, son simplemente nombres especiales para determinadas combinaciones de unidades básicas.

Para averiguar la combinación de unidades básicas que equivale a una unidad cualquiera, o en general para averiguar la combinación de unidades básicas correspondientes a cualquier magnitud deberemos recurrir a las definiciones, expresiones o ecuaciones que relacionen la magnitud que nos interesa con las magnitudes básicas.

Por ejemplo, queremos saber la equivalencia de la unidad de energía (julio, J) en unidades básicas del SI. Para ello necesitamos una expresión o ecuación de la energía donde aparezcan las magnitudes básicas (longitud, masa, tiempo...). Cualquier relación

nos puede valer, por ejemplo sabemos que la energía potencial gravitatoria E_p puede calcularse como

$$E_p = mgh \quad (\text{A.1})$$

Donde m , g y h son la masa, la aceleración de la gravedad y la altura respecto de una referencia. En el SI la masa se mide en kg, la aceleración en m s^{-2} y la altura en m. La energía se mide en julios (J). Por tanto

$$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \quad (\text{A.2})$$

Que es el valor que figura en la Tabla A.3

A.3.3. El radián. Un caso especial

Los ángulos se pueden expresar en varias unidades. La unidad del SI es el radián y, como aparece en la Tabla A.3, también puede expresarse en grados ($^\circ$)¹

El ángulo se define sobre una circunferencia en la que se han trazado dos radios desde su centro y que intersectan la circunferencia en dos puntos.

El ángulo definido por dos radios de una circunferencia es el cociente entre el arco determinado por la intersección de ambos radios con la circunferencia s y el radio de la misma r :

$$\text{ángulo} = \frac{s}{r}$$

Por tanto el ángulo es un cociente de dos longitudes, el arco s y el radio r , es decir, se trata de un número sin dimensiones y en buena lógica no debería tener unidades. Sin embargo el ángulo es un concepto tan importante que nos hemos inventado una unidad para este cociente adimensional, el radián, cuya definición es la siguiente:

El radián (rad) es el ángulo definido por dos radios de una circunferencia que delimitan un arco s de longitud igual al radio r de la circunferencia.

Tradicionalmente se utilizan letras griegas α , β , ... para designar los ángulos. Por ejemplo si usamos la letra α , la definición anterior quedaría:

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Cuando $s = r$ entonces el ángulo es la unidad, $\alpha = 1 \text{ rad}$. Por otra parte, el ángulo subtendido por la circunferencia completa (cuando el arco s es igual a la longitud de la circunferencia) es $2\pi \text{ rad}$, siendo $\pi = 3.141592\dots$

En radianes los ángulos se dan siempre en formato decimal, por ejemplo 0.615 rad.

¹Aquí nos referimos a los grados sexagesimales, en los que una circunferencia subtiende 360° . Existen también los grados centesimales (grad, gradián) en los que la circunferencia subtiende 400 grad. Éstos últimos no los vamos a usar.

Aunque el ángulo tiene el radián como unidad natural, por razones históricas (que se remontan a los antiguos pueblos mesopotámicos) utilizamos comúnmente un sistema para medir ángulos consistente en dividir la circunferencia en 360 unidades denominadas grados ($^{\circ}$). Cada grado se subdivide a su vez en 60 minutos ($'$) y cada minuto en 60 segundos ($''$). Debido a esta división en 60 partes, estos grados se llaman *grados sexagesimales*. En grados un ángulo puede escribirse de dos formas. Por ejemplo el ángulo 0.615 rad puede escribirse en grados como 32.237° , en formato decimal, o bien podemos traducir la fracción decimal (0.237) en minutos y segundos, que en este caso sería $35^{\circ}14'12.9''$. Como vemos los segundos pueden tener parte decimal.

Par convertir radianes a grados y viceversa basta saber que una circunferencia completa equivale $2\pi \text{ rad}$ o bien a 360° , es decir:

$$\alpha(^{\circ}) = \alpha(\text{rad}) \frac{360^{\circ}}{2\pi \text{ rad}}$$

A.4. Unidades de uso frecuente que no pertenecen al SI

Unidades como el grado centígrado, la caloría o la atmósfera son muy frecuentes pero no pertenecen al SI de unidades. Sin embargo necesitamos conocerlas para resolver correctamente muchos problemas.

Para utilizar correctamente una unidad que no pertenezca al SI es necesario conocer la equivalencia de esta unidad con la unidad del SI correspondiente a dicha magnitud. Por ejemplo, la atmósfera (atm) es una unidad de presión. En el SI la presión se mide en pascuales (Pa). Por tanto para poder manejar correctamente atmósferas necesitamos saber la equivalencia entre atmósferas y pascuales. En este caso $1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Normalmente la relación entre dos unidades es un factor multiplicativo. Es decir, las unidades son proporcionales unas a otras. Existen no obstante excepciones a esto, una de las más notables la encontramos en la temperatura. En el SI la unidad básica de temperatura es el kelvin (K). Sin embargo en nuestra vida cotidiana utilizamos principalmente el grado centígrado ($^{\circ}\text{C}$). La relación exacta entre los valores de temperatura T medidos en grados centígrados $T(^{\circ}\text{C})$ y en kelvin $T(\text{K})$ es:

$$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.16 \quad (\text{A.3})$$

La tabla (A.4) muestra algunas unidades habituales que no pertenecen al SI junto con su equivalencia en unidades del SI.

A.5. Operando con unidades

Como norma general, las operaciones con dimensiones/unidades son similares a las operaciones con números. Mejor aún, igual que operamos con variables como "x" o "y" en las ecuaciones. La aritmética es la misma.

Desde luego solamente podemos sumar cantidades con la misma unidad. Podemos decir que $2 \text{ m} + 5 \text{ m} = (2 + 5) \text{ m} = 7 \text{ m}$ exactamente igual que podemos decir $2x + 5x =$

Tabla A.4: Algunas unidades comunes y su equivalencia en unidades del SI

Magnitud	Unidad		Unidad SI		Equivalencia
Volumen	litro	l	metro cúbico	m^3	$1\text{ l} = 10^{-3}\text{ m}^3$
Presión	atmósfera	atm	pascal	Pa	$1\text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5\text{ Pa}$
Presión	mm de mercurio	mmHg	pascal	Pa	$1\text{ mmHg} = 133.3\text{ Pa}$ $1\text{ atm} = 760\text{ mmHg}$
Energía	caloría	cal	julio	J	$1\text{ cal} = 4.186\text{ J}$
Temperatura	grado centígrado	$^{\circ}\text{C}$	kelvin	K	$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.16$

$(2 + 5)x = 7x$. Sin embargo no podemos sumar unidades distintas como $2\text{ m} + 5\text{ kg}$, no tiene sentido sumar longitudes y masas.

Cuando hacemos el producto de dos variables distintas $x \cdot y$ podemos escribir simplemente $x \cdot y = xy$. Exactamente igual hacemos con las unidades. Por ejemplo $\text{kg} \cdot \text{m} = \text{kg m}$. Si tenemos el producto de dos variables iguales podemos usar potencias, por ejemplo $xy \cdot x = x^2y$. De la misma forma $\text{kg m} \cdot \text{m} = \text{kg m}^2$.

A.5.1. Cambio de unidades

Al cambiar de unidades una magnitud su valor numérico cambiará. Por ejemplo una longitud de 2.5 m equivale a 250 cm . El cambio de metros (m) a centímetros (cm) supone multiplicar el número original (2.5) por 100. El número 100 se debe a que 1 m equivale a 100 cm . En general, el cambio de una unidad a otra supone multiplicar el valor numérico de la magnitud por un factor, en este caso 100. Nuestro problema es por tanto conocer el factor adecuado para cada cambio de unidades.

En el caso anterior el cambio de unidades era muy fácil, estamos acostumbrados a ellas. En general sin embargo la cosa puede complicarse así que necesitamos un método infalible. A este método podríamos llamarlo el "método de multiplicar por 1". Para ver como funciona lo aplicaremos primero al ejemplo anterior.

Digamos que tenemos una longitud l y su valor inicial es:

$$l = 2.5\text{ m} \quad (\text{A.4})$$

Prácticamente lo único que podemos hacer con esta expresión, sin cambiar su significado, es multiplicarla por "1".

$$l = 2.5\text{ m} \cdot 1 \quad (\text{A.5})$$

Este "1" lo vamos a reescribir de una forma especial. En primer lugar vamos a escribirlo como cociente de dos cantidades iguales, en concreto

$$l = 2.5\text{ m} \cdot \left(\frac{1\text{ m}}{1\text{ m}} \right) \quad (\text{A.6})$$

Desde luego, el cociente entre paréntesis es idénticamente igual a "1" en todos los aspectos. Pero ahora viene el paso interesante, como queremos transformar el valor original a centímetros vamos a reescribir el numerador y en lugar de "1 m" escribiremos su equivalencia en centímetros, es decir "100 cm"

$$l = 2.5 \text{ m} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right) \quad (\text{A.7})$$

Y ahora podemos operar con los símbolos de las unidades. El símbolo de metros (m) que multiplica al valor 2.5 se cancela con el símbolo de metros en el denominador.

$$l = 2.5 \cancel{\text{ m}} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{ m}}} \right) \quad (\text{A.8})$$

Y ya solo queda hacer la operación

$$l = 2.5 \cdot 100 \text{ cm} = 250 \text{ cm} \quad (\text{A.9})$$

Viendo ahora el procedimiento debería estar claro que el significado de la magnitud l no ha cambiado. Su valor numérico en m y cm es diferente, pero es obvio que $2.5 \text{ m} = 250 \text{ cm}$.

Para realizar el cambio de unidades ha sido necesario conocer la equivalencia entre las dos unidades de interés, en este caso m y cm. También hemos utilizado el hecho de que la aritmética de los símbolos de las unidades es la misma que la aritmética de los números ordinarios en cuanto a multiplicar, dividir, etc.

Aunque hemos visto el procedimiento con mucho detalle, en la práctica puede abreviarse bastante ya que no es necesario escribir los pasos más evidentes. Podríamos haberlo hecho simplemente:

$$l = 2.5 \text{ m} = 2.5 \text{ m} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 2.5 \cancel{\text{ m}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{ m}}} = 250 \text{ cm} \quad (\text{A.10})$$

En el paréntesis de la ecuación (A.7) la unidad vieja (m) está en el denominador y la nueva (cm) en el numerador. De esta forma la unidad vieja se cancela en el siguiente paso (A.8) quedando solo la nueva. Elegir si la nueva unidad va en el numerador o en el denominador dependerá de la situación. Veamos otro ejemplo algo más complicado.

Supongamos que tenemos una velocidad expresada en m/s

$$v = 25 \text{ m/s} \quad (\text{A.11})$$

Y queremos expresarla en km/h. En este caso tenemos dos unidades que cambian: de metros (m) a kilómetros (km) y de segundos (s) a horas (h). Por lo tanto usaremos el "metodo del 1" dos veces, uno para cada unidad.

$$v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \right) \cdot \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) \quad (\text{A.12})$$

Cada paréntesis es un factor de conversión. El primero de kilómetros a metros. El segundo de horas a segundos. En cada paréntesis la posición de las unidades se ha elegido para que se cancelen las unidades viejas (m/s) y queden las nuevas (km/h). Ahora basta operar

$$v = 25 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{\text{m}}} \right) \cdot \left(\frac{3600 \cancel{\text{s}}}{1 \text{ h}} \right) = 25 \cdot 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 90 \text{ km/h} \quad (\text{A.13})$$

Que no es otra cosa que el ejemplo con el que comenzábamos este apéndice donde decíamos que 25 m/s y 90 km/h eran dos formas de expresar exactamente la misma velocidad.

¿Y qué pasa si alguna unidad está elevada a una potencia? Podemos pensar quizás en cambiar de m^2 a cm^2 . Bien, el método no cambia, simplemente hay que operar con las unidades. Por ejemplo

$$A = 3.8 \text{ m}^2 \quad (\text{A.14})$$

Para pasarlo a cm^2 haremos

$$A = 3.8 \text{ m}^2 = 3.8 \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^2 = 3.8 \text{ m}^2 \cdot \frac{10000 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} = 3.8 \cancel{\text{m}^2} \cdot \frac{10^4 \text{ cm}^2}{1 \cancel{\text{m}^2}} = 3.8 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Derivadas

Introducción

En este apéndice se repasan aquellos conceptos básicos necesarios para poder realizar la operación matemática de derivar una función. No pretende ser un curso completo de derivación, lo que requeriría unos contenidos más amplios, ya que esto será objeto de las asignaturas específicas de matemáticas. Se pretende únicamente revisar aquello que será necesario a lo largo del curso.

Se revisará la mecánica de la derivación y sus reglas y propiedades, siempre con ejemplos.

Para derivar con soltura es necesario:

- Aprender de memoria la tabla de derivadas de funciones elementales (ver más adelante)
- Aprender como se derivan:
 - La combinación lineal de funciones.
 - El producto y el cociente de funciones.
 - Una función de otra función (Regla de la cadena)
 - Función inversa de una función dada¹
- Practicar y practicar hasta que derivar no presente ninguna dificultad.

¹No confundir función inversa con la inversa de la función. Por ejemplo, la función inversa de x^2 es \sqrt{x} mientras que la inversa de x^2 es $\frac{1}{x^2}$

B.1. Notación

A lo largo de este apéndice utilizaremos la notación de la tabla (B.1)

Tabla B.1: Notación

Símbolo	Significado
f, g, h o bien $f(x), g(x), h(x)$	Funciones de la variable x
$f(x, y)$	Función de dos variables, x e y
a, b, c	Constantes
$f', \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), \frac{d}{dx}f$	Derivada de la función f respecto de la variable x

B.2. Derivadas de las funciones elementales

Por muy complicada que sea una función, estará formada por combinaciones de unas pocas funciones elementales (potencias, logaritmos, funciones trigonométricas, etc). Es necesario conocer de memoria estas funciones y sus derivadas. La mayor parte de ellas se encuentran en la tabla (B.2), que ha de aprenderse de memoria.

Tabla B.2: Derivadas de las funciones elementales

Función	Derivada	Función	Derivada
a	0		
x	1		
x^a	ax^{a-1}		
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\log_a x$	$\log_a e \cdot \frac{1}{x}, a \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{argsenh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{argtanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Fijarse que las raíces son realmente potencias. Así por ejemplo $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ por lo que se derivan de acuerdo a lo especificado para $f = x^a$.

B.3. La derivada: una operación lineal

La derivada es un operador lineal, lo que significa que cumple las siguientes propiedades:

- La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, es decir:

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad (\text{B.1})$$

- La derivada del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función, es decir:

$$\frac{d}{dx}(af) = a \frac{df}{dx}$$

- Las dos propiedades anteriores pueden resumirse en una sola:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(af + bg) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}}$$

Ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5\operatorname{sen}x) = 3 \frac{d(x^2)}{dx} - 5 \frac{d\operatorname{sen}x}{dx} = 3 \cdot 2x - 5 \cos x = 6x - 5 \cos x$$

B.4. Derivada del producto de dos funciones

Para derivar el producto de dos funciones se utiliza la **Regla de Leibnitz**

$$\boxed{\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}}$$

Ejemplo:

$$\frac{d(x^2 e^x)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} e^x + x^2 \frac{d(e^x)}{dx} = 2x e^x + x^2 e^x = e^x x (2 + x)$$

Análogamente, en el caso del producto de tres o más funciones la derivada sería.

$$\frac{d}{dx}(fgh) = \frac{df}{dx}gh + f \frac{dg}{dx}h + fg \frac{dh}{dx}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d(x^2 e^x \operatorname{sen} x)}{dx} &= \frac{d(x^2)}{dx} e^x \operatorname{sen} x + x^2 \frac{d(e^x)}{dx} \operatorname{sen} x + x^2 e^x \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \\ &= 2x e^x \operatorname{sen} x + x^2 e^x \operatorname{sen} x + x^2 e^x \cos x \end{aligned}$$

B.5. Derivada del cociente de dos funciones

Parecida a la anterior, para derivar el cociente de dos funciones se utiliza la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \frac{\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} x - \operatorname{sen} x \frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

B.6. Regla de la cadena

Muchas veces se nos presentan situaciones en las cuales tenemos una función cuya variable es otra función. Tomemos por ejemplo la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Aquí tenemos dos funciones encadenadas. Supongamos que queremos saber cuanto vale $f(x=2)$. Con la calculadora primero haríamos $2^2 = 4$ (primera función, elevar al cuadrado) y luego obtendríamos el $\operatorname{sen}(4)$ (segunda función, hallar el seno). Para calcular la derivada de la función $f(x)$ en este caso se utiliza lo que se conoce como **regla de la cadena**

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

Ejemplo: Queremos derivar la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Si llamamos $g(x) = x^2$ entonces la función se nos habrá convertido en $f(x) = \operatorname{sen}(g)$. En este caso, al aplicar la regla de la cadena hay que hacer dos derivadas: $\frac{df}{dg}$ y $\frac{dg}{dx}$ que son:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dg} &= \frac{d \operatorname{sen}(g)}{dg} = \cos(g) = \cos(x^2) \\ \frac{dg}{dx} &= \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \end{aligned}$$

Por tanto, según la regla de la cadena, su derivada será

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = \cos(x^2) \cdot 2x$$

De igual forma se hará en el caso de que el número de funciones "encadenadas" sea mayor. Por ejemplo, para tres funciones sería:

$$\frac{d}{dx} f\{g[h(x)]\} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx}$$

Y análogamente si son más.

Ejemplo:

Queremos derivar la función

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x^2}$$

Para aplicar la regla de la cadena podríamos escribir

$$f(g) = e^g$$

$$g(h) = \operatorname{sen}(h)$$

$$h(x) = x^2$$

Las tres derivadas que hay que calcular son:

$$\frac{df}{dg} = \frac{d e^g}{dg} = e^g = e^{\operatorname{sen}(h)} = e^{\operatorname{sen} x^2}$$

$$\frac{dg}{dh} = \frac{d \operatorname{sen}(h)}{dh} = \cos(h) = \cos x^2$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

Luego la derivada será:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\operatorname{sen} x^2} \right) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx} = e^{\operatorname{sen} x^2} \cos x^2 \cdot 2x$$

Con un poco de práctica la derivada puede calcularse directamente sin utilizar las funciones "g", "h", etc.

B.7. Derivada de la función inversa

Supongamos que la variable y es función de la variable x de tal forma que $y = f(x)$. Podemos ver f como una correspondencia que para cada valor de x nos proporciona un valor de y . Análogamente podríamos ver esta correspondencia en la otra dirección, es decir, para cada valor de y podemos obtener el valor de x mediante una función, denominada función inversa f^{-1} , de tal forma que $x = f^{-1}(y)$.²

Esta posibilidad de ver la relación entre x e y en ambas direcciones nos plantea también la posibilidad de contemplar la derivada en "ambas direcciones" es decir, podemos calcular dy/dx pero también dx/dy . Ambas derivadas no son independientes sino que están relacionadas:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1}}$$

Ejemplo.

²La función f ha de cumplir ciertas condiciones para que su función inversa f^{-1} exista y esté bien definida. Supondremos que estas condiciones se cumplen

Tomemos la función $y = \text{sen}(x)$. Su derivada está en la tabla, que debemos saber de memoria, y es simplemente $dy/dx = \cos(x)$. En este caso la función inversa es $x = \text{arc sen}(y)$. ¿Cuál es el valor de dx/dy ? Para calcularlo podemos usar la expresión anterior:

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} = [\cos x]^{-1} = \frac{1}{\cos x}$$

Solo queda dejar todo en función de y que es lo que estamos tomando como variable. En este caso podemos hacer uso de la conocida relación:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Y por tanto

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

Ahora bien, como $y = \text{sen}(x)$, entonces

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

Y sustituyendo en la anterior.

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} = [\cos x]^{-1} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Que es la expresión para la derivada de $\text{arcsen}(y)$ que encontramos en la tabla.

B.8. Derivada segunda y siguientes

Con frecuencia es necesario calcular lo que se conocen como derivadas segundas. Hay que tener en cuenta que la derivada de una función es otra función. La nueva función puede derivarse otra vez, obteniendo la derivada segunda. El proceso puede reiterarse indefinidamente obteniendo las derivadas tercera, cuarta, etc.

El símbolo utilizado para denotar la derivada segunda de la función $f(x)$ es:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

Análogamente para la derivada tercera sería

$$\frac{d^3 f}{dx^3}$$

Y en general, para la derivada n-ésima (resultado de derivar n veces una función) será:

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

Ejemplo. Calcular la derivada segunda de la función $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^4 + 3x^2 - 5x) = 4x^3 + 6x - 5 \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (4x^3 + 6x - 5) = 12x^2 + 6 \end{aligned}$$

B.9. Derivadas parciales

Cuando una función depende de dos o más variables se presenta la posibilidad de calcular la derivada respecto de cada una de ellas. El cálculo de derivadas parciales es igual que el cálculo de derivadas respecto de una sola variable ya que el resto de variables se consideran como una constante durante el cálculo. El símbolo de derivada parcial es algo diferente al que se utiliza con una sola variable. Si tenemos una función de dos variables $f(x, y)$ podremos calcular la derivada parcial respecto de x , $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ o respecto de y , $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Ejemplo: Sea la función de dos variables $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$. Las derivadas parciales respecto de x y respecto de y serán:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \operatorname{sen} y) = 2x \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \operatorname{sen} y) = x^2 \cos y\end{aligned}$$

Como se ve, durante la derivación respecto de una de las variables la otra actúa como una constante.

B.10. Derivadas parciales segundas

Pueden también calcularse las derivadas parciales segundas de una función de dos o más variables. Para una función $f(x, y)$ podríamos calcular dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

pero podemos calcular hasta cuatro derivadas parciales segundas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y) = x^2 \sin(y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x \sin y) = 2 \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos y) = -x^2 \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cos y) = 2x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x \sin y) = 2x \cos y\end{aligned}$$

Como se ve en el ejemplo, las derivadas segundas "cruzadas", las dos últimas, dan el mismo resultado. No se trata de una coincidencia sino que esto se verifica siempre que ambas derivadas sean continuas. Es decir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

B.11. Diferencial de una función

El diferencial de la función $f(x)$ se denomina df y se calcula a partir del diferencial de x , dx , de la siguiente manera:

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Ejemplo: El diferencial de la función $f = x^2$ será:

$$df = 2x \cdot dx$$

El diferencial de la función $f = \sin x^2$ será:

$$df = 2x \cos x^2 dx$$