Estadística, curso 2018-19

Ingeniería en Tecnologías Industriales

Profesor: Adrián Serrano

Ejercicios del Bloque II

1. **Concepto de variable aleatoria.** Para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios se considera una variable aleatoria de la que debe indicarse el espacio muestral de partida y el recorrido, clasifícala en discreta o continua.

   a) Se escoge al azar un número de 5 dígitos tomados del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea $X =$*número de dígitos diferentes de cero.*

   b) Se lanza 25 veces una moneda, $X =$*número de caras obtenidas.*

   c) Se lanza un dado, $X =$*número de lanzamientos hasta obtener un 5.*

   d) Se selecciona una muestra de suelo al azar, $X =$*pH de la muestra seleccionada.*

2. **Distribución y características de una variable aleatoria discreta.**

   Una urna contiene 2 bolas rojas, 5 verdes y 7 azules. Se extraen sin reemplazamiento 3 bolas. Calcula la función de probabilidad, media y desviación típica de la variable aleatoria, $X =$*Número de bolas verdes extraídas.*

3. **Distribución y características de una variable aleatoria discreta.** Se lanza tres veces una moneda con probabilidad de cara 1/3. Se considera la variable aleatoria $X =$*Número de caras menos el número de cruces tras los tres lanzamientos*. Se pide calcular la función de probabilidad, media y desviación típica de X.

4. **Distribución y características de una variable aleatoria discreta.** El envío de un mensaje con el teléfono móvil se realiza conforme al siguiente protocolo. El móvil envía un mensaje de preparación a la antena más próxima, la cual responde en 0.5 segundos. Si el móvil no recibe respuesta de la antena en ese tiempo, vuelve a enviar el mensaje de preparación y así hasta 6 envíos. Si en el sexto envío no obtiene respuesta, el móvil genera una imagen en pantalla

indicando que la red se encuentra saturada. La probabilidad de que la antena no responda en medio segundo es 0.05 y los envíos de preparación obtienen o no respuesta de modo independiente unos de otros.

Indica la función de probabilidad de la variable X =*número de mensajes de preparación enviados a la antena.* Calcula su media y desviación típica.

El responsable de la empresa de telecomunicación revisa el protocolo ya que desea que la señal de saturación aparezca sólo en un 2 % de los casos. ¿Cuántos mensajes de preparación se debería permitir antes de generar la señal de saturación?

5. **Transformada de una variable aleatoria.** Siguiendo con el enunciado anterior, se considera la variable aleatoria Y =*tiempo transcurrido hasta hacer efectivo el envío o recibir la señal de saturación.* En el cálculo del valor que toma Y, se tendrá en cuenta un tiempo fijo de partida de 0.25 segundos más el tiempo hasta cada uno de los mensajes de preparación. Calcula la función de probabilidad de la variable aleatoria Y. Calcula su media y desviación típica a partir de la función que acabas de hallar y a partir de la relación con la variable X.

6. **Transmisión segura de datos, distribución Binomial.** Un canal de transmisión está formado por una fuente que emite dígitos binarios y un receptor. Debido al ruido del canal, hay una probabilidad p de que ocurra un error en la transmisión de cada dígito: si se emite 0, se recibe 1 y, si se emite 1, se recibe 0. El error se produce con independencia de lo que haya ocurrido en los dígitos emitidos antes.

   Si emitimos un mensaje con n dígitos, ¿qué distribución tiene la variable X="número de dígitos recibidos con error"?.

   En el caso de que $p = 0{,}01$ y $n = 6$, ¿Qué probabilidad hay de que no haya errores?¿Qué probabilidad hay de que haya al menos 2 errores? ¿Cual es el número medio errores?¿Cual es la desviación del número de errores?

7. **Transmisión de datos, distribución Geométrica.** Siguiendo con el enun-

ciado anterior, si emitimos dígitos consecutivamente, ¿qué distribución tiene la variable Y="número de dígitos emitidos hasta el primer error"?. Calcula la esperanza y la varianza de esta variable, considerando que hay una probabilidad p de que ocurra un error.

En el caso de que $p = 0{,}01$, ¿Qué probabilidad hay de que el primer error ocurra en el décimo envío?¿Qué probabilidad hay de que haya al menos 2 envíos sin errores? ¿Cual es el número medio de envíos sin errores?¿Cual es la desviación del número de envíos sin errores?

8. **Transmisión de datos.** Siguiendo con el enunciado anterior, para tratar de reducir el número de errores, empleamos el siguiente sistema de codificación; cada dígito del mensaje a transmitir se codifica por un paquete de tres dígitos iguales (por ejemplo, para emitir el 1, se codifica con el paquete 111). Sin embargo, debido al ruido podría recibirse cualquier paquete de tamaño 3 de unos y ceros. Para descodificar se sigue el siguiente protocolo; cada paquete recibido se descodifica asignándolo al dígito más frecuente. Si llegara 001 se descodificaría como 0, por ser el dígito más repetido y si llegara 110, se descodificaría como 1.

    a) Si $p = 0{,}1$, ¿es ventajoso el método?

    b) Si $p = 0{,}7$, ¿es ventajoso el método?

    c) Estudia, en función de p, si el método es o no ventajoso.

9. **Control de calidad.** Un distribuidor recibe un lote muy grande de componentes. El lote se puede clasificar como aceptable sólo si la proporción de componentes defectuosos es a lo sumo 0.1. El distribuidor sigue el siguiente protocolo para decidir si compra o no el lote. Selecciona al azar (sin devolución $\sim$ con devolución ya que p no cambia)$n = 10$ componentes y acepta el lote sólo si el número de componentes defectuosos de la muestra es a lo sumo $m = 2$.

    a) Calcula la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real de piezas defectuosas es de 0.01, 0.05, 0.10, 0.20, 0.25, 0.50, 0.75.

    b) Sea p la proporción real de piezas defectuosas en el lote. Dibuja para distintos valores de p la probabilidad de que el lote sea aceptado. El gráfico obtenido se denomina curva característica de operación para el plan de muestreo.

   c) Repite los apartados a y b cuando $n = 10$ y $m = 1$, cuando $n = 15$ y $m = 2$. ¿Cuál de los tres planes de muestreo te parece más adecuado para el distribuidor?

10. **Control de Stock y de calidad.**

    Una distribuidora se encarga de enviar componentes C_1 a las empresas que lo demandan. Por experiencias anteriores, se sabe que un 2 % de las unidades de C_1 suelen ser defectuosas. Por tanto, si una empresa demandase a la distribuidora 100 unidades del componente C_1, ¿cuántas unidades debera enviar esta distribuidora para asegurar que la probabilidad de entregar 100 unidades sin defecto sea del 95 %?

11. **Seguridad de códigos.** Un sistema telemático utiliza claves de acceso que se forman combinando n símbolos que se toman de las 26 letras (de la a a la z) y 10 dígitos (del 0 al 9). Supongamos que hay m usuarios que tienen acceso al sistema y cada uno de ellos tiene una clave de acceso distinta. Un pirata informático selecciona (con reemplazamiento) claves de acceso de todas las posibles.

    a) Si $m = 9900$ y $n = 6$, ¿cuál es la media y la desviación típica del número de intentos antes de que encuentre la clave de un usuario?

    b) Responde al apartado anterior si $m = 100$ usuarios y $n = 3$.

    c) En las dos situaciones anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que el pirata informático haga 6 intentos antes de que encuentre una clave válida?

    d) En las dos situaciones descritas en a) y b) ¿Qué es más probable, que encuentre una clave válida una vez que ha hecho 5 intentos infructuosos o una vez que ha hecho 100 intentos infructuosos?

12. **Distribución de Poisson.** El flujo del tráfico de automóviles suele modelarse mediante una distribución de Poisson. Se está haciendo el seguimiento del tráfico

en un cruce con objeto de estudiar la necesidad de colocar un semáforo. Se considera que el tráfico en el cruce sigue una ley de Poisson de media 6 coches por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya coches en el cruce durante 30 segundos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tres o más coches en el cruce en 30 segundos?

c) En un intervalo de tiempo de 30 segundos, el 90 % de las veces ¿cuántos coches encontraremos en el cruce por lo menos?

d) Si la varianza del número de coches en el cruce por minuto fuera 20, ¿sería correcto modelar el flujo de tráfico con una distribución de Poisson?.

13. **Distintas de distribuciones.** Una persona, a partir de un día concreto al que denominaremos día 1, cada día decide al azar, con igual probabilidad e independencia entre los días, si comprar o no comprar un boleto de lotería. En esa lotería, un boleto es ganador con probabilidad p independiente del resultado en el resto de boletos. Consideramos los siguientes sucesos N_i:*el día i no compras un boleto*, W_i:*el día i compras un billete ganador* y L_i: *el día i compras un boleto no ganador*. Se pide:

a) Calcular $P(W_{33})$, $P(L_{87})$ y $P(N_{99})$.

b) Calcular $P(W_i)$, $P(L_i)$ y $P(N_i)$, para cualquier i.

c) Describe la distribución de la variable X que representa el número de día en el que compras el primer billete de lotería.

d) Describe la distribución de la variable D que representa el número del día en el que compras el primer boleto no ganador.

e) Describe la distribución de la variable R_m que representa el número de boletos no ganadores que has comprado en m días.

14. **Combinación de distribuciones.** El número de imperfecciones en la chapa utilizada para un cierto modelo de coche sigue una distribución de Poisson de media 0,02 por m^2. Un coche de este modelo necesita 5m^2 de chapa.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un coche de este modelo tenga alguna imperfección en la chapa?

b) Si se analizan 10 coches de este modelo, ¿qué probabilidad hay de que al menos dos no contengan imperfecciones?¿Cual es el número medio de coches sin imperfecciones?

c) Si se analizan coches de este modelo hasta que aparezca uno con imperfecciones, ¿qué probabilidad hay de que se hayan analizado 3 coches? ¿Cuál es el número medio de coches analizados? ¿Cuál es su desviación?

15. **Variable aleatoria continua.** Consideremos la variable aleatoria "peso en kilogramos de los paquetes entregados en una oficina de correos". Se sabe que su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 70}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x < 70 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determina la media y varianza del peso.

b) Si el coste por transporte es de 5 euros por kg, ¿cuál es el coste medio de transporte? ¿y su desviación típica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete exceda los 50 kg de peso? ¿y de que el coste de transporte sea superior a 100 Euros?

d) ¿Cuánto dinero debo llevar en el bolsillo para enviar un paquete y tener una probabilidad del 90 % de poder pagar el envío?

16. **Distribución uniforme.** El error de medida en milivoltios del voltaje de un circuito se puede modelizar como una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo $(-3, 3)$.

a) Escribe la ecuación y representa la función de densidad.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el error sea negativo? ¿y mayor que 2?

c) Determina la media y la varianza del error.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que nos alejemos del voltaje verdadero como mucho dos milivoltios?

e) Calcula la función de distribución de la variable error.

17. **Distribución exponencial.** El tiempo que transcurre entre la llegada de dos correos electrónicos en tu buzón personal a lo largo de un día se comporta como una exponencial de media dos horas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que no recibas correos en dos horas?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que esperes menos de 15 minutos para que llegue el siguiente correo?

    c) Una vez recibido un correo, el 90 % de las veces ¿cuánto se deberá esperar como máximo al siguiente correo?

    d) Una vez recibido un correo, con una probabilidad del 95 %, ¿cuánto tiempo como mínimo transcurrirá sin correos?

    e) Si no has recibido correos en las dos últimas horas, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco los recibas en las siguientes cuatro horas?

    f) ¿Cuál es el tiempo que se espera que transcurra entre la llegada del quinto y sexto correo?

    g) Si pensamos en los 10 últimos intervalos de tiempo entre llegadas de correos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellos hayan durado más de una hora?

18. **Distribución normal.** La dureza Rockwell de un metal se determina al marcar con un punto acerado la superficie del metal y después medir la profundidad del punto. Supongamos que la dureza Rockwell (micras) de cierta aleación se distribuye como una normal de media 70 y desviación 3. Cuando llega un cargamento se hace un ensayo y si la dureza está entre 67 y 75 micras se acepta cargamento.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte el cargamento?

    b) ¿Qué valor caracteriza al 1 % de las aleaciones más duras?

    c) Si el intervalo de aceptación fuera (70-c, 70+c), ¿para qué valor de c serían aceptados el 95 % de los cargamentos?

d) Si se hacen 10 ensayos al azar y la dureza se determina de modo independiente, ¿cuántos se esperan aceptables? ¿y qué probabilidad hay de que al menos 8 de los 10 ensayos sean aceptables?

19. **Distribución normal** La velocidad con la que se transfiere un fichero desde MiAulario al ordenador personal de un estudiante en una tarde de un día laborable se comporta como una variable con distribución normal de media 60kilobits por segundo (1kilobit=1024bits). La desviación típica es σ.

    a) Si $\sigma = 4$ kilobits por segundo, ¿cuál es la probabilidad de que la descarga se realice a una velocidad de, por lo menos, 70 kilobits por segundo?¿y de menos de 58 kilobits por segundo?

    b) ¿Cuál debería ser el valor de σ para que la descarga de un fichero de 1 megabyte (1 megabyte= 2^{23} bits) se realice en menos de tres minutos con una probabilidad de 0.75?

20. **Distribución conjunta** Consideramos las variables aleatorias X e Y, que pueden tomar los valores x e y de acuerdo a la siguiente distribución conjunta

x	y	$P(X = x, Y = y)$
1	1	0.25
1.5	2	0.125
1.5	3	0.25
2.5	4	0.25
3	5	0.125

Se pide determinar la siguiente información:

a) $P(X < 2{,}5, Y < 3)$, $P(X < 2{,}5)$, $P(Y < 3)$, $P(X > 1{,}8, Y > 4{,}7)$.

b) $E[X]$, $E[Y]$, $\sigma^2[X]$, $\sigma^2[Y]$.

c) Distribución marginal de X y distribución condicional de la variable $Y|X = 1{,}5$.

d) $E[Y|X = 1{,}5]$ y $\sigma^2[Y|X = 1{,}5]$

e) ¿Son X e Y independientes?

f) $\sigma_{X,Y}$

g) $E[X+Y]$ y $\sigma^2[X+Y]$

21. **Distribución conjunta** En un grupo de 9 amigos de clase de Estadística de los Grados de Ingeniería, 2 de ellos son de telecomunicaciones, 3 de tecnologías industriales, 2 de electromecánica, 1 de agronomía y 1 informática. Escogemos a tres de ellos al azar para formar un grupo. Sea X el número de estudiantes de tecnologías industriales e Y el número de estudiantes de informática. Se pide

    a) Obtener la distribución conjunta de X e Y.

    b) Distribución marginal de X.

    c) Distribución condicional de la variable $Y|X=2$ y $E[Y|X=2]$, $Var[Y|X=2]$.

    d) $\sigma_{X,Y}$ y el coeficiente de correlación . ¿Son X e Y independientes?