## Tema 5: EDOs

Primitivas de algunas funciones elementales

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C\,,$ $a \in \mathbb{R},\ a \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int a^x\ \ln a\ dx = a^x + C$ $a \in \mathbb{R},\ a > 0$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Otras primitivas

- $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \frac{3\operatorname{sen} x}{4} + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(3x) + C$
- $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{3\cos x}{4} + \frac{1}{12}\cos(3x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$

**Ecuaciones reducibles a ecuaciones separables**

- Las ecuaciones de la forma $y'(t) = f\,(y(t)/t)$ se transforman en separables con el cambio de variable $u(t) = y(t)/t$.
- Las ecuaciones de la forma $y'(t) = f(a\,t + b\,y(t) + c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, se transforman en separables mediante el cambio de variable $v(t) = a\,t + b\,y(t) + c$.

**Ecuaciones diferenciales exactas.**

- Si $M(t,y)$, $N(t,y)$ y sus derivadas parciales, son continuas en un rectángulo $\mathcal{R}$, entonces la ecuación diferencial $M(t,y(t)) + N(t,y(t))\,y'(t) = 0$ es exacta si y sólo si
$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}, \qquad \forall (t,y) \in \mathcal{R}.$$

**Factores integrantes**

- Si la expresión $\dfrac{\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}}{M(t,y)}$ depende sólo de $y$, podemos buscar el factor integrante de la forma $\mu = \mu(y)$ resolviendo la ecuación diferencial
$$\frac{\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}}{M(t,y)} = \frac{-1}{\mu(y)}\frac{d\mu(y)}{dy}$$
- Si la expresión $\dfrac{\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}}{N(t,y)}$ depende sólo de $t$, podemos buscar el factor integrante de la forma $\mu = \mu(t)$ resolviendo la ecuación diferencial
$$\frac{\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}}{N(t,y)} = \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt}$$

**Método de los coeficientes indeterminados**

- Si el término no homogéneo $b(t)$ de la EDO es de la forma
$$b(t) = e^{\alpha t}\,\big(P_n \cos(\beta\,t) + Q_m \operatorname{sen}(\beta\,t)\big),$$
con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $P_n$ y $Q_m$ polinomios de grados $n$ y $m$, entonces:
  - Si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ no es raíz del polinomio característico, ensayamos
$$y_p(t) = e^{\alpha t}\,\big(P_k^* \cos(\beta\,t) + Q_k^* \operatorname{sen}(\beta\,t)\big),$$
  - Si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ es raíz de multiplicidad $s$ del polinomio, ensayamos
$$y_p(t) = e^{\alpha t}\,t^s\,\big(P_k^* \cos(\beta\,t) + Q_k^* \operatorname{sen}(\beta\,t)\big),$$

  donde $P_k^*$ y $Q_k^*$ son polinomios a determinar de grado $k = \max(m,n)$.

**Método de variación de las constantes**

- Sean $y_1(t)$, $y_2(t)$ soluciones linealmente independientes de la EDO lineal homogénea. Sean $c_1'(t)$, $c_2'(t)$ las soluciones del sistema lineal
$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix},$$
donde $b(t)$ es el término no homogéneo de la EDO. Si $c_1(t)$, $c_2(t)$, son primitivas cualesquiera de $c_1'(t)$, $c_2'(t)$, entonces
$$y_p(t) = c_1(t)\,y_1(t) + c_2(t)\,y_2(t)$$
es una solución particular de la ecuación lineal no homogénea.