



Apellidos:

Nombre: DNI:

Titulación: Grupo:

-
- ✓ **Criterios de puntuación:** para alcanzar la máxima puntuación en un problema, éste debe estar, en su totalidad, correctamente planteado, explicado y resuelto. Se valorará positivamente el orden y la claridad en las respuestas.
 - ✓ **Calculadora:** no está permitido el uso de calculadora de ningún tipo.
 - ✓ **Tiempo:** a partir de la entrega del enunciado tenéis 1.5 horas para resolver el examen.
 - ✓ **log** representa el logaritmo neperiano.
-

1. (2 puntos)

a) Consideremos una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es el dominio de f .

1) Da la definición de *curva de nivel* c .

2) ¿Qué condición debe verificar $c \in \mathbb{R}$ para que exista la curva de nivel c ? Razona la respuesta.

b) Dada la función

$$f(x, y) = e^{\sqrt{y-x^2+2x+1}},$$

1) Determina y representa el dominio de f .

2) Describe y dibuja, si es posible, las curvas de nivel c para $c = e^2$ y $c = e^{-2}$.

2. (2 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \tan(x^3)}{\sqrt{2|x| + 3y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

estudia la continuidad de f en el punto $(0, 0)$.

3. (3 puntos) Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{(x^3+y^3)} - 1}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Calcula la derivada direccional de f en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ en cualquier dirección dada por el vector unitario $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.
- b) Utilizando el apartado a) y la fórmula $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$, ¿qué puede decirse de la diferenciabilidad de f en el origen?

4. (3 puntos) Dada la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$,

Demuestra que

$$0 \leq f(x, y) \leq 5$$

para todo $(x, y) \in D$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x+2, y \geq x-2\}.$$

