Tema 2

Aplicaciones lineales

Ejercicios y Soluciones

2.1. Escribe una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que represente cada una de las siguientes transformaciones lineales del plano:

(I) Contraer cada vector a la mitad.

(II) Reflejar cada vector respecto del eje OX.

(III) Reflejar cada vector respecto del eje OY.

(IV) Girar cada vector alrededor del origen un ángulo α.

(V) Proyectar cada vector perpendicularmente sobre el eje OX.

Solución.

(I) $f(x,\, y) = (x/2,\, y/2)$.

(II) $f(x,\, y) = (x,\, -y)$.

(III) $f(x,\, y) = (-x,\, y)$.

(IV) $f(x,\, y) = (x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha),\, x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha))$.

(V) $f(x,\, y) = (x,\, 0)$.

2.2. Razona si es posible encontrar aplicaciones lineales $f,\, g,\, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned}
&f(1,0,1,1) = (-1,1,1), f(-1,1,0,1) = (2,1,-1), f(1,1,2,3) = (1,3,1),\\
&g(1,0,1,1) = (-1,1,1), g(-1,1,0,1) = (2,1,-1), g(1,1,2,3) = (0,3,1)\\
&h(1,0,1,1) = (-1,1,1), h(-1,1,0,1) = (2,1,-1), h(1,1,2,2) = (1,3,1).
\end{aligned}$$

Solución.
No se puede encontrar la aplicación f, pero sí ejemplos de aplicaciones verificando las condiciones de g y h.

2.3. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y) = (2x + y, x - y, y).$$

Halla la matriz coordenada A de f respecto de las bases canónicas y la matriz coordenada B de f en las bases

$$[(1,1),(0,1)],\;\; [(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)]$$

de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Determina matrices regulares P y Q tales que $QAP = B$.

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + y, x + z)$.

(I) Halla la matriz coordenada A de f respecto de las bases

$$[(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, -1)],\ \ [(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)].$$

(II) Escribe la matriz coordenada B de f en las bases

$$[(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)],\ \ [(-1, -1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)]$$

de $\mathbb{Q}^3$.

(III) Calcula matrices regulares P y Q tales que $QAP = B$.

Solución.

(I) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(II) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

(III) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

2.5. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por $f(p) = p'$, $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

(I) Halla la matriz coordenada A de f respecto de la base natural de $\mathbb{R}_3[x]$.

(II) Determina B, matriz coordenada de f respecto de la base

$$[x(x - 1), (x - 1)(x + 1), x(x + 1), x^3].$$

Considera que esta es la base tanto para el espacio de partida como para el de llegada.

Solución.

(I) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(II) $B = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(I) Comprueba que f es lineal.

(II) Halla $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(III) Si $S = \mathbb{R}\langle(1,\, 1,\, 0),\, (0,\, -1,\, 1)\rangle$ y $T = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, halla $f(S)$, $f(T)$, $f^{-1}(S)$ y $f^{-1}(T)$.

Nota: Dados una aplicación lineal $f : V \to W$ y S un subespacio de W, denotamos por $f^{-1}(S) = \{v \in V \text{ tales que } f(v) \in S\}$

Solución.

(I) f es un aplicación lineal ya que $f(t_1v_1 + t_2v_2) = t_1f(v_1) + t_2f(v_2)$ para cualesquiera $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1,\, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

(II) $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\langle(1,\, 1,\, 1)\rangle$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\langle(1,\, 0,\, -1),\, (-1,\, 1,\, 0)\rangle$.

(III) $f(S) = \operatorname{Im} f$, $f(T) = \mathbb{R}\langle(1,\, 1,\, -2)\rangle$.
$f^{-1}(S) = \mathbb{R}\langle(1,\, 1,\, 0),\, (1,\, 1,\, 1)\rangle$ y $f^{-1}(T) = \mathbb{R}\langle(1,\, 0,\, 0),\, (1,\, 1,\, 1)\rangle$.

2.7. Dado V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$ y $[v_1, v_2]$ una base de V. Encuentra una aplicación lineal $f : V \to V$ tal que $f(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$ y $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\langle v_1 - v_2\rangle$.

Solución.

f es una aplicación cuya matriz asociada en la base $[v_1, v_2]$ es $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2.8. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

- $f(1) = 1 + x^2$.
- $f(1 + x) = 2 + x + x^2$.
- $f(1 + x + x^2) = 2 + 2x + x^2$.

(I) Halla $f(a + bx + cx^2)$ para cualquier $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

(II) Estudia si f es o no un isomorfismo. Determina f^{-1} en caso de que sea posible.

(III) Si $M = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a = b = c\}$, completa la base de $f(M)$ hasta conseguir una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Solución.

(I) $f(a + bx + cx^2) = (a + b) + (b + c)x + ax^2$.

(II) Sí es un isomorfismo y $f^{-1}(a + bx + cx^2) = c + (a - c)x + (-a + b + c)x^2$ para cualquier $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

(III) Podemos completar la base de $f(M)$ por ejemplo con la familia de vectores $\{x, x^2\}$.

2.9. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(I) Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal con $\mathrm{Ker}(f) = V$, entonces $f = 0$.

(II) Si $f : V \to V$ es lineal con $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, entonces $f \circ f = 0$.

(III) Si $f : V \to V$ es lineal e inyectiva, entonces debe ser un isomorfismo.

Solución.

Las tres afirmaciones son verdaderas.

2.10. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que $(1, 0, 1) \in \mathrm{Ker}\, f$, $1 + x \in \mathrm{Im}\, f$ y $f(0, 0, 1) = x^2$.

Solución.

Por ejemplo, f puede ser una aplicación cuya matriz, en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$, sea $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(II) Calcula los subespacios $Ker\, f$ e $Im\, f$. Razona si la aplicación f es biyectiva o no.

(III) Dado $T = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rangle$, halla $f^{-1}(T)$ y su dimensión.

Solución.

(I) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

(II) Como el $\operatorname{rang}(A) = 3$,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\langle f(e_1),\, f(e_2),\, f(e_3))\rangle = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\operatorname{Ker} f = 0_{\mathbb{R}^3}$. Como f no es una aplicación suprayectiva no puede ser biyectiva.

(III) $f^{-1}(T) = \mathbb{R}\langle (1,\, 1,\, -1) \rangle$.

2.12. Encuentra los subespacios fundamentales de las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución.

(i) Para A, sólo hay valores propios complejos.

(ii) Para B, $S(2) = \mathbb{R}\langle(-1,1)\rangle$.

(iii) Para C, $S(-1) = \mathbb{R}\langle(1,2,0)\rangle$, $S(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \mathbb{R}\langle(1-\sqrt{5},-2,-3+\sqrt{5})\rangle$, $S(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \mathbb{R}\langle(-1-\sqrt{5},2,3+\sqrt{5})\rangle$.

(iv) Para D, $S(2) = \mathbb{R}\langle(0,1,0)\rangle$, $S(-\sqrt{3}) = \mathbb{R}\langle(-1-\sqrt{3},0,1)\rangle$, $S(\sqrt{3}) = \mathbb{R}\langle(-1+\sqrt{3},0,1)\rangle$.

(v) Para E, $S(1) = \mathbb{R}\langle(1,1,1)\rangle$. Los demás valores propios son complejos.

(vi) Para F, $S(1) = \mathbb{R}\langle(3,-1,3)\rangle$, $S(2) = \mathbb{R}\langle(2,0,1),\ (2,1,0)\rangle$.

2.13. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcula los valores propios de A, A^2, A^{-1} y $A + 4I_2$. ¿Existe alguna relación entre los valores propios de las tres últimas matrices y los de la matriz A?

Solución.

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Los de A^2 son λ_1^2 y λ_2^2. Los valores propios de A^{-1} son λ_1^{-1} y λ_2^{-1}. Y los de $A + 4I_2$ son $\lambda_1 + 4$ y $\lambda_2 + 4$.

2.14. Halla los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, AB y BA.

(i) ¿Pueden obtenerse los valores propios de AB multiplicando los valores propios de A por los de B?

(ii) ¿Son los valores propios de AB iguales a los de BA?.

Solución.

Tanto A como B tienen un valor propio doble, $\lambda = 1$. En este ejemplo concreto, los valores propios de AB y de BA coinciden: $\lambda_1 = 2+\sqrt{3}$ y $\lambda_2 = 2-\sqrt{3}$. Vemos que dichos valores no se pueden expresar como producto de un valor propio de A por otro de B. En general, cualquier valor propio no nulo de AB lo también lo será de BA.

2.15. Se sabe que A es una matriz 3×3 cuyos valores propios son $0, 1, 2$. Halla, si es posible,

(i) rang A,

(II) $\det(A'A)$,

(III) valores propios de $A'A$,

(IV) valores propios de $(A^2 + I_3)^{-1}$.

Solución.

(I) $\operatorname{rang} A = 2$.

(II) $\det(A'A) = (\det(A))^2 = 0$.

(III) Sólo podemos asegurar que $\lambda = 0$ es valor propio de $A'A$.

(IV) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}$.

2.16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(I) comprueba que $P^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $P^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A.

(II) Averigua a qué valor propio corresponde cada uno de ellos y escribe una igualdad del tipo

$$A \left(\begin{array}{c|c|c} P^1 & P^2 & P^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} P^1 & P^2 & P^3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & & \\ \hline & \lambda_2 & \\ \hline & & \lambda_3 \end{array} \right).$$

(III) Si dado cualquier vector columna X escribimos $X = t_1 P^1 + t_2 P^2 + t_3 P^3$, comprueba que $AX = \lambda_1 (t_1 P^1) + \lambda_2 (t_2 P^2) + \lambda_3 (t_3 P^3)$.

Esto quiere decir que existen tres direcciones sobre las que A actúa *dilatando* los vectores. Así, se puede conocer cómo actúa A sobre cualquier $X \in \mathbb{R}^3$.

2.17. Encuentra una matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $(1,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ son vectores propios de valor propio -2 y $S(3) = \{(x,y,z,t) \mid x = t = 0\}$.

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.18. Estudia si son o no diagonalizables las siguientes matrices sobre $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solución.

La matriz A no es diagonalizable. B y C son diagonalizables en $\mathbb{C}$, pero no en $\mathbb{R}$.

2.19. Halla, en cada uno de los siguientes casos y si es posible, una matriz regular P tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D una matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observa que, para comprobar que la respuesta es correcta no es necesario calcular P^{-1}. Es más sencillo ver que $AP = PD$.

Solución.

Sabemos que, si una matriz A es diagonalizabe, existe más de una matriz P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, ya que que P depende de la base de los subespacios propios elegida.
A continuación se dan algunas posibles soluciones:

(i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ (iv) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(v) No existe P.

2.20. Halla valores de los parámetros a y b para que las siguientes matrices sean diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a-2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si M es una cualquiera de las matrices diagonalizables obtenidas, halla P invertible tal que $P^{-1}MP$ sea diagonal.

Solución.

(I) Para $a \neq 0, -\frac{1}{4}$, la matriz A es diagonalizable. (Si $a > -\frac{1}{4}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y, si $a < -\frac{1}{4}$ lo es en $\mathbb{C}$). Una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal es:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} & \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = -\frac{1}{4}$, A no es diagonalizable.

Si $a = 0$, A es diagonalizable con $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(II) Para $a \neq 1, -\frac{5}{4}$, la matriz B es diagonalizable. (Si $a < 1$, B es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y, si $a < -\frac{5}{4}$ lo es sólo en $\mathbb{C}$). Cuando $a \neq 0, -\frac{2}{3}$, una matriz P buscada es:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2+3a} & -\frac{2(1+\sqrt{1-a})}{a} & \frac{2(-1+\sqrt{1-a})}{a} \\ -\frac{5+4a}{2+3a} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$ entonces $P = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $a = -\frac{2}{3}$ entonces $P = \begin{pmatrix} 3 & -6+2\sqrt{15} & -6-2\sqrt{15} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Si $a = -\frac{5}{4}$ ó $a = 1$, B no es diagonalizable.

(III) La matriz C sólo es diagonalizable si $a = 2$. Una matriz que lo hace posible es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(IV) Para $a \neq 1, 2$, la matriz D es diagonalizable con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{1-a}{3-2b+ab} \\ 0 & 0 & \dfrac{(-2+a)(-1+a)}{3-2b+ab} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

siempre que $3-2b+ab \neq 0$, y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ si $3-2b+ab = 0$.

Si $a = 1$, la matriz D sólo es diagonalizable cuando $b = 3$ con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(V) La matriz E sólo es diagonalizable si $a = 0$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(VI) Si $a \neq 1, 2$, la matriz F es diagonalizable con $P = \begin{pmatrix} -\dfrac{b}{-1+a} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $a = 1$, F sólo es diagonalizable si $b = 0$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 2$, la matriz F es diagonalizable con $P = \begin{pmatrix} -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.21. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcula A^{20} y B^5.

Solución.

Como $A = PDP^{-1}$, entonces $A^{20} = PD^{20}P^{-1} = I_2$. Por otro lado, $B = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$B^5 = PD^5P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5+4\cdot 8^5 & 2+2\cdot 8^5 & 4+2^2\cdot 8^5 \\ 2+2\cdot 8^5 & -8+8^5 & 2+2\cdot 8^5 \\ 4+4\cdot 8^5 & 2+2\cdot 8^5 & -5+2^2\cdot 8^5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2.22.}}$ Dado el endomorfismo h de $\mathbb{R}_2[x]$ que tiene por matriz asociada respecto de la base $\{1, x, x^2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

(I) halla los valores propios de h.

(II) Estudia si h es diagonalizable y encuentra, si es posible, una base de vectores propios de h.

(III) Determina una matriz P, regular, con $P^{-1}AP$ diagonal.

Solución.

(I) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

(II) h es diagonalizable y una base de vectores propios de h es, por ejemplo,

$B = [-1+x,\ -2+x,\ x^2]$.

(III) $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{2.23.}}$ Escribe la ecuación del endomorfismo h de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\} \text{ y}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y - z = 0\}$$

son subespacios propios de h y que $h(1, 1, 1) = (2, 0, 0)$.

Solución.

$h(x, y, z) = (2x,\, 2x - 2z,\, 2x - 2y)$.

$\boxed{\textbf{2.24.}}$ Dado el endormorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

- $h(e_1) = ae_1 + e_2 + (a-1)e_3$, con $a \in \mathbb{R}$.
- $e_1 - e_3$ es un vector propio de valor propio 1.
- e_2 es un vector propio de valor propio 2, se pide:

(I) Escribe la matriz A asociada a h en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(II) Dada la base $B = [v_1 = e_2,\, v_2 = e_1 - e_3,\, v_3 = e_1 - e_2]$, calcula la matriz asociada a h en dicha base.

(III) Halla los valores de a para los cuales el endomorfismo h es diagonalizable.

(IV) Para $a = 0$, calcula una matriz matriz regular, P, y una matriz diagonal, D, tales que $P^-1AP = D$

Solución.

(I) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(II) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a-2 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$.

(III) h es diagonalizable para todo $a \neq \dfrac{3}{2}$.

(IV) Podemos tomar, por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.