Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Asignatura: 242206 Matemáticas II
Departamento: Estadística, informática y matemáticas
Examen: Evaluación continua, parte A
Fecha: 5 de abril de 2019
Indicaciones para resolverlo

Primer apellido: ....
Segundo apellido: ....
Nombre: ....
DNI: ....
Grupo 2

A tener en cuenta

- Esta parte corresponde a los temas 1-3 y vale un 55 % de la evaluación continua
- **Criterios de puntuación:** para alcanzar la máxima puntuación en un problema, éste debe estar, en su totalidad, correctamente planteado, explicado y resuelto. Se valorará positivamente el orden y la claridad en las respuestas.
- Para agilizar la tarea de corrección, empezad cada problema en una hoja nueva y entregad los problemas en el mismo orden que están enunciados (independientemente del orden en que los hayáis resuelto).
- La primera hoja que entreguéis debe ser esta carátula completamente rellenada.
- Para evitar extravíos, rellenad la cabecera completa de todas las hojas que entreguéis.
- No entreguéis nada escrito con lápiz ni con color rojo.
- A partir de la entrega del enunciado, tenéis dos horas para resolver este examen.
- log representa el logaritmo neperiano.
- No está permitido el uso de teléfono móvil ni de ningún dispositivo de comunicación.
- No está permitido el uso de calculadoras.

1. Sean $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}\,\sqrt{y^2 - 1}\,, \quad g(x,y) = \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - 1)}\,.$

   a) (1 *punto*) Calcula y dibuja D_f, el dominio de f y D_g, el dominio de g

   Solución: Empezamos calculando D_f: debemos imponer

$$x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \text{ y } y^2 - 1 \geq 0$$

   A la hora de dibujar las curvas que delimitan D_f podemos ayudarnos del dibujo de la pregunta 3. Puedes ver un dibujo de D_f en la figura 1.

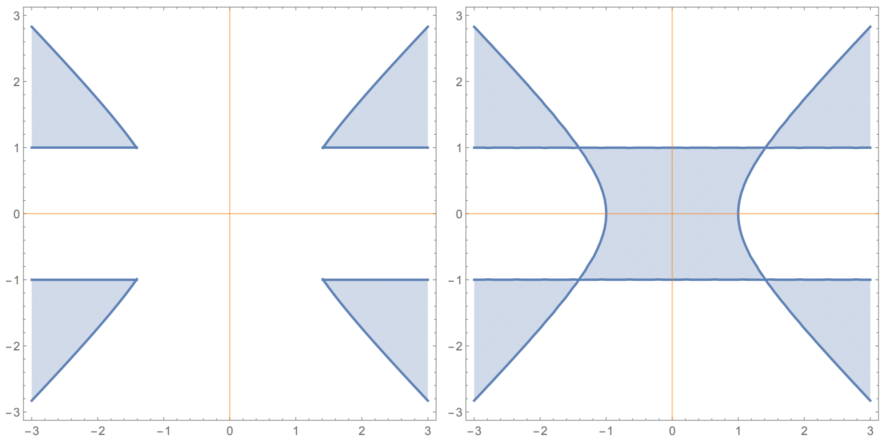

Figura 1: Dominios D_f (izquierda) y D_g (derecha) correspondientes a la pregunta 1

   Calculamos ahora D_g: debemos imponer

$$x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \text{ y } y^2 - 1 \geq 0$$
$$\text{o}$$
$$x^2 - y^2 - 1 \leq 0 \text{ y } y^2 - 1 \leq 0$$

   A la hora de dibujar las curvas que delimitan D_g podemos ayudarnos del dibujo de la pregunta 3. Puedes ver un dibujo de D_g en la figura 1.

   b) (0.5 *puntos*) Para f y para g, calcula y dibuja la curva de nivel correspondiente al nivel $c = 0$

   Solución: Debemos imponer, respectivamente

$$f(x,y) = 0, \text{ con } (x,y) \in D_f$$
$$g(x,y) = 0, \text{ con } (x,y) \in D_g$$

   A la hora de dibujar las curvas, podemos ayudarnos del dibujo de la pregunta 3. Puedes ver un dibujo de las curvas de nivel en la figura 2

   c) (0.5 *puntos*) Estudia si la curva de nivel de f correspondiente al nivel $c = 1$ es la misma que la curva de nivel de g correspondiente al nivel $c = 1$.

   Solución: Observemos que $(0,0) \in D_g$ y $g(0,0) = 1$, pero $(0,0) \notin D_f$, por lo que las curvas de nivel no pueden ser la misma.

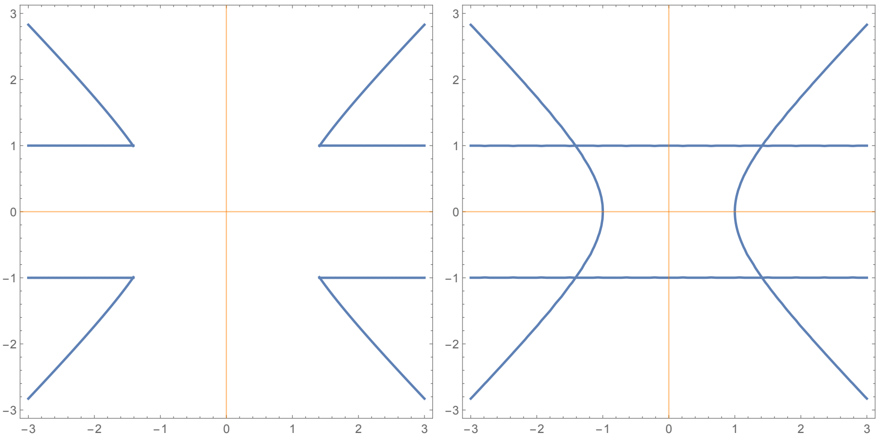

Figura 2: Curvas de nivel de f (izquierda) y de g (derecha) correspondientes a la pregunta 1b

2. Sean $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ y sea

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^n y^{n+1}}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) (1 *punto*) Estudia, en función de los valores de n, la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
Solución: f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, veamos si f es continua en $(0,0)$: $f(0,0) = 0$; estudiamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

Tomamos $y = mx$, familia de rectas que pasan por $(0,0)$:

$$f(x,mx) = \frac{m^{n+1}}{1+m^4} x^{2n-3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} (\text{no acotado}) & n = 1 \\ 0 \quad \forall m & n \geq 2\,, \end{cases}$$

por lo que, para que f sea continua en $(0,0)$ es necesario $n \geq 2$. Para este caso, vamos a intentar aplicar la regla del sándwich:

$$0 \leq \mid f(x,y) - 0 \mid = \frac{|x|^n |y|^{n+1}}{x^4+y^4} = \sqrt{\frac{x^4}{x^4+y^4}}\ |x|^{n-2} \sqrt{\frac{y^4}{x^4+y^4}}\ |y|^{n-1} \leq$$

$$\leq |x|^{n-2}|y|^{n-1} \underset{(x,y)\to(0.0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

por lo que f es continua en (0.0) para este caso.
Resumiendo

- Para $n = 1$, f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y discontinua en (0.0).
- Para $n \geq 2$, f es continua en $\mathbb{R}^2$

b) (1 *punto*) Estudia, en función de los valores de n, la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
Solución: Para $n = 1$ ya sabemos, por el apartado anterior, que f no es diferenciable en $(0,0)$. Sea $n \geq 2$, vamos a calcular $\nabla f(0,0)$:

$$f_x(0,0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \forall n \geq 2$$
$$f_y(0,0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \forall n \geq 2\,,$$

con lo que $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Sea

$$g(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

debemos estudiar para qué valores de n se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0\,.$$

Tomamos $y = mx$, familia de rectas que pasan por $(0,0)$:

$$g(x,mx) = \frac{m^{n+1}}{(1+m^4)\sqrt{1+m^2}}\frac{x}{|x|}x^{2n-4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \not\to 0 & n=2 \\ 0 \quad \forall m & n \geq 3\,, \end{cases}$$

por lo que, para que f sea diferenciable en $(0,0)$ es necesario $n \geq 3$. Para este caso, vamos a intentar aplicar la regla del sándwich a g:

$$0 \leq \mid g(x,y) - 0 \mid = \frac{|x|^n |y|^{n+1}}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{x^4+y^4}}\,|x|^{n-2}\sqrt{\frac{y^4}{x^4+y^4}}\,\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,|y|^{n-2} \leq |x|^{n-2}|y|^{n-2} \underset{(x,y)\to(0.0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

por lo que f es diferenciable en $(0,0)$ para este caso. Resumiendo

- Para $n = 1, 2$, f no es diferenciable en (0.0).
- Para $n \geq 3$, f es diferenciable en (0.0).

c) (1 *punto*) Para el caso $n = 2$, calcula la derivada direccional de f en el punto $(2,2)$ en la dirección señalada por el vector $(1,1)$.

Solución: Debemos tomar como vector $\boldsymbol{u}$ el vector $(1,1)$, normalizado, es decir $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Como f es diferenciable en el punto $(2,2)$ para cualquier valor de n, tenemos que, en particular, para $n = 2$, $D_{\boldsymbol{u}}f(2,2) = \nabla f(2,2)\cdot\boldsymbol{u}$. Además, $\nabla f(2,2) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, y con eso, $D_{\boldsymbol{u}}f(2,2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3. (2 *puntos*) Sea D el recinto de $\mathbb{R}^2$ delimitado por las curvas $x^2 - y^2 = 1$, $y = -1$, $y = 1$ (puedes ver un dibujo de D en la figura 3 y sea $f(x,y) = x^2 + 12xy + 12y^2$. Calcula los extremos absolutos de f en D.

Solución: D es un recinto cerrado y acotado y f es una función continua en D por lo que, por aplicación directa del teorema de Weiersstrass, concluimos que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en D. Además, $f \in C^2(D)$ y $D = \bar{D} = D^o \cup \partial D$ y esta unión es disjunta. Con esto, vamos a ir localizando puntos candidatos a extremo.

Vamos por D^o: la ecuación $\nabla f(x,y) = (0,0)$ tiene como única solución $(0,0)$, como este punto está en D^o de aquí tenemos un primer punto candidato $P_1 = (0,0)$.

Vamos ahora por ∂D que separamos en cuatro casos:

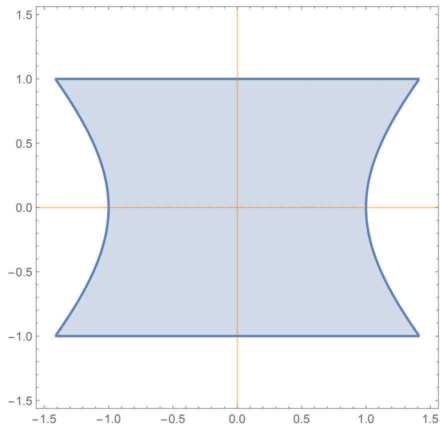

Figura 3: Recinto D correspondiente a la pregunta 3

- los puntos de corte de la hipérbola y las rectas, son directamente candidatos: $Q_1 = \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, $Q_2 = \left(-\sqrt{2}, 1\right)$, $Q_3 = \left(\sqrt{2}, -1\right)$, $Q_4 = \left(\sqrt{2}, 1\right)$.
- Llamamos Γ_1 a la porción de la recta $y = -1$ que está en D, exceptuando los puntos de corte: no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta considerar $h_1(x) := f(x, -1)$ con $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. La ecuación $h_1'(x) = 0$ tiene como única solución 6 que no está en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, así que de aquí no sacamos candidatos.
- Llamamos Γ_2 a la porción de la recta $y = 1$ que está en D, exceptuando los puntos de corte: no es necesario plantear un problema de multiplicadores de Lagrange, basta considerar $h_2(x) := f(x, 1)$ con $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. La ecuación $h_2'(x) = 0$ tiene como única solución -6 que no está en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, así que de aquí no sacamos candidatos.
- Llamamos Γ_3 a la porción de la hipérbola que está en D, exceptuando los puntos de corte. Sea $g(x, y) := x^2 - y^2 - 1$, la ecuación $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ tiene como única solución $(0, 0)$ que no está en Γ_3, luego de aquí no sacamos candidatos. Planteamos ahora un problema de multiplicadores de Lagrange: sea $L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$. La ecuación $\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ nos da como pre-candidatos los puntos $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; ambos puntos están en Γ_3, por lo que de aquí sacamos dos puntos candidatos: $R_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y $R_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Evaluando f en los 7 puntos candidatos se concluye con que el mínimo se alcanza en Q_2 y en Q_3 y el máximo se alcanza en Q_1 y en Q_4.

4. (1 *punto*) Resuelve la ecuación diferencial

$$y'(t) - t^2 y(t) = -t^2 y(t)^4$$

usando el cambio de variable $u(t) = y(t)^{-3}$.

Solución: Con el cambio de variable que se indica llegamos a la ecuación transformada $u' + 3t^2 u = 3t^3$ que es lineal de primer orden. Para resolverla, consideramos $\mu(t) = t^3$ (una primitiva de $3t^2$) y la solución es:

$$u(t) = e^{-t^3}\left(\int e^{t^3} 3t^2 dt\right) = 1 + Ce^{-t^3}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + Ce^{-t^3}}}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

5. (2 *puntos*) Resuelve la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = te^{-2t}.$$

Solución: Tenemos una ecuación diferencial de orden 2, lineal, de coeficientes constantes y no homogénea. Calculamos dos soluciones independientes de la ecuación homogénea asociada, resolviendo $r^2 + 4r + 4 = 0$; de aquí sacamos $y_{1h} = e^{-2t}$ e $y_{2h} = te^{-2t}$. Vamos a calcular ahora una solución particular, usaremos el método de variación de los parámetros, que nos proporcionará una solución de la forma $y_p = u_1(t)y_{1h} + u_2(t)y_{2h}$. Tenemos que $W(t) = e^{-4t}$ y con ello

$$u_1' = -t \qquad\qquad u_1 = -\frac{1}{2}t^2$$

$$u_2' = 1, \qquad\qquad u_2 = t$$

Con esto tenemos que una solución particular es $y_p = \dfrac{1}{2}t^2e^{-2t}$ y la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-2t} + C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$