ESTADÍSTICA

V.A. continua parte II

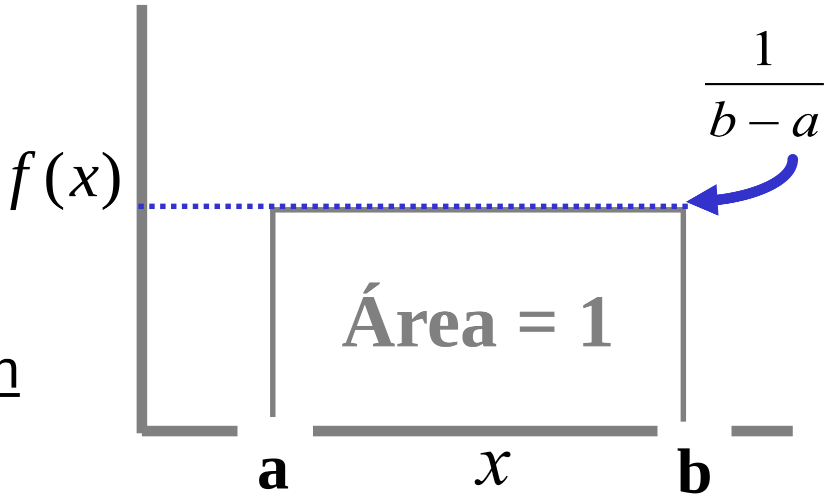
Índice

- Uniforme
- Exponencial
- Normal

Uniforme U(a,b)

<u>Función de densidad de probabilidad:</u>

$$f(x) = U(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

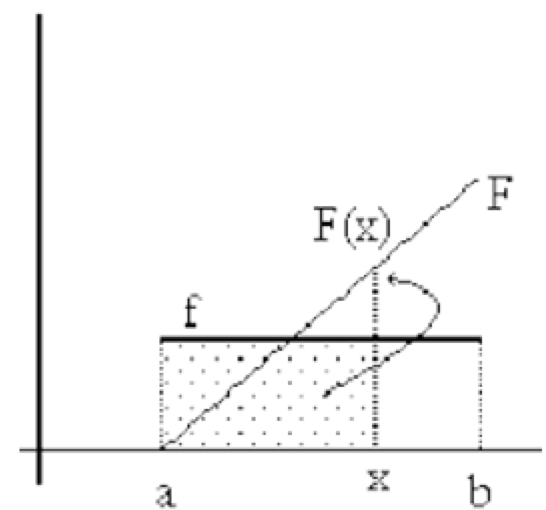


Recordemos que la <u>función de distribución</u> se define como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in \Re$$

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Igualmente, partiendo de la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

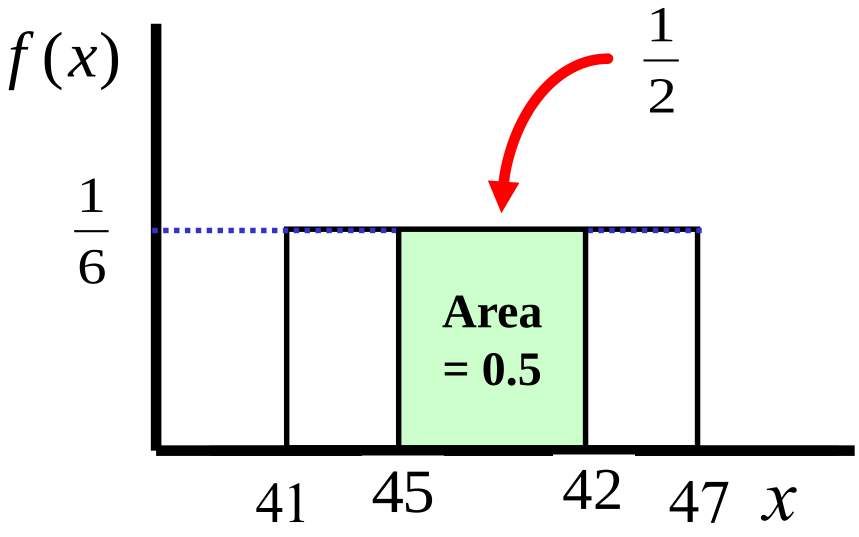
Podemos calcular la función de densidad de probabilidad:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{47-41}=\dfrac{1}{6} & para\ \ 41 \le \mathrm{x} \le 47 \\ 0 & para \text{ el resto de valores} \end{cases}$

Calcula la probabilidad

$P(42 \le X \le 45)$



$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(42 \le X \le 45) = P(X < 45) - P(X < 42) =$$

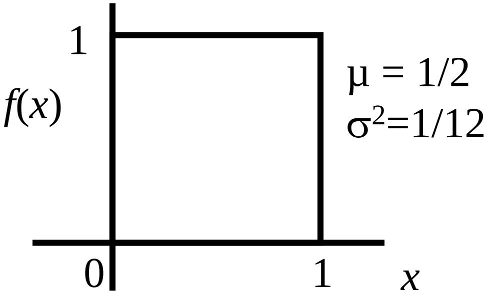
$$= F(45) - F(42) = \frac{45-41}{6} - \frac{42-41}{6} = \frac{1}{2}$$

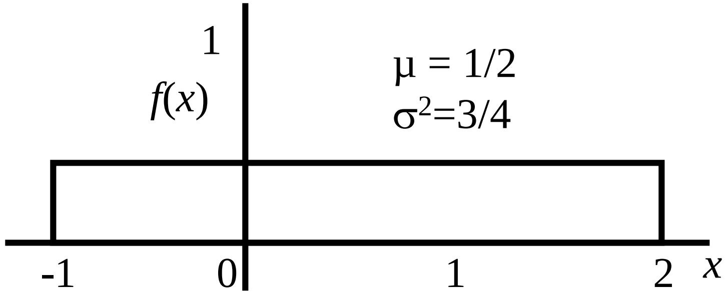
La media, la varianza y la desviación típica

$$\mu = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}\,;\ \ \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Ejemplo:





Nota: Observa que estas distribuciones tienen la misma media pero distinta varianza. Mayor varianza implica mayor dispersión alrededor de la media.

Ejercicio 104. Una variable aleatoria X se distribuye de forma uniforme en $(2,4)$. Se pide:

a). $P(X < 2{,}5)$

b). $P(X > 3{,}2)$

c). $P(2{,}2 < X < 3{,}5)$

d). $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 104. Sea $X \sim U(2,4)$ con

$$f(x) = \frac{1}{2} \qquad F_X = \frac{x-2}{2} \qquad 2 < x < 4$$

a). $P(X < 2{,}5) = F_X(2{,}5) = 0{,}25$

b). $P(X > 3{,}2) = 1 - F_X(3{,}2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

c). $P(2{,}2 < X < 3{,}5) = F_X(3{,}5) - F_X(2{,}2) = 0{,}75 - 0{,}1 = 0{,}65$

d). $E[X] = 3$ y $Var[X] = \frac{4}{12}$

Ejercicio 106. Una empresa tiene una función de costes que viene dada por $C = 100{,}000 + 2X$. En el mercado vende cada unidad a 5 euros y la demanda X del citado artículo tiene una distribución uniforme entre 25000 y 30000 unidades. ¿Cuál será el beneficio esperado?

Ejercicio 106. Sea $X \sim U(25000, 30000)$ con

$$F_X = \frac{x - 25000}{5000} \qquad 25000 < x < 30000$$

como los beneficios $B = V - C$ (Beneficio = Ventas – Costes)

$$E[B] = E[5 \cdot X - 100000 - 2 \cdot X) = 3 \cdot E[X] - 100000 = -17500$$

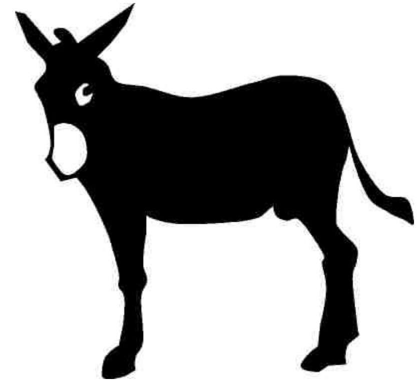
$$E[X] = \frac{25000 + 30000}{2} = 27500$$

Distribución exponencial Exp (λ)

En un proceso de Poisson donde se repite sucesivamente un experimento a intervalos de tiempo iguales, el **tiempo que transcurre** entre la ocurrencia de dos "sucesos raros" consecutivos sigue un modelo probabilístico exponencial.

Describe procesos en los que nos interesa saber el **tiempo hasta que ocurre un determinado evento**, sabiendo que el tiempo que puede transcurrir desde cualquier instante dado t, hasta que ello ocurra en un instante t_f, no depende del tiempo transcurrido anteriormente.

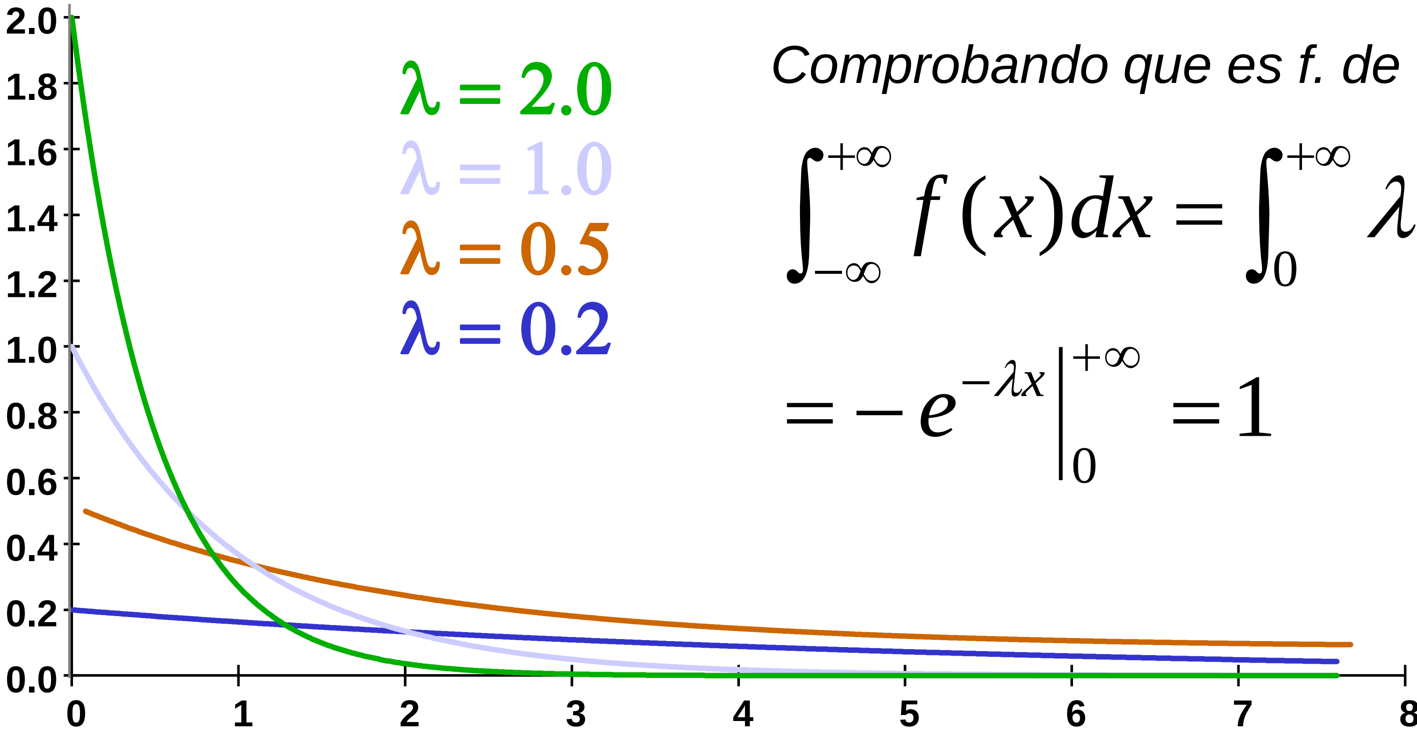
Ejemplos de distribución exponencial son: el tiempo que transcurre entre que sufrimos dos veces una herida importante (o una coz de burro, recuerda...)



También el tiempo que tarda una **partícula radiactiva** en **desintegrarse** (datación de fósiles o cualquier materia orgánica mediante la técnica del carbono 14) o el **tiempo** que puede transcurrir en un servicio de **urgencias**, para la llegada de un paciente.

Función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para} \quad x \geq 0,\ \lambda > 0$$



Comprobando que es f. de densidad:

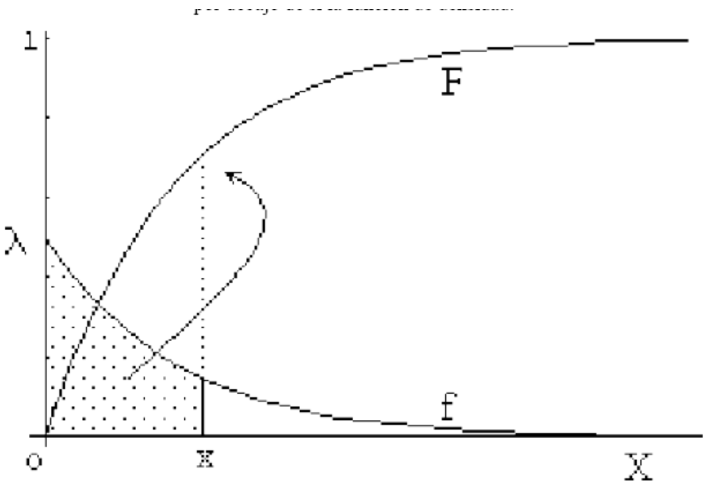
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

Función de distribución:

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



Vida media $\longrightarrow$ $\mu = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{\lambda}$

Varianza $\longrightarrow$ $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$ $\longrightarrow$ Desviación Típica: $\sigma = \dfrac{1}{\lambda}$

Ejemplo:

Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años?

Solución: Sea T la variable aleatoria que mide la duración de un marcapasos en una persona. Tenemos que

$$T \rightsquigarrow \mathbf{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{16}\right) \iff f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{si} \quad \forall t \geq 0$$
$$\iff F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Entonces

$$\mathcal{P}[T \leq 20] = \int_0^{20} f(t)\,dt = F(20) = 1 - e^{-\frac{20}{16}} = 0,7135$$

Propiedad de ‘falta de memoria’

- Se dice que la distribución exponencial no tiene memoria. Esto es

$$P(X \geq s+t \mid X \geq t) = P(X \geq s) \quad \text{para todo } s, t \geq 0.$$

- Interpretación: Supongamos que queremos determinar la probabilidad de que llegue un cliente en la próxima media hora. Esta propiedad nos dice que nos da igual conocer cuando llegó el último cliente o calcular directamente cuál es la prob. De que llegue en los prox. 30 min SIN tener en cuenta el pasado.

Ejemplo:

El tiempo en que un producto está de moda en su mercado se distribuye como una exponencial de parámetro 8 meses. Si sabemos que ya lleva 5 de moda, ¿cuál es la probabilidad de que dure 10 más?

X: tiempo que el producto está de moda ~ Exp (λ=8)

$$P(X \geq 10+5 \mid X \geq 5) = P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (1 - e^{-10*8}) = e^{-10*8}$$

Demostración: propiedad de 'falta de memoria'

Ejercicio 108. Comprobar que si T es exponencial de parámetro α se cumple la propiedad

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$$

Ejercicio 108. Sea $T \sim Exp(\alpha)$ con

$$f(t) = \alpha\, e^{-\alpha\, t} \qquad F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\, t} \qquad 0 < t$$

$$\begin{aligned} P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t \cap T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} \\ &= \frac{e^{-\alpha\,(s+t)}}{e^{-\alpha\, s}} \\ &= e^{-\alpha\, t} = P(T > t) \end{aligned}$$

Relación entre la distribución de Poisson y la Exponencial

Entre las distribuciones de Poisson y Exponencial existen importantes relaciones.

- Distribución de Poisson: Sea Y una P(λ) que representa el número de llegadas en un intervalo de tiempo fijo. Recuerda que λ es la esperanza de esta distribución.
- Distribución exponencial: En este mismo problema consideramos ahora el tiempo que transcurre entre dos llegadas. Sea X la v.a que representa dicho tiempo. Se puede demostrar que entonces X se distrubuye como una Exponencial(λ).

Los clientes llegan a un mostrador de manera estable e independiente, siendo el intervalo transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos una variable aleatoria exponencial. Por término medio llega un cliente por minuto.

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que el primer cliente llegue antes de 2 minutos?*

Si N =número de clientes en 2 minutos, $N \sim P(\lambda = 2)$,

$$\Pr(N > 0) = 1 - \Pr(N = 0) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-2} = \mathbf{0.8647}$$

(b) *¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre dos clientes consecutivos sea superior a un minuto?*

Si X =intervalo entre dos clientes consecutivos, $X \sim Exp(\lambda = 1)$,

$$\Pr(X > 1) = \int_1^\infty e^{-x} dx = 1 - \int_0^1 e^{-x} dx = e^{-1} = .367\,88.$$

(c) *El mostrador se mantiene abierto durante 12 horas al día. Sin embargo, el negocio sólo es rentable si es visitado por al menos 800 personas al día. ¿Cuál es la probabilidad de que se gane dinero en un día en particular?*

Si M =número de visitas en un día (12 horas=720minutos)$\sim P(\lambda = 720)$,

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{rentable}) &= \Pr(M \geq 800) = \Pr\left(\frac{M - 720}{\sqrt{720}} \geq \frac{800 - 720}{\sqrt{720}}\right) \\
&\approx \Pr\left(Z \geq \frac{800 - 720}{\sqrt{720}}\right) = \Pr(Z \geq 2.981\,4) \\
&= 1 - \Phi(2.981\,4) \\
&= 1 - 0.9986 = 0.0014,
\end{aligned}$$

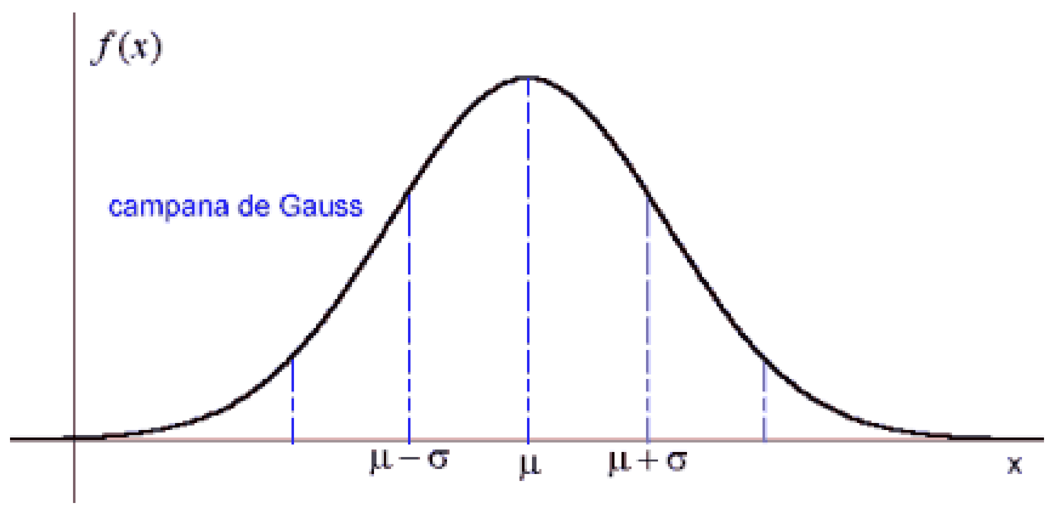
donde $Z \sim N(0, 1)$.

Distribución Normal o gaussiana

Sin duda, la distribución continua de probabilidad más importante, por la frecuencia con que se encuentra y por sus aplicaciones teóricas, es la **distribución normal, gaussiana o de Laplace-Gauss.**

Fue descubierta y publicada por primera vez en 1733 por De Moivre. A la misma llegaron, de forma independiente, Laplace (1812) y Gauss (1809), en relación con la teoría de los errores de observación astronómica y física.

Está caracterizada por dos parámetros: la media, μ y la desviación típica, σ.



Su <u>función de densidad</u> es:

$$N(\mu,\sigma) = P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En particular:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv = 1$$

i.e, se comprueba que es f. de densidad

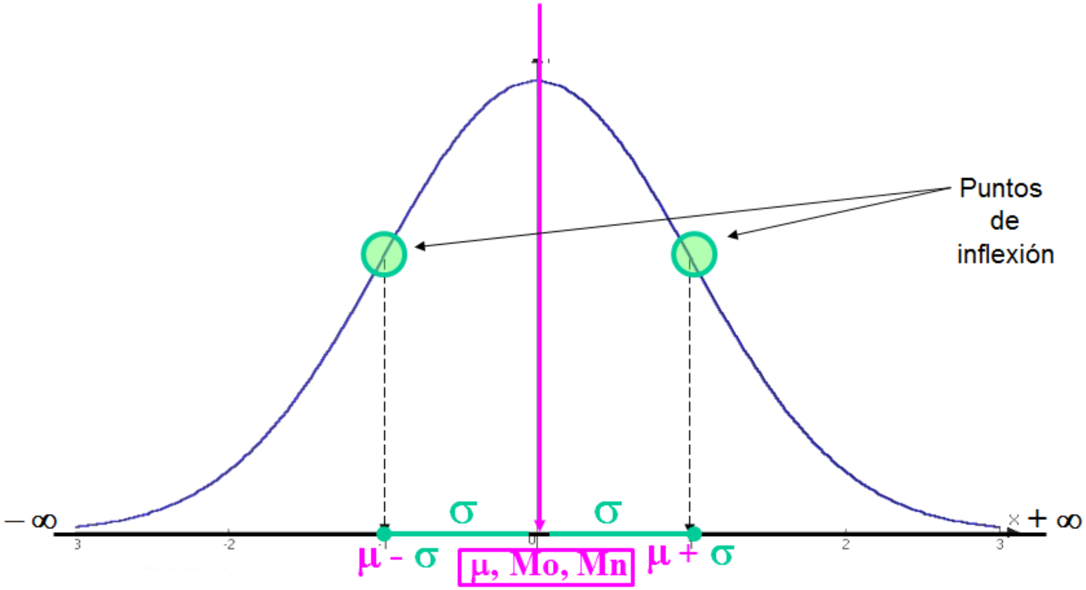
La <u>función de distribución</u> $F(x)$ se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv}$$

¡No podemos calcular analíticamente el valor de la integral!
Tabularemos sus valores numéricos...

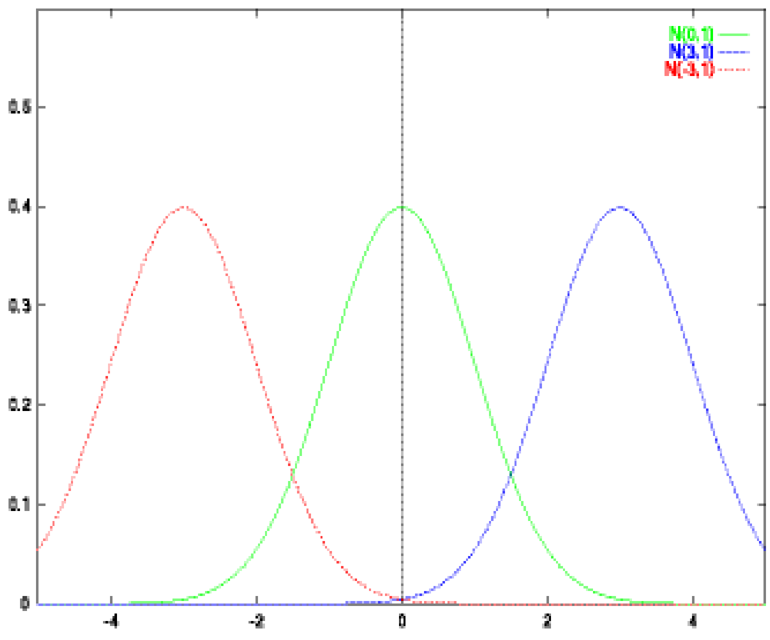
Características de la distribución Normal:

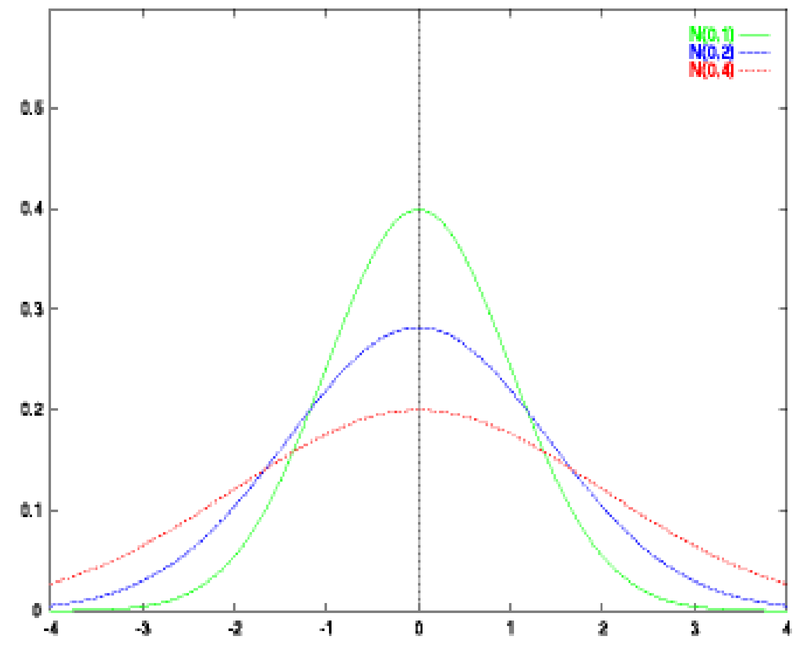
- Tiene forma de campana, es asintótica al eje de las abscisas (para $x = \pm\infty$)
- Simétrica con respecto a la media (μ) donde coinciden la mediana(Mn) y la moda (Mo).
- Los puntos de inflexión tienen como abscisas los valores $\mu \pm \sigma$.



Interpretación geométrica N(μ,σ)

- La curva normal adopta un número infinito de formas, determinadas por sus parámetros μ y σ.
- Podemos interpretar la media como un factor de traslación.
- Y la desviación típica como un factor de escala, grado de dispersión,…





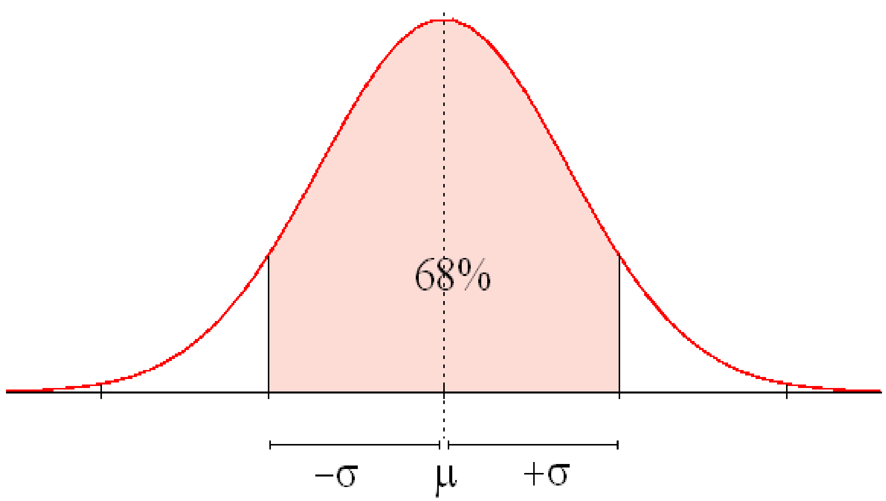
Interpretación Probabilística N(μ,σ)

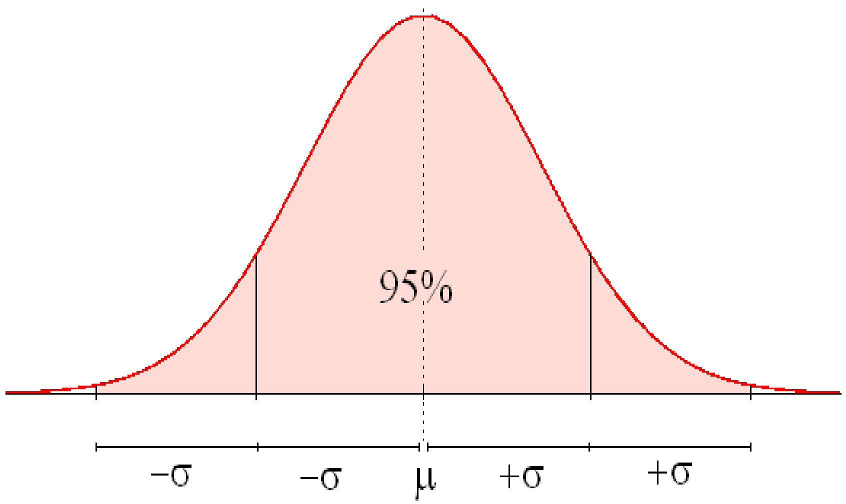
Si tomamos intervalos centrados en μ, y cuyos extremos están…

–a distancia **σ**, ➔ tenemos probabilidad **68%**

–a distancia **2 σ**, ➔ tenemos probabilidad **95%**

–a distancia **2’5 σ** ➔ tenemos probabilidad **99%**





Entre la media y una desviación típica tenemos siempre la misma probabilidad, aproximadamente el 68%. Entre la media y dos desviaciones típicas aprox. 95%

Distribucion normal Tipificada

Dado que tanto μ como σ pueden asumir **infinitos valores,** es impracticable tabular las probabilidades para todas las posibles distribuciones normales. Para solucionarlo, se utiliza la **distribución normal reducida o TIPIFICADA.**

Se define una variable Z $= \boxed{\dfrac{x - \mu}{\sigma}}$

Es una traslación,
y un cambio de escala
de la variable original

La nueva variable **z** se distribuye como una **NORMAL** con media μ **= 0** y desviación típica σ **= 1**

* Función de distribución F(Z)

Tabularemos los valores numéricos **de Z**

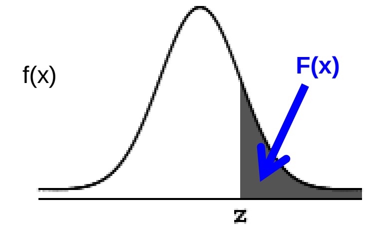


Tabla A.3: Distribución Normal Estándar: $P(\mathrm{N}(0,1) \geq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251				
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056				
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885				
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735				

Los valores negativos de z NO están tabulados, ya que la distribución es simétrica

Ejemplo 1:

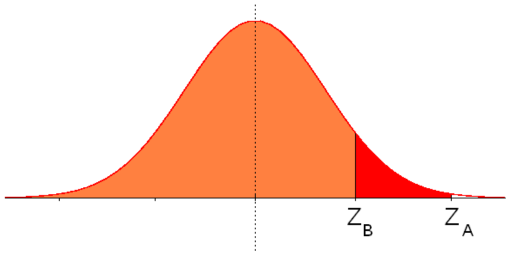
Se quiere dar una beca a uno de dos estudiantes de sistemas educativos diferentes y se asignará al que tenga mejor expediente académico:

- El estudiante A tiene una calificación de 8 en un sistema donde la calificación de los alumnos se comporta como N(6,1).
- El estudiante B tiene una calificación de 80 en un sistema donde la calificación de los alumnos se comporta como N(70,10).

No podemos comparar directamente 8 puntos de A frente a los 80 de B, pero como ambas poblaciones se comportan de modo normal, podemos tipificar y observar las puntuaciones sobre una distribución de referencia N(0,1).

$$z_A = \frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A} = \frac{8-6}{1} = 2$$

$$z_B = \frac{x_B - \mu_B}{\sigma_B} = \frac{80-70}{10} = 1$$



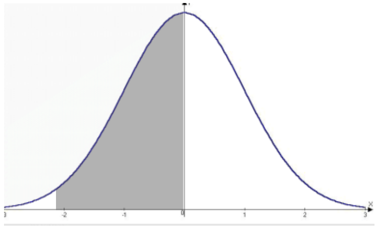
Como $z_A > z_B$, podemos decir que el estudiante A ha superado un mayor porcentaje de compañeros del mismo sistema que el porcentaje de compañeros que ha superado B con sus calificaciones respectivas. Por tanto, el estudiante A es mejor candidato para la beca.

Ejemplo 2:

¿Cuál es la probabilidad de que un valor de Z esté entre -1.03 y 0?

Cómo la curva es simétrica

$P(-1.03 < Z < 0) = P(0 < Z < 1.03)$



$P(0 < Z < 1.03) = P(Z < 1.03) – P(Z < 0) =$ (usando la tabla dada)

$1 - P(Z > 1.03) – 0.5 = 1 – 0.1515 – 0.5 = 0.3485$

Ejemplo 3:

Sea una variable distribuida normalmente con media $\mu = 4$ y desviación típica $\sigma = 1.5$.

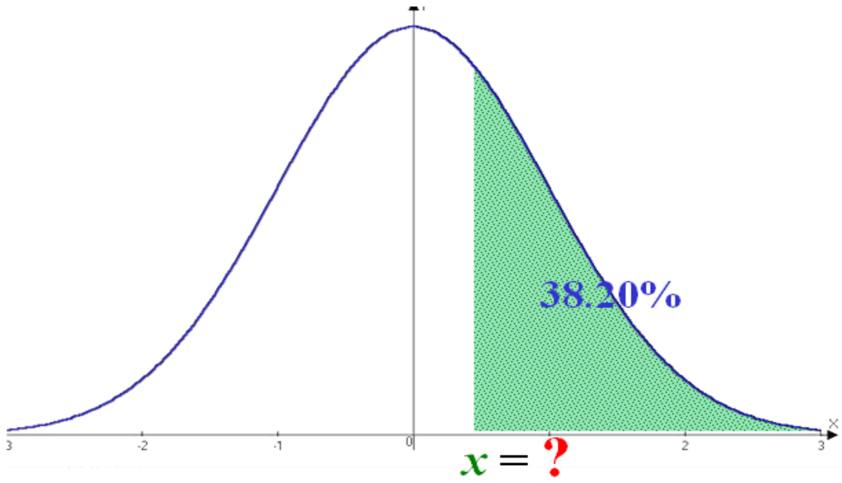
¿Cuál es la probabilidad de encontrar un valor de X mayor que 6?

Transformar x en un valor de z: **$z = (6 - 4)/1.5 = 1.33$**

$P(X > 6) = P(Z > 1.33)$ = (usando la tabla) = 0.0918

¿Cómo hallar un valor de *x*, dada la probabilidad?

Ejemplo: Sea una variable distribuida normalmente con $\mu = 4$ y $\sigma = 2$. Hallar el valor de x que deja por encima de él un 38.20% (0.3820).



Se busca en la tabla el valor más aproximado conforme a su área <u>con su signo</u>: **0.3**

Se debe desestandarizar ($z = \frac{x - \mu}{\sigma}$)

$$x = z\sigma + \mu = 0.3*2 + 4 = 4.60$$

Ejemplo:

Los diseñadores de un nuevo tipo de cabina de avión quieren colocar un interruptor de forma que la mayoría de los pilotos puedan alcanzarlo sin tener que cambiar de posición. Se sabe que la distribución de la distancia máxima (en cms) que pueden alcanzar los pilotos sin moverse (medida) desde el respaldo del asiento es $N(125, 10)$

a) *Si se pone el interruptor a 120cm del respaldo del asiento, ¿qué proporción de pilotos no podrá alcanzarlo sin moverse del asiento?*

La proporción viene dada por $\Pr(X < 120)$ donde $X \sim N(125, 10)$:

$$\begin{aligned}\Pr(X < 120) &= \Pr\left(Z < \frac{120-125}{10}\right) = \Pr(Z < -0{,}5) \\ &= 1 - \Pr(Z < 0{,}5) = 0{,}3085\end{aligned}$$

El 30% de los pilotos tiene una distancia máxima de alcance inferior a 120cm, luego esos no llegan al interruptor.

b) *¿Cuál es la distancia máxima desde el respaldo a la que se podría poner el interruptor si queremos que el 95 % de los pilotos pueda alcanzarlo sin moverse?*

Se busca la distancia d que cumple con

$$0{,}95 = \Pr(X > d) = \Pr\left(Z > \frac{d-125}{10}\right)$$

de donde sabemos que

$$\frac{d-125}{10} = -1{,}96$$

y por tanto

$$d = 125 - 19{,}6 = 104{,}6.$$

En una distancia de como mucho 104.6 cm el 95% de los pilotos podrán alcanzar el interruptor, pues son capaces de alcanzar 104.6 cm o más.

Ejercicio 119. Se sabe que el número X de personas que entran diariamente en unos grandes almacenes se distribuye normalmente. Si hay una probabilidad 0,58 de que entren menos de 75 clientes y una probabilidad 0,38 de que entren entre 75 y 80 clientes, determinar la media y la varianza de la variable X.

Ejercicio 119. Suponemos que X se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$. Tenemos:

$$P(X < 75) = 0{,}58, \qquad P(75 < X < 80) = 0{,}38$$

tipificando $Z = (X - \mu)/\sigma$ obtenemos

$$P(Z < \frac{75-\mu}{\sigma} = z_0) = 0{,}58$$

$$P(\frac{75-\mu}{\sigma} = z_0 < Z < \frac{80-\mu}{\sigma} = z_1) = 0{,}38$$

luego

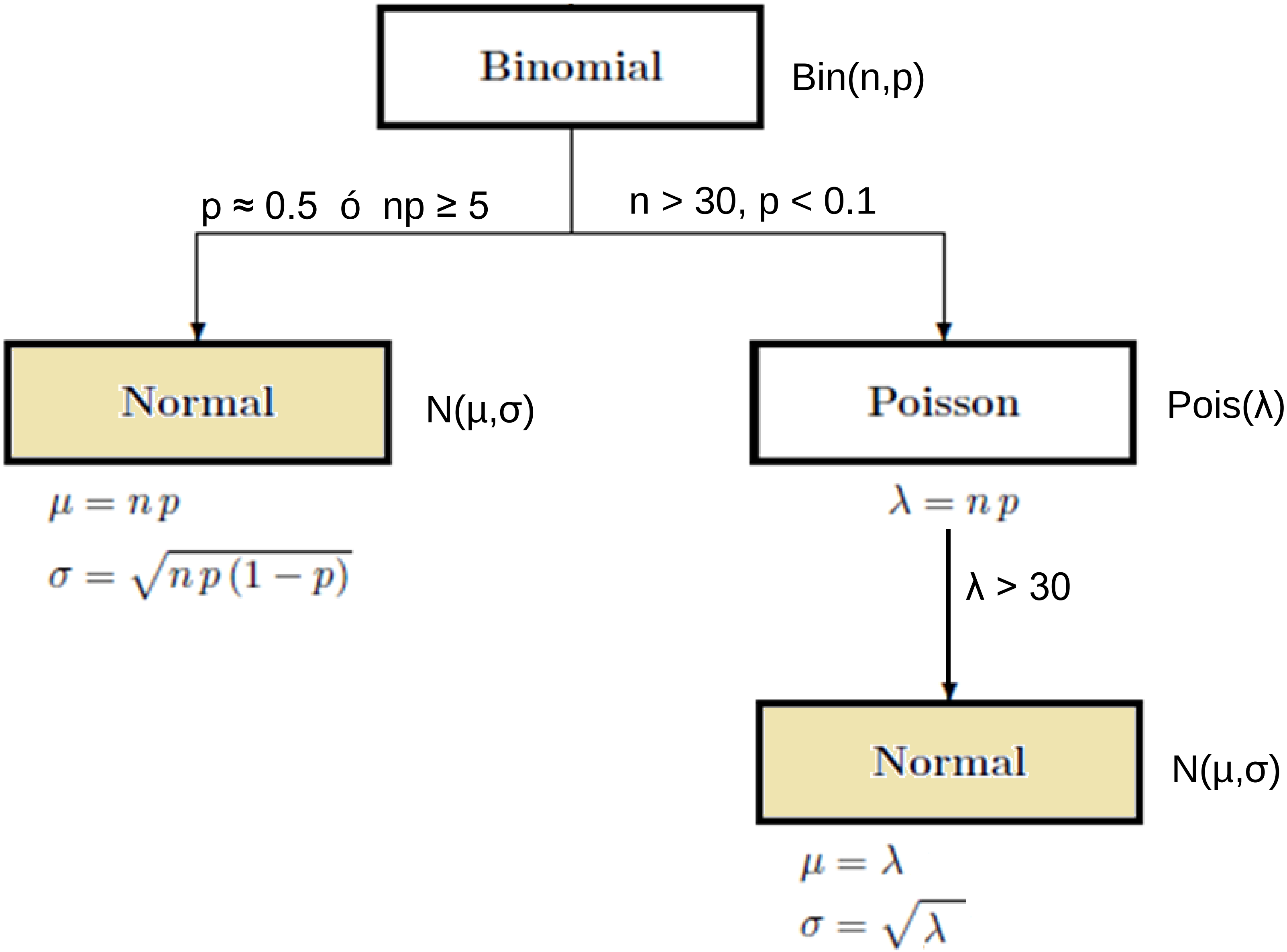
$$\Phi(z_0) = 0{,}58, \qquad \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = 0{,}38$$

de la primera igualdad de la tabla $N(0,1)$ obtenemos $z_0 = 0{,}20$, y de $\Phi(z_1) = 0{,}96$ obtenemos $z_1 = 1{,}75$. Resolviendo

$$\frac{75-\mu}{\sigma} = 0{,}2 \qquad \frac{80-\mu}{\sigma} = 1{,}75$$

obtenemos $\mu = 74{,}35$ y $\sigma = 3{,}22$.

Aproximaciones a la distribución Normal



Ejemplo:

En una empresa se ha visto que en un 10% de sus facturas se cometen errores y se desea calcular la probabilidad que de 100 facturas, 12 de ellas los contengan:

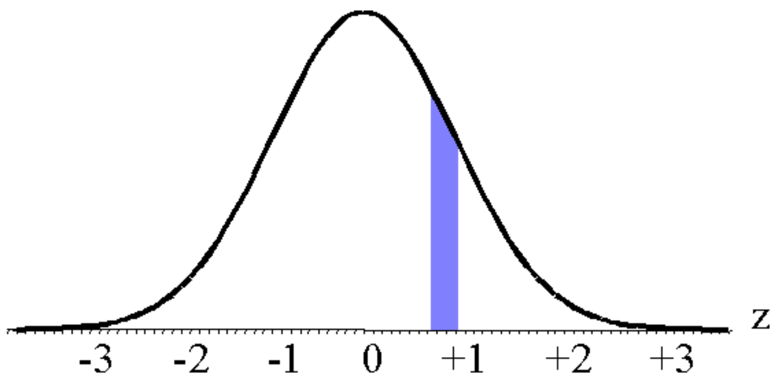
$$X \sim Bin(100{,}0.1)$$

$\boxed{np = 10 > 5}$ X ~ N(μ,σ)

$$\mu = 100(.10) = 10$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3$$

$$X \sim N(10{,}3)$$



P(X = 12) = $\binom{100}{12} 0.1^{12}\, 0.9^{88}$ = (calculadora en R) = **0.09879**

P(X = 12) ≈ P (11.5-10/3 < Z < 12.5-10/3) = P(0.5 < Z < 0.83) = P(Z < 0.83) – P(Z < 0.5) = (usando la tabla) = 1 – P(Z > 0.83) – 1 + P(Z > 0.5) = **-** 0.2033 + 0.3085 = **0.1052**

Ejercicio 124. Un individuo juega con probabilidad de ganar igual a 1/2 en cada juego. Si gana en un juego obtiene 5 euros y si pierde paga 5 euros. Durante una tarde juega 400 veces. ¿Con cuánto dinero debe acudir si quiere tener una probabilidad de 0,95 de hacer frente a sus posibles pérdidas?

Ejercicio 124. Sea C la cantidad que lleva en el bolsillo. Sea X el número de partidas ganadas de 400, de tipo $\mathrm{Bin}(400, 1/2)$. Sea B el beneficio $B = 5X - 5(400 - X) = 10X - 2000$. Hay que calcular C con la condición

$$P(B + C \geq 0) \geq 0{,}95$$

'beneficio' final + dinero inicial

Es decir

$$P(10X - 2000 + C \geq 0) = P\left(X \geq \frac{2000 - C}{10}\right) \geq 0{,}95$$

184 ⇨ C ≥ 160

Otro modo

Aproximando X por la distribución normal $N(200; \sigma = 10)$ se tiene

$$P\left(X \geq \frac{2000 - C}{10}\right) \geq 0{,}95$$

183.5 ⇨ **C ≥ 165**

$\boxed{\text{DISTRIBUCIÓN NORMAL}}$

- **Normal estándar**

$$X \equiv \mathrm{N}(\mu, \sigma) \quad \Longrightarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \equiv \mathrm{N}(0, 1)$$

- **Teorema de adición**

Sean $X_1 \equiv \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1), \ldots, X_n \equiv \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n)$, n *v.a. Normales independientes. Entonces, la nueva variable aleatoria* es

$$Y = b + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \equiv N\left(b + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2}\right)$$

- **Teorema central del límite**

Dadas n *v.a. independientes e idénticamente distribuidas,* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *tales que*

$$\mathrm{E}[X_k] = \mu < +\infty \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 < +\infty$$

Entonces, si n *es suficientemente grande,*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \approx \mathrm{N}\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} = \overline{X_n} \approx \mathrm{N}\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$$

TABLA RESUMEN

Distribución	F. de densidad	Esperanza	Varianza	Observaciones
Uniforme $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a} \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normal $N(\mu,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	Tipificar Z = N(0,1) Teorema de adición Teorema Central Limite
Exponencial $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Falta de memoria Relación con Poisson

<u>Definición</u>:

Uniforme: v.a. X considera la misma probabilidad para un intervalo de $\mathbb{R}$.
Normal: v.a. X más frecuente y que considera la campana de Gauss. Está caracterizada por dos parámetros: la media, μ y la desviación típica, σ y es simétrica respecto a la media.
Exponencial: v.a. X considera el tiempo entre dos *sucesos raros* consecutivos.