Tema 0

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Dedicaremos los primeros temas de la asignatura a estudiar desde diferentes puntos de vista los sistemas de ecuaciones lineales, qué son, cómo pueden expresarse en distintas notaciones, cómo podemos clasificarlos, etc. Haremos lo mismo con sus soluciones: qué son las soluciones de un sistema, qué tipo de conjuntos forman, en qué universo están estas soluciones, cómo podemos operar con ellas.

Por ejemplo, la ecuación $2x = 5$ es una ecuación **lineal** en una sola **incógnita**, x, porque en ella intervienen solamente un **coeficiente**, el 2 ,que multiplica a la incógnita x, y un término independiente, el 5. Una **solución** de la ecuación será cualquier número x^0 que, puesto en el lugar de la x, haga cierta la igualdad.

No es posible encontrar un número así en el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ni en el de los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Para encontrar una solución tenemos que ir al conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a,\, b\,\text{enteros},\, b \neq 0\}$, donde consideramos que las fracciones a/b y c/d representan un mismo número racional siempre que $ad = bc$. Es decir, como números racionales, $1/3 = 2/6$, por ejemplo. Los números racionales incluyen a los enteros, ya que cada número entero a representa lo mismo que la fracción $a/1$. Escribiremos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Observa que también $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ya que los enteros incluyen a los naturales.

Cuando trabajemos con ecuaciones, debemos saber en qué conjunto de números estamos considerando la ecuación porque buscaremos las soluciones en ese mismo conjunto. En nuestro ejemplo, 2 y 5 son enteros ($2,\, 5 \in \mathbb{Z}$), pero también 2 y 5 son racionales ($2,\, 5 \in \mathbb{Q}$).

Una **ecuación lineal sobre** $\mathbb{Q}$ es una expresión del tipo $ax = b$, donde el coeficiente a y el término independiente b son números racionales (a, $b \in \mathbb{Q}$). Una **solución** del sistema es cualquier número racional x^0 que verifique $ax^0 = b$.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones, si es que existen. Para resolver $2x = 5$, utilizamos una propiedad de la multiplicación en el conjunto $\mathbb{Q}$, que no se cumple en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros:

La existencia de un **inverso** del 2, $1/2 \in \mathbb{Q}$, por el que hemos multiplicado ambos lados de la ecuación:

$$2x = 5 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 5 \Longleftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Observa que cualquier número racional, $p/q \in \mathbb{Q}$ tiene inverso perteneciente a $\mathbb{Q}$, excepto el 0.

Ejercicio 0.0.1. Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones sobre $\mathbb{Q}$:

(i) $-3x = 2$

(ii) $0x = 0$

(iii) $0x = 3$

(iv) $ax = 0$ con $a \neq 0$

(v) $ax = 0$ con $a = 0$

(vi) $0x = b$ con $b \neq 0$

Una ecuación lineal sobre $\mathbb{Q}$ puede tener solución única, puede tener más de una solución (siempre pertenecientes a $\mathbb{Q}$) o puede no tener ninguna solución en $\mathbb{Q}$.

Los números racionales se pueden representar sobre una recta. Determinando en primer lugar el 0, a su derecha aparecen los racionales positivos y a la izquierda los negativos. Podemos observar que los números racionales no "llenan" toda la recta. Es decir, existen números que no son racionales, son los llamados números irracionales como π, $\sqrt{2}$, e, etc.

Los números que llenan la recta son los **números reales**.
Denotamos el conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$.

Los números racionales son también números reales, es decir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Además, las operaciones con números reales tienen tan buenas propiedades como las operaciones con números racionales. Si llamamos $\mathbb{K}$ a cualquiera de esos dos conjuntos de números ($\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$), se cumple que:

(I) La suma es una operación **interna** en $\mathbb{K}$: Si a, $b \in \mathbb{K}$, entonces $a + b \in \mathbb{K}$.

(II) La multiplicación o producto es una operación **interna** en $\mathbb{K}$: Si a, $b \in \mathbb{K}$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{K}$. Escribimos simplemente ab para indicar este producto.

Y, además, la suma en cada uno de esos conjuntos $\mathbb{K}$ es

- Conmutativa:, $a + b = b + a$.
- Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Tiene el 0 como elemento neutro ya que $0 + a = a$ y $a + 0 = a$ para cualquier a del conjunto.
- Existe un simétrico de cada a, el elemento $-a \in \mathbb{K}$, llamado **opuesto de** a que cumple $a + (-a) = 0$.

¿Podemos afirmar que el producto en cada uno de esos conjuntos $\mathbb{K}$ cumple también todas estas propiedades? Ten en cuenta que, en el caso de la multiplicación, el simétrico de un elemento $t \in \mathbb{K}$ sería otro elemento en $\mathbb{K}$ (denotado t^{-1} tal que $t \cdot t^{-1} = 1$ y $t^{-1} \cdot t = 1$. En caso de existir, ese elemento $t^{-1} \in \mathbb{K}$ se llama **inverso** de t.

Definición 0.0.2. Un **cuerpo** es un conjunto de números $\mathbb{K}$ con dos operaciones internas, suma y multiplicación, que verifican las propiedades conmutativa, asociativa y de existencia de elemento neutro (0 y 1 respectivamente). Además, para cada $t \in \mathbb{K}$, existe un elemento opuesto $-t \in \mathbb{K}$ y, para cada $t \in \mathbb{K}$, salvo para el 0, existe un elemento inverso $t^{-1} \in \mathbb{K}$. Por último, la multiplicación en $\mathbb{K}$ es distributiva respecto de la suma, es decir, $a(b + c) = ab + ac$ siempre que a, b, $c \in \mathbb{K}$.

A los números del cuerpo $\mathbb{K}$ les llamaremos **escalares**.

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es un cuerpo.
El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, es también un cuerpo.

Una **ecuación lineal sobre** $\mathbb{R}$ **o real** es una expresión del tipo $ax = b$, donde el coeficiente a y el término independiente b son números reales (a, $b \in \mathbb{R}$). Una **solución** del sistema es cualquier número real x^0 que verifique $ax^0 = b$.

Ejercicio 0.0.3. Resuelve la ecuación real $3x + 4 = -1 + x$, anotando la propiedad de la suma o la multiplicación en $\mathbb{R}$ que utilizas en cada paso.

En este curso, trabajaremos únicamente con ecuaciones lineales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que podrá ser tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$.

0.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Si nos dan una colección de ecuaciones como

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

observamos que aparecen dos incógnitas, x e y. Considerar esta colección de ecuaciones como un **sistema** significa que cualquier solución deberá satisfacer todas ellas. En este ejemplo, la solución es un par ordenado de números, $(x, y) = (1, 1)$ que hace ciertas **todas las igualdades**.

Definición 0.1.1. Un **sistema de ecuaciones lineales** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una colección de m ecuaciones, cada una de ellas con n incógnitas, $x_1, \dots, x_n$, dispuestas de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (*),$$

donde todos los a_{ij} son números del cuerpo $\mathbb{K}$ ya dados, que se denominan **coeficientes** del sistema, y los b_i son también números dados del cuerpo $\mathbb{K}$, denominados **términos independientes** del sistema.

Observemos que las posibles soluciones de un sistema del tipo (*) ya no son números. En el ejemplo con dos incógnitas ($n = 2$), las soluciones eran pares de elementos (x^0, y^0), donde x^0 es un número en el cuerpo $\mathbb{K}$ donde estemos trabajando e y^0 es un número de ese mismo cuerpo $\mathbb{K}$. El conjunto de todos los pares de esta forma se llama $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ó $\mathbb{K}^2$:

$$\mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{K},\ y \in \mathbb{K}\}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{K}^2 = \mathbb{Q}^2$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2$.

En un sistema con tres incógnitas ($n = 3$), las soluciones son ternas ordenadas de la forma (x^0, y^0, z^0), donde tanto x^0 como y^0 ó z^0 son números de un cuerpo $\mathbb{K}$. El conjunto de todas las ternas de esta forma se llama $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ó $\mathbb{K}^3$:

$$\mathbb{K}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{K},\ y \in \mathbb{K},\ z \in \mathbb{K}\}$$

Como antes, $\mathbb{K}$ es un cuerpo de números que puede ser $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{K}^3 = \mathbb{Q}^3$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{K}^3 = \mathbb{R}^3$.

Si tenemos un sistema lineal con n incógnitas, sus soluciones serán elementos del mismo tipo que los pares o las ternas, pero con n componentes en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 0.1.2. Consideremos cualquier cuerpo $\mathbb{K}$. Se llama $\mathbb{K}^n$ al producto cartesiano

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{K},\ x_2 \in \mathbb{K}, \ldots,\ x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Cada elemento de $\mathbb{K}^n$ se denomina n-**tupla**.

Llamamos **solución** de un sistema tipo (*) a cualquier n-tupla $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ en $\mathbb{K}^n$ que haga ciertas las m igualdades del sistema.

Escribiremos indistintamente las n-tuplas como filas (horizontales) o como columnas (verticales) salvo cuando tengamos que multiplicarlas por una matriz, donde será necesario colocarlas en una posición concreta.

Ejemplos 0.1.3. Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones sobre el cuerpo de los números reales:

$$(i) \left\{ \begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -y + z &= 1 \\ -x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned} \right.$$

En el primero, observamos que cualquier terna de números (x^0, y^0, z^0) que satisfaga las dos primeras ecuaciones, va a verificar también la tercera ya que esta tercera es el resultado de restar la segunda menos la primera.

El conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z) \mid z \,\text{es libre},\ y = z - 1,\ x = z + 1\},$$

o lo que es lo mismo, el conjunto de todos los elementos de la forma $(z+1, z-1, z)$, cuando z va recorriendo todos los valores reales posibles:

$$\{(z+1, z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Por último, observemos que en el sistema (iii) ninguna terna que satisfaga las dos primeras ecuaciones, verificará la tercera. Luego no hay ninguna solución del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ puede tener solución única, puede tener más de una solución o puede no tener ninguna solución.

Definición 0.1.4. Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible determinado** si tiene una única solución, **compatible indeterminado** si posee más de una solución e **incompatible** si no tiene ninguna solución.

0.2. Sistemas de ecuaciones en forma matricial

La ecuación $x - y = 0$ puede escribirse utilizando el **producto escalar** del par de coeficientes $(1, -1)$ por el par de incógnitas (x, y) escrito en forma de columna:

$$(1,\ -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ejercicio 0.2.1. Escribe de la misma forma la ecuación $x + y = 2$.

De esta forma, el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$, puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La operación $\cdot$ es el producto de una matriz por una columna, que se realiza multiplicando cada fila de la primera matriz por dicha columna. No es necesario escribir el símbolo $\cdot$ para indicar el producto.

En general, podemos multiplicar una n-tupla fila por una n-tupla columna de la siguiente forma:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

El resultado es un **número** del cuerpo $\mathbb{K}$. De ahí el nombre de producto escalar.

Un sistema de ecuaciones lineales (*) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de coeficientes** del sistema. Tiene m filas y n columnas y sus elementos están en el cuerpo $\mathbb{K}$. Su producto por la columna de incógnitas se realiza multiplicando cada fila por dicha columna.

Notación: Podemos escribir simplemente $A = (a_{ij})_{m\times n}$, indicando así el tamaño de la matriz, y cuál va a ser su elemento genérico, a_{ij}, que irá colocado en la fila i-ésima y la columna j-ésima. Se denomina **matriz de coeficientes** del sistema.

Notación: Escribiremos también el sistema en forma abreviada como $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Observemos que el producto de una matriz $m \times n$ por una matriz $n \times 1$ da como resultado una matriz $m \times 1$.

Nota 0.2.2. Con esta notación, cada solución del sistema es una n-tupla, es decir, una columna concreta $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, con todos los valores en $\mathbb{K}$, que hace cierta la igualdad $AX^0 = B$.

Definición 0.2.3. Un sistema de ecuaciones del tipo $AX = 0$ se denomina **sistema homogéneo**.

Proposición 0.2.4. *Un sistema de ecuaciones homogéneo siempre es compatible ya que la columna nula,* $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *siempre es solución del mismo. Obviamente, puede ser determinado o indeterminado, en el caso en que tenga más soluciones además de la nula.*

Ejercicio 0.2.5. Estudia de qué tipo es cada sistema de ecuaciones homogéneo siguiente sobre $\mathbb{R}$. Da sus soluciones como pares del conjunto $\mathbb{R}^2$:

(I) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

0.3. Producto de matrices

El producto que hemos definido para multiplicar una matriz A, $m \times n$, por una columna $n \times 1$, puede extenderse para multiplicar A por una matriz cualquiera B, $n \times p$, operando con B columna a columna. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Notación: Una matriz real cualquiera puede escribirse haciendo referencia a sus filas:

$$A = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right),$$

o haciendo referencia a sus columnas:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{array}\right),$$

Definición 0.3.1. Si A es una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y B es una matriz $n \times p$ sobre $\mathbb{K}$, se define la **matriz producto** de A por B como la matriz real $C = (c_{ij})$, $m \times p$, donde cada c_{ij} es el producto escalar de la fila A_i por la columna B^j:

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c} B^1 & B^2 & \cdots & B^p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{array}\right)$$

Podemos dividir una matriz en **bloques** trazando líneas horizontales y verticales sobre ella, como en los siguientes ejemplos:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 5 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Bloques cualesquiera **Bloques fila** **Bloques columna**

Si las matrices que queremos multiplicar se encuentran divididas en bloques cuyos tamaños *encajan*, podemos realizar su producto *por bloques* de la forma siguiente:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{array}\right)$$

donde cada bloque C_{ij} se obtiene multiplicando los bloques de A y los bloques de B como si fueran números:

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}.$$

El resultado es la misma matriz C que habíamos definido como producto de A y B.

Ejemplos 0.3.2. (I) El producto de cualquier matriz A por una columna de números del cuerpo $\mathbb{K}$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A^1 & A^2 & \cdots & A_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n.$$

(II) El producto de una fila de números del cuerpo $\mathbb{K}$ por cualquier matriz A:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right) = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m.$$

(III) Para hacer el producto de una matriz A, $m \times n$, por una matriz B, $n \times p$, podemos escribir $B = (B^1 | \cdots | B^p)$, donde $B^1, \cdots, B^p$ son las columnas de B. Entonces

$$AB = A(B^1 | \cdots | B^p) = (AB^1 | \cdots | AB^p).$$

(IV) De la misma forma, podemos escribir

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & B & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline A_m B \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de matrices

(I) El producto de matrices es asociativo, es decir, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ siempre que los tamaños de las matrices "encajen", es decir, A sea una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y C sea una matriz $p \times r$.

(II) La **matriz identidad**

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica que $AI_n = A$ para cualquier matriz A, $m \times n$. También se cumple que $I_m A = A$.

(III) Si consideramos la suma entre matrices de un mismo tamaño, que se realiza elemento a elemento,

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n},$$

entonces el producto de matrices es distributivo respecto a la suma de matrices:

$$(A + B)C = AC + BC \text{ y también } A(C + D) = AC + AD$$

cuando C y D son matrices $n \times p$ sobre $\mathbb{K}$.

(IV) Si consideramos la multiplicación de una matriz por un número t del cuerpo $\mathbb{K}$ dada por:

$$tA = t(a_{ij})_{m\times n} = (ta_{ij})_{m\times n},$$

entonces se cumple que $t(AB) = (tA)B = A(tB)$, es decir, los escalares se mueven libremente entre las matrices que se están multiplicando.

Nota 0.3.3. No es cierto, en general, que $AB = AC$ implique $B = C$, ni siquiera cuando las matrices son cuadradas ($n \times n$). Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces AB da el mismo resultado que AC y evidentemente $B \neq C$.

Si existe una inversa de la matriz A, tal como se define a continuación, la cosa cambia.

Definición 0.3.4. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que A es **regular** o **invertible** si existe alguna matriz real $n \times n$, que llamaremos A^{-1}, que cumple

$$\left\{ \begin{array}{l} AA^{-1} = I_n \\ A^{-1}A = I_n \end{array} \right. \text{ y}$$

Se dice en ese caso que A^{-1} es la **inversa** de A.

Ejemplo 0.3.5. Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir, $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Nota 0.3.6. Supongamos que una matriz cuadrada A tuviera dos inversas, A^{-1} y $\hat{A}$. Comprueba que estas deben ser una misma matriz.

Observaciones 0.3.7.

(I) El producto definido entre matrices no es conmutativo. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Si a pesar de eso, encontramos matrices concretas A y B que cumplan $AB = BA$, diremos que esas matrices concretas **conmutan**.

(II) Algunas matrices cuadradas no tienen inversa. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ multiplicada por cualquier matriz cuadrada B da como resultado $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que nunca será I_2.

(III) Si A y B son matrices $n \times n$ regulares (que tienen inversa), entonces AB también será regular ya que la matriz $B^{-1}A^{-1}$ nos sirve como inversa de AB:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

De forma análoga, se comprueba que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

(IV) Si A es una matriz regular, entonces A^{-1} es también regular ya que A nos sirve como inversa de A^{-1}:

$$A^{-1}A = I_n \text{ y } AA^{-1} = I_n \Longrightarrow A \text{ es la inversa de } A^{-1}$$

(V) Si A es regular, entonces $AB = AC \Longrightarrow B = C$ ya que podemos multiplicar los dos lados de la igualdad $AB = AC$ (a izquierda) por la matriz A^{-1} y llegar a $B = C$.

(VI) Como caso particular, si A es regular, se cumple que $AB = 0 \Longrightarrow B = 0$.

0.4. Sistemas de ecuaciones equivalentes

Con el fin de resolver un sistema de ecuaciones, o de decidir que no tiene solución, conviene transformarlo en un sistema más sencillo. En cada transformación tenemos que asegurarnos de que ni perdemos ni ganamos soluciones.

Definición 0.4.1. Decimos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Esto incluye también el caso en que ninguno de los dos tiene solución.

Transformaciones que proporcionan un sistema equivalente a uno dado:

Tipo I: Permutar las ecuaciones entre sí.

Por ejemplo, transformar el sistema $\left\{ \begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right.$ en $\left\{ \begin{aligned} x + y &= 1 \\ -3x + y &= 0 \end{aligned} \right.$.

Tipo II: Sustituir una de las ecuaciones por "ella misma más un múltiplo de otra". Por ejemplo, sustituir la segunda ecuación E_2 del sistema

$$\left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ -3x+y&=0\end{aligned}\right.$$

por E_2+3E_1, para obtener

$$\left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ 4y&=3\end{aligned}\right.$$

¿Qué pasa si sustituimos una de ellas, por ejemplo E_2 por E_2+0E_1?

Tipo III: Multiplicar una de las ecuaciones por un número **no nulo** del cuerpo $\mathbb{K}$ en el que estemos trabajando. Por ejemplo, multiplicar la segunda ecuación del sistema $\left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ 4y&=3\end{aligned}\right.$ por $1/4$, para dar el sistema $\left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ y&=3/4\end{aligned}\right.$

¿Qué pasa si multiplicamos una de ellas, por ejemplo E_2 por 0?

> Las transformaciones de los tipos I, II y III descritas arriba se denominan **transformaciones elementales de un sistema de ecuaciones lineales**

Demostraremos más adelante que ninguna de estas transformaciones altera el conjunto de soluciones del sistema. Nuestro objetivo será utilizar estas transformaciones para obtener un sistema de ecuaciones más sencillo de resolver, pero con las mismas soluciones que el de partida.

Ahora bien, si consideremos cualquier sistema de ecuaciones lineales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ en forma matricial, $AX=B$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

es fácil observar que las transformaciones elementales pueden aplicarse simplemente sobre los coeficientes y los términos independientes del sistema, lo que se denomina **matriz ampliada del sistema**,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Las transformaciones elementales que realicemos sobre esta matriz irán encaminadas a conseguir que la matriz quede **escalonada**, lo que facilitará la resolución del sistema de ecuaciones de partida.

0.5. Escalonamiento de matrices

Las matrices siguientes son matrices **escalonadas**:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices siguientes no lo son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 0.5.1. Transfórmalas, mediante sucesivas transformaciones elementales, en matrices escalonadas.

Definición 0.5.2. Se dice que una matriz está **escalonada** si el número de ceros iniciales en cada fila no nula es estrictamente mayor que el de la fila anterior. Por tanto, si hay filas totalmente nulas, éstas deben ocupar las últimas posiciones.

Nuestro objetivo es el de transformar la matriz ampliada $(A|B)$ de cualquier sistema en una matriz escalonada $(E|D)$ realizando transformaciones elementales sobre sus filas, análogas a las que hemos descrito para ecuaciones.

Para ello utilizaremos el método de Gauss, que describimos a continuación utilizando un ejemplo:

Método de escalonamiento de Gauss:

Si todos los elementos de $(A|B)$ son nulos, o bien, $m = 1$, la matriz ya está escalonada. En otro caso, realizamos sobre $(A|B)$ los pasos siguientes:

1) Buscamos la primera columna de la matriz que no sea totalmente nula. Vamos a llamarle j-ésima. Si el elemento $(1, j)$ es no nulo, saltamos al paso 2). Si es igual a cero, buscamos en la misma columna el primer elemento no nulo e intercambiamos la fila en la que se encuentre con la primera.

2) Llamamos pivote al elemento p que ahora ocupa el lugar $(1, j)$. Ahora, para $i = 2, \ldots, m$, sustituimos la fila i-ésima por ella menos $\frac{\text{elto. } (i,j)}{p}$ veces la primera fila.

Después, repetimos el proceso anterior sobre la submatriz que resulta de suprimir la primera fila de la matriz anterior y sus j primeras columnas.

El proceso termina cuando, o bien la submatriz sobre la que hay que reiterar el proceso es nula, o bien cuando tiene una sola fila. Se obtiene así una matriz escalonada $(E|D)$.

Nota 0.5.3. La matriz $(E|D)$ que aparece en el teorema anterior no es única para cada $(A|B)$. Es decir, a partir de una misma matriz $(A|B)$, pueden obtenerse mediante transformaciones elementales sobre sus filas, distintas matrices escalonadas.

Ejemplo 0.5.4. Con el fin de resolver el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 0x + z + 2t &= -1 \\ 2y + z + 4t &= -1 \\ y - z - t &= 1 \end{aligned} \right. ,$$

seguimos los pasos del algoritmo que hemos descrito para escalonar la matriz

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) :$$

La primera columna que no es totalmente nula es la segunda. Pero el elemento que ocupa el lugar $(1, 2)$ es el cero. Por ello, debemos intercambiar las filas primera y segunda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Llamamos pivote al elemento que ahora ocupa la posición $(1, 2)$. Con el fin de hacer ceros por debajo de él (en toda su columna), sustituimos la fila tercera por "ella menos la primera multiplicada por 1/2".

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3 & 3/2 \end{array}\right).$$

Nos olvidamos ya de la fila en la que estaba el pivote anterior (primera) y comenzamos a *arreglar* la tercera columna tomando como pivote el elemento de posición $(2,3)$. Para hacer ceros por debajo de él, sustituimos la tercera fila por "ella menos la segunda multiplicada por 3/2".

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3 & 3/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E|D).$$

Resolveremos ahora el sistema $EX = D$, de abajo arriba. Despejaremos en cada fila, la variable correspondiente al primer coeficiente no nulo. Dejaremos libres las demás variables.

$$\left\{ \begin{aligned} 0x + 2y + z + 4t &= -1 \\ z + 2t &= -1 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} 0x + 2y + z + 4t &= -1 \\ z &= -2t - 1 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{2}z - 2t - \tfrac{1}{2} \\ z &= -2t - 1 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} y &= -t \\ z &= -2t - 1 \end{aligned} \right.$$

Es decir, las soluciones del sistema dado $EX = D$ son las cuaternas de la forma

$$\{(x, -t, -2t-1, t) \mid x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Por ser un sistema equivalente al sistema dado, $AX = B$, estas serán también las soluciones del sistema dado.

Nota 0.5.5. En los escalonamientos concretos que nos encontremos, no es necesario seguir al pie de la letra el algoritmo de Gauss para escalonar una matriz. Por ejemplo, podemos utilizar transformaciones de tipo III para conseguir pivotes más sencillos o para *simplificar* alguna fila.

El hecho de que exista un algoritmo es bueno por dos razones:

(i) Hace que el método sea *programable* en un ordenador.

(ii) Convierte el método en una demostración matemática de los siguientes hechos:

Cualquier matriz sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se puede transformar en una matriz escalonada utilizando únicamente transformaciones elementales sobre sus filas.

Cualquier sistema de ecuaciones sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se puede transformar en un sistema de ecuaciones escalonado mediante transformaciones elementales.

Definición 0.5.6. Llamamos **rango** de una matriz al número de filas no nulas que tiene su matriz escalonada.

Nota 0.5.7. Aunque se pueda llegar, a partir de una misma matriz, a diferentes matrices escalonadas, todas van a tener el mismo número de filas no nulas, hecho que dejamos sin demostrar por ahora.

0.6. Matrices elementales

Veamos ahora que cada transformación elemental que realizamos sobre la matriz ampliada se puede conseguir multiplicando esta matriz, a izquierda, por una de las denominadas **matrices elementales**, que describimos a continuación:

Tipo I Son de la forma

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Cada P_{ij}, con $i \neq j$, es la matriz que resulta al intercambiar las filas i-ésima y j-ésima de la matriz I_m. Además, cuando la multiplicamos por una matriz A a izquierda, resulta:

$$P_{ij}A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_i \\ \hline \vdots \\ \hline A_j \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_j \\ \hline \vdots \\ \hline A_i \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right).$$

Tipo II

$$S_{ij}(t) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$S_{ij}(t)$, con $i \neq j$ y $t \in \mathbb{K}$, es la matriz que resulta al sumar a la fila i-ésima de la matriz I_m, t veces la fila j-ésima. Además,

$$S_{ij}(t)A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_i \\ \hline \vdots \\ \hline A_j \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_i + tA_j \\ \hline \vdots \\ \hline A_j \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array}\right).$$

Tipo III

$$M_i(t) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$M_i(t)$, con $0 \neq t \in \mathbb{K}$, es la matriz que se obtiene al multiplicar la fila i-ésima de la matriz I_m por t. Además,

$$M_i(t)A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_i \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline tA_i \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 0.6.1. Comprueba que, si multiplicamos una matriz cualquiera A, $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, por las matrices elementales anteriores a derecha, entonces las transformaciones elementales de los tipos I, II y III se realizan sobre las columnas de A en lugar de sobre sus filas. Concretamente, tomando matrices elementales $n \times n$, se tendrá:

(I)

$$AP_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdots & A^i & \cdots & A^j & \cdots \end{array} \right) P_{ij} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdots & A^j & \cdots & A^i & \cdots \\ & (i) & & (j) & \end{array} \right)$$

(II)

$$AS_{ij}(t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} .. & A^i & .. & A^j & .. \end{array} \right) S_{ij}(t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} .. & A^i & .. & tA^i + A^j & .. \\ & (i) & & (j) & \end{array} \right)$$

(III)

$$AM_i(t) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A^1 & \cdots & A^i & \cdots & A^n \end{array} \right) M_i(t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A^1 & \cdots & tA^i & \cdots & A^n \\ & & (i) & & \end{array} \right)$$

Proposición 0.6.2. *Las matrices elementales son regulares. Además, la inversa de una matriz elemental es la matriz elemental que deshace el cambio que esta ha producido. Concretamente:*

(I) $[P_{ij}]^{-1} = P_{ij}$.

(II) $[S_{ij}(t)]^{-1} = S_{ij}(-t)$.

(III) $[M_i(t)]^{-1} = M_i(\frac{1}{t})$ $(t \neq 0)$.

Con todo lo anterior, ya podemos demostrar el siguiente hecho:

Las transformaciones elementales no cambian el conjunto de soluciones de un sistema $AX = B$:

Para demostrarlo, supongamos que la columna X^0 es solución del sistema y que realizamos una transformación elemental sobre la matriz ampliada $(A|B)$:

Llamamos L (del inglés *left*) a la matriz que realiza la transformación elemental:

Observamos que $L(A|B) = (LA|LB)$ y que LB es la columna de términos independientes de la nueva matriz ampliada.

Hemos pasado del sistema $AX = B$ a otro sistema $LAX = LB$, donde L es una matriz elemental de uno de los tres tipos.

Ahora, $AX^0 = B \Longrightarrow LAX^0 = LB$, por lo que X^0 será también solución del sistema transformado.

Recíprocamente, si X^0 es solución del sistema transformado, entonces:

$$LAX^0 = LB \Longrightarrow L^{-1}(LAX^0) = L^{-1}(LB) \Longrightarrow (L^{-1}L)AX^0 = (L^{-1}L)B,$$

es decir, $AX^0 = B$, por lo que X^0 es también solución del sistema original.

Observa que esta demostración se basa en dos cuestiones fundamentales:

(a) Cada transformación elemental sobre el sistema $AX = B$ equivale a multiplicar la matriz ampliada $(A|B)$ por una matriz elemental a su izquierda, y esto significa que se multiplica por dicha matriz elemental tanto a A como a B.

(b) Las matrices elementales tienen inversa, lo que permite pasar de nuevo desde el sistema transformado al sistema original.

El hecho de que exista un algoritmo (el de Gauss) para escalonar matrices utilizando solo transformaciones elementales sobre sus filas se puede expresar ahora de la siguiente forma:

Dada A, matriz cualquiera $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, existen matrices $m \times m$ elementales, L_1, L_2,... , L_s, tales que $L_s \dots L_2 L_1 A = E$, matriz escalonada.

Ejercicio 0.6.3. Llamamos A a cada una de las matrices del Ejercicio **??**. Escribe las matrices concretas L_1, L_2,... , L_s que cumplen la igualdad $L_s \dots L_2 L_1 A = E$, donde E es la matriz escalonada a la que se llega en cada caso.

0.7. Teorema de Rouché-Frobënius

Analizamos ahora las distintas situaciones que podemos encontrarnos al terminar de escalonar la matriz ampliada un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$:

$$(A|B) \mapsto (E|D)$$

Observemos antes que, al escalonar $(A|B)$, para llegar a $(E|D)$, se ha escalonado también la matriz A, para llegar a E.

Ejemplos 0.7.1. (I)

$$(E|D) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En este ejemplo, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} E = 2$ porque esta matriz escalonada tiene solo dos filas no nulas.

Sin embargo, $\operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}(E|D) = 3$ porque esta matriz escalonada tiene tres filas no nulas.

Esta diferencia $(2 < 3)$ hace que la última ecuación del sistema escalonado $EX = D$ no tenga ninguna solución:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 1 \end{aligned}\right.$$

(II)

$$(E|D) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En este ejemplo, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} E = 3$ porque esta matriz escalonada tiene tres filas no nulas.

Y también, $\operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}(E|D) = 3$.

Llamamos $r = 3$ a este rango, igual en A que en $(A|B)$. El sistema escalonado $EX = D$ es:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

De abajo hacia arriba, despejamos en cada fila la primera variable que tiene coeficiente no nulo:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Por tanto, despejamos $r = 3$ variables y quedan libres $n - r = 3 - 3 = 0$ variables.

El sistema es compatible determinado porque no queda ninguna variable libre.

(III)

$$(E|D) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En este ejemplo, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} E = 2$ porque esta matriz escalonada tiene dos filas no nulas.

Y también, $\operatorname{rang}(A|B) = \operatorname{rang}(E|D) = 2$.

Llamamos $r = 2$ a este rango, igual en A que en $(A|B)$. El sistema escalonado $EX = D$ es:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

De abajo hacia arriba, despejamos en cada fila la primera variable que tiene coeficiente no nulo:

$$\begin{cases} x = -y/2 + 1/2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Por tanto, despejamos $r = 2$ variables y quedan libres $n - r = 3 - 2 = 1$ variable, en este caso la y porque no es primera de ninguna de las filas.

El sistema es compatible indeterminado porque las variables libres hacen que haya más de una solución.

Los ejemplos anteriores nos ayudan a entender el siguiente resultado:

Teorema 0.7.2. *Dado un sistema de ecuaciones $AX = B$, con A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, entonces*

(I) *Si $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|B)$, el sistema $AX = B$ es incompatible.*

(II) *Si $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r$, entonces*

- *Si $r = n$, el sistema $AX = B$ es compatible determinado.*
- *Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado.*

Ejercicio 0.7.3. Estudia de qué tipo es cada uno de los sistemas siguientes según el valor que toma el parámetro $a \in \mathbb{R}$ y resuélvelo cuando sea posible

$$\text{(I)} \left\{ \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + 6y &= a \end{aligned} \right. \qquad \text{(IV)} \left\{ \begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + ay &= 3 \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + ay &= 6 \end{aligned} \right. \qquad \text{(V)} \left\{ \begin{aligned} x - y &= 1 \\ ax + 3y &= 3 \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ ax + 6y &= 6 \end{aligned} \right. \qquad \text{(VI)} \left\{ \begin{aligned} ax - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 3 \end{aligned} \right.$$

Ejercicio 0.7.4. Estudia, según el valor que toma el parámetro $a \in \mathbb{R}$, de qué tipo es cada uno de los sistemas $AX = B$ cuando:

(I) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

(II) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

(III) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = 0$.

0.8. Forma escalonada reducida

Hemos visto anteriormente que, partiendo de una misma matriz A, $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, se pueden obtener distintas matrices escalonadas. Sin embargo, si seguimos aplicando transformaciones elementales sobre cada una de esas matrices, es posible llegar a una misma matriz, la denominada **matriz escalonada reducida** o **matriz de Hermite** H, que es de la siguiente forma:

(I) H es escalonada.

(II) En cada fila no nula de H, el primer elemento no nulo es igual a 1 y la columna a la que pertenece es del tipo

$$i)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos cómo se puede llegar, a partir de la matriz escalonada obtenida en el ejemplo **??**, a una matriz escalonada reducida:

Ejemplo 0.8.1. A partir de la matriz $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, habíamos llegado ya a la matriz escalonada

$$(E|D) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos ahora los pasos siguientes:

(I) Hacemos que el primer elemento no nulo de cada fila sea un 1, salvo en las filas que son totalmente nulas, claro está.

Para ello, multiplicamos cada fila no nula por el inverso de su primer elemento no nulo:

Multiplicamos la primera fila por 1/2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda columna ya corresponde a una matriz de Hermite.

(II) Utilizando como pivote el primer elemento de cada fila no nula (empezando por el de más abajo), hacemos ceros por encima de él con transformaciones elementales del tipo II:

Tomamos el 1 que aparece en la segunda fila para hacer ceros por encima de él (en toda su columna). Sustituiremos la primera fila por "ella menos la segunda multiplicada por $(-1/2)$":

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz a la que hemos llegado tiene forma escalonada reducida, o dicho de otra manera, es una matriz de Hermite.

Aunque no es fácil de demostrar, es cierto el siguiente resultado.

Teorema 0.8.2. *Dada una matriz A, $m \times n$, la matriz de Hermite a la que se puede llegar mediante transformaciones elementales sobre las filas de A es única.*

0.9. Cálculo de la inversa de una matriz

Esta técnica de escalonar una matriz por filas se utiliza también para hallar la inversa de una matriz cuadrada cuando dicha inversa existe.

Ejemplo 0.9.1. Vamos a hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicamos transformaciones elementales sobre A, hasta llegar a una matriz escalonada reducida:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vemos, en este caso, la matriz de Hermite de A ha sido la matriz identidad, I_3, lo que no siempre ocurre con matrices cuadradas. Si llamamos L_1, L_2,..., L_5 a las matrices elementales que corresponden a las transformaciones elementales realizadas, tenemos que $L_5L_4L_3L_2L_1A = I_3$, por lo que el producto $L_5L_4L_3L_2L_1$ será la inversa de A.

La buena noticia es que podemos encontrar este producto sin tener que escribir una a una las matrices L_i para después multilicarlas. La forma de encontrarlo consiste en aplicar sobre la matriz I_3 las mismas transformaciones elementales que hemos aplicado sobre A. Lo habitual es hacer esto al mismo tiempo que se aplican sobre A, de la forma siguiente:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \mapsto$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

A la derecha de la línea vertical, se han aplicado las mismas transformaciones elementales que a la izquierda. Por tanto, las matrices elementales L_1, L_2,..., L_5 cumplen que:

$$L_5L_4L_3L_2L_1I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Y este producto $L_5L_4L_3L_2L_1$ era precisamente la matriz inversa de A (I_3 es neutro en la multiplicación). De esta forma hemos hallado

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz A del ejemplo anterior tenía inversa, era regular. Pero no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Curiosamente, el proceso anterior aplicado sobre cualquier matriz A, $n \times n$, seguida de la identidad, $(A|I_n)$, nos va a permitir saber si A tiene o no inversa y, como hemos visto antes, hallarla en el caso de que la tenga:

Dada una matriz real cuadrada A, $n \times n$, consideramos la matriz $(A|I_n)$ y realizamos transformaciones elementales sobre sus filas hasta obtener una matriz $(H|Q)$, donde H es la forma normal de Hermite de A (que no siempre será la matriz identidad) y Q es la matriz en la que se ha transformado la matriz I_n. El proceso habrá implicado matrices elementales, L_1, L_2,..., L_s, de forma que

$$L_s \dots L_1 A = H$$
$$L_s \dots L_1 I_3 = Q$$

Vemos que Q es simplemente el producto $L_s \dots L_1$, es decir, una matriz regular (por ser producto de matrices regulares).

Nos encontramos entonces en una de las dos situaciones siguientes:

Caso regular: Las n filas de la matriz H son no nulas. Es lo que ha ocurrido en el ejemplo anterior. En este caso:

- $\operatorname{rang} A = n$.
- Las n filas de H tienen 1 como primer elemento no nulo. Además H es una matriz escalonada y con ceros por encima de cada 1. Por lo tanto,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

- $QA = I_n \Longrightarrow A = Q^{-1}$. Por tanto, A es invertible y Q es la inversa de A.

Caso singular: H tiene alguna fila totalmente nula. En ese caso:

- $\operatorname{rang} A < n$.
- Obviamente, $H \neq I_n$.
- A no es invertible ya que, si lo fuera, el producto QA también sería regular, lo cual es imposible porque:

$$(QA)(\text{posible inversa de } QA) = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (\text{posible inversa de } QA)$$

tendría al menos una fila totalmente nula, por lo que nunca sería la matriz identidad.

Los dos casos se recogen en el siguiente teorema:

Teorema 0.9.2. *Dada una matriz cuadrada real A, $n \times n$, entonces:*
A *es regular* $\Longleftrightarrow \operatorname{rang} A = n$.

Ejercicio 0.9.3. Averigua cuáles de las siguientes matrices son regulares y halla la inversa de las que lo sean ($a \in \mathbb{R}$):

(I) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (V) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (IV) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (VI) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$

Consideremos un sistema de ecuaciones sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de la forma $AX = B$ con A matriz invertible $n \times n$. La columna solución X^0 se puede *despejar* de la ecuación matricial sin más que multiplicar la igualdad por A^{-1} a izquierda:

$$AX^0 = B \Longrightarrow X^0 = A^{-1}B.$$

En la práctica, cuesta más hallar la inversa de A que escalonar el sistema, pero el razonamiento anterior nos sirve para demostrar que

Cuando A es una matriz regular $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$:
- El sistema $AX = B$ es compatible para cualquier columna $B \in \mathbb{K}^n$.
- Para cada B, hay una única solución: la columna $X^0 = A^{-1}B$.

0.10. Determinantes

Recordemos brevemente cómo se define el **determinante** de una matriz cuadrada sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. En este curso, no vamos a estudiar los determinantes en profundidad. Nos limitaremos a recordar sus propiedades para utilizarlos en momentos puntuales del curso, sobre todo en el tema 3.

(I) Si $A = (a)$, matriz 1×1, definimos $\det(a) = a$.

(ii) Si A es una matriz $n \times n$, llamamos *matriz adjunta* del elemento que ocupa el lugar (i, j) de A a la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima de A. Se denota por A_{ij}. Definimos el determinante de A a partir de los determinantes de sus matrices adjuntas, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}&\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + \\ &a_{21}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}\det(A_{n1}).\end{aligned}$$

La expresión anterior se denomina *desarrollo del determinante de A por su primera columna.*

Notación: Denotaremos $\det(A)$ por $|A|$.

Propiedades de los determinantes:

(i) Si una fila de A, A_i, puede escribirse como suma de dos posibles filas B, C, pongamos $A_i = B + C$, entonces

$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B+C \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline C \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix}.$$

(ii) Si una fila de A, $A_i \in \mathbb{R}^n$, puede escribirse como $A_i = tB$, para algún número $t \in \mathbb{K}$ y alguna posible fila B, entonces

$$\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline tB \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} = t\det\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} \text{ ó lo que es lo mismo, } |M_i(t) \cdot A| = t|A|.$$

(iii) Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det A = 0$.

Observaciones 0.10.1.

(i) La propiedad (i) anterior no quiere decir que $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(II) Tampoco se verifica, en general, que $\det(tA) = t\det A$.

(III) Lo que sí se verifica para dos matrices $n \times n$ cualesquiera es que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, una función determinante verificará también las siguientes propiedades:

(I) $\det I_n = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(II) Si A tiene una fila nula, entonces $\det A = 0$.

(III) Si intercambiamos dos filas de A entre sí, el determinante cambia de signo, es decir

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline A_i \\ \hline \vdots \\ A_j \\ \hline \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline A_j \\ \hline \vdots \\ A_i \\ \hline \vdots \end{pmatrix}.$$

(IV) Si realizamos sobre las filas de A una transformación elemental de tipo II, el determinante de A no cambia.

Nota 0.10.2. La traspuesta de una matriz A se realiza tomando una a una las filas de A y escribiéndolas como columnas.

Es curioso que esto no cambia el determinante de la matriz A.

Esto implica que todas las propiedades de los determinantes que hemos expresado en términos de las filas de una matriz, se verifican también si cambiamos *fila* por *columna* en su redacción.

Teorema 0.10.3. *Podemos calcular el valor del determinante de una matriz desarrollándolo por cualquiera de sus columnas,* $1 \leq j \leq n$,

$$|A| = a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{1j}| + a_{2j}(-1)^{2+j}|A_{2j}| + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}|A_{nj}|,$$

o bien, desarrollándolo por una cualquiera de sus filas, $1 \leq i \leq n$,

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}|A_{i1}| + a_{i2}(-1)^{i+2}|A_{i2}| + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}|A_{in}|.$$

El siguiente resultado demuestra la cantidad de información que el valor del determinante puede aportar sobre una matriz.

Teorema 0.10.4. *A es regular si y sólo si $\det A \neq 0$.*

Además, si A es regular, entonces $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

Como consecuencia de ello, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 0.10.5. *Dado un sistema $AX = B$, con A matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, entonces*

$$AX = B \text{ es compatible determinado} \iff \det(A) \neq 0.$$

Nota 0.10.6. Si A es una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ con $\det(A) = 0$, el sistema $AX = B$ puede ser compatible indeterminado o incompatible. En el caso de un sistema homogéneo, $AX = 0$, tendremos la seguridad de que es compatible indeterminado.