Tema 5

Cálculo integral en $\mathbb{R}$

5.1. La integral de Riemann

Calcular el área de una figura de lados rectos es relativamente sencillo teniendo en cuenta que podemos dividir tales figuras en rectángulos y triángulos (medios rectángulos) y que el área de un rectángulo es igual a la longitud de su base multiplicada por la de su altura. En esta sección nos planteamos el problema de calcular el área de una figura de lados curvos:
Dada f una función continua y positiva en un intervalo $[a, b]$, queremos calcular el área de la región R comprendida entre el grafo $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

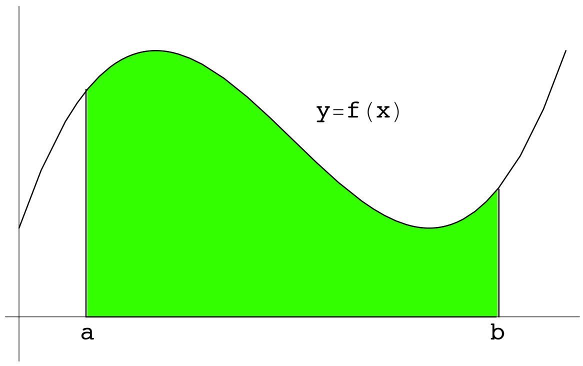

Figura I. Región R.

Aunque R no se puede dividir en rectángulos calcularemos su área como un límite de aproximaciones por rectángulos.

Definición 5.1.1 (Integral de Riemann)**.** Dada f una función definida en un intervalo $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$, se definen

(I) Una *partición* $\mathcal{P}$ de $[a,\, b]$ es un subconjunto de $[a,\, b]$ de la forma

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

(II) Se llama *norma* de la partición $\mathcal{P}$ al número $\|\mathcal{P}\| = \max\limits_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$.

(III) Se llama *suma de Riemann* de la función f asociada a la partición $\mathcal{P}$ a cualquier expresión del tipo

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}), \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

(IV) Si existe el límite $\lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S(f, \mathcal{P}) \in \mathbb{R}$, se dice que f es *integrable* en $[a,\, b]$ y se denota

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S(f, \mathcal{P}) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dicho límite se denomina *integral de f entre a y b*.

El siguiente resultado garantiza la integrabilidad de todas las funciones continuas, en particular, la de las funciones elementales.

Teorema 5.1.2. *Si f es continua en $[a,\, b]$, entonces f es integrable en $[a,\, b]$.*

Nota 5.1.3 (**Interpretación geométrica**). Se considera f una función continua y positiva en un intervalo $[a,\, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ y sea R la región comprendida entre el grafo $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

Si $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ es una partición de $[a,\, b]$ y $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 0, \dots, n)$, el término $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ es el área del rectángulo que tiene de base el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(c_k)$.

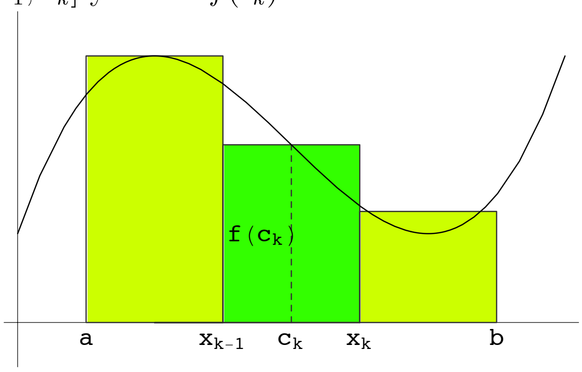

Figura II. Interpretación geométrica de las sumas de Riemann.

La suma de Riemann $S(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ es una aproximación del área de la región R por rectángulos y la aproximación es mejor cuanto más pequeña sea la norma de $\mathcal{P}$. Tomando límites cuando $\|\mathcal{P}\| \to 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región R.

La Figura III muestra tres aproximaciones por rectángulos, de base 1, 1/2 y 1/4, del área de la región comprendida entre el grafo $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ y las rectas $x = 0$, $x = 5$ e $y = 0$.

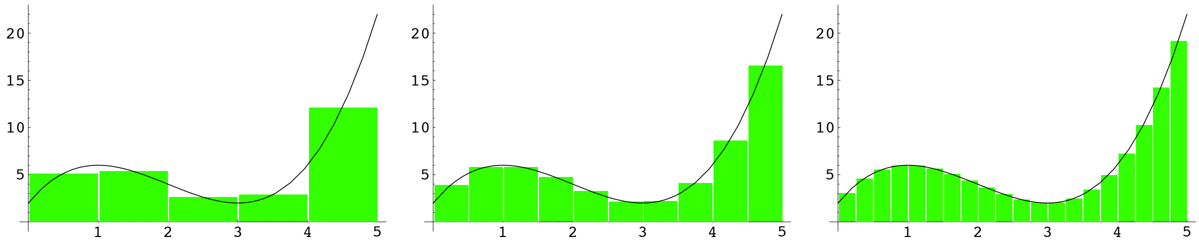

Figura III. Aproximaciones de una región curva por rectángulos.

Se considera f una función continua y negativa en un intervalo $[a,\, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$. Si denotamos por R la región comprendida entre el grafo $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, entonces $-f$ es positiva y $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b (-f(x))\,dx =$ $-(\text{Área de } R)$.

Ejemplos 5.1.4. (I) La *función de Dirichlet*

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,\, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in [0,\, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

no es integrable en $[0,\, 1]$.

(II) La función $f(x) = x^2$ es integrable en $[0,\, 2]$ ya que es continua en $[0,\, 2]$.

Para calcular su integral se toman las particiones y puntos siguientes:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \frac{2k}{n},\ k = 0, \dots, n \right\},$$

$$\|\mathcal{P}_n\| = \frac{2}{n} \to 0,\ c_k = \frac{2k-1}{n} \in \left(\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n} \right) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Como $\int_0^2 x^2\,dx$ existe, será igual al límite de sumas de Riemann asociadas a $\mathcal{P}_n$:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^2\left(\frac{2k}{n}-\frac{2k-2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\left(4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{8}{3}.$$

(III) El hecho de conocer el área de algunas figuras geométricas nos permite evaluar fácilmente la integral de ciertas funciones, por ejemplo:

- $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a).$
- $\displaystyle\int_{-1}^2 -|x|\,dx = -\frac{5}{2}.$
- $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \pi.$

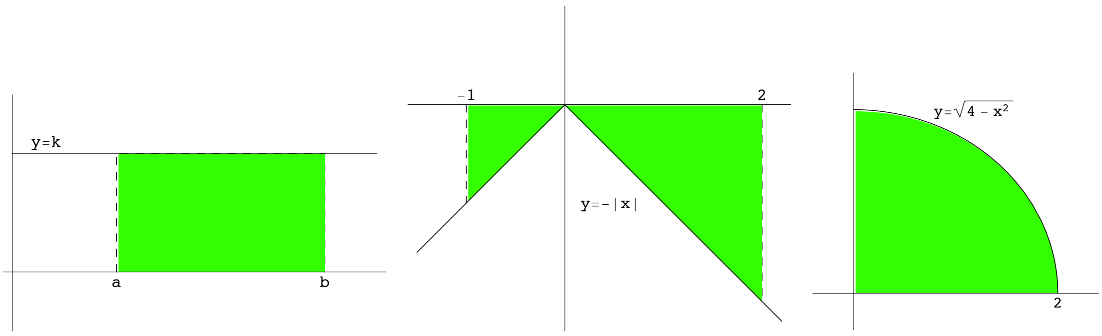

Figura IV. Figuras geométricas de área conocida.

Teorema 5.1.5 (Propiedades de la integral de Riemann)**.** .

(I) *Si* $a \in \operatorname{Dom} f$ *entonces* $\displaystyle\int_a^a f = 0.$

(II) *Si* f *es integrable en* $[a,c]$ *y en* $[c,b]$*, entonces* f *es integrable en* $[a,\,b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$*. En particular, si* f *es continua a trozos en* $[a,\,b]$ *entonces* f *es integrable en* $[a,\,b]$*.*

Si $a < b$*, por convención,* $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f.$

(III) *Si f es integrable en $[a,\, b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces kf es integrable en $[a,\, b]$ y* $\displaystyle\int_a^b kf = k\int_a^b f$.

(IV) *Si f y g son integrables en $[a,\, b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a,\, b]$ y* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(V) *Si f y g son integrables y $f \le g$ en $[a,\, b]$, entonces* $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$. *En particular, si $f \ge 0$,* $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$.

Demostración: Es claro que estas propiedades se satisfacen para las sumas de Riemann y se conservan al hacer el límite.

Proposición 5.1.6. *Dada una función f integrable en $[-a, a]$, entonces*

(I) *Si f es par,* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(II) *Si f es impar,* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

5.2. Teoremas del cálculo integral

Teorema 5.2.1 (Teorema del valor medio para integrales)**.** *Si f es continua en $[a,\, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

El número $f(c)$ se llama valor promedio *de $f(x)$ en el intervalo $[a,\, b]$.*

Demostración: Como f es continua, alcanza su máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$, es decir, existen m y M en $[a, b]$ tales que $f(m) \le f(x) \le f(M)$ para todo $x \in [a, b]$. Por el Teorema (Propiedades de la integral de Riemann) (v),

$$f(m) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(m)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(M)\,dx = f(M),$$

y por el Teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $c \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Ejemplo 5.2.2. La *velocidad media* de una partícula, que se mueve en línea recta y cuya posición en cada instante depende de t, se define mediante la función $s(t)$:

$$\textit{velocidad media en el intervalo } [t_0,\, t_1] = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Si $v(t)$ es la función que representa la velocidad de dicha partícula en cada instante t, entonces

$$\textit{valor medio de la velocidad } v(t) \textit{ en el intervalo } [t_0,\, t_1] = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt.$$

A continuación se demuestra, como consecuencia del Teorema fundamental del Cálculo, que ambas cantidades coinciden.

Teorema 5.2.3 (Teorema fundamental del Cálculo I (Regla de Barrow))**.** *Dada f una función integrable en $[a,\, b]$, si existe una función F tal que $F'(x) = f(x)$ en (a, b), entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

La función F se llama primitiva *o* antiderivada *de f.*

Demostración: Dada una partición cualquiera de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, se tiene que $F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$. Además, F satisface las hipótesis del Teorema del valor medio en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, es decir, para cada $1 \le k \le n$ existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Luego $F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = S(f, \mathcal{P})$.

Tomando $\|\mathcal{P}\| \to 0$ se obtiene que $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Teorema 5.2.4 (Teorema fundamental del Cálculo II)**.** *Dada una función f continua en $[a,\, b]$, se define la función F en $[a,\, b]$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Entonces, F es diferenciable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ en (a, b).

DEMOSTRACIÓN: F está bien definida pues f es integrable en $[a,b]$ (es continua). Si $x \in (a,b)$,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

donde c está entre x y $x+h$ y existe por el Teorema del valor medio para integrales.

Corolario 5.2.5. *Dadas $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$ y $c(x)$ y $d(x)$ diferenciables en $(a,\, b)$. Si se define la función F en $[a,\, b]$ como*

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(t)\,dt.$$

Entonces, F es diferenciable en (a,b) y $F'(x) = f(d(x))d'(x) - f(c(x))c'(x)$ en (a,b).

DEMOSTRACIÓN: Si $x_0 \in (a,b)$ fijo, entonces

$$F(x) = \int_{x_0}^{d(x)} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c(x)} f(t)\,dt,$$

y el resultado se sigue de la Regla de la cadena y el Teorema fundamental del Cálculo II.

Teorema 5.2.6 (Teorema del cambio de variable)**.** *Dada una función g continua en $[a,\, b]$ y diferenciable en (a,b) tal que $g' \geq 0$ e integrable en $(a,\, b)$ (respectivamente, $g' \leq 0$ e integrable en $(a,\, b)$). Si f es una función integrable en $(g(a),\, g(b))$ (respectivamente, en $(g(b),\, g(a))$), entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in (a,b)$ definimos,

$$P(x) = \int_{g(a)}^{x} f(u)\,du \quad \text{y} \quad Q(x) = \int_a^x f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Por el Teorema fundamental del Cálculo II,

$$P'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad Q'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Además, si llamamos $R(x) = P(g(x))$, se tiene que $R'(x) = f(g(x))g'(x) = Q'(x)$. Y por la Regla de Barrow,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = P(g(b)) - P(g(a)) = R(b) - R(a) = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Teorema 5.2.7 (Teorema de integración por partes)**.** *Dadas f y g funciones continuas en $[a,\, b]$, diferenciables en $(a,\, b)$ y con derivadas integrables en $[a,\, b]$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Demostración: Consecuencia inmediata de la Regla de Barrow y de las propiedades de la integral.

5.3. Cálculo de primitivas

La *Regla de Barrow* reduce el cálculo de la integral de una función al cálculo de una primitiva de la función siempre que esto sea posible. De hecho, calcular la primitiva de una función como combinación de funciones elementales puede ser un problema difícil y, muchas veces, imposible.

Nota 5.3.1. Si F es una primitiva de f (es decir, si $F'(x) = f(x)$) denotaremos

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

F también se llama *antiderivada* o *integral indefinida* de f.

Proposición 5.3.2. *Las integrales indefinidas verifican:*

(i) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$

(iv) *Si* $x = g(t)$, $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$

En particular, $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$

A continuación se enumeran algunos cambios de variable para calcular integrales indefinidas

Sustituciones trigonométricas Las sustituciones trigonométricas pueden utilizarse para calcular integrales que contengan un polinomio de 2º grado (una expresión del tipo $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ con $\alpha \neq 0$).

(I) Si la integral contiene el binomio $a^2 - x^2$, se recomienda el cambio de variable

$$x = a \operatorname{sen} t \quad dx = a \cos t \, dt.$$

(II) Si la integral contiene el binomio $a^2 + x^2$, se recomienda el cambio de variable

$$x = a \operatorname{tg} t \quad dx = a \cos^{-2} t \, dt.$$

(III) Si la integral contiene el binomio $x^2 - a^2$, se recomienda el cambio de variable

$$x = a \sec t \quad dx = a \sec t \, \operatorname{tg} t \, dt.$$

El caso general se deduce de los anteriores completando el cuadrado en $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Integrales de funciones racionales Las funciones de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, se denominan *funciones racionales*.

Dividiendo, las integrales de funciones racionales se pueden reducir al caso $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tales que el grado de $P(x)$ es estrictamente menor que el grado de $Q(x)$.

El denominador $Q(x)$ se puede factorizar en factores lineales y de segundo grado:

$$Q(x) = M(x-c)^{n_1}(x-d)^{n_2} \ldots \left((x-a)^2 + b^2\right)^{m_1} \left((x-h)^2 + k^2\right)^{m_2} \ldots$$

y $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer *en fracciones simples*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x-c} + \cdots + \frac{C_{n_1}}{(x-c)^{n_1}} + \cdots + \frac{A_1(x-a) + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}(x-a) + B_{m_1}}{((x-a)^2 + b^2)^{m_1}} + \cdots .$$

Calculando las constantes $A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots$ el problema se reduce a integrar fracciones de la forma:

(I) $\displaystyle\int \frac{1}{x-c}\, dx = \ln|x-c| + C.$

(II) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-c)^n}\, dx = \frac{(x-c)^{1-n}}{1-n} + C.$

(III) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$

(IV) $\displaystyle\int \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln\left((x-a)^2 + b^2\right) + C.$

(V) $\displaystyle\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx = \int \frac{\cos^{2n-2} t}{b^{2n-1}}dt + C$, con $x-a = b\operatorname{tg} t$.

(VI) $\displaystyle\int \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx = \frac{((x-a)^2+b^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C.$

Integrales de funciones irracionales

Si f es una combinación racional de $\sqrt[n_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ y de x, el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } n = \text{mínimo común múltiplo de } \{n_1, \dots, n_k\}$$

transforma la integral de f en una integral racional.

Integrales trigonométricas

(I) Integrales de funciones racionales de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. En el caso general se utiliza el cambio de variable

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

o el cambio de variable

$$\operatorname{tg} x = t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

que transforman la integral en una integral racional o irracional.

- Integrales del tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ con $m, n \in \mathbb{R}$ y al menos uno de ellos entero impar (por ejemplo $n = 2k+1 \in \mathbb{Z}$).

  Se realiza el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x\,dx$:

  $$\int \operatorname{sen}^m x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\,dx = \int t^m (1-t^2)^k\,dt.$$

- Integrales del tipo $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y ambos pares.

  Se reduce al caso anterior utilizando las fórmulas

  $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)).$$

- Integrales del tipo $\displaystyle\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ o $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^m x\,dx$ con $m \in \mathbb{N}$.

  Se utilizan las fórmulas

  $$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

(II) Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, se utilizan las fórmulas que transforman productos de senos y cosenos en sumas y diferencias:

- $\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}(\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi))$.
- $\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi))$.
- $\operatorname{sen}\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\theta+\varphi) + \operatorname{sen}(\theta-\varphi))$.

Integrales Impropias

5.4. Integrales impropias

La integral de Riemann *sólo* está definida para funciones acotadas en intervalos acotados. Nos plan–teamos ahora el problema geométrico de calcular, si es posible, el área de figuras no acotadas: por ejemplo, el área comprendida entre el grafo de la función exponencial y el lado negativo del eje $0x$ o el área comprendida entre el grafo de $y = (x-1)^{-1}$, $x = 1$, $x = 2$ y el eje $0x$. Por analogía con el cálculo de áreas de figuras acotadas, esperamos que dichas áreas sean, respectivamente,

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx;$$

y así aparece la necesidad de definir una integral para funciones no acotadas o para intervalos no acotados.

Definición 5.4.1. Integral impropia tipo I Dada una función $f(x)$ continua en $[a,\infty)$, definimos la *integral impropia del tipo I*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

si el límite existe y es finito, y decimos que la integral impropia *converge* a dicho límite. Si el límite no existe o es infinito, decimos que la integral impropia *diverge*. Análogamente se definen integrales impropias entre $-\infty$ y b.

Definición 5.4.2. Integral impropia tipo II Dada una función $f(x)$ continua en $(a,b]$ y tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces definimos la *integral impropia del tipo II*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)\,dx$$

si el límite existe y es finito, y decimos que la integral impropia *converge* a dicho límite. Si el límite no existe o es infinito, decimos que la integral impropia *diverge*. Análogamente se definen integrales impropias entre a y b si la función no está acotada cuando $x \to b^-$.

Si una integral es impropia de ambos tipos o más de una vez del mismo tipo, se separa en suma de integrales que sean impropias de un solo tipo una vez y la integral converge si y sólo si cada una de dichas integrales converge.

Observación: Es evidente que si $c \geq a$ y $f(x)$ es continua en $[a, c]$, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx$ converge.

Es igualmente evidente que si $c \in (a, b]$ y $f(x)$ es continua en $[c, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ converge.

Notación: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces las integrales impropias de $f(x)$ se pueden calcular aplicando la *Regla de Barrow* y tomando límites. En tales casos se escribe

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a) = F(\infty) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{h\to 0^+} F(a+h) = F(b) - F(a^+).$$

Ejemplos 5.4.3. Veamos algunos ejemplos de integrales impropias

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = e^x\Big|_{-\infty}^0 = 1 - \lim_{x\to-\infty} e^x = 1.$

(II) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|\Big|_{1^+}^2 = \ln 1 - \lim_{x\to 1^+} \ln|x-1| = \infty$, luego esta integral impropia diverge.

(III) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx$ y $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}^-} = \infty$, luego esta integral impropia diverge.

(IV) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \pi.$

Teorema 5.4.4 (Criterios de comparación). *Suponemos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas continuas en el intervalo (abierto) de integración.*

- *Comparación directa: Sean $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x > a$, si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ también converge.*
  Sean $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $a < x \leq b$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ también converge.

- *Comparación límite: Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = L > 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > a$ entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.*
  Si $\lim_{x\to a^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = L > 0$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

- *Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > a$ entonces si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ también converge.*
  Si $\lim_{x\to a^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ entonces si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, $\int_a^b g(x)\,dx$ también converge.

Observaciones:

(I) Los criterios de comparación de funciones continuas negativas son análogos a los criterios de comparación de funciones continuas positivas dados en el *Teorema (Criterios de comparación)*. No hay criterios de comparación para funciones que cambian de signo.

(II) Las siguientes integrales se usan frecuentemente para comparar con otras integrales impropias:

- Si $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^\infty e^{px}\,dx$ converge (a $-e^{pa}/p$) si y sólo si $p < 0$.
- Si $a > 0$, $\int_a^\infty \dfrac{1}{x^p}\,dx$ converge (a $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$) si y sólo si $p > 1$.

- Si $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$ converge (a $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$) si y sólo si $p < 1$.

Ejemplos 5.4.5. Utilizamos los criterios anteriores para determinar la convergencia o divergencia de algunas integrales impropias.

(I) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx$ converge, por comparación con $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx$ pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x/2} = 0$.

(II) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ diverge, por comparación con $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 1$.

Proposición 5.4.6 (Condición suficiente de convergencia)**.** *Dada $f(x)$ continua en (a,b) $(a,b \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\})$, si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge. El recíproco no es cierto.*

Proposición 5.4.7 (Condición de convergencia)**.** *Dada $f(x)$ continua en el intervalo $[a,\infty)$ y tal que el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$. Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge entonces $L = 0$. El recíproco no es cierto.*

5.5. ANEXO: Tabla de integrales indefinidas

5.5.1. Funciones racionales e irracionales

Dados $n \neq -1$ y $a > 0$,

- $\displaystyle\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(x/a).$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right).$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}(x/a).$
- $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}(x/a).$

5.5.2. Funciones exponenciales e hiperbólicas

Dado $1 \neq a > 0$,

- $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x.$
- $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x.$
- $\displaystyle\int \cosh x \, dx = -\operatorname{senh} x.$
- $\displaystyle\int \operatorname{tgh} x \, dx = \ln|\cosh x|.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cotgh} x\,dx = \ln|\operatorname{senh} x|.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\,dx = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tgh} x).$
- $\displaystyle\int \operatorname{cosech} x\,dx = \ln|\operatorname{cotgh} x - \operatorname{cosech} x|.$

5.5.3. Funciones trigonométricas

Dados $n \in \mathbb{N}$, $m \neq -n$ y $0 \neq |a| \neq |b|$,

- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2}.$
- $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2}.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$
- $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,\cos^m x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^n x\,\cos^{m-2} x\,dx.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{2(a+b)}.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax)\,\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)}.$
- $\displaystyle\int \cos(ax)\,\cos(bx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}((a+b)x)}{2(a+b)}.$
- $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|.$
- $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{n+1} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^n x}{n} - \int \operatorname{tg}^{n-1} x\,dx.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^{n+1} x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^n x}{n} - \int \operatorname{cotg}^{n-1} x\, dx.$
- $\displaystyle\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|.$
- $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x.$
- $\displaystyle\int \sec^{n+2} x\, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^n x}{n+1} + \frac{n}{n+1}\int \sec^n x\, dx.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^{n+2} x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^n x}{n+1} + \frac{n}{n+1}\int \operatorname{cosec}^n x\, dx.$
- $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(ax)\, dx = x \operatorname{arcsen}(ax) + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}.$
- $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(ax)\, dx = x \operatorname{arctg}(ax) - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2).$

5.5.4. Otras funciones

Dados $a, b \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$
- $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - x.$
- $\displaystyle\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$
- $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$
- $\displaystyle\int x\, e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$
- $\displaystyle\int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2).$
- $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx.$

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax).$
- $\displaystyle\int x\cos(ax)\,dx = \frac{x}{a}\,\mathrm{sen}(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax).$
- $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\,\mathrm{sen}(ax) + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos(ax).$
- $\displaystyle\int x^2\cos(ax)\,dx = \left(-\frac{2}{a^3} + \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2}\cos(ax).$
- $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{sen}(ax)\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos(ax) + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,dx.$
- $\displaystyle\int x^n\cos(ax)\,dx = \frac{x^n}{a}\,\mathrm{sen}(ax) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\,\mathrm{sen}(ax)\,dx.$
- $\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\,\mathrm{sen}(bx) - b\cos(bx)\right).$
- $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\,\mathrm{sen}(bx)\right).$

Todos los resultados anteriores son válidos sumando una constante real arbitraria C.