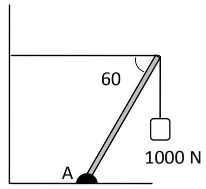
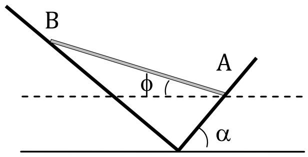
C. Sáenz, V. Sánchez
Dpto. Ciencias. Universidad Pública de Navarra

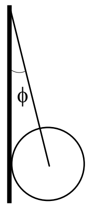
1. El aguilón (brazo de la grúa) de la figura es homogéneo y pesa 500 N. Calcular la tensión del cable y las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el aguilón en su extremo inferior (punto A). *(721.7 N, 721.7 N,1500 N)*



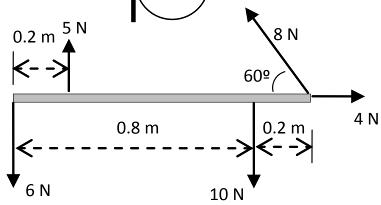

2. Una varilla de masa $m$ y longitud $L$ está colocada sobre un ángulo recto liso. Encontrar el ángulo $\phi$ de la posición de equilibrio de la varilla en función del ángulo $\alpha$. Determinar las fuerzas que las paredes realizan sobre la varilla en dicha posición. Encontrar el ángulo de equilibrio para $\alpha = 30^o, 45^o y\ 60^o$*(*$tg\phi = (2cos^2\alpha - 1)/sen(2\alpha)$*,* $N_A = mgcos\alpha$*,* $N_B = mgsen\alpha$*,* $30^o, 0^o, -30^o$*)*



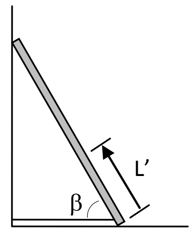

3. Una esfera de masa de peso $W$ se sostiene mediante una cuerda y presiona sobre una pared vertical lisa. Si $\phi$ es el ángulo entre la cuerda y la pared, ¿Cuál es la tensión en la cuerda? ¿Cuál es la fuerza que hace la esfera sobre la pared? *(* $W/cos\phi$*,* $Wtg\phi$*)*




4. Sobre una barra de peso despreciable y longitud L=1 m actúan las cinco fuerzas representadas en la figura. Se desea colgar esta barra de una cuerda fija en el techo: a) calcular el punto de la barra al que debe unirse la cuerda para que la barra se mantenga horizontal, b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en esas condiciones? *(0.018 m, 4.07 N)*

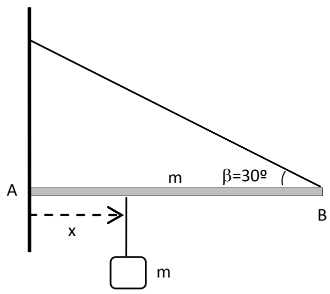



5. Un chico de masa $m = 60\ kg$ sube por una escalera de longitud $L$ y masa $M = 30\ kg$ que se apoya en la pared y en el suelo, en ambos casos sin rozamiento. El extremo inferior de la escalera está atado a la pared por una cuerda de masa despreciable: a) calcular la tensión en la cuerda en función de la distancia $L'$ que recorre el chico; b) si la tensión de ruptura de la cuerda es $300\ N$ y $\beta = 45^o$, ¿en qué posición $L'$ del chico se romperá la cuerda? *(* $T = \frac{g}{tg\beta}\left(\frac{1}{2}M + m\frac{L'}{L}\right)$*,* $L'/L = 0.26$*)*




6. Un cabestrante AB de longitud $L = 1\ m$ y masa $m = 1\ kg$ está articulado en la pared en el punto A. El extremo B está unido a la pared mediante un cable. A lo largo del cabestrante se cuelga una masa $m = 1\ kg$ a una distancia $x$ de la pared:

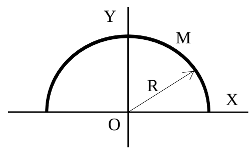
   a. ¿Cuál es la tensión en el alambre en función de $x$? *(* $T = \frac{mg}{sen\beta}\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)$*)*
   b. Calcular la fuerza de reacción en el punto A. *(* $F_A = mg\sqrt{\frac{1}{tg^2\beta}\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{L}\right)^2}$*)*
   c. ¿En qué posición $x$ es máxima la tensión? *(* $x = L$*)*
   d. En ese caso ¿cuáles son los valores de la tensión y la fuerza de reacción en la articulación A? *(* $25.49\ N$*,* $25.95\ N$*)*



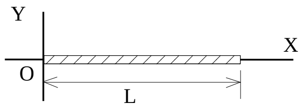
7. **Un hombre de masa $m = 80\ kg$ se encuentra en el centro de una escalera de longitud $L = 2\ m$ y masa despreciable. Tiene como puntos de apoyo el suelo y la esquina superior de la pared de altura $h = 1\ m$. El ángulo que forma la escalera con el suelo es de 45º. Suponiendo que hay rozamiento en el extremo de la escalera que está en contacto con el suelo y no lo hay en el otro, ¿Cuál es el valor mínimo que tiene que tener el coeficiente de rozamiento para que exista el equilibrio, y cuánto vale la fuerza que ejerce la pared sobre la escalera?** ***(0.547, 392 N)***

8. Una varilla delgada de 1 m de largo tiene una masa despreciable. Se colocan 5 cuerpos a lo largo de ella cada uno con una masa de 1.00 kg y situados a 0, 25, 50, 75 y 100 cm de uno de sus extremos. Calcular el momento de inercia del sistema respecto a un eje perpendicular a la varilla, el cual pasa a través de a) un extremo, b) la segunda masa y c) el centro de masa del sistema. Verificar el cumplimiento del teorema de Steiner en los casos a y b. *(1.875 kgm$^2$, 0.9375 kgm$^2$, 0.625 kgm$^2$,---)*

9. Calcular las coordenadas $X_{CM}$ e $Y_{CM}$ del centro de masas del cuerpo de la figura consistente en una semicircunferencia de radio R formada con un alambre de masa M. *(Sol: 0, 2R/$\pi$)*




10. En la figura se muestra una varilla de longitud L y diámetro despreciable que descansa sobre el eje X. Calcular la masa total de la varilla y la coordenada $X_{CM}$ del su centro de masas si a) La varilla tiene una densidad de masa constante $\lambda = \lambda_0$ b) La varilla tiene una densidad de masa variable $\lambda = \lambda_0(1 - x/L)$. *(Sol: $\lambda_0 L$, $L/2$, $\lambda_0 L/2$, $L/3$)*



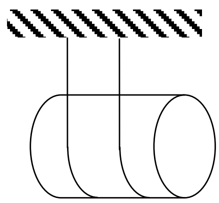

11. Calcular el momento de inercia de un anillo homogéneo de masa M, radio R y espesor despreciable para un eje perpendicular al plano que contiene al anillo y que pasa por su centro. Calcular también el momento de inercia para un eje diametral. *($MR^2$, $MR^2/2$)*

12. Calcular el momento de inercia de un disco homogéneo de masa M, radio R respecto de un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro de masa. $MR^2/2$*)*

13. **Calcular el momento de inercia de una plancha homogénea de lados a y b y masa M respecto de un eje que pasa por su centro de masas y es perpendicular a ella.** ***($M(a^2 + b^2)/12$)***

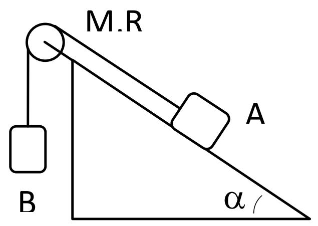
14. Una rueda que rota está sometida a un momento de 10 Nm debido a la fricción sobre su eje. El radio de la rueda es 0.6 m y su masa 100 kg y está girando inicialmente a 175 rad/s. a) ¿Cuánto tiempo tardará la rueda en detenerse? b) ¿Cuántas revoluciones dará hasta detenerse? *(315 s, 4387 rev)*

15. Un cilindro macizo y homogéneo de radio R y masa M está suspendido horizontalmente por dos hilos. Inicialmente está en reposo y al dejarlo libre cae girando. Calcular: a) La aceleración del centro de masas del cilindro durante la caída. b) La velocidad del centro de masas cuando se halla desenrollado una longitud L de los hilos. c) La tensión en cada hilo. *($2g/3$, $\sqrt{4gL/3}$, $mg/6$)*

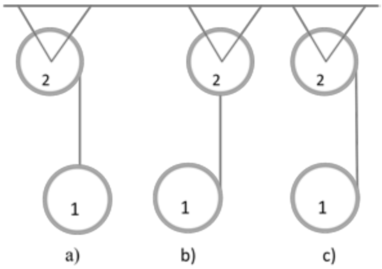


16. Una varilla de masa m y longitud L, puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de su extremo A. Inicialmente se coloca en una posición horizontal y luego se suelta. Cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal, calcular a) su aceleración angular, b) su velocidad angular y c) las fuerzas en el lugar de suspensión. *($3g\cos\theta/2L$, $\sqrt{3g\,sen\theta/L}$, $-\frac{9mg\,sen\theta\cos\theta}{4}\hat{\imath} + \frac{mg(1+9sen^2\theta)}{4}\hat{\jmath}$)*

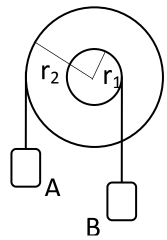
17. El sistema de la figura consiste en dos bloques A y B conectados mediante una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea. La polea puede considerarse como un disco de masa M y radio R que gira sin rozamiento. Existe rozamiento entre el bloque A y la superficie y el coeficiente de rozamiento es $\mu$=0.2 pero el ángulo $\alpha$ es lo suficientemente pequeño para que el sistema realmente se mueva. Encontrar la aceleración del sistema y las tensiones en la cuerda. (M=2 kg, $M_A$=M=2 kg, $M_B$=3M=6 kg, $\mu$=0.2, $\alpha$=40º) *(4.80 m/s², 30.1 N, 25.3 N)*



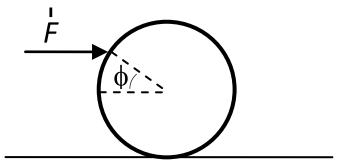

18. Los discos de la figura tienen masas M y radios R iguales. Se pide en los tres casos el valor de la aceleración angular de cada disco y el valor de la tensión de la cuerda. Supóngase que las cuerdas no resbalan sobre los discos. *(a: 2g/3R, Mg/3; b: 2g/3R, Mg/3; c: 2g/5R, Mg/5)*



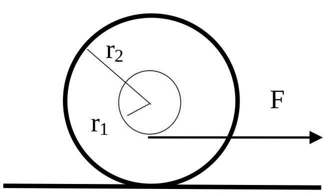

19. El momento de inercia de las poleas de la figura es 0.3 kg m². Las masas de A y B son 30 kg y 80 kg respectivamente. Hallar la aceleración angular de la polea y las tensiones en las cuerdas cuando se libera el sistema ($r_1$=3 cm, $r_2$=7 cm) *5.67 rad/s², 771 N, 306 N)*



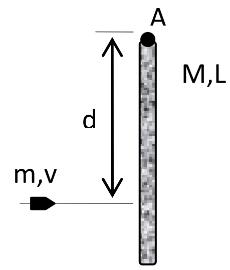

20. Sobre un cilindro de masa M y radio R se aplica una fuerza horizontal. El cilindro rueda sin deslizar por una superficie horizontal. Estudiar el valor de la fuerza re rozamiento en función de la posición en la que se aplica la fuerza. Comenzando del reposo, ¿Cuál será la distancia recorrida por el cilindro cuando éste haya adquirido una velocidad v? *($F(1-2sen\phi)/3,\ 3Mv^2/4F(1+sen\phi)$)*




**21. Considérese un yoyo de masa M y radios $r_1$ y $r_2$, que está sometido a una fuerza horizontal F y que rueda sin deslizar. a) encontrar la aceleración de su centro de masas. b) Encontrar el valor de la máxima fuerza F que se puede aplicar al yoyo para que éste no deslice. El coeficiente de rozamiento entre el yoyo y el suelo es $\mu$. (Tómese $I = Mr_2^2/2$) *(Sol: $2F(1-\frac{r_1}{r_2})/3M,\ 3\mu Mg/(1+2\frac{r_1}{r_2})$)***



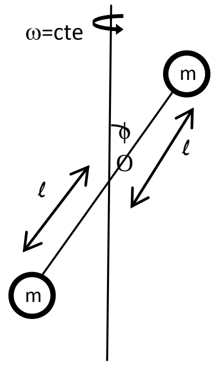
22. Una varilla de longitud $L$ y masa $M$ puede rotar libremente alrededor de un pivote en A. Una bala de masa $m$ y velocidad v golpea la varilla a una distancia $d$ de A, quedando incrustada en la varilla:




   a. ¿Cuál es el valor del momento angular del sistema respecto de A inmediatamente antes y después del choque de la bala contra la varilla? *($mvd$)*

   b. ¿bajo qué condiciones se conservará también el momento lineal durante el choque? *($d = 2L/3$)*

23. Dos partículas iguales de masa m se encuentran unidas a una varilla sin masa de longitud $2l$. La varilla gira con velocidad angular $\omega$ constante formando un ángulo $\phi$ en torno a un eje vertical que pasa por el centro de la varilla tal y como muestra la figura. Suponiendo el origen O en el centro de la varilla, determinar:

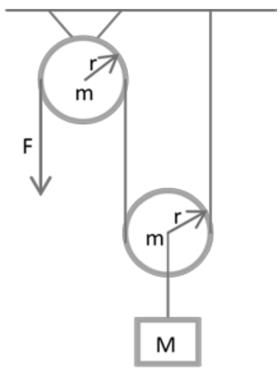



   a. Momento angular del sistema formado por las dos partículas en función del ángulo $\phi$ (módulo, dirección y sentido).

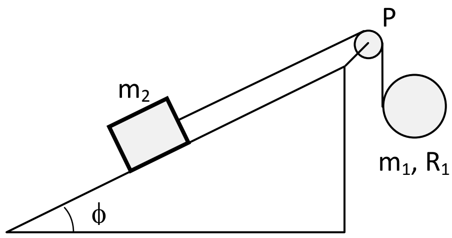
   b. b) Momento de inercia I del sistema en torno al eje de giro en función de $\phi$.

   c. Para qué valor de $\phi$ se verifica que $\vec{L} = I\vec{\omega}$

24. Una masa M está suspendida de un sistema de poleas, una fija y otra móvil, tal y como se indica en la figura. Las poleas son iguales y tienen masa m y radio r. Calcular el valor de la aceleración de la masa M cuando se ejerce una fuerza F de intensidad constante. ¿Sería el resultado igual si en vez de aplicar una fuerza F pusiéramos una masa de peso P=F? ($a = \frac{4F-2(m+M)g}{7m+2M}$)




25. Un cilindro homogéneo de masa $m_1$ y radio $R_1$, lleva arrollada una cuerda inextensible y de masa despreciable, que después de pasar por una polea P de masa y rozamiento despreciable, va unida a un cuerpo de masa $m_2$ tal como indica la figura. No hay rozamiento entre el cuerpo de masa $m_2$ y la superficie por la que desliza. Determinar:




   a. Aceleración angular del cilindro. ( $\alpha = \frac{g}{R_1}\frac{2m_{2(1+\text{sen}\phi)}}{m_1+3m_2}$)

   b. Aceleraciones lineales de las dos masas. ( $a_1 = \frac{m_1+m_2(2-\text{sen}\phi)}{m_1+3m_2}g,\ a_2 = \frac{m_1-3m_2\text{sen}\phi}{m_1+3m_2}g$)

   c. Tensión de la cuerda. ( $T = \frac{m_1 m_2(1+\text{sen}\phi)}{m_1+3m_2}g$)

   d. Plantear las ecuaciones del movimiento (traslación y rotación) de cada objeto y las relaciones entre aceleraciones en el caso de que la polea P (cilindro) tenga masa $m_3$ y radio $R_3$.

26. Dos niños de 30 kg están sentados en extremos opuestos de una barra horizontal de 2.5 m de largo y de 12 kg de masa. La barra está rotando a 5 rpm con respecto a un eje que pasa por su centro. ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve 0.5m hacia el centro de la barra sin tocar el suelo? ¿Cuál es el trabajo que realizan los niños? (*12.5 rpm, 20.56 J)*

27. Una bola de billar de radio R se encuentra inicialmente en reposo sobre una mesa de billar horizontal. La bola es golpeada mediante un taco, que desarrolla una fuerza F durante un tiempo $\tau$. El taco golpea a la bola en un punto situado a una distancia h de la mesa.

    a. Demostrar que la velocidad angular inicial $\omega_0$ está relacionada con la velocidad inicial del centro de masas por: $\omega_0 = \frac{5v_{CM.0}(h-R)}{2R^2}$
    b. ¿Cuál debe ser la altura h para que la bola ruede sin deslizar desde el comienzo?
    c. Si h=R la velocidad angular inicial de la bola es nula. En este caso, demostrar que la bola deslizará por la pista hasta recorrer una distancia $d = \frac{12v_{CM.0}^2}{49\mu g}$ y después rodará sin deslizar. ($\mu$ es el coeficiente de rozamiento entre la bola y la mesa).

    NOTA: en los apartados (a.) y (b.) despreciar la fuerza de rozamiento.