Tema 4

Preliminares de Cálculo

Ejercicios y Soluciones

4.1. Calcula los siguientes límites:

(I) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$

(II) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$

(III) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

(IV) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(V) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt[3]{x^3-ax^2}\right)$

(VI) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)^{\dfrac{x^3-2x}{x-3}}$

(VII) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(VIII) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

(IX) $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\ln x)$

(X) $\lim\limits_{x\to 0} x\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(XI) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

(XII) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{x-2}$

Solución.

(I) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{1-n}}}{n}$

(II) $-\infty$

(III) $-\dfrac{1}{2}m(m-n)n$

(IV) 1

(V) $\dfrac{2a}{3}$

(VI) 0

(VII) 1

(VIII) 0

(IX) ∞

(X) 0

(XI) 2

(XII) $-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

4.2. Calcula los siguientes límites laterales:

(I) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$

(II) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

(III) $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(IV) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

(V) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{e^{|x|}}{x}$

(VI) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} e^{\frac{1}{x}}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

Solución.

(I) $-\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}$

(II) 0

(III) $\dfrac{5}{4}$

(IV) $1, \quad 0$

(V) $-\infty, \quad \infty$

(VI) $0,$ no existe

4.3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(I) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 3x^4}{\operatorname{sen}^3 2x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

(II) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 2 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

(III) $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solución.

(I) Es discontinua en $x = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

(II) Discontinua en $x = 0$.

(III) Continua en $\mathbb{R}$.

4.4. Calcula el valor de las siguientes funciones en el punto $x = 0$ para que sean continua en dicho punto:

(I) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$

(II) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

(III) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{3x + \sqrt{4x + \sqrt{x}}}}$

(IV) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

(V) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(VI) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Solución.

(I) n

(II) $\dfrac{3}{2}$

(III) 0

(IV) 2

(V) e

(VI) $\dfrac{1}{2}$

4.5. Calcula las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 3x + 1$ con un error menor que una décima.

Solución.

Utilizando el Teorema de Bolzano podemos ver que las raíces están los intervalos $(-1'9,\ -1'8)$, $(0'3,\ 0'4)$ y $(1'5,\ 1'6)$.

4.6. Prueba que la ecuación $\sin x = x - 1$ tiene al menos una raíz real.

Solución.

$f(x) = \sin x - x + 1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, \pi]$.

4.7. Halla la derivada de las siguientes funciones:

(I) $f(x) = \sin^3(5x)$

(II) $f(x) = \dfrac{1}{\log^2 x}$

(III) $f(x) = \log(\tan(1-x))$

(IV) $f(x) = \sqrt{e^x \cdot \cos x - \tan x}$

(V) $f(x) = \arccos x^2$

(VI) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(VII) $f(x) = (x^2+1)^{5e^x}$

(VIII) $f(x) = \arctan x \sec x$

(IX) $f(x) = \dfrac{(x+2)^3\, x^5}{(1-x^2)^4}$

(X) $f(x) = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$

(XI) $f(x) = x^x$

(XII) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

(XIII) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(XIV) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Solución.

(I) $f'(x) = 15\cos(5x)\sin^2(5x)$

(II) $f'(x) = -\dfrac{2}{x\ln^3 x}$

(III) $f'(x) = -\csc(1-x)\sec(1-x)$

(IV) $f'(x) = \dfrac{e^x\cos x - \sec^2 x - e^x \sin x}{2\sqrt{e^x\cos x - \tan x}}$

(V) $f'(x) = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(VI) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x(x-1)^2}},\ \ x<0$

(VII) $f'(x) = 5e^x(1+x^2)^{-1+5e^x}\left(2x + (1+x^2)\ln(1+x^2)\right)$

(VIII) $f'(x) = \dfrac{\sec x}{1+x^2} + \arctan x \sec x \tan x$

(IX) $f'(x) = \dfrac{3(x+2)^2 x^5}{(1-x^2)^4} + \dfrac{(x+2)^3 x^5}{(1-x^2)^4}\left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{4}{x-1}\right), \quad x \neq 1, -1$

(X) $f'(x) = \dfrac{x^7}{8(1-x^2)^5}, \quad x \neq 1, -1$

(XI) $f'(x) = x^x(1+\ln x)$

(XII) $f'(x) = \sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}, \quad x > 0$

(XIII) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(XIV) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{\textbf{4.8.}}$ Calcula la derivada de orden n, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, de las funciones:

(I) $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

(II) $y = \ln(1-x)^5$

(III) $y = x\ \ln(1+x)$

(IV) $y = \operatorname{sen}(2x)\ \cos(2x)$. Pista: Utiliza la fórmula del ángulo doble.

Solución.

(I) $y^{(n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n} + (n-1)!\cdot(1-x)^{-n}}{2}$

(II) $y^{(n} = -5\cdot(n-1)!\cdot(1-x)^{-n}$

(III) $y^{(n} = \dfrac{(-1)^n\cdot(n-2)!\cdot(n+x)}{(1+x)^n}$

(IV) Las derivadas pares son de la forma

$$y^{(2n} = (-1)^n\cdot 2\cdot 4^{2n-1}\cdot\sin(4x)$$

y las impares

$$y^{(2n-1} = (-1)^{n+1}\cdot 2\cdot 4^{2n-2}\cdot\sin(4x).$$

$\boxed{\textbf{4.9.}}$ Dada la curva $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ escribe la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $(2, -3+\sqrt{3})$.

Solución.

Como $y' = \dfrac{2x-2}{2y+6}$, entonces $y = (-3+\sqrt{3}) + \sqrt{3}(x-2)$.

4.10. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^{\ln x}$ en el punto $x = e$.

Solución.

$f'(x) = x^{\ln x}\,\dfrac{2\ \ln x}{x}, \quad y = 2x - e.$

4.11. Halla la derivada de $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \sin x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

Solución.

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ \cos x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

4.12. Demuestra que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$ y estudia la continuidad de $f'(x)$.

Solución.

$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

La función $f(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ pero $f'(x)$ tiene una discontinuidad oscilatoria en 0.

4.13. Calcula los siguientes límites:

(I) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(II) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$

(III) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$

(IV) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{(x\ \sin x)^{\frac{3}{2}}}$

(V) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(VI) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$

(VII) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

(VIII) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(IX) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(X) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

Solución.

(I) 0 (II) -2 (III) 0 (IV) $\frac{1}{6}$ (V) $\frac{1}{3}$ (VI) e^{-6} (VII) $\frac{1}{2}$ (VIII) -1 (IX) $\frac{1}{2}$ (X) 1

4.14. Demuestra que la función $\tanh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ es estrictamente creciente. Halla la derivada de su función inversa $\operatorname{arctanh} x$.

Solución.

$$\tanh' x = 1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 > 0 \text{ para todo } x\in\mathbb{R},$$

$$(\operatorname{arctanh}\ x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

4.15. Encuentra los extremos relativos de las funciones:

(I) $f(x)=\cos x$

(II) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

(III) $f(x)=|x-1|$

(IV) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Solución.

(I) Mínimos relativos en $x=(2n+1)\pi$, máximos relativos en $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

(II) Mínimo relativo en $x=0$, no hay máximos relativos.

(III) Mínimo relativo en $x=1$, no hay máximos relativos.

(IV) Mínimo relativo en $x=-1$, no hay máximos relativos.

4.16. Encuentra los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos dados:

(i) $f(x) = (x-1)^2(4-x)$ en $[1,5]$.

(ii) $f(x) = (x-1)^2(4-x)$ en $[0,3]$.

(iii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1,1]$.

(iv) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[\frac{1}{2},1]$.

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[-1,1]$.

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1,2]$.

(vii) $f(x) = \tan x$ en $[0,\frac{\pi}{4}]$.

(viii) $f(x) = \tan x$ en $[-\pi,\pi]$.

Solución.

(i) Mínimo absoluto de -16 en $x=5$, máximo absoluto de 4 en $x=3$.

(ii) Mínimo absoluto de 0 en $x=1$, máximo absoluto de 4 en $x=3$ y $x=0$.

(iii) Mínimo absoluto de 0 en $x=-1$ y $x=1$, máximo absoluto de 1 en $x=0$, 4 en $x=3$ y $x=0$.

(iv) Mínimo absoluto de 0 en $x=1$, máximo absoluto de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $x=\frac{1}{2}$.

(v) No hay ni mínimo ni máximo absoluto.

(vi) Mínimo absoluto de $\frac{1}{2}$ en $x=2$, máximo absoluto de 1 en $x=1$.

(vii) Mínimo absoluto de 0 en $x=0$, máximo absoluto de 1 en $x=\frac{\pi}{4}$.

(viii) No hay ni mínimo ni máximo absolutos.

4.17. Usa aproximaciones lineales para encontrar el valor aproximado de:

(i) $\sqrt{1,01}$ (ii) $\sqrt[3]{999}$ (iii) $\cos(0,2)$

Estima el error.

Solución.

(i) $1,005$, con un error menor que $0,0000125$.

(ii) $9,99\hat{6}$, con un error menor que 9^{-6}.

(iii) 1, con un error menor que $0,2$.

4.18. Halla el polinomio de MacLaurin de grado menor o igual que 4, $P_4(x)$, para la función dada:

(i) $f(x) = e^{-x}$ (ii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (iii) $f(x) = \operatorname{tg} x$

Solución.

(I) $P_4(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$

(II) $P_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

(III) $P_4(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$

4.19. Calcula los polinomios de Taylor de grado menor o igual que n centrados en 1, $P_n(x)$, para la función $f(x) = \ln\ x$.

Solución.

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

4.20. Calcula $\ln\ (1,1)$ con un error menor que 0,0001.

Solución.

Por el problema anterior, $\ln\ (1+0,1) = P_n(0,1) + R_n(0,1)$ y existe $0 < c < 0,1$ tal que

$$P_n(0,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(0,1)^n}{n}, \qquad |R_n(0,1)| = \left|\frac{(-1)^n(0,1)^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}\right| < \frac{(0,1)^{n+1}}{n+1}.$$

Para $n = 3$, $|R_3(0,1)| < (0,1)^4/4 < 0,0001$, luego $\ln\ (1,1) \approx P_3(0,1) = 0,1 - \dfrac{(0,1)^2}{2} + \dfrac{(0,1)^3}{3} = 0,095\hat{3}$.

4.21. Compara los polinomios de MacLaurin para las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$. ¿Qué relación hay entre ellos? ¿Se puede generalizar esta relación al caso en el que $f(x)$ es una función cualquiera y $g(x) = xf(x)$?

Solución.

La relación para una función cualquiera $f(x)$ y $g(x) = xf(x)$ es

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k}(0)x^k}{k!} = x\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k}(0)x^k}{k!}\right)$$

para todo n.

4.22. Demuestra el siguiente resultado que justifica el empleo de los términos *función par* y *función impar*: *Si f es una función par (respectivamente, impar) e infinitamente diferenciable, sus polinomios de MacLaurin sólo contienen potencias pares (respectivamente, impares) de x.*

Solución.

Si llamamos $h(x) = f(-x)$, por la *Regla de la cadena*, $h'(x) = -f'(-x)$; y por inducción, $h^{(n}(x) = (-1)^n f^{(n}(-x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si f es par, entonces $h(x) = f(x)$. Por lo tanto, $f^{(n}(0) = h^{(n}(0) = (-1)^n f^{(n}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y esto implica que $f^{(n}(0) = 0$ para todo n impar. Es decir, los polinomios de MacLaurin de f sólo tienen potencias pares ya que los coeficientes de las potencias impares son 0.

Análogamente para f impar.