EXAMEN CONVOCATORIA ORDINARIA
12 de enero de 2017

1. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - z = 0,\ x + y + t = 0\} \quad \text{y}$$

$$T = \langle (1,\, -1,\, 1,\, 0),\, (0,\, 1,\, 0,\, 1) \rangle,$$

   (I) (*1 pto.*) encuentra una base de S e indica cuál es su dimensión.

   (II) (*1 pto.*) Si $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal tal que:
   - $\operatorname{Ker} f = S$
   - $f(e_1) = (1,\, 0,\, 1,\, 1)$ y $f(e_2) = (0,\, 1,\, 0,\, 1)$.

   Calcula $f(e_3)$ y $f(e_4)$ siendo $[e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4]$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   (III) (*0,3 ptos.*) Escribe la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y su expresión general.

   (IV) (*1 pto.*) Calcula la dimensión de $\operatorname{Im} f$ y prueba que $\operatorname{Im} f = T$. Razona si la aplicación f es biyectiva o no.

2. Dada la matriz 3×3 sobre $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

   (I) (*2 ptos.*) determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz A.

   (II) (*1,3 ptos.*) Para $a = 0$, determina una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

3. Dada la función $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\, dt$,

   (I) (*1,1 ptos.*) estudia el crecimiento y decrecimiento de $F(x)$. ¿Tiene esta función algún máximo o mínimo?

   (II) (*1,2 ptos.*) Determina $P_2(x)$, el polinomio de MacLaurin de orden 2 de $F(x)$. Usa este resultado para calcular un valor aproximado de $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\, dt$ mediante $P_2(1)$.

   (III) (*1,1 ptos.*) Halla el valor exacto de $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{1+t^4}\, dt$.