Modelado analítico de un motor DC

Entrega 1

Jaime Pérez Sánchez
ETSIT – UPM – Sistemas electrónicos de control
Curso 2017-2018

1. A) Obtención de la función de transferencia

En este trabajo se va a modelar de manera teórica un motor DC A-max 32, de 12 V utilizando la hoja de características proporcionada por el fabricante.

Las ecuaciones eléctricas y mecánicas del motor DC tienen la forma:

$$u_m(t) = R_m\, i(t) + L_m \frac{d\, i(t)}{d\, t} + e_b(t)$$

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) + \tau_f(t)$$

Donde:

$u_m(t)$ ≡ Tensión de entrada al motor	$\tau_m(t)$ ≡ Par motor
$i(t)$ ≡ Corriente eléctrica del motor	$\ddot{\theta}_m(t)$ ≡ Aceleración angular del motor
$e_b(t)$ ≡ Fuerza electromotriz	J_m ≡ Inercia del motor
R_m ≡ Resistencia nominal	$\tau_l(t)$ ≡ Par de la carga visto desde el motor
L_m ≡ Inductancia del rotor	$\tau_f(t)$ ≡ Par de fricción

Además, satisface las siguientes ecuaciones de acoplo electromagnético:

$$e_b = k_b * \dot{\theta}_m(t)$$

$$\tau_m = k_m * i(t)$$

Relacionando todas estas ecuaciones, simplificando y aplicando la transformada de Laplace, se obtiene la siguiente función de transferencia del motor:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{k_m}{(J_m\, s + B_m)\,(L_m\, s + R_m) + k_b * k_m}$$

Se pueden distinguir dos polos reales, de modo que la podemos escribir de la siguiente forma:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s - p_1)\,(s - p_2)}$$

Donde K'_m es:

$$K'_m = \frac{k_m}{J_m * L_m}$$

En la hoja de características del motor DC que nos proporciona el fabricante se pueden encontrar la mayoría de estos parámetros:

Parámetros	Valor (Hoja características)	Valor (S.I.)
U_N (Nominal voltaje)	12 [V]	12 [V]
R_m (Terminal resistance)	2,23 [Ω]	2,23 [Ω]
L_m (Terminal inductance)	0,264 [mH]	$2,64 * 10^{-4}$ [H]
J_m (Rotor inertia)	41,4 [gcm^2]	$4,14 * 10^{-6}$ [kgm^2]
t_m (Mechanical time constant)	15,7 [ms]	$1,57 * 10^{-2}$ [s]
k_b (1/Speed constant)	$2,538 * 10^{-3}$ [V/rpm]	$2,4237 * 10^{-2}$ [Vs/rad]
k_m (Torque constant)	24,3 [mNm/A]	$2,43 * 10^{-2}$ [Nm/A]
I_0 (No load current)	58 [mA]	$5,8 * 10^{-2}$ [A]
n_0 (No load speed)	4660 [rpm]	488 [rad/s]

A excepción del coeficiente de fricción viscosa B_m que se puede estimar mediante dos métodos, que deberían proporcionar valores relativamente parecidos:

1. Utilizando la ecuación de la constante de tiempo mecánica t_m:

$$B_m = \frac{J_m}{t_m} - \frac{k_b * k_m}{R_m} = -4,13 * 10^{-7}\, Nms$$

   Observamos que debido al exceso de truncamiento en los valores que da el fabricante el coeficiente nos da negativo, esto es erróneo por lo que no utilizaremos este método.

2. Utilizando la ecuación de la corriente del motor sin carga I_0:

$$B_m = \frac{k_m * I_0}{\dot{\theta}_{mN}} = 2,888 * 10^{-6}\, Nms$$

   Este valor sí es coherente de modo que utilizaremos este a partir de ahora.

A continuación, calculamos los polos de la función de transferencia dados por:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_e} + \frac{1}{t'_m}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{t_e} + \frac{1}{t'_m}\right)^2 - 4\frac{k_b * k_m}{J_m * L_m}}$$

Siendo t'_m y t_e:

$$t'_m = \frac{J_m}{B_m} \qquad\qquad t_e = \frac{L_m}{R_m} = 118,385\mu s$$

Obteniendo los polos reales negativos, con uno de ellos claramente dominante (p_1):

$$p_1 = -64,29$$

$$p_2 = -8382,031$$

Finalmente podemos expresar la función de transferencia de la siguiente manera:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s-p_1)\,(s-p_2)} = \frac{22.233.201,58}{(s+64,29)\,(s+8382,031)}$$

1. B) Simplificación de la función de transferencia

Tras obtener la función de transferencia del motor DC, utilizaremos el método de eliminación del polo no dominante para simplificarla.

La ganancia a bajas frecuencias es:

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{K'_m}{p_1 * p_2}$$

Simplificando el polo no dominante de la función de transferencia quedará de la siguiente forma:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + |p_1|}$$

Y puesto que se debe cumplir la restricción de ganancia a bajas frecuencias, K_m quedaría:

$$K_m = \frac{K'_m}{|p_1|} = \frac{k_m}{J_m * L_m * |p_1|}$$

Finalmente obtenemos la función de transferencia simplificada:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{2652,5}{s + 64,29}$$