Práctica 3. Métodos iterativos para sistemas lineales.

Implementar los métodos de Jacobi y relajación para resolver de manera aproximada sistemas del tipo $Au = b$.

a) Para una matriz invertible A de tamaño $n \times n$ y un vector b de n componentes, deseamos obtener la solución aproximada del sistema mediante iteración de Jacobi. Como argumentos extra, se pedirá una tolerancia, tol, y un número máximo permitido de iteraciones, max_iter, con los que crear un test de parada. Lo implementaremos en el **APÉNDICE A**.

La función nos debe devolver, dados A, b, tol, y max_iter:

- El vector u de soluciones aproximadas.
- Si converge, el número de iteraciones n_iter en el que ha llegado al residuo relativo admisible tol. Si no converge, un mensaje de error.

b) Para una matriz invertible A de tamaño $n \times n$ y un vector b de n componentes, deseamos obtener la solución aproximada del sistema mediante el método de relajación con parámetro de relajación w. Como argumentos extra, se pedirá una tolerancia, tol, y un número máximo permitido de iteraciones, max_iter, con los que crear un test de parada. Lo implementaremos en el **APÉNDICE B**.

La función nos debe devolver, dados A, b, w, tol, y max_iter:

- El vector u de soluciones aproximadas.
- Si converge, el número de iteraciones n_iter en el que ha llegado al residuo relativo admisible tol. Si no converge, un mensaje de error.
- La norma del residuo absoluto, r.

c) A continuación, resuelve el siguiente sistema de forma aproximada mediante el método de Jacobi. Comprueba que la solución obtenida es lógica.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
A = [7,5,1;5,8,1;1,1,3];
b = [1;2;3];
tic
[u,n_iter] = iterJacobi(A,b,0.00001,10000);
toc
```

```
Elapsed time is 0.003765 seconds.
```

```
u
```

```
u = 3×1
   -0.1591
    0.2273
    0.9773
```

```
n_iter
```

```
n_iter = 48
```

```
A\b
```

```
ans = 3×1
   -0.1591
    0.2273
    0.9773
```

Ahora resuélvelo mediante el método de relajación con parámetro $w = 1$ (Gauss-Seidel). Comprueba que la solución obtenida es lógica y compara el número de iteraciones con las necesarias por el método de Jacobi.

```
tic
[u,n_iter,~] = iterRelajacion(A,b,1,0.00001,10000);
toc
```

```
Elapsed time is 0.004814 seconds.
```

```
u
```

```
u = 3×1
   -0.1591
    0.2273
    0.9773
```

```
n_iter
```

```
n_iter = 14
```

```

% El método de relajación ha requerido menos iteraciones
% posiblemente debido a que utiliza los nuevos resultados
% el momento en que se obtienen.

% Sin embargo, vemos que el tiempo que tarda Jacobi es menor
% puede deberse a que admite paralelismo o que el tiempo por
% iteracion sea menor.
```

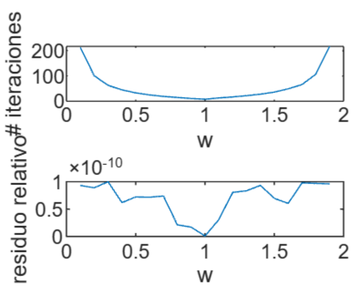
d) Por último, resuelve el sistema dado por A y b en 'variables2.mat' mediante el método de relajación para parámetros $w = 0.1 : 0.1 : 1.9$. Rellena el código para obtener dos gráficas que muestren el número de iteraciones y el residuo relativo con respecto a w. ¿Qué valor de w crees que ha sido el mejor para resolver este sistema? Justifícalo en un comentario.

```
%Utiliza estos parámetros
```

```
w=0.1:0.1:1.9;
tol=1e-10;
max_iter=250;

%Escribe aquí tu código
load("variables2.mat");
iteraciones = zeros(length(w),1);
residuos_absolutos = zeros(length(w),1);
for i = 1:length(w)
[~,iteraciones(i),residuos_absolutos(i)] =
iterRelajacion(A,b,w(i),tol,max_iter);
end
residuos_relativos = residuos_absolutos / norm(b,Inf);


%Rellena los plots con las variables adecuadas.
subplot(2,1,1)
plot(w,iteraciones)
xlabel('w')
ylabel('# iteraciones')
subplot(2,1,2)
plot(w,residuos_relativos)
xlabel('w')
ylabel('residuo relativo')
```




```
% El mejor valor es w = 1, ya que se obtiene el
% mínimo tanto de iteraciones como de residuo entre
% los datos estudiados
```

Apéndice A. Método de Jacobi

```
function [u,n_iter]=iterJacobi(A,b,tol,max_iter)

%Comprobar convergencia. Diagonalmente dominante por filas
if all((2*abs(diag(A))) <= sum(abs(A),2))
    disp("No es diagonalmente dominante. No se puede asegurar que sea
convergente.");
    return;
```

```
end

N = size(A,1);
n_iter = 0;
r = Inf;
d = zeros(N,1);
u = zeros(N,1);
norma_b_tol = norm(b, Inf) * tol;
while(n_iter <= max_iter && norm(r, Inf) >= norma_b_tol)
    r = b - A*u;
    d = r ./ diag(A);
    u = u + d;
    n_iter = n_iter + 1;
end

end
```

Apéndice B. Método de relajación

```
function [u,n_iter,rn]=iterRelajacion(A,b,w,tol,max_iter)

%comprobamos convergencia
if w <= 0 || w >= 2
    disp("No es convergente.");
    return;
elseif ~ishermitian(A) || ~all(eig(A) > 0)
    disp("No se puede asegurar que sea convergente.");
    return
end

N = size(A,1);
assert(N == size(A,2) && N == length(b), "las dimensiones no coinciden");
r = zeros(N,1);
d = zeros(N,1);
u_anterior = zeros(N,1);
u = zeros(N,1);
tol_norma_b = tol * norm(b,Inf);

for n_iter = 1:max_iter
    for i = 1:N
        r(i) = b(i) - A(i, 1:i-1) * u(1:i-1) - A(i, i:N) * u_anterior(i:N);
        d(i) = w * r(i) / A(i, i);
        u(i) = u_anterior(i) + d(i);
    end
    u_anterior = u;
    if norm(r,Inf) < tol_norma_b
        rn = norm(r, Inf);
        break;
    end
end
```

```
rn = norm(r,Inf);
end
```