Práctica 6. Fórmulas de diferenciación e integración numérica.

Implementar métodos de aproximación de derivadas e integrales y aplicarlos para comprobar su orden.

a) Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ y un paso pequeño $h \in \mathbb{R}$, deseamos obtener una aproximación de su derivada $f'(x)$. Para ello utilizaremos la fórmula de segundo orden. Lo implementaremos en el **APÉNDICE A**.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

La función nos debe devolver, dados f, x y h:

- El valor D aproximado de la derivada $f'(x)$.

b) Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, un intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$ y un natural $m \in \mathbb{N}$, deseamos obtener una aproximación de su integral por la fórmula del trapecio compuesta en $[a,b]$. Lo implementaremos en el **APÉNDICE B**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b) \right)$$

La función nos debe devolver, dados f, a, b y m:

- El valor I de la integral aproximada por la fórmula del trapecio compuesta.

c) Para una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, un intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$ y un natural $m \in \mathbb{N}$, deseamos obtener una aproximación de su integral por la fórmula de Simpson compuesta en $[a,b]$. Lo implementaremos en el **APÉNDICE C**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih) + f(b) \right)$$

La función nos debe devolver, dados f, a, b y m:

- El valor I de la integral aproximada por la fórmula de Simpson compuesta.

d) Aproxima el valor de la derivada $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ siendo f la función $f(x) = \sin(x^2)$.

```
f = @(x)sin(x.^2);
x = sqrt(pi/2);
```

```
D = diffCentrada(f,x,0.1)
```

```
D = -0.0248
```

Ahora aproxima el valor de la misma derivada con pasos $h = [10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}]$ y rellena el siguiente código para comprobar el orden del método.

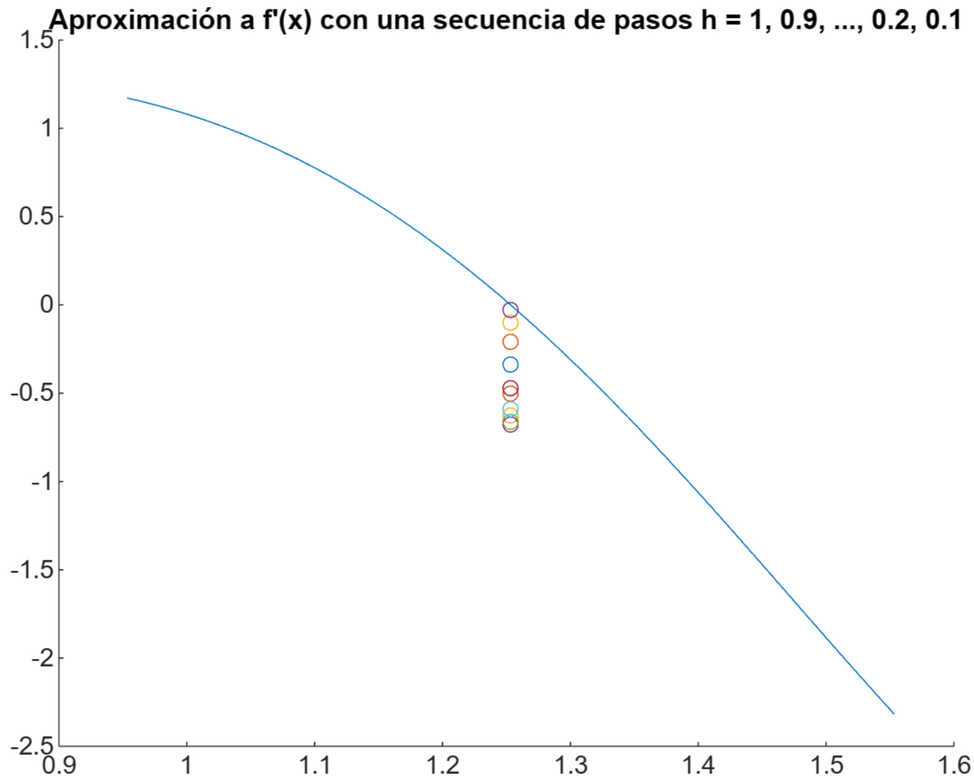
```
A=zeros(4,3);
%Rellena en la columna 1 de esta matriz los pasos, en la columna 2 el error
de la
%aproximación y en la columna 3 el cociente error/(h^2).
A(:,1) = 10.^-(1:4);
D = diffCentrada(f,x,A(:,1));
A(:,2) = abs(D); %f'(x) = 2xcos(x^2) -> f'(sqrt(pi/2)) = 0 -> error = |D - 0|
A(:,3) = A(:,2) ./ (A(:,1).^2);
%Cabecera de la Tabla
t3='      h     ';
t4='  error ';
t5=' error/h^2';
l1='--------';
l2='------';
l3='----------';
l3b='   ----------';
l4='    ------------';

%Tabla con cabecera
fprintf('%11s %12s %14s \n',t3,t4,t5,l3,l3b,l4)
```

```
      h            error       error/h^2
 ----------    ----------     ------------
```

```
fprintf('%12.6e %14.6e %14.6e \n',A.')
```

```
1.000000e-01   2.480420e-02   2.480420e+00
1.000000e-02   2.506366e-04   2.506366e+00
1.000000e-03   2.506626e-06   2.506626e+00
1.000000e-04   2.506662e-08   2.506662e+00
```

```
% El órden del método es 2, pues al dividir entre h^2 el error relativo se
% mantiene aproximadamente constante
z = linspace(x-0.3,x+0.3,50);
df = @(x) 2.*x .* cos(x.^2);
hold on
plot(z,df(z))
scatter(x,diffCentrada(f,x,(1:-0.1:0.1)))
title("Aproximación a f'(x) con una secuencia de pasos h = 1, 0.9, ..., 0.2,
0.1")
hold off
```



e) Aproxima el valor de la integral $\int_0^{\pi} sin(x)\, dx$ por ambos métodos que has implementado. Para el método del trapecio, hazlo para $m = [3, 31, 310, 3100]$ y rellena el siguiente código para comprobar el orden del método.

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{dx} = -\cos(x)]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

```
A=zeros(4,3);
%Rellena en la columna 1 de esta matriz los pasos, en la columna 2 el error
de la
%aproximación y en la columna 3 el cociente error/(h^2).
a = 0; b = pi; m = [3,31,310,3100];
I = zeros(4,1);
f = @(x)sin(x);
for i = 1:4
    I(i) = integTrapecio(f,a,b,m(i));
end
A(:,1) = (b - a)./m;
A(:,2) = abs(I - 2);
A(:,3) = A(:,2) ./ (A(:,1).^2);

%Cabecera de la Tabla
t3='      h      ';
t4='  error ';
```

```
t5=' error/h^2';
l1='---------';
l2='------';
l3='----------';
l3b='    ----------';
l4='     ------------';

%Tabla con cabecera
fprintf('%11s %12s %14s \n',t3,t4,t5,l3,l3b,l4)
```

```
      h            error        error/h^2
 ----------    ----------     ------------
```

```
fprintf('%12.6e %14.6e %14.6e \n',A.')
```

```
1.047198e+00   1.862006e-01   1.697946e-01
1.013417e-01   1.711983e-03   1.666952e-01
1.013417e-02   1.711693e-05   1.666670e-01
1.013417e-03   1.711690e-07   1.666667e-01
```

```
% El órden del método es 2, pues al dividir entre h^2 el error relativo se
% mantiene aproximadamente constante
```

Para el método de Simpson, hazlo para $m = [2, 10, 100, 1000]$ y rellena el siguiente código para comprobar el orden del método

```
A=zeros(4,3);
%Rellena en la columna 1 de esta matriz los pasos, en la columna 2 el error
de la
%aproximación y en la columna 3 el cociente error/(h^4).

%Escribe aquí tu código
m = [2,10,100,1000];
for i = 1:4
    I(i) = integSimpson(f,a,b,m(i));
end
A(:,1) = (b-a)./(2.*m);
A(:,2) = abs(I - 2);
A(:,3) = A(:,2)./(A(:,1).^4);

%Cabecera de la Tabla
t3='      h      ';
t4='  error ';
t5=' error/h^4';
l1='---------';
l2='------';
l3='----------';
l3b='    ----------';
l4='    ------------';

%Tabla con cabecera
fprintf('%11s %12s %14s \n',t3,t4,t5,l3,l3b,l4)
```

```
      h             error        error/h^4
  ----------     ----------    ------------
```

```
fprintf('%12.6e %14.6e %14.6e \n',A.')
```

```
7.853982e-01   4.559755e-03   1.198345e-02
1.570796e-01   6.784442e-06   1.114383e-02
1.570796e-02   6.764718e-10   1.111144e-02
1.570796e-03   6.838974e-14   1.123341e-02
```

```
% El órden del método es 4, pues al dividir entre h^4 el error relativo se
% mantiene aproximadamente constante
```

Apéndice A. Diferenciación numérica.

```
function D = diffCentrada(f,x,h)
   assert(all(h ~= 0));
   D = (f(x+h) - f(x-h)) ./ (2.*h);
end
```

Apéndice B. Fórmula del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b) \right)$$

```
function I = integTrapecio(f,a,b,m)
    assert(a <= b && m > 0);
    h = (b - a) / m;
    I = (h/2) * (f(a) + f(b) + 2*sum(f(a + (1:m-1).*h)));
end
```

Apéndice C. Fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih) + f(b) \right)$$

```
function I = integSimpson(f,a,b,m)
    assert(m > 0 && a <= b);
    h = (b - a)/(2*m);
    I = h/3*(f(a) + 4.*sum(f(a + (2.*(1:m)-1).*h)) + 2.*sum(f(a +
2.*(1:m-1).*h)) + f(b));
end
```