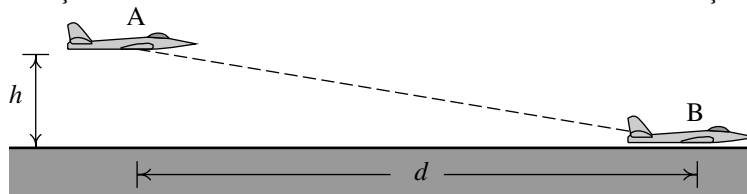


Nome: \_\_\_\_\_

Turma: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Pode consultar unicamente o formulário entregue com este enunciado. Pode usar calculadora ou PC, mas unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .**

1. (3 valores) O avião na figura tem massa igual a  $3 \times 10^4 \text{ kg}$ . O piloto ajusta a trajetória de forma a descer desde o ponto A, com altura  $h = 480 \text{ m}$ , até o ponto B, com altura 0, em linha reta e com velocidade a diminuir a uma taxa constante, desde  $300 \text{ km/h}$  em A, até  $200 \text{ km/h}$  em B. A distância horizontal entre os pontos A e B é  $d = 4.1 \text{ km}$ . (a) Determine o valor da aceleração entre A e B. (b) A interação dos mecanismos do avião com o ar produz uma força com componentes tangencial e normal, que junto com o peso do avião dão origem à aceleração calculada na alínea anterior. Determine o valor dessa força de interação do ar com o avião.



2. (3 valores) Um corpo com massa  $m = 0.2 \text{ kg}$  desloca-se, sem rodar, ao longo do eixo dos  $x$ , sob a ação de uma força resultante conservativa com energia potencial  $U = 6 - 3.11x + 0.58x^2$  (unidades SI), onde  $x$  é a posição do centro de massa do corpo. (a) Explique porque é que o único movimento possível do corpo é movimento oscilatório. (b) Determine o valor do período de oscilação.

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 1 valor, erradas,  $-0.25$ , em branco, 0.

3. Qual das seguintes afirmações, acerca da origem no espaço de fase num sistema dinâmico de duas espécies, é correta?
- A. É sempre ponto de equilíbrio instável.  
B. É sempre ponto de equilíbrio, do tipo sela.  
C. Pode não ser ponto de equilíbrio.  
D. É sempre ponto de equilíbrio estável.  
E. É sempre ponto de equilíbrio, de qualquer tipo.
4. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = kr^4$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $k$  uma constante. Encontre a equação de movimento para  $\ddot{r}$

- A.  $r^2\ddot{\theta}^2 + \frac{4kr^3}{m}$   
B.  $r^2\ddot{\theta}^2 - \frac{4kr^3}{m}$   
C.  $r\ddot{\theta} + \frac{4kr^3}{m}$   
D.  $r\ddot{\theta}^2 - \frac{4kr^3}{m}$   
E.  $r\ddot{\theta} + \frac{4kr^3}{m}$

Sua resposta: ☐

5. Um sistema não linear tem um centro no ponto P. Qual das afirmações seguintes, acerca da matriz jacobiana no ponto P, é verdadeira?

- A. o traço é positivo  
B. o traço é negativo  
C. o traço é nulo.  
D. o determinante é negativo  
E. o determinante é nulo

Sua resposta: ☐

6. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$ . Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- A. nó repulsivo  
B. foco repulsivo  
C. ponto de sela  
D. foco atrativo  
E. nó atrativo

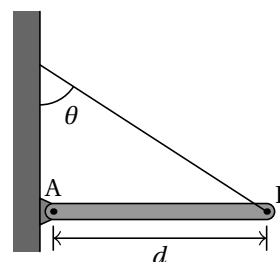
Sua resposta: ☐

7. Um aluno empurra um bloco de massa  $500 \text{ g}$ , sobre uma mesa horizontal, com uma aceleração constante de  $1.8 \text{ m/s}^2$ . A força que o aluno exerce é horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é  $0.4$ , calcule o módulo da força do aluno sobre o bloco.

- A.  $5.72 \text{ N}$   
B.  $2.86 \text{ N}$   
C.  $7.15 \text{ N}$   
D.  $1.06 \text{ N}$   
E.  $28.6 \text{ N}$

Sua resposta: ☐

8. A barra homogênea na figura tem massa  $2.1 \text{ kg}$  e comprimento  $d = 1.4 \text{ m}$ . O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo à parede, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. No ponto B está ligada uma corda, colada à parede formando um ângulo  $\theta = 47^\circ$ , que faz com que a barra permaneça na posição horizontal. Determine o valor da tensão na corda.

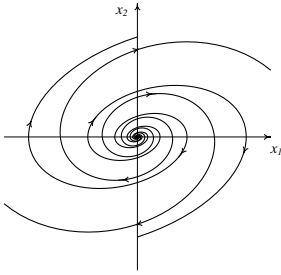


- A.  $11.5 \text{ N}$   
B.  $15.1 \text{ N}$   
C.  $8.6 \text{ N}$   
D.  $18.0 \text{ N}$   
E.  $20.1 \text{ N}$

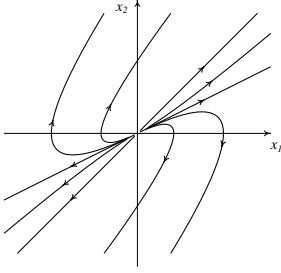
Sua resposta: ☐

9. Os dois valores próprios da matriz dum sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado são  $\lambda_1 = -0.2 + i0.8$  e  $\lambda_2 = -0.2 - i0.8$ . Qual dos gráficos representa o retrato de fase desse sistema?

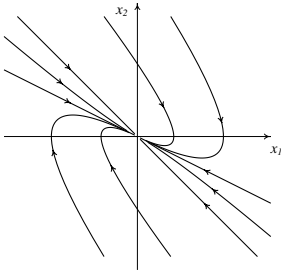
A.



B.



C.



Sua resposta: ☐

10. Dois corpos A e B, com a mesma massa, penduram-se de duas molas com a mesma constante elástica. Ambos objetos são deslocados na vertical e largados do repouso, fazendo com que oscilem na vertical. O deslocamento inicial de A é duas vezes maior do que o de B. Qual é a relação entre as energias mecânicas dos dois corpos?

- A. A energia de B é metade da energia de A.  
B. Ambos corpos têm a mesma energia.  
C. A energia de A é 1/4 da energia de B.  
D. A energia de B é 1/4 da energia de A.  
E. A energia de A é metade da energia de B.

Sua resposta: ☐

11. Uma esfera roda sem deslizar sobre a superfície dum plano inclinado com 35 cm de altura, partindo do repouso. Determine a velocidade do centro de massa da esfera, quando chega ao fim da rampa, desprezando a resistência do ar e sabendo que o momento de inércia de uma esfera de massa  $m$  e raio  $r$ , à volta do seu eixo, é  $\frac{2}{5}mr^2$ .

- A. 1.59 m/s      C. 1.30 m/s      E. 2.62 m/s  
B. 1.79 m/s      D. 2.21 m/s

Sua resposta: ☐

12. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é:  $t^3 \hat{i} + 0.2 t^2 \hat{j}$  (unidades SI). Em  $t = 0$  a partícula parte do ponto  $y = -5$  no eixo dos  $y$ . Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos  $x$ .

- A. 3.68 s      C. 5.0 s      E. 2.92 s  
B. 7.07 s      D. 4.22 s

Sua resposta: ☐

13. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

- A.  $\dot{y} = 6y - y^2$       D.  $\dot{y} = x + xy^2$   
B.  $\dot{y} = 2y^2 - 3y$       E.  $\dot{y} = 2y - 5y^2$   
C.  $\dot{y} = 2xy + 3y$

Sua resposta: ☐

14. A expressão da força tangencial sobre uma partícula é

$$-s^2 + 14s - 48$$

onde  $s$  é a posição na trajetória. Sabendo que em  $t = 0$  a partícula encontrava-se em repouso na posição  $s = 7$ , onde se encontrará após um tempo muito elevado?

- A. Muito afastada, em  $s \rightarrow \infty$   
B. Oscilando à volta de  $s = 8$   
C. Em  $s = 6$   
D. Oscilando à volta de  $s = 6$   
E. Em  $s = 8$

Sua resposta: ☐

15. Um projétil lançado verticalmente para cima atinge uma altura  $h$  máxima, que depende da velocidade inicial com que foi lançado, antes de voltar a cair. Se a velocidade for muito elevada, a altura pode atingir valores elevados, onde a aceleração da gravidade já não é a constante  $g$  mas é dada pela expressão:

$$\frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

onde  $R = 6.4 \times 10^6$  m é o raio da Terra. Desprezando a resistência do ar, determine o valor mínimo que deverá ter a velocidade inicial, para o objeto atingir uma altura máxima infinita; ou seja, fugir ao campo gravítico da Terra.

- A.  $1.9 \times 10^3$  m/s      C.  $11.2 \times 10^3$  m/s      E.  $3.7 \times 10^3$  m/s  
B.  $2.2 \times 10^3$  m/s      D.  $1.4 \times 10^3$  m/s

Sua resposta: ☐

16. Um objeto desloca-se numa trajetória circular de forma que a sua velocidade angular é dada pela expressão:

$$\omega = be^{-n\theta}$$

onde  $b$  e  $n$  são duas constantes e  $\theta$  é o ângulo ao longo da circunferência. Qual é a expressão para a aceleração angular em função do ângulo  $\theta$ ?

- A.  $-nb^2e^{-n\theta}$       C.  $-nbe^{-n\theta}$       E.  $-be^{-(n+1)\theta}$   
B.  $nb^2e^{-n\theta}$       D.  $-nb^2e^{-2n\theta}$

Sua resposta: ☐

**Problema 1.** (a) A distância percorrida desde A até B é,

$$\overline{AB} = \sqrt{4100^2 + 480^2} = 4128.0 \text{ m}$$

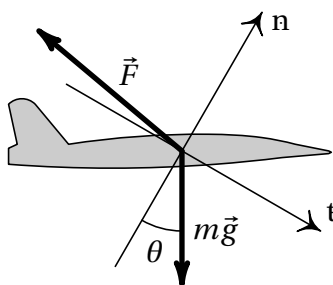
Como a velocidade diminui a uma taxa constante, a aceleração tangencial é constante e a equação diferencial

$$a_t = v \frac{dv}{ds}$$

pode ser resolvida por separação de variáveis para determinar a aceleração tangencial (unidades SI):

$$a_t \int_0^{4128} ds = \int_{300/3.6}^{200/3.6} v dv \implies a_t = -0.4673 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(b) A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do avião e o sistema de coordenadas tangencial e normal, em que  $\vec{F}$  é a força do ar sobre o avião



As componentes tangencial e normal do peso são (SI):

$$P_t = m g \sin \theta = \frac{30000 \times 9.8 \times 480}{4128} = 34186$$

$$P_n = m g \cos \theta = \frac{30000 \times 9.8 \times 4100}{4128} = 292006$$

E as componentes tangencial e normal da equação de movimento conduzem às componentes tangencial e normal de  $\vec{F}$

$$P_t - F_t = m a_t \implies F_t = 34186 + 30000 \times 0.4673 = 48205$$

$$F_n - P_n = 0 \implies F_n = 292006$$

O valor da força do ar sobre o avião é:

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = 295958 \text{ N}$$

**Problema 2.** (a) A equação de movimento do corpo é

$$F_x = 0.2 \ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = 3.11 - 1.16 x$$

e as equações de evolução são

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = 15.55 - 5.8x$$

trata-se dum sistema dinâmico linear com matriz

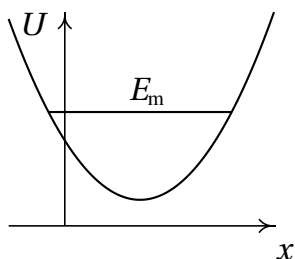
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5.8 & 0 \end{pmatrix}$$

A equação dos valores próprios é então

$$\lambda^2 + 5.8 = 0 \implies \lambda = \pm 2.40832i$$

Isso mostra que o único ponto de equilíbrio é um centro e todos os possíveis movimentos do corpo serão oscilações (ciclos no retrato de fase).

A explicação da natureza oscilatória de todos os possíveis movimentos podia também ser feita traçando o retrato de fase, em que todas as curvas de evolução são ciclos, ou ainda mostrando o gráfico da energia potencial:



Em que a energia mecânica dos possíveis movimentos é um segmento horizontal, por cima do valor mínimo de  $U$ , que necessariamente corta o gráfico de  $U$  em dois pontos de retorno, ou seja, corresponde a um ciclo.

(b) A frequência angular dos ciclos é igual à parte imaginária dos valores próprios:

$$\Omega = 2.40832 \text{ s}^{-1}$$

e período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2.60895 \text{ s}$$

## Perguntas

- |      |      |       |       |       |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. E | 6. B | 9. D  | 12. D | 15. C |
| 4. D | 7. B | 10. D | 13. C | 16. D |
| 5. C | 8. B | 11. D | 14. B |       |

# Critérios de avaliação

## Problema 1

- Cálculo da distância entre A e B \_\_\_\_\_ 0.25
- Resolução da equação diferencial para obter a aceleração tangencial \_\_\_\_\_ 1
- Diagrama de corpo livre e cálculo das componentes tangencial e normal do peso \_\_\_\_\_ 1
- Resolução das componentes tangencial e normal da equação de movimento para obter as componentes da força do ar \_\_\_\_\_ 0.5
- Obtenção do valor da força do ar a partir das componentes tangencial e normal \_\_\_\_\_ 0.25

## Problema 2

- Explicação da natureza oscilatória de todos os possíveis movimentos (alínea *a*) \_\_\_\_\_ 2
- Cálculo do período de oscilação (alínea *b*) \_\_\_\_\_ 1