U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Introdução à Mecânica Quântica

2º semestre, 2024/2025. Docente: Jaime Villate

23 de abril de 2025

Duração: 90 minutos.

1. Em função da base ortonormal $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle\}$ a representação de dois kets é:

$$|\Psi\rangle = \mathrm{i}|\mathrm{e}_1\rangle - 3|\mathrm{e}_2\rangle \qquad |\Phi\rangle = 2|\mathrm{e}_1\rangle + \mathrm{i}\,4|\mathrm{e}_2\rangle$$

Calcule:

(*a*) $|\Psi\rangle - |\Phi\rangle$

(*b*) $\langle\Psi|\Phi\rangle$

2. Encontre os valores e vetores próprios da matriz de Pauli:

$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

3. A representação matricial do estado de um sistema, $|\Psi\rangle$, e de um observável, $\hat{\Omega}$, são:

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} 0.96 \\ \mathrm{i}\,0.28 \end{bmatrix} \qquad \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 2.64 & -\mathrm{i}\,0.48 \\ \mathrm{i}\,0.48 & 2.36 \end{bmatrix}$$

(*a*) Mostre que a norma do estado, $\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$, é igual a 1.

(*b*) Determine o valor esperado de $\hat{\Omega}$

(*c*) Mostre que os dois kets

$$|\Phi\rangle = \begin{bmatrix} 0.8 \\ \mathrm{i}\,0.6 \end{bmatrix} \qquad |\Upsilon\rangle = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\,0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

são vetores próprios de $\hat{\Omega}$, e determine os respetivos valores próprios.

Resolução

1. (*a*) $|\Psi\rangle - |\Phi\rangle = (\mathrm{i}|\mathrm{e}_1\rangle - 3|\mathrm{e}_2\rangle) - (2|\mathrm{e}_1\rangle + \mathrm{i}\,4|\mathrm{e}_2\rangle) = (\mathrm{i}-2))|\mathrm{e}_1\rangle - (3+\mathrm{i}\,4)|\mathrm{e}_2\rangle$

(*b*) $$\begin{aligned}\langle\Psi|\Phi\rangle &= (-\mathrm{i}\langle\mathrm{e}_1| - 3\langle\mathrm{e}_2|)\,(2|\mathrm{e}_1\rangle + \mathrm{i}\,4|\mathrm{e}_2\rangle)\\ &= -\mathrm{i}\,2\langle\mathrm{e}_1|\mathrm{e}_1\rangle + 4\langle\mathrm{e}_1|\mathrm{e}_2\rangle - 6\langle\mathrm{e}_2|\mathrm{e}_1\rangle - \mathrm{i}\,12\langle\mathrm{e}_2|\mathrm{e}_2\rangle\end{aligned}$$

Como $\langle\mathrm{e}_1|\mathrm{e}_2\rangle = \langle\mathrm{e}_2|\mathrm{e}_1\rangle = 0$, e $\langle\mathrm{e}_1|\mathrm{e}_1\rangle = \langle\mathrm{e}_2|\mathrm{e}_2\rangle = 1$, então:

$\langle\Psi|\Phi\rangle = -\mathrm{i}\,2 - \mathrm{i}\,12 = -\mathrm{i}\,14$

2. Equação dos valores próprios:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \pm 1$$

Vetor próprio de $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad b = \mathrm{i}\,a \quad\Longrightarrow\quad |\lambda_1\rangle = \begin{bmatrix}a\\ \mathrm{i}\,a\end{bmatrix}$$

Em que a pode ser qualquer número complexo (pode escolher-se $a = 1/\sqrt{2}$ para que a norma do vetor seja 1, mas o enunciado não pede que assim seja).

Vetor próprio de $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad d = -\mathrm{i}\,c \quad\Longrightarrow\quad |\lambda_2\rangle = \begin{bmatrix}c\\ -\mathrm{i}\,c\end{bmatrix}$$

Em que c pode ser qualquer número complexo.

3. (*a*) $\langle\Psi|\Psi\rangle = [0.96 \;\; -\mathrm{i}\,0.28]\begin{bmatrix}0.96\\ \mathrm{i}\,0.28\end{bmatrix} = 0.9216 + 0.0784 = 1$

e, como tal, $\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} = 1$.

(*b*) $$\begin{aligned}\langle\hat{\Omega}\rangle = \langle\Psi|\hat{\Omega}|\Psi\rangle &= [0.96 \;\; -\mathrm{i}\,0.28]\begin{bmatrix}2.64 & -\mathrm{i}\,0.48\\ \mathrm{i}\,0.48 & 2.36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.96\\ \mathrm{i}\,0.28\end{bmatrix}\\ &= [0.96 \;\; -\mathrm{i}\,0.28]\begin{bmatrix}2.5344 + 0.1344\\ \mathrm{i}\,0.4608 + \mathrm{i}\,0.6608\end{bmatrix}\\ &= [0.96 \;\; -\mathrm{i}\,0.28]\begin{bmatrix}2.6688\\ \mathrm{i}\,1.1216\end{bmatrix} = 2.562048 + 0.314048 = 2.876096\end{aligned}$$

(*c*) $$\hat{\Omega}|\Phi\rangle = \begin{bmatrix}2.64 & -\mathrm{i}\,0.48\\ \mathrm{i}\,0.48 & 2.36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8\\ \mathrm{i}\,0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.112 + 0.288\\ \mathrm{i}\,0.384 + \mathrm{i}\,1.416\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.4\\ \mathrm{i}\,1.8\end{bmatrix} = 3|\Phi\rangle$$

Ou seja, $|\Phi\rangle$ é vetor próprio com valor próprio 3.

$$\hat{\Omega}|\Upsilon\rangle = \begin{bmatrix}2.64 & -\mathrm{i}\,0.48\\ \mathrm{i}\,0.48 & 2.36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\,0.6\\ 0.8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{i}\,1.584 - \mathrm{i}\,0.384\\ -0.288 + 1.888\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{i}\,1.2\\ 1.6\end{bmatrix} = 2|\Upsilon\rangle$$

Ou seja, $|\Upsilon\rangle$ é vetor próprio com valor próprio 2.