



Departamento de Engenharia Física

Sumários e Exames de Física 2, 2017

Jaime E. Villate

Porto, fevereiro de 2018

Copyright © 2018, Jaime E. Villate
E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>
ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305,
USA.

Conteúdo

1 Sumários	1
1.1 Campo elétrico	2
1.2 Voltagem e corrente	10
1.3 Resistência	18
1.4 Capacidade	26
1.5 Circuitos de corrente contínua	35
1.6 Fluxo elétrico	42
1.7 Potencial	49
1.8 Campo magnético	61
1.9 Indução eletromagnética	70
1.10 Processamento de sinais	78
1.11 Circuitos de corrente alternada	88
2 Exames	97
2.1 Exame de época normal	97
2.1.1 Enunciado	98
2.1.2 Resolução	100
2.1.3 Cotações	102
2.2 Exame de época de recurso	103
2.2.1 Enunciado	104
2.2.2 Resolução	106
2.2.3 Cotações	109
Bibliografia	111

Capítulo 1

Sumários

Disciplina Física 2.

Curso Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Primeiro semestre do segundo ano.

Ano académico 2017–2018, primeiro semestre.

Regente Jaime E. Villate.

Docentes João Manuel Viana Parente Lopes, Manuel Joaquim Bastos Marques e Jaime E. Villate.

Número de alunos 217.

Método de avaliação Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

FÍSICA II. MIEIC. 2017-2018

Aula 1. 2017-09-20

Regente: Jaime Villate (villate@fe.up.pt)

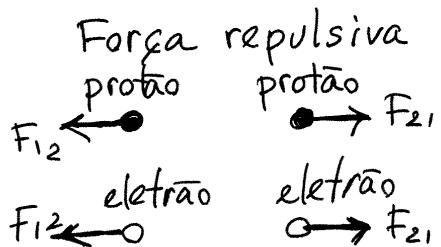
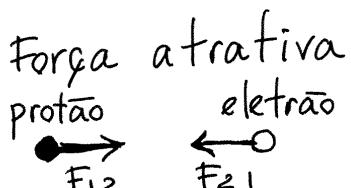
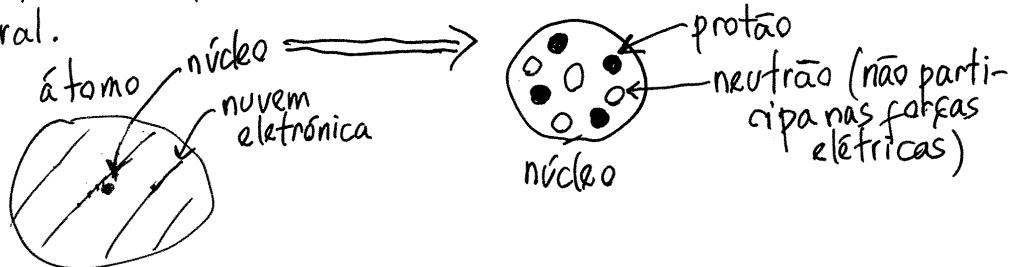
Página web: <http://def.fe.up.pt/eic/phi14>

Programa. Eletricidade, magnetismo, circuitos e sinais.

FORÇA ELÉTRICA

força que atua entre as partículas nos núcleos atómicos (protões) e os eletrões.

Responsável pela estrutura atómica e da matéria em geral.



Se a distância entre as duas partículas for a mesma nos 3 casos, $|F_{12}| = |F_{21}| =$ nos 3 casos.

A causa dessas forças é atribuída a uma propriedade das partículas, chamada **Carga elétrica**. Os dois tipos de força (atrativa ou repulsiva) é devido a existirem dois tipos de carga.

Carga elétrica: (q) Historicamente os dois tipos de carga foram designados por positiva (dos protões) e negativa (dos elétrões). Os neutrons não têm carga.

Unidade SI de carga: Coulomb (C)

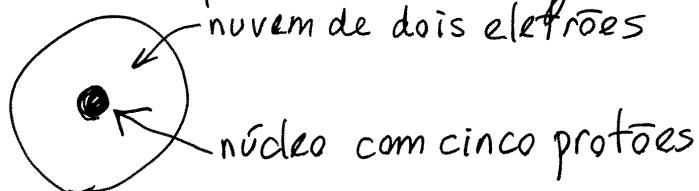
Carga elementar:

$$e = |q_{\text{protão}}| = |q_{\text{elétrão}}| = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Cargas com o mesmo sinal repelem-se e cargas com sinais diferentes atraem-se.

A carga de qualquer corpo pode ser $q=0, \pm e, \pm 2e, \dots$

Exemplo. Ião positivo com carga $+3e$:



A força elétrica é responsável por todas as propriedades dos átomos/moléculas e pela estrutura da matéria.

LEI DE COULOMB

$$q_1 \xleftarrow{d} q_2 \quad F_{12} = F_{21} = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$$

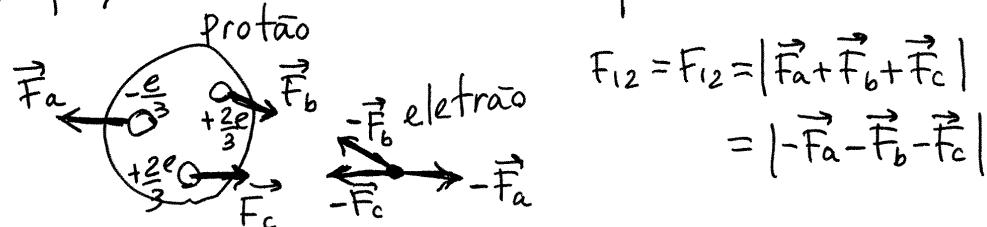
$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = \text{constante de Coulomb}$$

$$q_1 q_2 = \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{força repulsiva} \\ < 0 & \rightarrow \text{força atrativa} \\ = 0 & \rightarrow \text{força nula.} \end{cases}$$

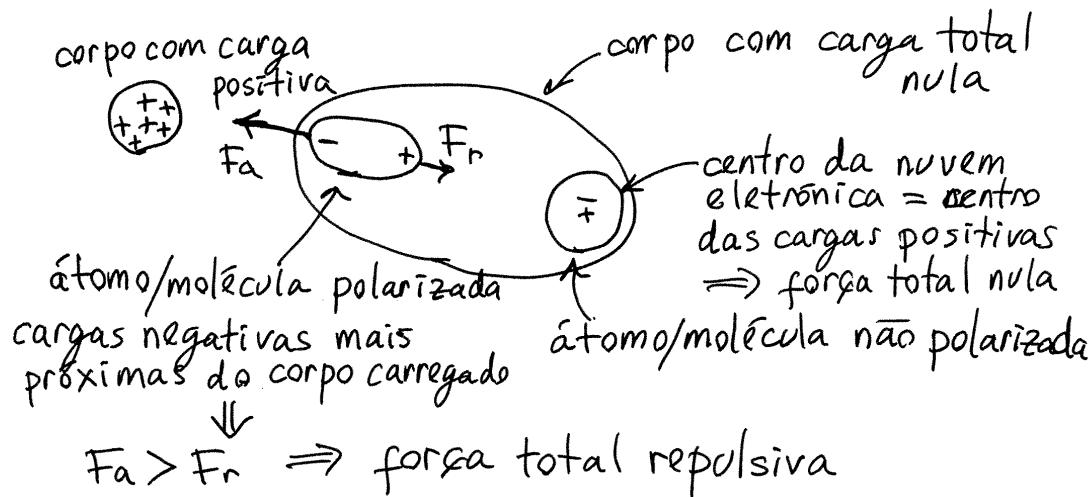
A lei de Coulomb aplica-se unicamente a partículas pontuais. Noutros casos há que somar vetorialmente as forças entre cada par de partículas.

No nível atómico, protões e elétrões são partículas pontuais. No nível subnuclear o electrão é ainda pontual mas o protão é formado por 3 quarks.

A força elétrica entre electrão e protão seria assim:



POLARIZAÇÃO ATÓMICA MOLECULAR

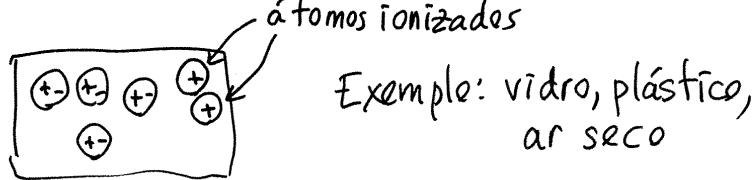


As forças sobre todas as moléculas polarizadas são atrativas (independentemente do sinal da carga do objeto carregado)

Os corpos descarregados são sempre atraídos pelos corpos com carga.

ISOLADORES E CONDUTORES

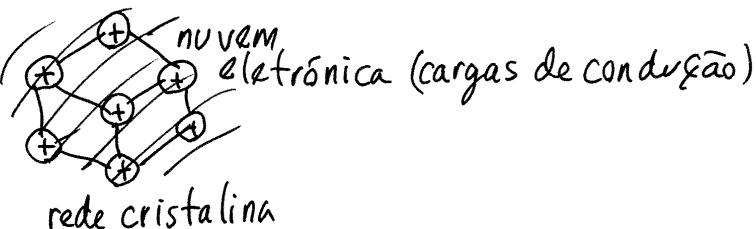
① Isoladores. As cargas elétricas estão localizadas em moléculas/átomos e não podem passar de umas para as outras.



② Condutores. Tem cargas livres que podem passar facilmente através do material.

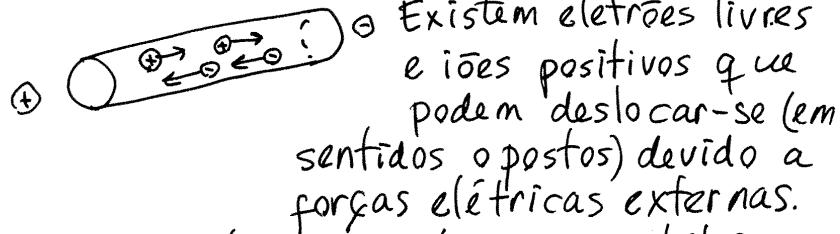
a) sólidos:

Exemplo: metais



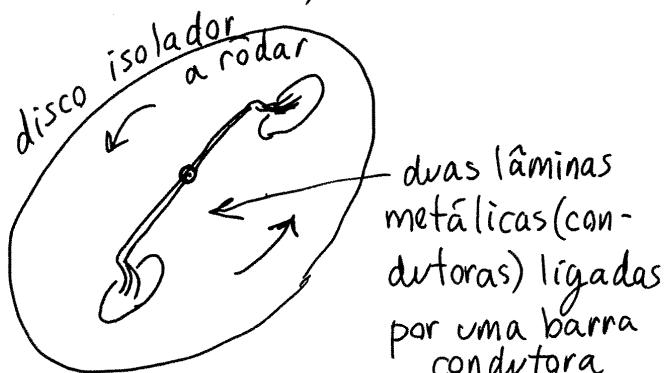
Os átomos perdem alguns elétrões, ficando íões positivos, localizados em pontos fixos numa rede cristalina e uma nuvem de elétrões livres que pode passar através da rede cristalina.

b) Gases ionizados (plasma). Exemplo: lâmpada fluorescente

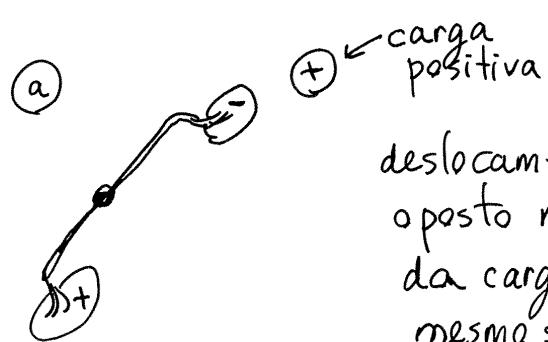


Os elétrões/íões acelerados pela força elétrica chocam com o vidro do tubo, onde há uma camada de tinta fluorescente, que emite luz quando é atingida por um elétron ou íão.

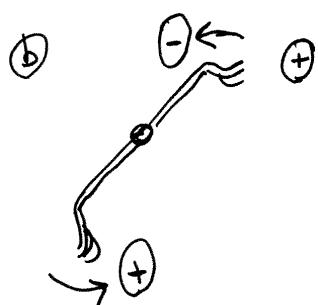
ELETORIZAÇÃO POR INDUÇÃO



O método consiste em ligar, com um condutor, ou por contacto, dois condutores e aproximar um objeto carregado a um deles



As cargas de condução deslocam-se, deixando cargas de sinal oposto no condutor mais próximo da carga externa e carga do mesmo sinal no condutor mais afastado.



Retira-se o contacto entre os dois condutores, ficando cada um com cargas de sinais o postos (mas da mesma intensidade).

A carga externa pode então ser retirada. Se fosse retirada enquanto os condutores ainda estão em contacto, as cargas positivas e negativas regressavam à posição original, ficando os dois condutores descarregados.

Um dos dois condutores em contacto pode ser a "terra" (condutor muito grande e afastado).



Dois discos isoladores rodam em sentidos opostos, pelo efeito de um sistema mecânico. Uma das lâminas metálicas num dos discos, por exemplo no disco 2, pode ter uma pequena carga, por exemplo negativa. A passar frente à barra 1, induz carga positiva na lâmina do disco 1 em contacto com a barra 1, e carga positiva na lâmina diametralmente oposta no disco 1. Essas duas cargas (+ e -) vão passar frente à barra 2, induzindo 2 cargas positivas e duas negativas nas lâminas do disco 2 e depois passam pelos coletores A e B que descarregam as lâminas, passando as cargas para duas garrafas condutoras. A medida que os discos continuam a rodar vai aumentando a carga nas duas garrafas até ser tão elevada que passa bruscamente entre duas esferas ligadas às garrafas, produzindo uma faísca que descarrega as garrafas.

Aula teórico-prática 1. 2017-09-21 a 27

Eletrização por fricção

Quando dois objetos são friccionados, o movimento relativo entre as duas superfícies em contacto liberta alguns elétrões das moléculas nas superfícies.

Esses elétrões libertados são atraídos pelas moléculas neutras, por serem polarizadas pelas forças elétricas do elétrão.

As moléculas de uma da superfície podem ser mais fáceis de polarizar, atraindo com maior força os elétrões. Como tal um dos materiais fica com carga negativa (excesso de elétrões) e o outro com carga positiva (falta de elétrões), com o mesmo valor absoluto.

Os materiais podem ser ordenados numa série triboelétrica:

- pele de coelho
- vidro
- cabelo
- lã
- chumbo
- seda
- papel
- ⋮
- esferovite
- vinil (PVC)

Os materiais no topo perdem elétrões com maior facilidade.

Por exemplo, friccionando vidro com seda, o vidro passa elétrões para a seda. O vidro fica com carga positiva e a seda

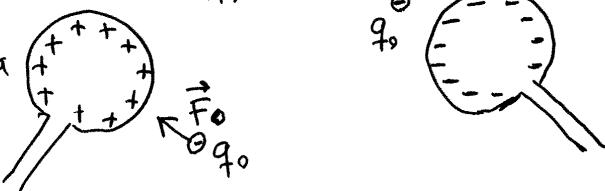
com carga negativa. Mas friccionando esferovite com seda, passam elétrões da seda para o esferovite, ficando a seda com carga positiva e o esferovite com carga negativa.

Aula 2, 2017-09-22

CAMPO ELÉTRICO.

Exemplo: entre as duas esferas num gerador de Wimshurst:

$$\vec{F}_e = \text{força elétrica}\text{ numa carga }q_0$$



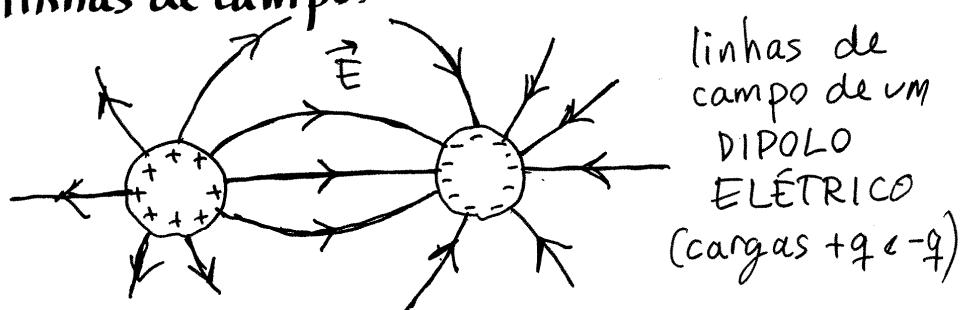
Uma carga "de prova" q_0 colocada na região próxima das esferas sente uma força elétrica que é diretamente proporcional ao valor da carga, numa direção específica em cada ponto, e em sentidos opostos, para sinais opostos de q_0 . Este resultado resume-se na seguinte equação:

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

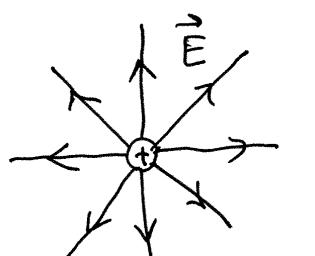
$E = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$ força por unidade de carga

onde \vec{E} é um vetor, com um valor específico em cada ponto do espaço, chamado CAMPO ELÉTRICO

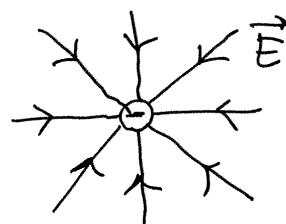
Note-se que as unidades de E são força sobre carga. Nas cargas positivas atua força no sentido de \vec{E} , enquanto que nas cargas negativas a força é no sentido oposto a \vec{E} . O campo \vec{E} no espaço pode representar-se com linhas de campo.



No caso particular do campo produzido por uma única carga pontual, \vec{E} é radial e E obtém-se pela lei de Coulomb: $E = \frac{kq}{d^2}$

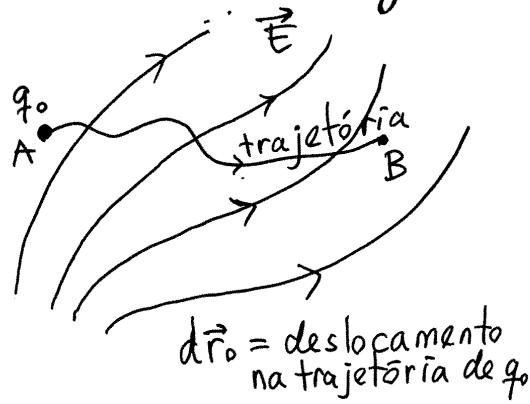


campo repulsivo de uma carga positiva



campo atrativo de uma carga negativa.

Movimento das cargas no campo elétrico



independente da trajetória seguida, já que a força elétrica é conservativa.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_0 \cdot d\vec{r}_0 = U_A - U_B$$

$$\text{mas } \vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow U_A - U_B = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r}_0 = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\text{qualquer percurso}} q_0 (V_A - V_B)$$

U = energia potencial elétrica, função da posição no espaço

onde foi definido o POTENCIAL ELÉTRICO:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(Repare: os valores de V_A e V_B pode somar-se uma constante arbitrária)

V = potencial elétrico, função da posição no espaço, com unidades de energia por unidade de carga.

Como tal, em cada ponto P do espaço existe um potencial V_P e uma partícula de carga q , nesse ponto terá energia potencial elétrica:

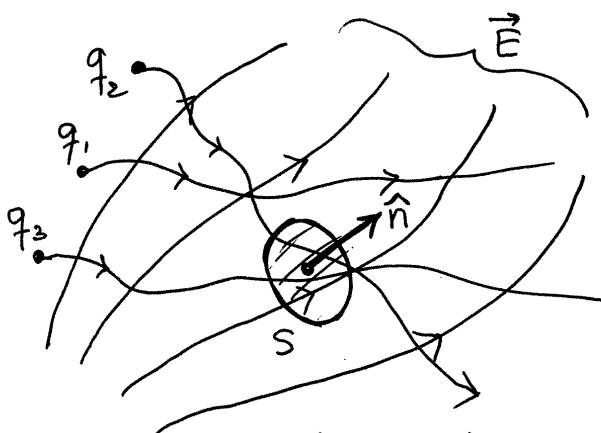
$$U_P = q V_P \quad (\text{mesmo sinal de } V_P \text{ se } q > 0 \\ \text{ou sinal oposto se } q < 0)$$

O potencial V é uma propriedade do espaço, determinada pelas cargas que existirem. A energia U é uma propriedade de cada partícula.

UNIDADE SI DE POTENCIAL ELÉTRICO

$$\text{Volt (V)} \quad 1V = 1 \frac{J}{C}$$

CORRENTE ELÉTRICA



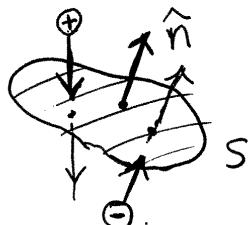
que passa através da superfície, por unidade de tempo. $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Se houver muitas cargas em movimento, define-se a corrente I , através dumá superfície S com versor normal \hat{n} , igual à carga total

$\Delta Q = \text{soma das cargas no intervalo de tempo } \Delta t$

UNIDADE SI DE CORRENTE ELÉTRICA

ampere (A) $1\text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$ $I = \frac{\text{carga por unidade de tempo}}{\text{tempo}}$



Se uma carga positiva passa no sentido oposto a \hat{n} , considera-se corrente negativa, ou seja, no sentido oposto a \hat{n} .

E se uma carga negativa passa no sentido de \hat{n} também se considera corrente negativa oposta a \hat{n} , porque q é negativa.

Como tal, uma corrente I , no sentido de \hat{n} pode ser devida à passagem de cargas positivas no sentido de \hat{n} , ou de cargas negativas no sentido oposto a \hat{n} , ou das duas situações em simultâneo!

Corrente instantânea e carga transferida

Exemplo: quando o gerador de Winshurst descarrega devido a uma faísca:

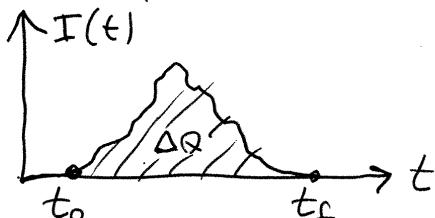


luz: passa gem de iões positivos para a direita e negativos para a esquerda

A carga total transferida pela faísca é:

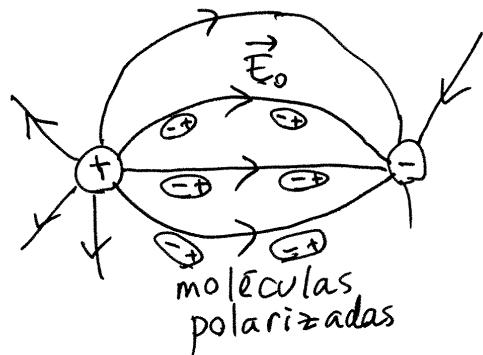
$$\Delta Q = \int_{t_0}^{t_f} I(t) dt$$

A corrente I , em qualquer superfície transversal à faísca de luz varia com o tempo:



CONSTANTE DIELETTRICA

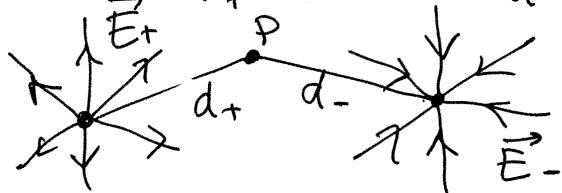
Dipolo elétrico, com um isolador entre as cargas.



O campo total \vec{E}
é o campo \vec{E}_0 do dipolo
mais o campo criado
pelas moléculas do
isolador, \vec{E}_{isol}
 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{isol}$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \text{ onde } \vec{E}_+ \text{ são os campos da carga positiva e negativa}$$

$$E_+ = \frac{k|q|}{d_+^2} \quad E_- = \frac{k|q|}{d_-^2}$$



O campo do isolador é sempre oposto a \vec{E}_0 e $\vec{E}_{isol} \perp \vec{E}_0$

e faz diminuir o campo total ficando o campo de cada carga pontual menor num fator K
(constante dieletrica): $E = \frac{k|q|}{Kd^2}$

$$1 \leq K < +\infty \quad K=1 \rightarrow \text{isolador perfeito (vacuo)}$$

$$K \rightarrow 00 \rightarrow \text{condutor perfeito}$$

$$K_{ar\ seco} \approx 1$$

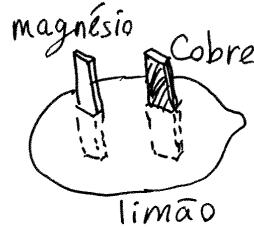
$$\text{lei de Coulomb num isolador: } F_{12} = \frac{k|q_1||q_2|}{Kd^2}$$

Aula 3. 2017-09-27

PILHAS QUÍMICAS

A carga nas superfícies metálicas do gerador de Winshurst são da ordem de nC , ou seja 10^{10} eletróes.

Se fosse possível extrair cargas não apenas da superfície mas de todos os iões num objeto, teríamos disponíveis da ordem de 10^{23} cargas elementares. Isso é o que acontece numa pilha química, formada por dois eletrodos de metais diferentes, imersos num meio com iões positivos e negativos eletrólito.

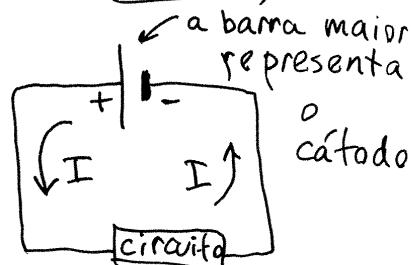


Os iões positivos (catiões) reagem com um dos eletrodos, neste caso o cobre, e os iões negativos (aniões) com o outro, neste caso de magnésio.

Como tal, acumulam-se cargas positivas no eletrodo de cobre (cátodo) e negativas no outro eletrodo (ânodo), que podem manter uma corrente

elétrica estacionária num circuito durante muito tempo.

Cada unidade de carga que sai da pilha tem uma energia característica, E , chamada **força eletromotriz**, ou de forma abreviada, **fem**, que depende das reações químicas entre o eletrólito e os eletrodos. E é medida em Volts e costuma estar entre 1 e 2 V.



O valor da fem pode aumentar-se ligando várias pilhas em série:

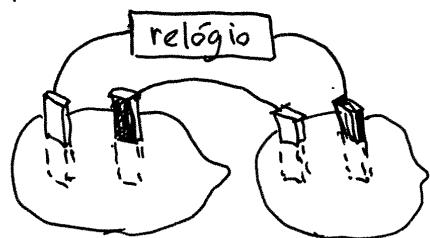
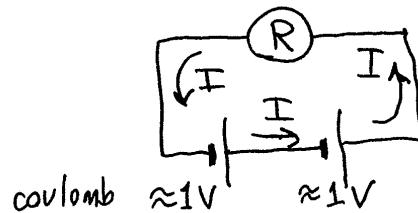


Diagrama de circuito



Cada unidade de carga aumenta a sua energia elétrica em 1 J quando passa por cada uma das pilhas, ou seja, aumenta 2 J em total, que são logo transferidos para o relógio.

A corrente estacionária mantém-se enquanto houver anões e catiões no eletrólito.

Carga máxima.

$$Q_{\max} = \text{carga dos catiões} = |\text{carga dos anões}|$$

por exemplo, uma pilha pode ter $1350 \text{ mA} \cdot \text{h}$, ou seja, $Q_{\max} = 1350 \times 10^{-3} \text{ A} \cdot (3600 \text{ s}) = 4860 \text{ C}$

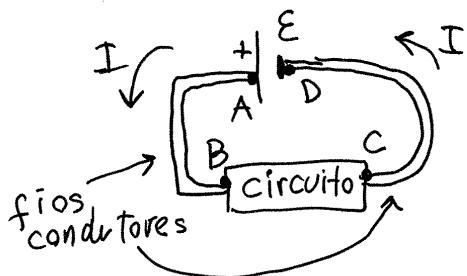
Energia máxima.

No exemplo anterior, se toda a carga disponível na pilha passa-se para o circuito, a energia elétrica transferida seria. $\downarrow \text{se fem} = 2 \text{ V}$

$$U_{\max} = Q_{\max} \cdot E = 4860 \text{ C} \cdot 2 \text{ V} = 9.72 \text{ kJ}$$

Numa pilha gasta, a fem continua com o seu valor inicial, mas quando há pouca carga disponível é cada vez mais difícil conseguir extrair carga, produzindo corrente.

ENERGIA ELÉTRICA DISSIPADA NOS CIRCUITOS



maior em C do que em D

$$\Rightarrow V_A > V_B > V_C > V_D \quad V_A - V_D = E$$

a energia ΔU_{AD} que essa carga perde na passagem pelos fios e o circuito é igual à energia que a pilha fornece, mantendo-se assim corrente estacionária.

Há também campo elétrico, no mesmo sentido de I , que acelera as cargas, mas estas atingem velocidade constante (corrente estacionária), devido a forças dissipativas nos condutores e circuito.
Em qualquer elemento PQ no circuito, ou fios,

$$\Delta U_{PQ} = V_P \Delta Q - V_Q \Delta Q = \Delta V_{PQ} \Delta Q$$

a potência (instantânea) dissipada nesse elemento é:

$$P_{PQ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U_{PQ}}{\Delta t} = \Delta V_{PQ} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow P_{PQ} = I \Delta V_{PQ} \quad I = \text{corrente através do elemento } PQ$$

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{(\text{volt})(\text{ampere})}$$

O eletrão-volt: outra unidade de energia elétrica usada comumente = energia fornecida a uma carga elementar e , por cada volt de diferença de potencial na passagem numa região.

$$1\text{ eV} = 1 \times (1.6 \times 10^{-19}\text{C}) \times 1\text{ V} = 1.6 \times 10^{-19}\text{ J}$$

Semicondutores. Cristais formados por elementos de valência 4 (silício ou gálio). Cada um dos quatro eletrões de valência liga-se, por força magnética, a um eletrão de valência de outro átomo vizinho.

semicondutor n: Com alguns átomos de valência 5, que introduzem eletrões livres. A passagem de cargas é semelhante da que nos metais.

semicondutor p: Com alguns átomos de valência 3, que deixam "buracos" (falta de um eletrão) na rede cristalina. Esses buracos podem ser preenchidos rapidamente por eletrões dos átomos vizinhos, funcionando como passagem de carga positiva através do semicondutor.

Combinando semicondutores p e n construem-se diodos e válvulas que permitem criar circuitos lógicos.

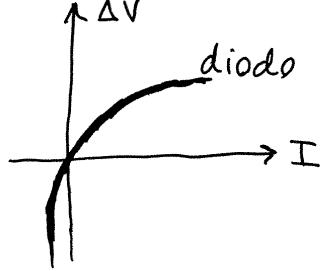
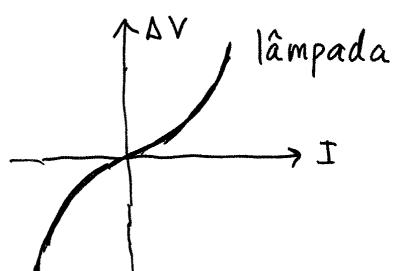
Num "chip" há vários circuitos lógicos, criados pela implantação de impurezas em regiões bem localizadas num cristal de silício ou gálio.

Aula 4. 2017-09-29

CARATERÍSTICAS TENSÃO-CORRENTE

Qualquer dispositivo elétrico é atravessado por correntes de intensidades diferentes quando a voltagem (diferença de potencial) nele tiver diferentes valores.

Ou seja existe uma função **injetiva**, f , que relaciona a voltagem $\Delta V = f(I)$ com a corrente, chamada característica tensão-corrente ($\Rightarrow I = f^{-1}(\Delta V)$)

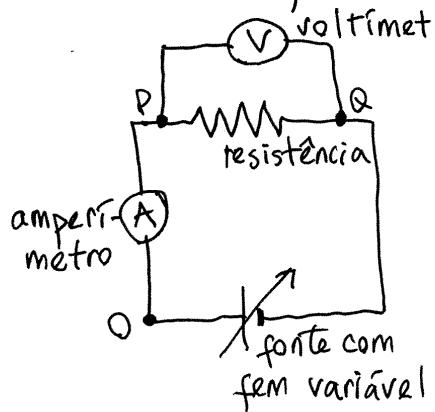


RESISTÊNCIAS.

fios metálicos ou um cilindro de carvão coberto de cerâmica (isolador) e com três riscas às cores que indicam o seu valor. Exemplo:

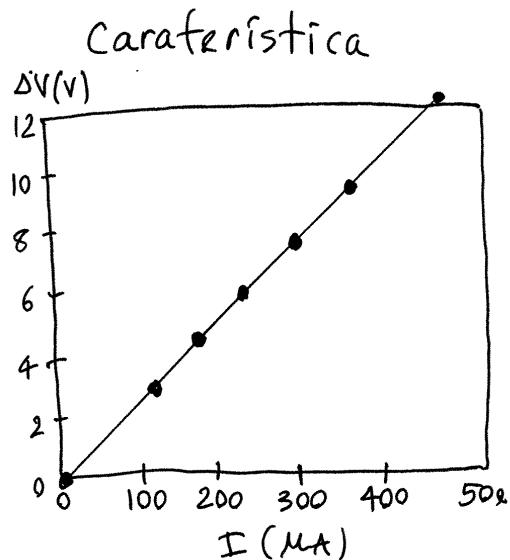
roxo(7) → dourado(5%) → valor da resistência
 laranja(3) → vermelho(2) → entre 27×10^3 (5% dourado) $\Rightarrow 25.65 \times 10^3$
 e 28.35×10^3

Círculo para determinar a característica $\Delta V - I$



O voltmímetro liga-se em paralelo, em dois pontos P e Q, para medir a diferença de potencial entre esses pontos.
 O amperímetro liga-se em série, entre dois pontos Q e P, para medir a corrente.

$I(\mu A)$	$\Delta V(V)$	$\frac{\Delta V}{I} (V/A)$
0	0	—
122	3.25	26.6×10^3
177	4.71	26.6×10^3
236	6.25	26.5×10^3
293	7.77	26.5×10^3
356	9.41	26.4×10^3
461	12.18	26.4×10^3



Os cálculos e o gráfico podem ser obtidos no Maxima:

P: [[0,0], [122,3.25], [177,4.71], [236,6.25], [293,7.77], [356,9.41], [461,12.18]]

```
makelist(p[i][2]/(p[i][1]*1e-6), i, 2, 7);
plot2d ([discrete, p], [style, linespoints]);
```

O valor obtido para o declive da característica é constante. Como tal, ΔV é uma função linear de I .

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = R I} \quad \text{lei de Ohm}$$

a constante, R , chamada resistência, tem unidades de V/A , designada de ohm:

$$1 \Omega = 1 \frac{V}{A} = \text{um ohm}$$

Na resistência usada na experiência anterior, a resistência é aproximadamente $26.5 \text{ k}\Omega$, que está dentro do intervalo indicado pelo fabricante com o código de cores

RESISTIVIDADE

A origem da lei de Ohm é a existência de forças dissipativas diretamente proporcionais à velocidade das cargas de condução:

$$\vec{F}_d = -k \vec{v} \quad (k = \text{constante positiva})$$

Se cada uma das cargas de condução tem o mesmo valor q , e o campo médio no condutor é \bar{E} a velocidade média da nuvem de condução é dada pela expressão:

$$q \bar{E} = k \bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{q \bar{E}}{k}$$

O volume da nuvem de condução que passa através dum condutor, durante um intervalo Δt , é:



$v_{ol} = A \bar{v} \Delta t$, onde A = área da seção transversal.

e a carga transferida nesse intervalo é:

$$\Delta Q = n \times v_{ol} \times q = n q A \bar{v} \Delta t \quad \begin{matrix} (n = \text{número de} \\ \text{cargas de condução} \\ \text{por unidade de vol.}) \end{matrix}$$

Substituindo a expressão de \bar{v} obtida acima,

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{n q^2 A \bar{E}}{k} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \underbrace{\frac{n q^2 A}{k}}_{\text{depende do tipo de material}} \bar{E}$$

e o campo médio no condutor é:

$$\bar{E} = \frac{\Delta V}{L} \Rightarrow I = \frac{n q^2 A}{k L} \Delta V$$

Que é a lei de Ohm:

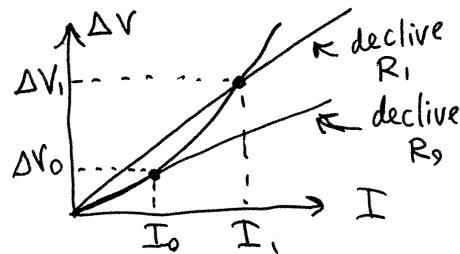
$$\Delta V = \left(\frac{k}{n q^2} \right) \frac{L}{A}$$

A constante,

$$\boxed{s = \frac{k}{n q^2}}$$

chama-se resistividade, e tem unidades de $\Omega \cdot m$

Nos materiais em que a lei de Ohm não é válida, pode ainda definir-se a sua resistência $R = \frac{\Delta V}{I}$, mas essa resistência depende de I e de ΔV (não é constante)



RESISTÊNCIA E TEMPERATURA

Nos materiais ohmicos (onde a lei de Ohm é válida) a resistividade σ varia com a temperatura, T , porque a constante dissipativa depende de T , e σ também pode depender de T . Entre a temperatura ambiente ($T=20^\circ\text{C}$) e temperaturas próximas a resistência de um condutor, em função da temperatura, pode ser aproximada por uma reta empírica:

$$R = R_{20} (1 + \alpha_{20}(T - 20))$$

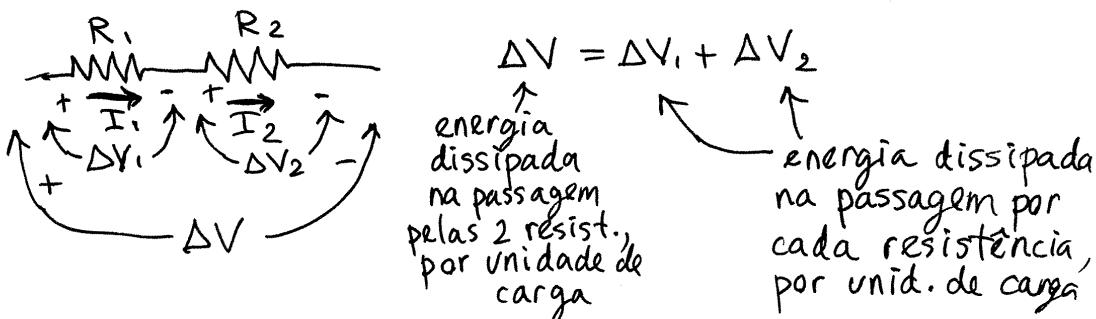
onde R_{20} é a resistência quando $T=20^\circ\text{C}$, T é medida em $^\circ\text{C}$ e α_{20} é um coeficiente de temperatura, com unidades de $^\circ\text{C}^{-1}$.

SUPERCONDUTIVIDADE

Em alguns materiais, chamados supercondutores, a resistência, que diminui monotonicamente quando T diminui passa bruscamente a um valor quase nula quando T for menor que uma determinada temperatura crítica do supercondutor. No hélio líquido, $T_c \approx 4.2\text{ K}$ mas hoje em dia há ligas metálicas supercondutoras com $T_c \approx 203\text{ K} = -70^\circ\text{C}$

Aula 5, 2017-10-04

RESISTÊNCIAS EM SÉRIE



$I = I_1 = I_2 =$ carga que passa por cada resistência, por unidade de tempo

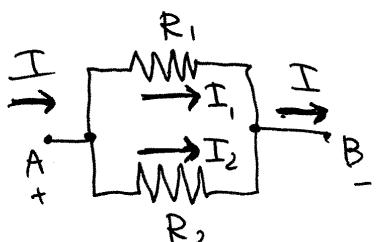
$$\begin{cases} \Delta V_1 = R_1 I_1 = R_1 I \\ \Delta V_2 = R_2 I_2 = R_2 I \end{cases} \quad (\text{lei de Ohm em cada resistência})$$

$$\Rightarrow \Delta V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

As duas resistências são equivalentes a uma única, com valor $R_s = R_1 + R_2$



RESISTÊNCIAS EM PARALELO



$I = I_1 + I_2$ a carga total que passa é a que passa por R_1 mais a que passa por R_2

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

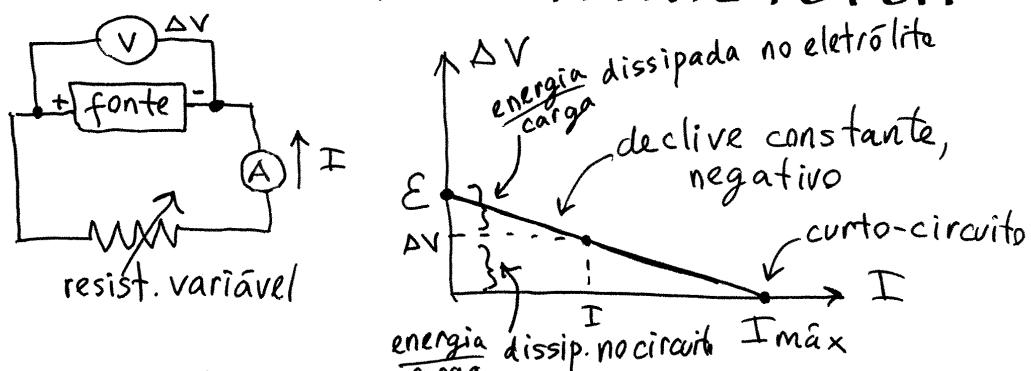
as cargas que passam por R_1 , cada uma dissipam a mesma energia que a que é dissipada por cada carga que passa por R_2 ($V_A - V_B = \Delta V_1 = \Delta V_2$)

$$\begin{cases} \Delta V_1 = R_1 I_1 = \Delta V \\ \Delta V_2 = R_2 I_2 = \Delta V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \\ I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \end{cases}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} \Rightarrow \boxed{\Delta V = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} I}$$

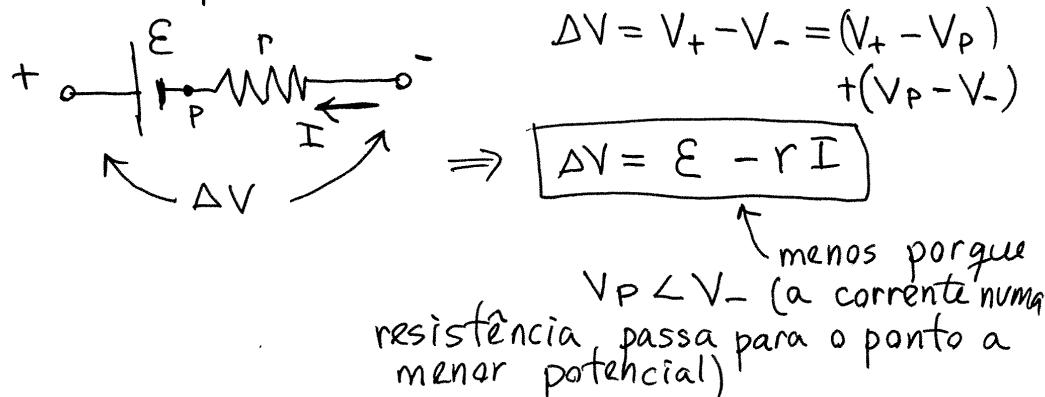
As duas resistências são equivalentes a uma única, com valor $R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$

CARACTERÍSTICA DE UMA FONTE DE FEM

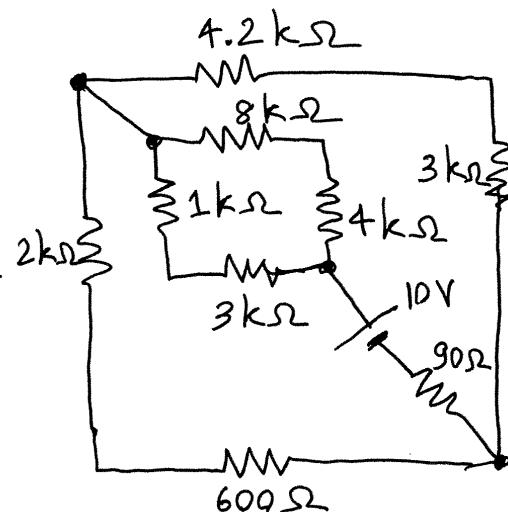


A característica aproxima-se de uma reta, com declive negativo. O declive tem unidades de resistência, r , e chama-se **resistência interna** da fonte.

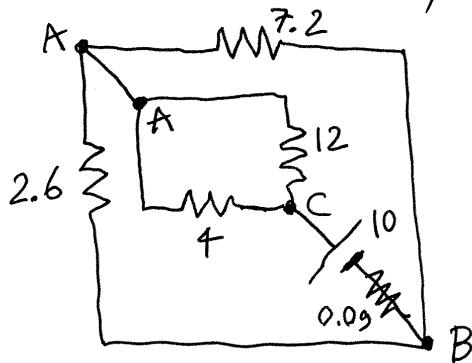
A mesma característica obtém-se com o seguinte circuito equivalente:



Exemplo. Determine a voltagem e a corrente em cada uma das resistências no circuito representado no diagrama.



Resolução: Não há resistências em paralelo, mas as resistências de $8\text{k}\Omega$ e $4\text{k}\Omega$ estão em série, assim como as de $2\text{k}\Omega$ e 600Ω , $1\text{k}\Omega$ e $3\text{k}\Omega$, e $4.2\text{k}\Omega$ e $3\text{k}\Omega$; substituindo (unidades de V e $\text{k}\Omega$):



As resistências de 2.6 e 7.2 são dois percursos alternativos entre os nós A e B, e, como tal, estão em paralelo entre A e B:

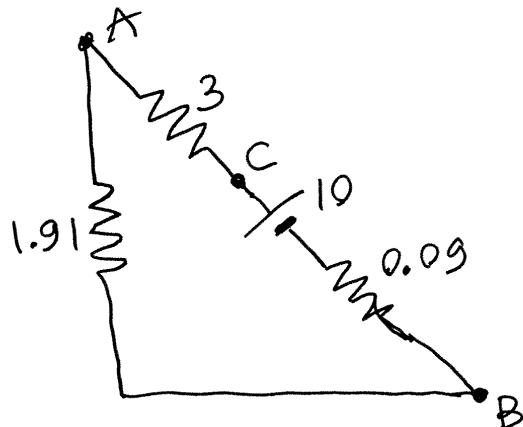
$$R_p = \left(\frac{1}{2.6} + \frac{1}{7.2} \right)^{-1} = \frac{2.6 \times 7.2}{2.6 + 7.2}$$

$$\Rightarrow R_p = 1.91$$

E as resistências de 4 e 12 estão em paralelo entre os nós A e C:

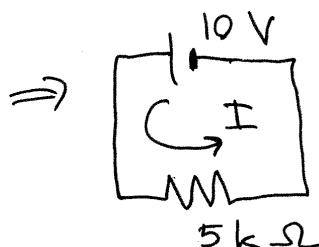
$$R_p = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right)^{-1} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = \frac{48}{16} = 3$$

O circuito equivalente é então o seguinte:



Neste circuito, as 3 resistências estão em série, podendo ser substituídas por uma única resistência:

$$R_s = 1.91 + 3 + 0.09 = 5$$



$$I = \frac{10V}{5k\Omega} = 2mA$$

Regressamos agora, gradualmente, aos circuitos anteriores, usando a lei de Ohm para determinar ΔV ou I :

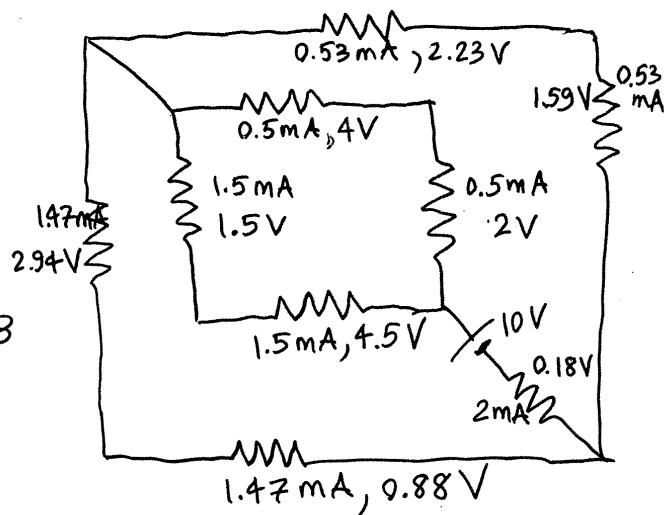
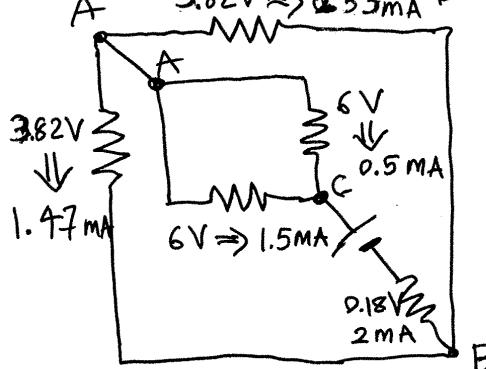


$$\Delta V_{AB} = 1.91 \times 2 = 3.82V$$

$$\Delta V_{AC} = 3 \times 2 = 6V$$

$$\Delta V_{BC} = 0.09 \times 2 = 0.18$$

(a soma das 3 é 10)



Aula 6, 2017-10-06

RECETORES

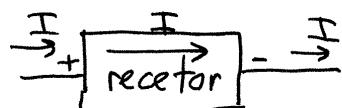
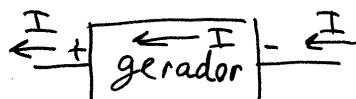
Numa pilha química recarregável, as reações químicas nos dois eletródos são reversíveis. Quando

a pilha descarrega, a corrente no eletrolito passa do ânodo (-) para o cátodo (+) e a pilha funciona como gerador, fornecendo energia, por unidade de carga,

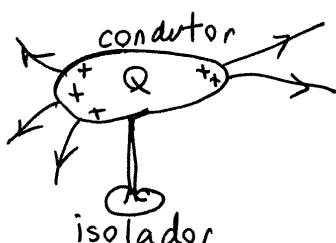
$$\Delta V_{\text{gerador}} = E - rI \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{dissipada} \\ \nearrow \text{fornecida} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{eletrolito} \end{matrix}$$

Quando uma fonte externa faz passar corrente na pilha no sentido oposto (de + para -), a energia das cargas de condução diminui na pilha, e a energia que o "receptor" (pilha a recarregar) absorve, por unidade de carga, é:

$$\Delta V_{\text{receptor}} = E + rI \quad \begin{matrix} \uparrow \text{absorvida nas} \\ \uparrow \text{reações} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \text{dissipada} \\ \uparrow \text{em calor} \end{matrix}$$

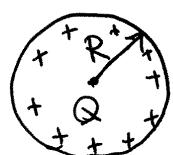


CAMPO DE UM CONDUTOR ISOLADO.



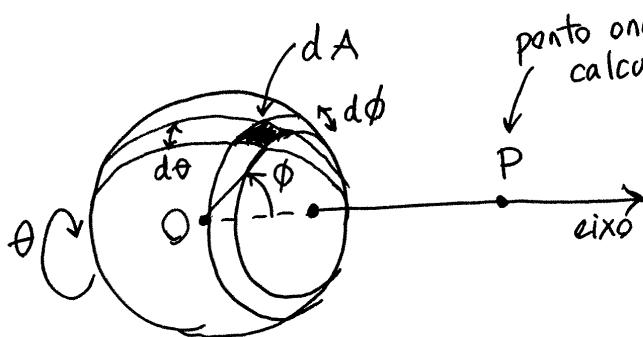
as cargas dentro do condutor afastam-se entre si, ficando todas na superfície. O campo E no interior é nulo porque as cargas de condução não se deslocam no interior.

Esfera condutora isolada



Pela simetria da esfera, a carga distribui-se uniformemente na sua superfície: $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \text{constante}$

$\overrightarrow{\text{carga por unidade}}$
 $\overrightarrow{\text{de superfície}}$



ponto onde queremos calcular \vec{E}

A superfície pode ser dividida em regiões de área infinitesimal dA , em que o ângulo ϕ , entre o eixo que passa pelo centro O e

o ponto P, aumenta em $d\phi$, e o ângulo θ , no plano perpendicular ao eixo, aumenta em $d\theta$

$$\Rightarrow dA = (R d\phi)(R \sin\phi d\theta) = R^2 \sin\phi d\theta d\phi$$

a carga infinitesimal em dA é: $dq = \sigma dA$

$$\Rightarrow dq = \frac{Q}{4\pi} \sin\phi d\theta d\phi$$

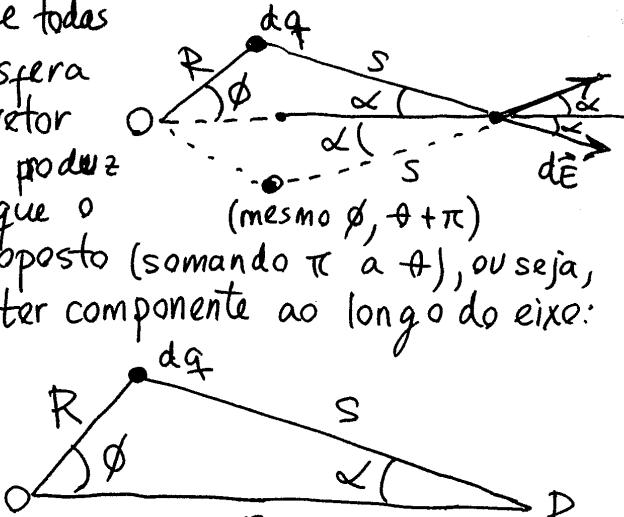
admitimos que dq é uma carga pontual e, como tal, o campo de \vec{E} é dado pela lei de Coulomb:

$$dE = \frac{k |dq|}{K S^2} = \frac{k |q|}{4\pi K} \frac{\sin\phi d\theta d\phi}{S^2}$$



Para somar os campos de todas as partes da superf. da esfera há que ter em conta o vetor \vec{dE} . Cada dq , em ϕ e θ produz o mesmo dE do que o dq que está no lado oposto (somando π a θ), ou seja, o campo total só vai ter componente ao longo do eixo:

$dE_{eixo} = dE \cos\alpha$
e $\cos\alpha$ calcula-se pela lei do cosseno:



$$R^2 = r^2 + S^2 - 2rs \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r^2 + S^2 - R^2}{2rs}$$

$$\Rightarrow dE_{eixo} = \frac{k|Q|(r^2 + s^2 - R^2)}{8\pi K r s^3} \sin\phi d\theta d\phi$$

s é função de ϕ , que pode ser obtida novamente pela lei do cosseno:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\phi$$

$$\Rightarrow 2s ds = 2Rr \sin\phi d\phi \Rightarrow \sin\phi d\phi = \frac{s}{Rr} ds$$

$$\Rightarrow dE_{eixo} = \frac{k|Q|(s^2 + r^2 - R^2)}{8\pi K R r^2 s^2} ds d\theta$$

$d\theta$ integra-se entre 0 e 2π , dando o resultado 2π , e s integra-se desde o seu valor mínimo, s_1 , até o seu valor máximo, s_2 :

$$E = \frac{k|Q|}{4K R r^2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{s^2 + r^2 - R^2}{s^2} \right) ds$$

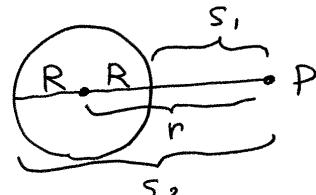
$$= \frac{k|Q|}{4K R r^2} \int_{s_1}^{s_2} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds = \frac{k|Q|}{4K R r^2} \left((s_2 - s_1) + (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) \right)$$

$$E = \frac{k|Q|}{4K R r^2} (s_2 - s_1) \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s_1 s_2} \right)$$

a) fora da esfera, $R < r$

$$s_2 = r + R \quad s_1 = r - R$$

$$\Rightarrow E = \frac{k|Q|}{4K R r^2} (2R) \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{r^2 - R^2} \right) = \frac{k|Q|}{K r^2}$$



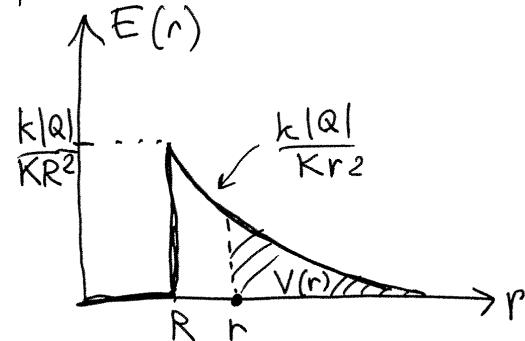
b) dentro da esfera, $R > r$

$$s_2 = R + r \quad s_1 = R - r$$

$$E = \frac{k|Q|}{4K R r^2} (2r) \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{R^2 - r^2} \right) = 0$$



O campo elétrico de uma esfera condutora de raio R e carga Q é nulo no seu interior e igual ao campo de uma carga pontual Q , no centro da esfera, quando medido no exterior da esfera.



A área sob a função $E(r)$, desde r até infinito, é o potencial $V(r)$ (arbitrando $V(r \rightarrow \infty) = 0$):

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \pm \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{kQ}{Kr^2} dr = \frac{kQ}{Kr}$$

+ se $Q > 0$, - se $Q < 0$

Dentro da esfera $V(r)$ é constante, porque $\vec{E} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow V(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{Kr}, & r \geq R \\ \frac{kQ}{KR}, & r \leq R \end{cases}$$

Uma constante $\frac{k}{KR}$ baixa indica menor energia necessária para introduzir mais carga na esfera.

Quanto maior for $\frac{KR}{k}$, maior capacidade terá a esfera de armazenar carga.

Capacidade (C) da esfera:
$$C = \frac{KR}{k}$$

As unidades de C são carga sobre potencial:

$$1 \frac{C}{V} = 1 F$$

\nwarrow coulomb
 \nwarrow volt \nwarrow Farad

Aula 7. 2017-10-11

CAPACIDADE DE UM CONDUTOR ISOLADO

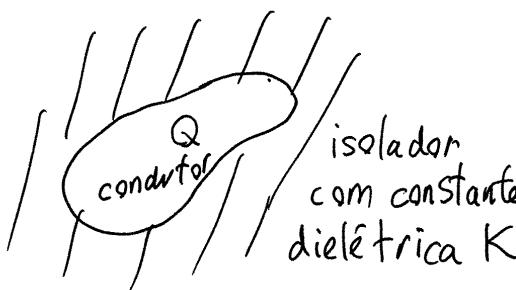


Diagram showing a conductor of charge Q inside an insulator with constant dielectric constant K . The insulator is represented by a wavy line.

$$d\vec{E} = \frac{k|dq|}{K s^2} \hat{e}_r$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{k|Q|}{K} \vec{f}(r)$$

funções que dependem
da forma geométrica
do condutor

$$V_{cond} = \int_{cond}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{kQ}{K} g \quad (V_{cond}(\infty) = 0, g > 0)$$

define-se a capacidade do condutor:

$$C_{cond} = \frac{V_{cond}}{Q} = \frac{K}{kg} \quad (g = \int_{cond}^{\infty} \vec{f}(r) \cdot d\vec{r} > 0)$$

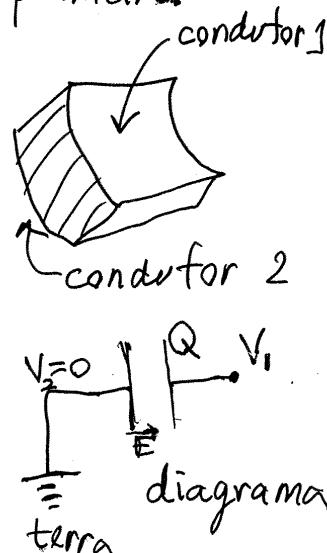
C_{cond} pode aumentar-se usando um isolador com maior constante K , ou colocando um segundo condutor, ligado à terra, próximo do primeiro.

CONDENSADORES

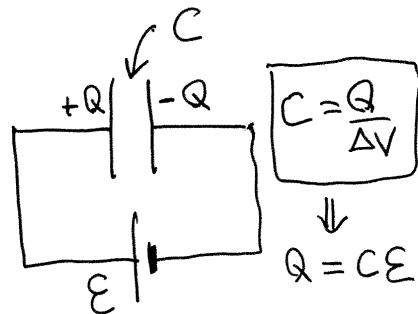
Formados por dois condutores (armaduras) separados por um isolador com constante dielétrica K . Se um dos condutores é ligado à terra e no outro é colocada carga Q , entre as armaduras há campo \vec{E} :

$$V_{cond} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{kQ}{K} g$$

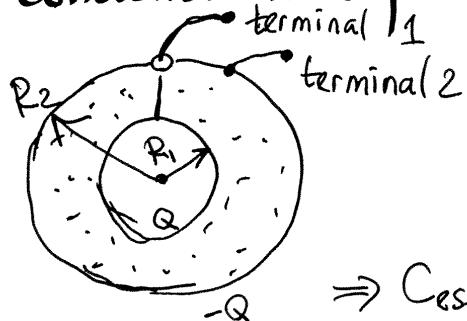
$$\Rightarrow C = \frac{K}{kg} \quad (\text{quanto maiores forem as armaduras e mais próximas estiverem, } C \text{ é maior})$$



Na armadura 2 induz-se carga $-Q$. O mesmo efeito obtém-se se as duas armaduras ligam-se aos elétrodos de uma fonte.



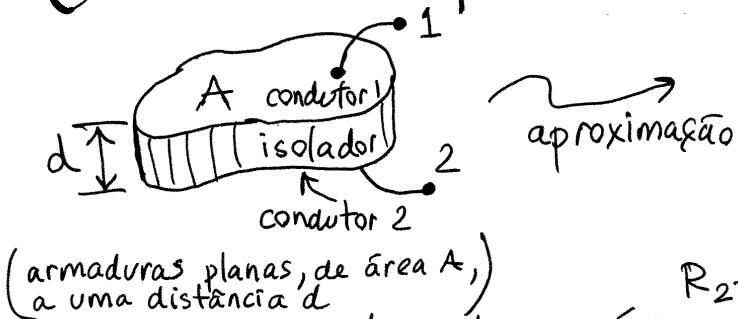
① Condensador esférico



$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{Kr^2} dr = \frac{kQ}{K} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C_{\text{esfer.}} = \frac{KR_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

② Condensador plano



(armaduras planas, de área A , a uma distância d)



parte de um condensador esférico com $R_2 - R_1 = d$, mas $R_1 \rightarrow \infty$

Campo no condensador esférico:

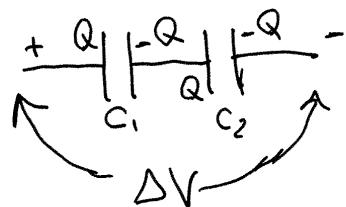
$$E(r) = \frac{kQ}{Kr^2}, \quad R_1 < r < R_2, \quad Q = \begin{cases} \text{carga na esfera de raio } R_1, \\ \text{se } r \approx R_1, \text{ se } R_1 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$Q_{\text{plano}} = \frac{A}{4\pi R_1^2} Q \Rightarrow E \approx \frac{k}{KR_1^2} \left(\frac{4\pi R_1^2}{A} Q_{\text{plano}} \right) = \frac{4\pi k Q_{\text{plano}}}{KA}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{4\pi k Q_{\text{plano}} d}{KA}$$

$$C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi k d}$$

Condensadores em série

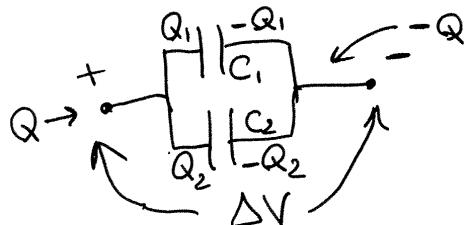


a carga nos dois condensadores é a mesma!

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$C_{\text{série}} = \frac{Q}{\Delta V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

Condensadores em paralelo



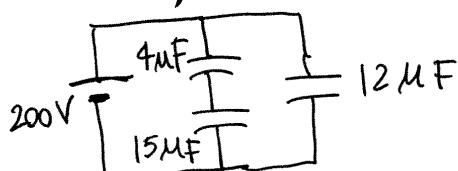
$Q = Q_1 + Q_2 = \text{carga total no sistema}$

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

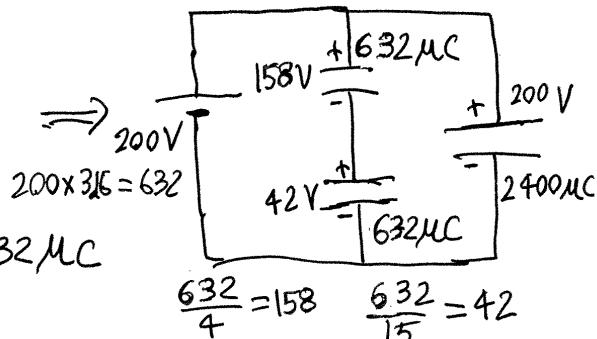
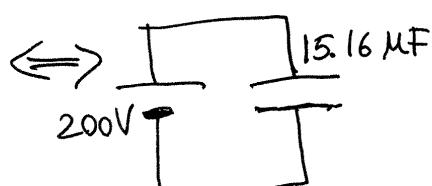
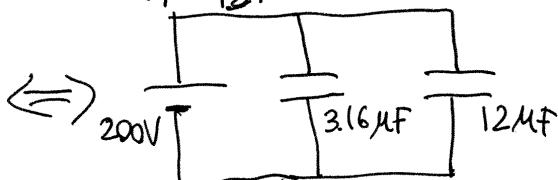
$$\Rightarrow Q = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

$$\Rightarrow C_{\text{paralelo}} = C_1 + C_2$$

Exemplo.



$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{15} \right)^{-1} = 3.16$$



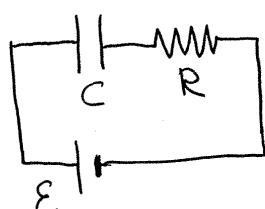
$$\Rightarrow Q_{\text{total}} = 200 \times 15.16 = 3032 \mu C$$

$$\frac{632}{4} = 158 \quad \frac{632}{15} = 42$$

RIGIDEZ DIELÉTRICA

Campo máximo, E_{\max} , que um dielétrico suporta sem se queimar. Voltagem máxima de um condensador: $\Delta V_{\max} = E_{\max} d$

CARGA E ENERGIA ARMAZENADA



em $t=0$ liga-se um condensador com carga $Q_0=0$ a uma fonte com fem E . R é a resistência total do circuito

$$\text{Em qualquer } t: \Delta V_R + \Delta V_C = E$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{voltagem na resist\^encia}} \quad \xleftarrow{\text{voltagem no condensador}} \\ R I + \frac{Q}{C} = E \end{array}$$

$$\text{No instante inicial, } Q_0=0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$$

No **estado estacion\'ario** ($t \rightarrow \infty$), $I_e=0$

$$\Rightarrow Q_e = C E$$

num tempo t ($0 < t < \infty$) a carga no condensador é Q ($0 < Q < Q_e$) e num intervalo $[t, t+dt]$ entra mais carga dQ , com energia: $dU = dQ \Delta V_C = \frac{Q}{C} dQ$ como tal, a energia armazenada no condensador, no instante em que a carga é Q , é:

$$U = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C \Delta V_c^2}{2} = \frac{Q \Delta V_c}{2}$$

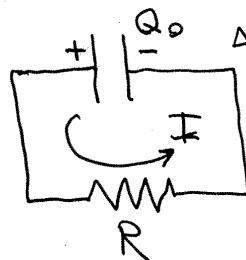
Aula 8, 2017-10-13

Observe-se que, no estado estacionário,

$$U_e = \frac{1}{2} Q E$$

ou seja, metade da energia retirada da fonte, QE , fica no condensador. A outra metade é dissipada em calor na resistência R .

CONDENSADOR COMO FONTE



$\Delta V_0 = \frac{Q_0}{C}$ em $t_0 = 0$, a carga no condensador é $Q_0 > 0$. e o condensador liga-se a uma resistência R .

$$I_0 = \frac{\Delta V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$

em $t > 0$, $\Delta V(t) < \Delta V_0$, $I(t) = \frac{\Delta V(t)}{R} = \frac{Q(t)}{RC}$ ↪ constante de tempo

O condensador funciona como fonte, mas com fém variável: $E(t) = \frac{Q(t)}{C}$ $E(t) < E_0$, $E(t) \rightarrow 0$

Nos condensadores mais comuns, C é da ordem dos nF ou até μF.

Por exemplo, se $C = 1.5 \text{ mF}$ e $\Delta V_0 = 1.5 \text{ V} \Rightarrow Q_0 = 1.25 \mu\text{C}$, que é muito pouco, comparado com a carga de uma pilha AA (da ordem dos kC).

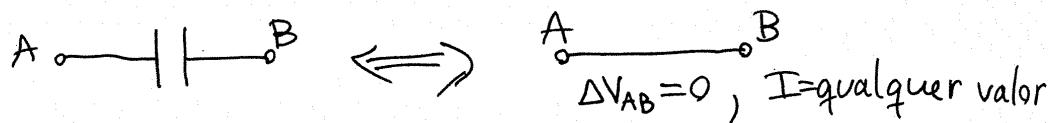
Nos **ultracondensadores**, é possível ter capacidade da ordem dos kF.

Por exemplo, se $C = 3 \text{ kF}$ e $\Delta V_0 = 1.5 \text{ V} \Rightarrow Q_0 = 4.5 \text{ kC}$ que já pode substituir uma pilha, com a vantagem de ter resistência interna quase nula.

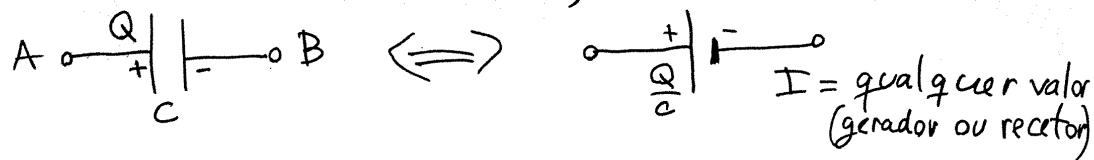
CIRCUITOS COM FONTES DE FEM, RESISTÊNCIAS E CONDENSADORES

condensadores: a) descarregado, $\Delta V=0$, mas $I=\frac{dQ}{dt}$ pode ter qualquer valor:

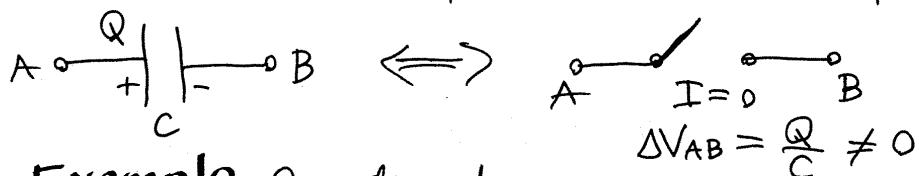
Como tal, pode substituir-se por um curto-círcito



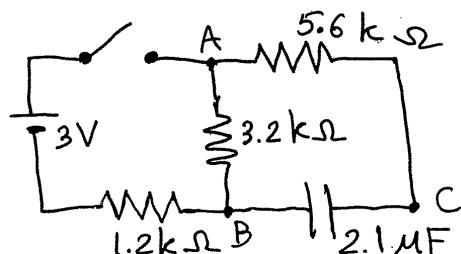
b) com carga a mudar: $\Delta V = \frac{Q}{C} \neq 0$, $I = \frac{dQ}{dt} = \text{qualquer}$
É equivalente a uma fonte com fem $E = \frac{Q}{C}$, $r = 0$
(ideal)



c) com fontes de fem constante, Q não pode mudar indefinidamente. Após algum tempo, o condensador fica em **estado estacionário** (equilíbrio estável), em que Q e ΔV são constantes $\Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = 0$
O condensador é equivalente a um interruptor aberto:



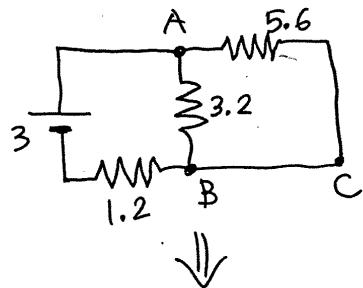
Exemplo. O condensador está inicialmente descarregado. Fecha-se o interruptor em $t_0=0$, e volta a abrir-se em $t=t_1$, muito tempo depois de t_0 . Determine a corrente



na resistência de $5.6 \text{ k}\Omega$, em t_0 e t_1 .

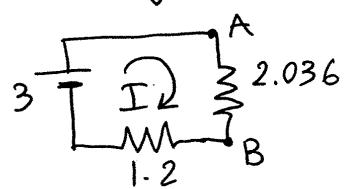
Resolução: Em t_0 o circuito equivalente é o seguinte:

$$(R \rightarrow \text{k}\Omega, \Delta V \rightarrow V)$$



as resistências de 3.2 e 5.6
estão em paralelo:

$$R_p = \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{3.2} \right)^{-1} = 2.036$$

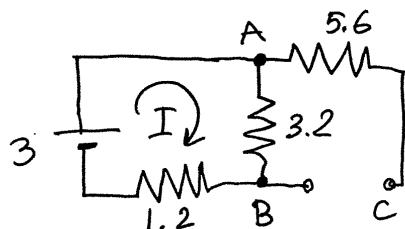


$$I = \frac{3}{1.2 + 2.036} = 0.9270 \quad (I \rightarrow \text{mA})$$

$$\Delta V_{BA} = 2.036 \times 0.9270 = 1.888$$

a corrente em $R=5.6$ é: $I = \frac{\Delta V_{BA}}{5.6} = 0.337 \text{ mA}$
(de A para C)

Em $t \rightarrow t_1$ (antes de ser aberto o interruptor), o condensador está no estado estacionário e o circuito é:



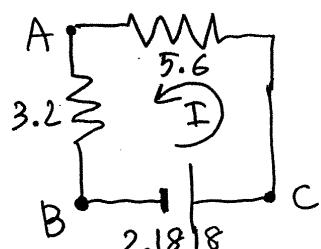
Não passa corrente de A para C!

$$\Rightarrow I = \frac{3}{1.2 + 3.2} = 0.618$$

e a diferença de potencial no condensador (ΔV_{BC})
é igual à dif. de potencial na resistência de 3.2 (ΔV_{BA})

$$\Delta V_{\text{cond.}} = RI = 3.2 \times 0.618 = 2.1818 \text{ V} \quad (+\text{em } C \text{ e } -\text{em } B)$$

Em $t=t_1$ a fem de 3V está desligada mas o condensador é uma fonte de 2.1818V

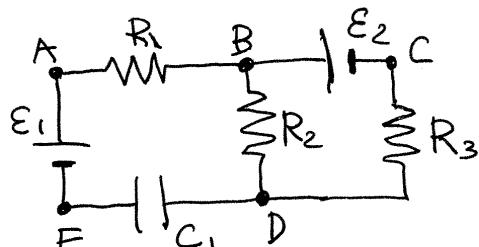


$$I = \frac{2.1818}{3.2 + 5.6} = 0.248 \text{ mA}$$

(agora de C para A, sentido inverso)
do que em t_0

MALHAS E NÓS

este circuito tem 6 dispositivos, ligados entre 5 pontos, A, B, C, D e E



Os dois pontos B e D, onde há separação da corrente, chamam-se nós e os percursos fechados A, B, D, E e B, C, D chamam-se malhas. Note-se que há várias formas de determinar ΔV . Por exemplo:

$$\Delta V_{ED} = E_1 + \Delta V_{R_1} + \Delta V_{R_2} = E_1 + \Delta V_{R_1} - E_2 + \Delta V_{R_3}$$

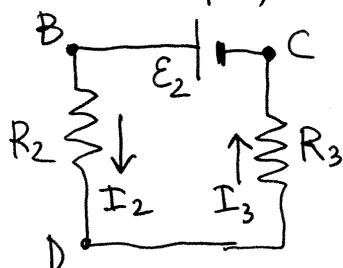
(os sinais de ΔV_{R_i} dependem dos sentidos das correntes.)

LEIS DE KIRCHHOFF

Lei das correntes. A soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem dele.

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Lei das voltagens. A soma algébrica das voltagens nos dispositivos numa malha é nula. Por exemplo, na malha B, C, D no circuito acima,



$$E_2 + \Delta V_{R_2} + \Delta V_{R_3} = 0$$

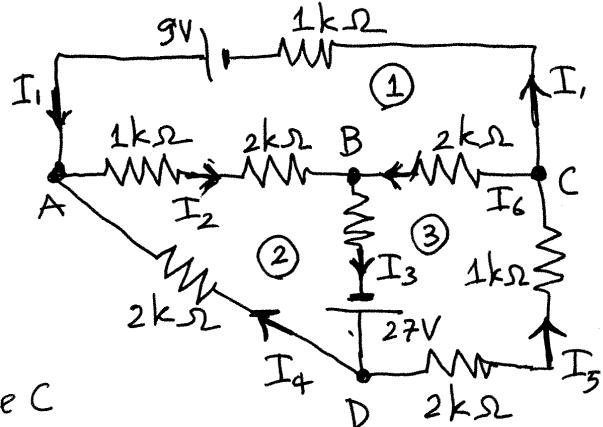
$$E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

porque I_2
passa de B para D

porque I_3
passa de D para C

Aula 9. 2017-10-18

As 2 leis de Kirchhoff são suficientes para resolver qualquer circuito. No exemplo ao lado, há 6 correntes I_1, I_2, \dots, I_6 , e 6 equações lineares (3 nos nós A, B e C e 3 nas malhas ①, ② e ③)



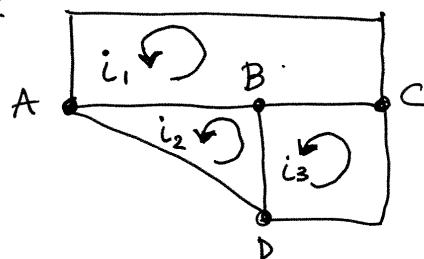
Por exemplo, as equações no nó A e na malha ① são:

$$I_1 + I_4 = I_2 \quad 9 - 1 \times I_2 - 2 I_2 + 2 I_6 - 1 \times I_1 = 0$$

mas há formas mais simples de obter I_1, \dots, I_6

MÉTODO DAS MALHAS

① Em cada malha define-se uma **corrente de malha**, i , todas no mesmo sentido (sentido dos ponteiros do relógio ou sentido oposto. Por exemplo, no circuito acima temos 3 correntes de malha:



As correntes de malha permitirão determinar as correntes I_1, I_2, \dots, I_6 : $I_1 = i_1, I_2 = i_1 - i_2, I_3 = i_3 - i_2, I_4 = -i_2, I_5 = i_3, I_6 = i_3 - i_1$
Note-se que assim as equações dos nós já estão garantidas.

② Constrói-se uma matriz quadrada \mathbb{R} , com tamanho igual ao número de malhas e:

$$R_{jj} = \text{soma das resistências na malha } j$$

$$R_{ij} = -\text{soma das resistências na fronteira das malhas } i \text{ e } j.$$

No exemplo anterior, e em unidades de $k\Omega$,

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

③ Constrói-se uma matriz coluna, \mathcal{E} , com tantas linhas quantas malhas houver, tal que:

$E_{j,1} = \text{soma de todas as fem na malha } j, \text{ considerando positivas nas que a corrente de malha passa de } - \text{ para } + \text{ e negativas nas que passa de } + \text{ para } -$

no nosso exemplo: $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 9 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix} \text{ (em volts)}$

④ As equações das malhas são: $\mathbb{R}\vec{i} = \mathcal{E}$
onde \vec{i} é uma matriz coluna com as correntes de malha i_1, i_2, \dots, i_n . No nosso exemplo:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a primeira equação neste sistema é:

$$6i_1 - 3i_2 - 2i_3 = 9 \Rightarrow 9 - 6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 0$$

que é a mesma equação da malha que obtivemos antes:

$$9 - 3I_2 + 2I_3 - I_1 = 9 - 3(i_1 - i_2) + 2(i_3 - i_1) - i_1 = 0$$

a grande vantagem deste método é que as matrizes \mathbb{R} e \mathbb{E} são facilmente obtidas observando o circuito e as correntes de malha obtém-se com apenas um comando do Maxima:

`invert(matrix([[6,-3,-2],[-3,9,-4],[-2,-4,9]]))`.

$$[9, -27, -27]; \rightarrow [2, -1, 3] \text{ (em mA)}$$

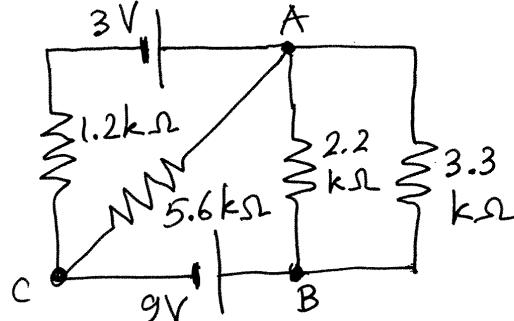
O sinal negativo de i_2 indica que é no sentido horário. As 6 correntes no sistema são então:

$$I_1 = 2 \text{ mA}, I_2 = 3 \text{ mA}, I_3 = 4 \text{ mA}, I_4 = 1 \text{ mA}, I_5 = 3 \text{ mA}, I_6 = 1 \text{ mA}$$

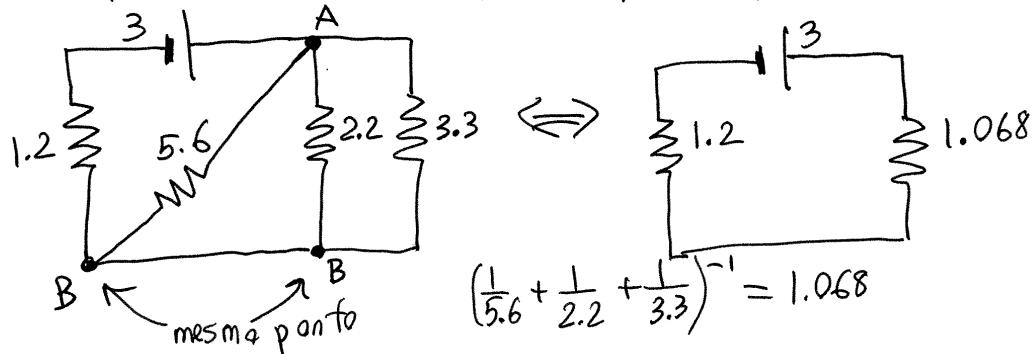
MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

Um circuito com n fontes de fem substitui-se por n circuitos em que todas as fontes, excepto uma, estão em curto circuito. Resolvem-se esses n circuitos e logo somam-se as correntes de todos eles.

Exemplo: Resolva o circuito pelo método de sobreposição (ou seja, encontre a corrente em cada elemento).



O. primeiro circuito é ($R \rightarrow \text{k}\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow \text{mA}$):



$$\Rightarrow \text{a corrente da fonte é } \frac{3}{1.2 + 1.068} = 1.323 \text{ mA}$$

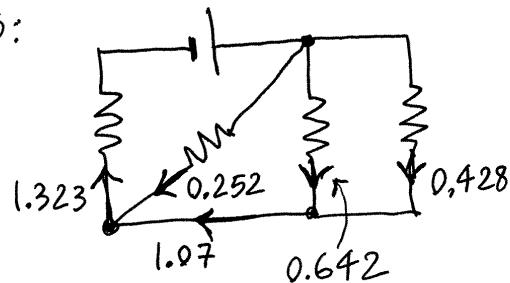
$$\Rightarrow \Delta V_{BA} = 1.068 \times 1.323 = 1.413 \text{ V}$$

as correntes no circuito são:

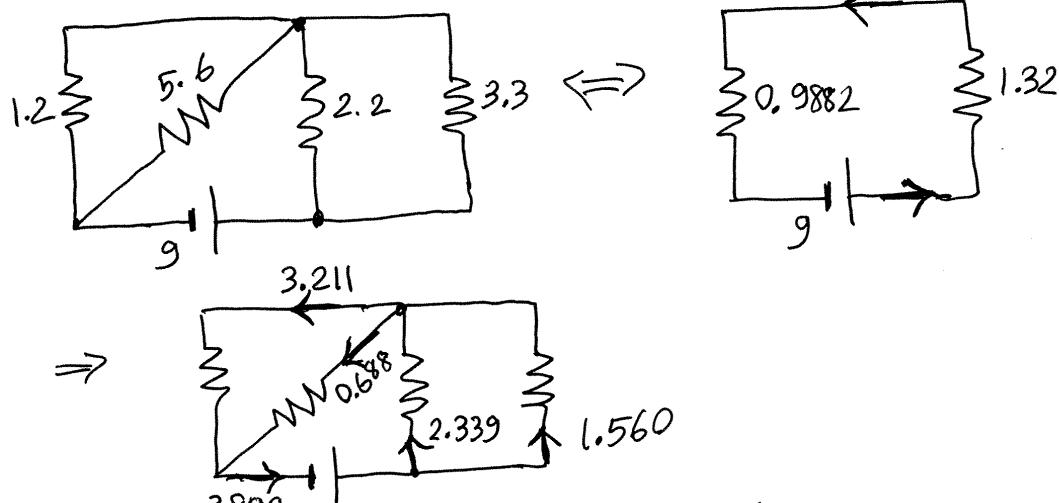
$$\frac{1.413}{5.6} = 0.252 \text{ mA}$$

$$\frac{1.413}{2.2} = 0.642 \text{ mA}$$

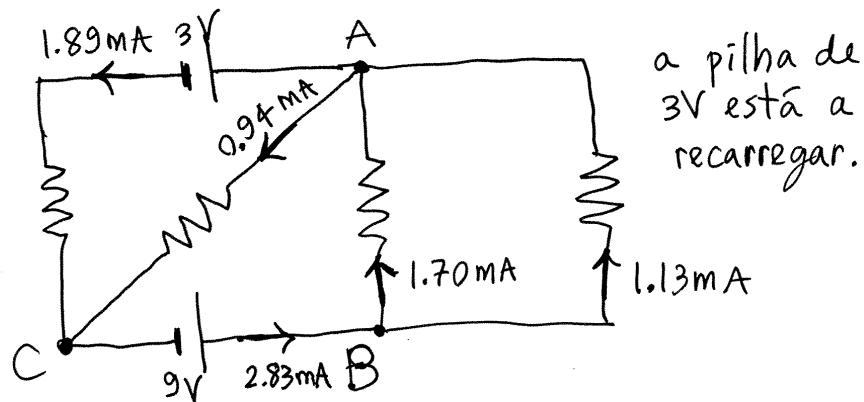
$$\frac{1.413}{3.3} = 0.428 \text{ mA}$$



No segundo circuito:



Combinando os dois circuitos, obtém-se:



Aula 10. 2017-10-20
CAMPO ELÉTRICO DE SISTEMAS DE CARGAS PONTUAIS

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_i$$

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i}{d_i^2} \hat{r}_i$$

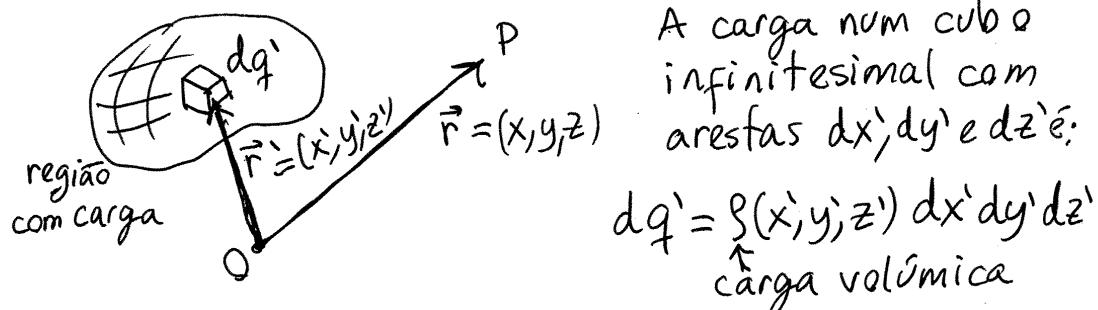
d_i = distância desde q_i até $P = |\vec{r} - \vec{r}_i|$

$$\hat{r}_i = \text{versor desde } q_i \text{ até } P$$

$$= \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}$$

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA



Cada cubo infinitesimal considera-se uma carga pontual e, como tal, usa-se a expressão acima. O somatório torna-se um integral de volume:

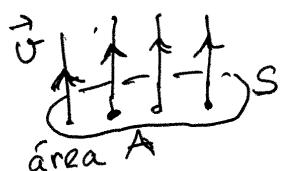
$$\vec{E}(\vec{r}) = k \iiint_{\text{volume}} \frac{\rho(x', y', z') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz'$$

existe um método mais simples, em alguns casos, baseado na Lei de GAUSS.

FLUXO ELÉTRICO

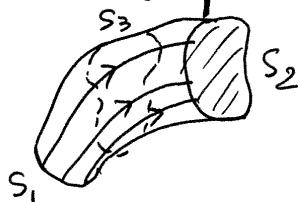
Considerando o campo \vec{E} como campo de velocidades dum fluido, o fluxo elétrico será a quantidade de fluido que passa por uma superfície, por unidade de tempo

Se a velocidade, nos pontos da superfície S , for perpendicular e com módulo constante, o fluxo é $\Phi = A v$, onde A é a área da superfície



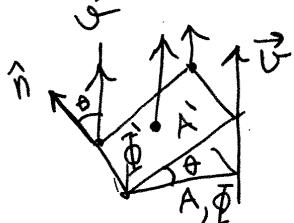
$$\begin{aligned} & \vec{v} \text{ = velocidade} \\ & \vec{S} \text{ = superfície} \\ & \vec{n} \text{ = versor normal à superfície} \\ & v = \text{distância que o fluido se desloca em } \Delta t = 1 \\ & \Rightarrow \Phi = A v = \text{volume de fluido através de } S \end{aligned}$$

Tubo de fluxo.



volume delimitado pelas linhas de campo que passam por uma superfície S_1 . Se não existem fontes nem sifões dentro do tubo,

o fluxo em qualquer superfície no tubo é o mesmo
 $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$ (pode ser uma sup. não perpendicular a \vec{v})



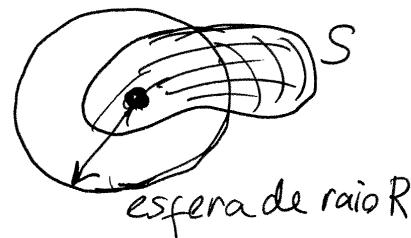
$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi \quad (\text{estão no mesmo tubo}) \\ &= A v = A' \cos \theta v \\ \Rightarrow \Phi' &= A' (\vec{v} \cdot \hat{n}) \\ (\hat{n} &= \text{versor normal à superf. } S') \end{aligned}$$

Ou seja, numa superfície complicada, o fluxo do campo elétrico é um integral de superfície:

$$\boxed{\Phi_s = \iint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dA}$$

LEI DE GAUSS

Se a superfície S for fechada, o fluxo do campo produzido por uma carga pontual q , dentro de S , é igual ao fluxo através de uma esfera de raio R , com centro na carga q , porque se a esfera estiver no mesmo tubo de fluxo.



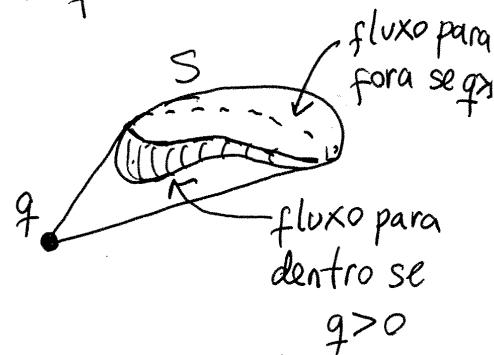
Mas em todos os pontos na superfície da esfera o campo de q é perpendicular e com módulo constante, $\frac{k|q|}{R^2}$

$$\Rightarrow \Phi_s = \Phi_{\text{esfera}} = 4\pi R^2 \left(\frac{k|q|}{R^2} \right)$$

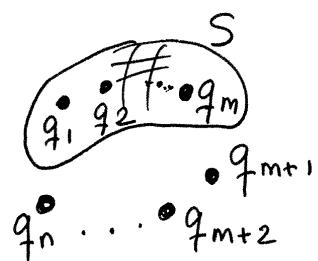
$$\boxed{\Phi_s = 4\pi k q}$$

retirando o valor absoluto, Φ_s será positivo, para fora de S , se $q > 0$, ou negativo, para dentro de S , se $q < 0$.

Se q estiver fora de S , o fluxo é nulo, porque o fluxo que entra por uma região de S é igual ao fluxo que sai pela outra parte de S .



Sistema de n cargas. $\{q_1, q_2, \dots, q_m$ dentro de S
 $\} q_{m+1}, q_{m+3}, \dots, q_n$ fora de S



$$\Phi_s = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^m \Phi_i$$

($\Phi_i = 0$, se $i > m$)

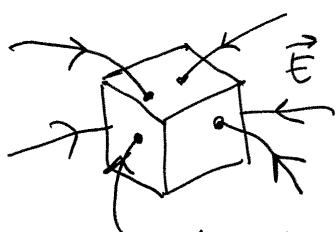
$$\Rightarrow \Phi_s = \sum_{i=1}^m 4\pi k q_i = 4\pi k (q_1 + q_2 + \dots + q_n)$$

O fluxo do campo elétrico de um sistema de cargas, através de uma superfície fechada S, é igual a $4\pi k$ vezes a carga total no interior de S.

$$\Phi_s = 4\pi k q_{int}$$

(se S for fechada)

Exemplos:

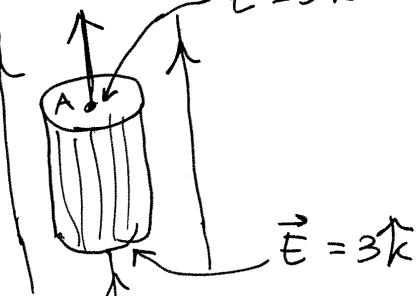


únicamente entram linhas de campo no cubo

$$\Rightarrow \Phi_{cubo} < 0$$

$\Rightarrow q$ dentro do cubo < 0
 podem haver cargas positivas mas a carga total é negativa.

cilindro com tampas de área A



Na parede curva do cilindro o fluxo é nulo.

Na tampa de cima o fluxo é positivo, $+5A$.

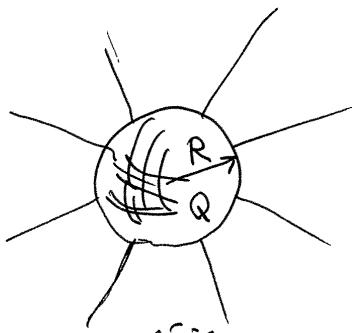
Na tampa de baixo, o fluxo é $-3A$

\Rightarrow há carga total positiva dentro do cilindro.

Aula 11 - 2017-10-25

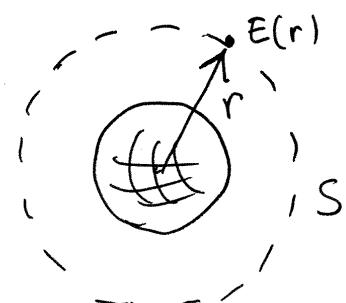
CAMPO DE UMA ESFERA CONDUTORA

Como a carga total Q distribui-se uniformemente, se existir campo, deverá ser na direção radial e pode depender apenas da distância r até o centro da esfera. Como tal, numa



superfície esférica de raio r , com centro no centro da esfera, o fluxo elétrico é igual ao módulo do campo $E(r)$, vezes a área dessa superfície, $4\pi r^2$

$$\Rightarrow \Phi_S = 4\pi r^2 E(r)$$



Mas, pela lei de Gauss, $\Phi_S = 4\pi k q_{int}$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k q_{int} \Rightarrow E(r) = \frac{k q_{int}}{r^2}$$

a) se $r > R$ (fora da esfera condutora), $q_{int} = Q$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{kQ}{r^2}}$$

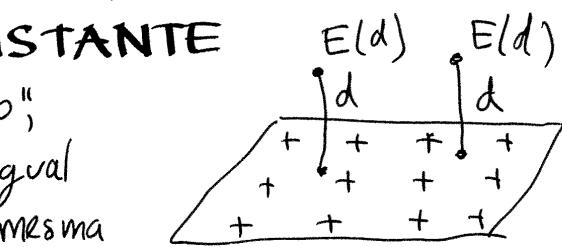
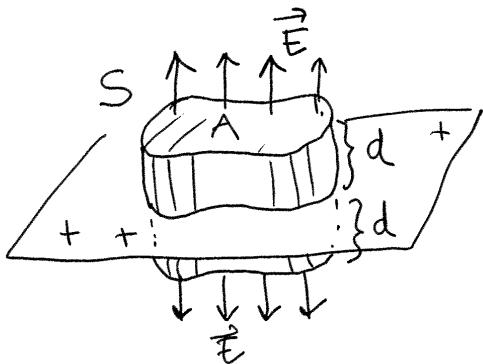
b) se $r < R$ (dentro da esfera condutora), $q_{int} = 0$, porque a carga fica toda na superfície da esfera condutora. $\Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$

CAMPO DE UM PLANO COM CARGA SUPERFICIAL CONSTANTE

Se o plano for "infinito",

O campo deverá ser igual em todos os pontos à mesma

distância d do plano e as linhas de campo deverão ser perpendiculares ao plano. Uma super-



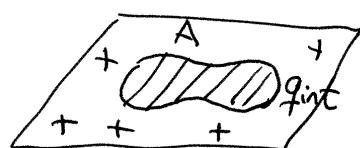
fície fechada, com campo de módulo constante em cada parte da superfície, obtém-se com duas tampas iguais, paralelas ao plano à mesma distância d nos dois lados do plano,

Na parede lateral dessa superfície, o fluxo é nulo, porque as linhas de campo são tangentes. Em cada uma das tampas o fluxo é EA , com o mesmo sinal e o mesmo valor nos dois lados porque E depende apenas de d .

$$\Rightarrow \Phi_s = 0 + EA + EA = 2EA$$

lei de Gauss: $\Phi_s = 4\pi k q_{int}$

$$\Rightarrow E = 2\pi k \frac{q_{int}}{A}$$

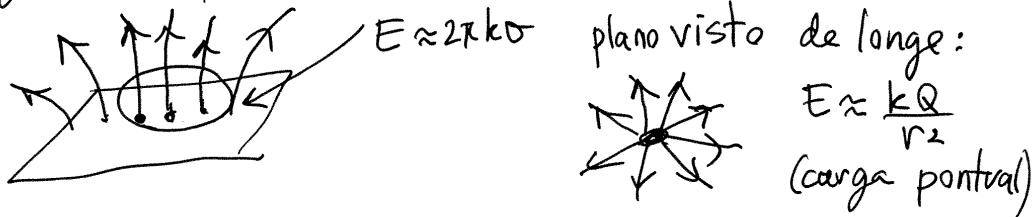


q_{int} é a carga numa região de área A no plano

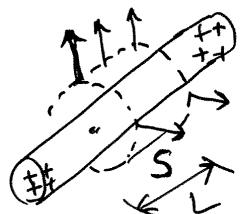
$$\Rightarrow E = 2\pi k \sigma \quad \text{constante!} \quad \sigma = \text{carga superficial} \\ (\text{carga por unidade de área})$$

num plano finito,

$E = 2\pi k \sigma$ = constante é uma boa aproximação na região em que as linhas de campo são paralelas:



CILINDRO INFINITO COM CARGA VOLÚMICA CONSTANTE



$\sigma = \frac{\text{carga}}{\text{volume}}$ = igual em todas as regiões do cilindro

S = superfície cilíndrica de raio r (diferente do raio R do cilindro), comprimento L e eixo igual ao eixo do cilindro

$$\Rightarrow \oint_S E \cdot dS = 0 + 0 + (2\pi r L) E(r) \quad \begin{matrix} \text{o campo é radial e} \\ \text{depende apenas de} \\ \text{área da parede lateral de } S \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 4\pi k q_{\text{int}} = 2\pi r L E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{2k q_{\text{int}}}{r L}$$

a) $r > R \Rightarrow q_{\text{int}} = \pi R^2 L \sigma$

$$E(r) = \frac{2\pi k R^2 \sigma}{r}$$

$$E(r) = \frac{2k\lambda}{r}$$

$\lambda = \pi R^2 \sigma$
= carga por unidade de comprimento no cilindro

b) $r < R \Rightarrow q_{\text{int}} = \pi r^2 L \sigma$

$$E(r) = 2\pi k \sigma r$$

$$E(r) = \frac{2k\lambda}{R^2} r$$

$E(r)$ aumenta linearmente dentro do cilindro e diminui proporcionalmente a r , fora do cilindro.

POTENCIAL

num ponto (x, y, z) qualquer,

$$V(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad P_0 = \text{ponto de referência}$$

onde arbitramos $V_0 = 0$

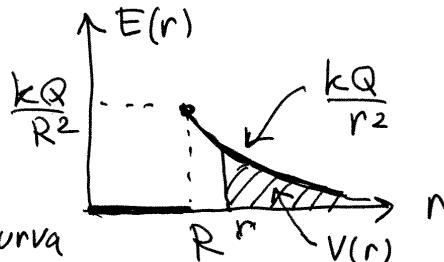
Quando há simetria, $\vec{E} = E\hat{e} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = E dr$

① Esfera condutora: $\vec{E} = E(r)\hat{r} \leftarrow$ versor radial

$$\Rightarrow V(r) = \int_r^{r_0} E(r) dr$$

seja $r_0 \rightarrow \infty$

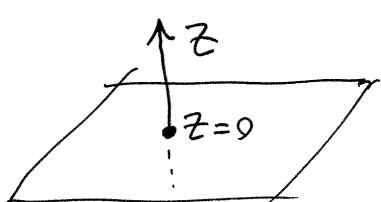
$\Rightarrow V(r) = \text{área sob a curva}$
de $E(r)$, desde r até ∞ .



a) $r > R \Rightarrow V(r) = \int_r^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \boxed{\frac{kQ}{r}}$

b) $r < R, V(r) = \int_r^R E dr + \int_R^{\infty} \frac{kQ}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \boxed{\frac{kQ}{R}}$
(constante),

② Plano infinito com carga superficial σ constante.



$$\vec{E} = 2\pi k \sigma \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = 2\pi k \sigma dz$$

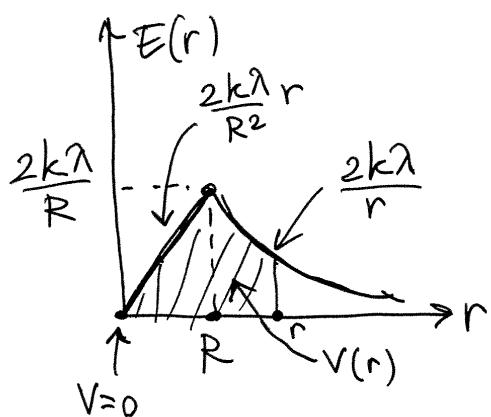
$$V(z) = \int_z^{z_0} 2\pi k \sigma dz$$

z_0 não pode ser ∞ , porque o integral seria então divergente. Escalhe-se, por exemplo, $z_0 = 0$.

$$V(z) = 2\pi k \sigma \int_z^0 dz \Rightarrow V(z) = -2k\sigma|z|$$

$|z|$ porque se $z < 0$, $\vec{E} = -2\pi k \sigma \hat{k}$
 $\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = -2\pi k \sigma dz$

③ Cilindro infinito, de raio R , com ρ constante



escolhe-se $r_0 = 0$, porque a primitiva de $\frac{1}{r}$ é $\ln r$, que diverge para $r \rightarrow \infty$

$$\lambda = \pi R^2 \rho = \text{carga linear constante.}$$

a) $r < R$,

$$V(r) = \int_r^0 \frac{2k\lambda}{R^2} r dr = -\frac{k\lambda}{R^2} r^2$$

b) $r > R$,

$$V(r) = \int_r^R \frac{2k\lambda}{R^2} r dr + \int_R^r \frac{2k\lambda}{r} dr$$

$$= -\frac{k\lambda}{R^2} R^2 + 2k\lambda (\ln(r) - \ln(R))$$

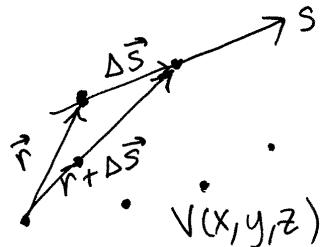
$$V(r) = k\lambda \left(\ln \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right)$$

Ou, também:

$$(V(R)=0)$$

$$V(r) = \begin{cases} k\lambda \ln \left(\frac{r}{R} \right)^2, & r \geq R \\ k\lambda \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), & r \leq R \end{cases}$$

Aula 12. 2017-10-27

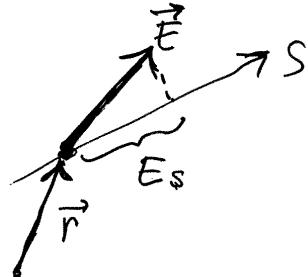


O potencial elétrico é uma função escalar $V(x, y, z)$ com um valor numérico em cada ponto do espaço: $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$

Derivadas parciais. A diferença de potencial entre dois pontos, \vec{r} e $\vec{r} + \Delta \vec{s}$, ao longo dum eixo S é: $\Delta V_s = V(\vec{r} + \Delta \vec{s}) - V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \Delta \vec{s}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

No limite $\Delta s \rightarrow 0$, $\Delta V_s \rightarrow \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = E_s \Delta s$ onde E_s é a projeção do campo elétrico, no ponto \vec{r} , na direção do eixo S

$$\Rightarrow E_s = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V_s}{\Delta s}$$



$$E_s = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V(\vec{r} + \Delta \vec{s}) - V(\vec{r})}{\Delta s} = - \text{derivada parcial de } V(\vec{r}), \text{ na direção do eixo } S$$

Em particular, as derivadas parciais nas direções dos 3 eixos cartesianos, com sinal negativo, são as 3 componentes cartesianas do campo elétrico:

$$E_x = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)}{\Delta y} = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V(x, y, z + \Delta z) - V(x, y, z)}{\Delta z} = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

O campo elétrico em cada ponto do espaço é igual a menos o gradiente da função $V(x, y, z)$ nesse ponto.

Como $V(x, y, z)$ é uma função contínua, a ordem das derivadas de ordem superior não interessa:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-E_y) = \frac{\partial}{\partial y}(-E_x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad \text{e também: } \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

condições essas que podem ser escritas como uma única condição vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} = 0$$

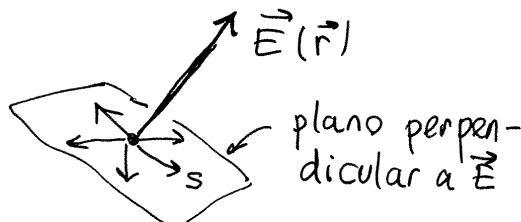
O rotacional do campo elétrico é nulo em qualquer ponto do espaço.

SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

Em qualquer direção s perpendicular a \vec{E} ,

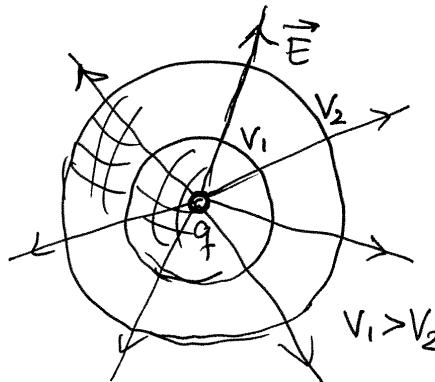
$$\vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{V(\vec{r} + \Delta \vec{s}) - V(\vec{r})}{\Delta s} = 0$$



Ou seja, V permanece constante nas direções perpendiculares a \vec{E} . Os planos perpendiculares a \vec{E} em diferentes pontos são tangentes as superfícies

onde V permanece constante (superfícies equipotenciais). Por exemplo, o campo \vec{E} de uma carga pontual é nas direções radiais. As superfícies equipotenciais são então as esferas com centro na carga. O sinal negativo em $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ implica que \vec{E} aponta no sentido em que V diminui. Como tal, se $q > 0$, as esferas com raio menor terão maior potencial, mas se $q < 0$, as esferas com menor raio terão menor potencial. A expressão do potencial será a expressão que dá valores constantes para cada valor da distância r até à carga.



$\Rightarrow V = \text{constante} \times f(r)$

é fácil ver que, para obter $\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \vec{r} = -\vec{\nabla}V$

$V(r)$ deverá ser:

$$V(r) = \frac{kq}{r} = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Se houver n cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n nas posições $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, \vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$

$$\Rightarrow V(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}$$

POTENCIAIS EM DUAS DIMENSÕES

V e \vec{E} podem ser representados graficamente mais fácil.
As superfícies equipotenciais passam a ser curvas.

Exemplo: Três cargas pontuais de -4uC , 3uC e 2uC , nas posições $(x, y) = (20, 10)$, $(10, -30)$ e $(-30, 0)$ (em cm).

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 90 \frac{\text{V} \cdot \text{dm}}{\text{uC}}$$

No Maxima:

$$q: [-4, 3, 2] \text{ } \$$$

$$r: [[2, 1], [1, -3], [-3, 0]] \text{ } \$$$

$$V: 90 * \text{sum}(q[i]/\text{sqrt}((x-r[i][1])^2 + (y-r[i][2])^2), i, 1, 3);$$

$$[E_x, E_y]: [-\text{diff}(V, x) - \text{diff}(V, y)] \text{ } \$$$

$$\text{plotdf}([E_x, E_y], [x, -5, 5], [y, -5, 5]);$$

As duas cargas positivas são nós repulsivos e a carga negativa é nó atrativo

Existe um ponto de sela, aproximadamente em $(-1.47, -1.92)$, onde o campo é nulo.

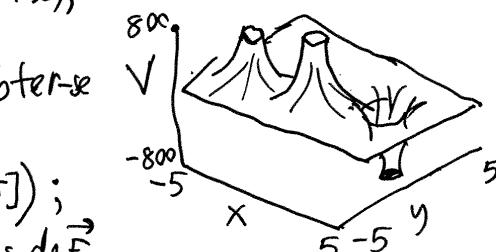
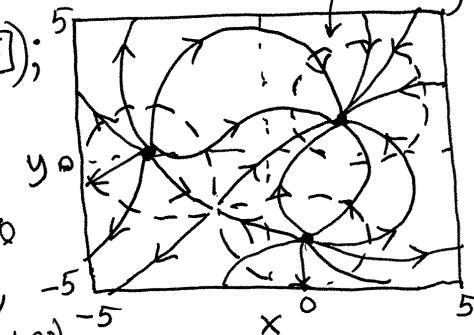
As equipotenciais podem obter-se com o programa `ploteq`:

$$\text{ploteq}(V, [x, -5, 5], [y, -5, 5]);$$

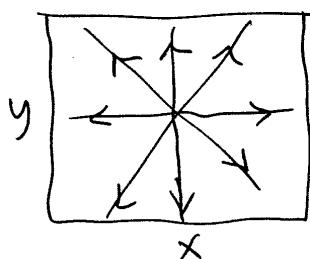
que também mostra linhas de \vec{E}

$V(x, y)$ também pode ser representado como função em \mathbb{R}^2 :

$$\text{plot3d}(V, [x, -5, 5], [y, -5, 5], [z, -800, 800]);$$

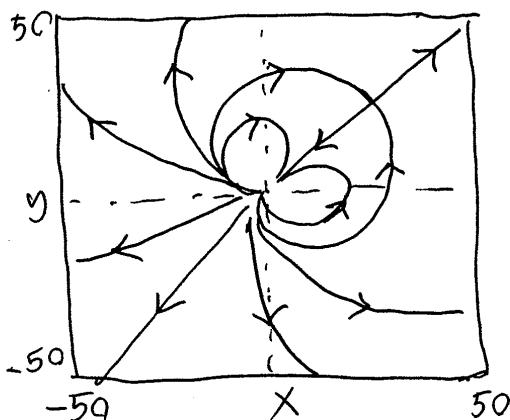


A carga total é $q_t = -4 + 3 + 2 = 1 \mu C$
 Como tal, visto de longe, as linhas de campo devem ser como as de uma carga pontual positiva:



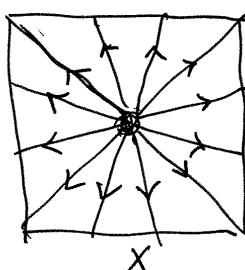
que não é o que se observa na figura obtida acima. Ou seja, não estávamos a ver o sistema suficientemente longe.

`plotdf([Ex,Ey],[x,-50,50],[y,-50,50]);`



Mostra que de facto há um segundo ponto de sela (ponto de campo nulo) aproximadamente em: $(24.5, 25.9)$ (distâncias em decímetros)

`plotdf([Ex,Ey],[x,-500,500],[y,-500,500]);` →



Aula 13. 2017-11-08

Exemplo. Determine se os seguintes campos vetoriais são conservativos e, se forem, encontre a expressão do potencial associado ao campo.

$$\textcircled{a} \quad 2x\hat{i} + xy\hat{j} \quad \textcircled{b} \quad (xy+2x+y)\hat{i} + \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\hat{j}$$

$$\textcircled{a} \quad \begin{cases} E_x = 2x \\ E_y = xy \end{cases} \quad J(E_x, E_y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$$

não é conservativo porque a matriz não é simétrica.

$$\textcircled{b} \quad \begin{cases} E_x = xy + 2x + y \\ E_y = x + \frac{x^2}{2} \end{cases} \quad J(E_x, E_y) = \begin{bmatrix} y+2 & x+1 \\ x+1 & 0 \end{bmatrix}$$

sim é conservativo!

Repare que a divergência: $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = y+2$

é o "fluxo por unidade de volume", ou seja $4\pi kS$

$$\text{carga} \begin{cases} +, & \text{se } y > -2 \\ -, & \text{se } y < -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{carga} \\ \text{volumétrica} \end{matrix}$$

Cálculo do potencial

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -xy - 2x - y \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = -x - \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = -\frac{xy}{2} - x^2 - xy + f(y) \\ V = -xy - \frac{x^2y}{2} + g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(x, y) = -\frac{x^2y}{2} - x^2 - xy$$

Para visualizar as linhas de campo \vec{E} pode usar-se o programa plotdf do Maxima. Note-se que este campo tem dois pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} xy + 2x + y = 0 \\ x + \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=-2 \rightarrow y=-4 \end{array}$$

Os valores próprios λ de J , nos pontos de equilíbrio, devem ser reais, porque J é simétrica.

$$P_1 = (0,0) \quad J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 + \Delta \quad \lambda_2 = 1 - \Delta \\ \lambda_1 \lambda_2 = 1 - \Delta^2 = -1 \Rightarrow \Delta = \sqrt{2}$$

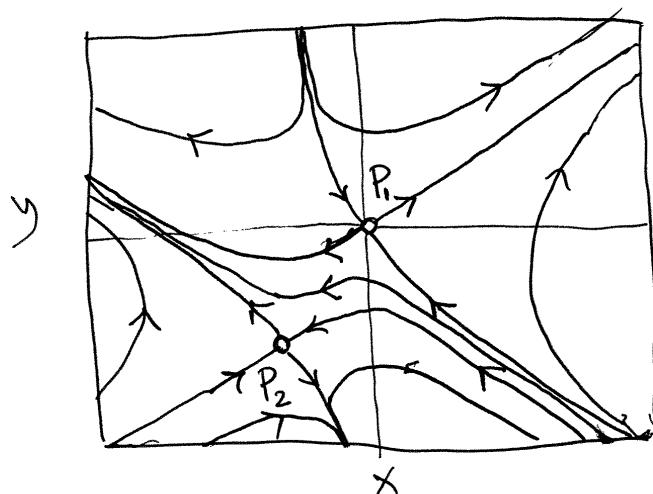
$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > 0, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$$

$\Rightarrow P_1$ é ponto de sela

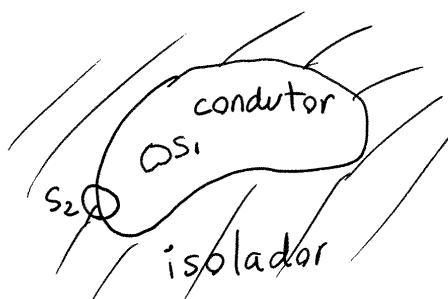
$$P_2 = (-2, -4) \quad J_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ são os do caso anterior, mas multiplicados por } -1$$

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} < 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

$\Rightarrow P_2$ é ponto de sela



CONDUTORES ISOLADOS



Não pode haver corrente
(cargas em movimento)
⇒ \vec{E} é nulo em qualquer ponto no interior do condutor

S_1 = superfície fechada dentro do condutor

S_2 = superfície fechada, parcialmente dentro do cond.

⇒ $\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ (porque $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$) ⇒ $q_{int} = 0$

$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}$ pode ser diferente de zero ($\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \neq 0$ na parte fora)
⇒ q_{int} pode ser $\neq 0$

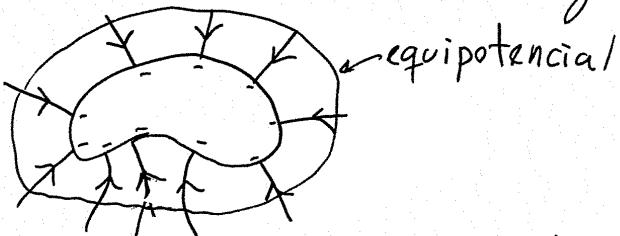
Conclusões:

- Ⓐ Em qualquer ponto dentro do condutor, a carga e o campo elétrico são nulos.
- Ⓑ Na superfície do condutor pode haver carga e campo elétrico.
- Ⓒ Em qualquer ponto dentro, ou na superfície, do condutor, o potencial tem o mesmo valor

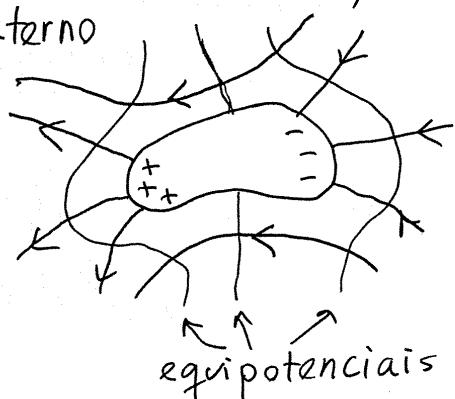
$$V_P - V_Q = - \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ porque existe um percurso } Q \rightarrow P \text{ totalmente dentro do condutor, onde } \vec{E} = 0$$

- Ⓓ Nos pontos da superfície onde houver carga e, portanto, campo \vec{E} , o campo é perpendicular à superfície (porque a própria superfície do condutor é uma equipotencial).

Exemplos: 1. Condutor isolado com carga negativa

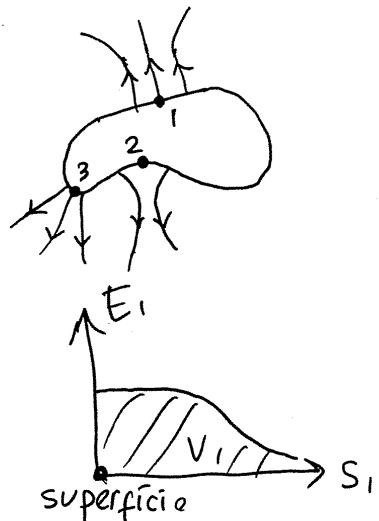


2. Condutor isolado, sem carga, dentro dum campo \vec{E} externo



As cargas dentro do condutor são polarizadas.

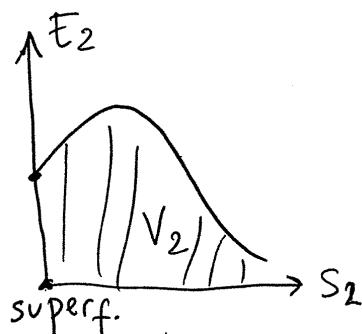
Distribuição de carga na superfície



No ponto 1, onde a superfície é plana, as linhas de campo são inicialmente paralelas mas de poys afastam-se $\Rightarrow \vec{E}$ é aproximadamente constante e depois começa a decrescer.

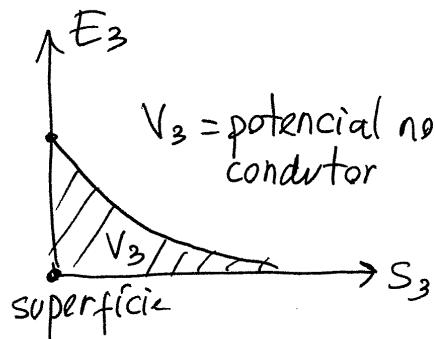
$V_1 =$ área sob E_1 , desde $S_1 = 0 \rightarrow \infty =$ potencial no condutor.

Na vizinhança do ponto 2, onde a superfície é côncava, as linhas aproximam-se e depois afastam-se $\Rightarrow \vec{E}$ aumenta inicialmente e depois diminui:

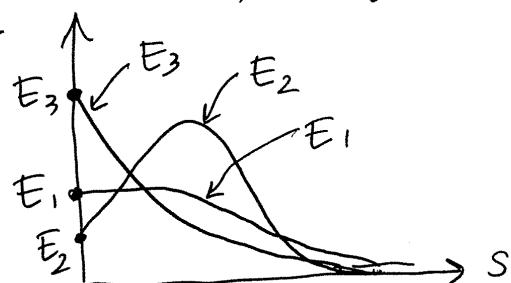


V_2 = potencial no condutor,

Na vizinhança do ponto 3, onde o condutor é convexo, o campo está sempre a diminuir

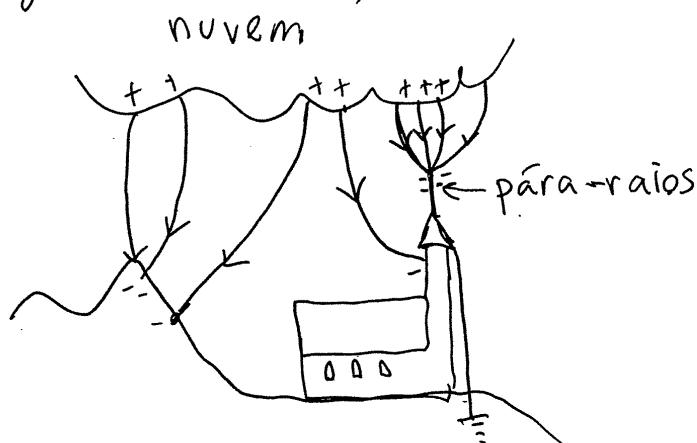


Como $V_1 = V_2 = V_3$, os 3 gráficos devem ser assim:



Como tal, na superfície do condutor, $E_3 > E_1 > E_2$

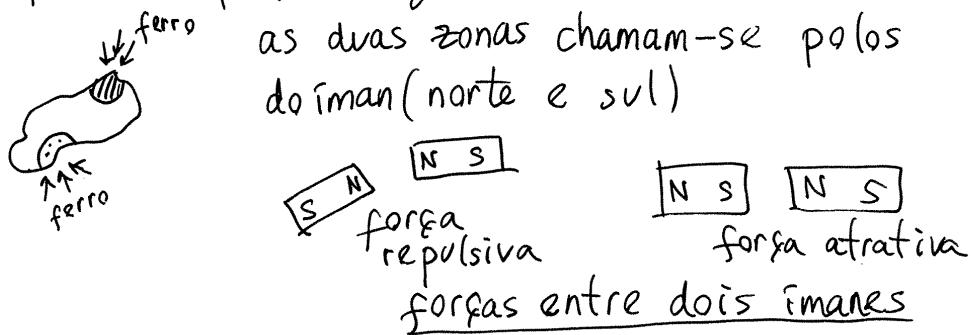
\Rightarrow O campo elétrico (e a carga) é maior nas pontas (regiões mais convexas) do condutor.



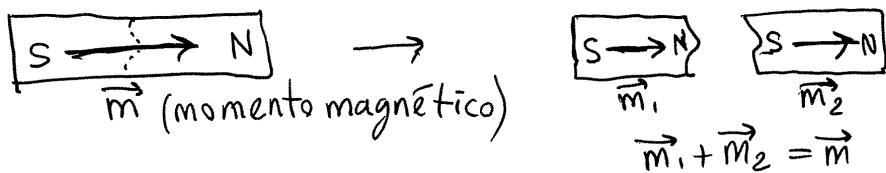
Aula 14. 2017-11-10

FORÇA MAGNÉTICA

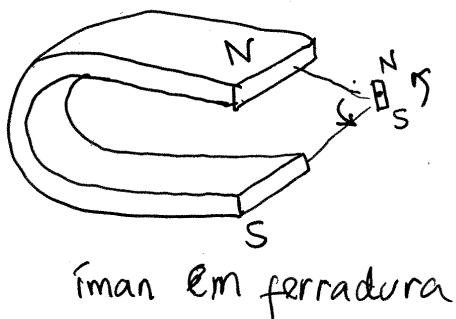
Ímanes naturais: rochas metálicas com duas zonas que produzem forças magnéticas.



Se partirmos um íman, cada pedaço tem também polos norte e sul (não existem monopólos magnéticos) e momento magnético (vetor do polo sul ao norte) no mesmo sentido



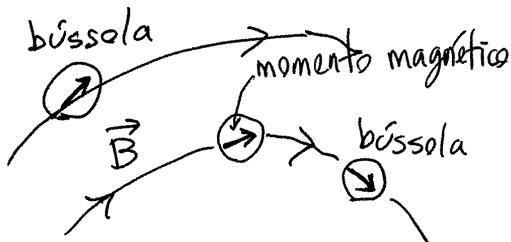
Não existem cargas magnéticas, mas existem momentos magnéticos (vetores). O momento magnético de um corpo é a soma (vetorial) dos momentos magnéticos das suas partes.



Nos pontos à mesma distância dos polos do íman, um pequeno íman não é atraído para nenhum dos dois polos, mas roda, orientando-se o seu momento magnético no sentido do N para o S do íman de ferradura



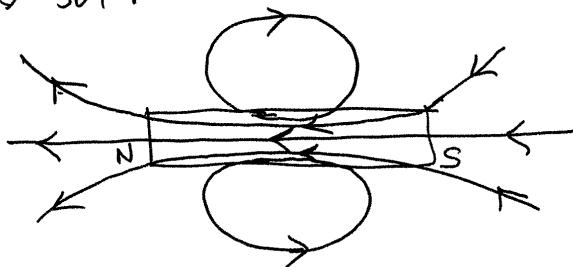
CAMPO MAGNÉTICO



Campo vetorial \vec{B} com linhas de campo que seguem as direções de uma bússola.



Por exemplo, as linhas de campo magnético de um íman retangular saem do polo norte e entram pelo polo sul:



Não existe nunca nenhum ponto onde começam ou terminem linhas de campo \vec{B} (consequência de não existirem monopólos). Mas sim existem pontos de sela, onde algumas linhas começam e outras terminam. Como tal, a matriz jacobiana de \vec{B} ,

$$J_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

tem traço nulo, e o campo \vec{B} não é conservativo. Condições essas que são

equivalentes às seguintes equações vetoriais:



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} \neq \vec{0} \text{ (em geral. Pode ser } \vec{0} \text{ em alguns pontos isolados)} \end{array} \right.$$

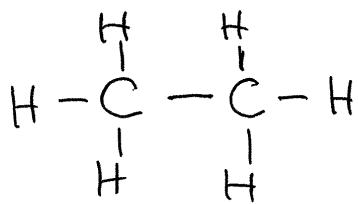
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{k}$$

FONTES DO CAMPO MAGNÉTICO

① **Spin** das partículas elementares. Cada eletrão é um pequeno íman com momento magnético chamado spin. Dois eletrões podem ficar colados mutuamente, devido à força magnética, ficando com os seus spins em sentidos opostos. Como



tal, dois átomos podem ficar ligados quando um dos eletrões de valência de um dos átomos é atraído por um eletrão de valência do segundo átomo: enlace covalente. Por exemplo, na molécula de etano, há sete pares

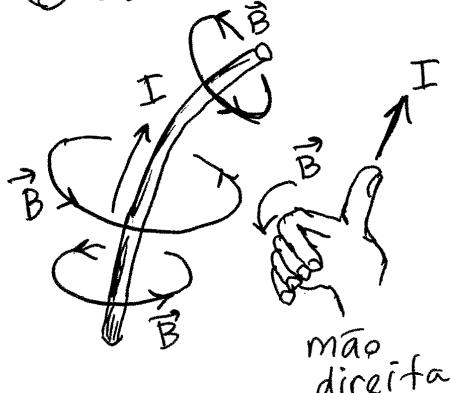


de eletrões de valência colados; cada um desses 7 enlaces covalentes representa-se por uma barra

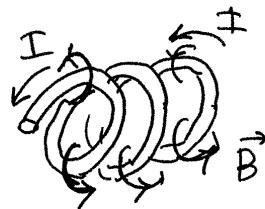
C → átomo de carbono com 4 eletrões de valência

H → átomo de hidrogênio com 1 eletrão de valência.

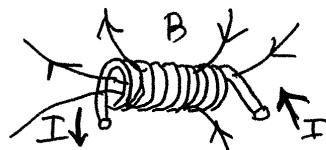
② **Corrente elétrica**. Em 1820 Hans Christian Ørsted descobriu que um condutor com corrente I produz campo magnético, com linhas de campo que são circunferências perpendiculares ao condutor, e segundo a regra da mão direita para I .



O campo \vec{B} de um fio com corrente é fraco, mas se o fio for enrolado, formando uma bobina, consegue-se obter um campo muito mais elevado. O campo fica mais concentrado dentro da bobina, tal como num íman cilíndrico.

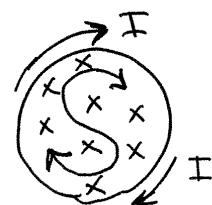


íman cilíndrico

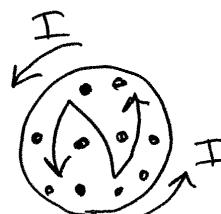


bobina cilíndrica (eletroíman)

O polegar da mão direita indica o sentido do momento magnético \vec{m} da bobina, quando os outros 4 dedos seguem o sentido da corrente. As linhas de campo \vec{B} que entram para cá da folha representam-se por X e as linhas que saem para cá da folha por meio de pontos •

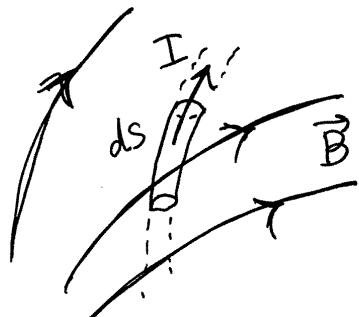


bobina vista do lado onde I é no sentido dos ponteiros do relógio (polo Sul)



bobina vista do lado onde I é no sentido contrário aos ponteiros do relógio (polo Norte)

FORÇA MAGNÉTICA EM FIOS COM CORRENTE



a força $d\vec{F}$ num pedaço de um fio onde passa corrente

I é:

$$d\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) ds$$

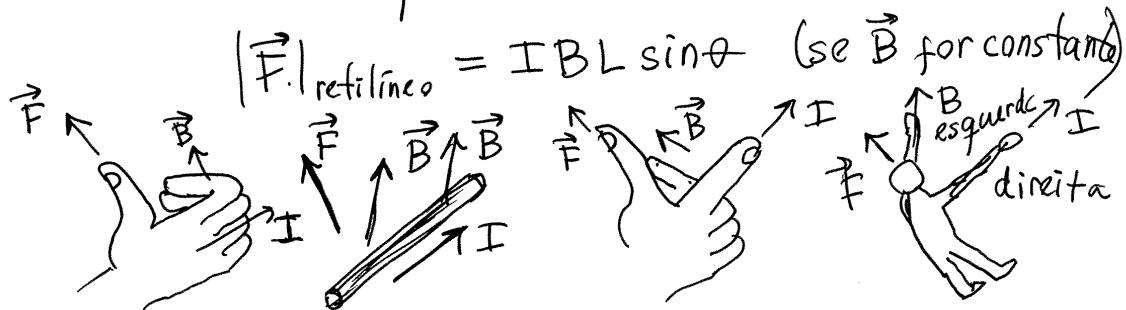
onde ds é o comprimento do pedaço e \vec{I} e \vec{B} são

medidas nesse pedaço, infinitesimalmente pequena.

No fio que vai dum ponto P até outro ponto Q a força total é:

$$\vec{F} = \int_P^Q (\vec{I} \times \vec{B}) ds$$

No caso de um fio retilíneo, que faz um ângulo θ com um campo \vec{B} constante:



UNIDADE SI DE CAMPO MAGNÉTICO

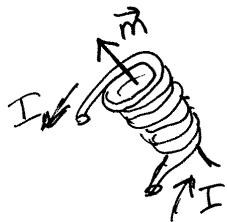
tesla: $1 T = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$ (campo elétrico sobre velocidade)

também é habitual usar o gauß, que não é unidade

SI :

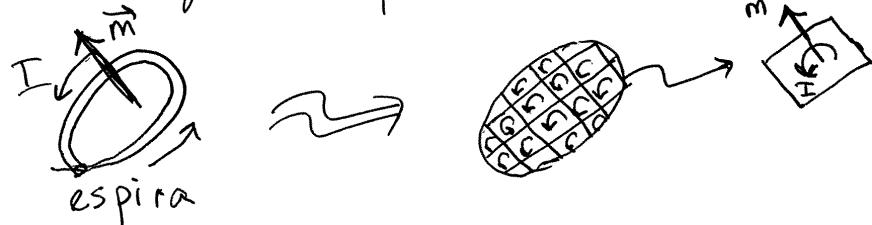
gauß: $1 G = 10^{-4} T$

Aula 15. 2017-11-15
BINÁRIO DO CAMPO MAGNÉTICO

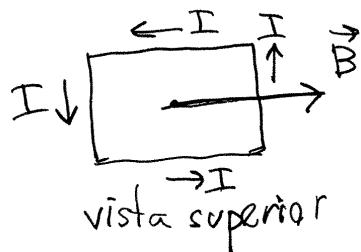
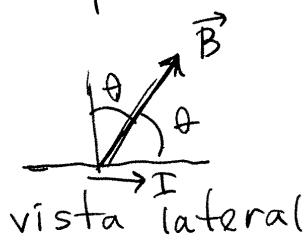


O momento magnético \vec{m} de uma bobina com N espiras é N vezes o momento de cada espira e o momento magnético de uma espira

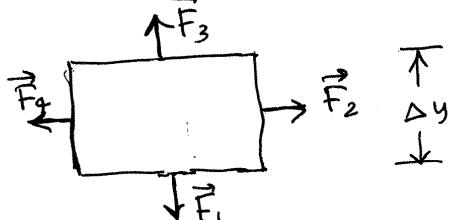
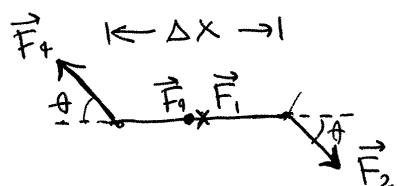
é a soma dos momentos magnéticos de várias espiras retangulares infinitesimalis, todas com a mesma I :



Se a espira retangular estiver num campo magnético \vec{B} uniforme:



Forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e \vec{F}_4 do campo \vec{B} sobre cada lado da espira:



$\vec{F}_1 + \vec{F}_3$ anulam-se (mesma linha de ação) e \vec{F}_2 e \vec{F}_4 produzem um binário: $\Delta M = \underbrace{(IB\Delta y)}_{\text{área}} \Delta x \sin \theta$

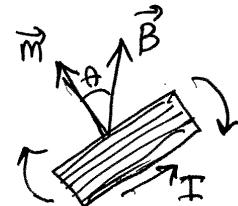
$$\Rightarrow \Delta M = IBS \sin \theta \Delta A \quad \overbrace{|F_2|}^{\text{área}} = |F_4| \quad \text{braço}$$

O binário magnético sobre a bobina completa é então:

$$M = N \iint_{\text{espira}} (IB \sin \theta) dA = NIB \sin \theta \iint_{\text{espira}} dA$$

$$\Rightarrow M = N(AI) B \sin \theta \quad (\text{AI} = \text{momento do cada espira})$$

E faz rodar a bobina no sentido em que o momento magnético \vec{m} se oriente na mesma direção e sentido do campo \vec{B} .

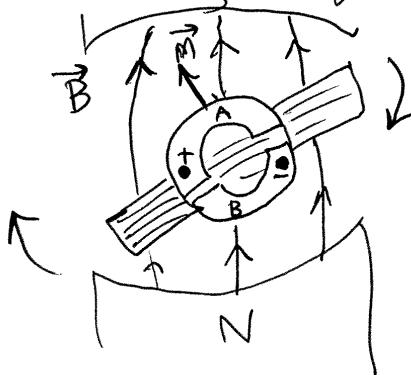


$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

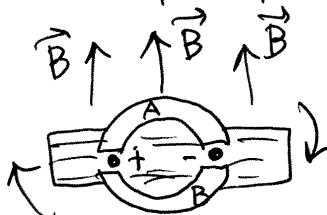
$$\vec{m} = NAI\hat{n} = \text{momento magnético da bobina}$$

$$\hat{n} = \text{versor normal à bobina, no sentido da mão direita para } I.$$

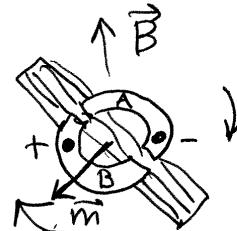
O binário magnético é o que faz rodar os motores



A bobina começa no segmento metálico A, em contacto com o eletrodo + dumha fonte, e termina na lámina B, em contacto com o eletrodo -.



Quando a bobina roda até \vec{m} ficar no sentido de \vec{B} , os eletródos deixam de fazer contacto com A e B. m é então zero mas a bobina continua a rodar por inércia

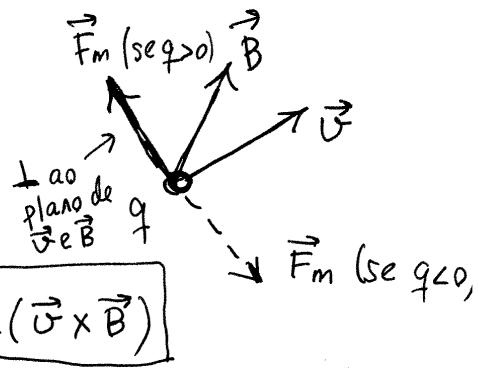


\vec{B} agora faz contacto com +, e A com -. $\Rightarrow \vec{m}$ a ponta agora para baixo e volta a aparecer binário que faz rodar a bobina no mesmo sentido.

FORÇA MAGNÉTICA EM CARGAS PONTUAIS

A força magnética sobre um fio com corrente é devida a que sobre cada carga de condução atua uma força magnética proporcional à sua carga e à sua velocidade:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



A força é sempre perpendicular à trajetória da partícula: não altera o módulo da sua velocidade mas apenas a sua direção

Movimento circular. Se \vec{B} é constante, uniforme e perpendicular a v_0 ,

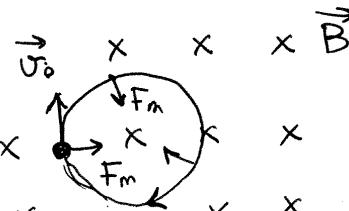
A força centrípeta é

$$F_m = q|v_0|B = m\frac{|v_0|^2}{R} = \text{const.} \times (q < 0)$$

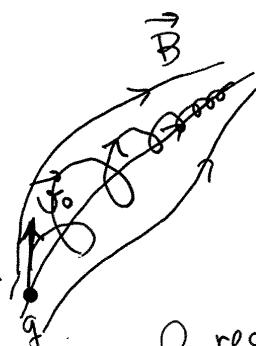
O movimento é circular uniforme com raio:

$$R = \frac{mv_0}{q|B|}$$

$$e \text{ período: } T = \frac{2\pi m}{q|B|}$$



Movimento helicoidal. Num campo \vec{B} não uniforme, a componente $v_{||}$, paralela às linhas de campo, permanece constante. No plano perpendicular às linhas de campo, o movimento é circular com $R = \frac{mv_{||}}{q|B|}$



O resultado é uma trajetória em hélice, mais fechada onde B é maior, seguindo as linhas de \vec{B} .

Aula 16. 2017-11-17

LEI DE AMPÈRE

Em qualquer curva fechada,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{int}$$

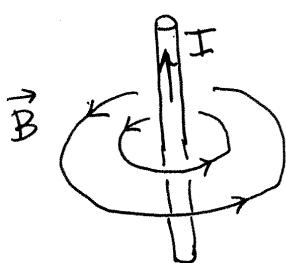


I_{int} = corrente total que passa dentro de C , no sentido da curva C , segundo a regra da mão direita.

No caso da figura acima, $I_{int} = I_2 - I_1$.

Constante magnética:

$$k_m = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

CAMPO DE UM FIO RETILÍNEO

Por simetria, as linhas de campo \vec{B} devem ser circunferências perpendiculares ao fio, com centro nele, e $|B|$ é constante em cada uma dessas circunferências C .

Como tal, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint_C ds = 2\pi r B$

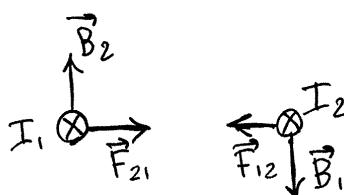
distância até o fio

Mas, segundo a lei de Ampère,

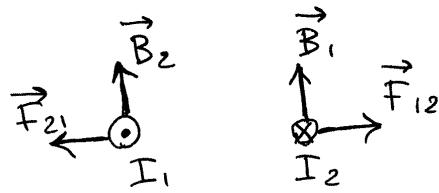
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I$$

$$\Rightarrow B_{fio} = \frac{2k_m I}{r}$$

FORÇA MAGNÉTICA ENTRE FIOS PARALELOS



força atrativa, se as correntes são no mesmo sentido



força repulsiva se os sentidos de I1 e I2 são opostos

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = l |\vec{I}_2 \times \vec{B}_1| = l |\vec{I}_1 \times \vec{B}_2|$$

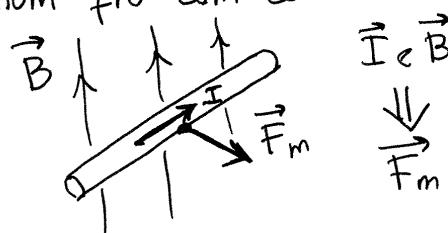
$$\Rightarrow F_{12} = \frac{2km l I_1 I_2}{d}$$

l = comprimento dos fios

d = distância entre os fios

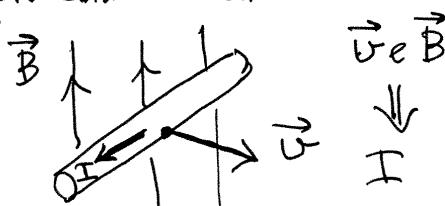
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Força magnética num fio com corrente



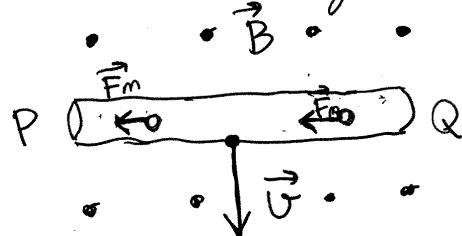
$$\vec{F}_m = l (\vec{I} \times \vec{B})$$

Corrente induzida num fio condutor com velocidade v



a força $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ faz deslocar as cargas de condução

admitindo cargas de condução positivas:



acumulam-se cargas positivas em P e negativas em Q; é como se o fio fosse uma fonte de fem, com elétrodo + em P e - em Q.

Mas visto num referencial que se desloca com o fio, o fio está em repouso e $\vec{F}_m = 0$.

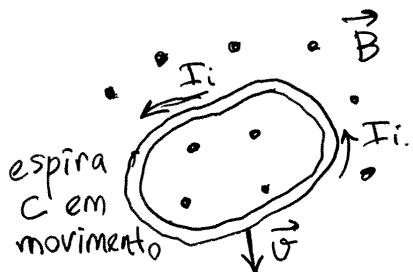
$$\begin{array}{c} \bullet \uparrow \quad \bullet \uparrow \quad \bullet \uparrow \quad \cdot \\ P \quad (\vec{F} \leftarrow \rightarrow \vec{F} \leftarrow \rightarrow) \quad Q \\ \uparrow \cdot \vec{B} \quad \bullet \uparrow \quad \bullet \uparrow \quad \bullet \uparrow \\ \text{linhas de campo em} \\ \text{movimento para cima} \\ \vec{F} = q \vec{E}_i \\ (\text{referencial do fio}) \\ \Rightarrow \boxed{\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}} \end{array}$$

A força que produz a corrente é atribuída à aparição de um campo elétrico induzido, \vec{E}_i , nesse referencial, devido ao movimento das linhas de campo \vec{B} .

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ (\text{referencial do campo } \vec{B})$$

Campo elétrico induzido num referencial com velocidade \vec{v} relativa a \vec{B}
 $(\vec{B}$ tem velocidade $-\vec{v}$) \\ relativa a esse referencial,

FEM INDUZIDA



$$\vec{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

$(\vec{E}_i \neq 0, \text{ porque o campo elétrico induzido não é conservativo.})$

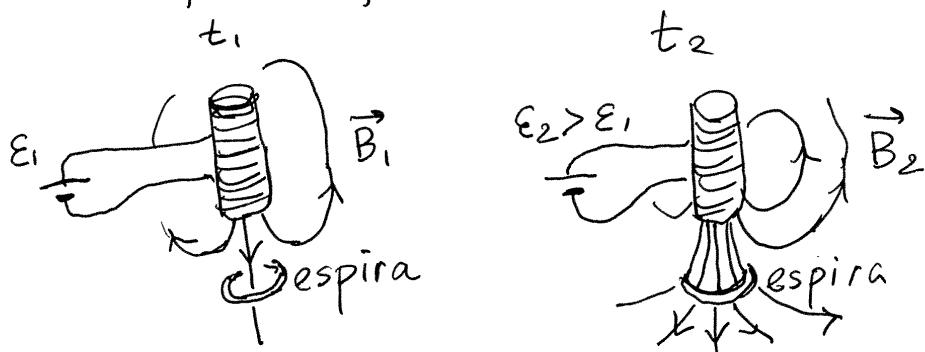
$$\text{corrente induzida} = I_i = \frac{\vec{E}_i}{R} \quad R \leftarrow \text{resistência da espira}$$

Os campos \vec{E} e \vec{B} são realmente duas manifestações dum mesmo campo (eletro-magnético) em diferentes referenciais:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

apenas \vec{E} ou \vec{B} em alguns referenciais, mas \vec{E} e \vec{B} em geral.

Também existe movimento das linhas de campo \vec{B} em sistemas em repouso! Exemplo: eletroíman ligado a uma fonte de fem variável:



em $t_2 > t_1$, a fem da fonte aumentou, aumentando assim o campo \vec{B} ($B_2 > B_1$); entre t_1 e t_2 entraram mais linhas de campo na espira, dando origem a campo elétrico induzido e corrente induzida na esfera.

LEI DE FARADAY

A fem induzida num condutor com forma de curva fechada C , é igual à variação do fluxo magnético através de C .

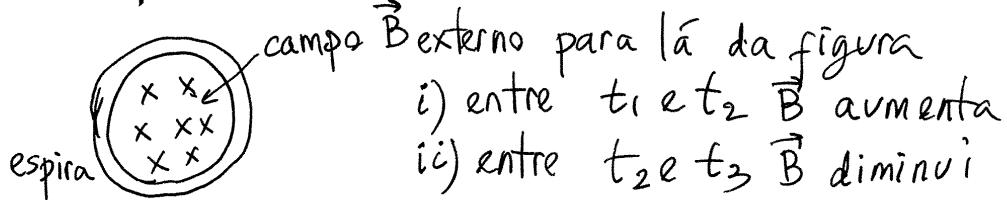
$$\text{fluxo magnético: } \Psi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \iint_S B \cos \theta dA -$$

\hat{n} = versor normal no sentido da regra da regra da mão direita para a orientação da curva C .
 S = superfície delimitada por C .

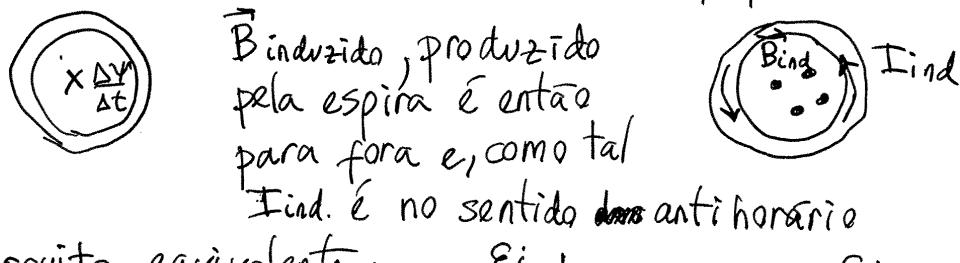
$$\Rightarrow E_i = - \frac{d\Psi}{dt} \quad \leftarrow \text{lei de Faraday.}$$

Lei de Lenz: E_i e I_i são no sentido que produz campo \vec{B} da própria espira que contraria a variação de \vec{B}

Exemplos:



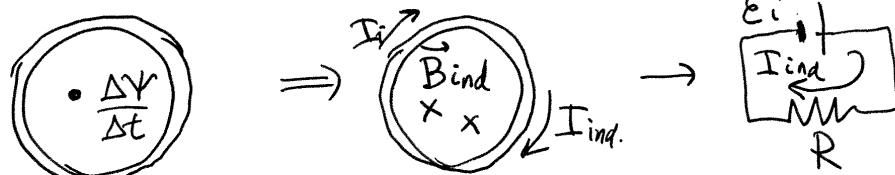
i) entre t_1 e t_2 , a variação do fluxo, por unidade de tempo, é $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$, para dentro do papel



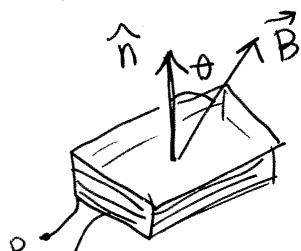
círculo equivalente:

$$I_{ind} = \frac{E_i}{R} = \frac{E_i}{\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta t}\right) R}$$

ii) entre t_2 e t_3 : $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ para fora da folha

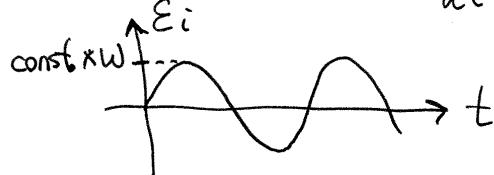


Bobina a redor num campo \vec{B} externo.



$$\psi = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \cos(wt + \theta_0) \times \text{constante}$$

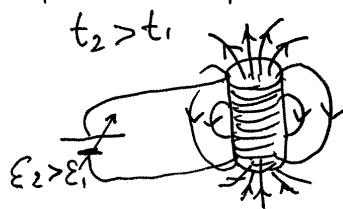
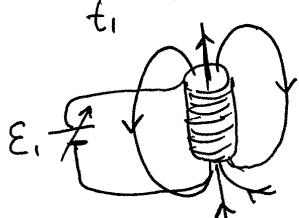
$$\Rightarrow E_i = -\frac{d\psi}{dt} = \text{constante} \times w \sin(wt + \theta_0)$$



Aula 17, 2017-11-22

AUTO INDUÇÃO

Bobina ligada a uma fonte de fem. variável:



entre t_1 e t_2 há deslocamento de linhas de campo \vec{B} através de cada espira, dando origem a uma fem induzida

$$E_i = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\psi = \iint_{\text{N espiras}} (\vec{B} \cdot \hat{n}) dA = NA \vec{B}_n$$

número ↑ área de cada espira
 de espiras ↑

componente normal do
 campo \vec{B} médio.

O campo \vec{B} produzido pela espira é diretamente proporcional à corrente e ao número de espiras:

$$\vec{B}_n = CNI$$

C = constante que depende
do tamanho e forma
geométrica da bobina

$$\Rightarrow \psi = CN^2 A I = LI$$

L = **indutância** da
bobina = $C N^2 A$
(constante própria da bobina)

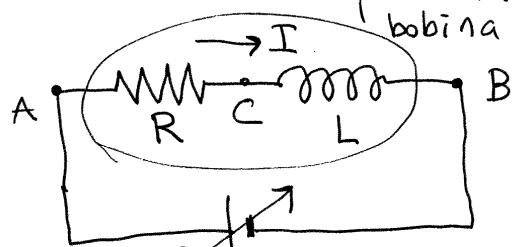
$$\Rightarrow E_i = -L \frac{dI}{dt}$$

essa fem auto-induzida é oposta à variação da corrente: não permite que a corrente mude bruscamente.

UNIDADE SI DE INDUTÂNCIA

$$\text{henry} \rightarrow 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Na bobina há dois efeitos físicos diferentes, dissipação de energia elétrica por efeito Joule e geração de força eletromotriz por indução eletromagnética, que no diagrama de circuito representam-se separadamente:



E (fonte externa, variável)

$$V_A - V_B = E \quad V_A - V_C = RI \quad V_B - V_C = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

equação diferencial
linear, não homogênea
de coeficientes
constantes

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA COM INDUTORES

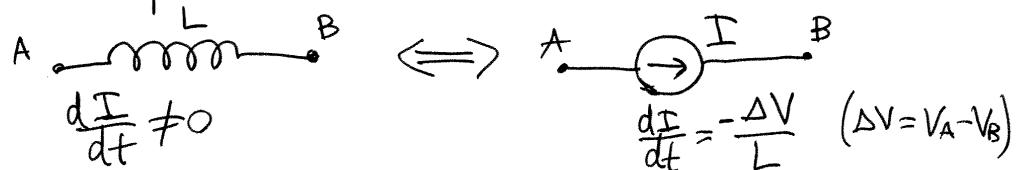
① Indutor com corrente I nula. $\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$ não tem de ser nula. Por exemplo, no instante em que se liga a bobina a uma fonte, $I=0$, mas começa logo a aumentar.

O circuito equivalente, que pode ter qualquer voltagem entre os seus terminais mas por onde não passa corrente, é um interruptor aberto:

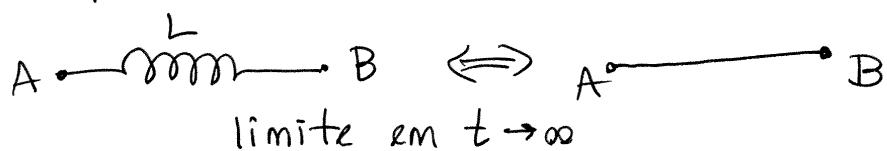


instante inicial em que se liga o indutor ao circuito.

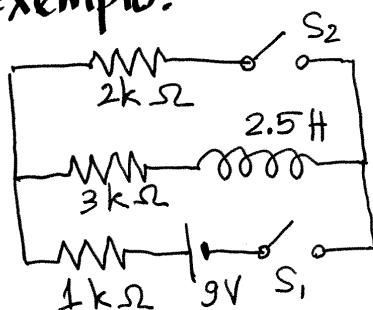
⑥ Enquanto a corrente está a mudar. $I \neq 0$ e ΔV qualquer. O indutor é como se fosse uma fonte de corrente (se a fonte externa desaparecer, a corrente não desaparecerá instantaneamente)



⑦ Estado estacionário. Após um tempo elevado, a corrente ficará constante e, como tal, $E_i = 0$. O indutor é então equivalente a um curto-círcuito, em que $\Delta V = 0$ mas I pode ter qualquer valor.



Exemplo.



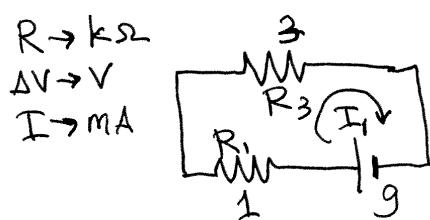
Em $t < t_1$, os dois interruptores estão abertos e não há corrente no indutor.

Em $t = t_1$, fecha-se S_1 , mantendo S_2 aberto, e em $t = t_2$ ($t_2 \gg t_1$) fecha-se

S_2 , mantendo S_1 também fechado. Determine as correntes nas 3 resistências em t_1 , t_2 e $t \rightarrow \infty$.

Resolução. Em t_1 o indutor é equivalente a um interruptor aberto e, como tal a corrente nas 3 resistências é nula: $I_1 = I_2 = I_3 = 0$

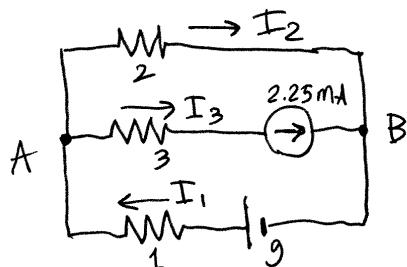
Quando t se aproxima de t_2 , a resistência $R_2 = 2\text{k}\Omega$ continua desligada, mas o indutor está em estado estacionário:



$$I_2 = 0$$

$$I_1 = I_3 = \frac{9}{3+1} = 2.25 \text{ mA}$$

Em t_2 , há corrente no indutor e começará a mudar. Considera-se então uma fonte com corrente de 2.25 mA.



$$I_3 = 2.25 \text{ mA}$$

$$V_A - V_B = 9 - I_1 \quad (\text{ramo de baixo})$$

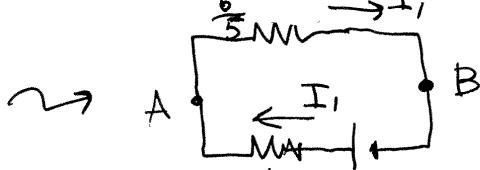
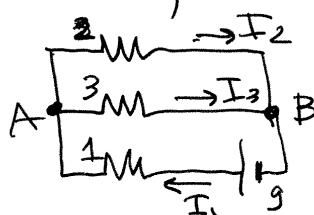
$$V_A - V_B = 2I_2 \quad (\text{ramo de cima})$$

$$\Rightarrow I_1 + 2I_2 = 9$$

$$\text{lei dos nós em B: } I_2 + 2.25 = I_1$$

$$\Rightarrow I_1 = 4.5 \text{ mA}, I_2 = 2.25 \text{ mA}$$

Em $t \rightarrow \infty$,



$$I_1 = \frac{9}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{45}{11}$$

$$V_A - V_B = \frac{6}{5} \left(\frac{45}{11} \right) = \frac{54}{11}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{V_A - V_B}{2} = \frac{27}{11} \approx 2.45 \text{ mA} \quad I_3 = \frac{V_A - V_B}{3} = \frac{18}{11} \approx 1.64 \text{ mA}$$

$$I_1 \approx 4.09 \text{ mA}$$

Aula 18. 2017-11-24

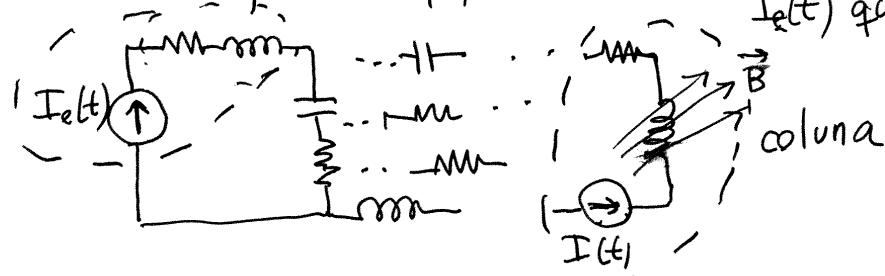
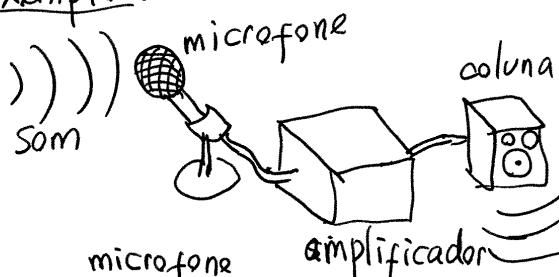
CIRCUITOS COM FONTES VARIÁVEIS

fonte de tensão variável



+ indica que quando a função $V(t)$ seja positiva, + tem maior potencial que - (mas em $V < 0$ inverte)

Exemplo.

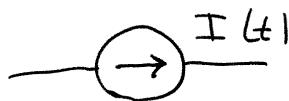


$I_e(t)$ do microfone alimenta o circuito (amplificador) e produz corrente $I(t)$ na coluna, que pela força magnética de um íman, faz vibrar o altifalante.

Usaremos o índice e , neste caso em I_e , para identificar a entrada (causa) e I , sem índice é a saída (efeito).



fonte de corrente variável



A seta indica o sentido da corrente, nos intervalos em que $I(t) > 0$.

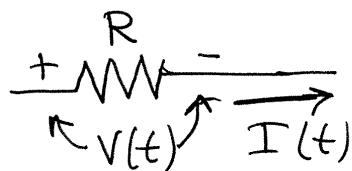
O som faz vibrar uma bobina (microfone) dentro de um campo \vec{B} dum íman, produzindo corrente $I_e(t)$ que varia com t

Sistema: amplificador
Sinal de entrada: $I_e(t)$
Sinal de saída: $I(t)$

Analisaremos circuitos (sistemas) com os seguintes dispositivos:

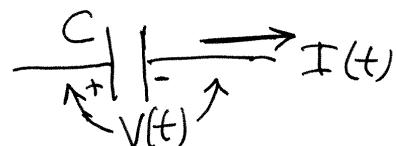
① Resistências

$$V(t) = R I(t)$$



② Condensadores

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV(t)}{dt}$$

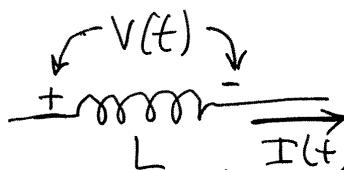


$$\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{C} I(t)$$

③ Indutores

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

(sinal +, porque está a ser considerado como elemento passivo e não como fonte)



Exemplo. Circuito RLC
em série

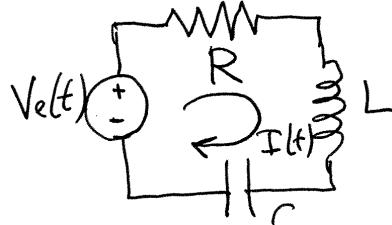
$$V_e = RI + L \dot{I} + \frac{Q}{C}$$

derivando:

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V}_e$$

equação diferencial que define $I(t)$ para um $V_e(t)$ dado

$I(t)$ é igual nos três dispositivos. V_R na resistência é $V_R = RI$



$$\Rightarrow L \frac{\ddot{V}_R}{R} + \dot{V}_R + \frac{V_R}{RC} = \dot{V}_e$$

No condensador, $\dot{V}_C = I/C$

$$\Rightarrow LC \ddot{V}_C + RC \dot{V}_C + V_C = V_e$$

e no indutor, $V_L = L \dot{I}$

$$\Rightarrow L \ddot{V}_L + \frac{R}{L} \dot{V}_L + \frac{V_L}{LC} = \ddot{V}_e$$

Qualquer uma dessas 4 equações diferenciais pode ser resolvida por transformada de Laplace, que torna a equação numa equação algébrica numa variável S . Por exemplo, na primeira equação:

$$L^2(s^2 \tilde{I} - s a_1 - a_2) + R(s \tilde{I} - a_3) + \frac{\tilde{I}}{C} = s \tilde{V}_e - a_4$$

onde a_1, a_2, a_3 e a_4 são constantes e

$$\tilde{I}(s) = \int_0^\infty I(t) e^{-st} dt = \text{transformada de Laplace de } I(t)$$

$$\tilde{V}_e(s) = \int_0^\infty V_e(t) e^{-st} dt = \text{transformada de Laplace de } V_e(t) \text{ (conhecida)}$$

$$\Rightarrow \tilde{I}(s) = \frac{s \tilde{V}_e - a_4 + a_1 s + a_2 + a_3}{L^2 s^2 + R s + \frac{1}{C}} = \frac{\text{função}}{\text{de } s}$$

$I(t)$ = transformada inversa de $\tilde{I}(s)$

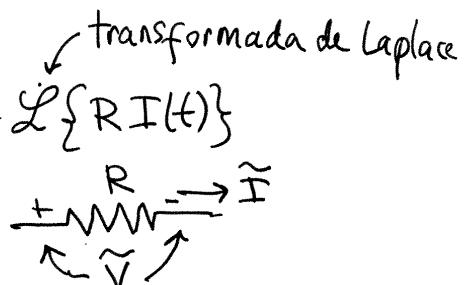
Mas é mais fácil escrever as equações (1)(2) e (3), dos 3 tipos de dispositivos, em função de s , em vez de S , e resolver o circuito como se s fosse um parâmetro constante.

<u>Fontes:</u>	<u>Domínio do tempo</u>	<u>Domínio da frequência</u>
	$V_e(t)$	$\tilde{V}_e(s)$
	$I_e(t)$	$\tilde{I}_e(s)$

① Resistências.

$$V(t) = RI(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\{RI(t)\}$$

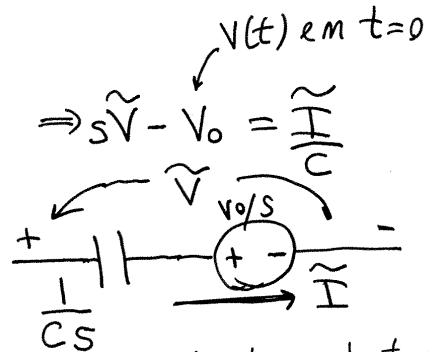
$$\Rightarrow \tilde{V}(s) = R \tilde{I}(s)$$



② Condensadores

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dV(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{C} \mathcal{L}\{I(t)\} \Rightarrow s\tilde{V} - V_0 = \frac{\tilde{I}}{C}$$

$$\Rightarrow \tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} + \frac{V_0}{s}$$



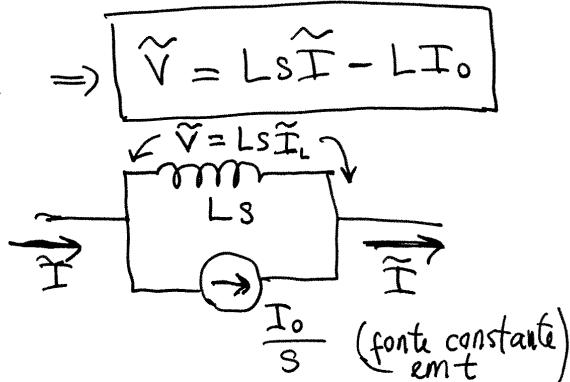
(fonte constante em t)

③ Indutores

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = L \mathcal{L}\left\{\frac{dI(t)}{dt}\right\} \Rightarrow \tilde{V} = LS\tilde{I} - LI_0$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Ls} + \frac{I_0}{s}$$

$$\xrightarrow{I_L} \tilde{V}_L = LS\tilde{I}_L$$



LEI DE OHM GENERALIZADA

$$\begin{array}{c} R \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \tilde{V} = R \tilde{I}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{Cs} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs}$$

$$\begin{array}{c} Ls \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \tilde{V} = Ls\tilde{I}$$

$$\tilde{V} = Z \tilde{I}$$

$$Z = \underline{\text{impedância}} = \begin{cases} R, \text{ resist.} \\ \frac{1}{Cs}, \text{ condens.} \\ Ls, \text{ indutores} \end{cases}$$

(função de s)

No capítulo 3, a lei de Ohm, $\Delta V = RI$, foi suficiente para demonstrar que a resistência equivalente, em série, é a soma das resistências, e a resistência equivalente, em paralelo, é o inverso da soma dos inversos das resistências.

Como a lei de Ohm generalizada tem a mesma forma da lei de Ohm, então as regras para combinar impedâncias são as mesmas que nas resistências:

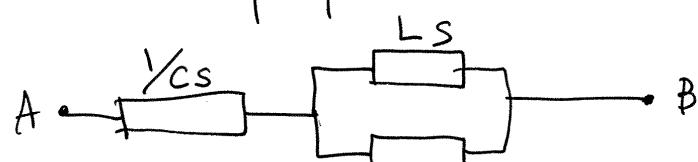
$$Z_{\text{série}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$$Z_{\text{paralelo}} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right)^{-1}$$

Exemplo:



No domínio da frequência S:

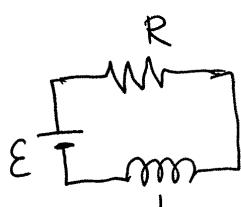


$$Z_{\text{paralelo}} = \frac{R L_s}{L_s + R}$$

$$Z_{\text{série}} = \frac{1}{C_s} + \frac{R L_s}{L_s + R}$$

= impedância equivalente entre A e B.

Aula 19. 2017-11-29

Exemplo 1. Circuito RL com fonte de voltagem constante.

$$t > 0 \rightarrow V_e(t) = E, I_0 = 0, V_e(0) = 0$$

$$v_e: \text{laplace}(E, t, s); \rightarrow \frac{E}{s}$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_e = \frac{E}{s}$$

(No Maxima, podemos usar maiúsculas para funções de t e minúsculas para funções de s .)

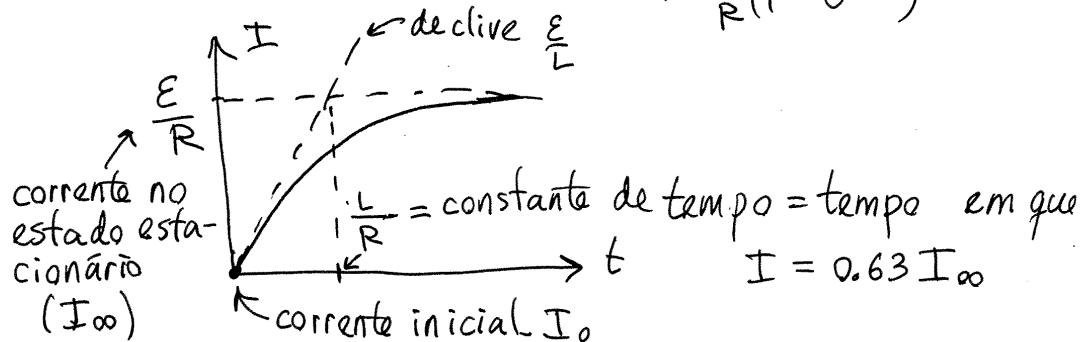
$$Z = R + LS$$

$$z: R + L * s$$

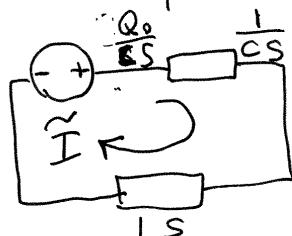
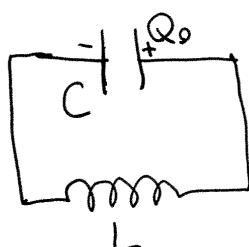
$$i: v_e/z; \rightarrow \tilde{I} = \frac{E}{s(Ls + R)}$$

$$I: i \text{lt}(i, s, t); \rightarrow I(t) = \frac{E}{R} - \frac{Ee^{-Rt/L}}{R} \quad \begin{matrix} (\text{ilt é trans-}) \\ (\text{formada inversa}) \\ (\text{de Laplace}) \end{matrix}$$

$$(E/R) * \text{multthru}(R * I/E) \rightarrow I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

**Exemplo 2.** Em $t=0$, o condensador tem carga $Q_0 \neq 0$, mas $I_0 = 0$.

Círculo equivalente no domínio s:



$$\tilde{I} = \frac{\frac{Q_0}{CS}}{LS + \frac{1}{CS}} = \frac{Q_0}{LC\tilde{S}^2 + 1}$$

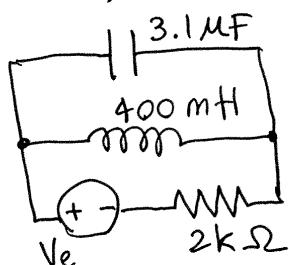
$I: i \propto t(Q_0/(L*C*S^2 + 1))$; $\rightarrow I_s$ CL positive, neg...

$\hookrightarrow I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ pos;

A corrente oscila, com frequência angular $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Este é um circuito ideal; num circuito real, com resistência R, a oscilação de $I(t)$ seria amortecida.

Exemplo 3. Em $t=0$, $I_0=0$ e $Q_0=0$. A voltagem da fonte é $V_e = 5(1 - e^{-600t})$ (SI). Determine a expressão da voltagem na resistência, em função do tempo



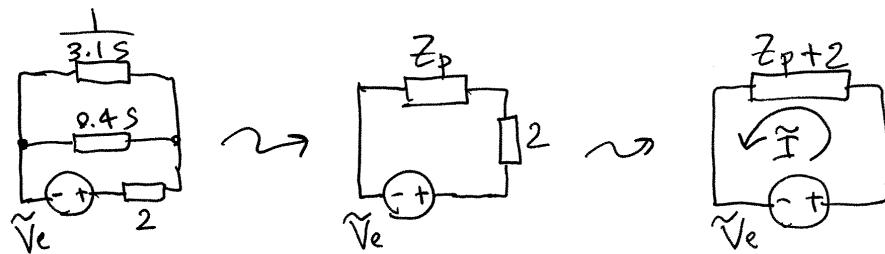
Conveniente escolher um sistema de unidades apropriado.

$V \rightarrow$ volt como $Z_C = \frac{1}{CS}$ tem unidades de resistência, que deverá ser $k\Omega$,
 $R \rightarrow k\Omega$ então se usarmos $C \rightarrow \mu F$
 $\Rightarrow I \rightarrow mA$ s deverá ser medida em kHz

$C \rightarrow \mu F$ Finalmente, como $LS = Z_L \rightarrow k\Omega$
 $s \rightarrow kHz$

$\Rightarrow t \rightarrow ms$ $\Rightarrow L \rightarrow H$

Nesse sistema de unidades, o circuito no domínio da frequência é o seguinte:



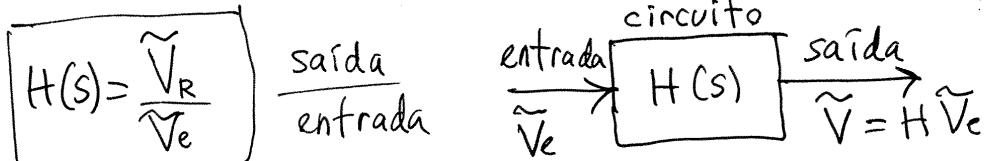
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_p+2} \Rightarrow \tilde{V}_R = 2\tilde{I} = \frac{2}{Z_p+2}\tilde{V}_e$$

$$Z_p: \text{ratsimp}(1/(3.1*s + 1/(0.4*s))); \rightarrow Z_p = \frac{10s}{31s^2 + 5}$$

$$\text{ratsimp}(2/(Z_p+2)); \rightarrow \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{V}_R = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25} \tilde{V}_e}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA



Qualquer circuito linear é representado, no domínio da frequência, por uma função de transferência $H(s)$. O efeito do circuito é multiplicar a entrada por $H(s)$.

No exemplo 3, a função de transferência é:

$$H(s) = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25}$$

A partir desta função é fácil obter a equação diferencial do circuito, no domínio do tempo:

$$\tilde{V}_R = H \tilde{V}_e \Rightarrow \tilde{V}_R = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25} \tilde{V}_e$$

$$\Rightarrow (31s^2 + 5s + 25)\tilde{V}_R = (31s^2 + 25)\tilde{V}_e$$

$$31s^2\tilde{V}_R + 5s\tilde{V}_R + 25\tilde{V}_R = 31s^2\tilde{V}_e + 25\tilde{V}_e$$

Como $V_o = \dot{V}_o = V_{e_0} = \dot{V}_{e_0} = 0$, $s\tilde{V}_R$ é a transformada de \dot{V}_R , $s^2\tilde{V}_R$ é a transformada de \ddot{V}_R e $s\tilde{V}_e$ a transf. de \dot{V}_e

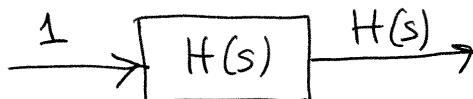
$$\Rightarrow 31\ddot{V}_R + 5\dot{V}_R + 25\tilde{V}_R = 31\dot{V}_e + 25\tilde{V}_e$$

O processo inverso, encontrar $H(s)$ para uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, também é trivial. Note-se que o denominador de $H(s)$ é o polinómio característico da equação diferencial; no exemplo 3: $31s^2 + 5s + 25$. E as raízes desse polinómio são os valores próprios do sistema.

IMPULSO UNITÁRIO

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \delta(t) dt = 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Como tal, se a entrada num circuito for um impulso unitário, a saída, no domínio da frequência, será a função de transferência.



A função de transferência de um sistema linear mede-se alimentando o sistema com um impulso unitário e medindo a saída correspondente.

Regressando ao exemplo 3, com t em ms e V em volt:

$$V_e(t) = 5(1 - e^{-0.6t})$$

$$ve: \text{laplace}(5*(1-\exp(-0.6*t)), t, s); \rightarrow \tilde{V}_e = 5\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.6}\right)$$

\tilde{V}_R é o produto de \tilde{V}_e pela função de transferência.

$$vR: \text{ratsimp}(ve*(31*s^2 + 25)/(31*s^2 + 5*s + 25));$$

$$\tilde{V}_R = \frac{465s^2 + 375}{155s^4 + 118s^2 + 140s^2 + 75s}$$

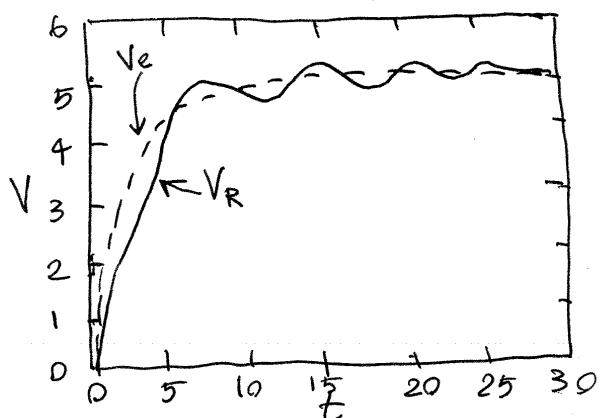
$$VR: \text{ratsimp}(ilt(vR, s, t));$$

O resultado é uma expressão complicada, mas é possível identificar termos exponenciais, decrescentes, com constante $-\frac{211}{310}$ (parte real dos valores próprios) e funções seno e cosseno com frequência angular $\frac{5\sqrt{123}}{62}$ (parte imaginária dos valores próprios)

$$\text{período de oscilação: } \frac{2\pi}{\omega} = \frac{124\pi}{5\sqrt{123}} \approx 7.025 \text{ ms}$$

Os gráficos da entrada $V_e(t)$ e saída $V_R(t)$ durante 4 oscilações de $V_R(t)$ são:

$$\text{plot2d}([ve, VR], [t, 0, 30], [\text{legend}, \text{false}], [\text{ylabel}, "V"]);$$



V_R tem oscilações amortecidas
Se V_e fosse para zero, V_R oscilaria aproximando-se de zero.
Após algumas oscilações,
 V_R acompanha V_e .
Neste caso, no estado estacionário C é circuito aberto,
L curto circuito $\Rightarrow V_R = V_e$

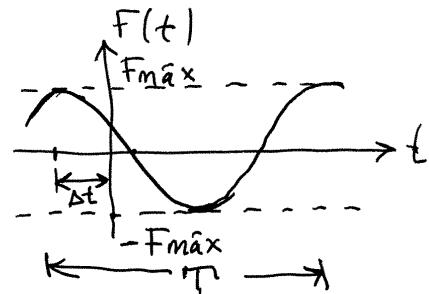
FASORES

Quando $V_e(t)$ é uma função sinusoidal, no estado estacionário todas as correntes e voltagens no circuito são também funções sinusoidais, caracterizadas por 3 parâmetros: frequência angular, ω , amplitude F_{\max} e desfasamento φ .

$$F(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = \text{período} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{\varphi}{2\pi} T = \frac{\varphi}{\omega}$$



Outras formas de escrever $F(t)$ são as seguintes:

$$F(t) = F_r \cos(\omega t) - F_i \sin(\omega t) \quad \begin{cases} F_r = F_{\max} \cos \varphi \\ F_i = F_{\max} \sin \varphi \end{cases}$$

$$F(t) = \text{Real} \left[(F_r + iF_i)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right]$$

$$F(t) = \text{Real} \left[(F_r + iF_i) e^{i\omega t} \right]$$

O número complexo:

$$F = F_r + iF_i$$

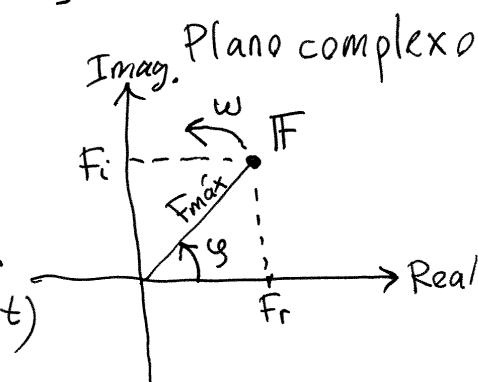
chama-se **fator** de $F(t)$.

em $t=0$, $F(0) = \text{Real}(F) = F_r$

em $t>0$, $F(t) = \text{Real}(F e^{i\omega t})$

escrito de forma polar:

$$F = F_{\max} \angle \varphi \leftarrow \begin{matrix} \text{argumento} \\ \nwarrow \text{módulo} \end{matrix}$$

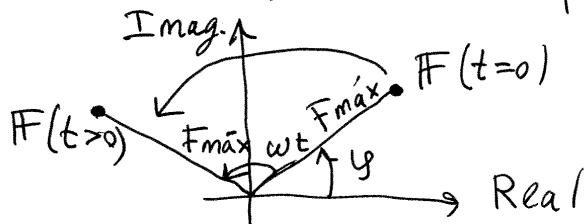


e a forma polar de $e^{i\omega t}$ é $1 \angle \omega t$

O produto de dois números complexos, na forma polar, tem módulo igual ao produto dos módulos e argumento igual à soma dos argumentos:

$$\mathbf{F} e^{i\omega t} = (F_{\max} \angle \varphi) (1 \angle \omega t) = F_{\max} \angle (\omega t + \varphi)$$

Como tal, \mathbf{F} roda no plano complexo, sem modificar o seu módulo, com velocidade angular constante, ω , e no sentido contrário aos ponteiros do relógio



Soma de fasores

A soma de números complexos é mais simples em coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} = (F_{\max} \angle \varphi) + (G_{\max} \angle \phi) = (F_{\max} \cos \varphi + G_{\max} \cos \phi) + i (F_{\max} \sin \varphi + G_{\max} \sin \phi)$$

Exemplo: $f(t) = 5 \cos(\omega t + 2) + 3 \cos(\omega t + 1)$

No Maxima, $F_1: 5 * \exp(%i*2)$;

módulo $F_2: 3 * \exp(%i)$;
 $F: F_1 + F_2$;

$$\text{float}(\text{cabs}(F)); \longrightarrow 7.086 \Rightarrow \mathbf{F} = 7.086 \angle 1.636$$

$$\text{float}(\text{carg}(F)); \longrightarrow 1.636$$

$\xrightarrow{\text{argumento dum complexo}} \boxed{f(t) = 7.086 \cos(\omega t + 1.636)}$

Aula 20. 2017-12-06

CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

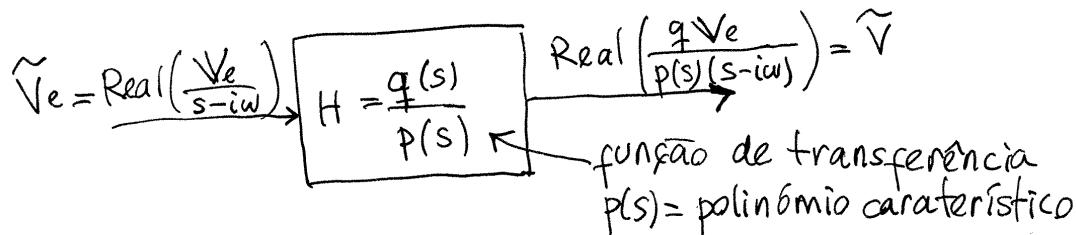
Com uma fonte de tensão (ou corrente) sinusoidal:

$$V_e(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

A transformada de Laplace pode ser escrita com fasores:

$$\tilde{V}_e(s) = \mathcal{L}\{V_e(t)\} = \operatorname{Real}\left(\frac{V_e}{s-i\omega}\right) \quad V_e = V_{\max} \cos \varphi + i V_{\max} \sin \varphi$$

$$\text{equivalente a: } \operatorname{Real}\left(\frac{V_e}{s-i\omega}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{V_e}{s-i\omega} + \frac{V_e^*}{s+i\omega} \right) = \frac{s V_{\max} \cos \varphi - i \omega V_{\max} \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$



Para encontrar a transformada inversa, $V(t)$, usam-se frações parciais:

$$\frac{q(s)V_e}{2p(s)(s-i\omega)} + \frac{q(s)V_e^*}{2p(s)(s+i\omega)} = \frac{a}{s-s_1} + \frac{b}{s-s_2} + \frac{c}{s-i\omega} + \frac{c^*}{s+i\omega}$$

$s_1, s_2 = \text{raízes de } p(s)$

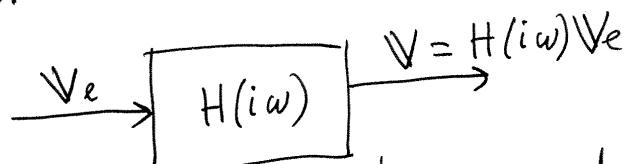
Os dois primeiros termos conduzem a funções exponenciais decrescentes, que é o estado transitório.

O estado transitório resulta dos dois últimos termos:

$$\frac{q(s)V_e}{2p(s)(s-i\omega)} + \frac{q(s)V_e^*}{2p(s)(s+i\omega)} = \frac{c}{s-i\omega} + \frac{c^*}{s+i\omega}$$

$$\Rightarrow c = \frac{q(i\omega)V_e}{2p(i\omega)} \Rightarrow \frac{c}{s-i\omega} + \frac{c^*}{s+i\omega} = \operatorname{Real}\left(\frac{q(i\omega)V_e}{p(i\omega)}\right) \\ = \operatorname{Real}(H(i\omega)V_e)$$

Qu seja, o fasor da tensão de saída é a função de transferência $H(s)$, substituindo s por $i\omega$ e multiplicando pelo fasor de entrada \mathbb{V}_e . Uma forma conveniente de representar o estado estacionário do circuito é então:



sem ser necessário usar transformadas de Laplace!

a função complexa:

$$R(\omega) = H(i\omega)$$

chama-se função de resposta

Em coordenadas polares: $R(\omega) = |R(\omega)| \angle \phi(\omega)$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = |R(\omega)| V_{\max} \angle (\phi(\omega) + \vartheta)$$

Resistências

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} \Rightarrow I = \frac{V}{R}$$

Condensadores

$$\tilde{I} = C s \tilde{V} \Rightarrow I = i C \omega V$$

Indutores

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{L s} \Rightarrow I = -\frac{i}{L \omega} V$$

LEI DE OHM PARA FASORES

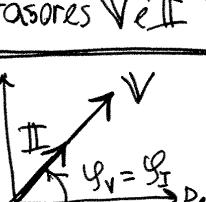
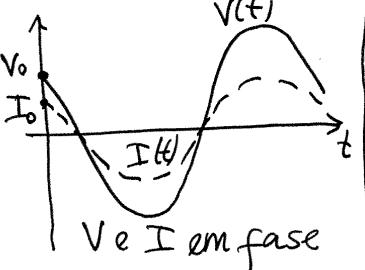
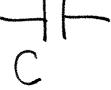
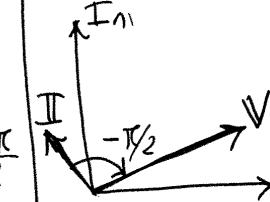
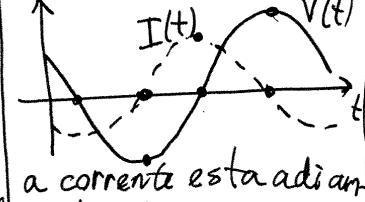
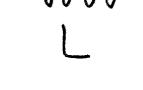
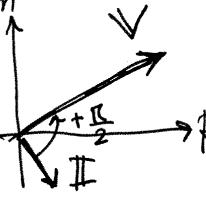
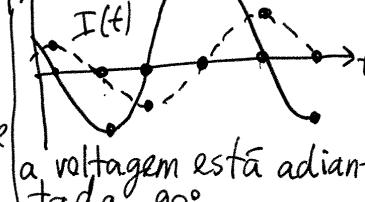
$$\mathbb{V} = Z(i\omega) \mathbb{I}$$

$$Z(i\omega) = \begin{cases} R, & \text{nás resistências} \\ -\frac{i}{C\omega}, & \text{nás condensadores} \\ iL\omega, & \text{nás indutores.} \end{cases}$$

$$V_{\max} = |Z(i\omega)| I_{\max}$$

$$\vartheta_v = \vartheta_z + \vartheta_I$$

A parte imaginária da impedância $Z(iw)$ chama-se **reatância X**

Dispositivo	Reatância e impedância	Fasores V e I	Funções $V(t)$ e $I(t)$
 R	$X = 0$ $Z = R \angle 0^\circ$		 V e I em fase
 C	$X = -\frac{1}{Cw}$ $Z = \frac{1}{Cw} \angle -\frac{\pi}{2}$ reatância capacitiva (<0)		 a corrente está adiantada 90° .
 L	$X = Lw$ $Z = Lw \angle +\frac{\pi}{2}$ reatância indutiva (>0)		 a voltagem está adiantada 90° .

POTÊNCIA MÉDIA

A potência instantânea $P(t)$, em cada instante t , num dispositivo é:

$$P(t) = V(t) I(t)$$

se $V(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_v)$, a lei de Ohm implica:

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{\max} = \frac{|Z(iw)|}{|Z(iw)|} V_{\max} \\ \varphi_I = \varphi_v - \varphi_z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_v) I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} (\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_I) + \cos(\varphi_v - \varphi_I))$$

$$= \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} (\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_I) + \cos \varphi_z)$$

\downarrow
função com valor médio nulo!

$$\Rightarrow \text{potência média} = \boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \varphi_z}$$

fator de potência = $\cos(\text{fase da impedância})$
 $0 \leq \cos \varphi_z \leq 1$ (1 nas resistências e 0 nos condensadores e indutores)

Os condensadores e indutores, em média não dissipam energia elétrica. Em metade do período de $V(t)$ absorvem energia que logo libertam na outra metade.

Definem-se a corrente e voltagem eficazes:

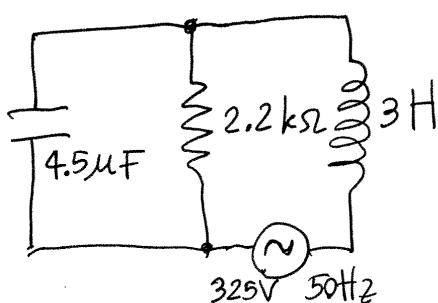
$$I_{\text{ef}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad V_{\text{ef}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{valores quadráticos médios!})$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi_z} \quad \cdot V_{\text{ef}} = |Z(i\omega)| I_{\text{ef}}$$

$$\varphi_z = \frac{\text{Real}(Z(i\omega))}{|Z(i\omega)|}$$

Em Portugal usa-se $V_{\max} = 325V \Rightarrow V_{\text{ef}} = 230V$
e $\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$.

Exemplo 1. Determine a corrente no indutor e a potência média no sistema condensador-resistência



Unidades:

$$z \rightarrow k\Omega, L \rightarrow H$$

$$\Rightarrow s \rightarrow kHz, t \rightarrow ms$$

$$\Rightarrow C \rightarrow \mu F$$

$$V \rightarrow V \Rightarrow I \rightarrow mA$$

$$\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz} = \frac{2\pi \times 50}{1000} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\pi}{10}}$$

A impedância do condensador em paralelo com a resistência é z_p : $\text{ratsimp}(1/(\%i*4.5*\%pi^2/(10+1/2.2)))$;

o fator

e da corrente através do indutor é:

$$I: \text{ratsimp}(325/(z_p + \%i*3*\%pi^2/10));$$

$$\text{float}(\text{cabs}(I)) \rightarrow 890.1$$

$$\text{float}(\text{carg}(I)) \rightarrow 5.312 \quad \text{float}(\text{carg}(I) - 2*\%pi) \rightarrow -0.971$$

$$\Rightarrow I(t) = 890.1 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.971\right)$$

A voltagem no sistema condensador-resistência é:

$$V: \text{ratsimp}(z_p * I);$$

e a potência média dissipada nesse sistema é:

$$P: \text{float}(\text{cabs}(I) * \text{cabs}(V) * \cos(\text{carg}(z_p)))/2$$

$$\Rightarrow P = 81648 \text{ mW}$$

Se a frequência angular tiver qualquer valor w :

$$z_p: \text{ratsimp}(1/(\%i*4.5*w + 1/2.2));$$

$$I: \text{ratsimp}(325/(z_p + \%i*3*w));$$

$$V: \text{ratsimp}(z_p * I);$$

$$P = \text{float}(\text{cabs}(I) * \text{cabs}(V) * \cos(\text{carg}(z_p)))/2;$$

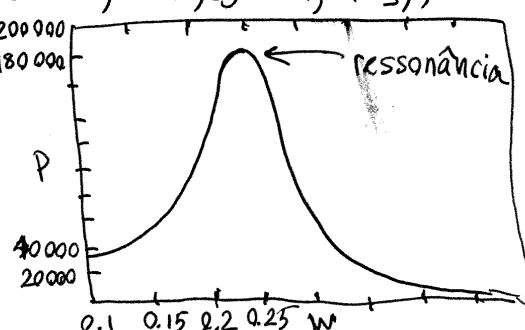
$$\text{plot2d}(P, [w, 0.1, 0.5], [\text{xlabel}, "w"], [\text{ylabel}, "P"]);$$

P é máxima em $w \approx 0.26$,

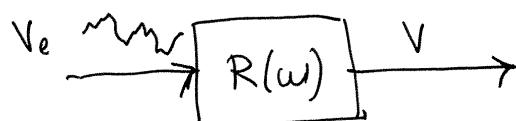
chamada

FREQUÊNCIA ANGULAR

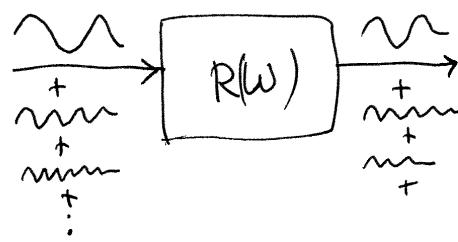
DE RESSONÂNCIA



FILTROS DE FREQUÊNCIA

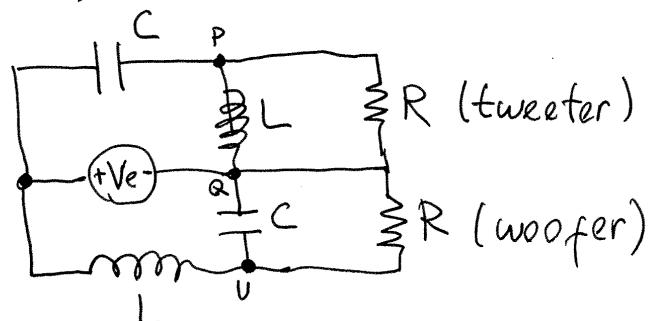


Quando o sinal de entrada é uma função complicada, pode ser escrita como uma série de Fourier com vários harmônicos de diferentes freqüências



A resposta pode ser diferente para diferentes harmônicos. Alguns harmônicos são atenuados e outros amplificados.

Exemplo: Coluna de duas vias:



$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V_{PQ} \gg \Delta V_{Qu}, \text{ se } \omega \text{ for elevada} \\ \Delta V_{PQ} \ll \Delta V_{Qu}, \text{ se } \omega \text{ for baixa} \end{array} \right.$
 as altas freqüências ficam no tweeter e as baixas freqüências no woofer.

Capítulo 2

Exames

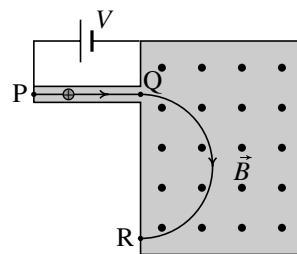
2.1 Exame de época normal

O exame realizou-se no dia 11 de janeiro de 2018. Compareceram 160 estudantes e a nota média foi 11.7 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome:

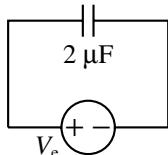
Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

- (4 valores) Um condensador de $1.6 \mu\text{F}$, um indutor de 1.1 H e uma resistência de $1.8 \text{ k}\Omega$ ligam-se em série a uma fonte de tensão alternada, com voltagem máxima de 80 V e frequência de 60 Hz . Encontre a expressão da voltagem no indutor, em função do tempo.
- (4 valores) A figura ilustra o método inventado por Arthur J. Dempster, em 1918, para medir as massas de átomos e moléculas. O dispositivo usado é um contendor hermético e com vácuo, composto por um tubo de vidro (isolador), entre os pontos P e Q, e uma caixa metálica. Um átomo é ionizado, com carga positiva igual à carga elementar, e inserido no ponto P. O ião é acelerado no tubo, a partir do repouso, até o ponto Q, pelo campo elétrico devido à diferença de potencial $V = 200 \text{ V}$ ligada entre os pontos P e Q. No ponto Q o ião entra na caixa metálica, onde não existe campo elétrico, mas há campo magnético uniforme \vec{B} , perpendicular à trajetória do ião e com módulo de 0.025 T . O ião descreve na caixa metálica uma trajetória semi-circular, deixando uma marca no ponto R numa placa fotográfica. Sabendo que a distância entre Q e R é 16.35 cm , determine a massa do ião.



PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de “Resposta”. **Cotação:** certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco ou ilegível, 0.

- A expressão da voltagem da fonte no circuito do diagrama é $V_e = 400 t^2$ (unidades SI) em $t > 0$ e 0 em $t \leq 0$. O condensador encontrava-se descarregado em $t = 0$. Determine a expressão da corrente no circuito em $t > 0$ (unidades SI).
- Liga-se uma fonte de tensão alternada a um indutor e uma resistência em série. Se aumentarmos a indutância L , mantendo a resistência e a fonte iguais, qual das afirmações será correta?



- (A) $0.0016 t$ (C) $0.004 t$ (E) $0.0032 t$
 (B) $0.0016 t^2$ (D) $0.0032 t^2$

Resposta:

- Um núcleo de tungsténio tem 74 protões e 110 neutrões. Quantos eletrões tem um ião positivo de tungsténio com carga $+e$? (onde e é a carga elementar)

- (A) 73 (C) 74 (E) 185
 (B) 183 (D) 75

Resposta:

- Dois fios condutores paralelos, retilíneos e muito compridos, encontram-se a uma distância de 9.3 cm e transportam correntes da mesma intensidade I . A força magnética entre os fios (por unidade de comprimento) é repulsiva e de módulo 3.98 nN/m . Calcule o valor de I .

- (A) 52 mA (C) 34 mA (E) 43 mA
 (B) 27 mA (D) 65 mA

Resposta:

- Liga-se uma fonte de tensão alternada a um indutor e uma resistência em série. Se aumentarmos a indutância L , mantendo a resistência e a fonte iguais, qual das afirmações será correta?

- (A) O módulo da impedância total diminuirá.
 (B) A corrente eficaz aumentará.
 (C) O desfasamento entre a corrente e a tensão da fonte aumentará.
 (D) A reatância total diminuirá.
 (E) O fator de potência para a fonte aumentará.

Resposta:

- Calcule o módulo da impedância complexa entre os pontos A e B para uma tensão alternada com frequência $f = 60 \text{ Hz}$.



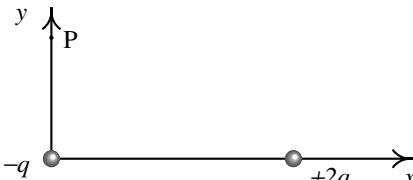
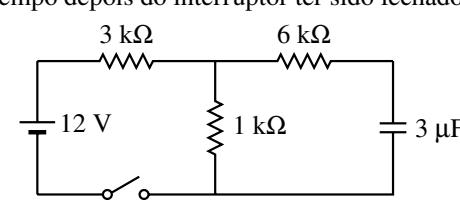
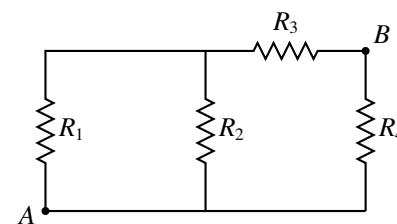
- (A) $1.48 \text{ k}\Omega$ (C) $2.07 \text{ k}\Omega$ (E) $1.2 \text{ k}\Omega$
 (B) $1.66 \text{ k}\Omega$ (D) $1.7 \text{k}\Omega$

Resposta:

- Um fio retilíneo, muito comprido, com carga linear de $9 \mu\text{C/m}$, encontra-se sobre o eixo dos z . Calcule o módulo do campo elétrico no ponto P, com coordenadas $x = 4 \text{ m}$, $y = 7 \text{ m}$ e $z = 9 \text{ m}$.

- (A) 40.5 kN/C (C) 23.14 kN/C (E) 18.0 kN/C
 (B) 9.0 kN/C (D) 20.09 kN/C

Resposta:

- 9.** Uma bobina, com indutância de 2.8 H e resistência de 762 Ω , liga-se a uma fonte ideal com f.e.m. de 3 V. Determine a intensidade da corrente na bobina, em mA, 1 mili-segundo após a fonte sido ligada.
- (A) 3.752 (C) 1.876 (E) 4.690
 (B) 2.814 (D) 0.938
- Resposta:**
- 10.** Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam 3×10^{16} eletrões de condução durante 7 segundos. Calcule a potência média fornecida pela pilha nesse intervalo.
- (A) 0.1 mW (C) 1.03 mW (E) 0.51 mW
 (B) 2.57 mW (D) 0.82 mW
- Resposta:**
- 11.** Uma carga pontual $-q$ encontra-se na origem e uma segunda carga $+2q$ encontra-se no ponto de coordenadas ($x = 9$ cm, $y = 0$). Existe um ponto P, no semieixo positivo dos y, onde o potencial do sistema é nulo. Calcule a distância desde P até à origem.
- 
- (A) 6.36 cm (C) 4.5 cm (E) 5.2 cm
 (B) 10.39 cm (D) 9.0 cm
- Resposta:**
- 12.** A espessura da membrana das células dos seres vivos é da ordem de 8×10^{-9} m e o valor médio do campo elétrico através dela é 8.8×10^6 N/C. Admitindo que esse campo seja uniforme, qual a diferença de potencial entre as superfícies interior e exterior da membrana?
- (A) 9.1×10^{-16} V. (D) 1.7 V.
 (B) 3.4 V. (E) 70 mV.
 (C) 1.1×10^{15} V.
- Resposta:**
- 13.** Dois condensadores com capacidades $6 \mu\text{F}$ e $12 \mu\text{F}$ são ligados em série a uma fonte de 12 V. Calcule a carga no condensador de $6 \mu\text{F}$.
- (A) $24 \mu\text{C}$ (C) $48 \mu\text{C}$ (E) $60 \mu\text{C}$
 (B) $12 \mu\text{C}$ (D) $36 \mu\text{C}$
- Resposta:**
- 14.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) A f.e.m. induzida num circuito é igual a menos o fluxo magnético através dele.
 (B) A indutância de um circuito é proporcional à variação da corrente nesse circuito.
 (C) A indutância de um circuito é proporcional à corrente nesse circuito.
 (D) A indutância de um circuito é proporcional à f.e.m. induzida nele.
 (E) A f.e.m. induzida num circuito é proporcional ao campo magnético através dele.
 (F) Pode haver f.e.m. induzida num circuito num instante em que o fluxo magnético através dele é nulo.
- Resposta:**
- 15.** No circuito da figura, o condensador está inicialmente descarregado. Calcule a diferença de potencial na resistência de $3 \text{k}\Omega$, muito tempo depois do interruptor ter sido fechado.
- 
- (A) 12 V (C) 9 V (E) 3 V
 (B) 4 V (D) 8 V
- Resposta:**
- 16.** Determine o valor da resistência equivalente entre os pontos A e B no diagrama, sabendo que $R_1 = 2 \text{k}\Omega$, $R_2 = 3 \text{k}\Omega$, $R_3 = 7 \text{k}\Omega$ e $R_4 = 4 \text{k}\Omega$.
- 
- (A) 1.61 kΩ (C) 2.69 kΩ (E) 8.07 kΩ
 (B) 3.76 kΩ (D) 5.91 kΩ
- Resposta:**
- 17.** Determine o valor da resistência duma lâmpada incandescente de 8 W e 12 V, nas condições normais de operação.
- (A) 18.0 Ω (C) 14.4 Ω (E) 24.0 Ω
 (B) 72.0 Ω (D) 36.0 Ω
- Resposta:**

2.1.2 Resolução

Agradeço a Pedro Miguel O. C. da Silva, um dos estudantes que fez o exame, por ter-me autorizado a publicar a sua resolução do exame, que se mostra a seguir.

① Circuito:

$C = 1.6\mu F$

$L = 1.1 H$

$R = 1.8 k\Omega$

$w = 2\pi f = 120\pi$

Simplificando o circuito:

$$Z_1 = R_1 + iX_1$$

$$= 1800 + i(1.1 \times 120\pi - \frac{1}{1.6 \times 10^{-6} \times 120\pi})$$

$$= 1800 + i1243,17$$

Nota: os valores são arredondados para representação nos passos intermédios mas são usados valores exatos nos cálculos

Calcular a corrente do circuito:

$$V = ZI \Rightarrow I = \frac{V}{Z} \Rightarrow I = \frac{80 \angle 0}{|Z| \angle \varphi_Z} \Rightarrow I = 0.0366 \angle 0.609$$

$\Rightarrow I = 0.0208 + 0.030$ (SI)

Neste caso Z_i será a impedância no indutor:

$$Z_i = 0 + iX \quad \text{obtido com a expressão cat}$$

$$\Rightarrow Z_i = i132\pi \quad \text{obtido com a expressão cong}$$

$$\hookrightarrow \text{equivalente a } (132\pi \angle \frac{\pi}{2})$$

$V = IZ_i \Rightarrow V = (0.0208 + 0.030)(i132\pi) \Rightarrow V = i12.48 - 8.62$

$\text{An } V(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_v) \Rightarrow V(t) = 15.165 \cos(120\pi t + 2.175)$ (SI)

$R \cdot V(t) = [15.165 \cos(120\pi t + 2.175)] V$ modulo do n.º complexo de V, obtido com $\text{abs}(v)$ faz com o eixo real, calculado com $\text{cong}(v)$

(2)

Como Dentro da caixa metálica, ~~a veloc.~~ o módulo da velocidade mantém-se ~~a~~ constante mas a exist.^{força} centrípeta igual à força magnética:

Nota: como a velocidade mantém-se sempre no plano da folha e o campo magnético é sempre perpendicular ao plano da folha então $|v \times B| = vB$

Igualando as expressões das forças centrípeta e magnética:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} \quad F_m = qvB \\ \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = qvB \quad \boxed{m = \frac{qvB}{v}}$$

A carga q será a carga do íon que nós sabemos ser +e, ou seja $q = 1.609 \times 10^{-19} C$

Como o campo magnético é constante, $B = 0.025 T$ ✓
O raio é dado indiretamente no enunciado porque $R = \frac{QR}{2}$ logo
 $r = \frac{0.1632}{2} m$

Para calcular o último elemento, precisamos de saber a velocidade em qualquer ponto dentro da caixa metálica.

Como o campo elétrico presente entre P e Q é um campo conservativo:

$$E_p = E_Q \\ \text{Logo } E_p = \frac{1}{2}mv_f^2 + eV = 200e \text{ (J)}$$

↑ cima da carga do íon
↓ O que é parte
do resumo

$$E_Q = \frac{1}{2}mv_f^2 + eV = \frac{mv_f^2}{2} \text{ (J)} \\ \text{potencial é 0 em Q}$$

Logo:

$$200e = \frac{mv_f^2}{2}$$

Como a velocidade em Q será a velocidade até ao final do movimento (até parar) então $v_f = 0$.

Resolução

Resolvendo o sistema de duas equações com duas variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{e}{N} \\ 200e = \frac{mN^2}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{(SI) }} \left\{ \begin{array}{l} m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg} \\ N = 1.96,078 \times 10^3 \text{ ms}^{-1} \end{array} \right.$$

R: A massa do ião é 1.67×10^{-27} Kg. ✓

Perguntas

- | | |
|-------|-------|
| 3. A | 11. E |
| 4. A | 12. E |
| 5. E | 13. C |
| 6. C | 14. F |
| 7. A | 15. C |
| 8. D | 16. C |
| 9. D | 17. A |
| 10. C | |

2.1.3 Cotações

Problema 1

- Cálculo da impedância complexa do condensador 0.4
- Cálculo da impedância complexa do indutor 0.4
- Cálculo da impedância complexa total 0.8
- Determinação do fasor da corrente 0.8
- Determinação do fasor da voltagem no indutor 0.8
- Obtenção da expressão da voltagem no indutor em função do tempo 0.8

Problema 2

- Cálculo da energia potencial elétrica em P e Q 0.4
- Cálculo da energia cinética em P e Q 0.4
- Equação para a massa e a velocidade obtida por conservação da energia mecânica 0.8
- Expressão da força magnética no percurso entre Q e R 0.8
- Expressão da força centrípeta no percurso entre Q e R 0.8
- Cálculo da massa do ião 0.8

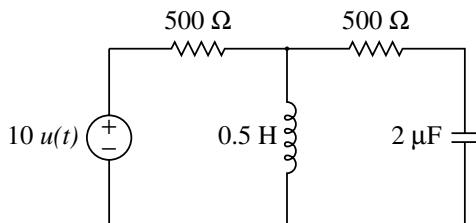
2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 25 de janeiro de 2018. Compareceram 72 estudantes e a nota média foi 8.1 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

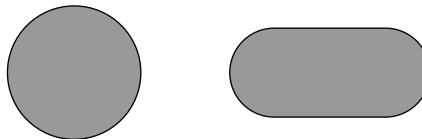
Nome:

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) A f.e.m. da fonte no circuito da figura é $10u(t)$, em volt, onde $u(t)$ é a função degrau unitário. Encontre as expressões da voltagem e da corrente no indutor, em função do tempo.



2. (4 valores) Uma esfera metálica encontra-se próxima de outra peça metálica formada por um cilindro e duas semiesferas, como mostra a figura. Ambos objetos estão isolados de qualquer outro condutor. A esfera tem carga positiva ($Q_1 > 0$) e a peça cilíndrica está completamente descarregada ($Q_2 = 0$). Arbitrando que o potencial da peça cilíndrica é zero, então o potencial da esfera é 80 V. Faça um diagrama, na sua folha de exame, mostrando as duas peças, a distribuição de cargas, as linhas de campo nas duas peças e à sua volta, e as superfícies equipotenciais de -5 V, 5 V e 75 V.



PERGUNTAS. Avalia-se unicamente a **letra** que apareça na caixa de “Resposta”. **Cotação:** certas, 0,8 valores, erradas, -0,2, em branco ou ilegível, 0.

3. Em coordenadas cartesianas, a expressão do campo elétrico numa região do espaço é:

6. Calcule a impedância complexa equivalente entre os pontos 1 e 2, para tensão/corrente alternada com frequência angular ω .

$$a x^2 y \cos(2z) \hat{i} + 2x^3 \cos(2z) \hat{j} - 4x^3 y \sin(2z) \hat{k}$$

Determine o valor da constante a .

Resposta:

4. Num condensador ligado a uma fonte ideal com f.e.m. ε a energia eletrostática armazenada é U . Se ε for aumentada até 2ε , a energia passará a ser:

- (A) a mesma U (C) $U/4$ (E) $4 U$
 (B) $2 U$ (D) $U/2$

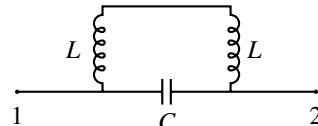
Resposta:

5. O campo magnético numa região do espaço é $3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ (unidades SI). Determine o módulo do binário magnético numa espira triangular, com vértices na origem e nos pontos $(5.6, 0, 0)$ e $(0, 4.3, 0)$ (unidades SI), percorrida por uma corrente de 1 A.

- (A) 53.8 N·m (C) 77.1 N·m (E) 64.8 N·m
 (B) 43.4 N·m (D) 60.2 N·m

Resposta:

6. Calcule a impedância complexa equivalente entre os pontos 1 e 2, para tensão/corrente alternada com frequência angular ω .



- (A) $\frac{i 2 L \omega}{1 - 2 L C \omega^2}$ (D) $\frac{i 2 L \omega}{2 - L C \omega^2}$
 (B) $\frac{i L \omega}{2 - L C \omega^2}$ (E) $\frac{i (2 L C \omega^2 - 1)}{2 C \omega}$
 (C) $\frac{i (L C \omega^2 - 2)}{2 C \omega}$

Resposta:

7. Quando a tensão num dispositivo, em função do tempo, é $V(t) = 3 \cos(80t + 0.9)$, a expressão da corrente é $I(t) = 1.5 \cos(80t + 0.5)$ (unidades SI). Determine o valor da impedância desse dispositivo.

- (A) $0.461 - i0.195$ (D) $1.842 - i0.779$
 (B) $0.461 + i0.195$ (E) $1.842 + i0.779$
 (C) $0.779 + i1.842$

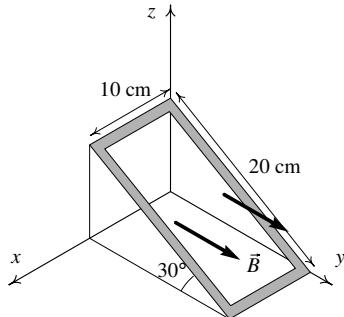
Resposta:

8. O coeficiente de temperatura do ferro a 20°C, é igual a 0.005. Duas resistências de ferro têm valores de 1.7 kΩ e 3.2 kΩ, quando a temperatura é de 20°C. Determine o valor da resistência equivalente, quando essas duas resistências são ligadas em paralelo e a temperatura aumenta até 65°C.

- (A) 1.22 kΩ (C) 1.58 kΩ (E) 1.47 kΩ
 (B) 1.11 kΩ (D) 1.36 kΩ

Resposta:

9. Uma espira retangular, com arestas de 10 cm e 20 cm, encontra-se inclinada 30° em relação ao plano Oxy, como mostra a figura. Calcule o fluxo magnético através da espira, produzido por um campo magnético uniforme, na direção e sentido do eixo dos y, com módulo de 5.8 T.



- (A) 0.1 T·m² (C) 0.058 T·m² (E) 0.116 T·m²
 (B) 5.8 T·m² (D) 0.174 T·m²

Resposta:

10. Dentro do paralelepípedo definido por $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ e $0 \leq z \leq 4$ (em metros), existe carga elétrica distribuída uniformemente. O fluxo elétrico produzido pelo paralelepípedo, através da esfera com centro na origem e raio igual a 5 m, é igual a 2325 N/(C·m²). Determine a carga volúmica dentro do paralelepípedo, em unidades de nC/m³.

- (A) 2.5697 (C) 0.3212 (E) 0.1645
 (B) 0.8566 (D) 0.571

Resposta:

11. Num sistema de três cargas pontuais, $q_1 = 4 \text{ nC}$, $q_2 = 3 \text{ nC}$ e $q_3 = 2 \text{ nC}$, a distância entre as cargas 1 e 2 é 2 cm, entre as cargas 1 e 3 é 2 cm, e entre as cargas 2 e 3 é 3 cm. Calcule a relação entre as forças elétricas produzidas pelas cargas 1 e 2 sobre a carga 3.

- (A) 6 (C) 2 (E) 16/27
 (B) 3 (D) 32/27

Resposta:

12. Quando o sinal de entrada num circuito é $V_e(t)$ e o sinal de saída é $V(t)$, a função de transferência é:

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

Determine a equação diferencial do circuito.

- (A) $\ddot{V} + 5\dot{V} + 6V = 2\dot{V}_e + 5V_e$
 (B) $\ddot{V} + 2\dot{V} + 6V = \dot{V}_e + 3V_e$
 (C) $\dot{V} + 2V = \dot{V}_e + 3V_e$
 (D) $\ddot{V} + 5\dot{V} + 6V = V_e$
 (E) $\ddot{V} + 2\dot{V} + V = \dot{V}_e + 3V_e$

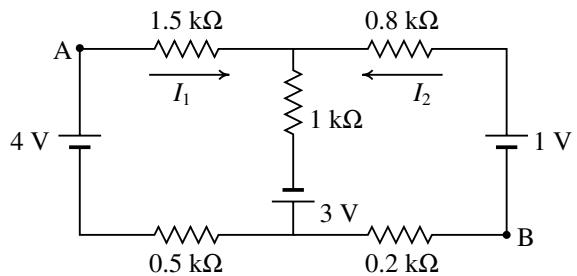
Resposta:

13. Um circuito de corrente alternada é composto por várias resistências e indutores. Qual dos números complexos na lista poderá ser a impedância equivalente do circuito?

- (A) $2.3 + i1.2$ (D) $-2.3 - i1.2$
 (B) $2.3 - i1.2$ (E) $-2.3 + i1.2$
 (C) $i1.2$

Resposta:

14. A intensidade das duas correntes indicadas no circuito da figura são $I_1 = 2 \text{ mA}$ e $I_2 = 1 \text{ mA}$. Arbitrando que o potencial seja igual a zero no ponto A, determine o valor do potencial no ponto B.



- (A) -2.7 V (C) -5.6 V (E) -4.8 V
 (B) -3.2 V (D) -1.3 V

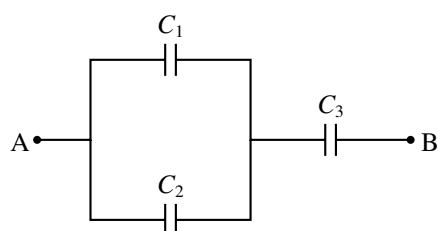
Resposta:

15. Uma carga pontual que se encontra no ponto $(x, y, z) = (4, 5, 3)$ (distâncias em cm) produz um potencial de 6 kV no ponto $(x, y, z) = (2, 6, 2)$. Calcule o valor da carga em unidades de nC.

- (A) 2.72 (C) 14.91 (E) 13.33
 (B) 16.33 (D) 40.0

Resposta:

16. Ligam-se três condensadores como mostra a figura, onde $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 7 \mu\text{F}$ e $C_3 = 9 \mu\text{F}$. Se a diferença de potencial aplicada entre os pontos A e B for 12 V qual será a carga no condensador C_3 ?



- (A) 71.3 μC (C) 17.8 μC (E) 89.1 μC
 (B) 59.4 μC (D) 35.6 μC

Resposta:

17. Duas pilhas idênticas, cada uma com f.e.m. de 1.5 V e carga total igual a 2.4 A·h, são ligadas em série. Quais são os valores da f.e.m. e da carga disponível do sistema resultante? (observe-se que a energia do sistema deve ser igual à soma das energias das duas pilhas.)

- (A) 3 V e 2.4 A·h (D) 3 V e 4.8 A·h
 (B) 1.5 V e 4.8 A·h (E) 1.5 V e 1.2 A·h
 (C) 3 V e 1.2 A·h

Resposta:

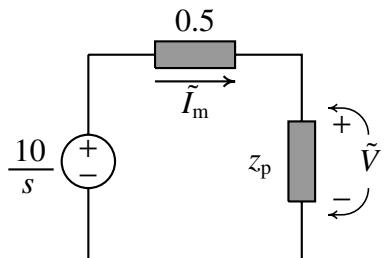
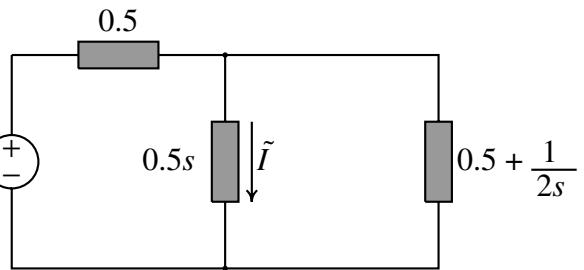
2.2.2 Resolução

Problema 1. (a) Pode usar-se unidades SI mas, para simplificar os resultados, usaremos unidades em que a resistência e a impedância são medidas em $k\Omega$, a indutância em H, a capacidade em μF , a frequência em kHz, o tempo em ms, a voltagem em V e a corrente em mA.

A impedância de ambas resistências é então 0.5, a impedância do indutor $0.5s$ e a impedância do condensador $1/(2s)$. A transformada de Laplace da voltagem da fonte é $\frac{10}{s}$. A resistência do lado direito está em série com o condensador; como tal, o circuito pode ser simplificado resultando no diagrama que se mostra à direita, onde \tilde{I} é a transformada da corrente que passa pelo indutor.

As duas impedâncias em paralelo podem ser combinadas numa só. Usando o *Maxima*, o resultado é:

$$z_p = \frac{0.5s \left(0.5 + \frac{1}{2s}\right)}{0.5s + 0.5 + \frac{1}{2s}} = \frac{s^2 + s}{2(s^2 + s + 1)}$$



Obtém-se assim o circuito no lado esquerdo. A diferença de potencial no sistema em paralelo, \tilde{V} , é a mesma diferença de potencial no indutor. A corrente na malha é \tilde{I}_m igual a:

$$\tilde{I}_m = \frac{\frac{10}{s}}{0.5 + z_p} = \frac{20(s^2 + s + 1)}{2s^3 + 2s^2 + s}$$

A diferença de potencial no indutor é:

$$\tilde{V} = z_p \tilde{I}_m = \frac{10(s+1)}{2s^2 + 2s + 1}$$

E a corrente no indutor:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{0.5s} = \frac{20(s+1)}{2s^3 + 2s^2 + s}$$

No domínio do tempo, a voltagem e a corrente no indutor são as transformadas inversas

de \tilde{V} e \tilde{I} . Usando a função `ilt` do Maxima, o resultado é:

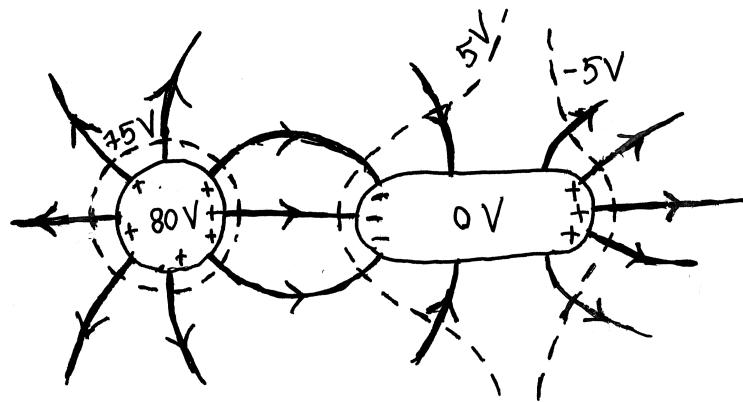
$$V(t) = 5e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) u(t) \quad I(t) = 20 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) u(t)$$

onde o tempo t é dado em ms, a voltagem V em V e a corrente I em mA.

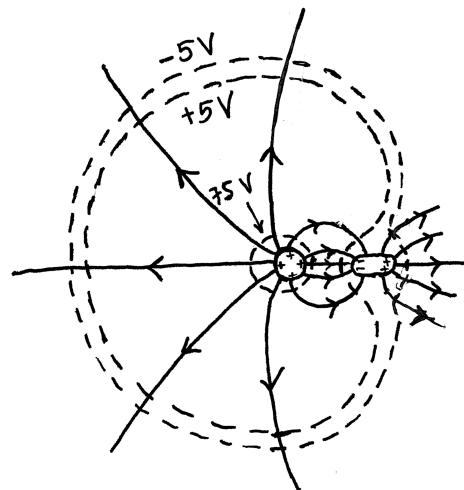
Problema 2. Há que ter em conta várias coisas:

- As cargas distribuem-se nas superfícies dos dois condutores. No cilindro são induzidas cargas negativas no extremo mais próximo da esfera e o mesmo número de cargas positivas no extremo mais afastado. Na superfície da esfera há cargas positivas, mais concentradas no extremo próximo do cilindro.
- Não há linhas de campo dentro da esfera nem dentro do cilindro. Há linhas de campo a começar na superfície da esfera e na superfície do cilindro, no extremo onde há carga positiva, e linhas de campo a terminar na superfície do cilindro, no extremo onde há carga negativa.
- Todas as linhas de campo são perpendiculares à superfície do objeto onde começam ou terminam.
- Nenhuma linha de campo pode começar num extremo do cilindro e terminar no outro, porque o potencial é constante no cilindro, enquanto que o potencial onde começa uma linha é sempre maior do que o potencial onde esta termina.
- A equipotencial de 75 V estará próxima da esfera, onde o potencial é 80 V, e as equipotenciais de 5 V e -5 V estarão próximas do cilindro, onde o potencial é 0. No entanto, nenhuma dessas equipotenciais pode tocar nenhum dos objetos, porque estes têm valores de potencial diferentes de 75 V, 5 V e -5 V.
- Essas 3 equipotenciais não se podem cruzar entre si, por terem valores de potencial diferentes, e devem ser perpendiculares às linhas de campo elétrico, em todos os pontos onde se cruzam com elas.

O gráfico é aproximadamente o seguinte:



Também pode ser representado visto desde mais longe:



Perguntas

- | | |
|-------|-------|
| 3. B | 11. B |
| 4. E | 12. A |
| 5. D | 13. A |
| 6. A | 14. B |
| 7. E | 15. B |
| 8. D | 16. B |
| 9. C | 17. A |
| 10. B | |

2.2.3 Cotações

Problema 1

- Uso de unidades compatíveis _____ 0.4
- Cálculo das impedâncias do indutor e do condensador, em função de s _____ 0.4
- Obtenção da expressão, em função de s , da impedância do sistema em paralelo 0.4
- Obtenção da expressão, em função de s , da corrente na malha _____ 0.4
- Obtenção da expressão, em função de s , da voltagem no indutor _____ 0.8
- Obtenção da expressão, em função de s , da corrente no indutor _____ 0.8
- Obtenção da expressão, em função de t , da voltagem no indutor _____ 0.4
- Obtenção da expressão, em função de t , da corrente no indutor _____ 0.4

Problema 2

- Representação das cargas nas superfícies dos dois objetos _____ 0.4
- Representação das cargas induzidas no objeto descarregado (igual número de positivas e negativas, com cargas de sinal oposto ao da carga do objeto carregado mais próximas deste) _____ 0.8
- Maior concentração de cargas no objeto carregado no extremo mais próximo do outro objeto._____ 0.4
- Linhas de campo a começar ou terminar na superfície de cada objeto e perpendiculares à superfície _____ 0.8
- Equipotencial próxima do objeto carregado _____ 0.4
- Duas equipotenciais próximas do objeto descarregado, contornando-o nos dois lados _____ 0.8
- Equipotenciais perpendiculares às linhas de campo _____ 0.4

Bibliografia

- Adams, S., & Allday, J. (2000). *Advanced physics*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros*. Lopes da Silva Editora: Porto, Portugal.
- Blinchikoff, H. J., & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.
- Brito, L., Fiolhais, M., & C, P. (1999). *Campo Electromagnético*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.
- Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Feynman, P. R., Leighton, R. B., & M, S. (1964). *The feynman lectures on physics*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Hecht, E. (1991). *Óptica*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Hecht, E. (1994). *Physics*. Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.
- Henriques, A. B., & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo*. Lisboa, Portugal: IST Press.
- Lévy-Leblond, J. M., & A, B. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*. Lisboa, Portugal: Gradiva.
- Maxima Development Team. (2016). *Maxima Manual* (5.39.0 ed.).
- Mendiratta, S. K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: Lisboa, Portugal.
- Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2*. McGraw-Hill: New York, NY, USA.
- Scherz, P., & Monk, S. (2013). *Practical electronics for inventors* (3a ed.). McGraw-Hill:

- New York, NY, USA.
- Tipler, P. A., & Mosca, G. (2004). *Physics* (5a ed.). New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.
- Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- Villate, J. E. (2015). *Eletrociadade, magnetismo e circuitos* (2a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.
- Walker, J. (1975). *O grande circo da Física*. Gradiva: Lisboa, Portugal.