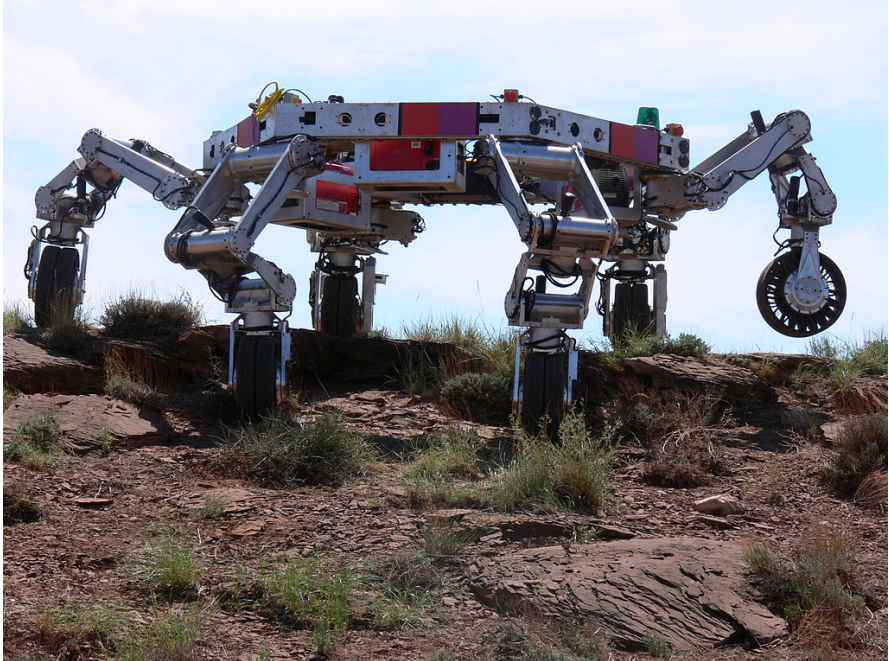


8. Mecânica lagrangiana



Cada braço num robot costuma ter 3 articulações. Em cada articulação há dois eixos perpendiculares, que permitem duas rotações independentes, correspondentes a dois graus de liberdade; assim sendo, cada braço tem 6 graus de liberdade, o suficiente para poder alcançar qualquer ponto dentro do seu alcance máximo, em qualquer direção desejada. O robot ATHLETE (*All-Terrain Hex-Legged Extra-Terrestrial Explorer*) na figura, usado pela NASA para exploração lunar, tem seis braços de 3 articulações e, incluindo os 3 graus de liberdade da posição de um ponto no corpo do robot, são ao todo 39 graus de liberdade. O braço humano, sem incluir a mão, tem 7 graus de liberdade: o ombro permite 3 rotações diferentes, o cotovelo permite duas rotações diferentes e o pulso mais duas rotações.

8.1. Graus de liberdade e espaço de fase

Os sistemas mecânicos considerados no capítulo anterior têm todos um único grau de liberdade (uma coordenada ou ângulo para determinar a posição) e duas variáveis de estado: a variável associada a esse grau de liberdade e a sua derivada em ordem ao tempo (velocidade ou velocidade angular).

Num sistema com n graus de liberdade, existem n variáveis independentes, funções contínuas do tempo, chamadas **coordenadas generalizadas**, que serão identificadas pelas letras: q_1, q_2, \dots, q_n . Essas variáveis podem ser comprimentos, ângulos ou qualquer outra grandeza. As derivadas em ordem ao tempo de cada uma dessas variáveis são as **velocidades generalizadas**: \dot{q}_i .

O espaço de fase tem $2n$ dimensões e cada ponto nesse espaço tem coordenadas $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. A velocidade de fase, em cada ponto do espaço de fase, tem $2n$ componentes, $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$. Para se poder calcular a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase é necessário conhecer n expressões para as acelerações generalizadas \ddot{q}_i , em função das coordenadas e velocidades generalizadas, expressões essas que são denominadas **equações de movimento**.

As equações de movimento poderiam ser obtidas aplicando a segunda lei de Newton. No entanto, seria necessário relacionar cada aceleração generalizada \ddot{q}_i com a aceleração do centro de massa de alguma parte do sistema e identificar todas as forças externas que atuam sobre essa parte do sistema. Algumas de essas forças são forças de ligação, por exemplo, a tensão num fio ou a reação normal numa superfície. No capítulo anterior viu-se que as equações de evolução podem ser obtidas também derivando a função hamiltoniana. O problema é que, em casos mais complicados dos que foram considerados no capítulo anterior, essa função não é a energia mecânica dividida pela massa ou pelo momento de inércia, mas pode ter formas mais complicadas. Nas secções seguintes introduz-se um método mais geral para obter as equações de movimento sem necessidade de identificar forças de ligação.

8.2. Equações de Lagrange

A energia cinética total E_c de um sistema mecânico é igual à soma de todas as energias cinéticas de translação e de rotação de todas as partes do sis-

tema. Em geral, é uma função que pode depender de todas as coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo:

$$E_c(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (8.1)$$

Num sistema em que o movimento está sujeito a algumas restrições existem forças de ligação resultantes dessas restrições. Por exemplo, num automóvel que se desloca sobre uma estrada, a reação normal da estrada sobre os pneus é a força de ligação que garante que a trajetória do automóvel siga a superfície da estrada. O atrito estático nas rodas com tração é também uma força de ligação, que garante que as rodas rodem sem deslizar sobre a superfície. A restrição de que o automóvel se desloque sobre a superfície da estrada permite reduzir as três coordenadas de posição a um único grau de liberdade: o deslocamento ao longo da estrada. A restrição de as rodas rodarem sem derrapar permite relacionar a velocidade angular das rodas com a velocidade do automóvel na estrada. Essa relação implica também uma relação entre o ângulo de rotação das rodas e o deslocamento do automóvel na estrada, o que faz com que apenas umas dessas duas variáveis seja suficiente para descrever o movimento do automóvel e a rotação das rodas.

Sempre que uma restrição no movimento de um sistema pode ser escrita em função das coordenadas generalizadas do sistema, permitindo assim reduzir o número de graus de liberdade, diz-se que é uma restrição **holonómica**. Nos sistemas holonómicos, sujeitos unicamente a restrições holonómicas, a segunda lei de Newton conduz às seguintes equações (a demonstração é feita no apêndice B):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n \quad (8.2)$$

onde Q_j é a componente j da **força generalizada**, definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (8.3)$$

e a soma é feita sobre todas as forças \vec{F}_i (internas ou externas) e \vec{r}_i é a posição do ponto onde atua a força \vec{F}_i . No entanto, não é necessário considerar algumas das forças no cálculo de Q_j ; por exemplo, as forças de reação normal e de atrito estático podem ser ignoradas, porque atuam numa posição fixa \vec{r}_i e, portanto, $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$. A força de tensão num fio

com comprimento constante também pode ser ignorada, porque atua em sentidos opostos nos dois extremos do fio e a soma de $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$ nos dois extremos dá zero.

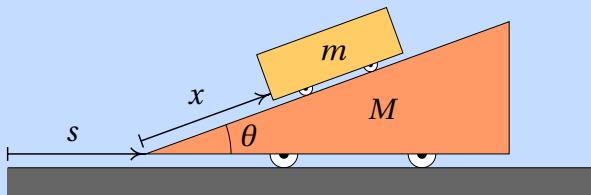
Entre as forças que devem ser incluídas em Q_j , algumas podem ser conservativas e, nesses casos, $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dU$, onde U é a energia potencial associada a essa força. Assim sendo, a contribuição dessa força conservativa para Q_j é igual a $-\partial U / \partial q_j$ e as equações 8.2 podem ser escritas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n \quad (8.4)$$

em que U é a energia potencial total do sistema e as componentes Q_j da força generalizada incluem unicamente as forças não conservativas. As equações 8.4 são as **equações de Lagrange**, válidas para os sistemas holonômicos. No caso particular de sistemas conservativos, o lado direito das equações é nulo.

Exemplo 8.1

O carrinho na figura, com massa m , encontra-se sobre o plano inclinado de massa M . O plano inclinado tem rodas que lhe permitem deslocar-se livremente sobre a mesa horizontal. Admitindo que a massa das rodas é muito menor que m e M e que o atrito no eixo das rodas é desprezável, encontre as equações de movimento do sistema.



Resolução. Para determinar as posições do carrinho e do plano inclinado num instante, basta saber o deslocamento horizontal s de um ponto do plano, em relação à mesa e o deslocamento x de um ponto do carrinho em relação ao plano inclinado. A figura acima mostra a forma como essas duas variáveis podem ser definidas. Assim sendo, o sistema tem dois graus de liberdade e as velocidades generalizadas são \dot{s} e \dot{x} .

A velocidade generalizada \dot{s} é também a velocidade do centro de massa do plano inclinado; \dot{x} é a velocidade do carrinho em relação ao plano inclinado. Escolhendo um eixo q perpendicular a s e apontando para cima, a forma

vetorial da velocidade do plano inclinado e da velocidade do carrinho em relação ao plano são:

$$\vec{v}_p = \dot{s} \hat{e}_s \quad \vec{v}_{c/p} = \dot{x} (\cos \theta \hat{e}_s + \sin \theta \hat{e}_q)$$

A velocidade do carrinho, em relação à mesa, é igual à soma desses dois vetores:

$$\vec{v}_c = (\dot{s} + \dot{x} \cos \theta) \hat{e}_s + \dot{x} \sin \theta \hat{e}_q$$

e o seu módulo ao quadrado é,

$$v_c^2 = (\dot{s} + \dot{x} \cos \theta)^2 + \dot{x}^2 \sin^2 \theta = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2 \dot{s} \dot{x} \cos \theta$$

Como a energia cinética de rotação das rodas é desprezável, a energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2 \dot{s} \dot{x} \cos \theta)$$

A energia potencial gravítica do plano inclinado pode ser ignorada porque permanece constante; como tal, a energia potencial do sistema é igual à energia potencial gravítica do carrinho:

$$U = m g x \sin \theta$$

note-se que a altura do centro de massa do carrinho, em relação à mesa, é um pouco maior que $x \sin \theta$, mas a diferença é uma constante que só acrescenta um valor constante a U , podendo ser ignorado.

Não existem forças não conservativas (ou melhor, estão a ser ignoradas); como tal, o lado direito nas equações de Lagrange 8.4 é zero. Na primeira equação de Lagrange, relacionada com a coordenada x é necessário calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m (\dot{x} + \dot{s} \cos \theta) \quad \frac{\partial E_c}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = m g \sin \theta$$

e a equação de Lagrange é,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = m (\ddot{x} + \ddot{s} \cos \theta + g \sin \theta) = 0$$

Em relação à coordenada s , as derivadas parciais são

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = (M + m) \dot{s} + m \dot{x} \cos \theta \quad \frac{\partial E_c}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

e a equação de Lagrange é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = (M + m) \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \theta = 0$$

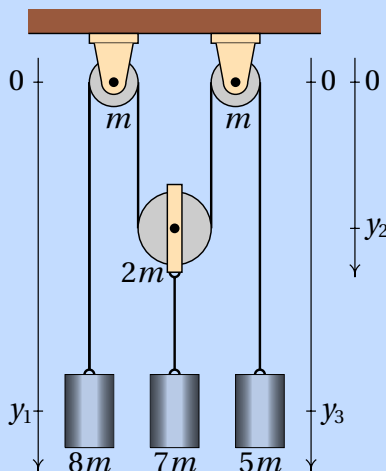
Resolvendo as duas equações de Lagrange para as acelerações \ddot{x} e \ddot{s} , obtêm-se as duas equações de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{(M + m) g \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} \quad \ddot{s} = \frac{m g \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

As duas acelerações são constantes, \ddot{x} negativa e \ddot{s} positiva; ou seja, o carrinho desce o plano inclinado enquanto este começa a andar para a direita.

Exemplo 8.2

No sistema da figura, a roldana do meio pode subir e descer e as outras duas roldanas estão fixas ao teto. As massas das duas roldanas fixas é m , a massa da roldana móvel é $2m$ e as massas dos 3 cilindros são $8m$, $7m$ e $5m$ (no cilindro do meio, $7m$ já inclui também a massa do suporte que o liga à roldana móvel). As massas dos fios e o atrito nos eixos das roldanas são desprezáveis e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. Determine o valor das acelerações dos 3 cilindros.



Resolução. Este exemplo será usado também para mostrar o uso do Método da máxima na resolução de problemas de mecânica lagrangiana. Começa-se por

definir as variáveis generalizadas. Para determinar a posição dos cilindros e da roldana móvel são necessárias 3 distâncias, que podem ser as três variáveis y_1 , y_2 e y_3 indicadas na figura. As variáveis y_1 e y_3 são as posições dos centros de massa dos dois cilindros nos extremos e y_2 é a posição do centro da roldana móvel; a posição do cilindro do meio é igual a y_2 mais uma constante.

A restrição de que o comprimento do fio seja constante conduz à seguinte equação:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = k$$

onde k é uma constante. Essa equação permite substituir y_3 em função de y_1 e y_2 ; como tal, o sistema tem dois graus de liberdade e as coordenadas generalizadas podem ser y_1 e y_2 . As velocidades generalizadas são $v_1 = \dot{y}_1$ e $v_2 = \dot{y}_2$; a relação entre a velocidade v_3 e as duas velocidades generalizadas obtém-se derivando a equação anterior, que neste caso é trivial, mas como em outros casos podem não ser, será calculada aqui usando o Maxima. As derivadas calculadas pela função **diff** são derivadas parciais; para obter a derivada ordinária da equação anterior em ordem ao tempo, é necessário indicar que a derivada de y_1 é a velocidade generalizada v_1 e de forma semelhante para y_2 . Já agora podem indicar-se também as derivadas de v_1 e v_2 , que são as acelerações a_1 e a_2 . O comando usado no Maxima para indicar a derivada de uma variável é **gradef**. Os comandos para definir y_3 e v_3 em função das variáveis generalizadas são

```
(%i1) y3: k - y1 - 2*y2$
(%i2) gradef (y1, t, v1)$
(%i3) gradef (y2, t, v2)$
(%i4) gradef (v1, t, a1)$
(%i5) gradef (v2, t, a2)$
(%i6) v3: diff (y3,t);
(%o6)      -2 v2 - v1
```

Como o fio não derrapa sobre as roldanas, a velocidade angular de cada roldana é $\omega = V/r$, onde V é a velocidade do fio em relação ao centro da roldana e r é o raio da roldana. Admitindo que cada roldana seja um cilindro uniforme, o seu momento de inércia em relação ao eixo é $I = Mr^2/2$, onde M é a massa da roldana; assim sendo, a sua energia cinética

de rotação é

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{M}{4} V^2$$

A energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} + \frac{M_1 V_1^2}{4} + \frac{M_2 V_2^2}{4} + \frac{M_3 V_3^2}{4}$$

onde os índices 1, 2 e 3 referem-se aos 3 cilindros e às 3 roldanas (de esquerda para direita), as massas m_i , em letras minúsculas, são as massas dos cilindros e as massas M_i , em letras maiúsculas, as massas das roldanas. As velocidades v_i são as velocidades dos 3 cilindros e as velocidades V_i são as velocidades do fio em relação ao centro de cada uma das 3 roldanas. Observe-se que a roldana 2 tem tanto energia cinética de translação como energia cinética de rotação.

A expressão da energia potencial gravítica do sistema, excluindo termos constantes, é:

$$U = -m_1 g y_1 - (m_2 + M_2) g y_2 - m_3 g y_3$$

A seguir, substituem-se os valores das massas em termos do parâmetro m e escrevem-se as expressões das energias em ordem a y_1 , y_2 e as velocidades $v_1 = \dot{y}_1$ e $v_2 = \dot{y}_2$ (observe-se que $V_1 = v_1$, $V_2 = v_1 + v_2$ e $V_3 = v_3$). Isso pode ser feito no Maxima da forma seguinte:

```
(%i7) [m1, m2, m3, M1, M2, M3]: [8*m, 7*m, 5*m, m, 2*m, m]$
(%i8) [V1, V2, V3]: [v1, v1+v2, v3]$
(%i9) Ec: expand (m1*v1^2/2 + m2*v2^2/2 + m3*v3^2/2 + M2*v2^2/2
+ M1*V1^2/4 + M2*V2^2/4 + M3*V3^2/4);
(%o9) 16 m v2^2 + 12 m v1 v2 + 15 m v1^2
(%i10) U: expand (-m1*g*y1 - (m2+M2)*g*y2 - m3*g*y3);
(%o10) g m y2 - 3 g m y1 - 5 g k m
```

E as duas equações de Lagrange são


```
(%i11) eq1: diff (diff(Ec,v1),t) - diff(Ec,y1) + diff(U,y1) = 0;
(%o11)      -3 g m + 12 a2 m + 15 a1 m = 0
(%i12) eq2: diff (diff(Ec,v2),t) - diff(Ec,y2) + diff(U,y2) = 0;
(%o12)      g m + 32 a2 m + 12 a1 m = 0
```

Finalmente, resolvem-se as duas equações de Lagrange para encontrar as acelerações a_1 e a_2 e usam-se esses resultados para determinar a aceleração a_3 .

```
(%i13) solve ([eq1, eq2], [a1, a2]);
(%o13)      [ [ a1 = 9 g / 28, a2 = - 17 g / 112 ] ]
(%i14) subst (%, diff(v3,t));
(%o14)      - g / 56
```

Note-se que os resultados não dependem do valor de m e as três acelerações são constantes. O cilindro do lado esquerdo tem aceleração igual a $9g/28$, para baixo (porque a_1 é positiva). O cilindro do meio e a roldana móvel têm aceleração $17g/112$, para cima. E a aceleração do terceiro cilindro é $g/56$, para cima. Se inicialmente os 3 cilindros estão em repouso, o cilindro do lado esquerdo começa a descer e os outros dois cilindros sobem.

8.3. Condições de equilíbrio

Nos dois exemplos resolvidos na secção anterior, os valores obtidos para as acelerações generalizadas foram constantes. Nos casos mais gerais, essas acelerações serão expressões que dependem das coordenadas e velocidades generalizadas e do tempo. A resolução desses sistemas de equações diferenciais é o objeto de estudo de todos os seguintes capítulos neste livro.

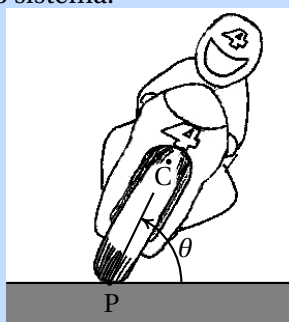
Antes de resolver as equações de movimento, é possível (e conveniente) começar por determinar os valores das coordenadas generalizadas para os quais o sistema estará em equilíbrio. A condição para que exista equilíbrio cinético é que as acelerações sejam nulas e se as velocidades também são nulas, o equilíbrio é estático.

Lembre-se que nos sistemas com apenas um grau de liberdade, a instabili-

dade dos pontos de equilíbrio determina-se a partir do sinal da derivada da aceleração, em ordem à coordenada generalizada. O ponto de equilíbrio é estável quando essa derivada é negativa ou instável quando for positiva.

Exemplo 8.3

Um motociclista que se desloca com velocidade v , numa curva de raio r , inclina o seu corpo e a moto um ângulo θ , em relação à horizontal, no sentido do centro de curvatura da curva, para evitar cair para o lado. Determine o valor que deve ter θ , em função de v , r e h , que é a distância entre o ponto de contacto dos pneus com a estrada, P, e o centro de massa, C, do sistema.



Resolução. Devido à inclinação da moto, os pontos P e C não se encontram à mesma distância do centro da trajetória curva. Como a distância desde o ponto P até o centro da trajetória curva é r e a velocidade de P em relação à estrada é v , a distância desde o ponto C até o centro da trajetória curva é $r - h \cos \theta$ e a velocidade do ponto C é:

$$v_C = \frac{r - h \cos \theta}{r} v$$

na mesma direção da velocidade do ponto P. Mas como o ângulo θ pode variar, o ponto C tem também outra componente de velocidade, $h\dot{\theta}$, no plano perpendicular à velocidade de P. Como tal, a energia cinética de translação é

$$E_c = \frac{m}{2} \left(h^2 \dot{\theta}^2 + \left(1 - \frac{h}{r} \cos \theta \right)^2 v^2 \right)$$

Há também energias cinéticas de rotação, associadas à velocidade angular $\dot{\theta}$, à velocidade angular das rodas nos seus eixos e à rotação do sistema todo no plano horizontal, já que o motociclista entra na curva olhando numa direção e sai olhando para outra direção diferente. O cálculo dessas energias ultrapassa os objetivos deste livro introdutório; será considerado

o caso em que essas energias podem ser desprezadas. A energia potencial gravítica do sistema é

$$U = m g h \sin \theta$$

As derivadas parciais das energias, em ordem a θ e $\dot{\theta}$ são

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} &= m h^2 \dot{\theta} & \frac{\partial E_c}{\partial \theta} &= \frac{m h v^2}{r} \sin \theta \left(1 - \frac{h}{r} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= m g h \cos \theta \end{aligned}$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{\theta} = \frac{v^2}{h r} \sin \theta \left(1 - \frac{h}{r} \cos \theta \right) - \frac{g}{h} \cos \theta$$

A altura do centro de massa, h , costuma ser muito menor do que o raio da curva; assim sendo, a expressão entre parêntesis é aproximadamente 1 e uma boa aproximação é

$$\ddot{\theta} = \frac{v^2}{h r} \sin \theta - \frac{g}{h} \cos \theta$$

Para que exista equilíbrio, $\ddot{\theta} = 0$, o ângulo deverá ser:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{g r}{v^2} \right) \quad (8.5)$$

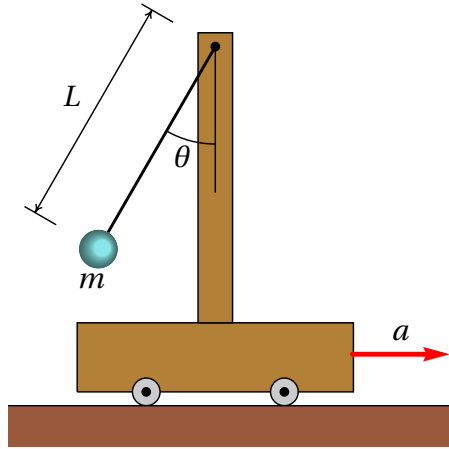
e a derivada da aceleração generalizada em ordem ao ângulo é:

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} = \frac{v^2}{h r} \cos \theta + \frac{g}{h} \sin \theta$$

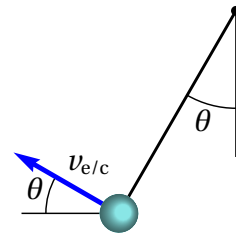
que é positiva, porque $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Conclui-se que o equilíbrio é instável.

Exemplo 8.4

Um carrinho desloca-se sobre uma mesa horizontal, com aceleração constante de valor a . Sobre o carrinho há um poste com um pêndulo simples de massa m e comprimento L . Determine o valor do ângulo θ em que o pêndulo permanece em equilíbrio em relação ao carrinho. Admita que a massa do fio do pêndulo é desprezável e que o raio da esfera é muito menor que L .



Resolução. A velocidade do carrinho será sempre horizontal e com módulo $a t$, onde t é o tempo a partir do instante em que a velocidade do carrinho era nula. A figura à direita mostra a velocidade $v_{e/c}$ da esfera, em relação ao carrinho, no caso em que $\dot{\theta}$ é positiva. O módulo de $v_{e/c}$ é igual a $L\dot{\theta}$ e usando um sistema de eixos com x na direção e sentido de \vec{a} e y na vertical e para cima, as componentes vetoriais de $\vec{v}_{e/c}$ e da velocidade do carrinho são:



$$\vec{v}_{e/c} = L\dot{\theta}(-\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \quad \vec{v}_c = a t \hat{i}$$

A velocidade da esfera em relação à mesa é a soma desses dois vetores

$$\vec{v}_e = (a t - L\dot{\theta} \cos\theta) \hat{i} + L\dot{\theta} \sin\theta \hat{j}$$

No Maxima, se θ for representada pela variável q e $\dot{\theta}$ pela variável w , o vetor velocidade da esfera permite encontrar a expressão da energia cinética da esfera, lembrando que $v_e^2 = \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e$

```
(%i15) ve: [a*t-L*w*cos(q), L*w*sin(q)]$
```

```
(%i16) Ec: m*trigsimp(ve.ve)/2;
```

```
(%o16)      m(w^2 L^2 - 2 a*dot{theta}(q) t w L + a^2 t^2)
            2
```

A seguir, definem-se a energia potencial da esfera e as derivadas da coordenada e velocidade generalizadas em ordem ao tempo, encontra-se a equação de Laplace e resolve-se para obter a expressão para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ que será designada pela variável f .

```
(%i17) U: -m*g*L*cos(q)$
(%i18) gradev (q, t, w)$
(%i19) gradev (w, t, f)$
(%i20) solve (diff(diff(Ec,w),t) - diff(Ec,q) + diff(U,q), f);
(%o20)      
$$\left[ f = -\frac{g \sin(q) - a \cos(q)}{L} \right]$$

```

Obtém-se assim a equação de movimento

$$\ddot{\theta} = \frac{a}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta \quad (8.6)$$

Existe equilíbrio estático quando a velocidade e a aceleração angular são ambas nulas, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$, que conduz à condição para o ângulo na posição de equilíbrio:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{g} \right) \quad (8.7)$$

e a derivada da aceleração angular em ordem ao ângulo é

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} = -\frac{a}{L} \sin \theta - \frac{g}{L} \cos \theta$$

que é negativa, porque no ponto de equilíbrio θ está entre 0 e $\pi/2$. Conclui-se que o equilíbrio é estável; o pêndulo pode oscilar em torno do ângulo θ de equilíbrio.

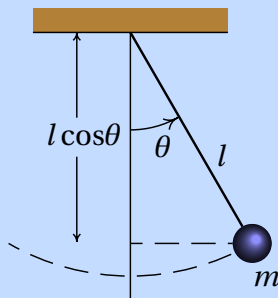
Observe-se que a equação de movimento depende da aceleração do carrinho mas não da sua velocidade. A observação da posição de equilíbrio do pêndulo permite medir o valor da aceleração do carrinho, mas não a sua velocidade.

8.4. Forças dissipativas

Em todos os exemplos das secções anteriores não existiam forças não conservativas e, assim sendo, a força generalizada era nula. Os exemplos seguintes mostram casos em que existem forças não conservativas.

Exemplo 8.5

Um pêndulo simples é formado por um objeto pequeno de massa m , pendurado de um fio de comprimento l . A massa do fio é desprezável comparada com m . Determine a equação de movimento, incluindo a resistência do ar.



Resolução. A força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do pêndulo, e na direção oposta a essa velocidade (ver equação 4.14 do capítulo 4). Como a velocidade do pêndulo é igual a $l\dot{\theta}$, a expressão para a força de resistência do ar é:

$$F_r = -C l^2 |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

onde C é uma constante. Fixando a origem no ponto onde o fio está colado, a posição do ponto onde atua essa força é

$$\vec{r} = l(\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j})$$

e a sua derivada em ordem a θ é

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = l(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) = l\vec{e}_\theta$$

onde \vec{e}_θ é o versor tangente à trajetória circular do pêndulo, no sentido em que θ aumenta. A força generalizada é

$$Q_\theta = \vec{F}_r \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-C l^2 |\dot{\theta}| \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot (l\vec{e}_\theta) = -C l^3 |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

As energias cinética e potencial e as suas derivadas são semelhantes às do último exemplo da secção anterior, substituindo $a = 0$

$$E_c = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 \quad U = -m g l \cos\theta$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = m g l \sin \theta$$

A equação de Lagrange conduz a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{C l}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} \quad (8.8)$$

8.5. Forças de ligação

Uma das vantagens da mecânica lagrangiana, em relação à mecânica vetorial, é não ter que identificar as forças de ligação, as suas direções e os pontos onde são aplicadas. No entanto, em alguns casos pode ser necessário ter de calcular essas forças. Por exemplo, quando existe atrito cinético entre duas superfícies, a força de atrito é proporcional à força de reação normal, que é uma de forças de ligação.

Existe um método que permite calcular as forças de ligação a partir das equações de Lagrange. Começa-se por identificar a restrição à qual está associada a força de ligação e escreve-se na forma $f(q_1, \dots, q_n) = \text{constante}$. No caso do exemplo 8.2, a restrição de que o comprimento do fio é constante, $y_1 + 2 y_2 + y_3 = k$, é responsável pela aparição da força de tensão ao longo do fio e faz com que y_3 possa ser substituída em termos de y_1 e y_2 . Assim sendo, para calcular a tensão no fio, faz-se de conta que as 3 variáveis (y_1, y_2, y_3) são todas coordenadas generalizadas, aumentando o número de equações de Lagrange para 3, introduz-se uma função λ , chamada **multiplicador de Lagrange** e uma condição adicional, $f(y_1, y_2, y_3) = \text{constante}$, que no caso do exemplo 8.2 é $y_1 + 2 y_2 + y_3 = k$.

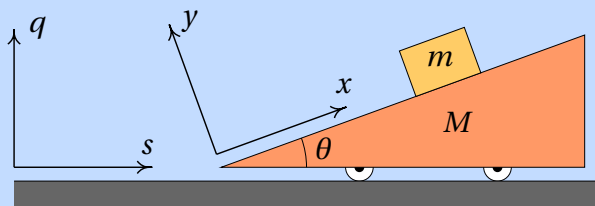
O passo seguinte consiste em acrescentar um termo $-\lambda \partial f / \partial q_j$ a cada equação de Lagrange, ficando

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j} \quad (8.9)$$

onde $j = 1, \dots, n$. O exemplo a seguir mostra como calcular o multiplicador de Lagrange. Cada termo $-\lambda \partial f / \partial q_j$ é a componente da força de ligação segundo q_j . No caso do exemplo 8.2, $-\lambda \partial f / \partial y_1$, $-\lambda \partial f / \partial y_2$ e $-\lambda \partial f / \partial y_3$ são os valores da tensão do fio sobre cada um dos 3 blocos, que são diferentes.

Exemplo 8.6

Um bloco de massa m escorrega sobre um plano inclinado de massa M que tem rodas que lhe permitem deslocar-se livremente sobre uma mesa horizontal, como mostra a figura. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é μ_c . Admitindo que a massa das rodas é muito menor que m e M e que o atrito no eixo das rodas é desprezável, encontre as equações de movimento do sistema.



Resolução. Na figura acima já foram indicados também os dois sistemas de eixos usados a seguir; os eixos s e q estão fixos à mesa e os eixos x e y deslocam-se com o plano inclinado.

Este exemplo é semelhante ao exemplo 8.1, mas com uma força não conservativa: atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado. Como a força de atrito cinético é igual a $\mu_c R$, onde R é a reação normal entre o bloco e o plano, é necessário calcular essa reação normal. É necessário então fazer de conta que o bloco não mantém o contacto com o plano inclinado e que as duas coordenadas x e y podem variar. Nesse caso existem assim 3 graus de liberdade: x , y e s e a equação da restrição que faz com que o bloco esteja sempre em contacto com o plano inclinado é:

$$f(x, y, s) = y = \text{constante}$$

Introduz-se um multiplicador de Lagrange λ e as 3 componentes generalizadas da força de ligação são:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

Isso mostra que a força de ligação aponta na direção do eixo y e o multiplicar de Lagrange é a própria reação normal R_n entre o bloco e o plano.

Para determinar as componentes das velocidades em função das velocidades generalizadas $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{s})$, mostra-se a seguir um método diferente do que

foi usado na resolução do exemplo 8.1. O vetor posição do centro de massa do plano inclinado é

$$\vec{r}_p = s \hat{e}_s + q \hat{e}_q$$

e a sua derivada é o vetor velocidade do plano inclinado: $\vec{v}_p = \dot{s} \hat{e}_s$.

A posição do bloco em relação ao centro de massa do plano inclinado é

$$\vec{r}_{b/p} = \vec{r}_o + x \hat{i} + y \hat{j}$$

onde \vec{r}_o é o vetor desde o centro de massa do plano inclinado até a origem do referencial xy . A posição do bloco em relação à mesa é $\vec{r}_p + \vec{r}_{b/p}$; como os versores do referencial xy , em relação ao referencial sq , são

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{e}_s + \sin \theta \hat{e}_q \quad \hat{j} = -\sin \theta \hat{e}_s + \cos \theta \hat{e}_q$$

então a posição do bloco, no referencial sq fixo à mesa, é

$$\begin{aligned} \vec{r}_b = & (s + x \cos \theta - y \sin \theta) \hat{e}_s \\ & + (q + x \sin \theta + y \cos \theta) \hat{e}_q + \vec{r}_o \end{aligned}$$

e derivando obtém-se a velocidade do bloco

$$\vec{v}_b = (\dot{s} + \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta) \hat{e}_s + (\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) \hat{e}_q$$

Como a energia cinética de rotação das rodas é desprezável, a energia cinética total do sistema é:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{M}{2} v_p^2 + \frac{m}{2} v_b^2 \\ &= \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2 \dot{s} (\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta)) \end{aligned}$$

A altura do bloco, em relação à mesa é

$$h = \vec{r}_b \cdot \hat{e}_q = q + x \sin \theta + y \cos \theta + h_o$$

e, ignorando os termos constantes, a energia potencial gravítica do sistema é

$$U = m g (x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Neste caso existe uma força interna que realiza trabalho: a força de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado. Para calcular as componentes Q_j

da força generalizada há que ter em conta que na expressão $Q_j = \vec{F} \cdot \partial \vec{r} / \partial q_j$ o vetor \vec{r} é a posição do bloco em relação ao plano inclinado $\vec{r}_{b/p}$, porque a força é interna; usando a expressão dada acima para $\vec{r}_{b/p}$, as 3 derivadas parciais são $\partial \vec{r} / \partial x = \hat{i}$, $\partial \vec{r} / \partial y = \hat{j}$ e $\partial \vec{r} / \partial s = 0$. Como a força de atrito é $\mu_c R_n \hat{i}$, as três componentes da força generalizada são então

$$Q_x = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{i} = \mu_c R_n \quad Q_y = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \quad Q_s = 0$$

As equações de Lagrange 8.9 para as 3 coordenadas são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = Q_x$$

$$\Rightarrow m(\ddot{x} + \ddot{s} \cos \theta + g \sin \theta) = \mu_c R_n$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y} - \ddot{s} \sin \theta + g \cos \theta) - R_n = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = Q_s$$

$$\Rightarrow (M + m) \ddot{s} + m(\ddot{x} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta) = 0$$

Estas 3 equações podem ser resolvidas para encontrar as 2 equações de movimento para \ddot{x} e \ddot{s} em função de (x, s, \dot{x}, \dot{s}) e a força de ligação R_n . Para substituir y, \dot{y} e \ddot{y} em função das coordenadas e velocidade generalizadas (x, s, \dot{x}, \dot{s}) usa-se a equação da restrição, $f(x, y, s) = \text{constante}$, que neste caso é $y = \text{constante}$ e, portanto, $\ddot{y} = 0$. Eliminando os termos \ddot{y} nas equações de Lagrange e resolvendo para \ddot{x}, \ddot{s} e R obtém-se

$$\ddot{x} = -\frac{(M + m) g \beta}{M + m \beta \sin \theta} \quad \ddot{s} = \frac{m g \beta \cos \theta}{M + m \beta \sin \theta} \quad R_n = \frac{m M g \cos \theta}{M + m \beta \sin \theta} \quad (8.10)$$

onde $\beta = \sin \theta - \mu_c \cos \theta$. No caso em que o atrito cinético é desprezado ($\mu_c = 0$), β é igual a $\sin \theta$ e as equações de movimento são as mesmas que foram obtidas no exemplo 8.1.

3. A energia cinética de uma partícula em movimento sobre um cilindro de raio R é $m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)/2$, em que θ e z são as coordenadas da posição da partícula no cilindro, e a sua energia potencial é $az^2/2 + b\theta^2/2 + cz\theta$, onde a , b e c são constantes. Determine a aceleração $\ddot{\theta}$.

A. $-\frac{b\theta + cz}{m}$

D. $-\frac{b\theta + az}{mR}$

B. $-\frac{b\theta + cz}{mR^2}$

E. $-\frac{b\theta + az}{mR^2}$

C. $-\frac{b\theta + cz}{mR}$

4. As expressões para as energias cinética e potencial de um sistema com dois graus de liberdade, x e θ , são: $E_c = 5\dot{x}^2 + 11\dot{\theta}^2$ e $U = -3x\theta$. Encontre a expressão para a aceleração $\ddot{\theta}$.

A. $3\theta/22$

D. $3x\theta/22$

B. $3x\theta/5$

E. $3x/5$

C. $3x/22$

5. As energias cinética e potencial gravítica de um corpo celeste em órbita à volta do Sol são dadas pelas expressões

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = -\frac{4\pi^2 m}{r}$$

onde m é a massa do corpo, r a distância do Sol ao corpo, θ um ângulo medido no plano da órbita com vértice no Sol, as distâncias estão a ser medidas em unidades astronômicas e o tempo em anos. Encontre a equação de movimento para \ddot{r}

A. $r\ddot{\theta} - \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2$

D. $r\dot{\theta} - (2\pi r)^2$

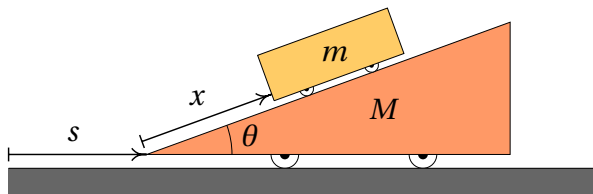
B. $r^2\dot{\theta} - (2\pi r)^2$

E. $r^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2$

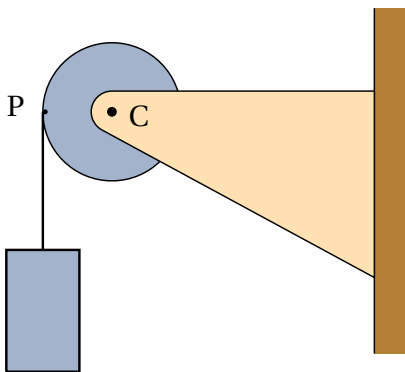
C. $r\dot{\theta}^2 - \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2$

Problemas

1. No exemplo 8.1, se as massas são $m = 0.6 \text{ kg}$ e $M = 2.5 \text{ kg}$ e o ângulo é $\theta = 20^\circ$, (a) determine os valores da aceleração do plano inclinado e do carrinho em relação ao plano inclinado. (b) Se num instante inicial o plano inclinado e o carrinho estão em repouso, com $x_0 = 20 \text{ cm}$, calcule o valor da velocidade, relativa ao plano inclinado, com que o carrinho chega à base do plano inclinado ($x = 0$) e o tempo que demora. (c) Na alínea anterior, calcule o valor da velocidade do plano inclinado quando o carrinho chega à base do plano inclinado.



2. Cola-se um extremo de um fio num ponto P de uma roldana, enrolando-o e pendurando um bloco de massa m no outro extremo. O sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser a altura y que o bloco desce. Admita que a roldana é um disco homogêneo com massa igual à massa do bloco e que a massa do fio, a força de atrito cinético no eixo da roldana e a resistência do ar são desprezáveis. (a) Encontre o valor da aceleração do bloco, em relação à aceleração da gravidade. (b) Se o bloco parte do repouso, determine o valor da sua velocidade após ter descido 50 cm .



3. Uma partícula com massa $m = 2 \text{ kg}$ desloca-se sobre uma calha parabólica vertical com equação $y = x^2$, onde x é medida na horizontal e

y na vertical (ambas em metros). Assim sendo, o movimento da partícula tem apenas um grau de liberdade, que pode ser escolhido como a coordenada x .

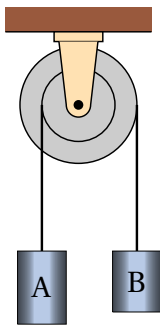
(a) Escreva a equação da energia cinética em função de x .

(b) Escreva a equação da energia potencial gravítica em função de x (use o valor $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

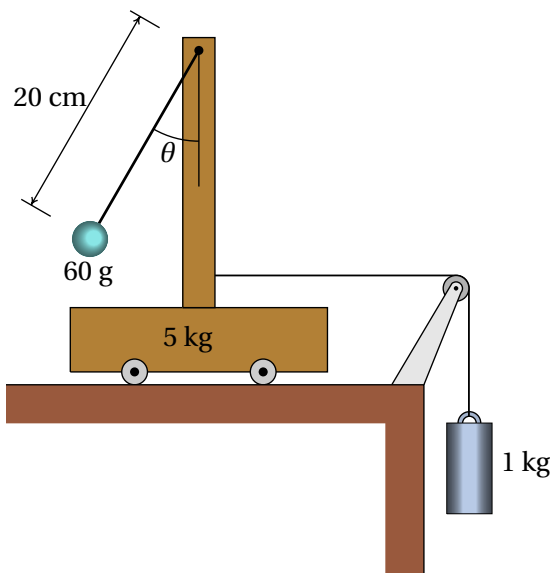
(c) Admitindo que sobre a partícula não atua nenhuma força não conservativa, use a equação de Lagrange para encontrar a sua equação de movimento.

(d) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema no espaço de fase, e determine se são estáveis ou instáveis.

4. O cilindro A na figura tem massa de 36 gramas, o cilindro B tem massa de 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é $4.43 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda. (a) Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo. (b) Determine o valores das tensões nos dois fios.



5. No sistema representado na figura, a massa das rodas e da roldana e o atrito nos seus eixos podem ser desprezados. (a) Determine as expressões para as energias cinética e potencial do sistema, em função do ângulo θ e do deslocamento horizontal x do carrinho. (b) Determine as expressões da aceleração do carrinho e da aceleração angular $\ddot{\theta}$. (c) Encontre o valor do ângulo θ na posição de equilíbrio do pêndulo e diga se o equilíbrio é estável ou instável. (d) Determine o valor da aceleração do carrinho, no caso em que o pêndulo permaneça na posição de equilíbrio.

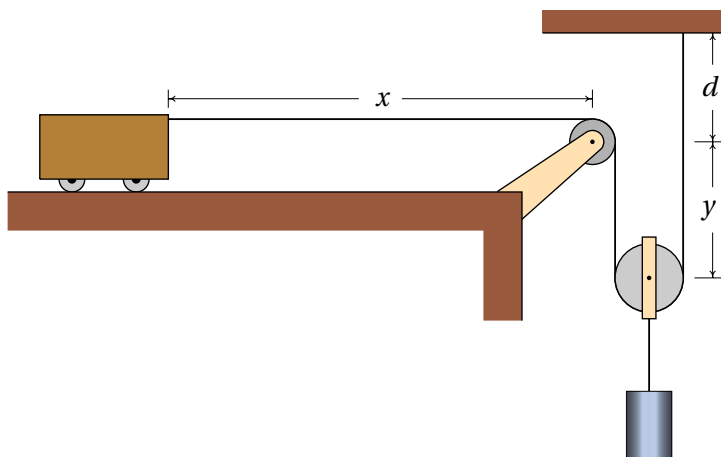


6. A roldana fixa no sistema da figura tem massa m e a roldana móvel tem massa $2m$ (ambas podem ser consideradas discos uniformes). A massa do carrinho é $20m$ e a massa do cilindro mais o suporte que o liga à roldana móvel é $8m$. Admita que a massa do fio e das rodas do carrinho, a força de atrito cinético nos eixos das roldanas e das rodas do carrinho e a resistência do ar são desprezáveis.

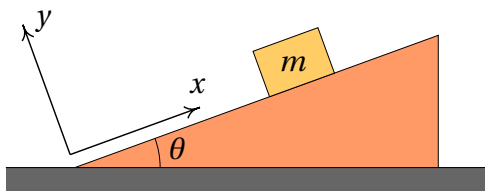
(a) Mostre que, em função da altura y que o cilindro desce, as energias cinética e potencial do sistema são

$$E_c = \frac{93}{2} m \dot{y}^2 \quad U = -10 m g y$$

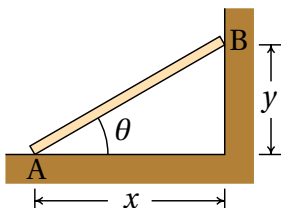
(b) Determine o valor das acelerações do cilindro e do carrinho.



7. Um bloco de massa m desce um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e plano inclinado é μ_c . Usando a equação de Lagrange com um multiplicador, encontre as expressões para a reação normal do plano sobre o bloco e da aceleração do bloco, \ddot{x} (despreze a resistência do ar).



8. A barra na figura é homogênea, com massa m e comprimento $L = 2$ m e está apoiada no chão no ponto A e numa parede no ponto B. No instante inicial, a barra é colocada em repouso, com ângulo inicial $\theta = 30^\circ$. Se o chão e a parede forem muito lisos, as forças de atrito nos pontos A e B são desprezáveis e a barra desce até que o ângulo θ diminua até 0. Admita que os pontos A e B permanecem sempre em contacto com o chão e a parede, que a resistência do ar é desprezável e que a grossura da barra é muito menor que o seu comprimento.

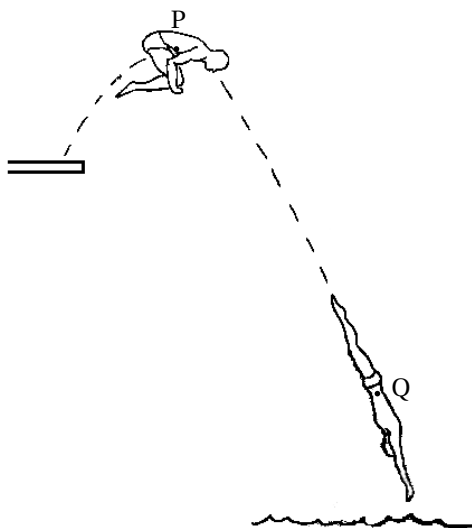


- (a) Demonstre que em qualquer instante o valor da velocidade do centro de massa da barra é igual a $L\dot{\theta}/2$
- (b) Encontre a expressão da energia cinética em função do ângulo θ .
- (c) Encontre a expressão da energia potencial gravítica em função do ângulo θ .
- (d) Encontre a expressão da aceleração angular.
- (e) Encontre a expressão da velocidade angular.

- (f) O tempo que a barra demora a cair até o chão é o integral $\int_{\pi/6}^0 \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$.

Usando a expressão para $\dot{\theta}$ obtida na alínea anterior, calcule esse tempo. (O integral é impróprio e não pode ser calculado analiticamente, mas pode ser calculado numericamente, usando a função `quad_qags` do Maxima.)

9. Num pêndulo simples, composto por um objeto pequeno de massa m pendurado por um fio de massa desprezável e comprimento l , o ponto onde o fio está fixo desloca-se para cima e para baixo segundo a expressão $a \cos(bt)$, onde a e b são duas constantes.
- (a) Ignorando a resistência do ar, determine as expressões para as energias cinética e potencial em função do ângulo θ que o pêndulo faz com a vertical.
- (b) Determine a equação de movimento para $\ddot{\theta}$.
- (c) Diga para que valores das constantes a e b o ponto de equilíbrio $\theta = 0$ é estável ou instável.
10. O saltador na figura encolhe o corpo no ponto P para rodar mais rapidamente, e estende-o novamente em Q, para reduzir a rotação na entrada para a água. As alterações da velocidade angular são consequência da alteração do momento de inércia.
- (a) Se o momento de inércia do saltador em relação ao centro de massa é I , que depende do tempo, escreva as expressões para as suas energias cinética e potencial em função da posição (x, y) do centro de massa e do ângulo de rotação θ .
- (b) Usando a equação de Lagrange para θ , demonstre que o **momento angular**, $L = I\dot{\theta}$, permanece constante.
- (c) Se no ponto P mais alto da trajetória o momento de inércia é $3.28 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e a velocidade angular $\dot{\theta} = 4 \text{ s}^{-1}$ e no ponto Q o momento de inércia é $28.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, determine a velocidade angular do saltador no ponto Q.



11. A energia potencial gravítica de um corpo celeste de massa m , em órbita à volta de outro corpo de massa M , é dada pela expressão (ver problema 2 do capítulo 6):

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal e r a distância entre os dois corpos. Pode demonstrar-se que as possíveis órbitas do corpo celeste são sempre planas; como tal, o movimento orbital tem dois graus de liberdade que podem ser r e um ângulo θ medido no plano da órbita, com vértice no corpo de massa M . Nesse sistema de coordenadas polares, o quadrado da velocidade do corpo de massa m é $(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$.

(a) A partir da equação de Lagrange para θ , demonstre que o **momento angular**

$$L = m r^2 \dot{\theta}$$

do corpo de massa m , em relação ao corpo de massa M , permanece constante.

(b) Encontre a equação de movimento para \ddot{r} e mostre que depende unicamente de r e \dot{r} e não de θ nem de $\dot{\theta}$.

Respostas

Perguntas: 1. B. 2. E. 3. B. 4. C. 5. C.

Problemas

- (a) $\ddot{x} = -4.043 \text{ m/s}^2$ e $\ddot{s} = 0.735 \text{ m/s}^2$
 (b) $\dot{x} = -1.272 \text{ m/s}$, $\Delta t = 0.315 \text{ s}$.
 (c) $\dot{s} = 0.231 \text{ m/s}$.
- (a) $2g/3$ (b) 2.56 m/s .
- (a) $E_c = \dot{x}^2 (4x^2 + 1)$ (b) $U_g = 19.6x^2$ (c) $\ddot{x} = -\frac{x(4\dot{x}^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$
 (d) Existe um único ponto de equilíbrio, na origem, que é estável.
- (a) $a_A = 0.2409 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, para cima, $a_B = 0.3855 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, para baixo.
 (b) A tensão no fio ligado ao cilindro A é 0.362 N e a tensão no fio ligado ao cilindro B é 0.226 N .
- (a) Em unidades SI,
 $E_c = 3.03\dot{x}^2 + 0.0012\dot{\theta}^2 - 0.012\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$
 $U = -9.8x - 0.1176\cos\theta$ (b) $\ddot{x} = \frac{2450 - 147\cos\theta\sin\theta - 3\dot{\theta}^2\sin\theta}{15(101 - \cos^2\theta)}$
 $\ddot{\theta} = \frac{2450\cos\theta - 14847\sin\theta - 3\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta}{3(101 - \cos^2\theta)}$
 (c) 9.37° , estável. (d) 1.617 m/s^2 .
- (b) Cilindro: $10g/93 \approx 1.05 \text{ m/s}^2$. Carrinho: $20g/93 \approx 2.11 \text{ m/s}^2$.
- $R_n = mg\cos\theta$, $\ddot{x} = -g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$
- (a) A posição do centro de massa é $(x\hat{i} + y\hat{j})/2$ e a velocidade do centro de massa é a derivada dessa expressão. Substituindo $x = L\cos\theta$ e $y = L\sin\theta$ obtém-se o resultado.
 (b) $\frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$ (c) $\frac{L}{2}mg\sin\theta$ (d) $\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\cos\theta$
 (e) $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right)}$ (f) 0.3977 s .
- (a) Energia cinética:
 $\frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + a^2b^2\sin^2(bt) - 2abl\dot{\theta}\sin\theta\sin(bt))$

Energia potencial: $m g (a \cos(b t) - l \cos \theta)$

$$(b) \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (a b^2 \cos(\omega t) - g)$$

(c) Se $a b^2 \leq g$, o equilíbrio é estável, caso contrário, o equilíbrio é instável.

10. (a) $E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad U = m g y$

(b) $\frac{d(I \dot{\theta})}{dt} = 0$, que implica $I \dot{\theta} = \text{constante}$.

(c) 0.465 s^{-1}

11. (a) A equação de Lagrange é: $\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0$, que implica $m r^2 \dot{\theta}$ constante.

(b) $\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{G M}{r^2}$, onde L , m , G e M são constantes.