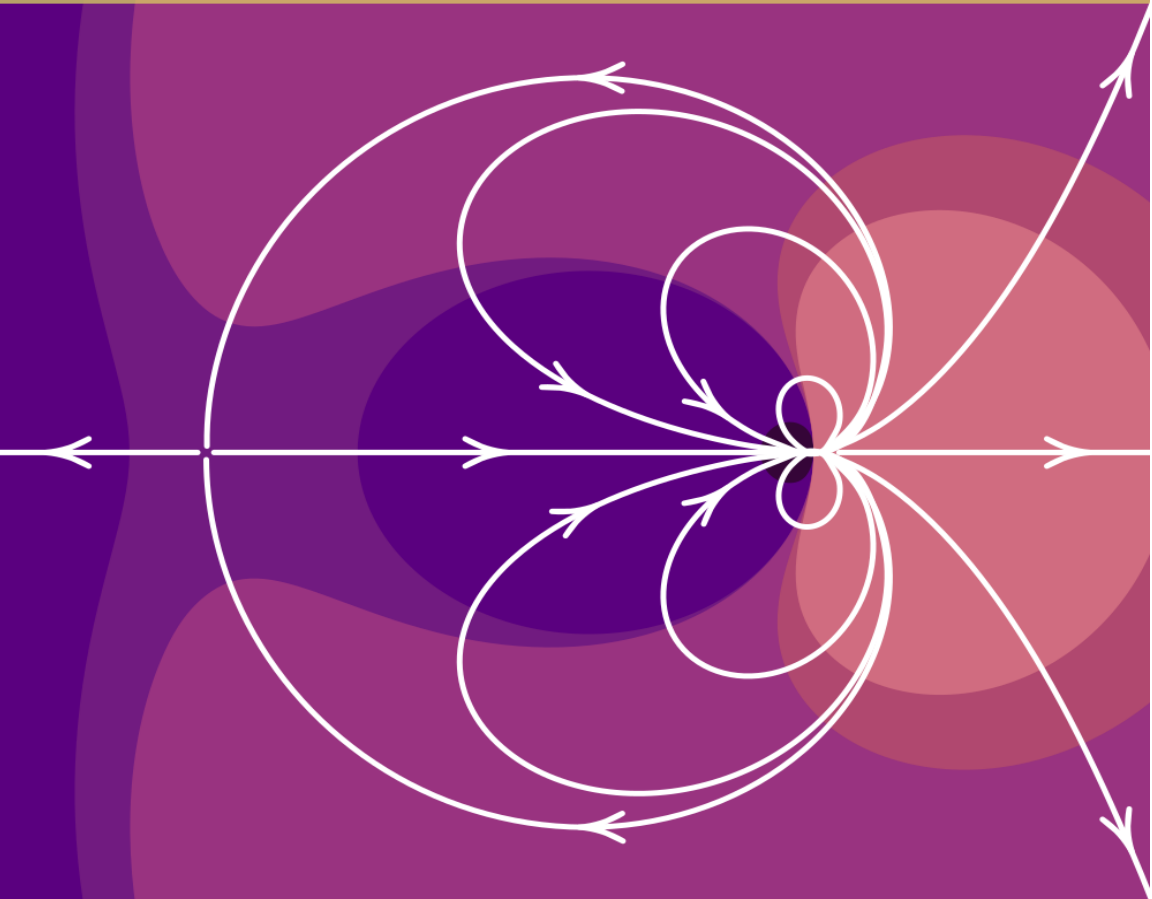


# Problemas resuolvidos de Eletromagnetismo e Circuitos



**Jaime E. Villate**  
**Luís Miguel Martelo**



# **Problemas resolvidos de Eletromagnetismo e Circuitos**

**Jaime E. Villate**  
**Luís Miguel Martelo**  
Faculdade de Engenharia  
Universidade do Porto

## **Problemas resolvidos de Eletromagnetismo e Circuitos**

Copyright (c) 2023, Jaime E. Villate, Luís Miguel Martelo

A versão mais recente deste livro está disponível em

<https://villate.org/eletromagnetismo>

onde pode ser consultado, copiado e reproduzido livremente, respeitando os termos da *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 4.0). Para obter uma cópia desta licença, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Edição dos autores.

ISBN 978-972-752-318-4

DOI: 10.24840/978-972-752-318-4

<https://doi.org/10.24840/978-972-752-318-4>

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>Lista de símbolos e notações</b>	<b>vii</b>
<b>1 Força elétrica</b>	<b>1</b>
<b>2 Cálculo do campo elétrico</b>	<b>13</b>
<b>3 Potencial eletrostático</b>	<b>21</b>
<b>4 Energia eletrostática e capacidade</b>	<b>29</b>
<b>5 Força eletromotriz, corrente e resistência</b>	<b>39</b>
<b>6 Circuitos de corrente contínua</b>	<b>49</b>
<b>7 Força magnética</b>	<b>65</b>
<b>8 Cálculo do campo magnético</b>	<b>75</b>
<b>9 Indução eletromagnética</b>	<b>85</b>
<b>10 Circuitos de corrente alternada</b>	<b>93</b>
<b>11 Ondas eletromagnéticas</b>	<b>103</b>



# Prefácio

Este livro complementa o livro Eletromagnetismo e Circuitos, dos mesmos autores. Mostra-se a resolução dos primeiros problemas propostos em cada capítulo desse livro. Uma parte muito importante na aprendizagem da Física é a resolução de problemas; alguns dos problemas poderão ser resolvidos pelos estudantes após terem estudado o respetivo capítulo, mas quando houver dificuldades será conveniente consultar a resolução neste livro. Também é recomendável a todos os estudantes que comparem as suas próprias resoluções com as resoluções neste livro.

Os problemas resolvidos neste livro, deveriam ser abordados após terem sido estudados os problemas resolvidos no Eletromagnetismo e Circuitos, onde são designados de exemplos. Este livro também poderá ser útil, de forma independente do Eletromagnetismo e Circuitos, para quem já conheça a teoria envolvida mas esteja interessado em resolver mais problemas.

Os primeiros 5 capítulos são uma introdução à eletrostática e à teoria da eletricidade. O capítulo 6 é sobre circuitos de corrente contínua. Os capítulos 7 e 8 são sobre magnetismo e magnetostática. No capítulo 9 é abordada a indução eletromagnética. O capítulo 10 é sobre circuitos de corrente alternada e o tema do capítulo 11 são as ondas eletromagnéticas.

A formatação do livro e todas as figuras foram feitas pelos autores, usando vários pacotes de Software Livre. Usou-se o sistema *LaTeX* para o texto e as figuras foram feitas com o módulo *physics.asy* ([urlhttps://villate.org/software/](https://villate.org/software/)) para *Asymptote*. Os gráficos de funções e de linhas de campo foram feitos no Sistema de Computação Algébrica *Maxima*; este sistema foi também usado para conferir as resoluções dos exemplos e problemas. Os retratos dos físicos na abertura dos capítulos são da autoria de Jaime Villate e foram feitos a lápis de grafite, baseados em fotografias encontradas na Web.

Jaime E. Villate e Luís Miguel Martelo  
Porto, dezembro de 2023





# Lista de símbolos e notações

## Notações

$A, B \dots$	pontos no espaço, curvas, superfícies e sólidos
$\mathbf{A}, \mathbf{B} \dots$	fasores
$A, B \dots a, b \dots$	unidades
$\vec{A}, \vec{B} \dots \vec{a}, \vec{b} \dots$	vetores
$\hat{A}, \hat{B} \dots \hat{a}, \hat{b} \dots$	versores
$A, B \dots a, b \dots$	variáveis, funções ou módulos dos respectivos vetores
$\cdot$	produto escalar entre vetores
$\times$	produto vetorial entre vetores ou produto entre números
$\approx$	aproximadamente igual a
$\sim$	da ordem de; comportamento assintótico em ordem a uma dada variável
$\propto$	proporcional a
$\gtrsim$	aproximadamente igual a ou maior do que
$\lesssim$	aproximadamente igual a ou menor do que
$\frac{d}{dx}$	derivada ordinária
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivada parcial
$D_{\hat{e}}$	derivada direcional, na direção do versor $\hat{e}$
$f'$	derivada ordinária de uma função de uma variável
$\bar{f}$	valor médio de $f$
$\vec{\nabla}$	operador nabla; gradiente
$\vec{\nabla} \cdot$	divergência
$\vec{\nabla} \times$	rotacional
$\nabla^2$	laplaciano
$^{\circ}$	grau (unidade de ângulo)
$^{\circ}\text{C}$	grau Celsius (unidade de temperatura)

## Símbolos

$A$	área de uma superfície
$A$	ampere (unidade de corrente elétrica)
$\vec{B}$	campo magnético
$C$	capacidade elétrica
$C$	coulomb (unidade de carga)
$c$	velocidade da luz
$\vec{D}$	deslocamento elétrico
$dA$	elemento infinitesimal de área
$d\vec{A}$	vetor infinitesimal de área
$dq$	elemento infinitesimal de carga
$d\vec{r}$	vetor deslocamento infinitesimal
$ds$	comprimento infinitesimal de arco
$dv$	elemento infinitesimal de volume
$\vec{E}$	campo elétrico
$E_k$	energia cinética
$E_p$	energia potencial
$e$	carga elementar
$e$	número de Euler (base do logaritmo natural)
$eV$	eletrão-volt (unidade de energia)
$\vec{F}$	força
$F$	farad (unidade de capacidade)
$f$	frequência
$G$	gauss (unidade alternativa de campo magnético)
$H$	henry (unidade de indutância)
$h$	constante de Planck
$I$	intensidade da corrente elétrica
$I_C$	corrente através de uma curva fechada $C$
$I_d$	corrente de deslocamento
$i$	unidade imaginária $\sqrt{-1}$
$\hat{i}$	versor na direção do eixo $x$
$\vec{J}$	densidade de corrente elétrica
$\vec{J}_0$	densidade de corrente livre (sem incluir correntes nos átomos)
$J$	joule (unidade de energia)
$\hat{j}$	versor na direção do eixo $y$
$K$	constante dielétrica
$k$	constante de Coulomb; número de onda angular

---

$k_m$	constante magnética
$\hat{k}$	versor na direção do eixo $z$
$L$	indutância
$\ell$	comprimento
$\vec{M}$	momento de uma força ou binário
$M$	coeficiente de indução mútua
$\vec{m}$	momento magnético
$m$	massa
$m$	metro (unidade de comprimento)
$n$	índice de refração
$\hat{n}$	versor normal a uma superfície
$P$	potência
$\vec{P}$	polarização elétrica
$\vec{p}$	momento dipolar
$\hat{p}$	versor de polarização de uma onda plana
$Q$	fator de qualidade num circuito $LCR$
$q$	carga
$R$	resistência elétrica
$\mathcal{R}$	função de resposta em frequência
$r$	coordenada radial polar ou esférica
$\vec{r}$	vetor posição
$\hat{r}$	versor na direção radial polar ou esférica
$\vec{S}$	vetor de Poynting
$S$	densidade do fluxo de energia (módulo de $\vec{S}$ )
$s$	segundo (unidade de tempo)
SI	sistema internacional de unidades
$T$	período de uma onda harmónica
$T_c$	temperatura crítica
$T$	tesla (unidade de campo magnético)
$t$	tempo
$t_c$	constante de tempo
$u$	densidade volúmica de energia eletromagnética
$V$	potencial eletrostático
$V$	volt (unidade de potencial eletrostático)
$\vec{v}$	velocidade
$W$	trabalho
$W$	watt (unidade de potência)
$X$	reactância
$x$	coordenada cartesiana
$Y$	admitância
$y$	coordenada cartesiana
$Z$	impedância
$z$	coordenada cartesiana

## Símbolos em letras gregas

$\alpha$	coeficiente de temperatura
$\beta$	velocidade relativa à velocidade da luz
$\gamma$	fator de dilatação de Lorentz
$\epsilon_0$	permitividade elétrica do vácuo
$\epsilon$	força eletromotriz
$\zeta$	variável característica
$\eta$	variável característica
$\theta$	coordenada zenital esférica
$\hat{\theta}$	versor zenital esférico
$\lambda$	densidade linear de carga; comprimento de onda
$\mu_e$	mobilidade elétrica
$\mu$	permeabilidade magnética
$\mu_0$	permeabilidade magnética do vácuo
$\mu$	prefixo micro ( $10^{-6}$ )
$\pi$	relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro
$\rho$	densidade volúmica de carga
$\rho_e$	resistividade elétrica
$\rho_m$	densidade volúmica de massa
$\rho_P$	densidade volúmica da carga de polarização
$\varrho$	coordenada radial cilíndrica
$\hat{\varrho}$	versor radial cilíndrico
$\sigma$	densidade superficial de carga
$\sigma_e$	condutividade elétrica
$\sigma_P$	densidade superficial da carga de polarização
$\tau$	constante de tempo
$\phi$	coordenada azimutal polar, cilíndrica ou esférica
$\Phi$	fluxo magnético
$\Phi_e$	fluxo de energia de uma onda eletromagnética
$\varphi$	ângulo de fase de uma função sinusoidal ou de um número complexo
$\phi$	coordenada angular polar; coordenada azimutal cilíndrica ou esférica
$\hat{\phi}$	versor azimutal polar, cilíndrico ou esférico
$\chi_e$	susceptibilidade elétrica
$\chi_m$	susceptibilidade magnética
$\Psi$	fluxo elétrico
$\Omega$	ângulo sólido
$\Omega$	ohm (unidade de resistência)
$\omega$	frequência angular

---

## Abreviaturas

ef	eficaz (valor eficaz de uma variável)
e.g.	do latim <i>exempli gratia</i> , que significa <i>por exemplo</i>
f.e.m.	força eletromotriz
i.e.	do latim <i>id est</i> , que significa <i>isto é</i>
Im	parte imaginária de um número complexo
in	entrada
int	interna (valor de uma variável no interior de uma região)
máx	máximo (valor máximo de uma variável)
mín	mínimo (valor mínimo de uma variável)
out	saída
ox	oxidação
Re	parte real de um número complexo
red	redução
th	Thévenin



# 1 Força elétrica

## Problema 1.1

A unidade SI de carga elétrica é o coulomb (C). Mesmo para objetos do dia a dia, 1 C é uma carga elétrica enorme.

(a) Duas cargas, consideradas pontuais, de 1 C cada estão à distância de 10 cm. Calcule a força elétrica entre elas. Compare e comente o valor obtido com o peso de um Boeing 747, considerando a sua massa como sendo de 180 toneladas.

(b) Considere duas cargas elétricas iguais  $q$  à distância de 10 cm. Calcule o valor de  $q$  de modo a que força entre as cargas seja de 100 N. Comente o valor obtido.

**Resolução.** (a). Em unidades SI, a força entre as cargas é:

$$F = \frac{8.988 \times 10^9 \times 1 \times 1}{0.1^2} = 8.99 \times 10^{11} \text{ N}$$

Usando o valor padrão da aceleração da gravidade, o peso do Boeing é

$$P = 180 \times 10^3 \times 9.807 = 1.77 \times 10^6 \text{ N}$$

A força eléctrica seria equivalente ao peso de aproximadamente meio milhão de aviões Boeing 747.

(b) A partir da lei de Coulomb, com  $q_1 = q_2 = q$ , obtém-se:

$$q = \sqrt{\frac{Fd^2}{k}} = \sqrt{\frac{100 \times 0.1^2}{8.988 \times 10^9}} = 1.05 \times 10^{-5} \text{ C} = 10.5 \text{ } \mu\text{C}$$

## Problema 1.2

Uma esfera de cobre possui um volume de  $1 \text{ dm}^3$  e encontra-se eletricamente neutra. Dados do cobre: densidade volúmica de massa  $\rho_m = 8.920 \text{ g.cm}^{-3}$ , número atômico  $Z = 29$ , massa atômica  $A = 63.546$ .

(a) Calcule o número de elétrons existentes na esfera, bem como a sua carga.

(b) Caso o número de elétrons sofra uma variação de 1%, determine a carga elétrica que a esfera adquire.

(c) Considerando agora uma segunda esfera idêntica à inicial, altera-se em cada uma o seu número de elétrons de 1%. Calcule a força elétrica entre as esferas a uma distância de 15 cm. Determine a massa duma esfera com peso igual a essa força e compare-a com a massa da Terra ( $5.98 \times 10^{24}$  kg).

(d) Calcule o número de elétrons a serem removidos (injetados) de modo à esfera inicial ficar eletrizada positivamente (negativamente) com carga  $1 \mu\text{C}$  ( $-1 \mu\text{C}$ ). Compare com o número total de elétrons inicial.

(e) Comente os resultados anteriores.

**Resolução.** (a) O número de elétrons  $N_e$  é igual ao número de átomos  $N$  vezes o número atômico  $Z$  (número de elétrons de um átomo neutro). O número de átomos  $N$  calcula-se dividindo a massa da esfera, em gramas, pela massa de um átomo, em gramas (massa atômica dividida pelo número de Avogadro):

$$N_e = \frac{8.920 \times 10^3}{63.546/6.022 \times 10^{23}} \times 29 = 2.451 \times 10^{27}$$

e a carga desses elétrons obtém-se multiplicando pela carga elementar, com sinal negativo:

$$Q = -2.451 \times 10^{27} \times 1.602 \times 10^{-19} = -3.93 \times 10^8 \text{ C}$$

(b) A esfera adquire carga positiva igual a 0.01 vezes o valor absoluto da carga dos elétrons calculada na alínea anterior, ou seja, fica com carga  $3.93 \times 10^6 \text{ C}$ .

(c) Como será explicado num capítulo posterior, a força entre esferas com carga distribuída uniformemente pode ser calculada admitindo cargas pontuais concentradas no centro das esferas. Usando a lei de Coulomb para duas cargas pontuais iguais à que foi calculada na alínea anterior

$$F = \frac{8.988 \times 10^9 \times (3.93 \times 10^6)^2}{0.15^2} = 6.17 \times 10^{24} \text{ N}$$

A massa de uma esfera que tivesse esse peso seria,

$$m = \frac{6.17 \times 10^{24}}{9.807} = 6.29 \times 10^{23} \text{ kg}$$

E a sua relação com a massa da Terra é

$$\frac{m}{M} = \frac{6.29 \times 10^{23}}{5.98 \times 10^{24}} = 0.11$$



ou seja, a massa é 11 % da massa da Terra.

(d) O número de elétrons que deve ser removido é a carga pretendida dividida pela carga elementar:

$$\Delta N_e = \frac{1 \times 10^{-6}}{1.602 \times 10^{-19}} = 6.242 \times 10^{12}$$

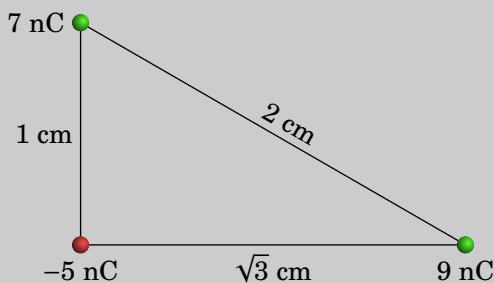
e comparando com o número de elétrons calculado na alínea a,

$$\frac{\Delta N_e}{N_e} = \frac{6.242 \times 10^{12}}{2.451 \times 10^{27}} = 2.55 \times 10^{-15} = 2.55 \times 10^{-13} \%$$

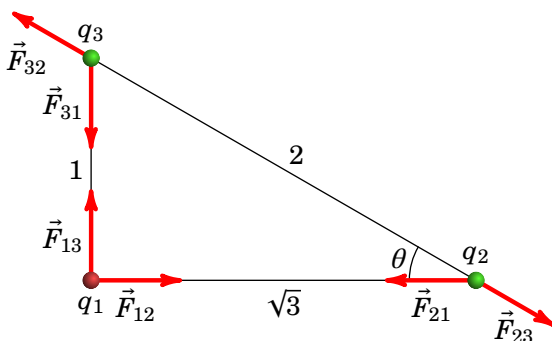
(e) A carga elétrica dos elétrons de um objeto macroscópico é gigantesca ( $\sim 10^8$  C), mas como a carga elétrica dos prótons é igual e de sinal oposto, um objeto do dia-a-dia encontra-se normalmente neutro. A variação de 1 % do número de elétrons provocaria uma carga macroscópica enorme ( $\sim 10^6$  C). Para termos uma carga macroscópica típica ( $1 \mu\text{C}$ ), é suficiente uma variação muitíssimo pequena do número de elétrons ( $2.55 \times 10^{-13} \%$ ).

### Problema 1.3

Determine a força elétrica resultante sobre cada uma das cargas representadas na figura.



**Resolução.** A figura seguinte mostra os três diagramas de forças para as três partículas, admitindo que a carga  $q_1$  é a de  $-5 \text{ nC}$ , a carga  $q_2$  é a de  $9 \text{ nC}$  e  $q_3$  é a de  $7 \text{ nC}$ .



Em cada vetor  $\vec{F}_{ij}$  o primeiro índice  $i$  indica o número da carga onde a força atua, e o segundo índice  $j$  é o número da carga que produz essa força. As forças elétricas verificam a lei de ação e reação:  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ , e em módulo,  $F_{ij} = F_{ji}$ .

Para facilitar as contas, convém manter as unidades dadas para as cargas (nC) e as distâncias (cm) e mudar o valor da constante  $k$  para essas unidades:

$$k = 8.988 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 8.988 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot (10^2 \text{ cm})^2}{(10^9 \text{ nC})^2} = 0.08988 \frac{\text{mN} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

Se usarmos  $k = 0.08988$ , com cargas em nC e distâncias em cm, as forças obtidas estarão em mN. A lei de Coulomb permite calcular os módulos das seis forças na figura acima:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{0.08988 \times 5 \times 9}{3} = 1.3482 \text{ mN} \\ F_{13} &= \frac{0.08988 \times 5 \times 7}{1} = 3.1458 \text{ mN} \\ F_{23} &= \frac{0.08988 \times 9 \times 7}{4} = 1.4156 \text{ mN} \end{aligned}$$

Observando a figura, conclui-se que o cosseno e o seno do ângulo  $\theta$  são:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

Fixando o eixo dos  $x$  de  $q_1$  para  $q_2$  e o eixo dos  $y$  de  $q_1$  para  $q_3$ , as forças resultantes,  $\vec{F}_i$ , sobre cada uma das três cargas obtêm-se observando o

diagrama das forças:

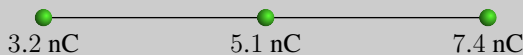
$$\vec{F}_1 = F_{12} \hat{i} + F_{13} \hat{j} = (1.35 \hat{i} + 3.15 \hat{j}) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_2 = (F_{23} \cos \theta - F_{21}) \hat{i} - F_{23} \sin \theta \hat{j} = (-0.122 \hat{i} - 0.708 \hat{j}) \text{ mN}$$

$$\vec{F}_3 = -F_{32} \cos \theta \hat{i} + (F_{32} \sin \theta - F_{31}) \hat{j} = (-1.23 \hat{i} - 2.44 \hat{j}) \text{ mN}$$

### Problema 1.4

Três cargas pontuais estão ligadas por dois fios isoladores de 2.65 cm cada (ver figura). Calcule a tensão em cada fio.



**Resolução.** Tal como no problema anterior, usaremos  $k = 0.08988$ , as cargas em nC e as distâncias em cm; as forças assim obtidas estarão em mN.

Sobre cada uma das partículas atuam forças elétricas e tensões nos fios aos que estejam ligadas. Como este sistema está em equilíbrio, a força resultante sobre cada uma das 3 partículas deverá ser nula. Como tal, temos 3 condições de equilíbrio com apenas 2 incógnitas, que são as tensões nos dois fios.

Basta então considerar apenas as condições de equilíbrio para duas das partículas. Os diagramas de forças para as cargas de 3.2 nC e 7.4 nC (designadas de  $q_1$  e  $q_3$ ) são os seguintes:



onde  $T_a$  é a tensão no fio do lado esquerdo e  $T_b$  a tensão no fio do lado direito. Observe-se que  $q_1$  não está em contacto com o fio da direita e, por isso,  $\vec{T}_b$  não atua sobre essa partícula. De forma análoga para  $q_3$ . No entanto, as forças elétricas atuam à distância, sem ter de existir contacto entre as partículas; sobre cada uma das 3 partículas atuam as forças elétricas produzidas pelas outras duas partículas.

A condição de equilíbrio para a carga  $q_1$  é

$$T_a = F_{12} + F_{13}$$

Como tal, a tensão no fio do lado esquerdo é (unidades SI):

$$T_a = 0.08988 \left( \frac{3.2 \times 5.1}{2.65^2} + \frac{3.2 \times 7.4}{(2 \times 2.65)^2} \right) = 0.285 \text{ mN} = 285 \text{ } \mu\text{N}$$

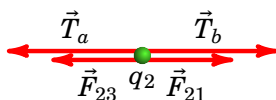
A condição de equilíbrio para a carga  $q_3$  é

$$T_b = F_{31} + F_{32}$$

que conduz à tensão no fio do lado direito:

$$T_b = 0.08988 \left( \frac{7.4 \times 5.1}{2.65^2} + \frac{7.4 \times 3.2}{(2 \times 2.65)^2} \right) = 0.559 \text{ mN} = 559 \text{ } \mu\text{N}$$

Se tivéssemos optado por usar a condição de equilíbrio para a partícula  $q_2$ , no diagrama das forças há que ter em conta que atuam as tensões dos dois fios, porque essa partícula está em contacto com os dois fios:



E a respetiva condição de equilíbrio é

$$T_a + F_{23} = T_b + F_{21}$$

equação essa que podia ter sido resolvida em simultâneo com alguma das duas equações para  $q_1$  ou  $q_3$ , obtendo-se a mesma resposta, já que esta terceira condição obtém-se subtraindo as duas primeiras condições, e tendo em conta que para quaisquer índices  $i$  e  $j$ ,  $F_{ij}$  é igual a  $F_{ji}$ .

### Problema 1.5

A soma dos valores de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  é  $q_1 + q_2 = 10 \text{ } \mu\text{C}$ . Quando estão afastadas 3 m entre si, o módulo da força exercida por cada uma delas sobre a outra é 24 mN. Determine os valores de  $q_1$  e  $q_2$ , se: (a) Ambas cargas são positivas. (b) Uma das cargas é positiva e a outra negativa.

**Resolução.** Para poder usar os números simples do enunciado (10 e 3), usaremos as mesmas unidades do enunciado: cargas em  $\mu\text{C}$ , distâncias em metros e forças em mN. Como tal, o valor que usaremos para a constante de Coulomb será:

$$k = 8.988 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 8.988 \times 10^9 \frac{10^3 \text{ mN} \cdot \text{m}^2}{10^{12} \mu\text{C}^2} = 8.988 \frac{\text{mN} \cdot \text{m}^2}{\mu\text{C}^2}$$

A primeira condição, nas unidades escolhidas, é:

$$q_1 + q_2 = 10$$

Observe-se que  $q_1$  e  $q_2$  poderão ter valores positivos ou negativos.

(a) Se as duas cargas são positivas, o produto entre elas,  $q_1 q_2$ , também é positivo. Como tal, na lei de Coulomb o produto dos valores absolutos das cargas pode ser substituído pelo produto das cargas:  $|q_1| |q_2| = q_1 q_2$ , e a condição para que o módulo da força seja 24 mN é:

$$\frac{8.988 q_1 q_2}{9} = 24$$

Substituindo  $q_2$  por  $10 - q_1$  nesta equação, obtém-se a equação quadrática:

$$8.988 q_1^2 - 89.88 q_1 + 216 = 0$$

e a fórmula resolvente para equações quadráticas conduz aos valores das duas cargas:

$$q_1 = 4.02 \mu\text{C} \quad q_2 = 5.98 \mu\text{C}$$

As duas cargas aparecem como possíveis soluções para  $q_1$ , porque a designação de qual das partículas é a 1 e qual a 2 é arbitrária.

(b) Quando os sinais das cargas são opostos,  $q_1 q_2$  será negativo. Como tal, o produto dos valores absolutos deverá ser substituído por:  $|q_1| |q_2| = -q_1 q_2$ , e a condição para a força é

$$-\frac{8.988 q_1 q_2}{9} = 24$$

Substituindo  $q_2$  por  $10 - q_1$  nesta equação, obtém-se a equação quadrática:

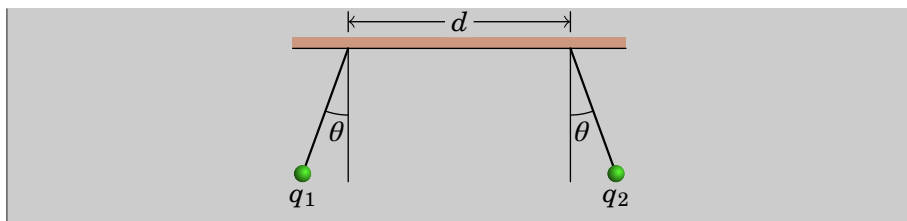
$$8.988 q_1^2 - 89.88 q_1 - 216 = 0$$

e as duas cargas são:

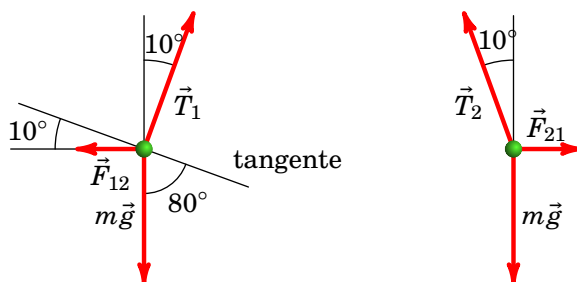
$$q_1 = -2.00 \mu\text{C} \quad q_2 = 12.00 \mu\text{C}$$

### Problema 1.6

Duas pequenas esferas condutoras, com cargas  $q_1 = +300 \text{ nC}$  e  $q_2 = +500 \text{ nC}$ , e com a mesma massa  $m$ , são coladas a dois fios isoladores, cada um com 8 cm de comprimento. Os fios são logo colados numa barra horizontal, em dois pontos a uma distância  $d = 15 \text{ cm}$  entre si. A repulsão eletrostática entre as cargas faz com que os dois fios se inclinem um ângulo  $\theta = 10^\circ$  em relação à vertical. Determine o valor da massa  $m$ .



**Resolução.** Os diagramas de corpo livre das duas esferas são os seguintes:



onde  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  são as tensões nos dois fios,  $\vec{F}_{12}$  é a força elétrica da esfera 2 sobre a esfera 1 e  $\vec{F}_{21}$  é a força elétrica da esfera 1 sobre a esfera 2.

Realmente basta um dos diagramas para determinar o valor de  $m$ . E como a soma das 3 forças externas sobre cada esfera é nula, por estarem em repouso, e os módulos das forças elétricas  $\vec{F}_{21}$  e  $\vec{F}_{12}$  são iguais, os módulos das duas tensões são iguais e os dois diagramas são equivalentes.

A distância entre as duas esferas (em metros) é,

$$r = 0.15 + 2 \times 0.08 \times \sin(10^\circ) = 0.17778$$

E, usando a lei de Coulomb,

$$F_{21} = F_{12} = \frac{8.988 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-7}}{0.17778^2} = 0.042657 \text{ N}$$

A soma das 3 forças igual a zero implica que a soma das suas componentes, ao longo de qualquer direção, é nula. Em particular, a soma das componentes na direção tangente indicada na figura é igual a:

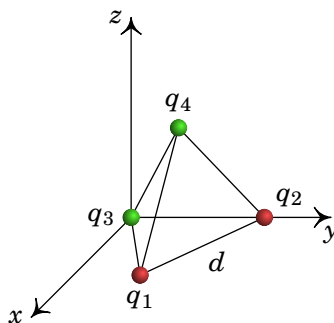
$$\begin{aligned} m g \cos(80^\circ) - F_{12} \cos(10^\circ) &= 0 \\ m &= \frac{F_{12} \cos(10^\circ)}{g \cos(80^\circ)} = \frac{0.042657 \cos(10^\circ)}{9.807 \cos(80^\circ)} = 0.0247 \text{ kg} \end{aligned}$$

A massa das esferas é de 24.7 gramas.

### Problema 1.7

Quatro cargas pontuais  $q_1 = -12 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -5 \text{ nC}$ ,  $q_3 = 9 \text{ nC}$  e  $q_4 = 27 \text{ nC}$  encontram-se nos vértices de um tetraedro regular de aresta  $d = 21 \text{ cm}$ . Determine o módulo da força resultante sobre a carga  $q_4$ .

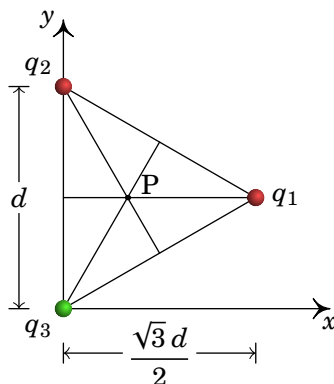
**Resolução.** Os três eixos coordenados podem ser escolhidos como mostra a figura seguinte, com a carga  $q_3$  na origem, a carga  $q_2$  no eixo dos  $x$  e a carga  $q_1$  sobre o plano  $xz$ .



Como tal, os vetores posição de  $q_3$  e  $q_2$  são

$$\vec{r}_3 = \vec{0} \quad \vec{r}_2 = d \hat{i}$$

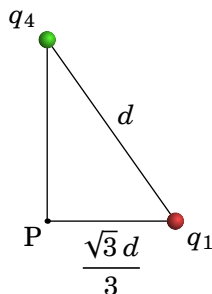
A figura seguinte mostra as três cargas  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  no plano  $xy$ , nos vértices dum triângulo equilátero de aresta  $d$ .



O vetor posição da carga  $q_1$  é então,

$$\vec{r}_1 = \frac{d}{2} (\sqrt{3} \hat{i} + \hat{j})$$

Na figura anterior, o ponto P encontra-se a uma distância  $\sqrt{3}d/6$  do eixo dos  $y$  e a uma distância  $\sqrt{3}d/3$  de  $q_1$ . A carga  $q_4$  encontra-se-á por cima do ponto P. A figura seguinte mostra o ponto P e as cargas  $q_1$  e  $q_4$ , com uma distância  $d$  entre elas.



A altura desse triângulo retângulo é

$$\sqrt{d^2 - \frac{3}{9}d^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

Como tal, o vetor posição da carga  $q_4$  é

$$\vec{r}_4 = d \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right)$$

Os três versores que determinam a direção de  $q_4$  relativa a cada uma das outras três cargas são:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{4/1} &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \hat{i} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \\ \hat{r}_{4/2} &= \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} - \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \\ \hat{r}_{4/3} &= \frac{\sqrt{3}}{6} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \hat{k} \end{aligned}$$

As 3 forças elétricas sobre a partícula 4 calculam-se a partir da lei de Coulomb e a força resultante é a soma dessas 3 forças

$$\vec{F}_4 = \frac{kq_4}{d^2} (q_1 \hat{r}_{4/1} + q_2 \hat{r}_{4/2} + q_3 \hat{r}_{4/3})$$



Como a aresta do tetraedro é dada em centímetros, convém usar a constante  $k$  nas unidades seguintes:

$$k = 89.88 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

O resultado obtido para a força sobre a partícula 4 é

$$\vec{F}_4 = 5.5029 \left( \frac{14\sqrt{3}}{3} \hat{i} + 7 \hat{j} - \frac{8\sqrt{6}}{3} \hat{k} \right) \implies F_4 = 69.0 \mu\text{N}.$$

### Problema 1.8

Um elétron desloca-se no sentido positivo do eixo dos  $x$  sob a ação de um campo elétrico. A expressão da sua velocidade é  $1300 e^{-3x}$ , onde a coordenada  $x$  é dada em metros e a velocidade em m/s. Determine a expressão do campo elétrico  $E_x$ , ao longo do eixo dos  $x$ , em N/C (a massa dum elétron é  $9.109 \times 10^{-31}$  kg).

**Resolução.** A partir da expressão da velocidade encontra-se a expressão para a aceleração em função de  $x$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = 1300 e^{-3x} (-3900 e^{-3x}) \\ &= -507 \times 10^4 e^{-6x} \end{aligned}$$

E a expressão do campo elétrico é:

$$\begin{aligned} E &= \frac{F}{q} = -\frac{ma}{e} = \frac{9.109 \times 10^{-31} \times 507 \times 10^4}{1.602 \times 10^{-19}} e^{-6x} \\ &= 28.8 \times 10^{-6} e^{-6x} \left( \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \end{aligned}$$

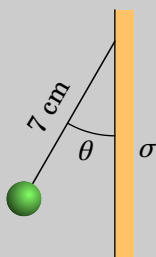
Observe-se que o elétron desloca-se no sentido positivo do eixo dos  $x$  e o campo também aponta nesse sentido. A carga negativa do elétron implica força no sentido oposto (aceleração no sentido negativo do eixo dos  $x$ ), que faz abrandar o elétron de forma que a sua velocidade aproxima-se assintoticamente de 0.



## 2 Cálculo do campo elétrico

### Problema 2.1

Uma pequena esfera com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio isolador de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem densidade superficial de carga constante,  $\sigma = 17 \text{ nC/cm}^2$ , e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com o plano vertical.



**Resolução.** O campo elétrico produzido pelo plano é horizontal, com módulo constante  $E = 2\pi k\sigma$ . A força elétrica sobre a carga pontual positiva é horizontal, para a esquerda, e com módulo (unidades SI):

$$F_e = 2\pi k\sigma q = 2 \times 8.988 \times 10^9 \times 17 \times 10^{-5} \times 50 \times 10^{-9} \pi = 0.48002 \text{ N}$$

Sobre a esfera atuam três forças externas: a força elétrica, a tensão no fio, e o peso. O lado esquerdo da figura seguinte mostra essas forças.



Como a carga pontual fica em equilíbrio, a soma dessas 3 forças deverá ser nula. O problema podia ser resolvido definindo um sistema de dois eixos e

resolvendo as duas equações das somas das componentes das forças nos dois eixos iguais a zero. No entanto, é mais fácil observar que para que a soma dos 3 vetores seja nula, se forem colocados um a seguir ao outro, como no lado direito da figura acima, deverão formar um triângulo, que neste caso é retângulo com catetos de comprimento  $mg$  e  $F_e$ . Como tal, a tangente do ângulo  $\theta$  deverá ser igual a  $F_e/(mg)$ , e o ângulo  $\theta$  será:

$$\theta = \arctg\left(\frac{F_e}{mg}\right) = \arctg\left(\frac{0.48002}{0.025 \times 9.807}\right) = 62.9^\circ$$

### Problema 2.2

Numa região do espaço há três cargas pontuais,  $q_1 = -2 \mu\text{C}$  no ponto  $(x, y, z) = (3, 1.5, 2.3)$  (em cm),  $q_2 = +3 \mu\text{C}$  em  $(x, y, z) = (3.2, 1.1, 1.5)$  e  $q_3 = -4 \mu\text{C}$  em  $(x, y, z) = (3.7, 1.2, 2.2)$ . Calcule o fluxo elétrico através de uma superfície esférica de raio 3 cm, com centro no ponto  $(1, 0, 0)$ .

**Resolução.** De acordo com a lei de Gauss, o fluxo através da superfície esférica será igual a  $4\pi k$  vezes a carga total dentro da superfície esférica. Para determinar quais das três cargas estão no interior da superfície esférica, calculam-se as suas distâncias até o centro da superfície esférica:

$$d_1 = \sqrt{(3-1)^2 + 1.5^2 + 2.3^2} = 3.397 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{(3.2-1)^2 + 1.1^2 + 1.5^2} = 2.881 \text{ cm}$$

$$d_3 = \sqrt{(3.7-1)^2 + 1.2^2 + 2.2^2} = 3.684 \text{ cm}$$

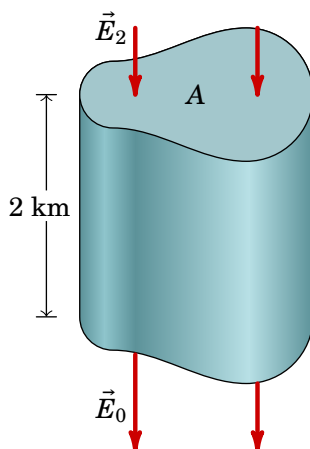
Como a única dessas distâncias que é menor que o raio da superfície esférica é  $d_2$ , a única carga no interior da superfície esférica é  $q_2$  e o fluxo elétrico através da superfície esférica é

$$\Psi = 4\pi k q_2 = 339 \times 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

### Problema 2.3

Na atmosfera existe um campo elétrico que aponta na vertical, para baixo. A nível do mar, o módulo desse campo, é aproximadamente 120 N/C e diminui em função da altura; 2 km acima do nível do mar o campo é aproximadamente 66 N/C. Que pode concluir acerca do sinal das cargas livres nos dois primeiros quilómetros da atmosfera? Calcule a densidade volúmica de carga média nessa região.

**Resolução.** A lei de Gauss relaciona as cargas livres numa região com o fluxo elétrico através da fronteira dessa região. Como tal, para determinar a carga livre que existe na atmosfera, devemos encontrar uma superfície fechada onde seja possível calcular o fluxo elétrico. Com os dados do problema, podemos calcular facilmente o fluxo numa superfície horizontal (perpendicular ao campo) que esteja a uma altura do nível do mar ou 2 km por cima. Usaremos uma superfície fechada com duas tampas horizontais iguais de área  $A$ , uma ao nível do mar e a outra 2 km por cima, com paredes laterais verticais, tal como mostra a figura seguinte:



Na tampa de cima o campo elétrico,  $\vec{E}_2$ , tem módulo 66 N/C e aponta para dentro da superfície fechada. Como tal, nessa tampa há fluxo negativo igual a (unidades SI):

$$\Psi_2 = -66 A$$

Na tampa de baixo, o campo elétrico,  $\vec{E}_0$ , produz fluxo positivo porque aponta para fora da superfície fechada e o valor do fluxo nessa tampa é:

$$\Psi_0 = 120 A$$

Nas paredes laterais não há fluxo, porque as linhas de campo são tangentes a essa superfície. O fluxo total na superfície fechada é então:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_2 = 54 A$$

O resultado positivo permite-nos concluir que na atmosfera (dentro da superfície fechada escolhida) existem cargas livres positivas.

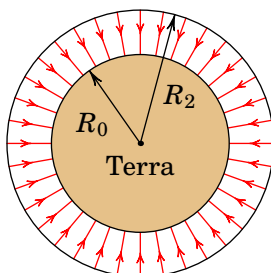
Aplicando a lei de Gauss obtém-se a carga no interior da superfície fechada:

$$\Psi = 54 A = 4\pi k q_{\text{int}} \implies q_{\text{int}} = \frac{54 A}{4 \times 8.988 \times 10^9 \pi} = 4.7810 \times 10^{-10} A$$

Como o volume da superfície fechada, em unidades SI, é igual a 2000 A, então a densidade volúmica de carga média é:

$$\rho = \frac{4.7810 \times 10^{-10} \text{ A}}{2000 \text{ A}} = 2.391 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

**Comentários:** Foi admitido que as linhas de campo, verticais, são paralelas entre si. Realmente as linhas verticais em dois pontos diferentes da Terra não são paralelas, porque são perpendiculares à superfície da Terra que é curva. Para obter maior precisão, a superfície fechada usada para aplicar a lei de Gauss poderia estar formada por duas esferas concêntricas: a própria superfície esférica da Terra, com raio de  $R_0 = 6371 \text{ km}$ , e a segunda superfície esférica com centro no centro da Terra e raio  $R_2 = 6373 \text{ km}$ , tal como mostra a figura seguinte.



O fluxo elétrico que sai do volume entre essas duas esferas é (unidades SI):

$$\Psi = 120 \times 4\pi R_0^2 - 66 \times 4\pi R_2^2$$

E a densidade volúmica de carga média será:

$$\rho = \frac{\Psi / (4\pi k)}{4\pi(R_2^3 - R_0^3)/3} = \frac{360 R_0^2 - 198 R_2^2}{4\pi k(R_2^3 - R_0^3)} = 2.388 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

Este resultado, mais correto, é muito semelhante ao resultado obtido admitindo linhas de campo paralelas, devido ao facto dos raios das duas esferas serem muito semelhantes.

### Problema 2.4

Uma carga pontual de 5 nC encontra-se a 6 cm de um fio retilíneo muito comprido, com densidade linear de carga constante, igual a 7 nC/cm. Calcule a força elétrica da carga sobre o fio (sugestão: calcule a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, a qual, pela lei de ação e reação, possui o mesmo módulo da força da carga sobre o fio).

**Resolução.** O campo elétrico de um fio retilíneo infinito, com carga linear  $\lambda$  constante é na direção radial desde o fio e tem módulo

$$E = \frac{2k\lambda}{d}$$

onde  $d$  é a distância desde o fio.

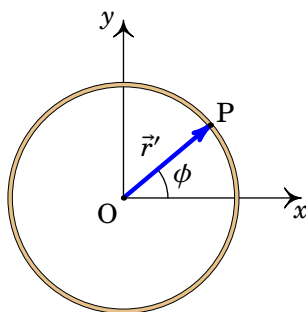
O módulo da força do fio sobre a carga pontual é (unidades SI):

$$F = qE = \frac{2k\lambda q}{d} = \frac{2 \times 8.988 \times 10^9 \times 7 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-9}}{6 \times 10^{-2}} = 1.05 \text{ mN}$$

### Problema 2.5

Um fio não-condutor no plano  $xy$ , forma uma circunferência de raio  $a$  com centro na origem. O fio tem densidade linear de carga não-uniforme  $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo em coordenadas polares, cuja origem é o centro da circunferência. Calcule o campo elétrico na origem.

**Resolução.** A figura seguinte mostra um ponto P no fio e o seu vetor posição  $\vec{r}'$ .



O vetor posição da origem, onde vai calcular-se o campo, é  $\vec{r} = \vec{0}$  e

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\vec{r}' = -a (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = a$$

O comprimento infinitesimal de arco ao longo do anel é  $ds' = a d\phi$  e o campo elétrico na origem é:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k \int_0^{2\pi} \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} a d\phi \\ &= -\frac{k \lambda_0}{a} \int_0^{2\pi} \sin \phi (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) d\phi \end{aligned}$$

Para calcular os integrais usam-se as identidades trigonométricas:

$$\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin(2\phi) \quad \sin^2 \phi = \frac{1 - \cos(2\phi)}{2}$$

Que conduzem a:

$$\vec{E} = -\frac{k \lambda_0}{2a} \int_0^{2\pi} (\sin(2\phi) \hat{i} + \hat{j} - \cos(2\phi) \hat{j}) d\phi$$

Os integrais de  $\sin(2\phi)$  e  $\cos(2\phi)$  são iguais a zero e o resultado final é:

$$\vec{E} = -\frac{\pi k \lambda_0}{a} \hat{j}$$

### Problema 2.6

Um protão passa pela origem, em  $t = 0$ , com velocidade  $(3\hat{i} + 2\hat{j})$  Mm/s, dentro de uma região onde há vácuo e campo elétrico uniforme,  $\vec{E} = E\hat{j}$ . Determine o valor que deverá ter  $E$  para que o protão atravesse o eixo dos  $x$  em  $x = 85$  cm. (O peso do protão pode ser desprezado neste caso).

**Resolução.** O campo elétrico uniforme e na direção do eixo  $y$  implica força externa constante e na direção  $y$ . Como a velocidade inicial tem componentes  $x$  e  $y$ , o movimento será uma parábola no plano  $xy$ , igual à sobreposição dum movimento uniforme, na projeção no eixo  $x$ , e um movimento uniformemente acelerado na projeção no eixo  $y$ :

$$v_x = 3 \times 10^6 = \text{constante} \quad a_y = \text{constante}$$

(usando unidades SI).

O tempo que o protão demora até atravessar o eixo dos  $x$ , em  $x = 85$  cm é então:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{0.85}{3 \times 10^6} = 2.833 \times 10^{-7}$$

A trajetória parabólica implica que quando o protão atravessar novamente o eixo dos  $x$  terá componente  $v_y$  da velocidade com o mesmo valor absoluto do seu valor inicial, mas com sinal negativo, ou seja,  $v_y = -2$  Mm/s. A aceleração obtém-se a partir da seguinte equação para o movimento uniformemente acelerado:

$$a_y = \frac{v_y - v_{y0}}{\Delta t} = \frac{-2 \times 10^6 - 2 \times 10^6}{2.833 \times 10^{-7}} = -1.412 \times 10^{13}$$



e, usando os valores da massa e da carga dum protão, a componente  $y$  do campo elétrico é,

$$E_y = \frac{ma_y}{e} = -\frac{1.673 \times 10^{-27} \times 1.412 \times 10^{13}}{1.602 \times 10^{-19}} = -1.47 \times 10^5$$

O valor de  $E$  é  $-1.47 \times 10^5$  N/C.

### Problema 2.7

Calcule a carga total dentro do paralelepípedo:  $0 \leq x \leq 18$  cm,  $0 \leq y \leq 20$  cm,  $0 \leq z \leq 15$  cm, onde o campo elétrico é  $\vec{E} = 24x\hat{i}$  (unidades SI).

**Resolução.** A densidade volúmica de carga calcula-se usando a forma diferencial da lei de Gauss:

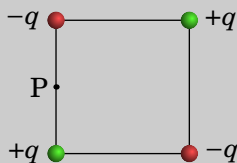
$$\rho = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{6}{\pi k}$$

E, por ser constante, a carga no interior do paralelepípedo é igual à densidade volúmica de carga vezes o volume do paralelepípedo:

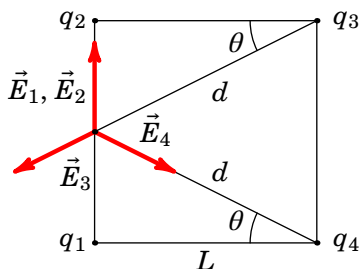
$$Q = \left( \frac{6}{\pi 8.988 \times 10^9} \right) \times 0.18 \times 0.2 \times 0.15 = 1.15 \times 10^{-12} \text{ C} = 1.15 \text{ pC}$$

### Problema 2.8

Quatro cargas com valores  $+q$  e  $-q$  ( $q > 0$ ), encontram-se nos vértices dum quadrado de aresta  $L$ . Determine a expressão do campo elétrico  $\vec{E}$ , no ponto P (no meio da aresta do lado esquerdo), em função de  $q$ ,  $L$  e a constante  $k$ .



**Resolução.** Na figura seguinte, as quatro cargas pontuais, designadas de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_4$ , produzem os quatro campos  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{E}_3$  e  $\vec{E}_4$  nas direções indicadas.



Os módulos desses quatro campos determinam-se a partir da Lei de Coulomb:

$$E_1 = E_2 = \frac{k q}{(L/2)^2} = \frac{4 k q}{L^2}$$

$$E_3 = E_4 = \frac{k q}{d^2} = \frac{k q}{L^2 + (L/2)^2} = \frac{4 k q}{5 L^2}$$

O campo total no ponto P é a soma vetorial dos quatro campos que, usando eixo dos  $x$  na direção de  $\overline{q_1q_4}$  e eixo dos  $y$  na direção de  $\overline{q_1q_2}$  na figura anterior, será:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_1 + E_2) \hat{j} + E_3(-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) + E_4(\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \\ &= 2 E_1 \hat{j} - 2 E_3 \sin \theta \hat{j} \end{aligned}$$

A partir da figura observa-se que

$$\sin \theta = \frac{L}{2 d} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

substituindo esse valor e as expressões de  $E_1$  e  $E_3$  obtém-se:

$$\vec{E} = \frac{8 k q}{L^2} \left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \hat{j} = \frac{8 k q}{25 L^2} (25 - \sqrt{5}) \hat{j}$$

## 3 Potencial eletrostático

### Problema 3.1

Demonstre a identidade:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

**Resolução.** Em coordenadas cartesianas,

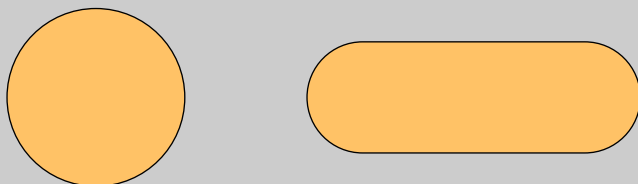
$$r^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

e o gradiente é,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{2x \hat{i}}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2y \hat{j}}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2z \hat{k}}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2}\end{aligned}$$

### Problema 3.2

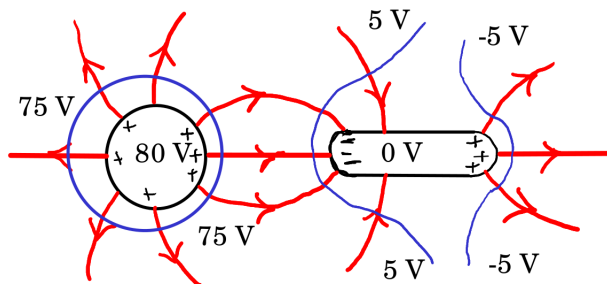
Uma esfera metálica encontra-se próxima de outra peça metálica formada por um cilindro e duas semiesferas, como mostra a figura. Ambos objetos estão isolados de qualquer outro condutor. A esfera tem carga positiva ( $Q_1 > 0$ ) e a peça cilíndrica está completamente descarregada ( $Q_2 = 0$ ). Arbitrando que o potencial da peça cilíndrica é zero, então o potencial da esfera é 80 V. Faça um desenho mostrando as duas peças, a distribuição de cargas, as linhas de campo nas duas peças e à sua volta, e as superfícies equipotenciais de -5 V, 5 V e 75 V.



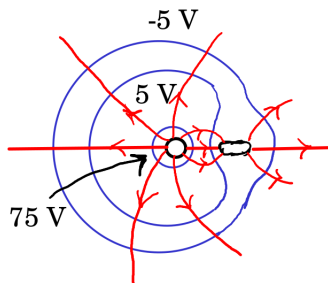
**Resolução.** Há que ter em conta várias coisas:

- As cargas distribuem-se nas superfícies dos dois condutores. No cilindro são induzidas cargas negativas no extremo mais próximo da esfera e o mesmo número de cargas positivas no extremo mais afastado. Na superfície da esfera há cargas positivas, mais concentradas no extremo próximo do cilindro.
- Não há linhas de campo dentro da esfera nem dentro do cilindro. Há linhas de campo a começar na superfície da esfera e na superfície do cilindro, no extremo onde há carga positiva, e linhas de campo a terminar na superfície do cilindro, no extremo onde há carga negativa.
- Todas as linhas de campo são perpendiculares à superfície do objeto onde começam ou terminam.
- Nenhuma linha de campo pode começar num extremo do cilindro e terminar no outro, porque o potencial é constante no cilindro, enquanto que o potencial onde começa uma linha é sempre maior do que o potencial onde esta termina.
- A equipotencial de 75 V estará próxima da esfera, onde o potencial é 80 V, e as equipotenciais de 5 V e  $-5$  V estarão próximas do cilindro, onde o potencial é 0. No entanto, nenhuma dessas equipotenciais pode tocar nenhum dos objetos, porque estes têm valores de potencial diferentes de 75 V, 5 V e  $-5$  V.
- Essas 3 equipotenciais não se podem cruzar entre si, por terem valores de potencial diferentes, e devem ser perpendiculares às linhas de campo elétrico, em todos os pontos onde se cruzam com elas.

O gráfico é aproximadamente o seguinte:



Também pode ser representado visto de longe:



### Problema 3.3

O potencial elétrico a uma certa distância de uma carga pontual é 600 V (arbitrando potencial nulo no infinito) e o valor do campo elétrico é 200 N/C. Calcule a distância e o valor da carga.

**Resolução.** Usando as expressões do potencial e do módulo do campo elétrico de uma carga pontual, em unidades SI,

$$600 = \frac{kq}{d} \quad 200 = \frac{kq}{d^2}$$

onde  $d$  é a distância até à carga. Dividindo uma equação pela outra temos:

$$d = 3$$

e substituindo na equação do potencial,

$$kq = 600 \times 3 \quad \Rightarrow \quad q = 2.00 \times 10^{-7}$$

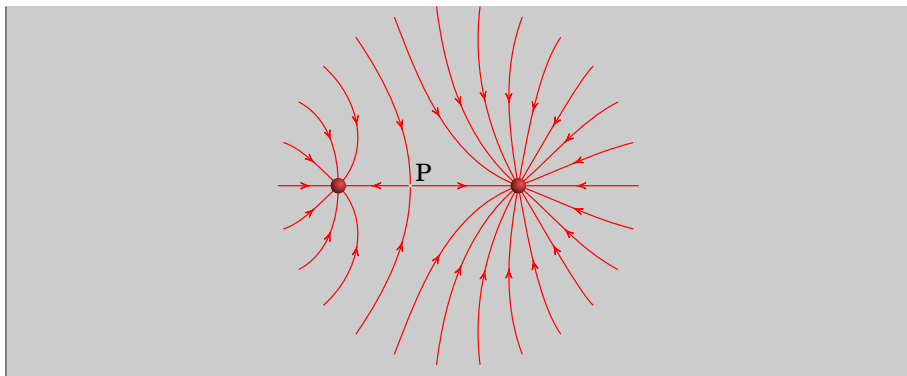
o valor da carga é 200 nC e encontra-se a 3 m.

### Problema 3.4

A figura representa as linhas de campo eletrostático de duas partículas carregadas e separadas por uma distância de 7 cm. A razão entre os valores das duas cargas é 4/9.

(a) Calcule a distância do ponto P às partículas.

(b) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de  $-8$  nC, calcule o potencial no ponto P (arbitre  $V = 0$  no infinito).



**Resolução.** (a) No ponto P o campo total é nulo, ou seja, os campos das duas cargas são vetores opostos e com o mesmo módulo. Se  $d_1$  e  $d_2$  são as distâncias desde cada uma das cargas até P, a condição para que os módulos dos dois campos sejam iguais é:

$$\frac{k |q_1|}{d_1^2} = \frac{k |q_2|}{d_2^2} \implies \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{2}{3}$$

e como  $d_1 + d_2 = 7$  cm, então, com as distâncias em cm:

$$\frac{d_1}{7 - d_1} = \frac{2}{3} \implies d_1 = \frac{14}{5} = 2.8 \text{ cm}$$

e  $d_2 = 4.2$  cm. A carga mais próxima de P ( $q_1$  à esquerda) é menor que a outra ( $q_2$  à direita).

(b) A carga  $q_1$  da partícula no lado esquerdo obtém-se a partir da outra carga  $q_2 = -8$  nC, usando a relação entre as cargas dada no enunciado:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{4}{9} \implies q_1 = \frac{4 q_2}{9} = \frac{32}{9} \text{ nC}$$

e o potencial total no ponto P é (unidades SI):

$$V = \frac{k q_1}{d_1} + \frac{k q_2}{d_2} = -\frac{8.988 \times (32/9)}{0.028} - \frac{8.988 \times 8}{0.042} = -2853 \text{ V}$$

### Problema 3.5

Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é -2 nC. Qual é a diferença de potencial entre as duas superfícies?

**Resolução.** O potencial produzido por uma esfera condutora, de raio  $R$  e carga total  $Q$ , num ponto a uma distância  $r$  do centro da esfera, é:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r} & r \geq R \quad (\text{fora da esfera}) \\ \frac{kQ}{R} & r < R \quad (\text{constante dentro}) \end{cases}$$

Nos pontos na superfície com  $R_1 = 5$  cm o potencial é a soma dos potenciais produzidos pelas duas esferas. Pontos esses que estão fora da esfera de raio  $R_1$  e dentro da esfera de raio  $R_2 = 7$  cm. Como tal,

$$V(R_1) = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

Nos pontos na superfície com  $R_2 = 7$  cm, fora das duas esferas, o potencial total é:

$$V(R_2) = \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

Como tal, em unidades SI, a diferença de potencial é

$$\begin{aligned} V(R_1) - V(R_2) &= \frac{kQ_1}{R_1} - \frac{kQ_1}{R_2} \\ &= 3 \times 10^{-9} \times 8.988 \times 10^{-9} \left( \frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.07} \right) = 154 \text{ V} \end{aligned}$$

**Comentários:** A diferença de potencial é também o integral do campo elétrico desde uma esfera até a outra, em qualquer percurso, por exemplo, na direção radial  $r$ . Na região de integração o campo é devido unicamente à esfera menor, porque essa região está dentro da esfera maior. Como tal,

$$V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ_1}{r^2} dr = \frac{kQ_1}{R_1} - \frac{kQ_1}{R_2} = 154 \text{ V}$$

### Problema 3.6

A figura na capa deste livro é a representação gráfica das linhas de campo e superfícies equipotenciais do seguinte potencial sobre o plano  $xy$ :

$$V(x, y) = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Explique a que tipo de sistema corresponde esse potencial e encontre a expressão do campo elétrico em qualquer ponto do plano  $xy$ .

**Resolução.** O termo  $(x^2 + y^2)^{1/2}$  é a distância até à origem,  $r$ . Como o potencial de um dipolo na origem é

$$V(\vec{r}) = \frac{k \vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

então o primeiro termo é no potencial corresponde a um dipolo, com momento dipolar,

$$\vec{p} = (a/k) \hat{i}$$

O segundo termo no potencial, uma constante sobre a distância até à origem, corresponde ao potencial de uma carga pontual  $b/k$  na origem. Como tal, o sistema é composto por um dipolo e uma carga pontual na origem.

O campo elétrico é menos o gradiente do potencial:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left( -\frac{a}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3ax(2x)}{2(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{b(2x)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \hat{i} \\ &\quad + \left( \frac{3ax(2y)}{2(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{b(2y)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) \hat{j} \\ &= \frac{bx^3 + bxy^2 - ay^2 + 2ax^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \hat{i} + \frac{by^3 + bx^2y + 3axy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \hat{j} \end{aligned}$$

### Problema 3.7

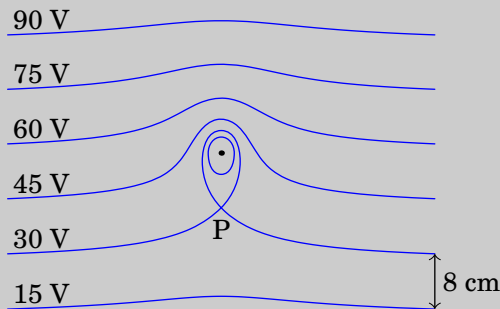
A figura mostra as superfícies equipotenciais de uma carga pontual no interior de um campo elétrico uniforme  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . A grandes distâncias da carga pontual as superfícies são planos paralelos distanciados 8 cm.

(a) Calcule o módulo e a direção do campo externo  $\vec{E}_{\text{ext}}$ .

(b) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa. Justifique.

(c) Qual é a direção da força sobre a carga pontual?

(d) Sabendo que a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, calcule o valor da carga pontual.





**Resolução.** (a) O campo externo aponta para baixo (direção em que diminui o potencial) e tem módulo:

$$E_{\text{ext}} = \frac{15}{0.08} = 187.5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(b) A carga é negativa, porque há uma linha de campo que atravessa as superfícies equipotenciais de 90 V, 75 V, 60 V, 45 V e 30 V entrando logo na carga. Também, se não existisse a carga pontual, o potencial no ponto onde se encontra teria um valor entre 45 V e 60 V, mas com a carga pontual o potencial nesse ponto passa a ser menor que 30 V, ou seja, o potencial da carga pontual é negativo e a carga também.

(c) Como a carga é negativa, a força é na direção oposta ao campo externo, ou seja, para cima.

(d) No ponto P o campo total é nulo e, como tal, o módulo do campo produzido pela carga pontual deverá ser igual ao módulo do campo externo:

$$\begin{aligned} E &= \frac{k|q|}{d^2} = E_{\text{ext}} = 187.5 \\ \Rightarrow |q| &= \frac{187.5 \times 0.09^2}{8.988 \times 10^9} = 1.69 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

O valor da carga pontual é  $q = -0.169 \text{ nC}$ .

### Problema 3.8

Demonstre que o campo elétrico  $\vec{E} = A\vec{r}$ , em que  $A$  é uma constante e  $\vec{r}$  o vetor posição, é conservativo. Calcule o potencial correspondente a esse campo.

**Resolução.** As componentes cartesianas do campo são:

$$E_x = Ax \quad E_y = Ay \quad E_z = Az$$

Todas as derivadas cruzadas são nulas e, portanto, iguais entre si:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$

a igualdade das derivadas cruzadas mostra que o campo é conservativo.

As três derivadas parciais do gradiente do potencial são:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Ax \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Ay \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Az$$

Como tal o potencial é,

$$V(x, y, z) = -\frac{A}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{Ar^2}{2}$$

(mais uma constante arbitrária que foi escolhida igual a zero, fazendo com que o potencial seja nulo na origem).

## 4 Energia eletrostática e capacidade

### Problema 4.1

Em cada caso determine a velocidade final da partícula após ser acelerada no vácuo, desde o repouso, usando a diferença de potencial dada:

- (a) Um eletrão, com uma diferença de potencial de 220 V.
- (b) Um eletrão num dispositivo de raios X em que é usada uma diferença de potencial de 5 kV.
- (c) Um próton, no acelerador LHC (*Large Hadron Collider*) do CERN, em que é usada uma diferença de potencial de  $7 \times 10^{12}$  V.

**Resolução.** (a) A energia eletrostática transferida para o eletrão é 220 eV, que será convertida em energia cinética  $E_c$ . Para um eletrão,  $mc^2 = 0.5111$  MeV; o fator gama do eletrão é:

$$\gamma = 1 + \frac{220}{0.5111 \times 10^6} = 1.0004$$

Como tal, podemos usar a expressão não-relativista da energia cinética para determinar a velocidade:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 220 \times 1.602 \times 10^{-19}}{9.109 \times 10^{-31}}} = 8.80 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(b) A energia cinética ganha pelo eletrão é agora 5 keV e o factor gama é,

$$\gamma = 1 + \frac{5 \times 10^3}{0.5111 \times 10^6} = 1.00978$$

que já mostra efeito relativista. A velocidade calcula-se a partir do factor gamma

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 4.16 \times 10^7 \text{ m/s}$$

(No cálculo de  $v$  a partir de  $\gamma$ , esta última tem de ser dada com bastante precisão para evitar erro numérico).

(c) A energia do próton é  $7 \times 10^{12}$  eV (7 tera eletrão-volt). Como um próton têm  $mc^2 = 0.9366$  GeV, o fator gama deste próton é:

$$\gamma = 1 + \frac{7 \times 10^{12}}{0.9366 \times 10^9} = 7475$$

que corresponde a uma partícula altamente relativista, com velocidade praticamente igual à velocidade da luz. A velocidade, em relação à velocidade da luz é:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.999999991 c$$

### Problema 4.2

Uma partícula pontual com massa de 1.5  $\mu\text{g}$  e carga de 12 nC encontra-se numa região onde existe vácuo e um campo elétrico constante de módulo 2.3 kV/m com direção e sentido do eixo  $x$ . Se num instante inicial a partícula estiver em repouso em  $x = -3$  cm, determine com que velocidade esta passará pela posição  $x = 3$  cm.

**Resolução:** Por ser uma partícula macroscópica, seria necessário um campo muito mais elevado para produzir efeito relativista e usaremos mecânica não-relativista. A diferença de potencial entre as posições  $x = -3$  cm e  $x = 3$  cm, em unidades SI, é:

$$\Delta V = V(0.03) - V(-0.03) = - \int_{-0.03}^{0.03} \vec{E} \cdot (\hat{i} dx) = - \int_{-0.03}^{0.03} 2300 dx = -138 \text{ V}$$

a variação da energia potencial elétrica da partícula durante o percurso é:

$$\Delta E_p = q \Delta V = -1.656 \times 10^{-6} \text{ J}$$

O sinal negativo indica que a partícula perde energia potencial e, como no vácuo não há forças dissipativas, a energia mecânica conserva-se e a diminuição da energia potencial será igual ao aumento da energia cinética:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1.5 \times 10^{-9}}{2} v^2 = 1.656 \times 10^{-6} \implies v = 47.0 \text{ m/s}$$

**Comentário:** Observe-se que a aceleração da partícula é constante e com módulo:

$$a = \frac{q E}{m} = 18400 \text{ m/s}^2$$

e o tempo que demora o percurso é:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 2.5 \text{ ms}$$

A distância que a partícula cai, pelo efeito da gravidade, durante esse intervalo é desprezável comparada com os 6 cm que percorre. Como tal, não é necessário saber qual é a posição do eixo  $x$  referido em relação ao plano horizontal.

### Problema 4.3

(a) Determine a capacidade de uma esfera condutora isolada, com raio de 4.0 cm e rodeada por ar.

(b) A esfera da alínea anterior é coberta com uma camada de vidro de 1 mm de espessura e constante dielétrica de 5.6, deixando um orifício para ligar um cabo à esfera, e a camada de vidro é coberta com uma segunda lâmina metálica esférica de raio 4.1 cm, formando-se assim um condensador esférico. Determine a capacidade desse condensador.

(c) Qual a relação entre a capacidade do condensador e a da esfera?

**Resolução.** (a) Admitindo que a constante dielétrica do ar é  $K = 1$ , a capacidade da esfera é:

$$C = \frac{K R}{k} = \frac{4 \times 10^{-2}}{8.988 \times 10^9} = 4.45 \times 10^{-12} \text{ F} = 4.45 \text{ pF}$$

(b) A capacidade do condensador esférico é:

$$C = \frac{K R_1 R_2}{k (R_2 - R_1)} = \frac{5.6 \times 4 \times 10^{-2} \times 4.1 \times 10^{-2}}{8.988 \times 10^9 (4.1 \times 10^{-2} - 4 \times 10^{-2})} = 1.02 \text{ nF}$$

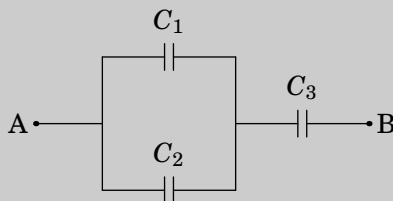
(c) A relação entre as duas capacidades é,

$$\frac{1.02 \times 10^{-9}}{4.45 \times 10^{-12}} = 229$$

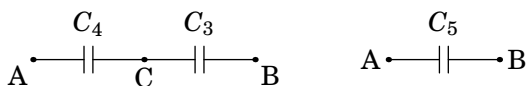
**Comentários:** O resultado da alínea c mostra a utilidade dos condensadores. A capacidade de armazenar carga do condensador é 230 maior do que uma única esfera. Com um único condutor não é possível obter capacidades elevadas; por exemplo, se a esfera condutora da alínea a fosse do tamanho da Terra (raio de 6371 km), a sua capacidade seria de  $7.08 \times 10^{-4} \text{ F}$ . Compare-se essa capacidade com as capacidades da ordem do kF nos ultracondensadores.

**Problema 4.4**

No sistema de três condensadores apresentado na figura,  $C_1 = 1.2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.3 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 2.5 \mu\text{F}$ . A voltagem entre os pontos A e B é de 9.0 V. (a) Determine a carga armazenada em cada condensador. (b) Determine a energia total armazenada no sistema.



**Resolução.** Para resolver este tipo de problema, simplifica-se o circuito até ficar unicamente com um condensador. O primeiro passo é substituir os condensadores de capacidades  $C_1$  e  $C_2$ , que estão em paralelo, por um condensador equivalente com capacidade  $C_4$ . No segundo passo, os condensadores de capacidades  $C_4$  e  $C_3$ , que ficam ligados em série, são substituídos por um único condensador com capacidade  $C_5$ . A figura seguinte mostra esses passos.



A capacidade do condensador equivalente em paralelo, entre os pontos A e C, é:

$$C_4 = C_1 + C_2 = 5.5 \mu\text{F}$$

E a capacidade do condensador equivalente aos condensadores com capacidades  $C_4$  e  $C_3$ , em série, é:

$$C_5 = \frac{C_4 C_3}{C_4 + C_3} = 1.71875 \mu\text{F}$$

(a) Como a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual 9 V, a carga armazenada no condensador de capacidade  $C_5$  é:

$$Q_5 = C_5 \Delta V_{AB} = 1.71875 \times 10^{-6} \times 9 = 15.5 \mu\text{C}$$

Que é também a carga armazenada nos condensadores de capacidades  $C_3$  e  $C_4$ , por estarem em série

$$Q_3 = Q_4 = 15.5 \mu\text{C}$$

A diferença de potencial entre os pontos A e C será:

$$\Delta V_{AC} = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{15.47 \times 10^{-6}}{5.5 \times 10^{-6}} = 2.8125 \text{ V}$$

As cargas nos condensadores de capacidades  $C_1$  e  $C_2$ , que estão ambos ligados entre os pontos A e C, são:

$$Q_1 = C_1 \Delta V_{AC} = 1.2 \times 10^{-6} \times 2.8125 = 3.38 \text{ } \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V_{AC} = 4.3 \times 10^{-6} \times 2.8125 = 12.1 \text{ } \mu\text{C}$$

(b) A energia total armazenada no sistema é a soma das energias nos três condensadores, que será igual à energia total armazenada em qualquer um dos outros dois circuitos equivalentes na figura acima. Será então mais fácil determinar essa energia no circuito mais simples, com apenas um condensador de capacidade  $C_5$  entre A e B:

$$E_p = E_5 = \frac{1}{2} C_5 \Delta V_{AB}^2 = \frac{1.71875 \times 10^{-6} \times 9^2}{2} = 69.6 \text{ } \mu\text{J}$$

#### Problema 4.5

Uma fina barra de material dielétrico de secção reta  $A$  e comprimento  $L$  encontra-se no eixo  $x$  entre  $x = 0$  e  $x = L$ . Existe um campo elétrico, o qual induz na barra uma polarização dada por  $(ax^2 + bx + c)\hat{i}$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. (a) Encontre a densidade volúmica da carga de polarização e a densidade superficial da carga de polarização em cada extremidade da barra. (b) Mostre que a carga total de polarização é nula, como era de esperar.

**Resolução.** A densidade volúmica de carga de polarização é menos a divergência do vetor de polarização:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot (ax^2 + bx + c)\hat{i} = -2ax - b$$

Na extremidade em  $x = 0$ , o vetor de polarização é  $c\hat{i}$ , o versor normal é  $-\hat{i}$  e a densidade superficial de carga de polarização é,

$$\sigma_P = c\hat{i} \cdot (-\hat{i}) = -c$$

Na extremidade em  $x = L$ , o vetor de polarização é  $(aL^2 + bL + c)\hat{i}$ , o versor normal é  $\hat{i}$  e a densidade superficial de carga de polarização é:

$$\sigma_P = (aL^2 + bL + c)\hat{i} \cdot \hat{i} = aL^2 + bL + c$$

A carga total na extremidade em  $x = 0$  é

$$\sigma_P A = -cA$$

A carga na extremidade em  $x = L$  é

$$\sigma_P A = aL^2 A + bLA + cA$$

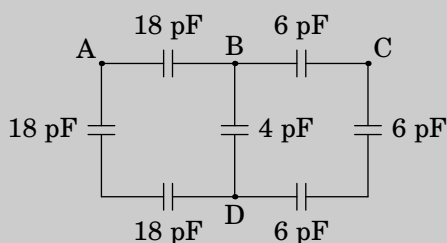
e a carga total no interior da barra é

$$A \int_0^L \rho_P dx = -A \int_0^L (2ax + b) dx = -aL^2 A - bLA$$

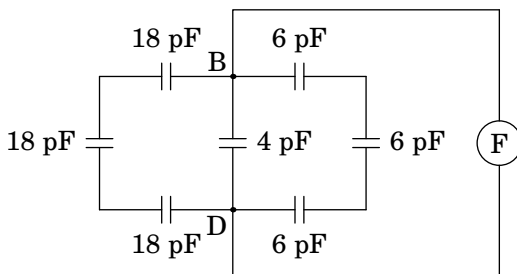
e a soma das cargas nas extremidades mais a carga interna é zero.

#### Problema 4.6

No circuito da figura, calcule a capacidade equivalente: (a) Entre os pontos B e D. (b) Entre os pontos A e B.



(a) Para determinar a capacidade entre B e D, imagine-se que é ligado entre esses dois pontos um medidor de capacidades, representado por F, na figura seguinte:



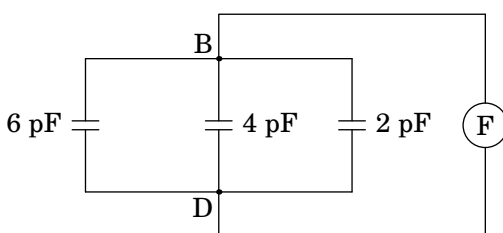
O dispositivo de medição teria de inserir cargas de sinais opostos nos pontos B e D e medir a voltagem devida a essas cargas. As cargas têm 3 percursos



alternativos ao entrar nos pontos B e D. Um desses percursos é passando pelos 3 condensadores de 18 pF, que estão em série, e outro dos percursos passa pelos 3 condensadores de 6 pF, também em série. Esses condensadores em série podem ser substituídos pelos condensadores equivalentes com capacidades:

$$\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18}\right)^{-1} = 6 \quad \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)^{-1} = 2$$

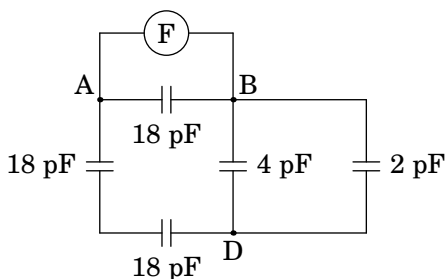
e o circuito fica simplificado da forma seguinte:



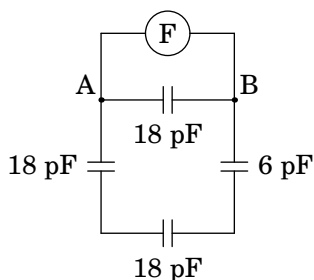
Agora temos 3 condensadores em paralelo, entre os pontos B e D, e a capacidade equivalente é a capacidade do circuito entre os pontos B e D:

$$C_{BD} = 6 + 4 + 2 = 12 \text{ pF}$$

(b) Se o medidor de capacidade for ligado entre os pontos A e B, o diagrama é o seguinte:



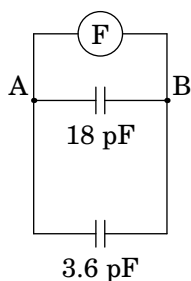
Os condensadores de 4 pF e 2 pF estão em paralelo, entre os pontos B e D, podendo ser substituídos por um único condensador de capacidade  $4 + 2 = 6 \text{ pF}$ . O circuito obtido é o seguinte:



O condensador de 6 pF está agora em série com dois dos condensadores de 18 pF e a capacidade equivalente desse sistema em série é:

$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \right)^{-1} = \frac{18}{5} = 3.6 \text{ pF}$$

e substituindo no diagrama anterior, obtém-se o seguinte circuito equivalente:



Finalmente, a capacidade entre os pontos A e B e a capacidade equivalente dos condensadores de 18 pF e 3.6 pF em paralelo:

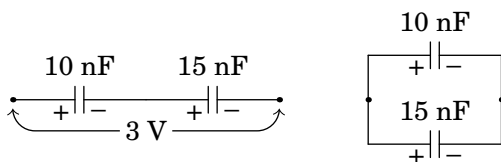
$$C_{AB} = 18 + 3.6 = 21.6 \text{ pF}$$

#### Problema 4.7

Dois condensadores de 10 nF e 15 nF ligam-se em série e estabelece-se uma diferença de potencial de 3 V entre os extremos do sistema.

- Determine a carga e a diferença de potencial em cada condensador.
- Os condensadores são separados, ligando-se de seguida os dois condensadores (armadura positiva com positiva e negativa com negativa). Calcule a voltagem e a carga final em cada condensador.

**Resolução.** O lado esquerdo da figura seguinte mostra os dois condensadores ligados em série e o lado direito mostra como serão ligados na alínea b.



(a) Os dois condensadores em série são equivalentes a um único condensador com capacidade:

$$C_s = \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 6 \text{ nF}$$

E a carga armazenada em cada um dos dois condensadores é a mesma carga no condensador equivalente:

$$Q = C_s \Delta V = 18 \text{ nC}$$

As diferenças de potencial nos dois condensadores são,

$$\Delta V_{10} = \frac{18}{10} = 1.8 \text{ V} \quad \Delta V_{15} = \frac{18}{15} = 1.2 \text{ V}$$

(b) Como cada condensador tinha carga de 18 nC, quando se ligam entre si, no lado onde há carga positiva ficarão 36 nC e no lado da carga negativa  $-36 \text{ nC}$ . Essa carga distribuir-se há entre os dois condensadores, de forma a ficarem com a mesma diferença de potencial. Sendo  $Q_{10}$  e  $Q_{15}$  as cargas nos dois condensadores, temos então as seguintes duas condições:

$$Q_{10} + Q_{15} = 36 \quad \Delta V = \frac{Q_{10}}{10} = \frac{Q_{15}}{15}$$

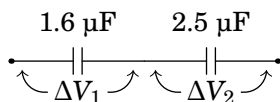
e a solução dessas duas equações lineares é,

$$Q_{10} = 14.4 \text{ nC} \quad Q_{15} = 21.6 \text{ nC} \quad \Delta V = 1.44 \text{ V}$$

### Problema 4.8

Um condensador de  $1.6 \mu\text{F}$  e voltagem máxima de  $100 \text{ V}$  liga-se em série com outro condensador de  $2.5 \mu\text{F}$  e voltagem máxima de  $150 \text{ V}$ . Determine a voltagem máxima desse sistema.

**Resolução.** A voltagem máxima do sistema será a voltagem que faz com que em nenhum dos dois condensadores seja ultrapassada a sua voltagem máxima. A voltagem do sistema é a soma das voltagens  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  nos dois condensadores:



Se a voltagem  $\Delta V_1$  no condensador de  $1.6 \mu\text{F}$  fossa a sua voltagem máxima de  $100 \text{ V}$ , a carga no sistema seria:

$$Q = 100 \times 1.6 = 160 \mu\text{C}$$

e a voltagem no condensador de  $2.5 \mu\text{F}$  seria,

$$\Delta V_2 = \frac{160}{2.5} = 64 \text{ V}$$

que é um valor aceitável para o condensador de  $2.5 \mu\text{F}$ . Já se a voltagem no condensador de  $2.5 \mu\text{F}$  tivesse o seu valor máximo de  $200 \text{ V}$ , a carga no sistema seria:

$$Q = 200 \times 2.5 = 500 \mu\text{C}$$

e o condensador de  $1.6 \mu\text{F}$  ficava com voltagem:

$$\Delta V_1 = \frac{250}{1.6} = 156.25 \text{ V}$$

que queimava esse condensador. Como tal, a voltagem máxima do sistema será  $164 \text{ V}$ , que faz com que os condensadores fiquem com voltagens de  $100 \text{ V}$  e  $64 \text{ V}$ .

## 5 Força eletromotriz, corrente e resistência

### Problema 5.1

Determine o trabalho realizado por uma pilha de 9 V, que fornece uma corrente de 235 mA durante 5 minutos.

**Resolução.** A potência fornecida pela pilha é:

$$P = \varepsilon I = 9 \times 235 \times 10^{-3} = 2.115 \text{ W}$$

e o trabalho realizado é igual à energia fornecida durante os 5 minutos:

$$W = \Delta U = P \Delta t = 2.115 \times 5 \times 60 = 634.5 \text{ J}$$

### Problema 5.2

Uma certa bateria de automóvel tem carga máxima de 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando está carregada a 100%.

(a) Depois de algum uso, a bateria descarrega até 60% da sua carga máxima. Qual é a carga, em coulomb, com que fica a bateria?

(b) A seguir, a bateria liga-se a um carregador de 12 V para a recarregar e observa-se que inicialmente a corrente do carregador tem intensidade de 7 A, mas 6 horas depois diminui a 3 A. Admitindo diminuição linear da corrente em ordem ao tempo, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria no fim das 6 horas?

**Resolução.** (a) Após ter descarregado pelo uso, a carga restante na bateria é 60% da sua carga máxima inicial de 250 A·h, a qual em coulomb é igual a:

$$Q = 0.6 \times 250 \times 3600 = 5.4 \times 10^5 \text{ C}$$

(b) Como a corrente diminui linearmente, a corrente média durante as 6 horas é a média entre a corrente inicial e final:

$$\bar{I} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \text{ A}$$

A carga transferida para a bateria pelo carregador, durante as 6 horas, é igual à corrente média vezes o tempo:

$$\Delta Q = (5 \text{ A}) \times (6 \text{ h}) = 30 \text{ A} \cdot \text{h}$$

e como a bateria descarregada tinha carga de  $0.6 \times 250 \text{ A} \cdot \text{h} = 150 \text{ A} \cdot \text{h}$ , a carga final dividida pela inicial será:

$$\frac{Q_f}{Q_i} = \frac{150 + 30}{250} = 0.72$$

Ou seja, a bateria fica com 72% da sua carga inicial.

**Comentário:** Também podíamos ter determinado a carga transferida para a bateria encontrando a equação da reta correspondente a 7 A em  $t = 0$  e 3 A em  $t = 6$  (tempo medido em horas), a qual é dada por:

$$I(t) = 7 - \frac{2}{3}t$$

E a carga transferida é o integral dessa expressão, entre 0 e 6 horas:

$$\Delta Q = \int_0^6 \left( 7 - \frac{2}{3}t \right) dt = 30 \text{ A} \cdot \text{h}$$

Note também que o valor médio da corrente elétrica é o integral da equação da reta, de 0 a 6, dividido pelo comprimento do intervalo de integração (6 horas).

$$\bar{I} = \frac{1}{6} \int_0^6 \left( 7 - \frac{2}{3}t \right) dt = 5 \text{ A}$$

### Problema 5.3

A corrente num cabo varia de acordo com a função  $I = 20 + 3t^2$ , onde  $I$  mede-se em miliampere e  $t$  em segundos.

(a) Que carga transporta o cabo desde  $t = 0$  até  $t = 10$  s?

(b) Qual o valor da corrente constante que transporta a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?

(a) A carga transferida é igual ao integral da corrente, em ordem ao tempo, no intervalo de tempo em questão:

$$\Delta Q = \int_0^{10} (20 + 3t^2) dt = 1200$$

As unidades de  $I$  eram mA e as unidades de  $dt$  segundos. Como tal, o resultado está em mA·s que são mC. A carga transferida é então  $\Delta Q = 1.2 \text{ C}$ .

(b) A corrente média nesse intervalo é  $\Delta Q/10$ , ou seja, seria necessária uma corrente constante de 120 mA para transferir a mesma carga nos mesmos 10 segundos.

### Problema 5.4

Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam  $9.6 \times 10^{21}$  eletrões de condução durante 2 horas. Determine:

- (a) A intensidade da corrente média.
- (b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo.
- (c) A potência média fornecida pela pilha.
- (d) Se a carga inicial da pilha era de 3 A·h, com que carga fica após as 2 horas?

**Resolução.** (a) O valor absoluto da carga transferida é o número de eletrões transferidos vezes a carga elementar. A corrente média, em ampere, é a carga transferida, em Coulomb, dividida pelo tempo, em segundos:

$$\bar{I} = \frac{9.6 \times 10^{21} \times 1.602 \times 10^{-19}}{7200} = 214 \text{ mA}$$

(b) A energia fornecida é igual à carga transferida, vezes a força eletromotriz:

$$E_p = 9.6 \times 10^{21} \times 1.602 \times 10^{-19} \times 1.5 = 2307 \text{ J}$$

(c) A potência média fornecida é igual ao produto entre força eletromotriz (constante) e a corrente média (ou, também, energia fornecida dividida pelo intervalo de tempo):

$$\bar{P} = 1.5 \bar{I} = 0.320 \text{ W}$$

(d) A carga final é igual à carga inicial, menos a carga transferida durante as 2 horas. Em unidades de A·h, a carga transferida é igual à corrente média, em ampere, vezes o intervalo de tempo, em horas:

$$Q_f = 3 - 2\bar{I} = 2.573 \text{ Ah}$$

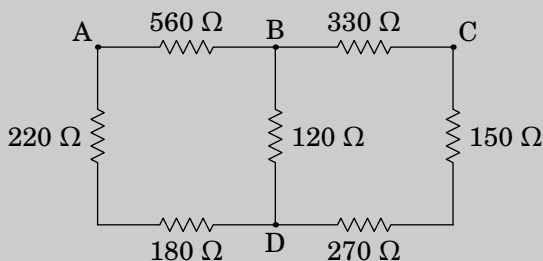
**Problema 5.5**

No circuito da figura, determine a resistência equivalente:

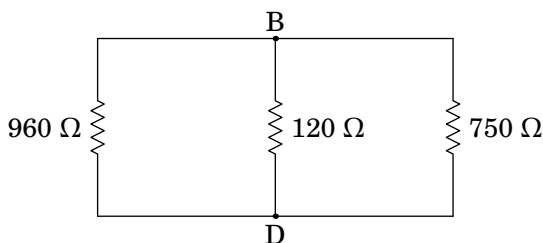
(a) entre B e D,

(b) entre A e B,

(c) entre A e D



**Resolução.** (a) Para determinar a resistência entre B e D, admitimos que há um medidor de resistências ligado nesses pontos, mas não há nada ligado nos pontos A e C. Como tal, as correntes nas resistências de  $560\ \Omega$ ,  $220\ \Omega$  e  $180\ \Omega$  são iguais e, como tal, essas 3 resistências estão em série, podendo ser substituídas por uma única resistência de  $960\ \Omega$ . De forma análoga, as correntes nas resistências de  $330\ \Omega$ ,  $150\ \Omega$  e  $270\ \Omega$  são iguais e, podendo ser substituídas por uma única resistência de  $750\ \Omega$ . Com essas duas substituições obtém-se o seguinte circuito equivalente:



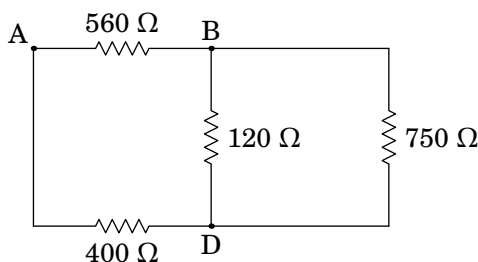
Cada uma das três resistências nesse circuito está ligada entre os pontos B e D. Como tal, as três resistências estão em paralelo e a resistência equivalente entre B e D é:

$$R = \left( \frac{1}{960} + \frac{1}{120} + \frac{1}{750} \right)^{-1} = 93.39\ \Omega$$

(b) Para determinar a resistência entre A e B, as resistências de  $220\ \Omega$  e  $180\ \Omega$  estão em série (equivalente a  $400\ \Omega$ ), mas não estão em série com a

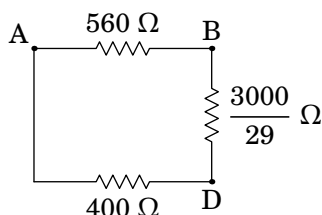


de  $560 \, \Omega$ , porque em A entra ou sai corrente para o medidor de resistência. As resistências de  $330 \, \Omega$ ,  $150 \, \Omega$  e  $270 \, \Omega$  também estão em série, porque não há nada ligado em C, sendo equivalentes a uma única resistência de  $750 \, \Omega$ :

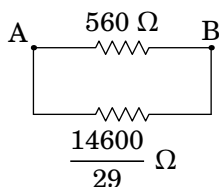


As resistências de  $120 \, \Omega$  e  $750 \, \Omega$ , que estão em paralelo, podem ser substituídas pela resistência equivalente,

$$\left( \frac{1}{120} + \frac{1}{750} \right)^{-1} = \frac{120 \times 750}{120 + 750} = \frac{3000}{29} \, \Omega$$



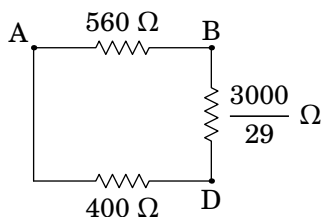
As resistências de  $400 \, \Omega$  e  $3000/29 \, \Omega$ , em série porque não há nada ligado em D, são equivalentes a  $14600/29 \, \Omega$



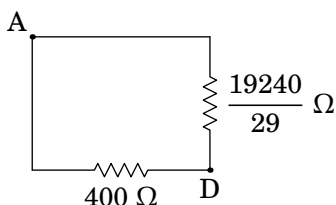
Essas duas resistências estão em paralelo, sendo a resistência equivalente entre A e B igual a:

$$R = \left( \frac{1}{560} + \frac{29}{14600} \right)^{-1} = 265.1 \, \Omega$$

(c) Para determinar a resistência equivalente entre A e D, podem-se usar os mesmos dois primeiros passos da alínea anterior, conduzindo ao circuito equivalente:



As resistências de  $560\ \Omega$  e  $3000/29\ \Omega$ , em série porque não há nada ligado em B, são equivalentes a  $19240/29\ \Omega$



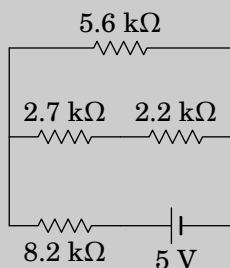
Finalmente, essas duas resistências estão em paralelo e a resistência equivalente entre A e D é:

$$R = \left( \frac{1}{400} + \frac{29}{19240} \right)^{-1} = 249.5\ \Omega$$

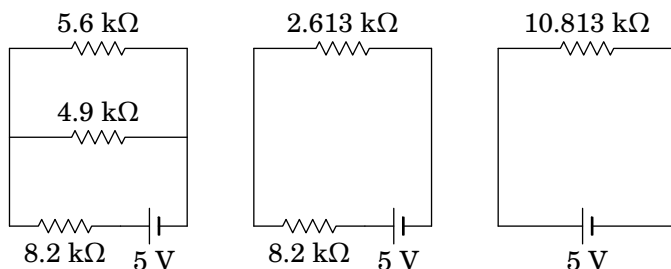
**Comentário:** O método usado aqui não poderia ser usado para encontrar a resistência equivalente entre A e C. O único que poderíamos fazer seria combinar as resistências de  $220\ \Omega$  e  $180\ \Omega$  em série, e as resistências de  $150\ \Omega$  e  $270\ \Omega$  em série. Mas a seguir fica-se com um circuito em que nenhuma das resistências estão ou em série ou em paralelo. Nesse caso pode usar-se uma transformação delta-estrela, que será explicada no capítulo 6.

### Problema 5.6

Determine a corrente e a diferença de potencial em cada resistência:



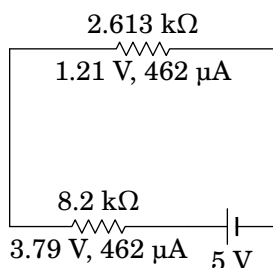
**Resolução.** As quatro resistências podem ser combinadas numa só, usando os três passos indicados na figura seguinte. Primeiro combinam-se as resistências de  $2.7\text{ k}\Omega$  e  $2.2\text{ k}\Omega$ , em série, a seguir a resultante combina-se, em paralelo, com a resistência de  $5.6\text{ k}\Omega$  e a resultante combina-se em série com a resistência de  $8.2\text{ k}\Omega$ .



Com uma única resistência ligada à f.e.m. de  $5\text{ V}$ , a diferença de potencial nessa resistência são  $5\text{ V}$  e a corrente é:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{5}{10813} = 462\text{ }\mu\text{A}$$

Substituindo a resistência de  $10.813\text{ k}\Omega$  pelas resistências de  $2.613\text{ k}\Omega$  e  $8.2\text{ k}\Omega$  em série, como mostra a figura seguinte, a corrente de  $462\text{ }\mu\text{A}$  será igual nas duas e as diferenças de potencial serão essa corrente multiplicada pelas duas resistências.



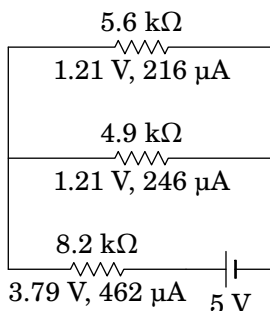
Observe-se que os resultados das diferenças de potencial foram ambos arredondados a duas casas decimais e de forma a que a soma deles seja igual aos  $5\text{ V}$  da f.e.m.

Substituindo a resistência de  $2.613\text{ k}\Omega$  pelas resistências de  $5.6\text{ k}\Omega$  e  $4.9\text{ k}\Omega$  em paralelo, a diferença de potencial nessas duas resistências em paralelo será a mesma,  $1.21\text{ V}$ , e as correntes nas duas resistências obtêm-se usando a lei de Ohm:

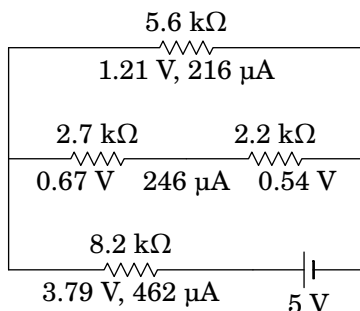
$$I_1 = \frac{1.21}{5600} = 216.07\text{ }\mu\text{A}$$

$$I_2 = \frac{1.21}{4900} = 246.94\text{ }\mu\text{A}$$

Arredondando as correntes para números inteiros, de forma consistente com o circuito anterior, usaremos 216 e 246 como mostra a figura seguinte (a soma deverá ser 462 e 246.94 está mais próximo de 246 do que 216.07 em relação a 215).



Finalmente, substitui-se a resistência de  $4.9\text{ k}\Omega$  pelas resistências de  $2.7\text{ k}\Omega$  e  $2.2\text{ k}\Omega$ , recuperando-se o circuito original. Nessas duas resistências em série a corrente de  $246\text{ }\mu\text{A}$  será a mesma, e as diferenças de potencial obtêm-se multiplicando essa corrente pelos valores das duas resistências. A figura seguinte mostra a diferença de potencial e a corrente em todas as resistências do circuito original.



### Problema 5.7

A temperatura num dado momento é  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10%?

**Resolução.** Se  $R_{12}$  for a resistência a  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a resistência à temperatura  $T$  procurada será  $R = 1.1 R_{12}$  ( $R_{12}$  mais 10% de  $R_{12}$ ). Estas duas resistências podem ser relacionadas com a resistência  $R_{20}$ , a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , através do valor do coeficiente de temperatura do cobre a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $4.036 \times 10^{-3}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  (tabela 5.2

do livro de texto). Usando a equação (5.32) do livro de texto, temos então que:

$$\begin{cases} R_{12} = R_{20} [1 + 4.036 \times 10^{-3}(12 - 20)] \\ 1.1R_{12} = R_{20} [1 + 4.036 \times 10^{-3}(T - 20)] \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, eliminam-se  $R_{12}$  e  $R_{20}$  ficando uma equação com uma única variável,  $T$ :

$$\begin{aligned} 1.1 &= \frac{1 + 4.036 \times 10^{-3}(T - 20)}{0.9677} \\ \Leftrightarrow T &= 20 + \frac{1.1 \times 0.9677 - 1}{4.036 \times 10^{-3}} = 36.0^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Como tal, a temperatura deverá aumentar  $24.0^\circ\text{C}$  (de  $12^\circ\text{C}$  para  $36.0^\circ\text{C}$ ).

### Problema 5.8

A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, cujo filamento é feito de tungstênio, medida à temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$  é  $R = 65 \Omega$ . No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado para a sua resistência. Justifique esta diferença, e calcule a temperatura do filamento de tungstênio quando a lâmpada se encontra acesa, assumindo que a resistividade elétrica do tungstênio varia linearmente com a temperatura.

**Resolução.** A potência e voltagem nominais, indicadas pelo fabricante, permitem determinar o valor da resistência nominal, usando a expressão da potência numa resistência,  $P = \Delta V^2/R$ ,

$$R = \frac{\Delta V^2}{P} = \frac{230^2}{60} = 881.7 \Omega$$

Esta é a resistência do filamento de tungstênio com a lâmpada acesa quando esta for ligada à voltagem de 230 V. O filamento, devido à sua temperatura elevada, emite radiação na região do visível (luz) e portanto a lâmpada ilumina.

A resistência a  $20^\circ\text{C}$ ,  $R_{20} = 65 \Omega$ , quando a lâmpada está apagada, é muito menor e a esta temperatura o filamento de tungstênio não aquece o suficiente para poder iluminar. A temperatura do filamento de tungstênio com a lâmpada acesa obtém-se a partir da relação entre a resistência e a temperatura, usando o coeficiente de temperatura do tungstênio a  $20^\circ\text{C}$ , o qual é igual a  $4.484 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ :

$$881.7 = 65 [1 + 4.484 \times 10^{-3}(T - 20)] \rightarrow T = 2822^\circ\text{C}$$

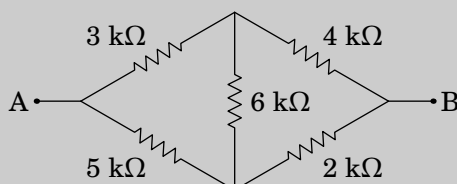
Quando a diferença de potencial na lâmpada for de 230 V, o filamento aquecerá até 2822 °C, produzindo luz.

**Comentários:** O resultado anterior é apenas uma aproximação, já que a relação entre resistência e temperatura provavelmente já não será linear à temperatura elevada da lâmpada. De qualquer forma, a temperatura deve ser da ordem dos milhares de graus Celsius para que o filamento produza luz visível. A lâmpada não queima porque dentro dela não há oxigênio. O mecanismo de produção de luz usado nas lâmpadas incandescentes (aquecer um filamento) é muito ineficiente, pois grande parte da energia elétrica é dissipada sob a forma de calor; as lâmpadas fluorescentes são muito mais eficientes. Hoje em dia as lâmpadas de LEDs são ainda mais eficientes, aproveitando quase toda a energia elétrica para produzir luz.

## 6 Circuitos de corrente contínua

### Problema 6.1

Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B.



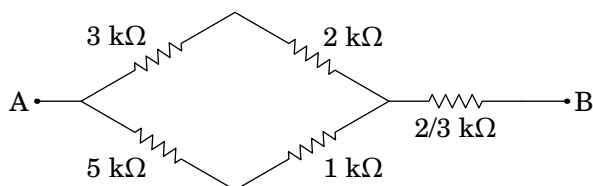
**Resolução.** Usando a transformação delta-estrela, o triângulo formado pelas resistências de 4 kΩ, 2 kΩ e 6 kΩ pode ser substituído pelas 3 resistências:

$$R_1 = \frac{6 \times 4}{6 + 4 + 2} = 2 \text{ k}\Omega$$

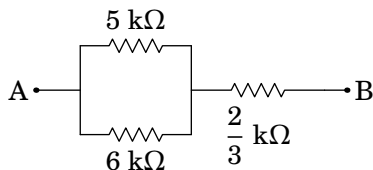
$$R_2 = \frac{4 \times 2}{6 + 4 + 2} = \frac{2}{3} \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = \frac{6 \times 2}{6 + 4 + 2} = 1 \text{ k}\Omega$$

e o circuito inicial fica equivalente ao seguinte circuito:



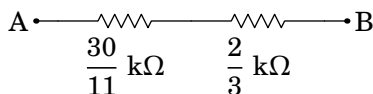
As resistências de 3 kΩ e 2 kΩ estão em série e as resistências de 5 kΩ e 1 kΩ também. Combinando estas resistências, o novo circuito equivalente é o seguinte:



As resistências de  $5\text{ k}\Omega$  e  $6\text{ k}\Omega$ , em paralelo, podem ser substituídas pela resistência equivalente,

$$R_p = \frac{5 \times 6}{5 + 6} = \frac{30}{11}\text{ k}\Omega$$

E o circuito fica com apenas duas resistências em série entre A e B:



A resistência total entre A e B é  $112/33\text{ k}\Omega$ , aproximadamente igual a  $3.394\text{ k}\Omega$ .

### Problema 6.2

Considere duas resistências  $R_1$  e  $R_2$  ligadas em paralelo. Uma corrente total  $I$  distribui-se entre as duas resistências, passando corrente  $I_1$  por  $R_1$  e corrente  $I_2$  por  $R_2$ . Admita que as correntes  $I_1$  e  $I_2$  podem tomar qualquer valor (inclusivamente negativo) desde que  $I = I_1 + I_2$ . Determine os valores de  $I_1$  e  $I_2$  que minimizam a potência dissipada por efeito Joule nas resistências, e mostre que se obtém o resultado da equação (6.13) do livro.

**Resolução.** Considerando as correntes  $I_1$  e  $I_2$  variáveis, mas  $I = I_1 + I_2$  fixa, a potência dissipada em cada uma das resistências pode ser escrita em função de apenas uma das variáveis; por exemplo, em função de  $I_1$ :

$$P_1 = R_1 I_1^2 \quad P_2 = R_2 (I - I_1)^2$$

A potência total dissipada, igual à soma das potências dissipadas nas duas resistências, é:

$$P(I_1) = R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2$$

O valor da variável  $I_1$  que faz com que a potência tenha um ou mais extremos é o valor de  $I_1$  para o qual a derivada de  $P(I_1)$  em ordem a  $I_1$  é nula:

$$\frac{dP}{dI_1} = 2R_1 I_1 - 2R_2 (I - I_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$



Este valor de  $I_1$  corresponde, de facto, a um mínimo da potência pois a segunda derivada é positiva:

$$\frac{d^2P}{dI_1^2} = 2R_1 + 2R_2 > 0$$

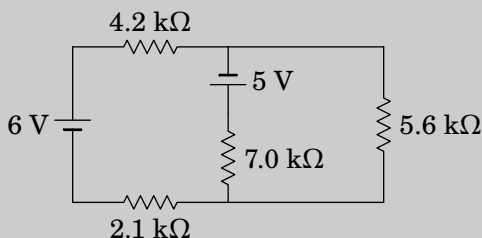
Substituindo em  $I_2 = I - I_1$ , obtém-se então:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

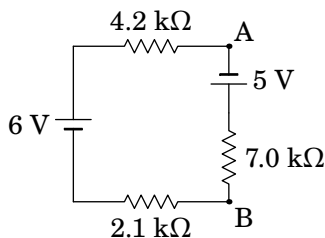
Vemos assim que a corrente eléctrica  $I$  se divide pelas duas resistências em paralelo de modo a *minimizar* a potência dissipada, i.e., a minimizar a energia dissipada por efeito de Joule.

### Problema 6.3

No circuito da figura, determine quais das fontes de força eletromotriz fornecem ou absorvem energia e calcule a potência fornecida, ou absorvida, por cada uma.



**Resolução.** Podemos determinar o equivalente de Thévenin entre os dois pontos onde está ligada a resistência de 5.6 kΩ. A f.e.m.  $V_{th}$  é a diferença de potencial entre os pontos A e B no seguinte circuito:



Trata-se de uma malha simples, com f.e.m. total de 11 V e corrente no sentido dos ponteiros do relógio. A diferença de potencial entre B e A é

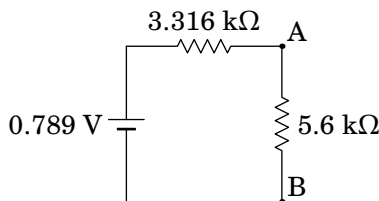
5 V menos a diferença de potencial na resistência de 7.0 k $\Omega$ , que pode ser determinada por divisão de voltagem na malha:

$$V_B - V_A = 5 - \frac{7 \times 11}{2.1 + 4.2 + 7.0} = -0.789 \text{ V}$$

$V_{th}$  é igual a 0.789 V, positiva em A e negativa em B. Com as duas fontes em curto circuito, entre A e B as resistências de 2.1 k $\Omega$  e 4.2 k $\Omega$  estão em série e o resultado em paralelo com a resistência de 7.0 k $\Omega$ . A resistência de Thévenin é igual a:

$$R_{th} = \frac{6.3 \times 7}{6.3 + 7} = 3.316 \text{ k}\Omega$$

Ligando o equivalente de Thévenin à resistência de 5.6 k $\Omega$ ,



a diferença de potencial nessa resistência é igual a:

$$V_A - V_B = \frac{5.6 \times 0.789}{5.6 + 3.316} = 0.496 \text{ V}$$

No circuito inicial, admitindo que na resistência de 7.0 k $\Omega$  circula corrente  $I_5$  de cima para baixo, a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual a:

$$V_A - V_B = 7 I_5 - 5$$

e como já vimos que essa diferença de potencial é igual a 0.496 V, o valor de  $I_5$  é,

$$I_5 = 0.785 \text{ mA}$$

O resultado positivo para  $I_5$  indica que essa corrente de facto circula de cima para baixo e então a fonte de 5 V está a fornecer potência igual a:

$$P_5 = 5 I_5 = 3.93 \text{ mW}$$

No circuito inicial, admitindo que a corrente  $I_6$  nas resistências de 2.1 k $\Omega$  e 4.2 k $\Omega$  circula passando pela fonte de 6 V de baixo para cima, a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual a:

$$V_A - V_B = 6 - 6.3 I_6 = 0.496 \implies I_6 = 0.874 \text{ mA}$$

O resultado positivo para  $I_6$  indica que a fonte de 6 V também fornece potência com valor:

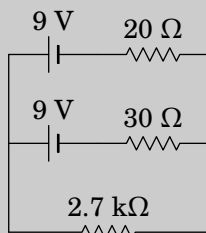
$$P_6 = 6 I_6 = 5.24 \text{ mW}$$

### Problema 6.4

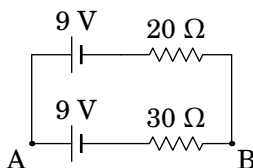
Uma resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$  liga-se a duas pilhas, em série, ambas com a mesma f.e.m. de  $9 \text{ V}$ , mas com diferentes resistências internas, tal como mostra o digrama seguinte.

(a) Determine a corrente na resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$ .

(b) Qual das duas pilhas fornece maior potência?



**Resolução.** (a) A f.e.m.  $V_{th}$  entre os pontos onde está ligada a resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$  é a diferença de potencial entre os pontos A e B no seguinte circuito:



Trata-se de uma malha simples, com f.e.m. total nula; como tal, a corrente na malha é nula, a diferença de potencial nas duas resistências também é nula e:

$$V_{th} = V_A - V_B = 9 \text{ V}$$

Com as duas fontes em curto circuito, a resistência entre A e B é a equivalente das duas resistências em paralelo:

$$R_{th} = R_{AB} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12 \text{ }\Omega$$

A corrente na resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$  é igual a:

$$I = \frac{V_{th}}{2700 + R_{th}} = \frac{9}{2700 + 12} = 3.32 \text{ mA}$$

(b) A diferença de potencial na resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$  é igual a:

$$V_A - V_B = \frac{2700 V_{th}}{2700 + R_{th}} = 8.92 \text{ V}$$

No ramo onde está a pilha com resistência de  $20\ \Omega$ ,

$$V_A - V_B = 9 - 20I_1 = 8.92 \implies I_1 = 1.99\ \text{mA}$$

e no ramo onde está a pilha com resistência de  $20\ \Omega$ ,

$$V_A - V_B = 9 - 30I_2 = 8.92 \implies I_2 = 1.33\ \text{mA}$$

Como a corrente que cada pilha fornece à resistência de  $2.7\ \text{k}\Omega$  é  $I_i(V_A - V_B)$  a pilha que mais potência fornece é a que tem resistência interna de  $20\ \Omega$ , por ser a que fornece mais corrente.

### Problema 6.5

Uma fonte com voltagem  $\Delta V_{\text{in}}$  é ligada a uma resistência  $R$ , mas pretende-se que a voltagem nessa resistência seja reduzida para  $\Delta V_{\text{out}}$ , menor do que a voltagem de entrada  $\Delta V_{\text{in}}$ . Para conseguir esse objetivo, usa-se um circuito chamado *atenuador*. A figura mostra, dentro da caixa a tracejado, um possível circuito atenuador que tem a vantagem de permitir fazer com que a resistência entre os pontos de entrada A e B continue igual à resistência  $R$  do dispositivo ligado entre os pontos de saída C e D.

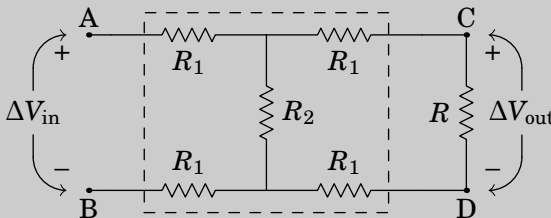
(a) Mostre que para que a resistência entre A e B seja igual a  $R$ , as resistências  $R_1$  e  $R_2$  do atenuador devem verificar a condição:

$$4R_1(R_1 + R_2) = R^2$$

(b) Se  $R_1$  e  $R_2$  verificam a condição da alínea anterior, mostre que o fator de atenuação,  $\Delta V_{\text{out}}/\Delta V_{\text{in}}$  é dado pela expressão:

$$\frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta V_{\text{in}}} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R}$$

(c) Determine os valores de  $R_1$  e  $R_2$  que fazem com que a resistência entre A e B seja igual a  $R = 300\ \Omega$ , com atenuação  $\Delta V_{\text{out}}/\Delta V_{\text{in}} = 0.5$ .

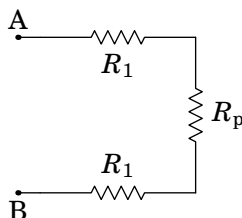


(Problema retirado de Nilsson-Riedel:2015:EC)

**Resolução.** (a) A resistência  $R$  soma-se às duas resistências  $R_1$  próximas dela, que estão em série com ela, e o resultado combina-se em paralelo com a resistência  $R_2$ , dando a resistência equivalente:

$$R_p = \frac{R_2 (2R_1 + R)}{2R_1 + R_2 + R}$$

O circuito é então equivalente ao seguinte circuito mais simples:



e a resistência entre A e B é igual a:

$$R_{AB} = 2R_1 + R_p = \frac{4R_1 (R_1 + R_2) + R (2R_1 + R_2)}{2R_1 + R_2 + R}$$

igualando essa expressão a  $R$  obtém-se:

$$\begin{aligned} 4R_1 (R_1 + R_2) + R (2R_1 + R_2) &= R (2R_1 + R_2 + R) \\ 4R_1 (R_1 + R_2) &= R^2 \end{aligned}$$

(b) No circuito da figura acima, com duas resistências  $R_1$  em série com  $R_p$ , sendo  $V_A - V_B = \Delta V_{in}$  e  $R_{AB} = R$ , o princípio da divisão de tensão permite determinar a diferença de potencial em  $R_p$ :

$$\Delta V_p = \frac{R_p \Delta V_{in}}{R} = \frac{R_2 (2R_1 + R) \Delta V_{in}}{R (2R_1 + R_2 + R)}$$

diferença de potencial essa que é a mesma do que no ramo com duas resistências  $R_1$  em série com  $R$ , no circuito inicial. Usando novamente o princípio da divisão de tensão obtém-se:

$$\Delta V_{out} = \frac{R \Delta V_p}{2R_1 + R} = \frac{R_2 \Delta V_{in}}{2R_1 + R_2 + R}$$

e o fator de atenuação é:

$$\frac{\Delta V_{out}}{\Delta V_{in}} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R}$$

(c) Substituindo os valores dados nas expressões obtidas nas duas alíneas anteriores, obtém-se o seguinte sistema não-linear:

$$4R_1(R_1 + R_2) = 300^2$$

$$\frac{R_2}{2R_1 + R_2 + 300} = 0.5$$

A segunda equação permite determinar  $R_2$  em função de  $R_1$ :

$$R_2 = R_1 + 0.5R_2 + 150 \implies R_2 = 2R_1 + 300$$

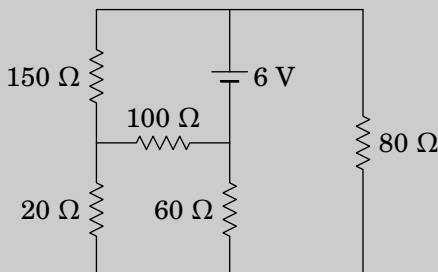
e substituindo na primeira equação obtém-se uma equação quadrática para  $R_1$ :

$$12R_1^2 + 1200R_1 - 90000 = 0$$

A raiz positiva é  $R_1 = 50 \, \Omega$ , que conduz ao valor de  $R_2 = 400 \, \Omega$  (a raiz negativa não interessa).

### Problema 6.6

Determine a potência dissipada em cada resistência no circuito representado no diagrama e a potência fornecida pela f.e.m. Verifique que a potência fornecida pela f.e.m. é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



**Resolução.** Para determinar a potência dissipada em cada resistência, basta encontrar os potenciais dos 4 nós do circuito e em cada resistência dividir a diferença de potencial, ao quadrado, pelo valor da resistência.

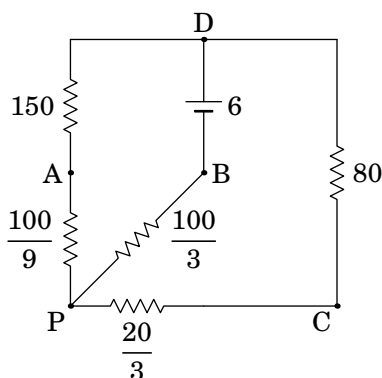
As resistências de  $20 \, \Omega$ ,  $100 \, \Omega$  e  $60 \, \Omega$ , em configuração delta, podem ser substituídas por três resistências em estrela, com os seguintes valores:

$$R_A = \frac{20 \times 100}{180} = \frac{100}{9} \, \Omega$$

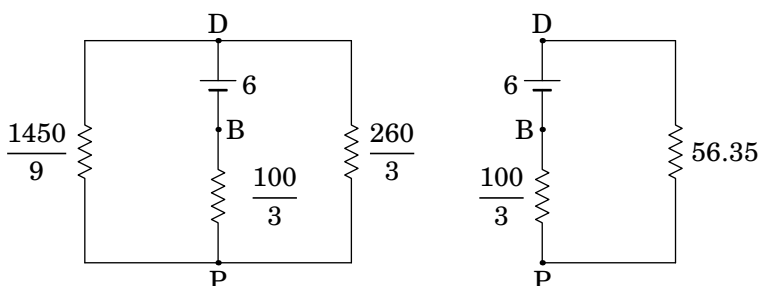
$$R_B = \frac{60 \times 100}{180} = \frac{100}{3} \, \Omega$$

$$R_C = \frac{20 \times 60}{180} = \frac{20}{3} \, \Omega$$

Com essa substituição, o circuito equivalente é o seguinte, em que as resistências estão em  $\Omega$ , a f.e.m. em V e os nós do circuito original são A, B, C e D.



Combinam-se as resistências de 150 e 100/9, em série, e as resistências de 80 e 20/3, em série, ficando o circuito do lado esquerdo da seguinte figura. A seguir combinam-se as resistências de 1450/9 e 260/3, em paralelo, ficando o circuito do lado direito da figura seguinte:



Arbitrando  $V_B = 0$ , o potencial do nó D será  $V_D = 6$  V. Por divisão de voltagem, no circuito do lado direito da figura acima, determina-se o potencial do ponto P:

$$V_P = \frac{6 \times (100/3)}{56.35 + 100/3} = 2.23 \text{ V}$$

A diferença de potencial  $V_D - V_P = 3.77$  V pode ser dividida nos ramos com os pontos A e C, no circuito com as resistências em estrela, para obter os potenciais dos nós A e C:

$$6 - V_A = \frac{150 \times 3.77}{150 + 100/9} \Leftrightarrow V_A = 2.49 \text{ V}$$

$$6 - V_C = \frac{80 \times 3.77}{80 + 20/3} \Leftrightarrow V_C = 2.52 \text{ V}$$

A tabela seguinte mostra a diferença de potencial em cada uma das 5 resistências, e a potência que dissipa.

Resistência / $\Omega$	Voltagem / V	Potência / mW
20	$V_C - V_A = 0.03$	0.045
60	$V_C - V_B = 2.52$	105.84
80	$V_D - V_C = 3.48$	151.38
100	$V_A - V_B = 2.49$	62.001
150	$V_D - V_A = 3.51$	82.134

A potência total dissipada no circuito, igual à soma das potências dissipadas nas resistências, é igual a 401.4 mW. A corrente que passa pela f.e.m. é a mesma do que na resistência de  $100/3 \Omega$ , que é igual a:

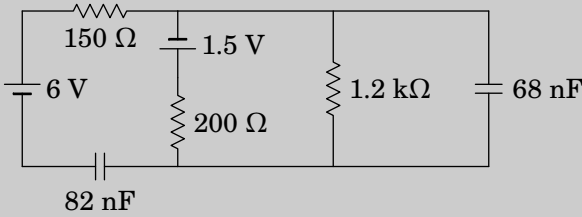
$$I = \frac{V_P - V_B}{100/3} = \frac{2.23 \times 3}{100} = 66.9 \text{ mA}$$

e a potência fornecida pela f.e.m. é igual a  $6 I = 401.4 \text{ mW}$ , que é exatamente igual à potência total dissipada no circuito.

**Problema 6.7**

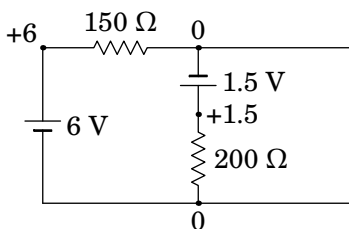
No circuito representado no diagrama, os dois condensadores estão inicialmente descarregados. Determine:

- (a) As correntes iniciais nas resistências e condensadores.
- (b) As cargas finais nos condensadores, indicando as suas polaridades.



**Resolução.** (a) No instante inicial, em que os condensadores descarregados atuam como curto-circuitos, o circuito equivalente é o seguinte



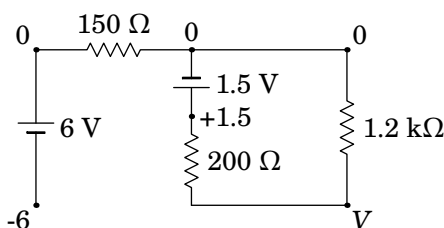


A resistência de  $1.2\text{ k}\Omega$  não foi representada, porque o equivalente dessa resistência em paralelo com o condensador de  $68\text{ nF}$  (curto-circuito com resistência nula) é uma resistência nula (curto-circuito).

Arbitrando potencial nulo no ponto onde o eletrodo negativo da f.e.m. de  $1.5\text{ V}$  está em contacto com a resistência de  $150\ \Omega$ , o eletrodo negativo da f.e.m. de  $6\text{ V}$  também terá potencial nulo, porque o potencial em todos os pontos no curto-circuito à direita do circuito é o mesmo. Como tal, o potencial no eletrodo positivo da f.e.m. de  $1.5\text{ V}$  será  $1.5\text{ V}$ , e o potencial do eletrodo positivo da f.e.m. de  $6\text{ V}$  será  $6\text{ V}$ , tal como mostra o diagrama acima.

Na resistência de  $150\ \Omega$  a diferença de potencial é  $6\text{ V}$  e a corrente será  $6/150 = 0.04\text{ A}$  (de esquerda para direita), que é a mesma corrente no condensador de  $82\text{ nF}$  (de direita para esquerda). Na resistência de  $200\ \Omega$ , a diferença de potencial é  $1.5\text{ V}$  e a corrente  $1.5/200 = 0.0075\text{ A}$  (de cima para baixo). Pela regra dos nós, a corrente no condensador de  $68\text{ nF}$  é então,  $0.04 - 0.0075 = 0.0325\text{ A}$  (de cima para baixo). Na resistência de  $1.2\text{ k}\Omega$  a corrente é nula, porque a diferença de potencial é nula.

(b) No estado final, quando os condensadores completamente carregados são equivalentes a interruptores abertos, o circuito equivalente é o seguinte



Observe-se que a corrente na resistência de  $150\ \Omega$  é nula, porque não tem percurso por onde circular. Como tal, o potencial nos dois extremos dessa resistência é o mesmo e pode arbitrar-se que é nulo, como mostra o diagrama anterior. O potencial no eletrodo negativo da f.e.m. de  $6\text{ V}$  será então igual a  $-6\text{ V}$  e o potencial no eletrodo positivo da f.e.m. de  $1.5\text{ V}$  será igual a  $1.5\text{ V}$ .

No ponto comum às resistências de  $200\ \Omega$  e  $1.2\text{ k}\Omega$  o valor do potencial,  $V$  no diagrama, pode ser obtido por divisão de tensão ( $1.5\text{ V}$  dividido entre

as resistências de  $200\ \Omega$  e  $1.2\ \text{k}\Omega$ ):

$$V = \frac{1200}{1200 + 200} 1.5 = 1.286\ \text{V}$$

Observa-se então que no condensador de  $82\ \text{nF}$  a carga é positiva na armadura do lado direito (maior potencial), no condensador de  $68\ \text{nF}$  a carga é negativa na armadura de cima (menor potencial) e os valores das cargas nesses dois condensadores são os seguintes:

$$Q_1 = 82 \times (1.286 - (-6)) = 597\ \text{nC}$$

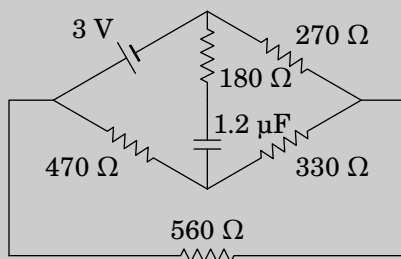
$$Q_2 = 68 \times 1.286 = 87.4\ \text{nC}$$

### Problema 6.8

Relativamente ao circuito da figura abaixo:

(a) Determine a intensidade e sentido da corrente no instante inicial no condensador, sabendo que este estava inicialmente descarregado.

(b) Determine a carga final no condensador, indicando a sua polaridade.



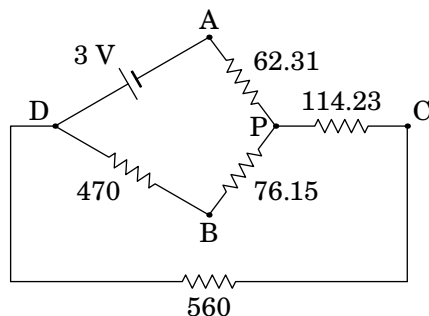
**Resolução.** (a) No estado inicial, com o condensador em curto-circuito, as resistências de  $180\ \Omega$ ,  $270\ \Omega$  e  $330\ \Omega$  formam um delta, que pode ser substituído pelas seguintes três resistências em estrela:

$$R_A = \frac{180 \times 270}{180 + 270 + 330} = \frac{810}{13} \approx 62.31$$

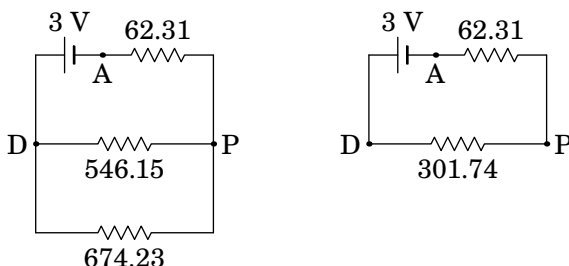
$$R_B = \frac{180 \times 330}{180 + 270 + 330} = \frac{990}{13} \approx 76.15$$

$$R_C = \frac{270 \times 330}{180 + 270 + 330} = \frac{1485}{13} \approx 114.23$$

E o circuito equivalente, com todas as resistências em unidades de  $\Omega$ , é o seguinte:



As resistências de 470 e 76.15, em série, substituem-se por uma resistência de 546.15 e as resistências de 114.23 e 560, também em série, substituem-se por uma resistência de 674.23. A seguir, as resistências de 546.15 e 674.23, em paralelo, substituem-se por uma resistência de  $546.15 \times 674.23 / (546.15 + 674.23) = 301.74$ . Os dois circuitos resultantes dessas duas simplificações são os seguintes:



No circuito do lado direito, as diferenças de potencial entre os pontos A, P e D são as seguintes:

$$V_P - V_A = \frac{62.31 \times 3}{62.31 + 301.74} = 0.5135 \text{ V}$$

$$V_D - V_P = \frac{301.74 \times 3}{62.31 + 301.74} = 2.4865 \text{ V}$$

e, como entre os pontos D e P estavam as resistências de 470 e 76.15, em série, com o ponto B entre elas, então:

$$V_B - V_P = \frac{76.15(V_D - V_P)}{470 + 76.15} = 0.3467 \text{ V}$$

A diferença de potencial entre A e B é igual a:

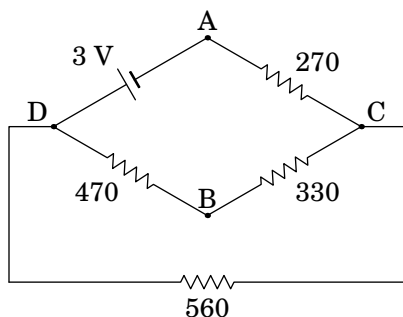
$$V_B - V_A = (V_B - V_P) + (V_P - V_A) = 0.3467 + 0.5135 = 0.8602 \text{ V}$$

E, com o condensador em curto-circuito, a resistência entre A e B é de  $180 \, \Omega$  e a corrente nesse ramo é igual a:

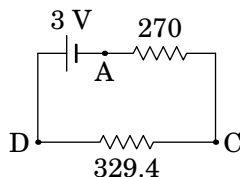
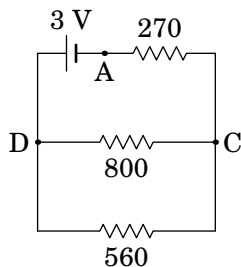
$$I = \frac{0.8602}{180} = 0.00478 \, \text{A}$$

Ou seja, no instante inicial a corrente no condensador é  $4.78 \, \text{mA}$ , de B para A (de baixo para cima).

(b) O circuito equivalente no estado final, com o condensador como interruptor aberto, é o seguinte



Onde as resistências de  $470 \, \Omega$  e  $330 \, \Omega$  estão em série entre C e D, e a resistência equivalente ficará em paralelo com a resistência de  $560 \, \Omega$ , conduzindo aos seguintes circuitos equivalentes mais simples:



No circuito do lado direito, as diferenças de potencial entre os pontos A, C e D são as seguintes:

$$V_C - V_A = \frac{270 \times 3}{270 + 329.41} = 1.3513 \, \text{V}$$

$$V_D - V_C = \frac{329.41 \times 3}{270 + 329.41} = 1.6487 \, \text{V}$$

e, como entre os pontos D e C estavam as resistências de 470 e 330, em série, com o ponto B entre elas, então:

$$V_B - V_C = \frac{330(V_D - V_C)}{470 + 330} = 0.6801 \text{ V}$$

A diferença de potencial entre A e B é igual a:

$$V_B - V_A = (V_B - V_C) + (V_C - V_A) = 0.6801 + 1.3513 = 2.0314 \text{ V}$$

O resultado positivo indica que a carga é positiva na armadura de baixo (maior potencial em B do que em A) e negativa na armadura de cima. Finalmente, a carga no condensador calcula-se a partir da sua voltagem

$$Q = C \Delta V = 1.2 \times 2.0314 = 2.44 \text{ } \mu\text{C}$$



## 7 Força magnética

### Problema 7.1

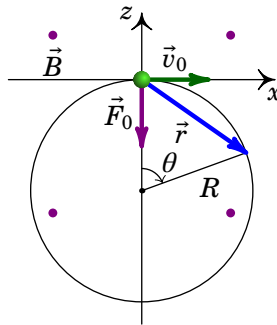
Um prótão (massa  $1.673 \times 10^{-27}$  kg) encontra-se na origem, em  $t = 0$ , com velocidade  $\vec{v} = 184 \hat{i}$  (km/s), dentro de uma região onde há vácuo e campo magnético uniforme:  $\vec{B} = -0.062 \hat{j}$  (T). Determine a posição do prótão em  $t = 0.85 \mu\text{s}$ .

**Resolução.** Em  $t = 0$ , a força magnética sobre o prótão é (unidades SI):

$$\vec{F}_0 = 1.602 \times 10^{-19} [184 \times 10^3 \hat{i} \times (-0.062 \hat{j})] = -1.8276 \times 10^{-15} \hat{k}$$

Observe-se que o peso do prótão,  $1.637 \times 10^{-26}$  N, é 11 ordens de grandeza inferior e, como tal, pode ser ignorado e não é necessário saber a direção da vertical.

Em  $t = 0$ , o prótão será desviado na direção negativa do eixo dos  $z$ ; mais tarde, a força terá outra direção diferente, mas sempre no plano  $xz$  (plano perpendicular a  $\vec{B}$ ). Como tal, a trajetória do prótão estará no plano  $xz$ . Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade, o módulo desta não muda e o módulo da força normal (magnética) permanece constante. O resultado é um movimento circular uniforme, no plano  $xz$ , com centro no semieixo negativo dos  $z$ , tal como mostra a figura seguinte.



Basta uma variável para descrever a posição do prótão, que pode ser o ângulo  $\theta(t)$  indicado na figura, com  $\theta = 0$  em  $t = 0$ . O vetor posição em qualquer

instante  $t \geq 0$  é:

$$\vec{r}(\theta) = R \left( \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k} \right) - R \hat{k}$$

O raio da trajetória determina-se igualando o módulo da força magnética à massa vezes a aceleração normal:

$$1.8276 \times 10^{-15} = 1.673 \times 10^{-27} \left( \frac{184000^2}{R} \right)$$

$$R = \frac{5.654 \times 10^{-17}}{1.8276 \times 10^{-15}} = 0.03094 \text{ m}$$

E a velocidade angular (constante) é igual a,

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{184000}{0.03094} = 5.947 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

Como a velocidade angular é constante e  $\theta = 0$  em  $t = 0$ , a expressão do ângulo em função do tempo é:

$$\theta(t) = \omega t = 5.947 \times 10^6 t$$

e substituindo  $t = 0.85 \mu\text{s}$  obtém-se o ângulo nesse instante (em radianos):

$$\theta = 5.055$$

Finalmente, o vetor posição encontra-se substituindo  $R$  e  $\theta$  na expressão de  $\vec{r}(\theta)$ :

$$\vec{r} = \left( -2.91 \hat{i} - 2.06 \hat{k} \right) \text{ cm}$$

### Problema 7.2

Um próton "navega" na atmosfera solar, a uma velocidade de  $0.15c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo ( $2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ). O próton atravessa um campo magnético uniforme de  $0.12 \text{ T}$ , formando um ângulo de  $25^\circ$  com a sua velocidade. Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do próton (a massa de um próton é  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$  e admita que com a velocidade  $0.15c$  os efeitos relativistas são desprezáveis).

**Resolução.** A componente da velocidade no plano perpendicular ao plano é (unidades SI):

$$v_{\perp} = 0.15 \times 2.998 \times 10^8 \sin 25^\circ = 1.901 \times 10^7$$

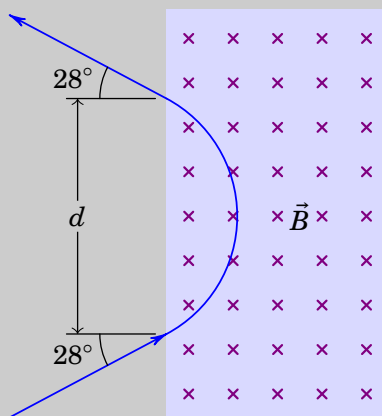


A projeção do movimento no plano perpendicular ao campo é movimento circular uniforme com raio igual a:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{1.673 \times 10^{-27} \times 1.901}{1.602 \times 10^{-19} \times 0.12} = 1.65 \text{ m}$$

### Problema 7.3

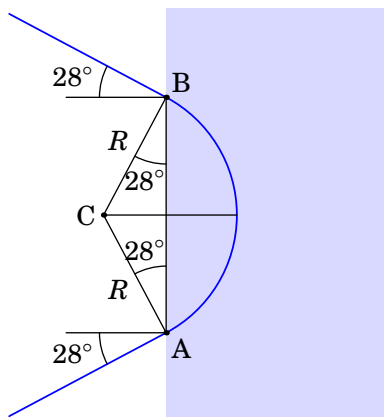
Um prótão desloca-se no vácuo, com velocidade de  $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ , entrando numa região retangular onde existe campo magnético constante  $\vec{B}$ , perpendicular à sua velocidade, como mostra a figura. No ponto onde o prótão penetra o campo magnético, a sua velocidade faz um ângulo de  $28^\circ$  com a fronteira do retângulo. Após a trajetória circular dentro do campo magnético, o prótão sai do retângulo com velocidade que faz novamente um ângulo de  $28^\circ$  com a fronteira do retângulo. Sabendo que o módulo do campo magnético é  $0.64 \text{ T}$ , e a massa do prótão é  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , determine a distância  $d$  entre os pontos onde o prótão entra e sai do retângulo onde existe campo magnético.



**Resolução.** Dentro do retângulo com campo magnético constante o movimento é circular uniforme com raio:

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

Nos pontos onde o prótão entra e sai dessa região (A e B na figura seguinte), a velocidade é tangente ao arco de círculo dentro do retângulo. Como tal, o triângulo ABC, onde C é o centro do arco, tem dois lados de comprimento  $R$  e dois ângulos de  $28^\circ$ :

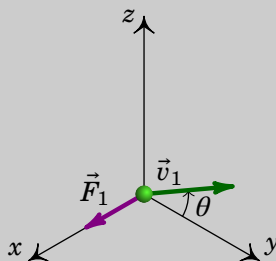


A partir da figura conclui-se que:

$$\begin{aligned}
 d = \overline{AB} &= 2 R \cos 28^\circ = \frac{2 m v \cos 28^\circ}{|q| B} \\
 &= \frac{2 \times 1.673 \times 10^{-27} \times 10^6 \times 0.8829}{1.602 \times 10^{-19} \times 0.64} = 28.85 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

#### Problema 7.4

Uma partícula com carga de 2,5 nC encontra-se numa região onde existe campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Quando se move com velocidade  $\vec{v}_1$ , no plano  $yz$  e fazendo um ângulo  $\theta = 10^\circ$  com o eixo dos  $y$ , tal como mostra a figura, a força magnética sobre ela é  $\vec{F}_1$ , na direção e sentido do eixo dos  $x$ . Quando a velocidade da partícula é  $\vec{v}_2 = (2.5 \times 10^4 \hat{i} + 3.2 \times 10^4 \hat{j})$  m/s, a força magnética sobre ela é  $\vec{F}_2 = (32 \hat{i} - 25 \hat{j} + 37.5 \hat{k})$  μN. Determine o campo  $\vec{B}$ .



**Resolução.** Como o campo magnético deve ser perpendicular a  $\vec{F}_1$ , a sua componente  $x$  será nula e terá a forma geral:

$$\vec{B} = B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Quando a velocidade da partícula for  $\vec{v}_2$ , a força magnética sobre a partícula será igual à carga vezes o produto vetorial entre  $\vec{v}_2$  e  $\vec{B}$  que dá

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= 2.5 \times 10^{-9} \left( 2.5 \times 10^4 \hat{i} + 3.2 \times 10^4 \hat{j} \right) \times \left( B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \right) \\ &= \left( 80 B_z \hat{i} - 62.5 B_z \hat{j} + 62.5 B_y \hat{k} \right) \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Igualando as três componentes desse vetor às 3 componentes dadas de  $\vec{F}_2$ , obtém-se um sistema de três equações,

$$\begin{cases} 80 B_z = 32 \\ 62.5 B_z = 25 \\ 62.5 B_y = 37.5 \end{cases}$$

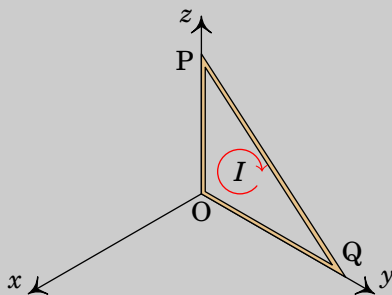
que conduz às componentes do campo magnético:

$$\vec{B} = (0.6 \hat{j} + 0.4 \hat{k}) \text{ T}$$

### Problema 7.5

A espira triangular na figura tem um vértice na origem, o vértice P no eixo dos  $z$ , a 30 cm da origem, e o vértice Q no eixo dos  $y$ , a 40 cm da origem. Existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 0.05 \hat{i} + 0.03 \hat{j} - 0.08 \hat{k}$  (em teslas) e na espira circula corrente de intensidade  $I = 23.4$  mA, no sentido indicado na figura.

- Determine a força magnética sobre cada um dos três lados da espira.
- Determine a força magnética total sobre a espira.
- Determine o momento do binário magnético sobre a bobina.



**Resolução.** (b) É conveniente começar por resolver a alínea b, que ajudará no cálculo da alínea a. Como o campo magnético é constante, a expressão

da força magnética sobre o fio retilíneo entre os pontos P e Q é

$$\vec{F}_{PQ} = \overline{PQ} \left( \vec{I} \times \vec{B} \right) = I \left( \overrightarrow{PQ} \times \vec{B} \right)$$

Onde  $\overline{PQ}$  é a distância entre os pontos P e Q e  $\overrightarrow{PQ}$  é o vetor com origem em P e fim em Q. Como tal, a força total sobre a espira é:

$$\vec{F} = I \left( \overrightarrow{PQ} \times \vec{B} \right) + I \left( \overrightarrow{QO} \times \vec{B} \right) + I \left( \overrightarrow{OP} \times \vec{B} \right) = I \left( \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

já que a soma dos três vetores entre os parêntesis é igual a zero.

(a) Usando unidades de mA para a corrente, mm para as distâncias e T para o campo, as forças calculadas estarão todas em  $\mu\text{N}$ . A força sobre o segmento entre O e P é:

$$\vec{F}_{OP} = 23.4 \left( 300 \hat{k} \right) \times \left( 0.05 \hat{i} + 0.03 \hat{j} - 0.08 \hat{k} \right) = -210.6 \hat{i} + 351 \hat{j}$$

No segmento entre Q e O é:

$$\vec{F}_{QO} = 23.4 \left( -400 \hat{j} \right) \times \left( 0.05 \hat{i} + 0.03 \hat{j} - 0.08 \hat{k} \right) = 748.8 \hat{i} + 468 \hat{k}$$

E como a soma das três forças é nula, a força sobre o segmento entre P e Q é (em  $\mu\text{N}$ ):

$$\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{OP} - \vec{F}_{QO} = -538.2 \hat{i} - 351 \hat{j} - 468 \hat{k}$$

(c) O versor normal à espira, no sentido da regra da mão direita segundo a corrente, é o versor  $-\hat{i}$  e o momento magnético da espira, em unidades SI, é igual a:

$$\vec{m} = - \left( \frac{0.3 \times 0.4}{2} \right) 23.4 \times 10^{-3} \hat{i} = -1.404 \times 10^{-3} \hat{i}$$

O momento do binário magnético é:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= -1.404 \times 10^{-3} \hat{i} \times \left( 0.05 \hat{i} + 0.03 \hat{j} - 0.08 \hat{k} \right) \\ &= - \left( 112.32 \hat{j} + 42.12 \hat{k} \right) \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

### Problema 7.6

Num filtro de velocidades há campos elétrico e magnético uniformes e perpendiculares, e as partículas entram com velocidade perpendicular aos dois campos. O módulo do campo magnético é 0.1 T e o do campo elétrico 0.2 MV/m.

- (a) Qual a velocidade das partículas à saída do filtro? (partículas que não são desviadas na sua passagem pelo filtro.)
- (b) Qual a energia dum próton à saída do filtro?
- (c) Qual a energia de um eletrão à saída do filtro?

**Resolução.** (a) A velocidade das partículas que atravessam o filtro é igual à relação entre os módulos dos campos elétrico e magnético:

$$v = \frac{0.2 \times 10^6}{0.1} = 2 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) Como a velocidade das partículas é muito menor do que a velocidade da luz, usa-se a expressão não relativista para determinar a energia cinética dum próton:

$$E = \frac{1}{2} 1.673 \times 10^{-27} (2 \times 10^6)^2 = 3.35 \times 10^{-15} \text{ J}$$

(c) No caso dum eletrão, a energia cinética é igual a:

$$E = \frac{1}{2} 9.109 \times 10^{-31} (2 \times 10^6)^2 = 1.82 \times 10^{-18} \text{ J}$$

### Problema 7.7

Calcule a intensidade máxima do momento do binário magnético que atua sobre uma bobina circular de 400 espiras de raio 0.1 cm, percorrida por uma corrente de 92 mA, num campo magnético uniforme de 0.3 T.

**Resolução.** O módulo do momento magnético da bobina é igual a (unidades SI):

$$m = 400 \times \pi 0.001^2 \times 92 \times 10^{-3} = 1.156 \times 10^{-4}$$

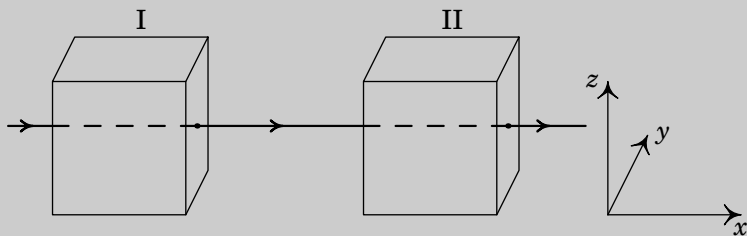
E o momento do binário magnético máximo é igual ao produto do módulo do momento magnético vezes o módulo do campo magnético:

$$M_{\text{máx}} = 1.156 \times 10^{-4} \times 0.3 = 3.47 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

### Problema 7.8

Um feixe de prótons desloca-se com velocidade constante  $\vec{v}$ , segundo o eixo dos  $x$ , atravessando duas regiões, I e II, caracterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo magnético,  $\vec{B}_1$  e em II, coexistem um campo magnético,  $\vec{B}_2$ , e um campo elétrico,  $\vec{E} = E \hat{j}$ . Todos os campos

são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. O peso dos prótons não é significativo. Quais as condições a que devem obedecer os campos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa duas regiões? Se em vez de prótons, fosse um feixe de elétrons, as condições estabelecidas manter-se-iam?



**Resolução.** A velocidade de cada próton é igual a,

$$\vec{v} = v \hat{i}$$

Na região I, a força magnética que atua sobre cada próton é,

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= q \vec{v} \times \vec{B}_1 = q v \hat{i} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= q v (B_y \hat{k} - B_z \hat{j}) \end{aligned}$$

Para que o feixe não seja desviado, as duas componentes  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  da força devem ser nulas, ou seja,  $B_y = B_z = 0$ . O campo na região I tem então a forma geral  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{i}$ , onde  $B_1$  pode ter qualquer valor, positivo ou negativo. Como tal, basta com que o campo magnético na região I seja na mesma direção da velocidade dos prótons para que estes não sejam desviados.

Na região II é necessário acrescentar a força elétrica:

$$\vec{F}_2 = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}_2 = q (E \hat{j} + v B_y \hat{k} - v B_z \hat{j})$$

Para que a componente  $\hat{k}$  seja nula, é necessário  $B_y = 0$ , e para que a componente  $\hat{j}$  seja nula, é necessário  $E = v B_z$ . Como tal, a forma geral do campo magnético na região II é a seguinte

$$\vec{B}_2 = B_x \hat{i} + \frac{E}{v} \hat{k}$$

onde  $B_x$  pode ter qualquer valor, positivo ou negativo. Ou seja, o campo magnético na região II deverá ter uma componente perpendicular à velocidade e

---

ao campo elétrico, com módulo igual ao módulo do campo elétrico dividido pela velocidade, e pode ter também uma componente paralela à velocidade.

Se o feixe fosse composto por elétrons, ou qualquer outro tipo de partículas com carga, as condições obtidas seriam as mesmas, já que os resultados não dependem do valor de  $q$  nem da massa das partículas.

**Comentários:** Observe-se que na região II o campo magnético necessário para que as partículas não sejam desviadas depende da velocidade  $v$  das partículas. Como tal, na região II há um filtro de velocidades, em que as partículas com velocidade  $v = B_z/E$  passam sem serem desviadas, mas as partículas com velocidades diferentes desse valor serão desviadas.





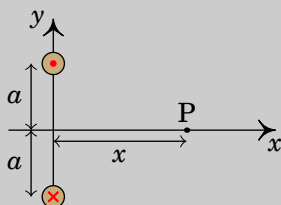
## 8 Cálculo do campo magnético

### Problema 8.1

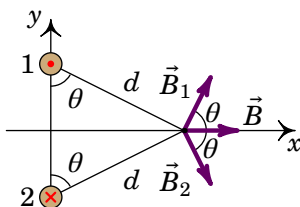
A figura mostra dois fios compridos e paralelos, no plano perpendicular a eles. A intensidade da corrente em cada fio é a mesma,  $I$ , mas com sentidos opostos, como indicam o ponto e o  $\times$  nos dois fios.

(a) Represente graficamente os vetores de campo magnético devido a cada fio e o campo magnético resultante no ponto P.

(b) Encontre a expressão do módulo do campo magnético em qualquer ponto P sobre o eixo  $x$ , em função da distância  $x$  de P à origem.



**Resolução.** (a) No plano  $xy$ , as linhas do campo  $\vec{B}_1$  devido a fio de cima são circunferências com centro no fio, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. No ponto P, o vetor  $\vec{B}_1$  é perpendicular ao segmento entre P e o fio, no sentido indicado na figura seguinte. As linhas do campo devido ao fio de baixo rodam no sentido dos ponteiros do relógio e no ponto P o campo  $\vec{B}_2$  é perpendicular ao segmento entre P e esse fio, como mostra a figura:



Como os dois fios estão à mesma distância do ponto P, e transportam correntes com a mesma intensidade, os módulos de  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  são iguais. E como o ângulo que cada um desses vetores faz com o eixo dos  $x$  é o mesmo, o campo

resultante em P,  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ , será no sentido positivo do eixo dos  $x$ , tal como mostra a figura acima.

(b) Os módulos dos dois campos no ponto P são:

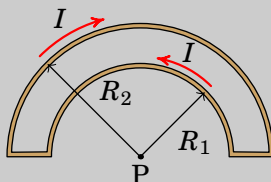
$$B_1 = B_2 = \frac{2 k_m I}{d}$$

O campo resultante,  $\vec{B} = B \hat{i}$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ , tem módulo  $B$  igual à soma das componentes  $x$  de  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$

$$B = 2 B_1 \cos \theta = \frac{4 k_m I}{d} \cos \theta = \frac{4 k_m I a}{d^2} = \frac{4 k_m I a}{x^2 + a^2}$$

### Problema 8.2

Considere o fio representado na figura, composto por dois segmentos semicirculares concêntricos de raios  $R_1$  e  $R_2$ , percorrido por uma corrente de intensidade  $I$ . Determine o campo magnético no centro P dos dois segmentos semicirculares.



**Resolução.** Com plano  $xy$  no plano do fio e origem no ponto P, o vetor posição  $\vec{r}$  do ponto P é nulo. Nos dois segmentos retilíneos o vetor posição  $\vec{r}'$  de um ponto no segmento é na mesma direção da corrente e, como tal,

$$\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{0}$$

No segmento semicircular de raio  $R_1$ , o vetor  $\vec{r}'$  é perpendicular à corrente  $\vec{I}$  e, usando a regra da mão direita obtém-se:

$$\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}') = I |\vec{r}'| \hat{k} = IR_1 \hat{k}$$

O campo magnético produzido por esse segmento, no ponto P, calcula-se a partir da lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = k_m \int_0^\pi \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} R_1 d\phi = \frac{\pi k_m I}{R_1} \hat{k}$$

No segmento semicircular de raio  $R_2$ , o vetor  $\vec{r}'$  também é perpendicular à corrente  $\vec{I}$ , mas a regra da mão direita conduz a um vetor oposto a  $\hat{k}$ :

$$\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -I|\vec{r}'| \hat{k} = -IR_2 \hat{k}$$

E o campo magnético produzido por esse segmento, no ponto P, é igual a:

$$\vec{B} = k_m \int_0^\pi \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} R_2 d\phi = -\frac{\pi k_m I}{R_2} \hat{k}$$

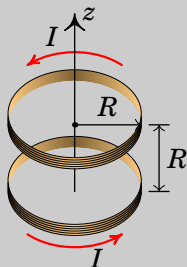
O campo total é a soma vetorial dos campos dos dois segmentos semicirculares:

$$\vec{B} = \pi k_m I \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{k}$$

em que o versor  $\hat{k}$  aponta para fora da folha.

### Problema 8.3

A figura mostra uma *bobina de Helmholtz*, formada por duas bobinas circulares, cada uma de raio  $R$  e com  $N$  espiras, ambas com eixo no eixo  $z$ , paralelas e a uma distância  $R$  entre elas. A corrente  $I$  é igual nas duas bobinas e circula no mesmo sentido em ambas. Com essa configuração é possível produzir campo magnético aproximadamente constante na região central entre as duas bobinas.



- Encontre a expressão  $B(z)$  do módulo do campo magnético em função de  $z$ , com  $z = 0$  no ponto médio entre os centros das duas bobinas.
- Mostre que as duas primeiras derivadas de  $B(z)$  são nulas em  $z = 0$ .
- Mostre que os três primeiros termos na série de Taylor de  $B(z)$  em torno de  $z = 0$  conduzem a um valor constante.

**Resolução.** (a) O módulo do campo magnético de cada bobina ao longo do

eixo  $z$ , calculado no exemplo 8.3 do livro, é:

$$\frac{2\pi k_m N I R^2}{(d^2 + R^2)^{3/2}}$$

onde  $d$  é a distância desde o centro da bobina. Na bobina de cima  $d = z - R/2$  e na bobina de baixo  $d = z + R/2$ . Como os campos das duas bobinas são ambos no sentido positivo do eixo  $z$ , o campo total é também nessa direção e tem módulo:

$$B(z) = \frac{2\pi k_m N I R^2}{\left((z - \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{2\pi k_m N I R^2}{\left((z + \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

(b) Derivando  $B(z)$  obtém-se:

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{6\pi k_m N I R^2 (z - \frac{R}{2})}{\left((z - \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{5/2}} - \frac{6\pi k_m N I R^2 (z + \frac{R}{2})}{\left((z + \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{5/2}}$$

e em  $z = 0$  o resultado é:

$$\left. \frac{dB}{dz} \right|_0 = \frac{3\pi k_m N I R^3}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{5/2}} - \frac{3\pi k_m N I R^3}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{5/2}} = 0$$

A segunda derivada é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dz^2} = & -\frac{6\pi k_m N I R^2}{\left((z - \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{5/2}} - \frac{6\pi k_m N I R^2}{\left((z + \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{5/2}} \\ & + \frac{30\pi k_m N I R^2 (z - \frac{R}{2})^2}{\left((z - \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{7/2}} + \frac{30\pi k_m N I R^2 (z + \frac{R}{2})^2}{\left((z + \frac{R}{2})^2 + R^2\right)^{7/2}} \end{aligned}$$

e em  $z = 0$  o resultado é:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 B}{dz^2} \right|_0 = & -\frac{12\pi k_m N I R^2}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{5/2}} + \frac{15\pi k_m N I R^4}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{7/2}} \\ = & -\frac{384\pi k_m N I}{5^{5/2} R^3} + \frac{1920\pi k_m N I}{5^{7/2} R^3} = 0 \end{aligned}$$

(c) Os três primeiros termos na série de Taylor de  $B(z)$  em torno de  $z = 0$  são:

$$B(z) = B(0) + \left. \frac{dB}{dz} \right|_0 z + \left. \frac{d^2 B}{dz^2} \right|_0 z^2$$

e usando os resultados das alíneas anteriores obtém-se:

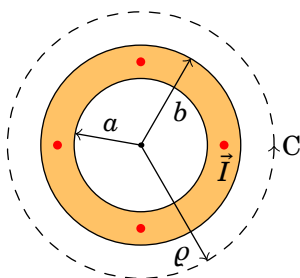
$$B(z) = \frac{32\pi k_m N I}{5^{3/2} R}$$

que não depende de  $z$ .

### Problema 8.4

Um condutor cilíndrico oco, com raio interno  $a$  e raio externo  $b$  transporta uma corrente  $I$ , paralela ao eixo do condutor, distribuída uniformemente na secção transversal do condutor. Encontre a expressão do campo magnético em função da distância até ao eixo do cilindro,  $\rho$ .

**Resolução.** A figura mostra a secção transversal do condutor. As linhas de campo magnético serão circunferências perpendiculares ao eixo do condutor e com centro nele; a curva C na figura é uma dessas linhas de campo, de raio  $\rho$  entre 0 e  $\infty$ .



A área da secção transversal do condutor é  $\pi(b^2 - a^2)$ , e como a corrente está distribuída uniformemente, a densidade de corrente é constante e com módulo igual a:

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

o integral de linha do campo magnético, ao longo da curva C na figura, é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \int ds = 2\pi\rho B$$

E usando a lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C$$

concluimos que:

$$B = \frac{2k_m I_C}{\rho}$$

Se o raio do círculo for menor que  $a$ , a corrente interna  $I_C$  e o campo magnético serão nulos:

$$B = 0 \quad (\rho < a)$$

se  $\rho > b$ , a corrente interna será igual à corrente total  $I$  e o campo magnético será:

$$\vec{B} = \frac{2k_m I}{\rho} \hat{\phi} \quad (\rho > b)$$

onde  $\hat{\phi}$  é o versor azimutal num sistema de coordenadas cilíndricas em que  $\hat{k}$  aponta na direção e sentido da corrente. Finalmente, dentro do condutor ( $a \leq \rho \leq b$ ) a corrente interna calcula-se multiplicando a área da parte da secção do condutor dentro do círculo,  $\pi(\rho^2 - a^2)$ , vezes a densidade da corrente. O resultado obtido é:

$$\vec{B} = \frac{2k_m I}{\rho} \left( \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \hat{\phi} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

### Problema 8.5

Um fio condutor cilíndrico muito comprido, de raio  $a$ , conduz corrente de intensidade  $I$ . A corrente está distribuída de forma não-uniforme, com  $J = A\rho^3$ , onde  $\rho$  é a distância até o eixo do fio e  $A$  uma constante. Determine a expressão do campo magnético no interior e no exterior do fio.

**Resolução.** Escolhendo o eixo  $z$  no eixo do cilindro, no sentido da corrente, e como a densidade de corrente depende unicamente da distância ao eixo, existe simetria cilíndrica e as linhas de campo magnético serão circunferências perpendiculares ao cilindro e com centro no eixo dos  $z$ . O integral de linha do campo  $\vec{B}$ , ao longo de uma linha de campo magnético de raio  $\rho$  é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint ds = 2\pi\rho B$$

E usando a lei de Ampère, obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C$$

Comparando as duas equações anteriores, conclui-se que:

$$B = \frac{2k_m I_C}{\rho}$$

Se  $\rho$  for menor que o raio do cilindro, a corrente através de C será:

$$I_C = \iint J dA = A \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r^4 dr d\phi = \frac{2}{5} \pi A \rho^5$$

Se  $\rho$  for maior do que o raio do cilindro, o integral de  $J$  é no intervalo  $0 \leq r \leq a$  e no resultado anterior basta substituir  $\rho$  por  $a$ :

$$I_C = \frac{2}{5} \pi A a^5 = I$$

Como tal, a constante  $A$  é igual a:

$$A = \frac{5I}{2\pi a^5}$$

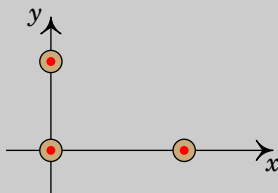
e o módulo do campo magnético é:

$$B = \begin{cases} \frac{2k_m I}{\rho} & \rho \geq a \\ \frac{2k_m I}{a^5} \rho^4 & \rho \leq a \end{cases}$$

O campo  $\vec{B}$  é na direção azimutal  $\hat{\phi}$ .

### Problema 8.6

A figura representa três fios condutores retilíneos, muito compridos e paralelos ao eixo  $z$ , com correntes no sentido positivo desse eixo. O primeiro fio passa pelo ponto  $(x, y) = (0, 1 \text{ cm})$  e tem corrente de  $0.64 \text{ A}$ , o segundo fio passa pela origem e tem corrente de  $0.63 \text{ A}$  e o terceiro fio passa pelo ponto  $(x, y) = (2 \text{ cm}, 0)$  e tem corrente de  $0.43 \text{ A}$ . Calcule o módulo da força magnética resultante, por unidade de comprimento, no fio que passa pela origem.



**Resolução.** Ambos fios produzem forças atrativas no fio que passa pela origem. Em unidades SI, a força produzida pelo fio que passa pelo ponto (0,

1 cm), por unidade de comprimento, é igual a:

$$\frac{\vec{F}_1}{l} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 0.64 \times 0.63}{0.01} \hat{j} = 8.064 \times 10^{-6} \hat{j}$$

E o fio que passa pelo ponto (2 cm, 0) produz força por unidade de comprimento igual a:

$$\frac{\vec{F}_2}{l} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 0.43 \times 0.63}{0.02} \hat{i} = 2.709 \times 10^{-6} \hat{i}$$

A força resultante sobre o fio na origem, por unidade de comprimento, é então:

$$\frac{\vec{F}}{l} = 2.709 \times 10^{-6} \hat{i} + 8.064 \times 10^{-6} \hat{j}$$

O módulo da força, por unidade de comprimento, é igual a:

$$\frac{F}{l} = \sqrt{2.709^2 + 8.064^2} \times 10^{-6} = 8.507 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}$$

### Problema 8.7

Considere dois fios de cobre, retilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma f.e.m. de 1.5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente:  $17 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ .)

**Resolução.** As resistências dos fios,  $R_1$  e  $R_2$ , calculam-se multiplicando a resistividade do cobre pelo comprimento do fio, dividido pela área da seção transversal do fio (unidades SI):

$$R_1 = \frac{\rho L_1}{\pi r_1^2} = \frac{17 \times 10^{-9} \times 0.6}{\pi \times 0.002^2} = 8.117 \times 10^{-4} \Omega$$

$$R_2 = \frac{\rho L_2}{\pi r_2^2} = \frac{17 \times 10^{-9} \times 0.6}{\pi \times 0.003^2} = 3.608 \times 10^{-4} \Omega$$

A corrente em cada fio é igual à diferença de potencial sobre a resistência do fio:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{1.5}{8.117 \times 10^{-4}} = 1848 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{1.5}{3.608 \times 10^{-4}} = 4158 \text{ A}$$



O módulo da força magnética entre os dois fios é:

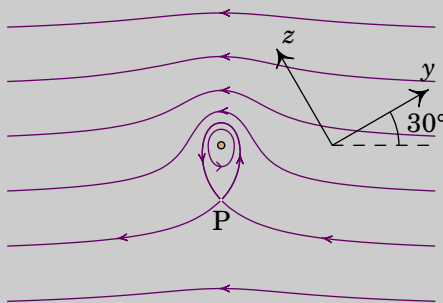
$$F = \frac{k_m I_1 I_2 L}{d} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 0.6 \times 1848 \times 4158}{0.09} = 10.25 \text{ N}$$

**Comentários:** A diferença de potencial de 1.5 V em cada fio conduz a correntes de milhares de ampere, que queimavam um fio de apenas uns poucos milímetros de raio. Se fosse usada uma pilha de 1.5 V, a resistência interna provavelmente seria maior do que a resistência de cada fio; como tal, a diferença de potencial no fio seria muito menor do que 1.5 V e a própria pilha aqueceria com o fio. Para realizar esse tipo de experiências para medir a força magnética entre dois fios de cobre, costuma ligar-se uma resistência em série para reduzir a intensidade da corrente, e a força magnética a medir será muito menor.

### Problema 8.8

A figura mostra as linhas de campo magnético de um fio com corrente, dentro de um campo magnético externo uniforme  $\vec{B}_{\text{ext}}$ ; o fio é perpendicular à folha e os eixos  $y$  e  $z$  foram escolhidos sobre o plano da folha.

- Escreva o versor na direção do campo externo, usando o sistema de eixos dado.
- Escreva o versor direção da corrente no fio.
- Calcule e represente o vetor unitário na direção da força sobre o fio.
- Considerando que  $I = 0.5 \text{ A}$  e se a força sobre o fio, por unidade de comprimento, for de  $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ , calcule a distância desde o fio até o ponto P.



**Resolução.** (a) O campo externo aponta da direita para a esquerda, que no sistema de eixos  $yz$  é:

$$\hat{B}_{\text{ext}} = -\cos 30^\circ \hat{j} + \sin 30^\circ \hat{k} = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \hat{j} + \hat{k})$$

(b) Na vizinhança do fio, as linhas de campo rodam no sentido contrário dos ponteiros do relógio, indicando que a corrente do fio é para cá da folha, ou seja, na direção de  $\hat{j} \times \hat{k}$  que é o versor  $\hat{i}$ .

(c) A direção e sentido da força é a mesma de  $\vec{I} \times \vec{B}_{\text{ext}}$ , ou seja,

$$\hat{i} \times \hat{B}_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \hat{i} \times (-\sqrt{3} \hat{j} + \hat{k}) = \frac{1}{2} (-\hat{j} - \sqrt{3} \hat{k})$$

Não é necessário dividir pelo módulo do vetor, porque este vetor já tem módulo unitário. Observe-se que a direção e sentido da força é de cima para baixo na figura.

(d) A força magnética sobre o fio é produzida pelo campo externo  $B_{\text{ext}}$ . Usando a expressão para a força magnética sobre o fio por unidade de comprimento,  $F/L$ , obtém-se o módulo do campo externo (unidades SI):

$$\frac{F}{L} = I B_{\text{ext}} \implies 2 \times 10^{-5} = 0.5 B_{\text{ext}} \implies B_{\text{ext}} = 4 \times 10^{-5}$$

No ponto P, o campo produzido pelo fio tem o mesmo módulo do campo externo. Igualando à expressão para o módulo do campo produzido pelo fio no ponto P ao módulo do campo externo, encontra-se a distância  $d$  (unidades SI):

$$\frac{2 k_m I}{d} = B_{\text{ext}} \implies d = \frac{2 k_m I}{B_{\text{ext}}} = \frac{10^{-7}}{4 \times 10^{-5}} = 2.5 \times 10^{-3}$$

O ponto P encontra-se a 2.5 mm do fio.

## 9 Indução eletromagnética

### Problema 9.1

O comprimento total entre as pontas das asas de um avião Boeing 747 é 60 m . O avião voa a 800 km/h e com altura constante, na direção sul-norte, numa região onde o campo magnético terrestre faz um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical e a sua intensidade é 0.5 G. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas da asas.

**Resolução.** Escolhendo o eixo  $x$  na direção de oeste para leste, o eixo  $y$  na direção de sul para norte e o eixo  $z$  na vertical, de baixo para cima, a velocidade do avião e o campo magnético são (unidades SI):

$$\vec{v} = \frac{800}{3.6} \hat{j} \quad \vec{B} = 5 \times 10^{-5} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} + \frac{\hat{k}}{2} \right)$$

O campo elétrico induzido é igual a

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{800 \times 5 \times 10^{-5}}{3.6} \hat{j} \times \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} + \frac{\hat{k}}{2} \right) = 5.556 \times 10^{-3} \hat{i}$$

O deslocamento infinitesimal ao longo das asas do avião é:

$$d\vec{r} = \hat{i} dx$$

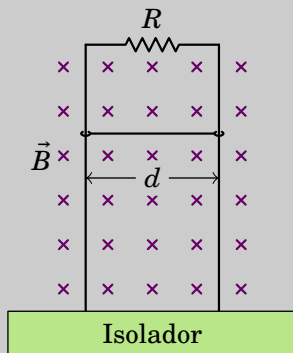
E a f.e.m. induzida nas asas é o integral de linha do campo elétrico induzido, ao longo das asas:

$$\varepsilon_i = \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_0^{60} 5.556 \times 10^{-3} (\hat{i} \cdot \hat{i}) dx = 5.556 \times 10^{-3} \int_0^{60} dx = 0.333 \text{ V}$$

### Problema 9.2

A figura mostra uma barra condutora de comprimento  $d$  e massa  $m$  que desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético  $\vec{B}$  uniforme. A resistência elétrica dos trilhos e da barra são desprezáveis comparadas com  $R$ . A barra mantém sempre o contato

com os trilhos, permitindo que circule corrente pela resistência  $R$ , mas o atrito é desprezável, assim como o efeito da resistência do ar na barra. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado mas rapidamente atinge uma velocidade constante  $v$ . Calcule o valor dessa velocidade limite  $v$ .



**Resolução.** Quando a barra já desceu uma distância  $y$  em relação à resistência  $R$ , a área da espira retangular formada pela barra, os trilhos e a resistência é  $A = yd$  e o fluxo magnético através dela é  $\Phi = Byd$ .

A f.e.m. e a corrente induzidas na espira são:

$$\varepsilon_i = -Bd \frac{dy}{dt} = -Bvd \quad I_i = \frac{|\varepsilon_i|}{R} = \frac{Bvd}{R}$$

A variação do fluxo aponta para dentro da folha e, pela lei de Lenz, a corrente induzida passa pela barra de esquerda para direita, dando origem a força magnética para cima, com módulo:

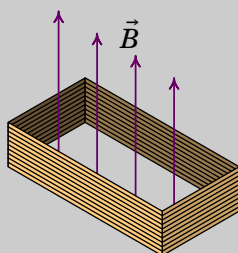
$$F_m = I_i B d = \frac{B^2 v d^2}{R}$$

Inicialmente (no repouso) essa força é nula e a barra desce com a aceleração da gravidade. Enquanto a velocidade  $v$  aumenta, a força magnética também aumenta, fazendo diminuir a força resultante. No instante em que a força resultante é nula, a velocidade atinge o valor limite e os módulos da força magnética e do peso são iguais:

$$mg = \frac{B^2 v d^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mgR}{B^2 d^2}$$

### Problema 9.3

Uma bobina retangular com 400 espiras, todas com arestas de 1.5 cm e 3 cm, é atravessada por um campo magnético externo  $\vec{B}$  de módulo 0.2 T, perpendicular aos planos das espiras. A resistência total da bobina é 42  $\Omega$ . Ligam-se entre si os dois extremos, inicial e final, da bobina e o campo externo é reduzido até 0, durante um intervalo de 4 segundos. Determine a carga total transferida através da bobina durante esse intervalo.



**Resolução.** O fluxo magnético inicial, através da bobina, é igual a

$$\Phi_0 = NBA$$

onde  $N$  é o número de espiras,  $B$  o módulo do campo magnético e  $A$  a área de cada espira. O fluxo final  $\Psi_f$  é nulo e a f.e.m. induzida média é:

$$\bar{\varepsilon}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{NBA}{\Delta t}$$

A corrente média é:

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}_i}{R} = \frac{NBA}{R\Delta t}$$

E a carga transferida é igual a:

$$\Delta Q = \bar{I} \Delta t = \frac{NBA}{R}$$

Substituindo os valores dados obtém-se:

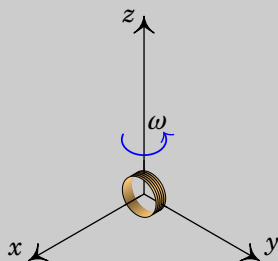
$$\Delta Q = \frac{400 \times 0.2 \times 0.015 \times 0.03}{42} = 8.57 \times 10^{-4} \text{ C} = 0.857 \text{ mC}$$

**Problema 9.4**

A bobina cilíndrica na figura tem 23 espiras de raio 1.6 cm. O eixo da bobina coincide com o eixo dos  $x$ , em  $t = 0$ , mas em  $t > 0$  roda no plano  $xy$  com velocidade angular constante  $\omega = 40 \text{ s}^{-1}$ , no sentido indicado na figura. Na região onde a bobina roda existe campo magnético variável:

$$\vec{B} = 2.2 e^{-14t} \hat{j} \quad (\text{unidades SI})$$

Determine a expressão da f.e.m. induzida na bobina, em função do tempo  $t$ , para  $t > 0$ .



**Resolução.** A velocidade angular é igual à derivada do ângulo entre o eixo da bobina e o eixo dos  $x$ :  $d\theta/dt = \omega = 40$ . Como esse ângulo é igual a zero no instante  $t = 0$ , a expressão do ângulo em função do tempo é (unidades SI):

$$\theta = 40t$$

e a expressão do versor normal à bobina, em função do tempo, é:

$$\hat{n} = \cos(40t) \hat{i} + \sin(40t) \hat{j}$$

O fluxo magnético através da bobina é a soma dos fluxos em todas as espiras (unidades SI):

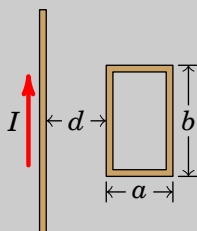
$$\begin{aligned} \Phi &= N \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \pi N r^2 (\vec{B} \cdot \hat{n}) \\ &= 23\pi(0.016)^2 \left( 2.2 e^{-14t} \right) \sin(40t) = 0.04069 e^{-14t} \sin(40t) \end{aligned}$$

A f.e.m. induzida é igual a menos a derivada do fluxo magnético em ordem ao tempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = e^{-14t} [0.5697 \sin(40t) - 1.628 \cos(40t)]$$

### Problema 9.5

A espira retangular na figura tem arestas  $a = 30$  cm e  $b = 63$  cm. No mesmo plano da espira encontra-se um fio condutor retilíneo e muito comprido, paralelo a uma das arestas de lado  $b$  e a uma distância  $d = 34$  cm dela. Determine a expressão da f.e.m. induzida na espira, em função do tempo  $t$ , quando o fio retilíneo é percorrido por corrente com intensidade  $I = 0.42 \sin(168t)$  (unidades SI).



**Resolução** O campo magnético que o fio produz através da espira é perpendicular à espira e com módulo (SI):

$$B = \frac{2k_m I}{\rho} = \frac{0.84 \times 10^{-7} \sin(168t)}{\rho}$$

onde  $\rho$  é a distância desde o fio, que varia entre  $d$  e  $d + a$  na espira.

O fluxo magnético na espira é o integral de superfície, na espira, da componente perpendicular do campo magnético:

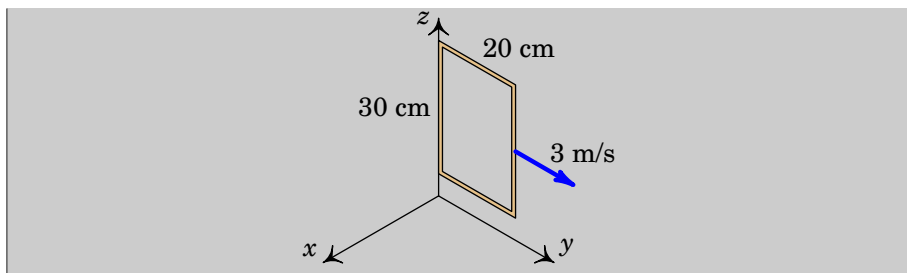
$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{0.63} \int_{0.34}^{0.64} B d\rho dy \\ &= 0.63 \times 0.84 \times 10^{-7} \sin(168t) [\ln(0.64) - \ln(0.34)] \\ &= 33.473 \times 10^{-9} \sin(168t) \end{aligned}$$

E a f.e.m. induzida é igual a menos a derivada desse fluxo, em ordem ao tempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -5.62 \times 10^{-6} \cos(168t)$$

### Problema 9.6

Uma espira condutora retangular, paralela ao plano  $Oyz$ , desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = 3 \hat{j}$  (m/s) dentro de uma região onde existe um campo magnético com componentes:  $B_x = (6 - y)$  (SI) e  $B_y = B_z = 0$ . Calcule a f.e.m. induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$  em que a espira se encontra na posição da figura, com um lado ao longo do eixo dos  $z$ .



**Resolução.** A componente do campo perpendicular à espira é (unidades SI):

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = \vec{B} \cdot \hat{i} = B_x = 6 - y$$

A aresta que se encontra no eixo dos  $z$  em  $t = 0$ , estará na posição  $3t$  num instante  $t$ , e a outra aresta, paralela ao eixo dos  $z$ , estará em  $3t + 0.2$ . As duas arestas paralelas ao eixo dos  $y$  estão sempre nas posições  $z_0$  e  $z_0 + 0.3$ .

O fluxo magnético através da espira é então:

$$\Phi = \int_{3t}^{3t+0.2} \int_{z_0}^{z_0+0.3} (6 - y) \, dz \, dy = 0.354 - 0.18t$$

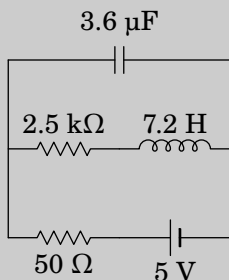
E a f.e.m. induzida é igual a:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 0.18 \, \text{V}$$

O sinal positivo indica que é no sentido da regra da mão direita em relação ao versor  $\hat{n}$  usado, ou seja,  $\hat{i}$ . Como tal, a f.e.m. induzida produz corrente induzida no sentido da rotação do eixo dos  $y$  para o eixo dos  $z$ .

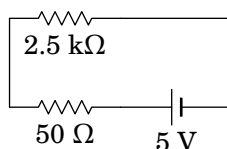
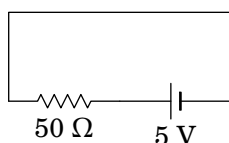
### Problema 9.7

No circuito da figura, calcule as correntes iniciais no indutor e no condensador, a corrente final no indutor e a carga final no condensador.





**Resolução.** Os circuitos equivalentes inicial e final são os seguintes:



No instante inicial, a corrente no indutor é nula e a corrente no condensador é:

$$I_0 = \frac{5}{50} = 0.1 \text{ A}$$

No instante final, a corrente no indutor é:

$$I_\infty = \frac{5}{50 + 2500} = 1.961 \text{ mA}$$

A diferença de potencial no condensador é:

$$\Delta V = 2500 I_\infty = 4.902 \text{ V}$$

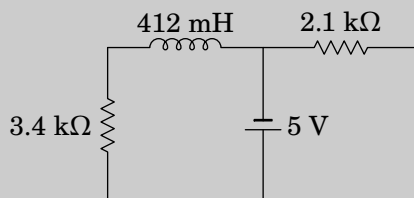
e a carga nele é:

$$Q = 3.6 \times 10^{-6} \times 4.902 = 17.65 \text{ } \mu\text{C}$$

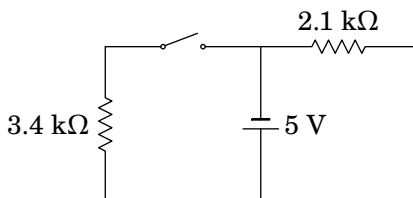
### Problema 9.8

No circuito representado no diagrama, a fonte foi ligada no instante  $t = 0$ , quando não havia corrente no indutor.

- Determine a voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$  em  $t = 0$ .
- Determine o valor da derivada da voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , em  $t = 0$ .
- Determine a voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , quando o circuito atingir o estado estacionário.



**Resolução.** (a) O circuito equivalente em  $t = 0$  é o seguinte:



Como a corrente na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$  é nula, a voltagem nela também é igual a zero.

(b) Se  $V(t)$  e  $I(t)$  são a voltagem e a intensidade da corrente na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , em função do tempo, a lei de Ohm implica (unidades SI):

$$\frac{dV}{dt} = 3400 \frac{dI}{dt}$$

E como em qualquer instante a corrente na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$  é igual à corrente no indutor, usando a relação entre voltagem no indutor,  $V_L$ , e a corrente nele, obtém-se:

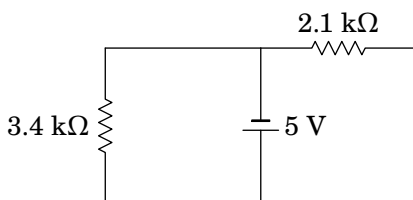
$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_L}{0.412}$$

Em  $t = 0$ , o circuito equivalente da alínea *a* mostra que a voltagem no indutor é  $V_L = 5 \text{ V}$ . Como tal, a derivada da voltagem na resistência, em  $t = 0$ , é:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_0 = 3400 \left( \frac{5}{0.412} \right) = 41.26 \frac{\text{kV}}{\text{s}}$$

É positiva, porque a corrente no indutor, nula em  $t = 0$ , está a aumentar e, portanto, a corrente e voltagem na resistência também estão a aumentar.

(c) O circuito equivalente em  $t \rightarrow \infty$  é o seguinte:



Ou seja, a voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$  é igual a  $5 \text{ V}$ .

# 10 Circuitos de corrente alternada

## Problema 10.1

A resistência de uma bobina é  $150 \, \Omega$  e a sua indutância é  $1.4 \, \text{H}$ . A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima  $325 \, \text{V}$  e frequência de  $50 \, \text{Hz}$ . Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo  $t$ .

**Resolução.** Usaremos unidades SI. A frequência angular da tensão e da corrente é

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \approx 314.16$$

A bobina é considerada como uma resistência em série com um indutor. Como tal, a sua impedância é a soma das impedâncias da resistência e do indutor:

$$\begin{aligned} Z &= 150 + i 1.4 \times 314.16 \\ &= \sqrt{150^2 + 439.824^2} \angle \tan^{-1} \left( \frac{439.824}{150} \right) = 464.7 \angle 1.242 \end{aligned}$$

Admitindo que a tensão da rede elétrica em função do tempo seja  $325 \cos(\omega t)$ , a voltagem máxima na bobina será  $325 \, \text{V}$ , com fase  $\varphi_V = 0$ . A corrente máxima e o desfasamento da corrente na bobina são:

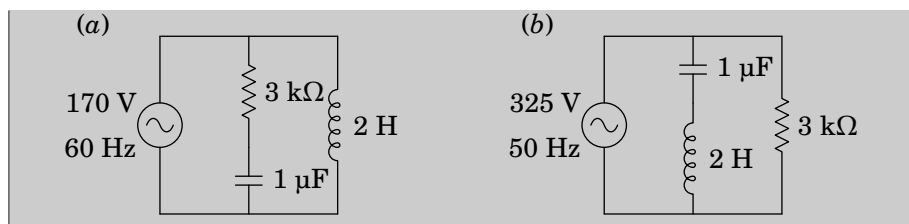
$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{|Z|} = \frac{325}{464.7} = 0.6694 \quad \varphi_I = \varphi_V - \varphi_Z = -1.242$$

E a expressão para a corrente é

$$I(t) = 0.6694 \cos(314.16 t - 1.242)$$

## Problema 10.2

Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.



**Resolução.** (a) Usando unidades de  $k\Omega$  para as impedâncias, H para as indutâncias,  $\mu F$  para as capacidades, V para as voltagens e kHz para as frequências, a frequência angular da fonte e as impedâncias dos 3 elementos no circuito são as seguintes:

$$\omega = \frac{2\pi \times 60}{1000} = \frac{3\pi}{25}$$

$$Z_1 = 3$$

$$Z_2 = \frac{1}{i\omega} = -\frac{i25}{3\pi}$$

$$Z_3 = i2\omega = \frac{i6\pi}{25}$$

A voltagem no sistema da resistência em série com o condensador é igual à voltagem da fonte; como tal, o fasor da corrente através desses dois elementos é

$$\mathbf{I}_1 = \frac{170}{Z_1 + Z_2} = 42.45 \angle 0.724$$

Ou seja, se  $t$  for dado em ms, a expressão da corrente é:

$$I_1 = I_2 = 42.45 \cos\left(\frac{3\pi}{25}t + 0.724\right)$$

Os fasores das voltagens na resistência e no condensador são então,

$$\mathbf{V}_1 = Z_1 \mathbf{I}_1 = 127.4 \angle 0.724$$

$$\mathbf{V}_2 = Z_2 \mathbf{I}_1 = 112.6 \angle -0.8468$$

e as voltagens em função do tempo são:

$$V_1 = 127.4 \cos\left(\frac{3\pi}{25}t + 0.724\right)$$

$$V_2 = 112.6 \cos\left(\frac{3\pi}{25}t - 0.8468\right)$$

No indutor, a voltagem é a mesma voltagem da fonte:

$$V_3 = 170 \cos\left(\frac{3\pi}{25}t\right)$$

E o fasor da corrente é,

$$\mathbf{I}_3 = \frac{170}{Z_3} = 225.5 \angle -\frac{\pi}{2}$$

Que corresponde à função:

$$I_3 = 225.5 \cos\left(\frac{3\pi}{25}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) Segue-se o mesmo procedimento da alínea (a), mas com os novos valores de frequência e voltagem máxima da fonte e tendo em conta que agora  $Z_1$  é a impedância do condensador,  $Z_2$  a impedância do indutor e  $Z_3$  a impedância da resistência, e a frequência angular é agora:  $\omega = \pi/10$ .

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega} = -\frac{i10}{\pi}$$

$$Z_2 = i2\omega = \frac{i\pi}{5}$$

$$Z_3 = 3$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{325}{Z_1 + Z_2} = 127.2 \angle \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{V}_1 = Z_1 \mathbf{I}_1 = 404.9$$

$$\mathbf{V}_2 = Z_2 \mathbf{I}_1 = 79.93 \angle \pi$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{325}{Z_3} = 108.3$$

Como tal, a corrente e a voltagem no condensador são:

$$I_1 = 127.2 \cos\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad V_1 = 404.9 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

No indutor:

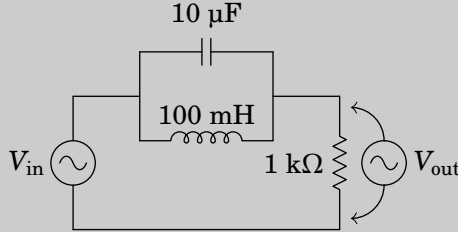
$$I_2 = 127.2 \cos\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad V_2 = 79.93 \cos\left(\frac{\pi}{10}t + \pi\right)$$

E na resistência:

$$I_3 = 108.3 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \quad V_3 = 325 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

**Problema 10.3**

A figura mostra um filtro *rejeita-banda* que atenua as frequências angulares próximas de 1 kHz.



- (a) Determine a função de resposta em frequência,  $\mathcal{R}$ , do circuito.  
 (b) Mostre que para  $\omega = 1$  kHz,  $\mathcal{R}$  é igual a zero.  
 (c) Calcule o módulo de  $\mathcal{R}$  e trace o seu gráfico para  $\omega$  entre 0 e 2 kHz.

**Resolução.** (a) Usando unidades de  $k\Omega$  para as impedâncias, H para a indutância,  $\mu F$  para a capacidade e kHz para a frequência  $\omega$ , as impedâncias do condensador, o indutor e a resistência são:

$$Z_C = \frac{1}{i 10\omega} \quad Z_L = \frac{i\omega}{10} \quad Z_R = 1$$

A impedância equivalente é,

$$Z = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} + Z_R = 1 - \frac{i\omega}{10\omega^2 - 10}$$

O fasor da tensão de saída, na resistência, é:

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{in}}}{Z} = \frac{(10\omega^2 - 10) \mathbf{V}_{\text{in}}}{10\omega^2 - 10 - i\omega}$$

A função de resposta em frequência é,

$$\mathcal{R} = \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 - i\omega}$$

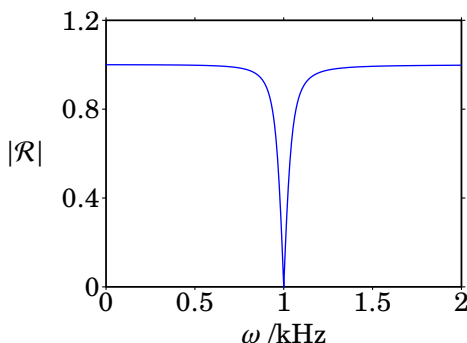
(b) O valor da função de resposta em frequência, para  $\omega = 1$  kHz, é igual a:

$$\mathcal{R}(1) = \frac{10 - 10}{10 - 10 - i} = 0$$

(c) O módulo da função de resposta,  $|\mathcal{R}|$ , é igual à raiz quadrada de  $\mathcal{R}$  vezes o seu complexo conjugado:

$$|\mathcal{R}| = \left( \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 - i\omega} \right) \left( \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 + i\omega} \right) = \frac{|10\omega^2 - 10|}{\sqrt{100\omega^4 - 199\omega^2 + 100}}$$

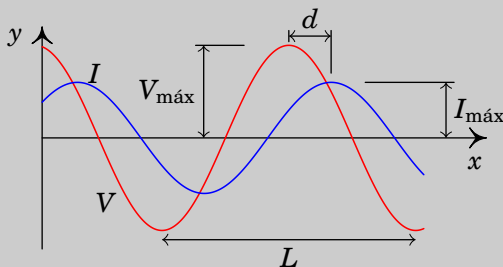
O gráfico dessa função, entre 0 e 2 kHz, é o seguinte:



**Comentários:** Observe-se que em quase todo o intervalo de frequências  $|\mathcal{R}|$  é aproximadamente igual a 1, o que implica que o sinal de entrada não é atenuado. No entanto, em  $\omega = 1$  kHz,  $|\mathcal{R}(1)| = 0$ , ou seja, o sinal de saída é nulo. É por essa razão que o filtro chama-se rejeita-banda; as frequências angulares próximas de uma frequência típica do filtro, neste caso 1 kHz, são eliminadas no sinal de saída.

#### Problema 10.4

A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias  $L$  e  $d$  foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores  $L = 6$  cm,  $d = 1$  cm. O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é  $V_{\text{máx}} = 36$  V e a corrente máxima é  $I_{\text{máx}} = 12$  mA. Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



**Resolução.** O ângulo da impedância é igual à constante de fase da tensão menos a constante de fase da corrente:

$$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I$$

O gráfico mostra que a tensão está adiantada em relação à corrente ( $V$  passa pelo seu valor máximo ou mínimo um pouco antes que  $I$ ); a diferença das fases,  $\varphi_V - \varphi_I$ , é então positiva e corresponde à distância  $d$  no gráfico. Como a distância  $L$  corresponde a um ângulo de  $2\pi$ , então a o ângulo da impedância é:

$$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = \frac{d}{L} 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

O módulo da impedância é, em  $k\Omega$ , é igual à tensão máxima em volts dividida pela corrente máxima em miliampere.

$$|Z| = \frac{V_{\text{máx}}}{I_{\text{máx}}} = \frac{36}{12} = 3$$

A impedância, em  $k\Omega$ , é o número complexo:

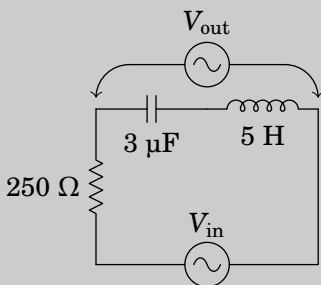
$$Z = 3 \angle \frac{\pi}{3}$$

E as partes real e imaginária da impedância são:

$$Z = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = (1.5 + i 2.598) k\Omega$$

### Problema 10.5

No filtro de frequências representado no diagrama, o sinal de entrada é a tensão  $V_{\text{in}}$  de uma fonte de tensão alternada, com frequência angular  $\omega$ , e o sinal de saída é a tensão  $V_{\text{out}}$  medida no indutor e no condensador, como indica a figura. Encontre a expressão da função de resposta em frequência.



**Resolução.** Como  $1 \Omega = 1/(\text{F} \cdot \text{Hz})$ , então  $1 k\Omega = 1/(\mu\text{F} \cdot \text{kHz})$  e pode usar-se unidades de  $k\Omega$  para a resistência,  $\mu\text{F}$  para a capacidade e  $\text{kHz}$  para as frequências  $s$  e  $\omega$ .  $1 \text{ H} = 1 \Omega/\text{Hz} = 1 k\Omega/\text{kHz}$  e então a indutância deve ser



dada em H. A resistência, o condensador e o indutor estão em série; em função de  $s = i\omega$ , a impedância equivalente é:

$$Z_s = 0.25 + \frac{1}{3s} + 5s = \frac{15s^2 + 0.75s + 1}{3s}$$

E o fasor da tensão de saída determina-se usando a lei de divisão de voltagem:

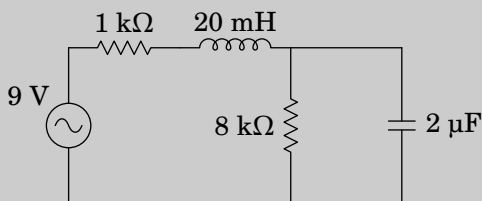
$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \frac{1/(3s) + 5s}{Z_s} = \frac{15s^2 + 1}{15s^2 + 0.75s + 1} \mathbf{V}_e$$

A função de resposta em frequência é:

$$\mathcal{R} = \frac{1 - 15\omega^2}{1 - 15\omega^2 + i0.75\omega}$$

### Problema 10.6

No circuito representado no diagrama, determine a potência média fornecida pela fonte, sabendo que esta tem frequência de 30 Hz e voltagem máxima de 9 V.



**Resolução.** Usando unidades de  $k\Omega$  para a impedância e  $\mu F$  para a capacidade, o tempo deverá ser medido então em ms, a frequência em kHz e a indutância em H. A impedância equivalente nos terminais da fonte é então:

$$Z = 1 + 0.020s + \frac{8 \left( \frac{1}{2s} \right)}{8 + \frac{1}{2s}} = \frac{16s^2 + 801s + 450}{800s + 50}$$

A frequência  $s$ , em unidades de kHz, é neste caso:

$$s = i2\pi f = i0.06\pi$$

A impedância complexa é então

$$Z = 1.7924 - i2.3861 = 2.984 \angle -0.9265$$

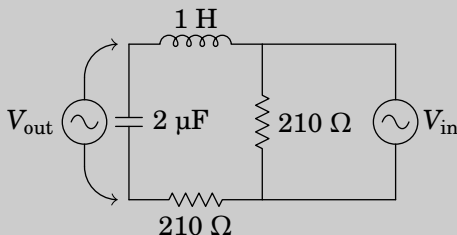
E a potência média fornecida pela fonte é

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \varphi_Z = \frac{V_{\max}^2 \cos \varphi_Z}{2|Z|} = \frac{81 \cos(-0.9265)}{2 \times 2.984} = 8.15$$

Como a voltagem foi dada em volts e a impedância em  $k\Omega$ , as unidades desta potência calculada são mW.

### Problema 10.7

No filtro de frequências representado no diagrama, o sinal de entrada é a tensão  $V_e$  de uma fonte de tensão alternada, com frequência angular  $\omega$ , e o sinal de saída é a tensão  $V$  medida no condensador, como indica a figura. Encontre a expressão da função de resposta em frequência, em função de  $\omega$ .



**Resolução.** Usando unidades de  $\mu C$  para a capacidade e H para a indutância, como  $LC = Z_L/(Z_C s^2)$  tem unidades de tempo ao quadrado, então o tempo deverá ser medido em ms e a frequência em kHz. As impedâncias ( $Z_L = Ls$ ) deverão então ser medidas em  $k\Omega$ . Nessas unidades, os valores das impedâncias das resistências, do indutor e do condensador no circuito, em função de  $s = i\omega$ , são:

$$Z_R = 0.21 \quad Z_L = s \quad Z_C = \frac{1}{2s}$$

No ramo onde está o condensador, encontram-se em série o condensador, o indutor e uma das resistências, com impedância total:

$$Z_s = 0.21 + s + \frac{1}{2s} = \frac{2s^2 + 0.42s + 1}{2s}$$

O fasor da tensão nesse ramo é o mesmo fasor da tensão de entrada,  $V_{in}$ . Como tal, o fasor da tensão no condensador é igual a:

$$V_{out} = \frac{Z_C}{Z_s} V_{in} = \frac{V_{in}}{2s^2 + 0.42s + 1}$$

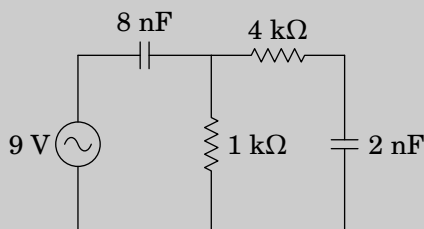
A função de resposta em frequência é:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{1 - 2\omega^2 + i 0.42\omega}$$

em que a frequência angular  $\omega$  é dada em kHz.

### Problema 10.8

A fonte no circuito representado no diagrama tem voltagem máxima 9 V e frequência angular  $\omega = 125$  kHz. Determine a voltagem máxima no condensador de 2 nF.

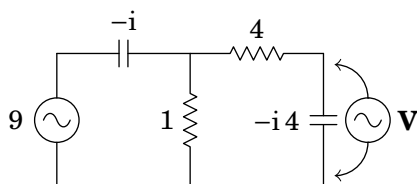


**Resolução.** As impedâncias complexas dos dois condensadores são, em  $\Omega$ ,

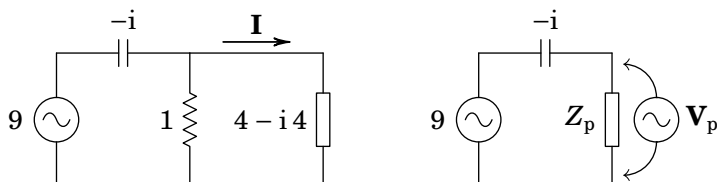
$$Z_1 = \frac{-i}{125 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-9}} = -i 1000$$

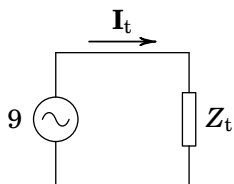
$$Z_2 = \frac{-i}{125 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9}} = -i 4000$$

Como tal, com as impedâncias em  $k\Omega$  e as voltagens em V, o circuito é o seguinte:



Para determinar o fasor  $\mathbf{V}$ , usam-se circuitos equivalentes mais simples, da forma seguinte:





Onde a impedância em paralelo e a impedância total são:

$$Z_p = \frac{4 - i4}{5 - i4} \quad Z_t = -i + \frac{4 - i4}{5 - i4} = \frac{9}{4 + i5}$$

O fasor da corrente total é (em mA),

$$I_t = \frac{9}{\frac{9}{4 + i5}} = 4 + i5$$

O fasor da voltagem na impedância  $Z_p$  é:

$$V_p = \left( \frac{4 - i4}{5 - i4} \right) (4 + i5) = 4 + i4$$

E os fasores da corrente e da voltagem no condensador de 2 nF são:

$$I = \frac{4 + i4}{4 - i4} = i \quad V = -i4 \times i = 4$$

Ou seja, a voltagem máxima nesse condensador é igual a 4 V.

# 11 Ondas eletromagnéticas

## Problema 11.1

Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo  $x$ . No instante  $t = 0$ , o campo elétrico em função de  $x$  é dado pela função (unidades SI)

$$E = \frac{50}{x^2 + 2}$$

Calcule o campo no ponto  $x = 50$  m, no instante  $t = 0.2$   $\mu\text{s}$ .

**Resolução.** Como a onda propaga-se no sentido positivo do eixo dos  $x$ , a função de onda do campo elétrico deverá ser da forma  $E = f(x - ct)$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

No instante  $t = 0$  a expressão do campo em função de  $x$  é  $E = f(x)$  e, comparando com a função dada no enunciado, conclui-se que

$$f(x) = \frac{50}{x^2 + 2}$$

Como tal, a função de onda do campo elétrico é:

$$E = f(x - ct) = \frac{50}{(x - ct)^2 + 2}$$

Substituindo os valores dados de  $x$  e  $t$  e o valor de  $c$ , em unidades SI, na equação de onda. obtém-se o valor do campo:

$$E = \frac{50}{(50 - 3 \times 10^8 \times 0.2 \times 10^{-6})^2 + 2} = 0.4902 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

## Problema 11.2

Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano  $xy$ . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano  $xy$ , mas variável no tempo segundo a expressão:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \hat{i}$$

onde  $E_{\text{máx}}$  e  $\omega$  são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético da dita onda, em função do tempo e da posição.

**Resolução.** A onda plana produzida estará a sair do plano  $Oxy$  para os dois lados. Ou seja, propagar-se-á no sentido positivo do eixo dos  $z$  na região  $z > 0$ , e no sentido negativo do eixo dos  $z$  na região  $z < 0$ . Como tal, a função de onda para o campo elétrico terá a forma:

$$E = \begin{cases} g(s), & z \geq 0 \\ f(r), & z \leq 0 \end{cases}$$

onde  $s = z - ct$  e  $r = z + ct$ .

Em  $z = 0$ , obtêm-se as funções  $g(-ct)$  e  $f(ct)$ , as quais deverão ser iguais ao valor do campo elétrico na lâmina:

$$\begin{aligned} g(-ct) &= E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \\ f(ct) &= E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Substituindo  $s = -ct$  e  $r = ct$ , as expressões das funções  $g$  e  $f$  são:

$$\begin{aligned} g(s) &= E_{\text{máx}} \sin(-ks) \\ f(r) &= E_{\text{máx}} \sin(kr) \end{aligned}$$

onde  $k = \omega/c$  é o número de onda angular.

Em  $z \neq 0$ ,  $s = z - ct$ ,  $r = z + ct$  e a função de onda do campo elétrico será então:

$$E = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin(\omega t - kz), & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin(\omega t + kz), & z \leq 0 \end{cases}$$

A função de onda do campo magnético deverá ser igual à do campo elétrico, dividida pela velocidade da luz; como tal,

$$B = \begin{cases} \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t - kz), & z \geq 0 \\ \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t + kz), & z \leq 0 \end{cases}$$

O campo elétrico será na direção de  $\hat{i}$  em todo o espaço. Na região  $z > 0$ , como a velocidade é segundo  $\hat{k}$ , o campo magnético deverá estar na direção e sentido de  $\hat{j}$  (o produto vetorial do campo elétrico pelo campo magnético deverá ser na direção e sentido da velocidade). Na região  $z < 0$ , como a

velocidade é segundo  $-\hat{k}$ , o campo magnético deverá estar na direção de  $-\hat{j}$ . As expressões vetoriais dos campos são então:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin(\omega t - kz) \hat{i}, & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin(\omega t + kz) \hat{i}, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t - kz) \hat{j}, & z \geq 0 \\ -\frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t + kz) \hat{j}, & z \leq 0 \end{cases}$$

### Problema 11.3

Considere um condensador de armaduras circulares de raio 1 cm, paralelas e planas, separadas por 1 mm de ar. Num determinado instante, a corrente no condensador é 5 A.

(a) Calcule a derivada do campo elétrico entre as placas, em ordem ao tempo, nesse instante.

(b) Mostre que a corrente de deslocamento entre as placas é igual à corrente de 5 A.

(c) Porque razão as duas correntes são iguais?

**Resolução.** (a) Em função do raio  $r$  das armaduras e da distância  $d$  entre elas a capacidade do condensador é (usando  $K = 1$  para o ar):

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{\pi r^2}{4\pi k d} = \frac{r^2}{4kd}$$

A voltagem no condensador, em função da carga  $Q$  armazenada nele, é:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{4kdQ}{r^2}$$

e, como a derivada temporal de  $Q$  é igual à intensidade da corrente,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4kdI}{r^2}$$

Finalmente, admitindo campo elétrico constante entre as armaduras, o módulo do campo é igual a  $V/d$  e a derivada do campo em ordem ao tempo é,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4kI}{r^2} = \frac{4 \times 8.988 \times 10^9 \times 5}{0.01^2} = 1.7976 \times 10^{15} \frac{\text{V}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

(b) No interior do condensador, admitindo campo elétrico uniforme e perpendicular às armaduras do condensador, o fluxo elétrico que passa pelas armaduras é igual a:

$$\Psi = EA = \pi r^2 E$$

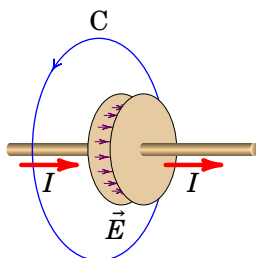
e a corrente de deslocamento no interior do condensador é,

$$I_d = \frac{1}{4\pi k} \frac{d\Psi}{dt} = \frac{r^2}{4k} \frac{dE}{dt}$$

Substituindo a expressão obtida na alínea anterior para a derivada de  $E$ , o resultado é:

$$I_d = \frac{r^2}{4k} \left( \frac{4kI}{r^2} \right) = I = 5 \text{ A}$$

(c) A figura seguinte mostra uma curva fechada  $C$  que envolve o condensador, paralela às armaduras.



Como admitimos que o campo elétrico é constante no interior do condensador e nulo fora dele, quando a curva  $C$  estiver fora do condensador, não há fluxo elétrico nem corrente de deslocamento; o integral de linha de  $\vec{B}$  ao longo de  $C$  é igual a  $4\pi k_m I$ . Se a curva  $C$  estiver na região entre as duas armaduras, como admitimos que o campo elétrico é constante, o fluxo elétrico e a corrente de deslocamento serão iguais em qualquer posição entre as armaduras. E nesse caso, como a corrente  $I$  já não passa pelo interior  $C$  e, o integral de linha de  $\vec{B}$  ao longo de  $C$  é igual a  $4\pi k_m I_d$ . Como esse integral deve ser contínuo na passagem de fora para dentro das armaduras, a corrente de deslocamento  $I_d$  tem de ser igual a  $I$ .

### Problema 11.4

Uma onda harmónica plana, polarizada, com comprimento de onda  $\lambda = 3 \text{ m}$ , propaga-se na direção do versor  $\hat{j}$ . Escreva as expressões dos campos elétrico e magnético, nos seguintes casos:

(a) A onda está polarizada linearmente, com versor de polarização  $(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$ .



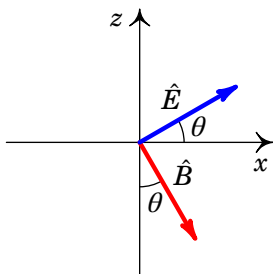
- (b) A onda está polarizada linearmente, com versor de polarização  $(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{k})/2$ .
- (c) A onda tem polarização circular negativa.

### Resolução.

Como a onda propaga-se na direção positiva do eixo  $y$ , a função de onda do campo elétrico, arbitrando constante de fase inicial nula, pode-se escrever como

$$E(y, t) = E_{\text{máx}} \cos(ky - \omega t)$$

A função de onda do campo magnético é  $B(y, t) = E(y, t)/c$ . Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  deverão ser perpendiculares e o seu produto vetorial,  $\vec{E} \times \vec{B}$ , tem de ser na direção positiva do eixo dos  $y$ . Como tal, os versores na direção dos campos deverão ser como na figura seguinte, em que o eixo  $y$  aponta para dentro da figura.



O ângulo  $\theta$  que o versor  $\hat{E}$  faz com o semieixo positivo  $x$  será o mesmo ângulo entre  $\hat{B}$  e o semieixo negativo  $z$  e em função de  $\theta$  os versores são os seguintes:

$$\hat{E} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{k} \quad \hat{B} = \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{k}$$

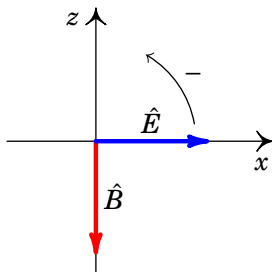
(a) Como o versor de polarização é o versor do campo elétrico, então  $\hat{E} = (\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$ , o versor  $\hat{B}$  é  $(\hat{i} - \hat{k})/\sqrt{2}$  e as expressões dos campos são as seguintes:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{\text{máx}} \cos(ky - \omega t)(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2} \\ \vec{B} &= \frac{E_{\text{máx}}}{c} \cos(ky - \omega t)(\hat{i} - \hat{k})/\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) Os versores são  $\hat{E} = (\hat{i} + \sqrt{3}\hat{k})/2$  e  $\hat{B} = (\sqrt{3}\hat{i} - \hat{k})/2$  e as expressões dos campos são:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{\text{máx}} \cos(ky - \omega t)(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{k})/2 \\ \vec{B} &= \frac{E_{\text{máx}}}{c} \cos(ky - \omega t)(\sqrt{3}\hat{i} - \hat{k})/2 \end{aligned}$$

(c) A polarização negativa (também dita esquerda), em relação à direção de propagação segundo  $\hat{j}$ , implica que os campos rodam no plano  $xz$  no sentido do eixo  $x$  para o eixo  $z$ , como mostra a figura seguinte (o eixo  $y$  aponta para dentro da figura).



A polarização circular obtém-se com a sobreposição de duas funções de onda planas com polarização linear ao longo dos eixos  $x$  e  $z$ . No caso de  $\vec{E}$  a figura acima mostra que se inicialmente  $\vec{E}$  aponta no sentido de  $\hat{i}$ , a onda polarizada segundo  $x$  será uma função cosseno e a onda polarizada segundo  $z$  uma função seno. Como tal, a expressão do campo elétrico é a seguinte sobreposição de duas ondas planas:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} [\cos(ky - \omega t)\hat{i} + \sin(ky - \omega t)\hat{k}]$$

Já no caso de  $\vec{B}$ , inicialmente apontando no sentido de  $-\hat{k}$ , a onda polarizada segundo  $\hat{i}$  será uma função seno e a onda polarizada segundo  $z$  uma função cosseno com sinal negativo:

$$\vec{B} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} [\sin(ky - \omega t)\hat{i} - \cos(ky - \omega t)\hat{k}]$$

Usando os dados do problema, em unidades SI, o número de onda angular é igual a:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} = 2.094 \text{ rad/m}$$

e a frequência angular é,

$$\omega = kc = \frac{2\pi \times 2.998 \times 10^8}{3} = 6.279 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

### Problema 11.5

Uma estação de rádio transmite na frequência de 90.8 MHz. Calcule o

comprimento de onda, frequência angular e número de onda angular dessas ondas de rádio com 90.8 MHz.

**Resolução.** O comprimento de onda é,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.998 \times 10^8}{90.8 \times 10^6} = 3.30 \text{ m}$$

A frequência angular é igual a:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 90.8 \times 10^6 = 5.71 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

E o número de onda angular é:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 90.8 \times 10^6}{2.998 \times 10^8} = 1.90 \text{ rad/m}$$

### Problema 11.6

O fluxo de energia de uma onda eletromagnética esférica e monocromática é 100 W.

(a) Calcule a densidade do fluxo de energia a 2 m do centro da onda.

(b) Determine os valores máximos dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  a 2 m do centro da onda.

**Resolução.** (a) A densidade do fluxo de energia calcula-se dividindo o fluxo de energia pela área da esfera com 2 m de raio:

$$S = \frac{\Phi_e}{4\pi r^2} = \frac{100}{4\pi 2^2} = 1.989 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

(b) Usando a relação entre a densidade do fluxo de energia e o valor máximo do campo elétrico,

$$S = \frac{c}{8\pi k} E_{\text{máx}}^2$$

o valor máximo do campo elétrico obtém-se usando a densidade de fluxo energético calculada na alínea anterior:

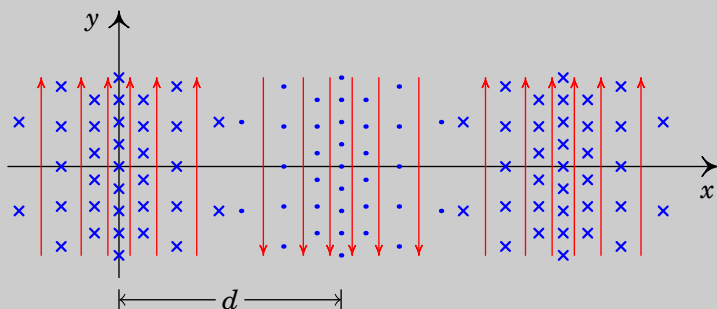
$$E_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{8\pi \times 8.988 \times 10^9 \times 1.989}{2.998 \times 10^8}} = 38.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

e o valor máximo do campo magnético é igual a:

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = 1.29 \times 10^{-7} \text{ T} = 1.29 \text{ mG}$$

**Problema 11.7**

A figura seguinte representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante  $t = 0$ . As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares ao plano da figura são as linhas de campo magnético. Calcule a distância  $d$  e determine a expressão do vetor do campo magnético em função do tempo e da coordenada  $x$ .



**Resolução.** Em unidades SI, o comprimento de onda é igual a:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.998 \times 10^8}{420 \times 10^6} = 0.714 \text{ m}$$

A figura mostra que a distância  $d$  é metade do comprimento de onda, ou seja,

$$d = \frac{\lambda}{2} = 0.357 = 35.71 \text{ cm}$$

A frequência angular e o número de onda angular são (unidades SI):

$$\omega = 2\pi f = 2.64 \times 10^9 \text{ rad/s} \quad k = \frac{2\pi f}{c} = 8.80 \text{ rad/m}$$

Num ponto qualquer, por exemplo na origem, o produto vetorial do campo elétrico com o campo magnético é na direção de propagação da onda; com os dados da figura, esse produto é na direção negativa do eixo  $x$ . O facto de ter uma frequência específica, indica que a onda é harmónica. Como tal, a função de onda do campo magnético é a função de uma onda harmónica plana, propagando-se no sentido negativo de  $x$ , que pode escrever-se (arbitrando constante de fase inicial nula):

$$B = B_{\text{máx}} \cos \left( 8.80x + 2.64 \times 10^9 t \right)$$

Como o campo  $\vec{B}$  na origem aponta na direção negativa de  $z$  com módulo máximo,  $B_{\text{máx}}$ , o campo magnético em  $x = 0$  e  $t = 0$  é  $\vec{B} = -B_{\text{máx}}\hat{k}$  e a expressão do campo magnético em função de  $x$  e de  $t$  é a seguinte:

$$\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos(8.80x + 2.64 \times 10^9 t) \hat{k}$$

### Problema 11.8

Demonstre que a equação de onda é linear, ou seja, que qualquer combinação linear de duas soluções é também solução.

**Resolução.** Se  $E_1$  e  $E_2$  são duas soluções da equação de onda, verificam as seguintes duas equações (admitindo variáveis  $x$  e  $t$ ):

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}$$

Uma combinação linear das duas soluções, com duas constantes  $a_1$  e  $a_2$  é,

$$E = a_1 E_1 + a_2 E_2$$

A segunda derivada parcial de  $E$  em ordem a  $x$  é,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2}$$

E a segunda derivada parcial de  $E$  em ordem a  $t$  é,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}$$

que usando as equações de onda para  $E_1$  e  $E_2$  pode escrever-se como:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a_1 c^2 \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + a_2 c^2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

Conclui-se assim que a combinação linear também verifica a equação de onda e a equação de onda é linear.









Este livro complementa o livro Eletromagnetismo e Circuitos, dos mesmos autores. Mostra-se a resolução de alguns dos problemas propostos em cada capítulo desse livro. Uma parte muito importante na aprendizagem da Física é a resolução de problemas. Inclui 88 problemas resolvidos.

Este livro pode ser descarregado livremente, em ficheiro PDF, ou consultado em versão HTML, no sítio:

**<https://villate.org/eletromagnetismo>**

