28 de	junho	de	2022

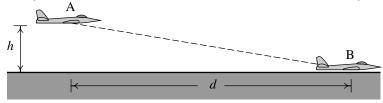
FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Turma:	

Nome:

Duração 2 horas. Pode consultar unicamente o formulário entregue com este enunciado. Pode usar calculadora ou PC, mas unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (3 valores) O avião na figura tem massa igual a 3×10^4 kg. O piloto ajusta a trajetória de forma a descer desde o ponto A, com altura h = 480 m, até o ponto B, com altura 0, em linha reta e com velocidade a diminuir a uma taxa constante, desde 300 km/h em A, até 200 km/h em B. A distância horizontal entre os pontos A e B é d = 4.1 km. (a) Determine o valor da aceleração entre A e B. (b) A interação dos mecanismos do avião com o ar produz uma força com componentes tangencial e normal, que junto com o peso do avião dão origem à aceleração calculada na alínea anterior. Determine o valor dessa força de interação do ar com o avião.



2. (3 valores) Um corpo com massa m = 0.2 kg desloca-se, sem rodar, ao longo do eixo dos x, sob a ação de uma força resultante conservativa com energia potencial $U = 6 - 3.11 x + 0.58 x^2$ (unidades SI), onde x é a posição do centro de massa do corpo. (a) Explique porque é que o único movimento possível do corpo é movimento oscilatório. (b) Determine o valor do período de oscilação.

PERGUNTAS. Respostas certas, 1 valor, erradas, -0.25, em branco, 0.

- 3. Qual das seguintes afirmações, acerca da origem no espaço de fase num sistema dinâmico de duas espécies, é correta?
 - A. É sempre ponto de equilíbrio instável.
 - **B.** É sempre ponto de equilíbrio, do tipo sela.
 - C. Pode não ser ponto de equilíbrio.
 - **D.** É sempre ponto de equilíbrio estável.
 - E. É sempre ponto de equilíbrio, de qualquer tipo.

Sua resposta:

4. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ . As expressões da energia cinética e da energia potencial

central em questão são: $E_{\rm c} = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \qquad U = k\,r^4$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para r

 $\mathbf{C.} \ \ r\ddot{\theta} + \frac{4\,k\,r^3}{}$

Sua resposta:

- 5. Um sistema não linear tem um centro no ponto P. Qual das afirmações seguintes, acerca da matriz jacobiana no ponto P, é verdadeira?
 - A. o traço é positivo
 - B. o traço é negativo
 - C. o traço é nulo.
 - D. o determinante é negativo
 - E. o determinante é nulo

Sua resposta:

6. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

A. nó repulsivo

C. ponto de sela

E. nó atrativo

B. foco repulsivo

D. foco atrativo

Sua resposta:

7. Um aluno empurra um bloco de massa 500 g, sobre uma mesa horizontal, com uma aceleração constante de 1.8 m/s². A força que o aluno exerce é horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.4, calcule o módulo da força do aluno sobre o bloco.

A. 5.72 N

C. 7.15 N

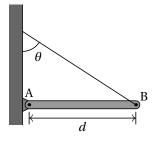
E. 28.6 N

B. 2.86 N

D. 1.06 N

Sua resposta:

8. A barra homogénea na figura tem massa 2.1 kg e comprimento d = 1.4 m. O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo à parede, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. No ponto B está ligada uma corda, colada à parede formando um ângulo $\theta = 47^{\circ}$, que faz com que a barra permaneça na posição horizontal. Determine o valor da tensão na corda.



A. 11.5 N

C. 8.6 N

E. 20.1 N

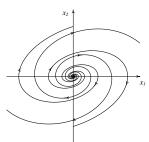
B. 15.1 N

D. 18.0 N

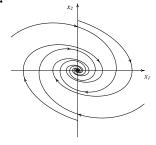
Sua resposta:

linear com duas variáveis de estado são $\lambda_1 = -0.2 + i0.8$ e $\lambda_2 = -0.2 - i0.8$. Qual dos gráficos representa o retrato de fase desse sistema?

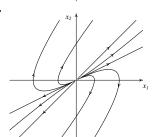
A.



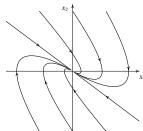
D.



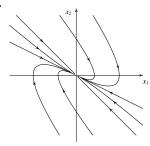
В.



E.



C.



Sua resposta:

- 10. Dois corpos A e B, com a mesma massa, penduram-se de duas molas com a mesma constante elástica. Ambos objetos são deslocados na vertical e largados do repouso, fazendo com que oscilem na vertical. O deslocamento inicial de A é duas vezes maior do que o de B. Qual é a relação entre as energias mecânicas dos dois corpos?
 - A. A energia de B é metade da energia de A.
 - B. Ambos corpos têm a mesma energia.
 - C. A energia de A é 1/4 da energia de B.
 - D. A energua de B é 1/4 da energia de A.
 - E. A energia de A é metade da energia de B.

Sua resposta:

- 11. Uma esfera roda sem deslizar sobre a superfície dum plano ina velocidade do centro de massa da esfera, quando chega ao fim da rampa, desprezando a resistência do ar e sabendo que o momento de inércia de uma esfera de massa m e raio r, à volta do seu eixo, é $2 m r^2/5$.
 - **A.** 1.59 m/s
- C. 1.30 m/s
- **E.** 2.62 m/s

- **B.** 1.79 m/s
- **D.** 2.21 m/s

Sua resposta:

- 9. Os dois valores próprios da matriz dum sistema dinâmico 12. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $t^3 \hat{i} + 0.2 t^2 \hat{j}$ (unidades SI). Em t = 0 a partícula parte do ponto y = -5 no eixo dos y. Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos x.
 - **A.** 3.68 s
- C. 5.0 s
- **E.** 2.92 s

- **B.** 7.07 s
- **D.** 4.22 s

Sua resposta:

Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

A.
$$\dot{y} = 6 y - y^2$$

D.
$$\dot{y} = x + x y^2$$

E. $\dot{y} = 2 y - 5 y^2$

B.
$$\dot{y} = 2y^2 - 3y$$

E.
$$\dot{y} = 2y - 5y^2$$

C.
$$\dot{y} = 2 x y + 3 y$$

Sua resposta:

14. A expressão da força tangencial sobre uma partícula é

$$-s^2 + 14s - 48$$

onde s é a posição na trajetória. Sabendo que em t=0 a partícula encontrava-se em repouso na posição s = 7, onde se encontrará após um tempo muito elevado?

- **A.** Muito afastada, em $s \to \infty$
- **B.** Oscilando à volta de s = 8
- **C.** Em s = 6
- **D.** Oscilando à volta de s = 6
- **E.** Em s = 8

Sua resposta:

15. Um projetil lançado verticalmente para cima atinge uma altura *h* máxima, que depende da velocidade inicial com que foi lançado, antes de voltar a cair. Se a velocidade for muito elevada, a altura pode atingir valores elevados, onde a aceleração da gravidade já não é a constante g mas é dada pela expressão:

$$\frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

onde $R = 6.4 \times 10^6$ m é o raio da Terra. Desprezando a resistência do ar, determine o valor mínimo que deverá ter a velocidade inicial, para o objeto atingir uma altura máxima infinita; ou seja, fugir ao campo gravítico da Terra.

- **A.** $1.9 \times 10^3 \text{ m/s}$
- **C.** $11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$
- **E.** 3.7×10^3 m/s

- **B.** 2.2×10^3 m/s
- **D.** 1.4×10^3 m/s

Sua resposta:

clinado com 35 cm de altura, partindo do repouso. Determine 16. Um objeto desloca-se numa trajetória circular de forma que a sua velocidade angular é dada pela expressão:

$$\omega = b e^{-n\theta}$$

onde b e n são duas constantes e θ é o ângulo ao longo da circunferência. Qual é a expressão para a aceleração angular em função do ângulo θ ?

- **A.** $-nb^2 e^{-n\theta}$ **C.** $-nbe^{-n\theta}$ **B.** $nb^2 e^{-n\theta}$ **D.** $-nb^2 e^{-2n\theta}$
- $\mathbf{E}_{\bullet} b \, \mathrm{e}^{-(n+1)\theta}$

Sua resposta:

Resolução do exame de 28 de junho de 2022

Regente: Jaime Villate

Problema 1. (a) A distância percorrida desde A até B é,

$$\overline{AB} = \sqrt{4100^2 + 480^2} = 4128.0 \text{ m}$$

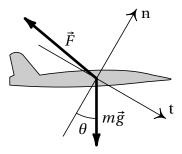
Como a velocidade diminui a uma taxa constante, a aceleração tangencial é constante e a equação diferencial

$$a_{\rm t} = v \frac{{\rm d}v}{{\rm d}s}$$

pode ser resolvida por separação de variáveis para determinar a aceleração tangencial (unidades SI):

$$a_{\rm t} \int_{0}^{4128} {\rm d}s = \int_{300/3.6}^{200/3.6} v \, {\rm d}v \implies a_{\rm t} = -0.4673 \, \frac{\rm m}{\rm s^2}$$

(b) A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do avião e o sistema de coordenadas tangencial e normal, em que \vec{F} é a força do ar sobre o avião



As componentes tangencial e normal do peso são (SI):

$$P_{t} = mg \sin \theta = \frac{30000 \times 9.8 \times 480}{4128} = 34186$$

$$P_{n} = mg \sin \theta = \frac{30000 \times 9.8 \times 4100}{4128} = 292006$$

E as componentes tangencial e normal da equação de movimento conduzem às componentes tangencial e normal de \vec{F}

$$P_{t} - F_{t} = m a_{t} \implies F_{t} = 34186 + 30000 \times 0.4673 = 48205$$

 $F_{n} - P_{n} = 0 \implies F_{n} = 292006$

O valor da força do ar sobre o avião é:

$$F = \sqrt{F_{\rm t}^2 + F_{\rm n}^2} = 295958 \,\text{N}$$

Problema 2. (a) A equação de movimento do corpo é

$$F_x = 0.2 \ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 3.11 - 1.16 x$$

e as equações de evolução são

$$\dot{x} = v$$
 $\dot{x} = 15.55 - 5.8 x$

trata-se dum sistema dinâmico linear com matriz

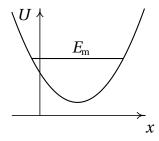
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5.8 & 0 \end{pmatrix}$$

A equação dos valores próprios é então

$$\lambda^2 + 5.8 = 0 \implies \lambda = \pm 2.40832i$$

Isso mostra que o único ponto de equilíbrio é um centro e todos os possíveis movimentos do corpo serão oscilações (ciclos no retrato de fase).

A explicação da natureza oscilatória de todos os possíveis movimentos podia também ser feita traçando o retrato de fase, em que todas as curvas de evolução são ciclos, ou ainda mostrando o gráfico da energia potencial:



Em que a energia mecânica dos possíveis movimentos é um segmento horizontal, por cima do valor mínimo de U, que necessariamente corta o gráfico de U em dois pontos de retorno, ou seja, corresponde a um ciclo.

(b) A frequência angular dos ciclos é igual à parte imaginária dos valores próprios:

$$\Omega = 2.40832 \, \mathrm{s}^{-1}$$

e período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2.60895 \,\mathrm{s}$$

Perguntas

3. E

6. B

9. D

12. D

15. C

4. D

7. B

10. D

13. C

16. D

5. C

8. B

11. D

14. B

Critérios de avaliação

Problema1

Cálculo da distância entre A e B	0.25
Resolução da equação diferencial para obter a aceleração tangencial	1
• Diagrama de corpo livre e cálculo das componentes tangencial e normal do peso	1
Resolução das componentes tangencial e normal da equação de movimento para obtenentes da força do ar	-
Obtenção do valor da força do ar a partir das componentes tangencial e normal	0.25
Problema 2	
• Explicação da natureza oscilatória de todos os possíveis movimentos (alínea <i>a</i>)	2
Cálculo do período de oscilação (alínea b)	1