



## **Departamento de Engenharia Física**

**Sumários e Exames de Física 1, 2017**

**Jaime E. Villate**

Porto, julho de 2017

Copyright © 2017, Jaime E. Villate  
E-mail: villate@fe.up.pt

Publicado sob a licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>  
ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305,  
USA.

# Conteúdo

<b>1 Sumários</b>	<b>1</b>
1.1 Cinemática . . . . .	3
1.2 Cinemática vetorial . . . . .	10
1.3 Movimento curvilíneo . . . . .	18
1.4 Mecânica vetorial . . . . .	26
1.5 Dinâmica dos corpos rígidos . . . . .	34
1.6 Trabalho e energia . . . . .	46
1.7 Sistemas dinâmicos . . . . .	53
1.8 Mecânica lagrangiana . . . . .	61
1.9 Sistemas lineares . . . . .	70
1.10 Sistemas não lineares . . . . .	77
1.11 Ciclos limite e dinâmica populacional . . . . .	84
1.12 Sistemas caóticos . . . . .	92
<b>2 Exames</b>	<b>97</b>
2.1 Exame de época normal . . . . .	97
2.1.1 Enunciado . . . . .	98
2.1.2 Resolução . . . . .	100
2.1.3 Cotações . . . . .	103
2.2 Exame de época de recurso . . . . .	104
2.2.1 Enunciado . . . . .	105
2.2.2 Resolução . . . . .	107
2.2.3 Cotações . . . . .	109
<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>



# Capítulo 1

## Sumários

**Disciplina** Física 1.

**Curso** Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação. Segundo semestre do primeiro ano.

**Ano académico** 2016–2017, segundo semestre.

**Regente** Jaime E. Villate.

**Docentes** Joana Ascenso, Victor Hugo Granados, João Viana Parente Lopes e Jaime E. Villate.

**Número de alunos** 209.

**Método de avaliação** Distribuída (dois testes, 40%) com exame final (60%).

# FÍSICA I. MIEIC. 2016-2017

## Aula 1. 2017-02-06

Docente: Jaime Villate (villate@fe.up.pt)

página Web: <http://def.fe.up.pt/eic001/>

### Enquadramento dentro do curso

Áreas da Engenharia Informática:

- Arquitetura de computadores
- Programação
- Teoria da computação
- Estruturas de dados
- Bases de dados
- Engenharia de software
- Inteligência artificial
- Redes
- Ciência computacional: Resolução de problemas de ciência e engenharia usando métodos computacionais. É uma área recente, diferente das áreas tradicionais da ciência teórica e experimental. Os métodos numéricos e a física computacional estão dentro desta área.

O programa de Física I é a Dinâmica e Sistemas Dinâmica

Bibliografia: J. Villate. Dinâmica e Sistemas Dinâmicos, 2016.

## ○ 1. CINEMÁTICA

Estudo do movimento, sem tentar explicar as suas causas.

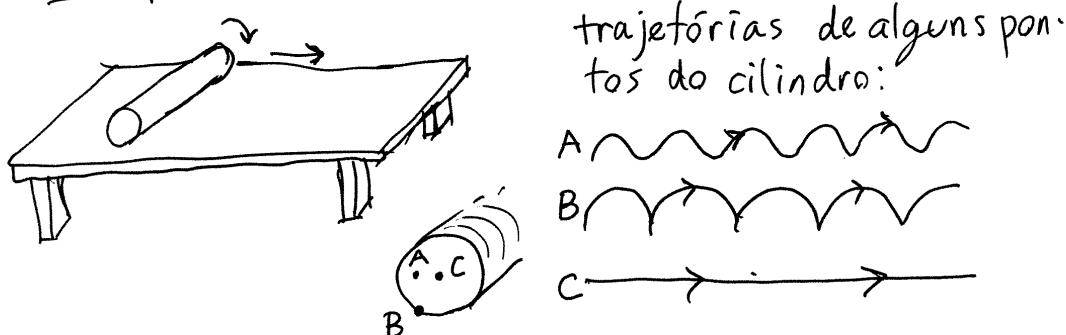
Movimento é a mudança da posição de um objeto.

Como a posição é sempre medida em relação a algum referencial, o movimento ou repouso de um objeto é sempre relativo a um referencial. Por exemplo, um objeto em repouso, relativo a uma carruagem de comboio, mas em movimento em relação à Terra.



Num objeto em movimento, cada ponto do objeto descreve uma curva contínua (**trajetória**).

Exemplo: Cilindro a rodar sobre uma mesa

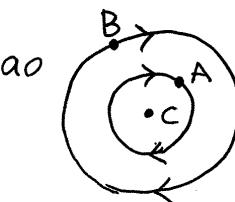


As trajetórias de todos os pontos podem ser obtidas pela sobreposição de dois movimentos

① translação retílinea do centro C.



② rotação em relação ao centro C.

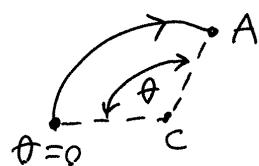
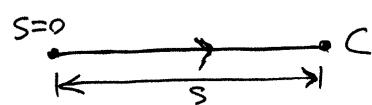


## ○ GRAUS DE LIBERDADE

Variáveis necessárias para determinar a posição de qualquer ponto dum objeto, num instante.

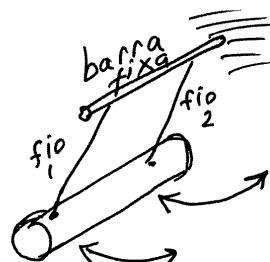
No caso do cilindro

há dois graus de liberdade, que podem ser a distância  $s$  do centro  $C$ , a partir de uma posição  $s=0$ , e o ângulo  $\theta$  que o ponto rodou desde uma posição  $\theta=0$ .

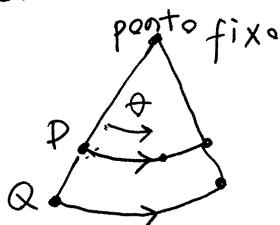


- 

Um outro possível movimento do cilindro é o movimento pendular, em que o cilindro está pendurado de dois pontos fixos por meio de dois fios com o mesmo comprimento.



- 



Neste caso, as trajetórias de todos os pontos no cilindro são arcos de círculo com o mesmo centro, mas diferentes raios.

- 

O movimento tem apenas um grau de liberdade, porque basta saber o valor de um ângulo  $\theta$ , igual para todos os pontos, para saber as posições. Os graus de liberdade são funções contínuas do tempo  $t$ :  $s(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $x(t)$ , etc.

## ○ CARATERIZAÇÃO DO MOVIMENTO

$s(t)$  = posição do ponto na sua trajetória.

$\theta(t)$  = ângulo que permite determinar a posição.

$x(t)$  = projeção na trajetória ao longo do eixo X.

:

a cada uma dessas funções contínuas estão associadas outras variáveis:

**Deslocamento**, durante um intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ ,

é a diferença entre a posição final menos a inicial:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$$

Note-se que os valores  $s(t_2)$  e  $s(t_1)$  dependem da escolha da origem  $s=0$ , mas  $\Delta s$  não.

**Velocidade média**, no intervalo  $[t_1, t_2]$ , é o deslocamento por unidade de tempo:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

○

Note-se que  $\Delta t$  é sempre positivo, mas  $\Delta s$  pode ter qualquer sinal. Como tal, a velocidade pode ser negativa.

**Velocidade instantânea**, em qualquer instante  $t$ ,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

○ O ponto por cima usa-se para indicar derivada em t.  
 $v(t)$  é também função contínua, positiva ou negativa.

**Rapidez**:  $|v(t)|$  (positiva)

Aula 2 . 2017-02-09

- Exemplo. Um automóvel encontrava-se no quilômetro 90 da estrada N13, às 12h, no quilômetro 30 às 13h, e no quilômetro 50 às 13h30. Determine a velocidade média entre as 12h e as 13h, e entre as 13h e as 13h30, e os deslocamentos nesses dois intervalos.

$$t_0 = 12 \text{ h}, s_0 = 90 \text{ km}$$

$$t_1 = 13 \text{ h}, s_1 = 30 \text{ km}$$

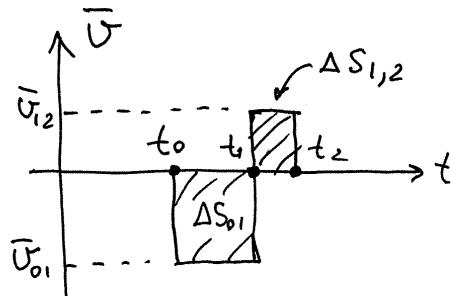
$$t_2 = 13.5 \text{ h}, s_2 = 50 \text{ km}$$

$$\bar{v}_{0,1} = \frac{30 - 90}{13 - 12} = -60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

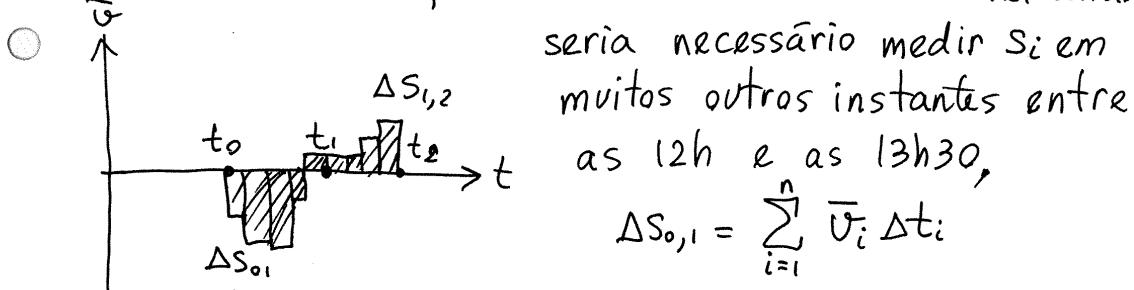
$$\bar{v}_{1,2} = \frac{50 - 30}{13.5 - 13} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\Delta s_{0,1} = 30 - 90 = -60 \text{ km} \quad \Delta s_{1,2} = 50 - 30 = 20 \text{ km}$$

Note-se que:  $\Delta s_{0,1} = \bar{v}_{0,1} \Delta t_{0,1}$   
e  $\Delta s_{1,2} = \bar{v}_{1,2} \Delta t_{1,2}$  são  
as áreas entre  $\bar{v}$  e o  
eixo das abscissas, num  
gráfico de  $\bar{v}$  vs.  $t$ .



Para saber a forma real como o automóvel andou,  
seria necessário medir  $s_i$  em



muitos outros instantes entre  
as 12h e as 13h30,

$$\Delta s_{0,1} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \Delta t_i$$

no limite quando  $\Delta t_i \rightarrow 0$ ,  $\bar{v}_i$  é a velocidade instantânea

e:  $\Delta s_{0,1} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta t_i \Rightarrow \boxed{S_1 - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} v \, dt}$

- O deslocamento num intervalo é igual ao integral da velocidade nesse intervalo.

- A expressão para  $\Delta s$ , igual ao integral de  $v(t)$ , pode obter-se também assim:  
 $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v dt = ds \Rightarrow \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} v dt$   
 $\Rightarrow s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt$  (para poder calcular o integral)  
(há que ter uma expressão para  $v$ , em função de  $t$ )

## ACELERAÇÃO TANGENCIAL

- A aceleração tangencial média, no intervalo  $[t_0, t_1]$  é:  
 $\bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$  (variação da velocidade) por unidade de tempo  
chama-se **tangencial**, porque, como veremos num capítulo posterior, é apenas uma parte da aceleração total.  
Considerando o intervalo  $[t, t + \Delta t]$ , com  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se a aceleração tangencial no instante  $t$ :  
 $a_t(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$
- $\Rightarrow dv = a_t dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} a_t dt \Rightarrow v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a_t dt$

- Exemplo.** Um ciclista, com velocidade inicial de  $5 \frac{m}{s}$ , aplica os travões, fazendo com que a velocidade diminua segundo a expressão:
- $v = \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2}$
- (unidades SI e
- $s$
- = posição) desde o ponto onde aplica os travões.

- Determine, (a) a aceleração tangencial em função de  $s$  e (b) o tempo que demora até travar por completo.

- Há dois instantes referidos no enunciado  $t_0$ , que pode arbitrar-se igual a 0, e  $t_1$  quando trava totalmente.

$$t_0 = 0 \rightarrow s_0 = 0, v_0 = 5$$

$$t_1 \rightarrow s_1 = \text{valor que faz } v(t) = 0$$

a) A expressão dada pode ser derivada para obter a:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (100 - s^2)^{1/2} \right) = \frac{1}{4} (100 - s^2)^{-1/2} \frac{d}{dt} (100 - s^2)$$

$$= \frac{1}{4} (100 - s^2)^{-1/2} (-2s) \frac{ds}{dt}$$

como  $\frac{ds}{dt} = v = \frac{1}{2} (100 - s^2)^{1/2}$ , então:

$$a_t = \frac{1}{4} (100 - s^2)^{-1/2} (-2s) \times \frac{1}{2} (100 - s^2)^{1/2} \Rightarrow a_t = -\frac{s}{4}$$

b)  $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{100 - s^2} = \frac{ds}{dt}$

- Separação de variáveis: coloca-se num lado da equação todo o que depende de  $s$  e no outro lado o que depende de  $t$ :

$$dt = \frac{2 ds}{\sqrt{100 - s^2}}$$

integram-se os dois lados, dando limites para  $t$  no lado esquerdo e limites para  $s$  no lado direito:

$$\int_0^{t_1} dt = \int_0^{s_1} \frac{2 ds}{\sqrt{100 - s^2}} \Rightarrow t_1 = \int_0^{s_1} \frac{2 ds}{\sqrt{100 - s^2}}$$

- Usando o Maxima,
  - (%i1) solve ((100-s^2)/2=0);
  - (%o1) [s=-10, s=10]

Ou seja que  $s_1 = 10 \text{ m}$  ( $s=-10$  não interessa neste caso).

  - (%i2)  $t_1 := \text{integrate}(2/(100-s^2), s, 0, 10);$
  - (%o2) % pi
  - (%i3) float(t1);
  - (%o4) 3.14159...

$\Rightarrow t_1 = 3.14159\dots$  segundos.

## EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_t = v \frac{dv}{ds}$$

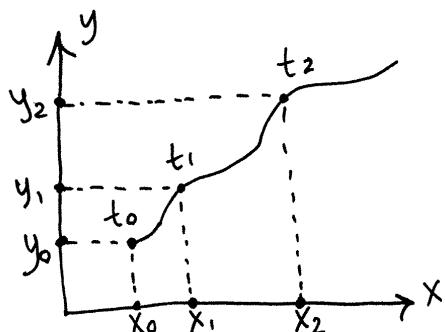
- Cada uma dessas 3 equações inclui 3 das 4 variáveis ( $t, s, v, a_t$ ). Para resolver uma dessas equações pelo método de separação de variáveis, é necessário reduzir as 3 variáveis para 2, ou seja, há que conhecer uma expressão que relate as duas das variáveis:
- $$a_t = f(t), \quad a_t = g(s), \quad v = h(s), \quad a_t = r(v), \dots$$

○

Aula 3. 2017-02-13



## MOVIMENTO DUM PONTO NUM PLANO



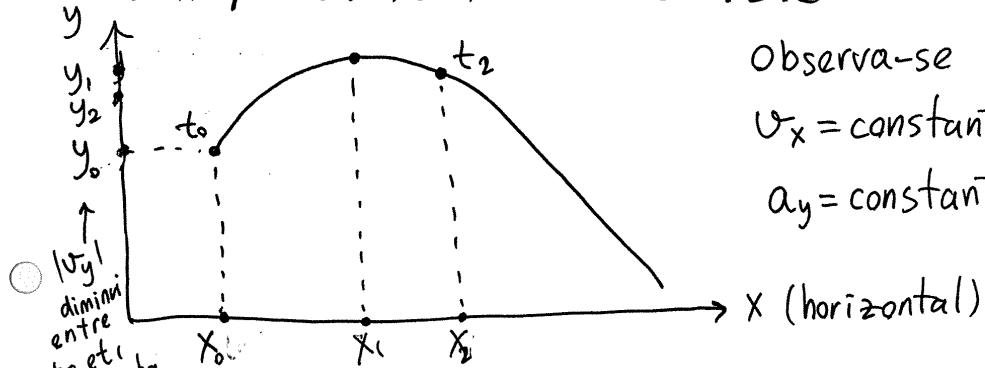
Dois graus de liberdade:  $x(t)$  e  $y(t)$

$$v_x = \dot{x}, a_x = \ddot{x}, a_x = x \frac{d v_x}{dx}$$

$$v_y = \dot{y}, a_y = \ddot{y}, a_y = y \frac{d v_y}{dy}$$


O movimento no plano é a sobreposição de dois movimentos rectilíneos (projecção do mov. nos dois eixos)

## LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS



Observa-se que:

$$v_x = \text{constante} = v_{x_0}$$

$$a_y = \text{constante} = -9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2} = \text{aceleração da gravidade}$$

Movimento uniforme.

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_0} (\text{constante}) \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = v_{x_0} \int_0^t dt \quad (t_0=0)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_{x_0} t}$$



- Movimento uniformemente acelerado.

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g \text{ (constante)} \Rightarrow \int_{\upsilon_{y_0}}^{\upsilon_y} d\upsilon_y = -g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_y = \upsilon_{y_0} - gt}$$

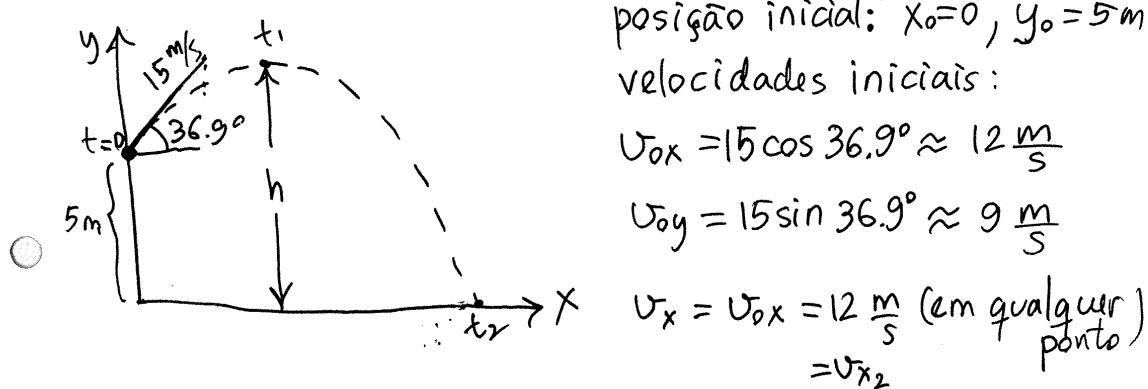
$$\upsilon_y \frac{d\upsilon_y}{dy} = -g \Rightarrow \int_{\upsilon_{y_0}}^{\upsilon_y} d\upsilon_y = -g \int_{y_0}^y dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\upsilon_y^2 - \upsilon_{y_0}^2) = -g(y - y_0) \Rightarrow \boxed{\upsilon_y^2 = \upsilon_{y_0}^2 + 2g(y - y_0)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_{y_0} - gt \Rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int_0^t (\upsilon_{y_0} - gt) dt$$

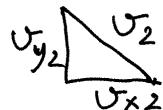
$$\Rightarrow \boxed{y = y_0 + \upsilon_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2}$$

- Exemplo. Atira-se uma pedra desde uma ponte, 5m por cima de um rio, com velocidade de 15 m/s, inclinada  $36.9^\circ$  por cima da horizontal. Determine a velocidade com que a pedra entrará na água e a altura máxima que alcançará, desde a superfície do rio (admita-se que a resistência do ar é desprezável).



○  $v_y \frac{dv_y}{dy} = -9.8 \Rightarrow \int_5^{v_{y2}} v_y dv_y = -9.8 \int_5^0 dy \Rightarrow v_{y2} = -13.38$

$$v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} \approx 18 \frac{m}{s}$$

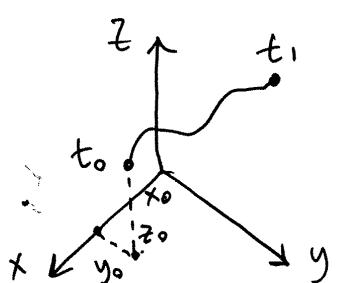


em  $t_1$ , quando  $h$  é máxima,  $v_y = 0$  e  $y = h$ .

Mudando os limites no mesmo integral anterior,

○  $\int_5^h v_y dv_y = -9.8 \int_5^h dy \Rightarrow h = 9.13 m$

## MOVIMENTO DUM PONTO NO ESPAÇO



3 graus de liberdade: as três projeções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que podem combinar-se num vetor

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

chamado **Vetor posição**.

○  $\hat{i}$  = vetor unitário na direção do eixo  $x$ .

$\hat{j}$  = vetor unitário na direção do eixo  $y$ .

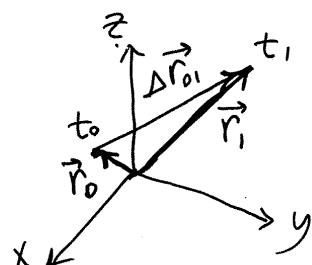
$\hat{k}$  = vetor unitário na direção do eixo  $z$ .

### Vetor deslocamento:

$$\Delta \vec{r}_{01} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$$

aponta desde a posição inicial até a posição final.

○  $\Delta \vec{r}_{01} = \Delta x_{01}\hat{i} + \Delta y_{01}\hat{j} + \Delta z_{01}\hat{k}$



## ○ Vetor velocidade

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t+\Delta t)\hat{i} + y(t+\Delta t)\hat{j} + z(t+\Delta t)\hat{k}) - (x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k})}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

○ Como vimos,  $\dot{x} = v_x$ ,  $\dot{y} = v_y$ ,  $\dot{z} = v_z$ ; ou seja, o vetor velocidade é a combinação das velocidades das projeções do movimento nos 3 eixos, combinadas num vetor:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

## Vetor aceleração

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

$\Rightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$

São as acelerações das 3 projeções do movimento, combinadas num único vetor:

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

e ainda:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

Aula 4. 16 de fevereiro de 2017

**Exemplo.**  $\vec{v}(t) = 3t\hat{i} - 2\hat{j} + t^2\hat{k}$  (SI)

$$\text{e em } t=0, \vec{r}_0 = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

No Maxima os vetores podem representar-se por listas:

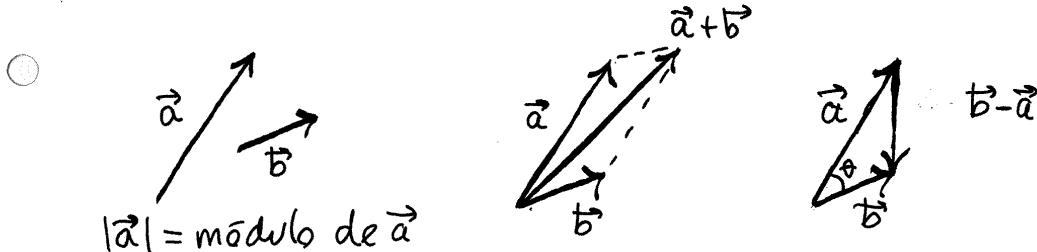
$$v: [3*t, -2, t^2];$$

$$a: \text{diff}(v, t); \rightarrow \vec{a} = 3\hat{i} + 2t\hat{k}$$

$$\vec{r}: [1, 2, 0] + \text{integrate}(v, t, 0, t)$$

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t^2\right)\hat{i} + (2 - 2t)\hat{j} + \frac{t^3}{3}\hat{k}$$

## VETORES



Produto escalar:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  (número real)

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

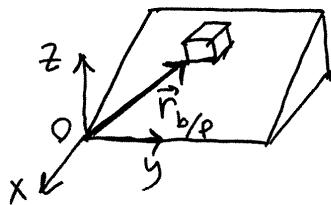
$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

## MOVIMENTO RELATIVO



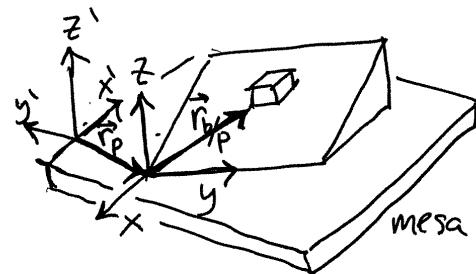
Exemplo: bloco a deslizar num plano inclinado. Posição do bloco em relação a um referencial fixo no plano:

$$\vec{r}_{b/p} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

velocidade do bloco, relativa ao plano inclinado:

$$\vec{v}_{b/p} = \frac{d\vec{r}_{b/p}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

Se o plano está em movimento sobre uma mesa, a posição da origem O, relativa a um referencial fixo na mesa é  $\vec{r}_{p/m}$  e  $\vec{v}_{p/m} = \frac{d\vec{r}_{p/m}}{dt}$  é a velocidade do plano, relativa à mesa.



A posição do bloco, relativa à mesa, é então,

$$\vec{r}_{b/m} = \vec{r}_{p/m} + \vec{r}_{b/p} = \vec{r}_{p/m} + (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

Se o plano tem apenas translação, sem rotação,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  permanecem nas mesmas direções e, como tal,

$$\vec{v}_{b/m} = \frac{d\vec{r}_{b/m}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{p/m}}{dt} + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{b/m} = \vec{v}_{p/m} + \vec{v}_{b/p}}$$

a velocidade do plano mais a velocidade do bloco, relativa ao plano, é a vel. do bloco, relativa à mesa.

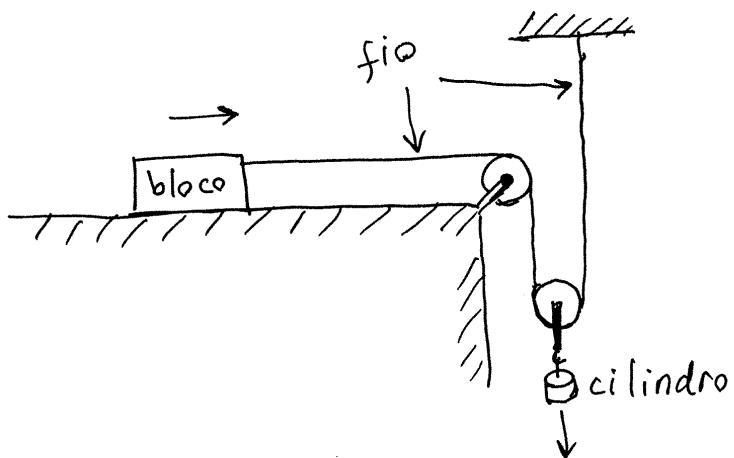
Derivando novamente, obtém-se uma relação semelhante para as acelerações:  $\boxed{\vec{a}_{b/m} = \vec{a}_{p/m} + \vec{a}_{b/p}}$



## MOVIMENTOS DEPENDENTES

**Exemplo.** Sistema com um bloco sobre uma mesa e um cilindro a descer na vertical.

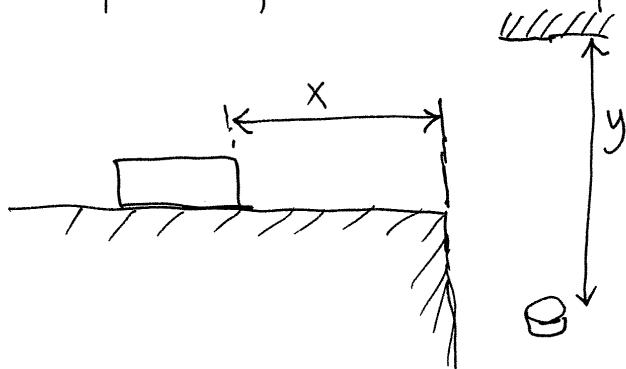
- 



O movimento horizontal do bloco e o movimento vertical do cilindro estão relacionados.

- 

Para descrever esses dois movimentos são necessárias duas variáveis  $x$  e  $y$ , medidas desde dois pontos fixos. Por exemplo:



$x$  = distância desde o bloco até o fim da mesa

$y$  = distância desde o cilindro até o suporte do fio.

- 

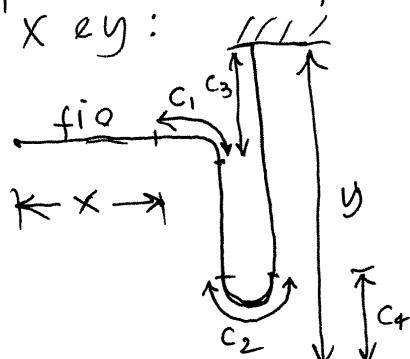
As velocidades do bloco e do cilindro são então  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$

()

Mas como as variáveis  $x$  e  $y$  estão relacionadas, este sistema tem apenas um grau de liberdade e basta saber uma das velocidades para determinar a outra.

A relação entre  $x$  e  $y$  encontra-se escrevendo a expressão do comprimento do fio,  $L$ , em função de  $x$  e  $y$ :

()



$$\begin{aligned} L &= x + c_1 + (y - c_3 - c_4) \\ &\quad + c_2 + (y - c_4) \\ L &= x + 2y + c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4 \end{aligned}$$

Como  $L$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  permanecem constantes, derivando em ordem ao tempo obtém-se:

()

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{\text{bloco}} = -2v_{\text{cilindro}}}$$

O sinal negativo indica que se o cilindro desce ( $v_{\text{cilindro}} > 0$ ), o bloco desloca-se para a direita ( $v_{\text{bloco}} < 0$ )

Derivando novamente,

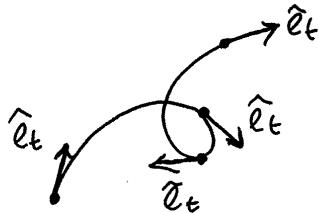
$$\ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$a_{t\text{ bloco}} = -2a_{t\text{ cilindro}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{nenhuma das duas acel-} \\ \text{erações é igual a g.} \end{array} \right)$$

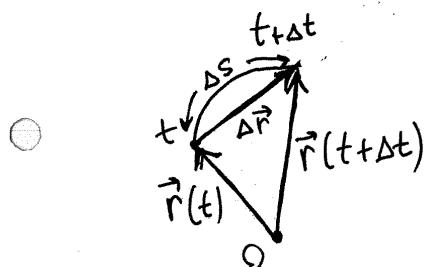
()

Aula 5. 20 de fevereiro, 2017.

## COORDENADAS TANGENCIAL E NORMAL



Em cada ponto da trajetória existe um versor tangente,  $\hat{e}_t$ , tangente à trajetória e no sentido em que  $s$  aumenta.



$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= \text{deslocamento vetorial no intervalo } [t, t+\Delta t] \\ &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\end{aligned}$$

$\Delta s$  = deslocamento ao longo da trajetória

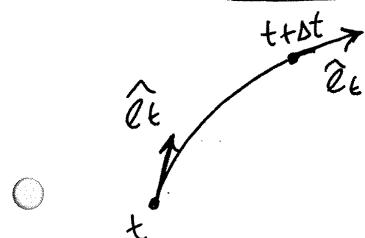
Quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta \vec{r}$  aproxima-se da direção tangente à trajetória, e o seu módulo é aproximadamente  $\Delta s$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s \hat{e}_t = ds \hat{e}_t$$

Como tal, o vetor velocidade é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{e}_t \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{s} \hat{e}_t}$$

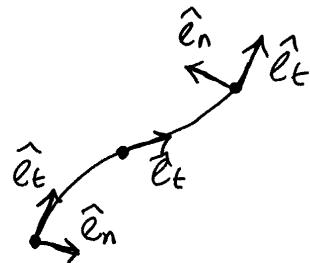
O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória e o seu módulo é  $|v| = |\dot{s}|$

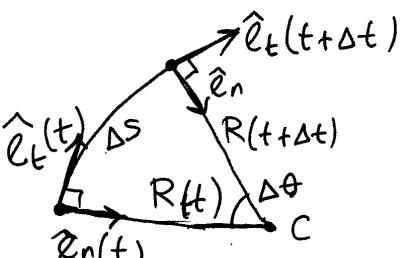


Quando a trajetória não é reta,  $\hat{e}_t$  muda de direção  
 $\Rightarrow \frac{d \hat{e}_t}{dt} \neq 0$

$$\begin{aligned}\text{Como } \hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 &\Rightarrow \frac{d}{dt} (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = 0 \\ \Rightarrow \hat{e}_t \cdot \frac{d \hat{e}_t}{dt} + \frac{d \hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t &= 0 \Rightarrow \hat{e}_t \cdot \frac{d \hat{e}_t}{dt} = 0\end{aligned}$$

- A derivada de  $\hat{e}_t$ , em ordem a  $t$ , é um vetor perpendicular à trajetória, no mesmo plano dela, e no sentido em que esta se curva: versor normal  $\hat{e}_n$



- 
 $\sim$  

No limite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $|\Delta \hat{e}_t| \rightarrow \Delta \theta$   
(arco com raio = 1)

e, como  $\Delta \theta = \frac{\Delta s}{R}$ , então:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta s/R)}{\Delta t} \hat{e}_n = \frac{v}{R} \hat{e}_n$$

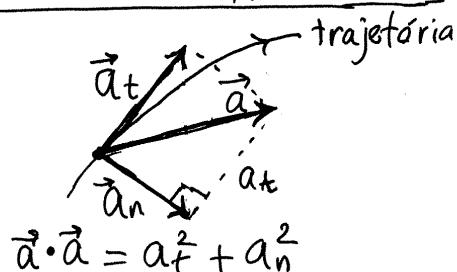
onde  $R$  é o raio de curvatura da trajetória, no instante  $t$ .

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = v\dot{\hat{e}}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n}$$

O vetor aceleração tem uma componente tangencial,  $a_t = \dot{v}$ , e uma componente normal,  $a_n = \frac{v^2}{R}$

- $a_t$  e  $a_n$  são os catetos num triângulo retângulo em que a hipotenusa é o módulo do vetor aceleração  $\vec{a}$ .



- **Exemplo.** A posição dum ponto, em função do tempo  $t$ , é  $\vec{r}(t) = 5t\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j} + 2(1-t^2)\hat{k}$  (SI) no intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . Determine: (a)  $v(t)$  (b)  $R(t)$  (c) o deslocamento ao longo da trajetória, desde  $t=0$  até  $t=1$ .

$$(a) \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{i} + 3t\hat{j} - 4t\hat{k}$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = 25 + 9t^2 + 16t^2 = 25(1+t^2)$$

- Arbitrando que  $s$  aumenta desde  $t=0$  até  $t=1$ ,

$$v = 5\sqrt{1+t^2}$$

$$(b) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = 9 + 16 = 25$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(5(1+t^2)^{1/2}) = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} - a_t^2 = 25 - \frac{25t^2}{1+t^2} = \frac{25}{1+t^2}$$

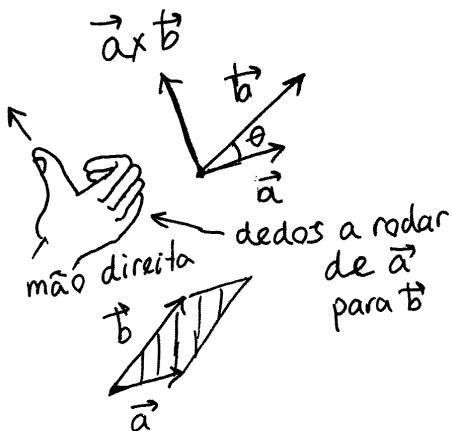
$$(c) R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\left(\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}\right)} = 5(1+t^2)^{3/2}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow 5\sqrt{1+t^2} = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} ds = 5 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{5}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$$

$$\Rightarrow \Delta s = 5.739 \text{ m}$$

## PRODUTO VETORIAL



$\vec{a} \times \vec{b}$  = vetor perpendicular ao plano dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , no sentido da regra da mão direita, e com módulo

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta = \text{área do paralelogramo formado por } \vec{a} \text{ e } \vec{b}.$$

Propriedades: ①  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

②  $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

③  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ ,  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ ,  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

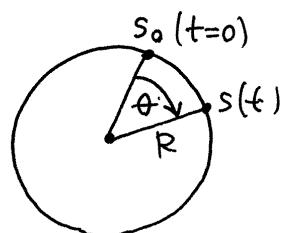
$$\begin{aligned} ④ \quad \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Um caso particular quando os dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  estão no plano  $xy$ ,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k} = (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Aula 6. 23 de fevereiro, 2017.

## MOVIMENTO CIRCULAR



A trajetória é uma circunferência de raio  $R$ .

$$s(t) = s_0 + R\theta(t)$$

$\theta$  em radianos, medido a partir de  $t=0$

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta}, \quad a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta}, \quad a_n = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

Definise:

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \ddot{\omega}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

velocidade angular

aceleração angular

estas 3 equações resolvem-se igual que as equações do cap. 1.

$$v = R\omega, \quad a_t = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$$

### Movimento circular uniforme

$$\alpha = 0 \Rightarrow a_t = \dot{v} = R\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega \text{ constante}$$

$$\Rightarrow \theta = \omega t$$

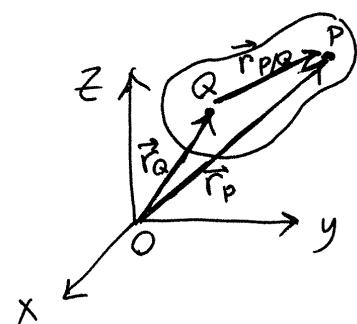
período de rotação =  $T$  = tempo que demora a dar uma volta

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{frequência} = f = \frac{1}{T} = \text{número de voltas por unidade de tempo.}$$

em rpm,  $s^{-1}$ ; Hz (hertz), etc.

## ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

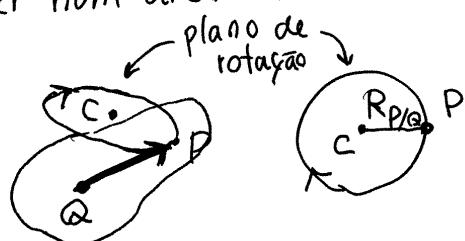


$\vec{r}_Q$  e  $\vec{r}_P$  são as posições de dois pontos, no mesmo instante.

$$\vec{r}_{P/Q} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q = \text{posição de } P \text{ relativamente a } Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q}$$

- Como o módulo de  $\vec{r}_{P/Q}$  permanece constante, o movimento de  $\vec{r}_{P/Q}$  deve ser num arco de círculo.



O plano desse círculo é o plano de rotação e o raio do círculo é:

$$R_{P/Q} = \text{projeção de } \vec{r}_{P/Q} \text{ no plano de rotação}$$

$$\boxed{v_{P/Q} = R_{P/Q} \omega} \quad \begin{matrix} \text{e } v_{P/Q} \text{ é} \\ \text{perpendicular a } R_{P/Q} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \omega = \text{velocidade} \\ \text{angular do corpo.} \end{matrix}$$

- Qualquer outro ponto do corpo tem movimento circular, em relação a Q, com a mesma velocidade  $\omega$  (neste instante) e com planos de rotação paralelos. Se assim não fosse, a distância e posição relativa entre os pontos do corpo mudaria.  $\omega$  também é independente do ponto que seja escolhido como referência (em vez de Q).

- Rotação plana. Quando o plano de rotação não muda ( $\omega$  pode ser diferente em diferentes instantes mas o plano não):

$$\Rightarrow \alpha_{P/Q, \text{tangencial}} = R_{P/Q} \alpha, \quad \alpha_{P/Q, n} = R_{P/Q} \omega^2$$

## MOVIMENTO COM RESTRIÇÕES

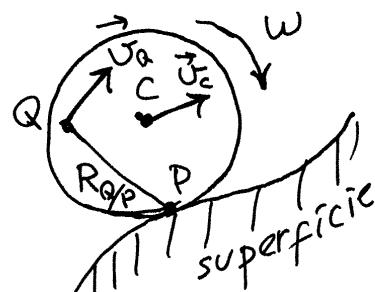
**Exemplo 1.** Roda em movimento, sem deslizar, sobre uma superfície. O ponto P, em contacto com a superfície, tem velocidade nula:

$$v_p = 0 \Rightarrow v_q = R_{q/p} \omega$$

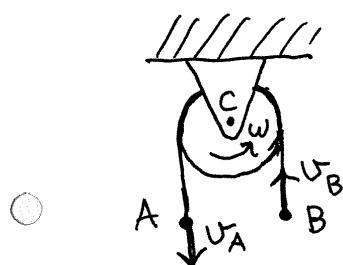
para qualquer ponto Q, onde  $R_{q/p}$  é a distância entre as projeções de P e Q no plano de rotação; e  $\vec{v}_q$  é perpendicular a  $R_{q/p}$ . No caso do centro C,

$$v_c = R\omega \Rightarrow s_c = R\theta + s_0 \quad (R = \text{raio da roda})$$

o centro desloca-se  $R\Delta\theta$ , na direção paralela à superfície



## Exemplo 2. Roldanas com fios que não deslizam



Fixa:

$$v_c = 0$$

$$v_A = R\omega$$

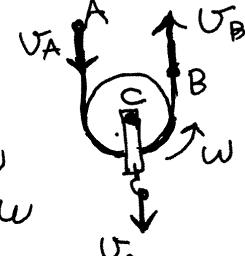
$$v_B = R\omega$$

Móvel:

$$v_A - v_c = R\omega$$

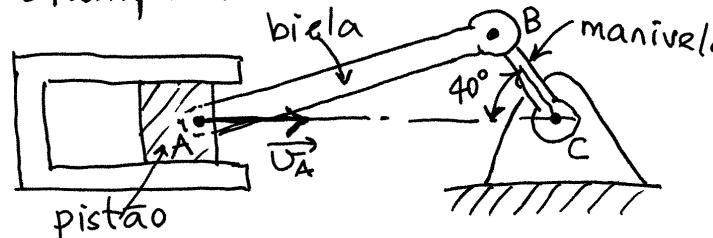
$$v_A + v_B = 2R\omega$$

$$v_c + v_B = R\omega$$



mais, porque estão em sentidos opostos

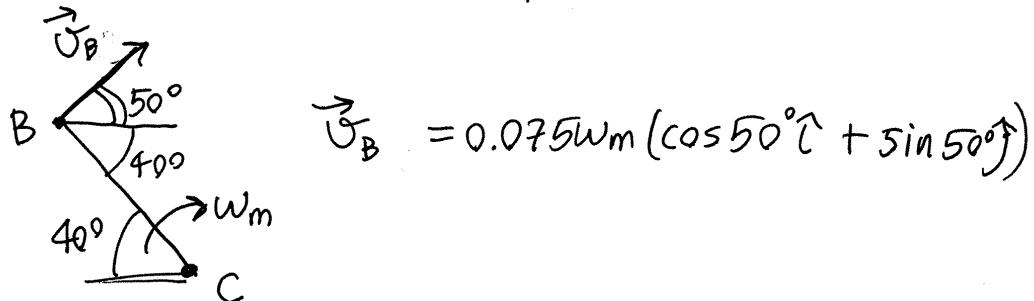
## Exemplo 3. Mecanismo biela-manivela. Converte o



movimento oscilatório do pistão em movimento circular da manivela.

$\overline{AB} = 0.2 \text{ m}$ ,  $\overline{BC} = 0.075 \text{ m}$ . No instante que se mostra,  $v_A = 12 \text{ m/s}$ . Determine as velocidades angulares da biela e da manivela nesse instante.

- Manivela:  $v_{B/C} = 0.075w_m$ ,  $v_c = 0 \Rightarrow v_B = 0.75w_m$



Bielha:  $v_{B/A} = 0.2w_b$

- $\frac{\sin \theta}{0.075} = \frac{\sin 40^\circ}{0.2}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0.075 \sin 40^\circ}{0.2}\right)$

- $\vec{v}_{B/A} = 0.2w_b (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$ 
 $\vec{v}_A = 12 \hat{i}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ 
 $\Rightarrow \vec{v}_B = (12 - 0.2w_b \sin \theta) \hat{i} + 0.2w_b \cos \theta \hat{j}$

Igualando os dois resultados,

$$0.075w_m (\cos 50^\circ \hat{i} + \sin 50^\circ \hat{j}) = (12 - 0.2w_b \sin \theta) \hat{i} + 0.2w_b \cos \theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.075w_m \cos 50^\circ = 12 - 0.2w_b \sin \theta \\ 0.075w_m \sin 50^\circ = 0.2w_b \cos \theta \end{cases}$$

- $\Rightarrow \begin{cases} w_b = 56.85 \text{ s}^{-1} \\ w_m = 192.07 \text{ s}^{-1} \end{cases}$ 
(nos sentidos que usámos)  
pois ambas deram positivas)

Aula 7, 2 de março de 2017

## LEIS DE NEWTON

As bases da dinâmica vetorial são as 3 leis de Newton (1687). O estudo da trajetória dos corpos (cinemática) permite determinar a expressão da aceleração e, pelas leis de Newton, a força responsável pelo movimento. A partir do conhecimento das forças pode-se depois prever como será o movimento em outras condições.

### 1ª LEI. (lei da inércia)

"Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas!"

Esta lei é válida no "espaço absoluto" e em qualquer outro referencial que se desloque com movimento uniforme e retilíneo em relação ao espaço absoluto (**referencial inercial**). É então impossível distinguir entre algum referencial inercial e o espaço absoluto. Nos referenciais não inerciais (com aceleração), um objeto pode mudar o seu estado sem existirem forças que expliquem essa mudança.



Exemplo: se o objeto em repouso, na mesa no comboio, começa a deslocar-se sem ter sido aplicada nenhuma força, o comboio está a acelerar.

- 2<sup>a</sup> LEI. "A mudança na quantidade de movimento é proporcional à força motora impressa e faz-se na direção da linha reta segundo a qual a força motora é aplicada".

Newton define **quantidade de movimento** =  $\vec{p} = m\vec{v}$   
a mudança na quantidade de movimento é então:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (\text{final, em } t_2, \text{ menos inicial, em } t_1)$$

- e força motora impressa quer dizer:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \text{impulso.}$$

"na direção da linha reta..." quer dizer que a força, e o impulso que ela transmite ao corpo, são vetores:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Ou seja, a 2<sup>a</sup> lei é:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\Rightarrow \vec{F} dt = d\vec{p} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Num sistema em que m permanece constante,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Unidade SI de força: 1 newton = N = 1  $\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$



Por exemplo, a força gravítica (peso) numa pessoa com massa  $m = 65\text{ kg}$  é:  
 $F_g = mg = (65\text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 637\text{ N}$



Quando essa pessoa está em repouso, sobre uma balança, a sua aceleração é zero e, como tal, a força total sobre ela é nula porque há uma força de contacto que a balança exerce, para cima, nos pés da pessoa, igual a 637 N.

**3<sup>a</sup> LEI.** (lei de ação e reação).

"A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mutuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas".



No caso do homem de 65 kg em repouso sobre uma balança, como a balança exerce força de contacto, vertical, para cima, de 637 N, os pés do homem também exercem uma força vertical, de 637 N, sobre a balança, mas de cima para baixo.



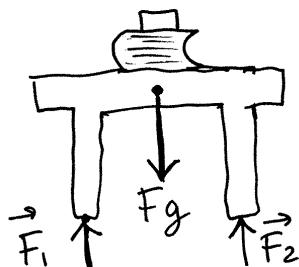
A reação ao peso  $mg$ , que é a força gravítica da Terra sobre o homem, é uma força gravítica do homem sobre a Terra, que atrai a Terra para o homem com 637 N. Mas essa força anula-se com a força de contacto do homem sobre a balança.

Se o homem estivesse em queda livre, a sua aceleração seria:  $a = \frac{637\text{ N}}{65\text{ kg}} = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , mas a aceleração

da Terra, na direção do homem seria quase nula:  $\frac{637\text{ N}}{5.97 \times 10^{24}\text{ kg}} \approx 0$

- Se os dois objetos 1 e 2 que exercem forças de ação e reação entre eles fazem parte do mesmo corpo, as duas forças anulam-se. Assim sendo, apenas interessam as **forças externas**, produzidas por objetos fora do corpo.

- Diagrama de corpo livre.** Mostra todas as forças externas num corpo isolado. Exemplo: diagrama de uma mesa, com um livro e um apagador par cima do livro:



$$F_g = (m_m + m_l + m_a) g$$

mesa      livre      apagador

$F_1, F_2, F_3, F_4$  = forças de contacto nos quatro pés da mesa

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (m_m + m_l + m_a) g$$

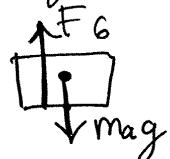
sistema livro mais apagador:



$$F_g = (m_l + m_a) g \quad F_5 = (m_l + m_a) g$$

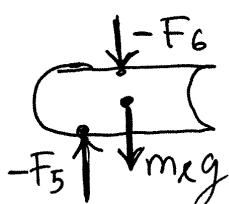
$F_5$  = força de contacto da mesa sobre o livro (e não sobre o apagador)

Apagador:



- $F_6 = mag$   
força de contacto do livro sobre o apagador

Livro:



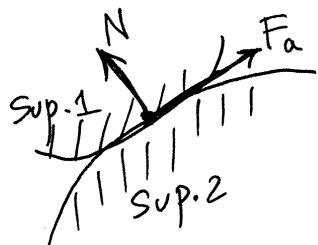
$$\begin{aligned} -F_5 &= \text{reação a } F_5 \\ -F_6 &= \text{reação a } F_6 \\ mg &= +F_5 - F_6 \\ &= +(m_l + m_a) g - mag \\ &= m_l g \end{aligned}$$

O peso do apagador não atua no livro!

Aula 8. 6 de março de 2017



## FORÇAS DE ATRITO



A força de contacto, de uma superfície 2 sobre uma superfície 1, costuma dividir-se (por conveniência) nas suas componentes normal,  $N$ , e tangencial  $F_a$ , chamada força de atrito.

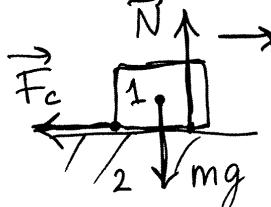
- Existem dois tipos de atrito entre corpos rígidos:
    - ⓐ **Atrito estático.** Quando a velocidade da superfície 1, relativa à superfície 2, é nula:  $v_{1/2} = 0$
- $F_e$  = força de atrito estático.  
é indeterminada, entre 0 e um valor máximo, e pode apontar em qualquer direção tangente às superfícies.

$$F_e \leq \mu_e N$$

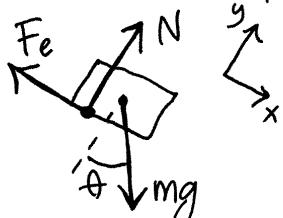
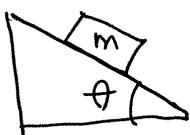
$\mu_e$  = coeficiente de atrito estático (número sem unidades)

- Ⓩ **Atrito cinético.** Quando  $v_{1/2} \neq 0$ ,
- $F_c$  = força de atrito cinético.  $F_c = \mu_c N$
- $\mu_c$  = coeficiente de atrito cinético. Costuma ser menor que  $\mu_e$ .

$\vec{F}_c$  tem a mesma direção de  $\vec{v}_{1/2}$ , mas sentido oposto



- Exemplos. ① bloco em repouso sobre um plano inclinado



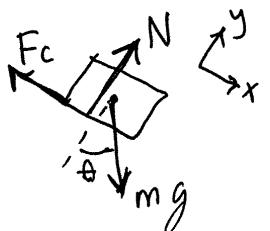
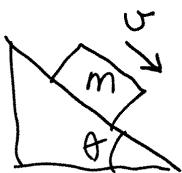
$$\text{como } a_x = a_y = 0,$$

$$\sum F_x : mgs \sin \theta - F_e = 0$$

$$\sum F_y : -mg \cos \theta + N = 0$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta \quad e \quad F_e = mgs \sin \theta$$

- ② Bloco a deslizar sobre um plano inclinado, com velocidade de constante.  $\Rightarrow \vec{a} = 0$



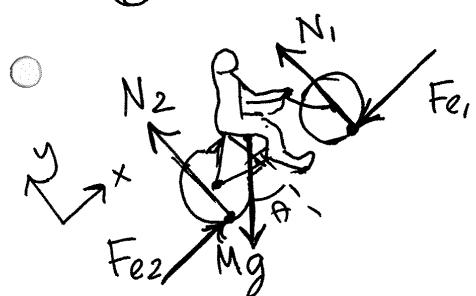
$$\sum F_x = mgs \sin \theta - \mu_c N = 0$$

$$\sum F_y = -mg \cos \theta + N = 0$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\mu_c = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

- ③ Bicicleta a subir uma rampa, com  $a_t > 0$ .



5 forças:  $Mg$  = peso da bicicleta mais homem.

$N_1$  e  $N_2$ : reações normais nas duas rodas

$F_{e1}$  = força de atrito estático na roda da frente, oposta ao movimento.

$F_{e2}$  = força de atrito estático na roda traseira, na direção do movimento (roda com tração)

$$a_x \neq 0, a_y = 0$$

Apenas é possível

calcular  $N_1 + N_2$

e  $F_{e2} - F_{e1}$

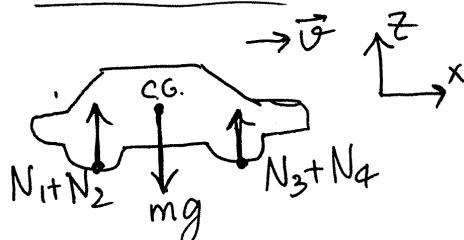
$$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg \cos \theta = 0$$

$$\sum F_x = F_{e2} - F_{e1} - Mg \sin \theta = ma$$

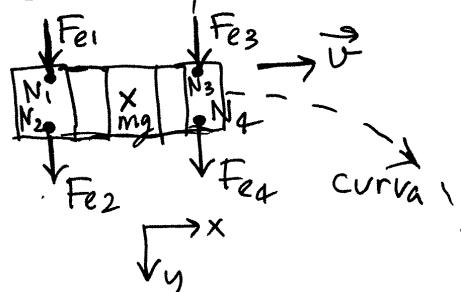
para encontrar  $N_1$  e  $N_2$  por separado, falta uma 3ª condição: o corpo não roda, que será estudada no cap. 5.

- ④ Automóvel com rapidez  $\vec{v}$  constante, numa curva de raio  $R$ .

vista lateral



vista superior



$$\alpha_x = \alpha_z = 0, \quad \alpha_y = \alpha_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_z = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - mg = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = mg$$

$$\sum F_y = Fe_1 + Fe_2 + Fe_3 + Fe_4 = \frac{mv^2}{R} \quad Fe_i \leq Me N_i$$

$$\sum F_x: 0 = 0$$

$$Fe_1 + Fe_2 + Fe_3 + Fe_4 \leq \\ Me(N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$$

$$\Rightarrow \frac{F_{\text{total}}}{N_{\text{total}}} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} \leq Me \Rightarrow v \leq \sqrt{Me g R}$$

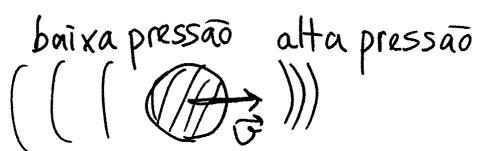
- A velocidade máxima com que consegue fazer a curva é  $\sqrt{Me g R}$

## FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS

Sobre um corpo com velocidade  $\vec{v}$  dentro de um fluido (líquido ou gás), atua uma força de resistência,  $F_r$ , na mesma direção de  $\vec{v}$  mas no sentido oposto.

- Há dois mecanismos importantes responsáveis por essa força:

○ ① A diferença de pressões.



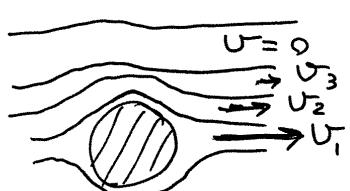
O objeto comprime o fluido à sua frente e expande o fluido que fica atrás. O princípio de Bernoulli implica uma

força:  $F_r = \text{constante} \times A \times V^2$

onde  $A$  é a área da seção transversal do objeto e a constante depende da forma do objeto e da massa volêmica do fluido. No caso de uma esfera de raio

R: 
$$F_{\text{esfera}} = \frac{\pi}{4} \rho R^2 V^2$$
  $\rho$  = massa volêmica do fluido.

○ ② A viscosidade do fluido: atrito entre as



camadas mais próximas do objeto, que se deslocam com ele, e as camadas mais distantes, em repouso.

$F_r = \text{constante} \times V$

No caso de uma esfera de raio R:

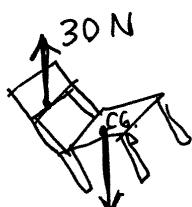
$$F_{\text{esfera}} = 6\pi\eta RV$$

$\eta$  = coeficiente de viscosidade do fluido

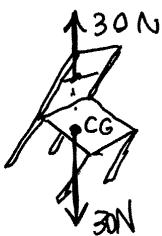
○  $F_r = \begin{cases} \text{constante} \times V, & \text{se } V \text{ for baixa} \\ \text{constante} \times V^2, & \text{se } V \text{ for elevada} \end{cases}$

Aula 9. 9 de março de 2017

## FORÇAS NOS CORPOS RÍGIDOS



$mg = 30\text{ N}$   
as duas forças são iguais e opostas, mas o sistema não fica em equilíbrio



A cadeira roda e fica em equilíbrio quando as 2 forças estão na mesma linha vertical.



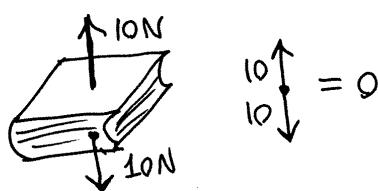
A força para cima pode ser aplicada em qualquer outro ponto (P ou Q) na mesma linha e o equilíbrio mantém-se



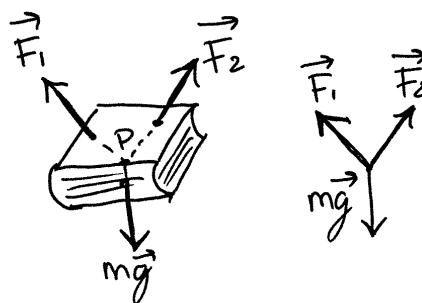
⇒ as forças são **VETORES DESLIZANTES**, que, para além de módulo, direção e sentido, têm também uma **linha de ação**

## SOBREPOSIÇÃO DE FORÇAS

① **Forças co-lineares.** Com a mesma linha de ação, somam-se como vetores livres.

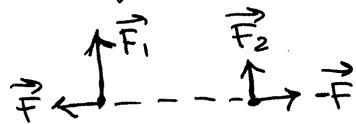
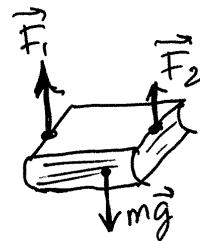


② **Forças concorrentes.** As linhas de ação cruzam-se num ponto comum.



Deslocam-se, cada uma na sua linha de ação, para o ponto comum e somam-se como forças concorrentes.

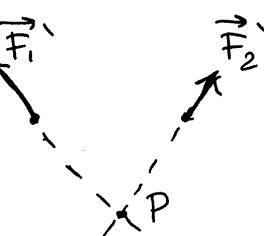
③ Forças paralelas.



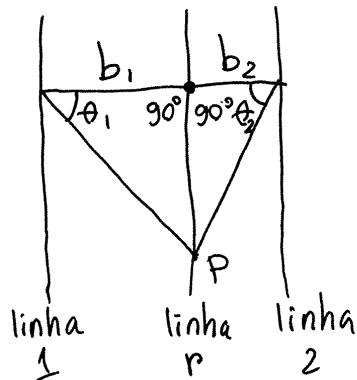
- a) Adicionam-se duas forças auxiliares  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , co-lineares, nos pontos de ação de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . Isso não altera nada porque a resultante das forças auxiliares é nula.

- b) Soma-se cada força  $\vec{F}_i$  à força auxiliar no mesmo ponto. Os resultados,  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$ , são sempre duas forças concorrentes.

- c) Somam-se  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  no ponto comum. Observe-se que a resultante,  $\vec{F}_r$ , é também paralela a  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e igual à soma delas, como se fossem vetores livres; mas a linha de ação está entre as linhas de ação de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .



$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}) + (\vec{F}_2 - \vec{F}) \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \end{aligned}$$



$$b_1 \tan \theta_1 = b_2 \tan \theta_2$$

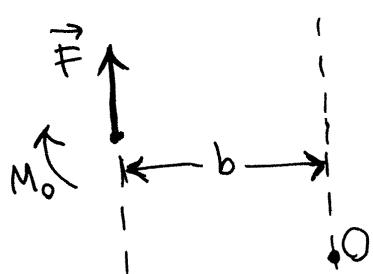
$$\frac{F}{F_1} \cdot \frac{F_1}{b_1} \tan \theta_1 = \frac{F}{F_2} \cdot \frac{F_2}{b_2} \tan \theta_2$$

$$\frac{F}{F_1} \cdot \frac{F_1}{b_1} = \frac{F}{F_2} \cdot \frac{F_2}{b_2}$$

$$\Rightarrow b_1 F_1 = b_2 F_2$$

- Lei das alavancas: os momentos das duas forças, em relação ao ponto de aplicação da resultante, são iguais e opostos.

● **Momento de uma força, em relação a um ponto**



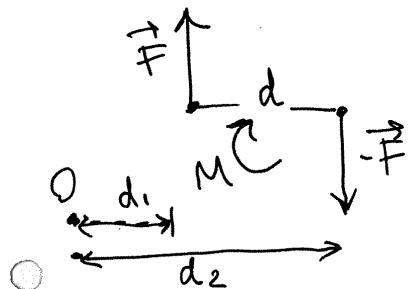
$b$  = distância desde  $O$  até à  
linha de ação de  $\vec{F}$   
= braço de  $\vec{F}$

$$M_O = Fb \quad \text{momento em relação a } O. \text{ Neste caso, no sentido horário.}$$

$M_O$  indica a tendência a rodar, em torno do ponto  $O$ .

○

**BINÁRIO.** Duas forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , com o mesmo módulo, a mesma direção, sentidos opostos e linhas de ação separadas por uma distância  $d$ .



O procedimento explicado para somar forças paralelas falha, mas observe-se que o momento que as duas forças exercem tem o mesmo valor total, em relação a qualquer ponto  $O$ :

$$M_b = M_1 + M_2 = Fd_1 - Fd_2 = F(d_1 - d_2) \quad (\text{sentido horário})$$

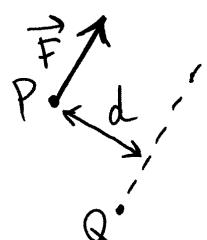
$$M = Fd \quad \text{não se escreve o índice } O, \text{ porque não depende de } O.$$

O binário é uma tendência a rodar, sem tendência a deslocar.

○ O momento de um binário, igual ao módulo de uma das forças vezes a distância entre elas, pode ser aplicado em qualquer parte do corpo, com qualquer direção, e o efeito é o mesmo:

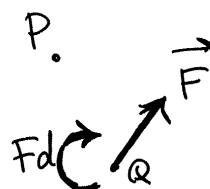
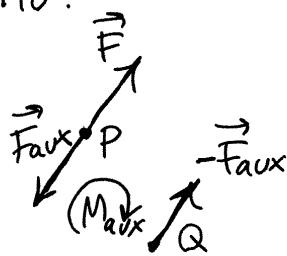
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \end{array}$$

- Deslocar uma força para um ponto fora da sua linha de ação

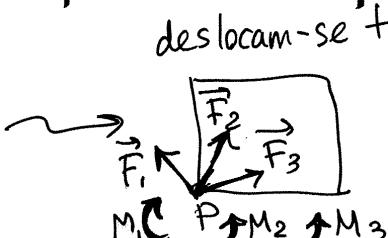
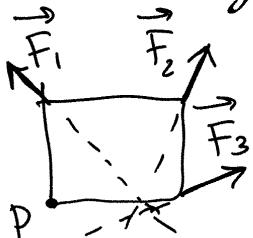


Para deslocar  $\vec{F}$ , do ponto P até o ponto Q, numa linha à distância d de P, usa-se o seguinte procedimento:

- ① Acrescentam-se duas forças  $F_{aux}$  e  $-F_{aux}$  e um binário  $M_{aux} = F_{aux}d$  de forma que o binário de  $F_{aux}$  e  $-F_{aux}$  seja igual e oposto a  $M_{aux}$  para que o total do que se acrescentou seja 0. Se  $\vec{F}_{aux} = -\vec{F}$ , então as duas forças em P anulam-se e no ponto Q ficam  $\vec{F}$  ( $-\vec{F}_{aux}$ ) e o binário  $M = Fd$ , que é igual ao momento que  $\vec{F}$  produzia em P, em relação a Q.
- Ou seja, pode deslocar-se  $\vec{F}$  para Q, acrescentando o momento de  $\vec{F}$ , no ponto original, relativo a Q.



### Método geral para somar forças.

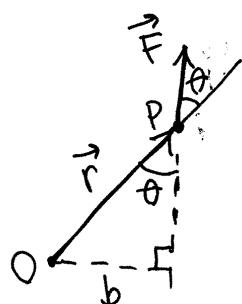


deslocam-se todas para um ponto comum P.

- $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  (soma de vetores livres)  
 $M_r = M_1 - M_2 - M_3$  (soma dos momentos das forças) em relação a P.

Aula 10. 13 de março de 2017

## VETOR MOMENTO



$\vec{r}$  = vetor posição do ponto P onde a força  $\vec{F}$  é aplicada.

$\theta$  = ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$

$b$  = braço de  $\vec{F}$ , em relação à origem  
=  $|\vec{r}| \sin \theta$

$\Rightarrow$  Momento de  $\vec{F}$  em relação a O =  $M_O = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$

- e  $\vec{F}$  produz rotação no sentido da regra da mão direita de  $\vec{r}$  para  $\vec{F}$ . Como tal,  $M_O = |\vec{r} \times \vec{F}|$

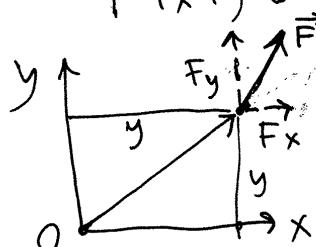
$\vec{r} \times \vec{F}$  é perpendicular ao plano da rotação produzida por  $\vec{F}$ . Define-se então o vetor momento:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

perpendicular ao plano de rotação  
e a regra da mão direita indica  
o sentido da rotação.

Escolhendo o plano xy no plano de  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ,

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = (x F_y - y F_x) \hat{k}$$



$x F_y$  = momento da componente  $F_y$ . Se for positivo, no sentido anti-horário; se for negativo, no sentido horário

$y F_x$  = momento da componente x negativo ou positivo?

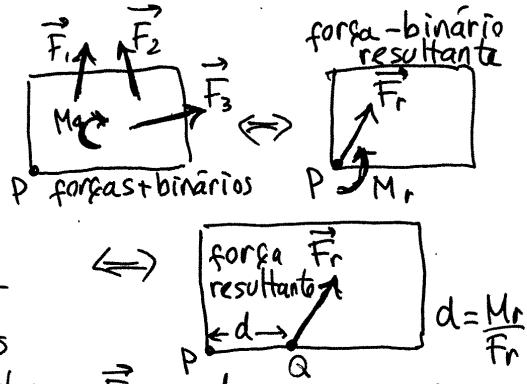
$\Rightarrow M_O = \text{soma algébrica dos momentos das componentes da força (teorema de Pappus).}$

- Várias formas de calcular  $M_O$ .

$$|M_O| = d |\vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M_O = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

ou pelo teorema de Pappus.

- Se a força  $\vec{F}$  é deslocada para outra linha de ação, há que introduzir um binário  $M_r$  perpendicular ao plano em que se deslocou. Como tal, um sistema força resultante  $\vec{F}_r$  mais binário resultante, perpendicular a  $\vec{F}_r$ , pode ser substituído apenas por uma única força  $\vec{F}_r$ , sem binário num outro ponto, deslocando  $\vec{F}_r$  no plano perpendicular a  $M_r$ .

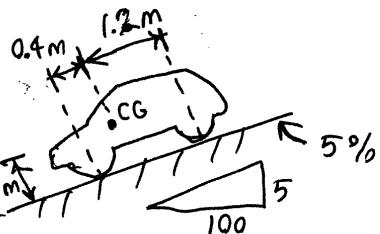


## CORPOS RÍGIDOS EM EQUILÍBRIO

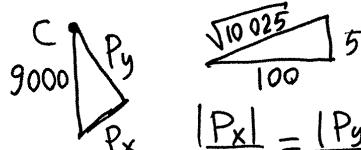
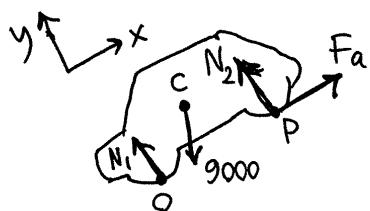
Quando a força e o binário resultante são nulos  $\Rightarrow$  o corpo está em repouso ou com movimento retílineo uniforme (ou rotação uniforme). Note-se que se  $F_r$  e  $M_r$  são nulos, em P, então  $M_r$  também será nulo em relação a qualquer outro ponto.

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= 0 \\ M_p(\vec{F}_1) + M_p(\vec{F}_2) &+ M_p(\vec{F}_3) + M_r = 0 \end{aligned}$$

- Exemplo.** O automóvel na figura pesa 9000 N e o seu centro de gravidade de está a 35 cm de altura, 40 cm atrás do eixo frontal e 120 cm à frente do eixo traseiro. Determine as reações normais e as forças de atrito nos pneus, quando:
  - está parado na estrada com declive de 5%;
  - está a descer a estrada com declive de 5%, com velocidade constante.



Resolução: a)  $O = (0,0)$ ,  $C = (0.4, 0.35)$ ,  $P = (1.6, 0)$



$$\Rightarrow P_x = -449.4 \text{ N}, P_y = -8988.8 \text{ N}$$

Há 3 variáveis:  $N_1$ ,  $N_2$  e  $F_a$  (soma do atrito nos 4 pneus) e muitas equações:  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M_O = 0$ ,  $\sum M_C = 0$ , ...

$$\sum F_x: F_a - P_x = 0 \Rightarrow F_a = 449.4 \text{ N}$$

$$\sum F_y: N_1 + N_2 - P_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = 8988.8 \text{ N}$$

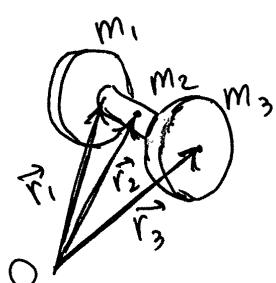
$$\sum M_O: \begin{vmatrix} 0.4 & 0.35 \\ -449.4 & -8988.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1.6 & 0 \\ F_a & N_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3438.2 + 1.6 N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 2148.9 \text{ N}$$

$$\Rightarrow N_1 = 6839.9 \text{ N}$$

b) A resistência do ar faz diminuir  $F_a$  e  $N_1$ , e aumentar  $N_2$

## CENTRO DE MASSA



Define-se a posição do centro de massa:  $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

Em objetos mais complexos, divide-se em muitos pedaços cada um com massa infinitesimal  $dm$ , na posição  $\vec{r}$

$$m = \iiint_{\text{volume}} dm = \iiint_{\text{volume}} s dx dy dz \quad (s = \text{massa volumétrica})$$

$$r_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{vol.}} \vec{r} dm$$

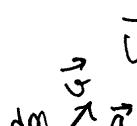
$$x_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{vol.}} x s dx dy dz$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{\text{vol.}} y s dx dy dz \quad z_{cm} = \dots$$

### Aula 11, 16 de março de 2017

- Em objetos muito menores que a Terra,  $\vec{g}$  pode considerar-se constante em todas partes do objeto e, como tal, o centro de massa é o mesmo centro de gravidade.

#### Velocidade e aceleração do centro de massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m} \iiint_{vol.} d\vec{r} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{vol.} \vec{v} dm$$


$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m} \iiint_{vol.} d\vec{v} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \iiint_{vol.} \vec{a} dm$$

- $\vec{a} dm$  = soma das forças que atuam no pedaço  $dm$ . Algumas são externas e outras internas.

$\Rightarrow \iiint_{vol.} \vec{a} dm = \text{soma das forças externas sobre o corpo rígido (as internas anulam-se)}$

$$\vec{F}_p = m \vec{a}_{cm}$$

A força resultante sobre um corpo rígido é igual à massa do corpo vezes a aceleração do seu c.m.

#### MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO, SEM ROTAÇÃO

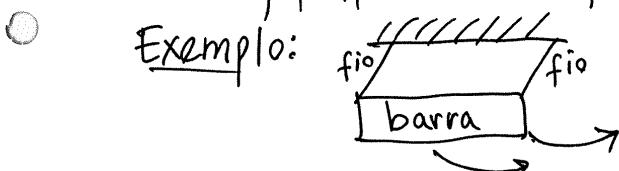
$$\vec{a}_{cm} = \vec{a}_p = \vec{a} \text{ de qualquer ponto no corpo.}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^m M_{cm} = 0$$

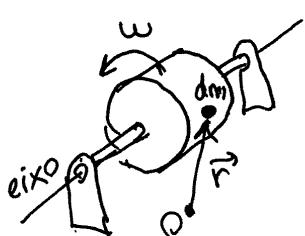
unicamente em relação ao c.m. porque se  $\vec{F}_r$  se desloca para outro ponto, o binário resultante muda.

O binário resultante, em relação ao centro de massa, é nulo, porque se não fosse, o corpo começava a rodar.



a barra oscila, numa trajetória curva, mas não roda ( $\omega_{barra} = 0$ ).

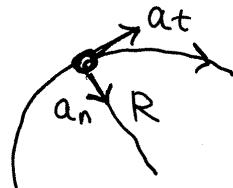
## ● ROTAÇÃO COM EIXO FIXO



cada elemento de massa  $dm$  descreve movimento circular com raio  $R$  (distância até o eixo, medida no plano de rotação).

A aceleração tem componentes normal e tangencial:

$$a_t = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$$



$\Rightarrow$  a força externa total,  $dF$ , sobre a massa  $dm$  também tem componentes normal e tangencial:

$$dF_t = R\alpha dm \quad dF_n = R\omega^2 dm$$

$F_n$  produz um momento que tende a alterar o eixo de rotação, mas como este está fixo, deve ser anulado pelos momentos em outras partes do corpo.

$dm$       eixo       $dF_t$  produz momento  
 $dM = R dF_t = R^2 \alpha dm$

$$dM = R dF_t = R^2 \alpha dm$$

que faz rodar o corpo à volta do eixo. O momento total é:

$$M_{eixo} = \iiint_{volume} R^2 \alpha dm = \alpha \iiint_{volume} R^2 dm = \alpha I_{eixo}$$

onde  $I_{eixo} = \iiint_{vol.} R^2 dm$  Momento de inércia  
em relação ao eixo

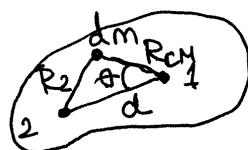
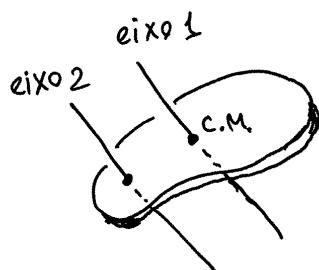
● Como  $\iiint_{vol.} dm = momento resultante das forças externas = M_r$

- ⇒ O momento resultante, de todas as forças externas, em relação ao eixo, é igual ao momento de inércia, em relação ao eixo, vezes a aceleração angular

$$M_{\text{eixo}} = I_{\text{eixo}} \alpha$$

### TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

- O eixo 1 passa pelo centro de massa.  
Os eixos 1 e 2 são paralelos; em relação ao eixo 1:



$$\sum M_1 = I_{CM} \alpha$$

$$I_{CM} = \iiint_{\text{vol.}} R_{CM}^2 dm$$

eixo 2:

$$\sum M_2 = I_2 \alpha$$

$$I_2 = \iiint_{\text{vol.}} R_2^2 dm$$

$$R_2^2 = d^2 + R_{CM}^2 - 2 R_{CM} d \cos \theta \quad (\text{lei dos cossenos})$$

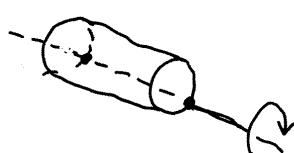
$$\Rightarrow I_2 = \underbrace{\iiint_{\text{vol.}} R_{CM}^2 dm}_{I_{CM}} + \underbrace{d^2 \iiint_{\text{vol.}} dm}_{\text{massa total} \times d^2} + 2 d \underbrace{\iiint_{\text{vol.}} R_{CM} \cos \theta dm}_{\begin{array}{l} X_{CM} \\ = \text{posição } X \text{ do CM} \\ \text{desde CM} = 0 \end{array}}$$

- $\Rightarrow I_2 = I_{CM} + M d^2$   $d = \text{distância entre os dois eixos}$

- A tabela 5.1 mostra alguns momentos de inércia para alguns sólidos, nos eixos que passam pelo c.m. Por exemplo, para um cilindro de raio  $R$ , em torno do seu eixo:



$$I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$$



então para um eixo que passe pela superfície do cilindro,

$$d = R$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

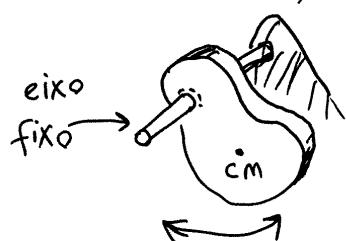
$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}mR^2$$



Todos os momentos de inércia são sempre proporcionais à massa total. Define-se o **raio de giração**:

$$r_g = \sqrt{\frac{I_{eixo}}{m}} \Rightarrow I_{eixo} = m r_g^2$$

**Exemplo.** Um pêndulo, é um corpo rígido que oscila livremente, rodando num eixo fixo horizontal!



As forças no eixo produzem momento desprezível, em comparação com o momento do peso



$$\Rightarrow M_{eixo} = -mg r_{cm} \sin\theta$$

(negativo, por ser oposto ao sentido + de  $\theta$ )

$$M_{eixo} = m r_g^2 \alpha \Rightarrow -mg r_{cm} \sin\theta = m r_g^2 \alpha$$

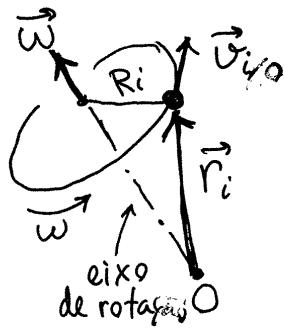


$$\Rightarrow \alpha = -\frac{g r_{cm}}{r_g^2} \sin\theta$$

$r_g$  = raio de giração  
em torno do eixo

$$r_g^2 = r_{g,cm}^2 + r_{cm}^2$$

## MOVIMENTO GERAL DOS CORPOS RÍGIDOS



Se o corpo é dividido em  $N$  pedaços com massas  $\Delta m_i$  e a origem é um ponto fixo no corpo,

$$|\vec{v}_{i/o}| = \left| \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right| = R_i \omega \quad (R_i = \text{distância ao eixo de rot.})$$

define-se  $\vec{\omega}$  na direção do eixo de rotação  $\Rightarrow \vec{v}_{i/o} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

- Em quanto o corpo roda à volta de  $O$ , o ponto  $i$  desloca-se com velocidade  $\vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

Se houver  $n$  forças externas, o trabalho dessas forças é:

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \Delta m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \Delta m_i a_{t,i} ds_i$$

$$a_{t,i} = v_i \frac{dv_i}{ds_i} \Rightarrow \int_{C_i} a_{t,i} ds_i = \int_{C_i} v_i dv_i = \frac{1}{2} (v_{i,f}^2 - v_{i,o}^2)$$

- $\Rightarrow \sum_{i=1}^n W_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i v_{i,f}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i v_{i,o}^2 = \text{aumento da energia cinética total}$

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( v_o^2 + R_i^2 \omega^2 + 2 \vec{v}_o \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right) \Delta m_i$$

se a origem  $O$  estiver no centro de massa  $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i =$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

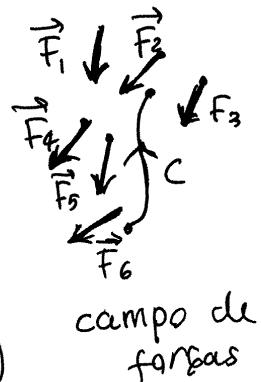
↑ translatação      ↑ rotação

● Aula 12. 20 de março de 2017

### TRABALHO

Quando uma força é função da posição,  $\vec{F}(\vec{r})$ , define-se o trabalho da força, numa curva  $C$ :

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{integral de linha})$$



Por exemplo,  $C$  pode ser uma curva no plano  $X, Y$  com equação  $y = f(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} = dx \hat{i} + \frac{df}{dx} dx \hat{j} = \left( \hat{i} + \frac{df}{dx} \hat{j} \right) dx$$

$$\vec{F} = F_x(x, y) \hat{i} + F_y(x, y) \hat{j}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x, y) dx + \frac{df}{dx} F_y(x, y) dx$$

$$W_C = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x, f(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} F_y(x, f(x)) dx$$

● TEOREMA DO TRABALHO E A ENERGIA CINÉTICA

$\vec{F}_r = m \vec{a}_{cm}$  se  $\vec{F}_r$  é função de  $\vec{r}$ ,  $\vec{a}_{cm}$  também.  
seja  $C_{cm}$  = trajetória do C.M. desde  $\vec{r}_1$  até  $\vec{r}_2$

$$W_{cm} = \int_C \vec{F}_r \cdot d\vec{r}_{cm} = m \int_C \vec{a}_{cm} \cdot d\vec{r}_{cm}$$

ao longo da trajetória do c.m.,

$$d\vec{r}_{cm} = \vec{v}_{cm} dt = v_{cm} \hat{e}_t dt$$

$$\vec{a}_{cm} = \ddot{v}_{cm} \hat{e}_t + \frac{v_{cm}^2}{R} \hat{e}_n \Rightarrow \vec{a}_{cm} \cdot d\vec{r}_{cm} = v_{cm} \frac{d v_{cm}}{dt} dt$$

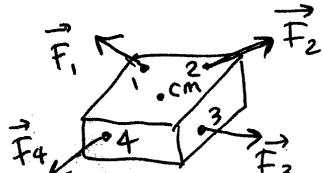
$$\textcircled{1} \quad W_{cm} = m \int_{v_{0,cm}}^{v_{f,cm}} v_{cm} dv_{cm} = \frac{1}{2} m v_{cm,0}^2 - \frac{1}{2} m v_{cm,f}^2$$

Define-se a **energia cinética de translação**:

$$E_{trans.} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação.

### TRANSLAÇÃO SEM ROTAÇÃO



$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_{cm}$$

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 = \dots = d\vec{r}_{cm}$$

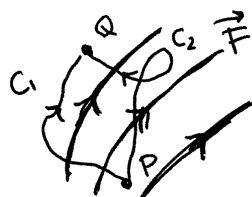
$$\Rightarrow \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_{cm}, \dots, \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_n = \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_{cm}$$

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r}_{cm} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_r \cdot d\vec{r}_{cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n W_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \text{energia cinética do corpo.}$$

### FORÇAS CONSERVATIVAS



Um campo de forças,  $\vec{F}(\vec{r})$ , é conservativo, se o trabalho que realiza entre quaisquer dois pontos P e Q não depende da curva entre P e Q:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \dots = \text{função de P e Q}$$

## ● ENERGIA POTENCIAL

Se  $\vec{F}(\vec{r})$  é uma força conservativa, define-se uma energia potencial, associada a essa força:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{função da posição } \vec{r}$$

$(\vec{r}_0 = \text{ponto de referência, arbitrário})$

$$U(\vec{r}_0) = 0$$

Unidade SI de trabalho e energia

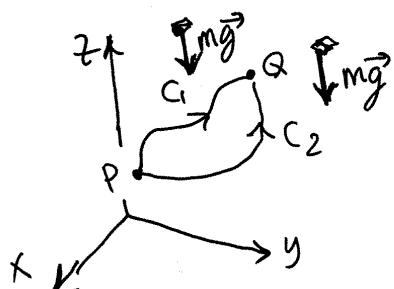
$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$



O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial,  $U_P$ , menos a energia potencial final,  $U_Q$ .

$$\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_P^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P) - U(Q) \quad \begin{matrix} \text{(diminuição} \\ \text{de } U. \end{matrix}$$

## ENERGIA POTENCIAL GRAVITICA



$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\hat{k}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -mg \int_{C_1} \hat{k} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= -mg z|_P^Q = mg(z_p - z_q)$$

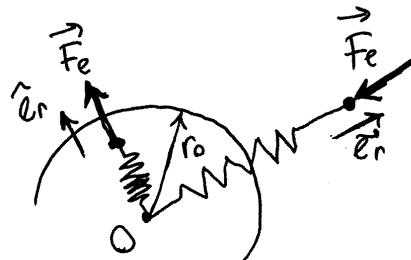
$$\int_{C_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \dots = mg(z_p - z_q)$$

⇒ O peso é força conservativa. Como o trabalho entre P e Q é a diminuição de  $mgz$ ,

$$\Rightarrow \boxed{U_g = mgz}$$
 a energia potencial gravítica é igual ao peso vezes a altura

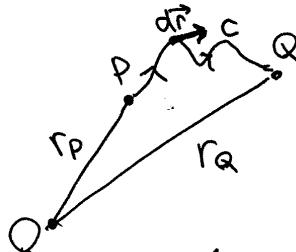
## ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

Uma mola elástica de comprimento  $r_0$ , com um extremo fixo na origem,  $O$ , produz no outro extremo livre uma força elástica,  $\vec{F}_e$ , na direção radial e no sentido da origem, se  $r > r_0$ , ou no sentido oposto se  $r < r_0$ :



$$\vec{F}_e = F_e(r) \hat{r}_r, \quad F_e(r) = -k(r - r_0)$$

onde  $k$  é uma constante elástica, própria de cada mola.



$$C: \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = F_e(r) \hat{r}_r \cdot d\vec{r} = F_e(r) dr$$

$$\Rightarrow W_C = -k \int_{r_P}^{r_Q} (r - r_0) dr = -k \int_{s_P}^{s_Q} s ds$$

onde:  $s = r - r_0$  = alongamento da mola

$$W_C = \frac{1}{2} k s_P^2 - \frac{1}{2} k s_Q^2 \Rightarrow \text{força conservativa com energia elástica:}$$

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} k s^2} \quad U_e = 0, \text{ se } r = r_0$$

○ Aula 13. 23 de março de 2017

## ENERGIA MECÂNICA

Num corpo com translação, sem rotação:

$$\text{Energia cinética} = E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W_i = \text{trabalho da força externa} \quad i = \int_{C} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{C} F_{xi} ds$$

○ Teorema do trabalho e a energia cinética:

$$\sum_{i=1}^n W_i = E_{cf} - E_{co}$$

se  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$  são forças não conservativas e as restantes  $n-m$  forças,  $\vec{F}_{m+1}, \dots, \vec{F}_n$ , são conservativas

$$\begin{aligned} W_{m+1} + W_{m+2} + \dots + W_n &= (U_{10} - U_{1f}) + (U_{20} - U_{2f}) + \dots + (U_{n-m} - U_{n-m}) \\ &= U_0 - U_f \quad (U = U_1 + \dots + U_{n-m} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{= energia potencial total}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m W_i + U_0 - U_f = E_{cf} - E_{co}$$

$$\sum_{i=1}^m W_i = (E_{cf} + U_f) - (E_{co} + U_0)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^m W_i = E_{mf} - E_{mo}}$$

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + U \\ &= \text{energia mecânica} \end{aligned}$$

### Teorema do trabalho e a energia mecânica.

- O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.

## SISTEMAS CONSERVATIVOS

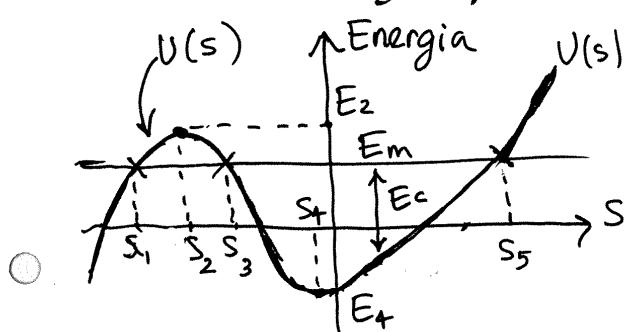
São os sistemas em que  $E_m$  permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

Notre-se que a força normal,  $F_n$ , não interessa, porque não realiza trabalho, e se a força tangencial,  $F_t$ , depende apenas da posição na trajetória, o sistema é conservativo:

$$F_t = f(s) \Rightarrow U(s) = - \int_{s_0}^s f(s) ds \quad F_t = - \frac{dU}{ds}$$

↑  
 $s_0$   
(energia potencial total)

Análise gráfica. No gráfico de  $U(s)$ , re-



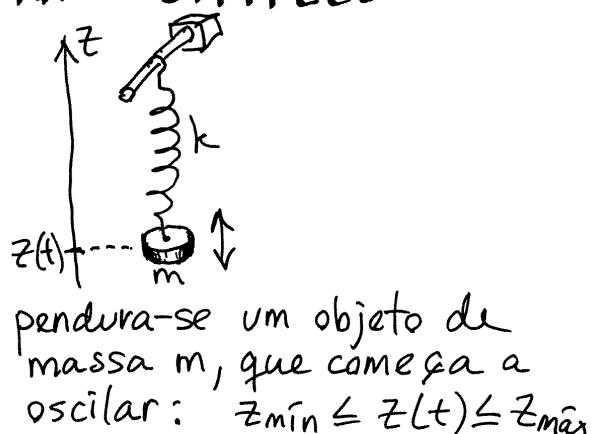
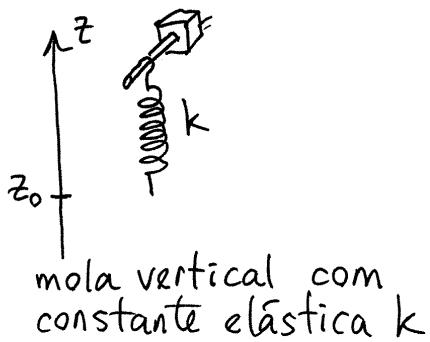
presenta-se a energia mecânica  $E_m$ , que é uma reta horizontal.

No ponto  $s_3$ , onde  $E_m = U$ , a energia cinética  $E_c = E_m - U$  é nula e, portanto,  $v = 0$ .

Os máximos,  $s_1$  e  $s_2$ , e mínimos,  $s_4$  e  $s_5$ , são pontos de equilíbrio. Se  $E_m$  fosse igual a  $E_2$  ou  $E_4$ , o sistema podia estar em  $s_2$  ou  $s_4$  em repouso ( $v = 0$ ).

Com a energia  $E_m$  mostrada no gráfico, o sistema nunca poderia estar em  $s_1 < s < s_3$  porque  $E_c$  não pode ser negativa. Existem duas possibilidades:  
 (a) o objeto, com  $v > 0$ , aproxima-se de  $s_1$ , para em  $s_1$ , e logo afasta-se até  $\infty$  ( $v < 0$ ). (b) O objeto oscila entre  $s_3$  e  $s_5$ . O objeto nunca pode passar  $s > s_5$ .

## OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



- Durante umas poucas oscilações pode admitir-se que  $E_m$  permanece constante (sistema conservativo).

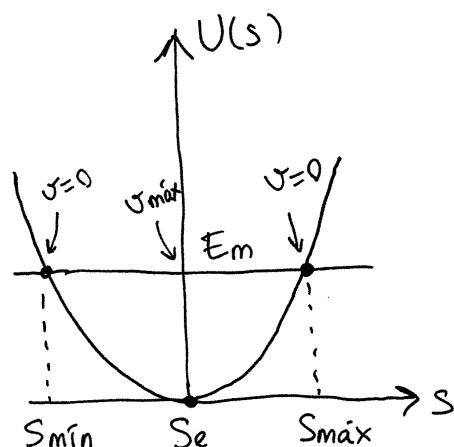
$$U(z) = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 + mgz$$

pontos de equilíbrio:  $\frac{dU}{dz} = k(z - z_0) + mg = 0$

$\Rightarrow$  um único ponto de equilíbrio:  $z_e = z_0 - \frac{mg}{k}$

se definirmos  $s = z - z_e$

- $\Rightarrow U = \frac{1}{2}k(s - \frac{mg}{k})^2 + mg(s + z_0 - \frac{mg}{k}) = \frac{1}{2}ks^2 + \text{constante}$



a constante pode ignorar-se.  
 $U(s) = \frac{1}{2}ks^2$ ,  $E_m = \frac{mv^2 + ks^2}{2}$

$E_m$  tem de ser positiva (oscilações) ou zero (repouso na ponta de equilíbrio)

Amplitude de oscilação:  
 $A = S_{\max} = |S_{\min}|$

$$E_m = U(S_{\max}) \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}} \quad U_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

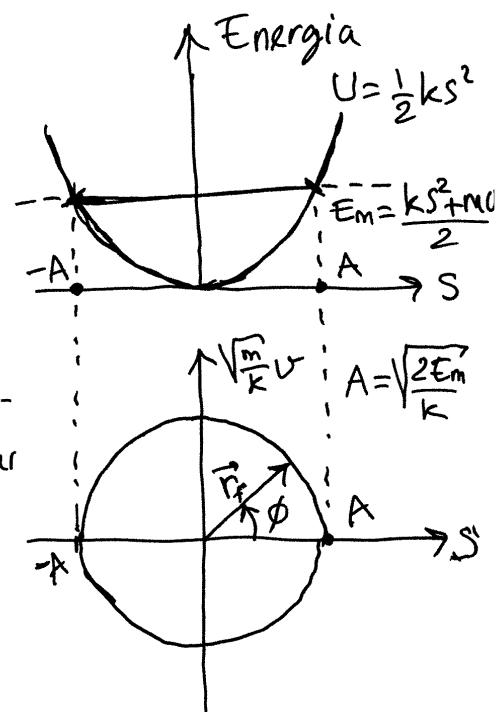
Aula 14. 27 de março de 2017

### ESPAÇO DE FASE

Reformando o exemplo do oscilador harmônico simples, o gráfico da energia pode ser complementado com um gráfico que mostra também a velocidade. Neste caso convém usar

- $\sqrt{\frac{m}{k}} v$  no eixo das abscissas, já que:  $E_m = \frac{ks^2 + mv^2}{2}$

$$\Rightarrow s^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{k}} v\right)^2 = \frac{2E_m}{k} = A^2$$



Que é o gráfico de uma circunferência de raio  $A$ . O plano  $(s, \sqrt{\frac{m}{k}} v)$  é o **espaço de fase**. Cada ponto do espaço de fase, com vetor posição  $\vec{r}_f$ , corresponde a um possível **estado** do sistema.

- Dado um estado inicial,  $\vec{r}_{f_0}$ , o movimento do oscilador será uma circunferência de raio  $A = \sqrt{\frac{2E_{m_0}}{k}}$ , onde  $E_{m_0} = \frac{ks_0^2 + mv_0^2}{2}$ . Assim sendo, basta estudar a variação do ângulo  $\phi(t)$  em ordem ao tempo, para descrever o movimento.

Para analisar a variação de  $\vec{r}_f$  (neste caso  $\phi(t)$ ) vemos que:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}_f}{dt} = \dot{s} \hat{e}_s + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{v} \hat{e}_v = \text{velocidade de fase}$$

•  $\dot{s} = v$ ,  $\dot{v} = a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{1}{m} \left( -\frac{dU}{ds} \right) = -\frac{k}{m} s$

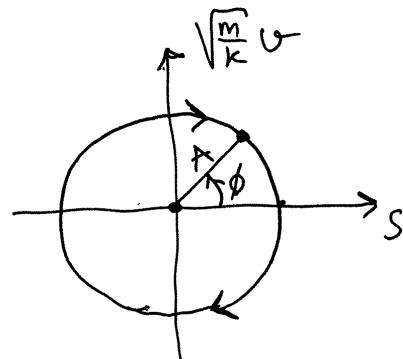
$$\Rightarrow \vec{u} = v \hat{e}_s - \sqrt{\frac{k}{m}} s \hat{e}_v$$

$$|\vec{u}|^2 = v^2 + \frac{k}{m} s^2 = \frac{2Em}{m} = v_{\max}^2$$

(constante)

- Ou seja, o estado descreve movimento circular uniforme no espaço de fase, no sentido dos ponteiros do relógio, com velocidade angular:

$$\omega = -\frac{|\vec{u}|}{A} = \frac{\sqrt{\frac{2Em}{m}}}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \Rightarrow \omega = -\sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\text{frequência} = f = \frac{|\omega|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{período} = T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

• Fase =  $\phi(t) = \omega t = -\sqrt{\frac{k}{m}} t$  (arbitrando  $\phi=0$ )

O movimento harmônico simples é a projeção, no eixo dos  $s$ , do movimento circular uniforme no espaço de fase:

$$s(t) = A \cos(-\sqrt{\frac{k}{m}} t) = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} A \sin(-\sqrt{\frac{k}{m}} t) = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) = \dot{s}$$

- Esta análise, no espaço de fase, pode ser usada no caso de outros sistemas:

## ○ SISTEMAS AUTÔNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação) em que  
 (para usar um grau de liberdade, mas)  
 Logo será generalizado  
 a força resultante na depende explicitamente do  
 tempo:  $F_t = f(s, v)$  como  $s$  e  $v$  são funções  
 do tempo,  $F_t$  dependerá  
 implicitamente de t.

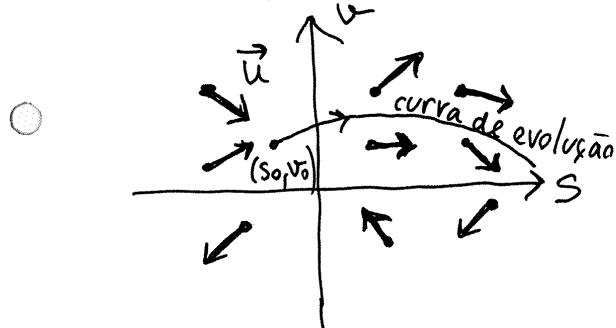
$$\Rightarrow a_t = \frac{F_t}{m} = a_t(s, v)$$

## ○ As equações de movimento são:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a_t(s, v) \end{cases}$$

e definem a velocidade de fase:  $\vec{u} = v\hat{e}_s + a_t\hat{e}_v$   
 no espaço de fase  $(s, v)$ .

Dada a expressão  $a_t(s, v)$  é possível construir o campo de direções, que mostra  $\vec{u}$  em vários pontos



Por cada estado inicial possível,  $(s_0, v_0)$  existe uma única curva de evolução que segue a direção do campo de direções.

- Os únicos pontos por onde não passa nenhuma curva de evolução são os pontos de equilíbrio, onde a velocidade de fase é nula. Se o estado inicial for um ponto de equilíbrio, o sistema não evolui: permanece sempre nesse mesmo estado.

- Exemplo. Analise o sistema com

$$a_t = s^2 - s - v - 3.75$$

Resolução: definem-se as equações de evolução:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = s^2 - s - v - 3.75 \end{cases}$$

espaço de fase  $\rightarrow (s, v)$   
velocidade de fase:  
 $\vec{u} = (v, s^2 - s - v - 3.75)$

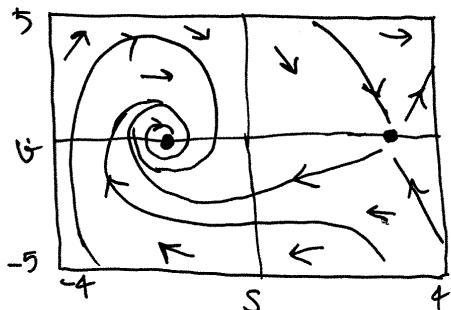
- No Maxima, o campo de direções constroi-se com o comando `plotdf`, que precisa as componentes de  $u$  e as componentes do estado,  $(s, v)$ . Mas antes convém encontrar os pontos de equilíbrio para saber qual a região importante no espaço de fase.

$$u: [v, s^2 - s - v - 3.75] \$$$

`solve(u);`  $\rightarrow$  dois pontos de equilíbrio,  
 $(s_1, v_1) = (2.5, 0)$   $(s_2, v_2) = (-1.5, 0)$

`plotdf(u, [s, v], [s, -4, 4], [v, -5, 5]);`

○



Clicando no gráfico, obtém-se as curvas de evolução  
O ponto  $(-1.5, 0)$  é ponto de equilíbrio estável e  $(+2.5, 0)$  é ponto de equilíbrio instável.

No sistema conservativo obtido ignorando o termo

- dissipativo  $-v \Rightarrow a_t = s^2 + s - 3.75$ , o ponto de equilíbrio estável é mínimo de  $U(s)$  e o ponto de equilíbrio instável é máximo de  $U(s)$ .

Aula 15, 30 de março de 2017

### EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Os sistemas dinâmicos também são utilizados na resolução de equações diferenciais. Por exemplo, a equação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \cos y = 3y$$

pode ser escrita como sistema dinâmico autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = u \\ \frac{du}{dx} = 3y - yu^2 - \cos y \end{cases}$$

variáveis de estado:  $(y, u)$   
variável independente:  $x$   
(em vez de  $t$ )

### SISTEMAS DINÂMICOS GERAIS.

Variáveis de estado:  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  com  $n$  equações de evolução, que definem a variação de cada variável, em função do estado  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . No caso de segunda ordem, há duas equações de evolução:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(X_1, X_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

estado = ponto  
no espaço de fase  
 $= x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2$

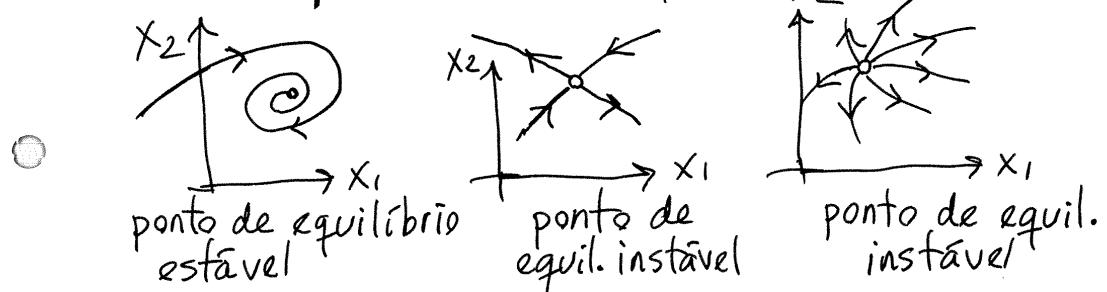
Velocidade de fase =  $\vec{u} = \dot{x}_1 \hat{e}_1 + \dot{x}_2 \hat{e}_2$   
 $\Rightarrow \vec{u} = f_1(X_1, X_2) \hat{e}_1 + f_2(X_1, X_2) \hat{e}_2$

Pontos de equilíbrio:  $\begin{cases} f_1(X_1, X_2) = 0 \\ f_2(X_1, X_2) = 0 \end{cases}$

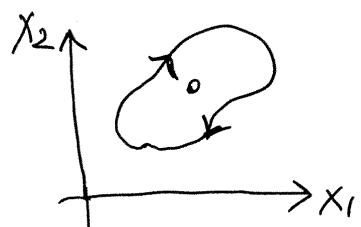
Cada possível solução do sistema é uma curva de evolução no espaço de fase, ou um

- ponto de equilíbrio. O retrato de fase do sistema é um gráfico, no espaço de fase, que mostra os pontos de equilíbrio e os tipos de curvas de evolução importantes:

- ① Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio. Exemplos:



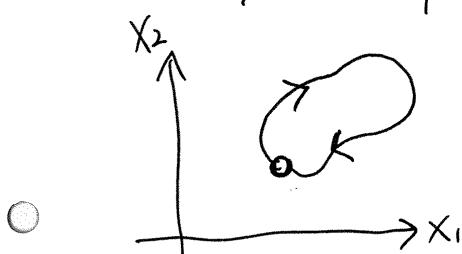
- ② Ciclos: curvas fechadas.



Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.

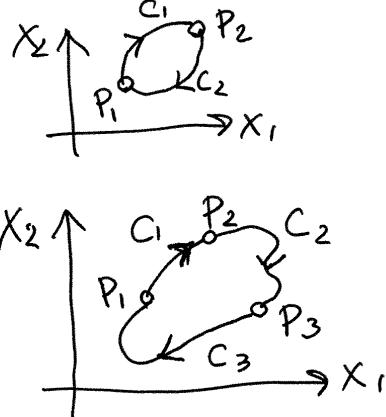
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

- ③ Órbitas homoclinicas: curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.



Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.

- ④ **Órbitas heteroclinicas:** sequência de  $n$  curvas que ligam  $n$  pontos de equilíbrio (instável)  $C_1$ , começa no primeiro ponto e termina no ponto  $P_2$ ,  $C_2$  vai de  $P_2$  a  $P_3$ , ...,  $C_n$  vai de  $P_n$  até  $P_1$ . Cada curva  $C_i$  é uma solução diferente.



## SISTEMAS DINÂMICOS CONSERVATIVOS

Existe uma função hamiltoniana,  $H(x_1, x_2)$ , que define todas as curvas de evolução como curvas de nível:  $H(x_1, x_2) = c$  ( $c$  é uma constante real). Cada possível valor de  $c$  é uma curva de evolução.

- Numa curva de evolução, derivando a equação anterior obtém-se:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 0$$

como  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  são as componentes da velocidade de fase:

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} f_2 = 0$$

ou seja, o gradiente da função hamiltoniana,  $\frac{\partial H}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \hat{e}_2$

- é perpendicular à velocidade de fase  $\vec{u} = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2$

uma possibilidade é:

$$f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

equações de Hamilton

mas nem sempre é possível escrever as curvas de evolução como  $H(x_1, x_2) = C$ . A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

Exemplo.  $\begin{cases} \dot{x} = 6xy + 4y - 3x^2 - 3y^2 \\ \dot{y} = 6xy - 4x - 3x^2 - 3y^2 \end{cases}$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = (6y - 6x) + (6x - 6y) = 0 \Rightarrow \text{conservativo}$$

$$H = \int f_x dy + g(x) = 3x^2y^2 + 2y^2 - 3x^2y - y^3 + g(x)$$

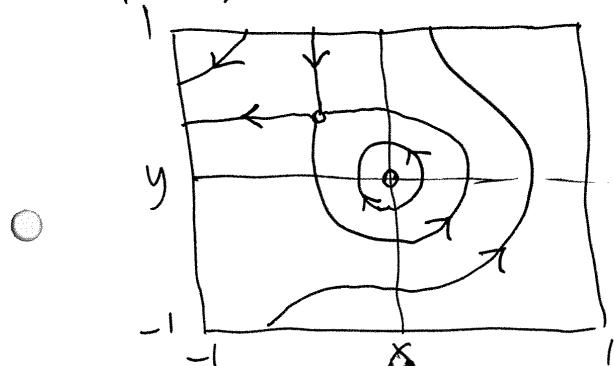
$$H = - \int f_y dx + k(y) = -3x^2y + 2x^2 + x^3 + 3xy^2 + k(y)$$

$$\Rightarrow H = x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 3xy^2 - 3x^2y$$

pontos de equilíbrio:  $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$   $(0, 0)$  e  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

### Retrato de fase

plotdf([fx, fy], [x, y], [x, -1, 1], [y, -1, 1])



$(0, 0)$  é estável e é um mínimo local de  $H(x, y)$

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  é instável; máximo local de  $H(x, y)$

Há uma órbita homoclinica e todas as curvas no seu interior são ciclos.

Aula 16. 3 de março de 2017



**Mecânica Newtoniana.** A força resultante e o momento resultante permitem determinar a expressão da aceleração, em função das variáveis de estado:

$$\vec{F}_R = m \vec{a}_{cm}, \quad M_R = I_{cm} \alpha \quad (\text{válidas apenas em sistemas inerciais})$$

## MECÂNICA LAGRANGIANA

- As expressões da aceleração podem ser obtidas a partir da energia. Vantagens:

- válida em sistemas não inerciais
- não é necessário considerar forças de ligação: reação normal, atrito estático, que não modificam a energia.
- método geral, independente do sistema de coordenadas usado.

- Coordenadas generalizadas.** Se o sistema tem  $n$  graus de liberdade, são  $n$  variáveis:

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  podem ser distâncias ou ângulos

**Velocidades generalizadas.** Cada derivada de cada coordenada generalizada, em ordem ao tempo, é uma velocidade generalizada:

$\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n\}$

- O espaço de fase do sistema é o espaço de dimensão  $2n$ , formado pelas coordenadas e velocidades generalizadas:  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$
- se o sistema não é autônomo, o tempo  $t$  também faz parte.

- A energia cinética do sistema é uma função do estado do sistema e, como tal, depende apenas das coordenadas e velocidades generalizadas (e pode ainda depender do tempo):

$$E_c(q_i, \dot{q}_i, t)$$

- Forças generalizadas. Por cada força externa  $\vec{F}_i$ , aplicada na posição  $\vec{r}_i$ , definem-se n forças generalizadas:  $Q_j = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$

As forças generalizadas resultantes são:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

As forças que não realizam trabalho, não entram na soma porque  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0$

- EQUAÇÕES DE LAGRANGE

No apêndice A mostra-se como obter estas equações a partir das leis de Newton. O resultado são as seguintes n equações:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j} \quad j=1, 2, \dots, n$$

Há que ter atenção à diferença entre derivadas parciais e totais; por exemplo:

- $\frac{\partial (3\dot{q}_1^2)}{\partial q_1} = 0$ , mas  $\frac{d(3\dot{q}_1^2)}{dq_1} = 6\dot{q}_1 \frac{d\dot{q}_1}{dq_1}$      $\frac{d(3\dot{q}_1^2)}{dt} = 6\dot{q}_1 \ddot{q}_1$

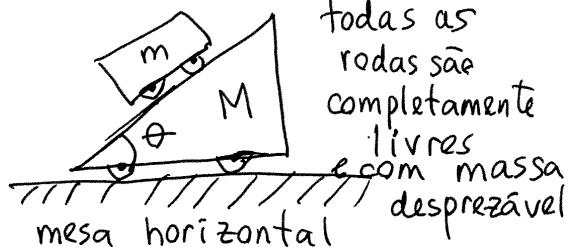
**Forças conservativas.** Se  $\vec{F}_i$  é conservativa,

$$\Rightarrow \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} = (\vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j}) = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Como tal, no cálculo de  $Q_j$ , a soma de todos os termos correspondentes a forças conservativas é  $-\frac{\partial U}{\partial q_j}$ . ( $U$ =energia potencial total) e as equações de Lagrange são:

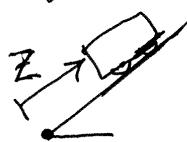
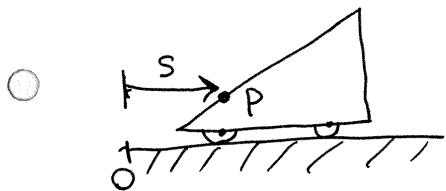
$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^{\text{não-cons.}} \quad j=1, \dots, n}$$

### Exemplo 8.1.



Se ignorarmos a resistência do ar e o atrito nos eixos das rodas, não há forças não-conservativas e a energia potencial é apenas gravítica

Este sistema tem dois graus de liberdade:



$ds$  = deslocamento do plano inclinado  
 $dz$  = deslocamento do carrinho sobre o plano.

4 variáveis de estado:  $\{s, z, \dot{s}, \dot{z}\}$

Energia cinética do sistema:

$$E_C = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

$$U_{\text{plano}} = \dot{s}$$

$$U_{\text{carrinho}} = \dot{z} + \dot{s}$$

do carrinho relativa ao plano

$$\vec{v}_{\text{plano}} = \dot{s} \hat{i} \quad \vec{v}_{\text{carr.}} = \dot{s} \hat{i} + \dot{z} \cos \theta \hat{i} + \dot{z} \sin \theta \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{\text{carr.}}^2 &= \dot{s}^2 + \dot{z}^2 \cos^2 \theta + \dot{z}^2 \sin^2 \theta + 2 \dot{s} \dot{z} \cos \theta \\ &= \dot{s}^2 + \dot{z}^2 + 2 \dot{s} \dot{z} \cos \theta \end{aligned}$$

•  $E_c(\dot{s}, \dot{z}) = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{s}\dot{z}\cos\theta)$

Energia potencial do sistema:

$$U = mgz \sin\theta + \text{constante} \quad (\text{Ug do plano inclinado permanece constante})$$

Como o sistema tem 2 graus de liberdade, há duas equações de Lagrange:

① equação associada a  $s$ .

•  $\frac{\partial E_c}{\partial s} = 0, \frac{\partial U}{\partial s} = 0, \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} + m(\dot{s} + \dot{z}\cos\theta) = 0$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) = M\ddot{s} + m(\ddot{s} + \ddot{z}\cos\theta) = 0$$

② equação associada a  $z$ .

$$\frac{\partial E_c}{\partial z} = 0, \frac{\partial U}{\partial z} = mg \sin\theta, \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z} + \dot{s}\cos\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = m(\ddot{z} + \ddot{s}\cos\theta) + mg \sin\theta = 0$$

○

As duas equações resolvem-se para obter as expressões das duas aceleraçãoes  $\ddot{s}$  e  $\ddot{z}$

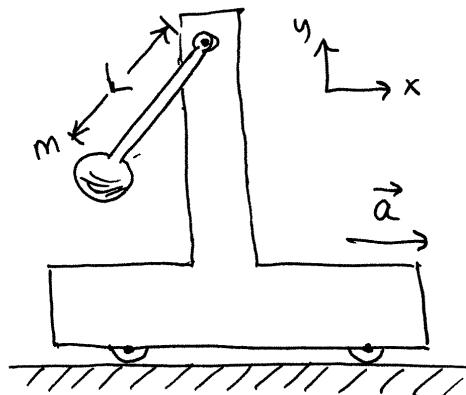
$$\ddot{s} = \frac{mg \sin\theta \cos\theta}{M + m \sin^2\theta} \quad (\text{aceleração constante e positiva} \rightarrow \text{para a direita})$$

$$\ddot{z} = -\frac{(M+m)g \sin\theta}{M + m \sin^2\theta} \quad (\text{aceleração constante e negativa} \rightarrow \text{para baixo do plano inclinado})$$

○

Aula 17, 6 de março de 2017

- Exemplo 8.4. pêndulo simples, de massa  $m$  e comprimento  $L$ , num carrinho com aceleração constante  $\vec{a}$ , horizontal.

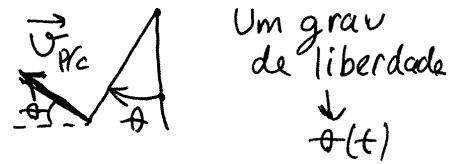


Resolução: a velocidade do carrinho é  $\vec{v}_c = at\hat{i}$

A velocidade do pêndulo,

- relativa ao carrinho, é a velocidade do seu movimento circular:  $v_{p/c} = L\dot{\theta}$

vetorialmente:  $\vec{v}_{p/c} = -L\dot{\theta}\cos\theta\hat{i} + L\dot{\theta}\sin\theta\hat{j}$



A velocidade do pêndulo é

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{p/c} = (at - L\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i} + L\dot{\theta}\sin\theta\hat{j}$$

- Considera-se unicamente o pêndulo, porque o movimento do carrinho já é conhecido:

$$E_c = \frac{1}{2}m v_p^2 = \frac{m}{2} (a^2 t^2 + L^2 \dot{\theta}^2 - 2atL\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$U_g = -mgL\cos\theta$$

Desprezando a resistência do ar, o sistema é conservativo e a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U_g}{\partial \theta} = 0$$

- Esta equação pode ser obtida no Maxima. Começa-se por definir as derivadas de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , com o

comando gradef.

- gradef( $q, t, qp$ ); ( $q$  é  $\theta$  e  $qp$ , é  $\dot{\theta}$ )  
gradef( $qp, t, qpp$ );

assim, quando se calculem derivadas de  $\theta$  ou  $\dot{\theta}$  em ordem ao tempo, serão derivadas totais calculadas com a regra da cadeia. Se não se usar gradef, quando se deriva  $\theta$  ou  $\dot{\theta}$  em ordem a  $t$  dá 0 (derivada parcial).

$$Ec: m * (a^2 * t^2 + L^2 * qp^2 - 2 * a * t * L * qp * \cos(q)) \\ /2;$$

$$U: -m * g * L * \cos(q);$$

$$eq: diff(diff(Ec, qp), t) - diff(Ec, q) + diff(U, q) = 0;$$

Dá a equação de Lagrange:

$$solve(eq, qpp);$$

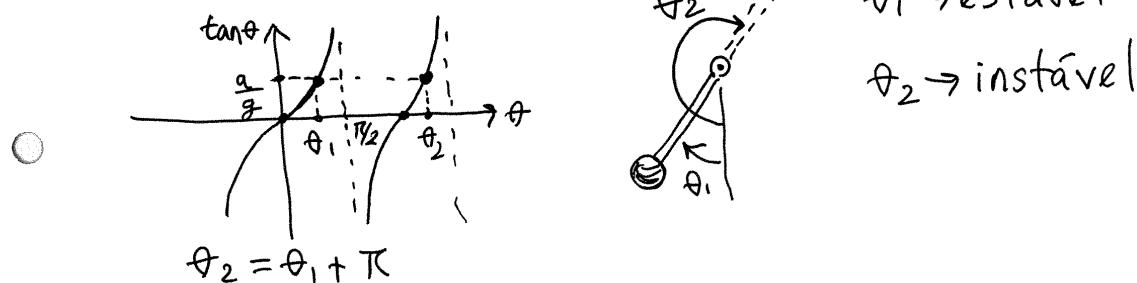
que é a equação de movimento do pêndulo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta + \frac{a}{L} \cos \theta$$

Os pontos de equilíbrio, onde  $\ddot{\theta}$  é nula, são

$$-\frac{g}{L} \sin \theta + \frac{a}{L} \cos \theta = 0 \Rightarrow g \sin \theta = a \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{g}$$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$ . Há dois pontos,  $\theta_1$  entre  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  e  $\theta_2$  entre  $\pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$



- Forças de ligação. Para encontrar as forças de ligação, a restrição associada a essa força escreve-se na forma:  $f(q_1, \dots, q_n) = 0$  e acrescenta-se um termo  $-\lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}$  nas equações de Lagrange

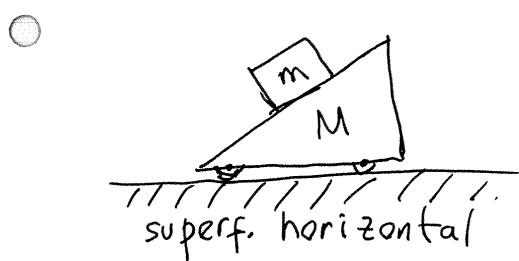
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, n)$$

### Exemplo 8.6.

$\lambda$  = multiplicador de Lagrange  
= força de ligação

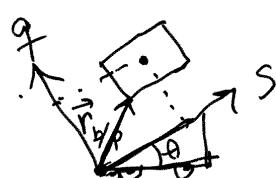
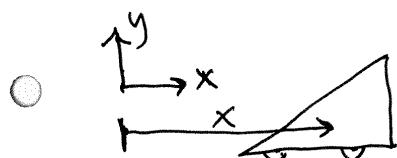
$\mu_c$  = coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado.

a massa das rodas, o atrito nos seus eixos e a resistência do ar são desprezáveis.



Resolução: A força generalizada  $Q_j$  será devida à força de atrito cinético, que depende da reação normal  $N$  sobre o bloco, que é uma força de ligação.

Essa força de ligação, entre o bloco e o plano inclinado, é a que permitiu, no exemplo 8.1, usar apenas uma variável para o movimento do bloco sobre o plano. Para ignorar essa restrição, admite-se então que o bloco pode deslocar-se perpendicularmente ao plano e há três graus de liberdade,  $x, s$  e  $q$ :



$x$  = posição, na horizontal, do bloco

$(s, q)$  = posição do bloco, relativamente ao plano.

- posição do bloco, relativa ao plano =  $\vec{r}_{b/p} = s\hat{e}_s + q\hat{e}_q$   
velocidade do bloco, relativa ao plano inclinado:

$$\vec{v}_{b/p} = \frac{d\vec{r}_{b/p}}{dt} = \dot{s}\hat{e}_s + \dot{q}\hat{e}_q$$

Notar-se que:  $\hat{e}_s = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$     $\hat{e}_q = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$

velocidade do plano inclinado:  $\vec{v}_p = \dot{x}\hat{i}$

$$\begin{aligned} \text{veloc. do bloco: } \vec{v}_b &= \vec{v}_p + \vec{v}_{b/p} = \dot{x}\hat{i} + \dot{s}\hat{e}_s + \dot{q}\hat{e}_q \\ &= (\dot{x} + \dot{s}\cos\theta - \dot{q}\sin\theta)\hat{i} + (\dot{s}\sin\theta + \dot{q}\cos\theta)\hat{j} \end{aligned}$$

- 

Energia cinética .  $E_c = \frac{M}{2} v_p^2 + \frac{m}{2} v_b^2$

$$\Rightarrow E_c = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + \dot{q}^2 + 2\dot{x}(\dot{s}\cos\theta - \dot{q}\sin\theta))$$

Energia potencial gravitacional.

$$\begin{aligned} U_g &= mg \vec{r}_{b/p} \cdot \hat{j} = mg(s\hat{e}_s \cdot \hat{j} + q\hat{e}_q \cdot \hat{j}) \\ &= mg(s\sin\theta + q\cos\theta) \end{aligned}$$

- Equação de ligação:  $g - c = 0$  ( $c = \text{constante}$ )

$$\Rightarrow f(x, s, q, \dot{x}, \dot{s}, \dot{q}) = g - c$$

$\lambda = N = \text{reação normal}$

Forças generalizadas.

$$\vec{F}_c = \mu_c N \hat{e}_s \cdot (\text{ atrito cinético })$$

aplicada no ponto  $\vec{r}_{b/p} = s\hat{e}_s + q\hat{e}_q$

$$\Rightarrow Q_x = \vec{F}_c \cdot \frac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial x} = 0 \quad Q_q = \vec{F}_c \cdot \frac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial q} = 0 \quad Q_s = \vec{F}_c \cdot \frac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial s} = \mu_c N$$

- Equação de Lagrange para s:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} - N \frac{\partial f}{\partial s} \underset{\lambda_0}{=} Q_s$$

⇒  $m(\ddot{s} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta) = N \mu_c$

Equação para  $\dot{q}$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} - N \frac{\partial f}{\partial q} = Q_q$$

$$\Rightarrow m(\ddot{q} - \ddot{x} \sin \theta + g \cos \theta) - N = 0$$

Equação para  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - N \frac{\partial f}{\partial x} = Q_x$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + m(\ddot{s} \cos \theta - \ddot{q} \sin \theta) = 0$$

Estas três equações, junto com a equação de ligação,  $\dot{q} - c = 0$ , permitem encontrar expressões para  $\ddot{x}, \ddot{s}, \ddot{q}$  e  $N$ :

$\dot{q} - c = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$

$$\ddot{x} = \frac{m g \beta \cos \theta}{M + m \beta \sin \theta}$$

$$\ddot{s} = - \frac{(M+m) g \beta}{M + m \beta \sin \theta}$$

$$N = \frac{m M \cos \theta}{M + m \beta \sin \theta}$$

Onde  $\beta = \sin \theta - \mu_c \cos \theta$

Aula 18. 20 de março de 2017

## SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

No caso de 2ª ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2\end{aligned}\quad A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \text{ são 4 constantes.}$$

forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

consideraremos unicamente matrizes  $\mathbf{A}$  de rango 2 e não diagonais ( $\mathbf{A}$  diagonal ou de rango 1 conduzem a sistemas de 1ª ordem).

forma vetorial:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{A}\vec{r} \quad \vec{r} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} \quad \mathbf{A} = \text{operador linear em } \mathbb{R}^2$$

## Pontos de equilíbrio

soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{como o rango de } \mathbf{A} \text{ é 2, existe apenas uma solução, } x_1 = x_2 = 0$$

Os sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio na origem.

Um sistema  $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + C_1 \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + C_2 \end{cases}$

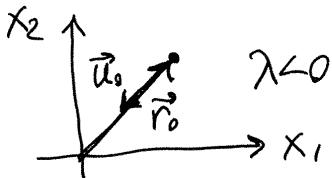
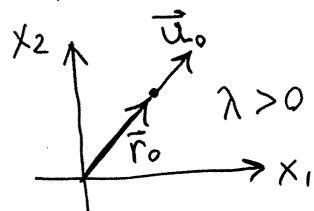
tem um único ponto de equilíbrio,  $P = (e_1, e_2)$ , e transforma-se em sistema linear com a mudança de variáveis:  $\begin{cases} y_1 = x_1 - e_1 \\ y_2 = x_2 - e_2 \end{cases}$  que desloca  $P$  para a origem

• **Velocidade de fase**

$$\vec{u} = A \vec{r}$$

**Vetores próprios.** São os vetores  $\vec{v}$  com a propriedade:  $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$   
 $(\lambda = \text{constante, chamada valor próprio})$

- Como tal, se o estado inicial do sistema,  $\vec{r}_0$ , for um vetor próprio de  $A$ , com valor próprio  $\lambda$ , a velocidade de fase nesse instante será na mesma direção de  $\vec{r}_0$ . Há dois casos:



- Como  $\text{rank}(A)=2$ , os valores próprios são diferentes de zero. Se  $\lambda$  é positivo, o sistema evolui em linha reta, afastando-se do ponto de equilíbrio.

Se  $\lambda$  é negativo, o sistema evolui em linha reta, aproximando-se do ponto de equilíbrio.

Os valores/vetores próprios são a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para que este sistema tenha soluções não triviais:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{12}A_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

- Como:  $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$   
 $\text{traco}(A) = A_{11} + A_{22}$

então os valores próprios são as duas raízes da equação quadrática:

$$\lambda^2 - \text{traco}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

- Exemplo. Determine os valores e vetores próprios do sistema  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$  e diga que tipo de ponto de equilíbrio é a origem.

Resolução:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{traco}(A) = 5$   
 $\det(A) = 4 - 6 = -2$

valores próprios

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 5 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2} + \Delta, \lambda_2 = \frac{5}{2} - \Delta, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{25}{4} - \Delta^2 = -2$$

○

$$\Delta^2 = \frac{25}{4} + 2 = \frac{33}{4} \Rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \end{aligned}}$$

vetores próprios de  $\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ :

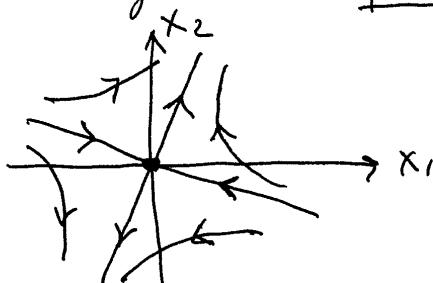
$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \left(1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 &= \frac{\sqrt{33} + 3}{4}x_1 \end{aligned}$$

vetores próprios de  $\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \left(1 - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 &= \frac{3 - \sqrt{33}}{4}x_1 \end{aligned}$$

- Como  $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$  é positivo, a reta  $x_2 = \left(\frac{\sqrt{33}+3}{4}\right)x_1$  são duas curvas de evolução que se afastam da origem.

$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} < 0 \Rightarrow$  a reta  $x_2 = \left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)x_1$  são duas curvas de evolução que se aproximam da origem  
Como tal, a origem é um ponto de sela:



#### DOIS VALORES PRÓPRIOS REAIS

Valores próprios	Tipo de ponto	Retrato de fase
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, com sinais opostos	ponto de sela (instável)	
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, ambos positivos	nó repulsivo (instável)	
$\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais, ambos negativos	nó atrativo (estável)	

Aula 19. 24 de março de 2017

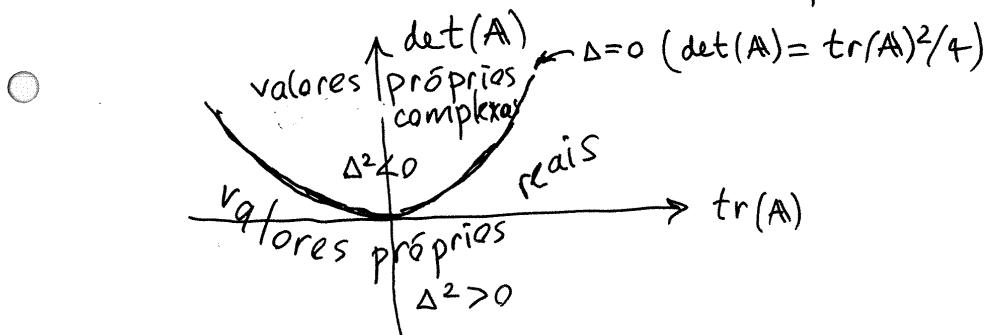
### Valores próprios e soluções do sistema

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

existem soluções  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$   
comparando as duas equações,

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 = \frac{\text{tr}(A)^2}{4} - \det(A)$$



Se  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são vetores próprios associados aos valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então  $\vec{r}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$  e  $\vec{r}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$  são soluções do sistema dinâmico, ou seja, verificam as equações de evolução:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r}$

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números reais, diferentes, essas duas soluções são linearmente independentes, e a solução geral do sistema é:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{C}_2 e^{\lambda_2 t}$$

no caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números complexos,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são ainda soluções, mas são funções complexas, que não podem representar o estado  $\vec{r}(t)$  no espaço (real) de fase.

### Valores próprios complexos

Se a equação quadrática dos valores próprios tem uma raiz complexa, a segunda raiz será, necessariamente, o seu complexo conjugado:

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\omega \quad (\alpha \text{ real e } \omega \text{ real}) \\ = \lambda_1^* \quad \text{(que admitimos} > 0)$$

$\Rightarrow$  se  $\vec{v}$  é vetor próprio associado a  $\lambda_1$ ,  $\vec{v}^*$  é vetor próprio associado a  $\lambda_2$ .

### As duas funções vetoriais complexas:

$$\vec{z}_1 = \vec{v} e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad \vec{z}_2 = \vec{v}^* e^{\lambda_2 t} = \vec{z}_1^*$$

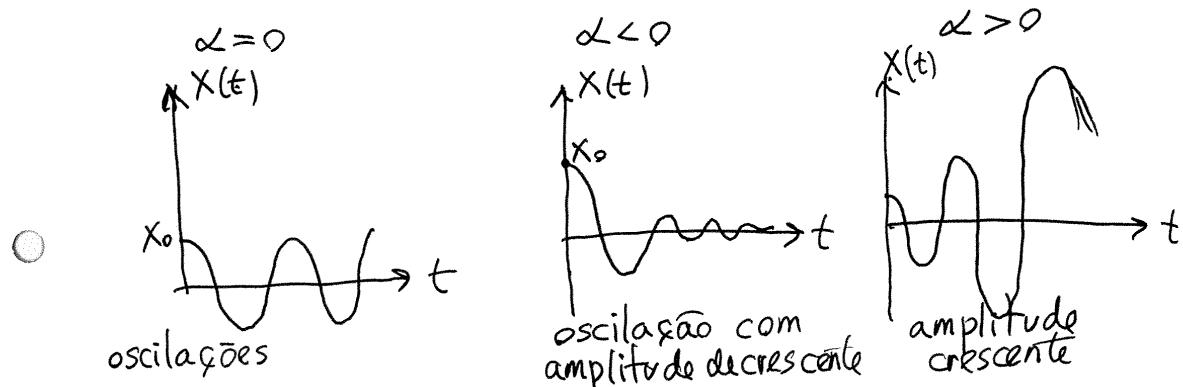
são soluções do sistema. Como o sistema é linear, a soma de duas soluções também é solução; como tal,

$$\vec{r}(t) = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \vec{z}_1 + \vec{z}_1^* = \text{Real}(\vec{z}_1)$$

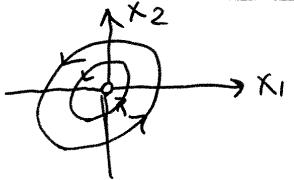
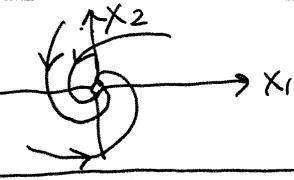
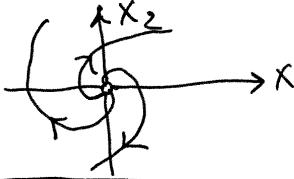
é a solução real do sistema dinâmico:

$$\vec{r}(t) = \text{Real}(\vec{v}) \text{ Real}(e^{(\alpha+i\omega)t}) = \vec{r}_0 e^{\alpha t} \text{ Real}(e^{i\omega t}) \\ \rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{\alpha t} \cos(\omega t)}$$

Cada uma das componentes de  $\vec{r}$  pode ter uma das 3 formas seguintes:



### VALORES PRÓPRIOS COMPLEXOS

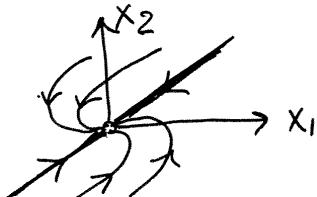
Parte real de $\lambda$	Retrato de fase	Tipo de ponto
$\alpha = 0$		CENTRO (estável)
$\alpha < 0$		FOCO ATRATIVO (estável)
$\alpha > 0$		FOCO REPULSIVO (instável)

nos 3 casos, a parte imaginária de  $\lambda$  é a frequência angular de oscilação

$$\omega = 2\pi f \quad (f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}})$$

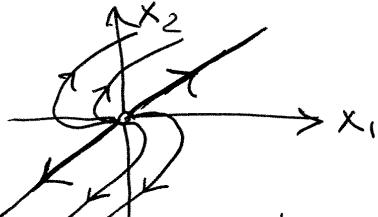
Quando  $\Delta^2 = \frac{\text{tr}(A)^2}{4} - \det(A) = 0$ , existe um. único valor próprio,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , real, e o ponto de equilíbrio chama-se **não impróprio**, que pode ser atrativo ou repulsivo,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A)}{4}$ , segundo o sinal de  $\text{tr}(A)$

$$\text{tr}(A) < 0$$



não impróprio atrativo  
(estável)

$$\text{tr}(A) > 0$$



não impróprio repulsivo  
(instável)

- Exemplo.  $\dot{x} = -3x + 5y, \dot{y} = -2x - 5y$   
é um sistema dinâmico linear com matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

usando o Maxima:

A: matrix([-3, 5], [-2, -5])\$

eigenvalues(A);

$$\hookrightarrow \left[ \underbrace{[-3+i-4, 3*i-4]}_{\lambda_1}, \underbrace{[1, i]}_{\lambda_2} \right] \left[ \underbrace{[1, \frac{-3+i-1}{5}]}_{\vec{v}_1}, \underbrace{[1, \frac{3+i-1}{5}]}_{\vec{v}_2} \right]$$

$\uparrow$   
multiplicidade  
de cada  $\lambda$

Como  $\lambda_{1,2} = -4 \pm i3$ , a origem é foco atrativo.  
Todas as curvas de evolução são oscilações com frequência angular igual a 3 e amplitude decrescente.

## SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) & f \text{ e } g \text{ são funções contínuas.} \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

em que  $f$  e/ou  $g$  são funções não lineares.

Nos pontos de equilíbrio,  $P = (x_p, y_p)$ , a velocidade de fase é nula:

$$f(x_p, y_p) = 0 \quad g(x_p, y_p) = 0$$

Na vizinhança de  $P$ , as duas funções podem ser representadas pelas séries:

$$f(x, y) = f(x_p, y_p) + (x - x_p) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P + (y - y_p) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P + \frac{(x - x_p)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P + \dots$$

$$g(x, y) = g(x_p, y_p) + (x - x_p) \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P + (y - y_p) \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P + \frac{(x - x_p)^2}{2!} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_P + \dots$$

- O primeiro termo em cada série é nulo, e os termos que dependem de  $(x-x_p)^2, (y-y_p)^2, (x-x_p)(y-y_p), (x-x_p)^3, \dots$  são muito menores que os termos que dependem de  $(x-x_p)$  e  $(y-y_p)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) \approx (x-x_p) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P + (y-y_p) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P \\ g(x,y) \approx (x-x_p) \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P + (y-y_p) \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P \end{cases}$$

- Matriz Jacobiana**

$$J_{f,g}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

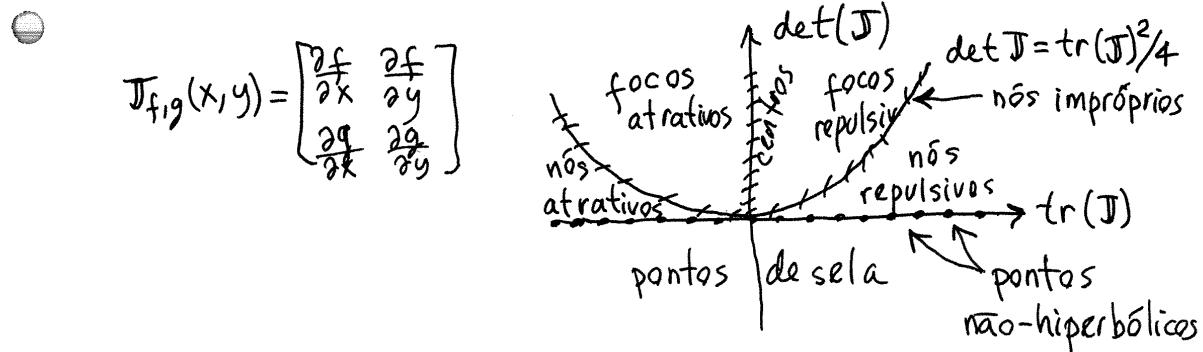
a seguinte mudança de variáveis,  $(x,y) \rightarrow (x_1, x_2)$  com  $x_1 = x - x_p, x_2 = y - y_p$ , desloca a origem para o ponto de equilíbrio P e as equações de evolução ficam:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P x_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P x_2 \\ \dot{x}_2 \approx \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_P x_1 + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_P x_2 \end{cases}$$

Que é um sistema linear com matriz igual à jacobiana de f e g, calculada em  $P=(x_p, y_p)$ .

- Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

## Aula 20. 27 de abril de 2017



pontos não-hiperbólicos:  $\det(J) = 0$

Os pontos marginais (centros, nó improprios e não hiperbólicos) podem ser deslocados para uma das regiões vizinhas devida aos termos não lineares.

**Exemplo.**  $\begin{cases} \dot{x} = 6y(y^2 + x^2 - 1)^2 - 3x^2y^2 \\ \dot{y} = 2xy^3 - 6x(y^2 + x^2 - 1)^2 \end{cases}$

$f: 6*y*(y^2 + x^2 - 1)^2 - 3*x^2*y^2;$

$g: 2*x*y^3 - 6*x*(y^2 + x^2 - 1)^2;$

pontos de equilíbrio:  $\text{fpprintprec: } 3\$$

P:  $\text{solve}([f, g]);$

há 13 soluções mas apenas 9 pontos de equilíbrio (as soluções reais), que estão nas primeiras 7 posições de P e nas duas últimas posições da lista P. Para extrair essas 9 soluções usa-se:

P:  $\text{append}(\text{rest}(P, -6), \text{rest}(P, 11));$

Matriz jacobiana.

J:  $\text{jacobian}([f, g], [x, y])\$$

Matrizes das 9 aproximações lineares nas vizinhanças dos 9 pontos de equilíbrio:

A:  $\text{makelist}(\text{subst}(q, J), q, P);$

- O traco de  $J$  e de todas a matrizes  $A$  é nulo, porque o sistema é conservativo. Existem 3 centros, onde o determinante é positivo:

Dois pontos de sela (determinante negativo)

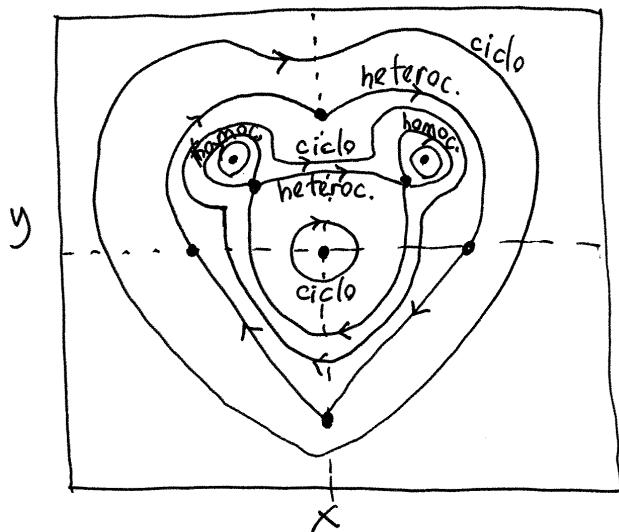
$$S_1 = (-0.529, 0.648), \quad S_2 = (0.529, 0.648) \\ (\text{P}[6]) \qquad \qquad \qquad (\text{P}[7])$$

- e 4 pontos não hiperbólicos:  $(P[2], P[3], P[4] \text{ e } P[5])$   
 $N_1 = (0, -1) \quad N_2 = (0, 1) \quad N_3 = (-1, 0) \quad N_4 = (1, 0)$  (determin. nulo)

**Retrato de fase.** plotdf([f,g],[x,y],[x,-2,2],[y,-2,2]);

④ 1 órbita heteroclinica, entre os 4 pontos não hiperbólicos mostra-se usando: nsteps → 70, trajectory-at → 0.005 - 1.005 e nsteps → 110, trajectory-at → 0.005 1.005

- b) 5 tipos de ciclos: nsteps → 300  
 $\text{trajectory-at} \rightarrow \begin{cases} 0 & 0.8 \text{ à volta de } C_1, C_2 \text{ e } C_3 \\ 0 & 1.4 \text{ à volta da órbita heterocl.} \\ 0 & 0.5 \text{ à volta de } C_1 \\ 0.9 & 1 \text{ à volta de } C_3 \\ -0.9 & 1 \text{ à volta de } C_2 \end{cases}$
  - c) 2 órbitas homoclínicas nos dois pontos de sela:  
 $\text{trajectory-at} \rightarrow \begin{cases} 0.5773 & 0.6502 \\ -0.5773 & 0.6502 \end{cases}$
  - d) outra órbita heteroclínica entre os pontos de sela:  
 $\text{trajectory-at} \rightarrow 0.5179 \ 0.625$



## SISTEMAS COM VÁRIAS VARIÁVEIS DE ESTADO

① Sistemas não autônomos. Por exemplo:

$$\dot{x} = f(x, y, t)$$

$$\dot{y} = g(x, y, t)$$

o tempo também é variável de estado. O espaço de fase é  $(x, y, t)$  e a terceira equação de evolução é a equação

$$\dot{t} = 1 \quad (\text{derivada de } t \text{ em ordem a } t)$$

② Sistemas mecânicos com 2 ou mais graus de liberdade. Exemplo. Encontre as trajetórias de uma bola de ténis (massa 62g e raio 3.25cm) e de uma bola de ping-pong (massa 2.4g e raio 1.9cm) lançadas com velocidade inicial de 12 m/s, inclinada  $45^\circ$ , no ar, com massa volumétrica  $\beta = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

- Resolução:

a força da resistência do ar, para uma esfera de raio  $R$  e massa  $m$  é:

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4} \rho R^2 |\vec{v}| \vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{1.2\pi R^2}{4m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_y = -\frac{1.2\pi R^2}{4m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - 9.8 \end{cases} \quad (\text{s. I.})$$
- Resolve-se numéricamente usando o programa rk:

$$[vx_0, vy_0] := \text{float}(12 * [\cos(\%pi/4), \sin(\%pi/4)])\$$$

$$C(R, m) := -\%pi * 1.2 * R^2 / 4 / m \$$$

$$v := \text{sqrt}(vx^2 + vy^2)\$$$

Bola de tênis:

$$\text{tr1} := \text{rk}([vx, vy, C(0.0325, 0.062) * vx * v, C(0.0325, 0.062) * vy * v], [x, y, vx, vy], [\phi, \phi, vx_0, vy_0], [t, \phi, 2, 0.0])\$$$

sintaxe:  $\text{rk}([\text{var. de fase}], [\text{variáveis}], [\text{valores inic.}], [\text{intervalo}])$

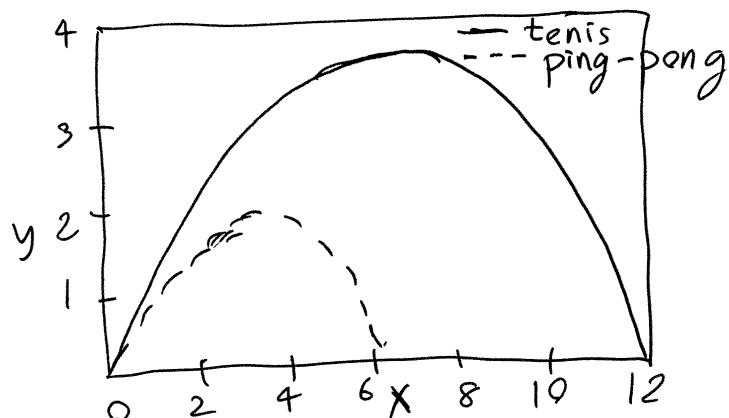
Para determinar em que instante a bola bate no chão ( $y=0$ ) descobre-se a partir de que posições o terceiro valor nos pontos na lista tr1 fica negativo:

$$\text{first}(\text{sublist\_indices}(\text{tr1}, \lambda(p), p[3] < 0))),$$

167

ou seja, apenas os primeiros 166 elementos da lista tr1 dão a trajetória da bola no ar.

- a trajetória traz-se com uma lista  $r_1$ , que tenha pontos com coordenadas  $[x, y]$ :  
 $r_1: \text{makelist}([tr1[i][2], tr1[i][3]], i, 1, 166)\$$   
 Repete-se o mesmo procedimento para criar a lista da trajetória da bola de ping-pong,  $r_2$ :  
 $tr2: rk([vx, vy, C(0.019, 0.0024)*vx*v, C(0.019, 0.0024)*vy*v], [x, y, vx, vy], [0, 0, vx0, vy0], [t, 0, 2, 0.01])\$$
- $\text{first}(\text{sublist\_indices}(tr2, \lambda(p), p[3] < 0)))$ ;  
 $133$   
 $r_2: \text{makelist}([tr2[i][2], tr2[i][3]], i, 1, 133)\$$   
 E o gráfico das duas trajetórias é obtido com:  
 $\text{plot2d}([\text{discrete}, r_1], [\text{discrete}, r_2], [\text{legend}, "tenis", "ping-pong"])$ ;



Aula 21. 4 de maio de 2017

### CICLOS LIMITE

Nos limites  $t \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ , as curvas de evolução podem aproximar-se assintoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).

**Exemplo.**  $\dot{x} = x(1-2x^2-3y^2) - y$      $\dot{y} = y(1-2x^2-3y^2) + x$

u:  $[x*(1-2*x^2-3*y^2)-y, y*(1-2*x^2-3*y^2)+x]$

p: solve(u);  $\rightarrow [0,0]$  (pontos de equilíbrio)  
(vel. de fase)

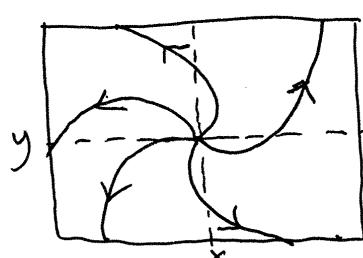
J: jacobian(u, [x, y])

A: subst(p[1], J); (matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equil.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

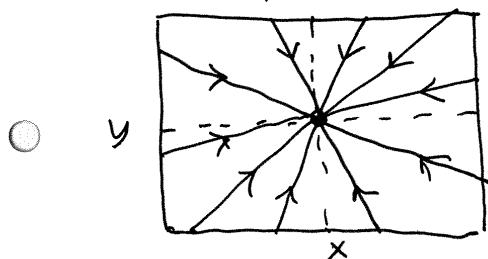
eigenvalues(A);  $\rightarrow \lambda = 1 \pm i$  (foco repulsivo na origem)

plotdf(u, [x, y], [x, -0.4, 0.4], [y, -0.4, 0.4]);



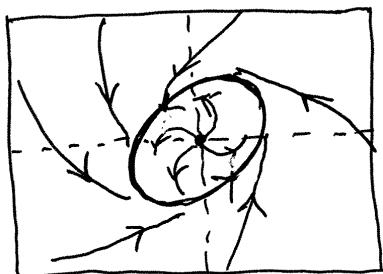
No entanto, o sistema é na realidade estável, como mostra o retrato de fase numa escala maior:

plotdf(u, [x, y], [x, -40, 40], [y, -40, 40]);



As curvas que saem da origem não se podem cruzar com as retas que vemos neste gráfico e aproximarem-se da origem. Escolhendo uma escala intermédia:

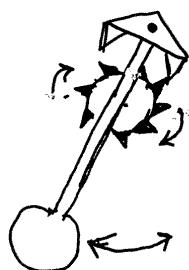
- plotdf(u,[x,y],[x,-1,1],[y,-1,1]);



Todas as curvas de evolução aproximam-se assimoticamente de um ciclo limite (elipse na figura). Existe uma única oscilação com amplitude e frequência fixas.

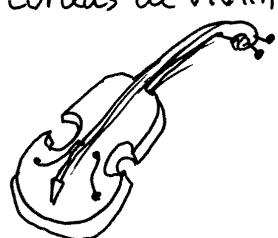
## ○ Sistemas com ciclos limite

- ① relógio de pêndulo.



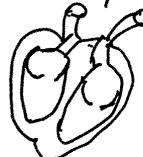
A roda dentada não pode rodar livremente porque é travada por dois triângulos ligados ao pêndulo. A roda impulta o pêndulo e também limita a sua amplitude. Se o pêndulo começar parado na posição de equilíbrio, a roda o faz oscilar.

- ② cordas de violino.

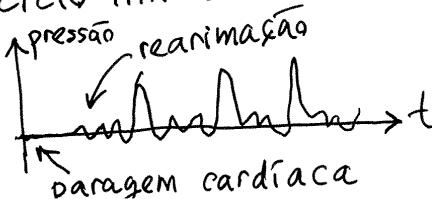


A fricção do arco sobre as cordas faz deslocar a corda até uma amplitude máxima onde a corda escorrega e para novamente sendo deslocada novamente pelo arco. A forma do ciclo limite depende da velocidade do arco, a pressão nele, e do atrito entre o arco e a corda.

- ③ Coração.



Os batimentos cardíacos seguem um ciclo limite



### ● Coordenadas polares.

Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada  $\dot{r}$  igual a zero indica a presença de ciclos limite.

- No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável  $u$  e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

$$[x_p, y_p] : [r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)]$$

definem-se as derivadas de  $r$  e  $\varphi$ :

$$\text{gradef}(r, t, v)$$

$$\text{gradef}(\varphi, t, w)$$

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

$$\text{subst}([x=x_p, y=y_p], [\text{diff}(x_p, t) = v[1], \text{diff}(y_p, t) = v[2]]);$$

- e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para  $\dot{r}$  e  $\dot{\varphi}$ :

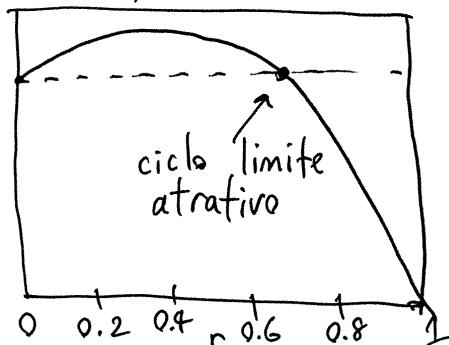
$$\text{solve}(\%, [v, w]);$$

$$\text{trigsimp}(\%); \quad \rightarrow \dot{\varphi} = 1, \quad \dot{r} = r^3 (\cos^2 \varphi - 3) + r$$

o gráfico de  $\dot{r}$  para um valor qualquer de  $\varphi$ , por exemplo  $\varphi=0$ :

$$\text{plot2d}(r^3 * (1-3) + r, [r, 0, 1]);$$

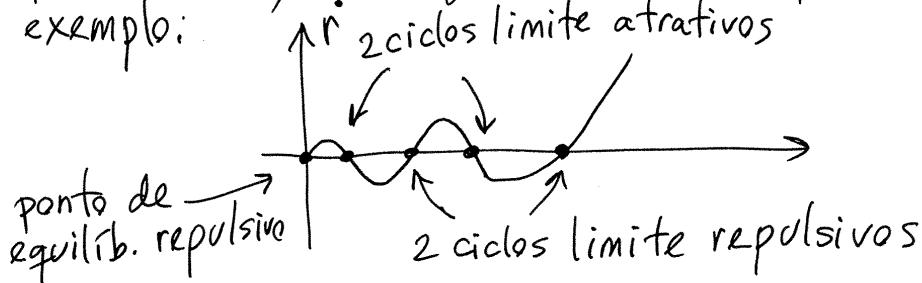
- mostra que há um ciclo limite entre  $r=0.6$  e  $r=0.8$ , onde  $\dot{r} \geq 0$ .



- O ciclo limite é atrativo, porque para  $r$  menor do que no ciclo limite  $r$  aumenta ( $\dot{r} > 0$ ) e para valores superiores  $r$  diminui ( $\dot{r} < 0$ ).

$r=0$  também dá  $\dot{r}=0$ , porque  $r=0$  é ponto de equilíbrio.

- Em casos mais complicados, o gráfico de  $\dot{r}$  em função de  $r$ , para algum valor de  $t$ , pode ser, por exemplo:



- No exemplo da página anterior,  $\dot{\theta} = 1$  mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.

As curvas de evolução são oscilações com frequência angular  $\Omega = 1$  e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.



Aula 22. 15 de maio de 2017

## DINÂMICA POPULACIONAL

$X(t)$  = população no instante  $t$ , admitindo que pode ter qualquer valor real positivo.

a derivada de  $X(t)$  é o aumento/diminuição da população por unidade de tempo:  $\dot{X} = f(X, t)$

Como a população não pode mudar quando  $X=0$ , então a função  $f$  deverá ter a seguinte propriedade:

$$f(0, t) = 0$$

A taxa de aumento/diminuição da população é:

$\frac{f(x, t)}{x}$  = taxa de natalidade - taxa de mortalidade  
 (aumento/diminuição da população, por unidade de tempo e por cada indivíduo)

### 1. Modelo de Malthus

$$\frac{f(x, t)}{x} = a = \text{constante positiva}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x, t) = ax \quad (\text{EDO de variáveis separáveis})$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t adt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$$

$$X(t) = X_0 e^{at} \quad \begin{array}{l} \text{crescimento exponencial} \\ \text{da população} \end{array}$$

### 2. Modelo logístico . Também chamado de Verhulst

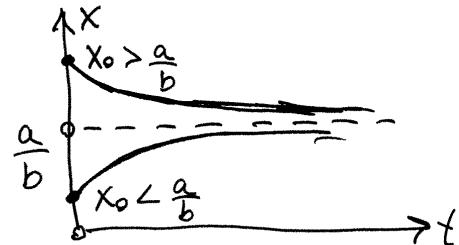
A taxa de natalidade é constante,  $a$ , mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

○  $\frac{f(x,t)}{x} = a - bx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x(a - bx)$  a e b são duas constantes positivas

Pontos de equilíbrio.  $x(a - bx) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{b}$

$$\frac{df}{dx} = a - 2bx \quad \begin{cases} \text{• positiva se } x < \frac{a}{2b} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ instável} \\ \text{• negativa se } x > \frac{a}{2b} \Rightarrow x_2 = \frac{a}{b} \text{ estável} \end{cases}$$

○ A população aproxima-se sempre do valor de equilíbrio  $x_\infty = \frac{a}{b}$



### SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x(t)$  e  $y(t)$  são as populações das duas espécies, que interagem entre si:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

○ As duas funções  $f$  e  $g$  deverão ter as seguintes propriedades:  $f(0, y) = g(x, 0) = 0$

A matriz jacobiana é:  $J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  = aumento / diminuição próprio da 1ª espécie.

$\frac{\partial g}{\partial y}$  = aumento / diminuição próprio da 2ª espécie.

$\frac{\partial f}{\partial y}$  = aumento / diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.

○  $\frac{\partial g}{\partial x}$  = aumento / diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

- 1. Sistema predador-presa.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial g}{\partial x}$  com sinais diferentes
- 2. Sistema com cooperação.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial g}{\partial x}$  positivas
- 3. Sistema com competição.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial g}{\partial x}$  negativas

### SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

- $\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$  é um sistema predador-presa em que  $x$  são presas e  $y$  predadores ( $a, b, c$  e  $d$  positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

Pontos de equilíbrio.  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  e  $(x_2, y_2) = \left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$

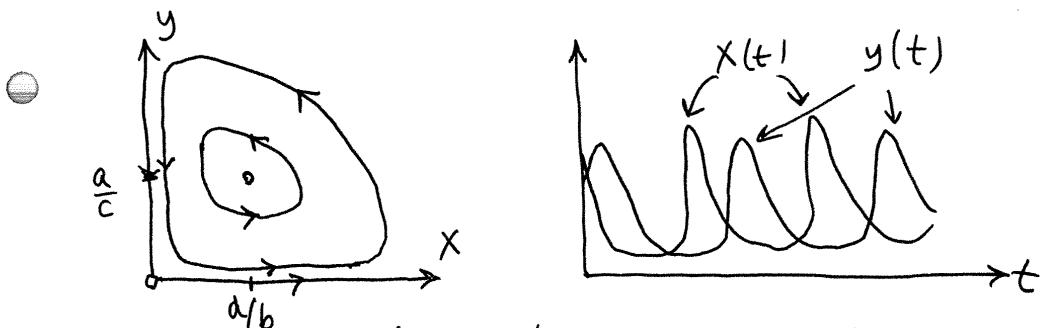
$$\mathbb{J}(x, y) = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ by & bx - d \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = a > 0, \lambda_2 = -d < 0 \quad (0, 0) \text{ é ponto de sela}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tr}(\mathbb{A}_2) = 0, \det(\mathbb{A}_2) = ad$$

$$\lambda^2 + ad = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{ad}$$

- $\left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right)$  é um centro  
 $\Rightarrow$  Todas as curvas de evolução, com  $x_0$  e  $y_0 \neq 0$ , são ciclos.



O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados.

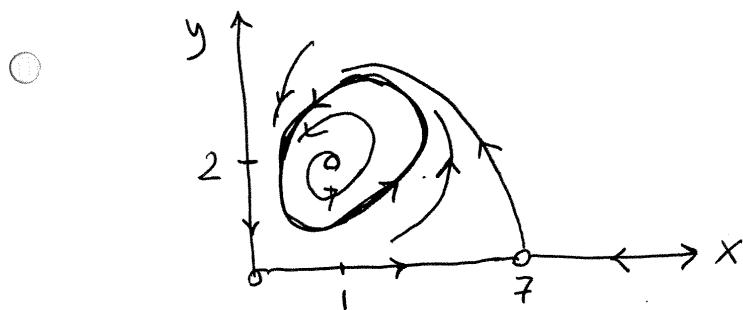
Um modelo mais realista, de Holling-Tanner, tem apenas um ciclo limite:

$$\dot{x} = x(1 - \frac{x}{7}) - \frac{6xy}{7+7x} \quad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

$x$  = presas ,  $y$  = predadores

tem 3 pontos de equilíbrio:  $(0,0)$ ,  $(7,0)$  e  $(1,2)$

Os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro é foco repulsivo.

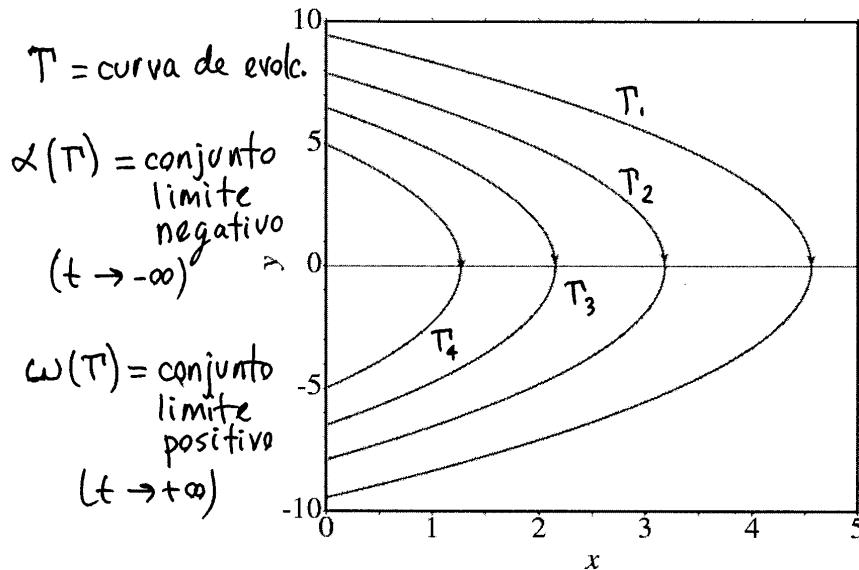


As populações das duas espécies oscilam entre valores determinados pelos parâmetros do modelo e não pelos valores iniciais das populações.

## Aula 23, 18 de maio de 2017

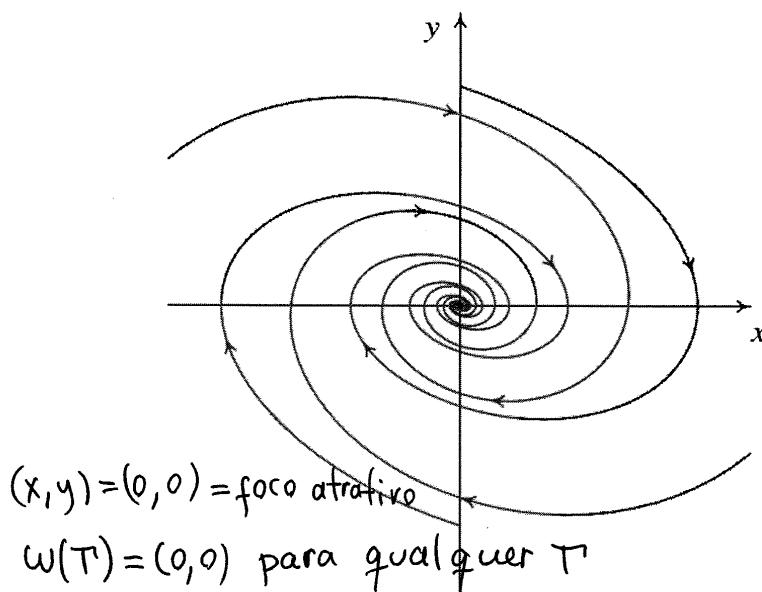
### Curvas de evolução

Nos sistemas reais, as curvas de evolução não podem afastar-se infinito. Devem aproximar-se de algum ponto ou curva finita.



Em sistemas com duas variáveis de estado há quatro possibilidades... (para  $\alpha$  e  $\omega$ )

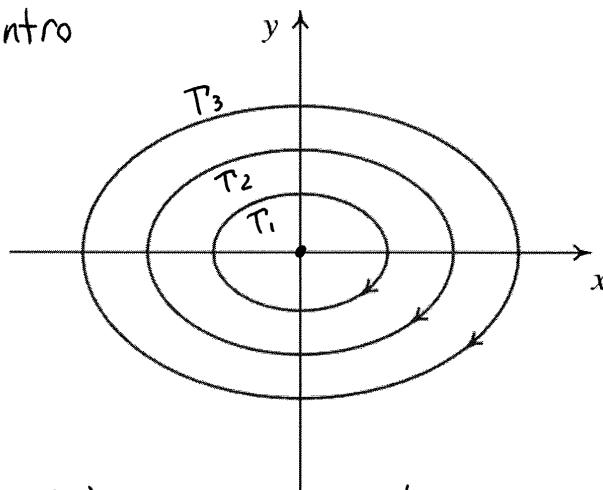
### 1. Pontos de equilíbrio



## 2. Ciclos

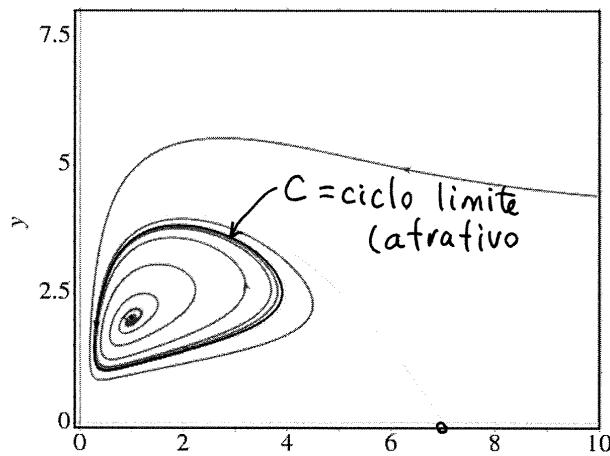
As curvas podem fecharem-se sobre si próprias.

$$(0, 0) = \text{centro}$$



$$\alpha(\tau) = \omega(\tau) = \tau, \text{ para qualquer curva } \tau$$

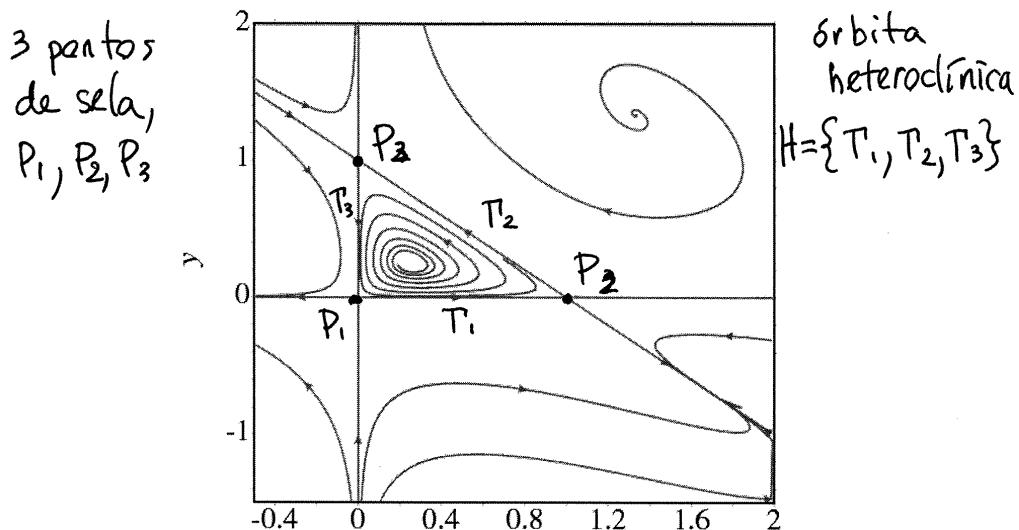
## 3. Ciclos limite



$$\omega(\tau) = C, \text{ para qualquer curva } \tau \text{ em } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\alpha(C) = \omega(C) = C$$

#### 4. Órbitas homoclínicas ou heteroclínicas



$$\omega(T) = H, \text{ se } T \text{ estiver no interior de } H.$$

**Atratores estranhos**

Em sistemas com 3 ou mais variáveis de estado existe outra possibilidade, chamada um **atrator estranho**, que é uma curva de comprimento infinito, que ocupa um volume finito do espaço de fase.

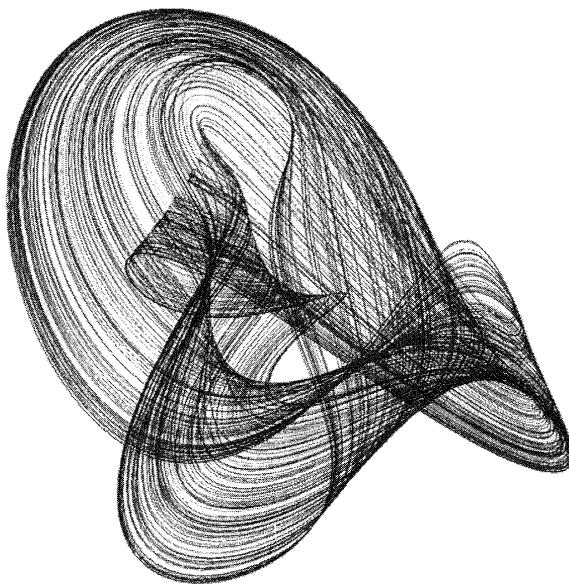
Em diferentes instantes a curva passa por diferentes pontos, sem nunca passar novamente pelo mesmo ponto.

Tal como nos ciclos,

$\alpha(T) = \omega(T) = T$ , se  $T$  for um atrator estranho,  
mas, a diferença dos ciclos, se  $T$  passa pelo ponto  $P_0$ , em  $t_0$ , na existência de nenhum outro instante  $t$  em que o estado volte a ser  $P_0$ , embora existam muitos pontos próximos de  $P_0$  onde  $T$  passa em instantes diferentes de  $t_0$ .

Exemplo:

projeção 2D  
dum atrator  
estranho  
em 3D.

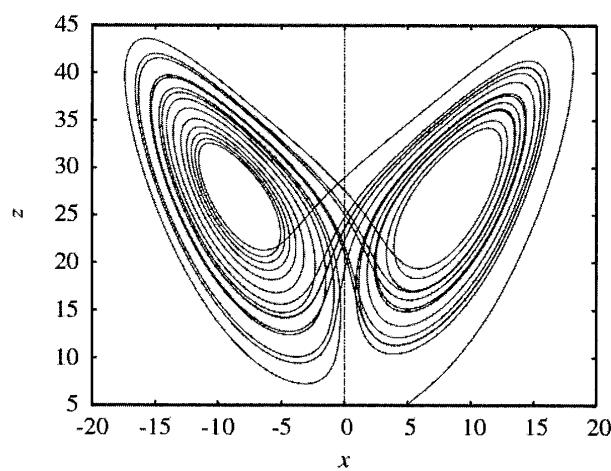


### Atrator de Lorenz

Modelo meteorológico para as correntes de convecção do ar em planos verticais, produzidas por aquecimento na aresta inferior dos planos (Lorenz, 1963).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

$x$  = amplitude das correntes.  $y$  = diferença de temperatura entre as correntes ascendente e descendente.  
 $z$  = desvio da temperatura normal no plano.



- $\text{eqs}: [10*(y-x), 28*x-y-x*z, x*y-8*z/3] \$$  (equações)  
 $v: [x, y, z] \$$  (variáveis)  
 $v\phi: [5, 5, 5] \$$  (valores iniciais)
- $p: \text{rk}(\text{eqs}, v, v\phi, [t, 0, 20, 0.005]) \$$  ( $\begin{cases} \text{aproximação} \\ \text{discreta à curva} \\ \text{de evolução} \end{cases}$ )  
 $\text{last}(p); \rightarrow [20, -9.82, -15.52, 19.7]$
- $p: \text{rk}(\text{eqs}, v, v\phi, [t, 0, 20, 0.001]) \$$  (melhor aproximação)  
 $\text{last}(p); \rightarrow [20, -9.8, -16.02, 19.29]$  (ainda não converge)  
 $p: \text{rk}(\text{eqs}, v, v\phi, [t, 0, 20, 0.0005]) \$$   
 $\text{last}(p);$  (converge a 3 algarismos significativos)
- O gráfico da página anterior obter-se com:  
 $\text{plot2d}([\text{discrete}, \text{makelist}([s[2], s[4]], s, p)], [\text{xlabel}, "z"])$
- Podemos obter outra curva  $T_2$  com valores iniciais ligeiramente diferentes:  
 $p2: \text{rk}(\text{eqs}, v, [5.005, 5, 5], [t, 0, 20, 0.0005]) \$$   
e mostrar  $x(t)$  das duas curvas  $T_1$  e  $T_2$ :  
 $\text{plot2d}([\text{[discrete, makelist([s[1], s[2]], s, p)]},$   
 $[\text{discrete, makelist([s[1], s[2]], s, p2)]}],$   
 $[\text{xlabel}, "t"], [\text{ylabel}, "x"], [\text{legend}, \text{false}])$ ;  
as duas curvas são quase idênticas até  $t=10$  mas depois ficam muito diferentes.

# **Capítulo 2**

## **Exames**

### **2.1 Exame de época normal**

O exame realizou-se no dia 16 de junho de 2017. Compareceram 116 estudantes e a nota média foi 11.1 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

1. (4 valores) Uma das luas dum planeta é um corpo homogéneo e esférico de raio  $R$ . Imagine que a lua é atravessada de lado a lado por um túnel retilíneo que passa pelo seu centro, dentro do qual deixa-se cair livremente um objeto de massa  $m$ . Sabendo que a energia potencial gravítica do objeto, no interior desse túnel, é dada pela expressão

$$U = \frac{mg}{2} \left( \frac{r^2}{R} - R \right)$$

na qual  $r$  é a distância desde o centro da lua e  $g$  é a aceleração da gravidade na superfície do planeta: (a) Determine a equação de movimento (expressão da aceleração) do objeto dentro do túnel, ignorando forças dissipativas (a lua não tem atmosfera). (b) Demonstre que o objeto fica a oscilar no túnel e determine o período de oscilação no caso da lua Mimas, com raio de 198 km e  $g = 6.8 \text{ cm/s}^2$ . (c) Se existisse um túnel retilíneo desde o Porto até Nova Zelândia, passando pelo centro da Terra, e sabendo que o raio da Terra é 6370 km, quanto tempo demorava viajar desde o Porto até Nova Zelândia saltando nesse túnel? (admitindo que a expressão obtida para a lua homogénea e sem atmosfera fosse válida).

2. (4 valores) As equações de evolução de um sistema dinâmico de duas espécies são:

$$\dot{x} = 3x - \frac{3xy}{1+2x} \quad \dot{y} = \frac{3xy}{1+2x} - y$$

(a) Explique que tipo de sistema de duas espécies é. (b) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e explique que tipos de pontos são. (c) Trace o retrato de fase do sistema.

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é  $\frac{1}{2}(\dot{s}^2 + 5s^2)$ , onde  $s$  é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é  $15s$ . O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de  $s$  nesse ponto de equilíbrio.

- (A) 2                                  (C) 1                                  (E) -1  
 (B) -2                                (D) 3

Resposta:

4. Para aumentar o momento de inércia dum corpo é necessário:

- (A) Afastar partes do corpo para mais longe do eixo.  
 (B) Diminuir a velocidade angular.  
 (C) Aumentar a aceleração angular.  
 (D) Compatá-lo, ocupando menor volume.  
 (E) Aumentar a velocidade angular.

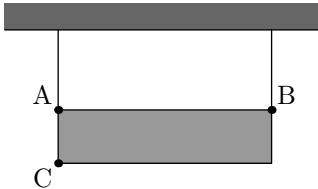
Resposta:

5. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de  $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03s}$ , na qual  $v$  é expressa em km/h e a posição na trajetória,  $s$ , é expressa em km. Sabendo que  $s = 0$  em  $t = 0$ , determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

- (A) 6.465                              (C) 3.741                              (E) 4.49  
 (B) 7.758                              (D) 5.388

Resposta:

6. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 3.4 N, a tensão no fio ligado em B é 1.8 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.



- (A) 21.6 cm                              (C) 12.5 cm                              (E) 10.4 cm  
 (B) 15.0 cm                              (D) 18.0 cm

Resposta:

7. O sistema dinâmico não linear:

$\dot{x} = xy - 4x + y - 4 \quad \dot{y} = xy + x - 5y - 5$   
 tem um ponto de equilíbrio em  $x = 5$ ,  $y = 4$ . Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

- (A)  $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = -6x$                               (D)  $\dot{x} = -5y \quad \dot{y} = -6x$   
 (B)  $\dot{x} = 6y \quad \dot{y} = 5x$                                       (E)  $\dot{x} = -6y \quad \dot{y} = 5x$   
 (C)  $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = 6x$

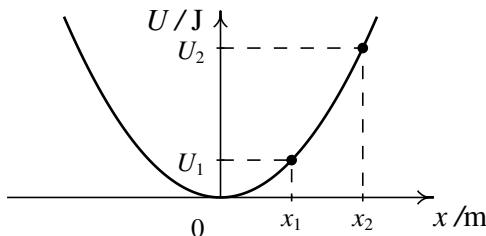
Resposta:

8. A posição dum ponto ao longo dum percurso, em função do tempo, é dada pela expressão  $s = 30t - 3t^2$  (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre  $t = 0$  e  $t = 7.5$  s.

- (A) 18.75 m      (C) 21.75 m      (E) 75 m  
 (B) 93.75 m      (D) 131.25 m

Resposta:

9. O gráfico da figura representa a energia potencial  $U$ , em joules, em função da posição  $x$ , em metros, duma partícula com massa igual a 9 kg; os valores no gráfico são  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 18$ ,  $U_1 = 729$  e  $U_2 = 2916$ . Se a partícula parte do repouso na posição  $x_2$ , com que velocidade chegará ao ponto  $x_1$ ?



- (A) 44.09 m/s      (C) 22.05 m/s      (E) 88.18 m/s  
 (B) 28.66 m/s      (D) 11.02 m/s

Resposta:

10. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

- (A) 182 rad/s<sup>2</sup>      (C) 838 rad/s<sup>2</sup>      (E) 279 rad/s<sup>2</sup>  
 (B) 209 rad/s<sup>2</sup>      (D) 419 rad/s<sup>2</sup>

Resposta:

11. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = x + y \quad \dot{y} = 0.5x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto  $(x, y) = (0, 0)$ ?

- (A) Ponto de sela.      (D) Foco repulsivo.  
 (B) Foco atrativo.      (E) Centro.  
 (C) Nó repulsivo.

Resposta:

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base  $x = 6$  m e altura  $y = 7$  m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

- (A) 59.53 N      (C) 12.76 N      (E) 25.51 N  
 (B) 16.8 N      (D) 39.2 N

Resposta:

13. Uma partícula de massa  $m$  desloca-se ao longo de uma curva no plano  $xy$ . Sabendo que a expressão da energia cinética da partícula é  $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1+x^6)$ , encontre a equação da curva.

- (A)  $y = \frac{2x^{5/2}}{5}$       (C)  $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$       (E)  $y = \frac{x^5}{5}$   
 (B)  $y = \frac{x^4}{4}$       (D)  $y = \frac{x^3}{3}$

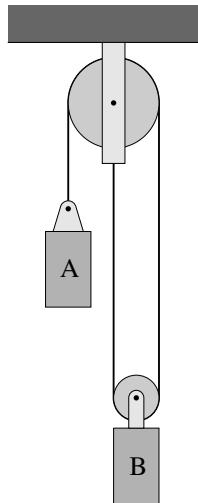
Resposta:

14. Num sistema que se desloca no eixo dos  $x$ , a força resultante é  $x^2 + x - 2$ . Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição  $x$  dum ponto de equilíbrio instável?

- (A) 1      (C) -1      (E) 2  
 (B) 3      (D) -2

Resposta:

15. No instante em que o bloco A desce com velocidade 24 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?



- (A) 12 cm/s      (C) 48 cm/s      (E) 72 cm/s  
 (B) 24 cm/s      (D) 8 cm/s

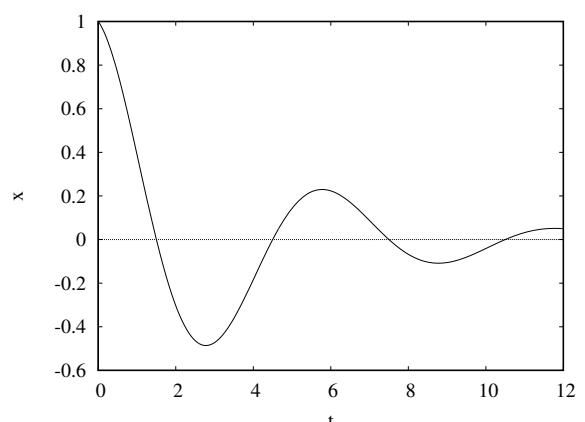
Resposta:

16. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado  $(x, y)$  foram transformadas para coordenadas polares  $(r, \theta)$ , obtendo-se as equações:  $\dot{\theta} = -2$      $\dot{r} = r^2 - 3r$ . Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

- (A) atrativo com  $r = 0$       (D) atrativo com  $r = 3$   
 (B) repulsivo com  $r = 2$       (E) repulsivo com  $r = 3$   
 (C) atrativo com  $r = 2$

Resposta:

17. O gráfico mostra uma possível solução  $x(t)$  num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado  $x$  e  $y$ . Quais dos valores na lista poderão ser os dois valores próprios da matriz desse sistema?



- (A)  $\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{2}$       (C)  $\frac{1}{4} \pm i\pi$       (E)  $-\frac{1}{4} \pm i\pi$   
 (B)  $-\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{2}$       (D)  $-\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{3}$

Resposta:

## 2.1.2 Resolução

**Problema 1.** (a) **1º método.** Como o potencial depende apenas da distância até o centro, a força resultante é na direção radial e com componente:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{mg r}{R}$$

e a expressão para a aceleração é:

$$a = \ddot{r} = \frac{F}{m} = -\frac{g r}{R}$$

**2º método.** A expressão da energia cinética é:

$$E_c = \frac{m}{2} \dot{r}^2$$

Aplicando a equação de Laplace, para sistemas conservativos com um único grau de liberdade  $r$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = m \ddot{r} + \frac{m g r}{R} = 0 \implies \ddot{r} = -\frac{g r}{R}$$

(b) A equação de movimento obtida também é válida considerando  $r$  na direção radial, mas com sinais diferentes nos segmentos do túnel aos dois lados do centro, onde  $r = 0$ .

**1º método.** As equações de evolução do sistema são:

$$\dot{r} = v \quad \dot{v} = -\frac{g r}{R}$$

Que é um sistema linear e, como tal, com um único ponto de equilíbrio em  $r = v = 0$ . A matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

Com valores próprios,

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Conclui-se então que todos os possíveis movimentos, dentro do túnel onde a equação de movimento obtida é válida, são oscilações harmónicas com frequência angular:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

O período de oscilação é,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Substituindo os valores dados para a lua Mimas, em unidades SI,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.98 \times 10^5}{6.8 \times 10^{-2}}} = 10722 \text{ s} = 2\text{h } 58\text{m } 42\text{s}$$

**2º método.** A energia mecânica  $E_m$  é igual à energia potencial  $U$  nos dois pontos de retorno:

$$r = \pm\sqrt{R^2 + \frac{2E_m R}{mg}} = \pm A$$

e, como tal, o objeto oscila na região  $-A \leq r \leq A$ . A expressão da energia mecânica, constante, é:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{mg}{2}\left(\frac{r^2}{R} - 1\right) = E_m = \frac{mg}{2R}(A^2 - R^2)$$

Quando o objeto se desloca na direção positiva de  $r$ , a expressão da velocidade é então:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}(A^2 - r^2)} = \frac{dr}{dt}$$

Separando variáveis e integrando  $r$  desde  $-A$  até  $A$ , que corresponde a meio período de oscilação  $T/2$ , obtém-se:

$$\int_0^{T/2} dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-A}^A \frac{dr}{\sqrt{(A^2 - r^2)}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \implies T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(c) O tempo para atravessar o túnel é igual a metade do período de oscilação:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6.37 \times 10^6}{9.8}} = 2533 \text{ s} = 42 \text{ m}$$

**Problema 2.** (a) Na primeira equação de evolução, como as variáveis são positivas, é claro que o termo que depende de  $y$  é negativo e aumenta quando  $y$  aumenta. Como tal, conclui-se que a espécie  $y$  faz diminuir a população  $x$ .

Na segunda equação, já não é evidente se o aumento de  $x$  faz aumentar ou diminuir a população  $y$ , porque o termo  $y$  aparece tanto no numerador como no denominador. É necessário calcular a derivada da expressão:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{1+2x} - \frac{6xy}{(1+2x)^2} = \frac{3y}{(1+2x)^2}$$

Agora sim é claro que esta expressão é sempre positiva para qualquer valor da população  $x$  e, como tal, a espécie  $x$  faz aumentar a população  $y$ . Trata-se de um sistema predador presa, no qual  $x$  são as presas e  $y$  os predadores.

(b) Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} 3x - \frac{3xy}{1+2x} = 0 \\ \frac{3xy}{1+2x} - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(2x - y + 1) = 0 \\ y(x - 1) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem duas soluções,  $y = 0$  e  $x = 1$ . Com  $y = 0$ , a primeira equação tem uma única solução,  $x = 0$  ( $x$  não pode ser negativa); e com  $x = 1$ , a solução de primeira equação é  $y = 3$ . Como tal, há dois pontos de equilíbrio  $(x, y)$ :

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (1, 3)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} 3 - \frac{3y}{(1+2x)^2} & \frac{3x}{1+2x} \\ \frac{3y}{(1+2x)^2} & \frac{x-1}{1+2x} \end{bmatrix}$$

No ponto  $P_1$ , a matriz da aproximação linear é então,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com valores próprios 3 e  $-1$ , ou seja,  $P_1$  é ponto de sela.

No ponto  $P_2$ , a matriz da aproximação linear é:

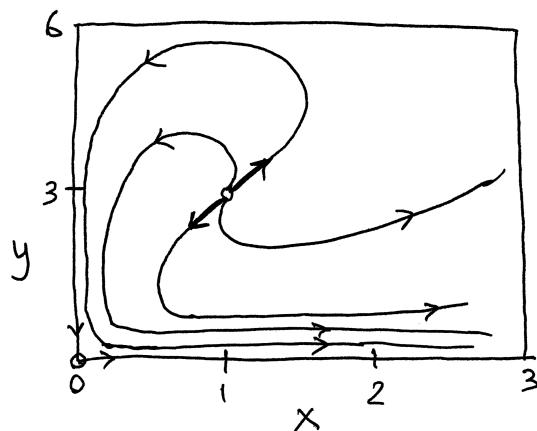
$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ , com apenas uma raiz,  $\lambda = 1$ . Conclui-se então que  $P_2$  é nó impróprio repulsivo.

(c) O retrato de fase pode ser obtido no Maxima com o comando:

```
plotdf ([3*x-3*x*y/(1+2*x), 3*x*y/(1+2*x)-y], [x,y], [x,0,3], [y,0,6]);
```

E é representado na seguinte figura:



É importante identificar os dois eixos, mostrar as coordenadas dos pontos de equilíbrio, ter em conta que unicamente interessa o primeiro quadrante do espaço de fase e as linhas de evolução num sistema de duas espécies nunca podem atravessar nenhum dos dois eixos.

### Perguntas

- |       |       |
|-------|-------|
| 3. D  | 11. C |
| 4. A  | 12. E |
| 5. D  | 13. B |
| 6. E  | 14. A |
| 7. B  | 15. A |
| 8. B  | 16. E |
| 9. C  | 17. D |
| 10. B |       |

### 2.1.3 Cotações

#### Problema 1

- Equação de movimento \_\_\_\_\_ 0.8

- Explicação de que o sistema oscila \_\_\_\_\_ 0.8
- Obtenção da expressão do período \_\_\_\_\_ 0.8
- Cálculo do período da lua \_\_\_\_\_ 0.8
- Cálculo do tempo de viagem entre Porto e Nova Zelândia \_\_\_\_\_ 0.8

**Problema 2**

- Determinação do tipo de sistema \_\_\_\_\_ 0.8
- Obtenção dos dois pontos de equilíbrio \_\_\_\_\_ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana \_\_\_\_\_ 0.4
- Valores próprios e caraterização do primeiro ponto de equilíbrio \_\_\_\_\_ 0.8
- Valores próprios e caraterização do segundo ponto de equilíbrio \_\_\_\_\_ 0.8
- Retrato de fase \_\_\_\_\_ 0.8

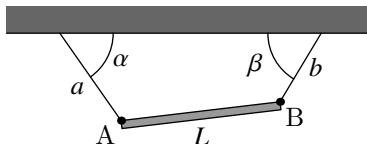
## 2.2 Exame de época de recurso

O exame realizou-se no dia 30 de junho de 2017. Compareceram 88 estudantes e a nota média foi 8.4 valores. A seguir mostra-se o enunciado de uma das cinco versões. Nas outras versões mudam os valores numéricos, a ordem das perguntas e alguns pormenores que não alteram significativamente as perguntas.

Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

1. (4 valores) Uma barra reta, não homogénea e muito estreita, de comprimento  $L = 6 \text{ m}$  e massa  $m = 6.2 \text{ kg}$ , foi pendurada dum teto horizontal, por meio de duas cordas de comprimentos  $a = 4 \text{ m}$  e  $b = 3 \text{ m}$ , ligadas nos dois extremos A e B da barra, tal como mostra a figura. A barra fica em equilíbrio quando os ângulos entre as cordas e o teto são  $\alpha = 60^\circ$  e  $\beta = 70^\circ$ .  
 (a) Determine os valores das tensões nas duas cordas quando a barra está nessa posição de equilíbrio. (b) Determine a distância desde o centro de gravidade da barra até o ponto A.



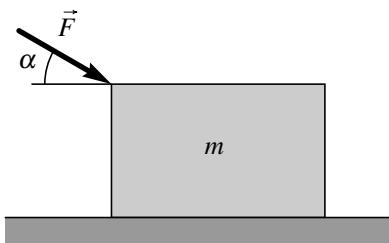
2. (4 valores) A equação de movimento  $\ddot{x} + (3 - x^2) \dot{x} - 3x + x^3 = 0$  pode ser escrita como sistema dinâmico no plano  $xy$ .  
 (a) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano  $xy$ . (b) Explique de que tipo é cada um dos pontos de equilíbrio.  
 (c) Trace o retrato de fase do sistema. (d) Diga se o sistema tem ciclos (soluções periódicas) e em que regiões do plano  $xy$ .

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?  
 (A)  $\dot{y} = -5xy + 2y$       (D)  $\dot{y} = 6y - y^2$   
 (B)  $\dot{y} = 2y^2 - 3y$       (E)  $\dot{y} = 2y - 5y^2$   
 (C)  $\dot{y} = x + xy^2$

Resposta:

4. Um bloco com massa  $m = 5 \text{ kg}$  encontra-se sobre a superfície de uma mesa horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa  $\vec{F}$ , com módulo de  $80 \text{ N}$  e direção que faz um ângulo  $\alpha = 20^\circ$  com a horizontal, tal como mostra a figura. Calcule o módulo da reação normal entre o bloco e a mesa.



- (A)  $76.36 \text{ N}$       (C)  $21.64 \text{ N}$       (E)  $2.42 \text{ N}$   
 (B)  $100.42 \text{ N}$       (D)  $49.0 \text{ N}$

Resposta:

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é  $s^2 - s - 2$ , onde  $s$  é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assimptoticamente do ponto  $(a, 0)$ , determine o valor de  $a$ .

- (A) -1      (C) 3      (E) -2  
 (B) 1      (D) 2

Resposta:

6. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de  $36 \text{ m/s}$ , fazendo um ângulo de  $25^\circ$  com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

- (A)  $210.1 \text{ m}$       (C)  $145.9 \text{ m}$       (E)  $121.6 \text{ m}$   
 (B)  $252.1 \text{ m}$       (D)  $175.1 \text{ m}$

Resposta:

7. Calcule o momento de inércia duma esfera com raio de 1 centímetro e massa 17 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia duma esfera de raio  $R$  e massa  $m$  à volta do eixo que passa pelo centro é  $2mR^2/5$ .

- (A)  $6.80 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$       (D)  $1.21 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (B)  $1.36 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$       (E)  $3.40 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (C)  $2.38 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

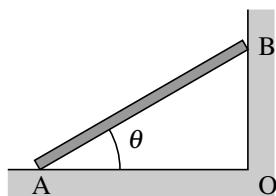
Resposta:

8. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial  $h$  e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegado ao fim da rampa (altura zero) com velocidade  $v$ . Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade  $v/3$ ?

- (A)  $6h$       (C)  $9h$       (E)  $3h$   
 (B)  $h/3$       (D)  $h/9$

Resposta:

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento  $L$  que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos? ( $x_A$  e  $y_B$  medidos a partir de O)



- (A)  $v_A = -v_B \cos \theta$       (D)  $v_A = -v_B \tan \theta$   
 (B)  $v_A = -2 v_B$       (E)  $v_A = -v_B \sin \theta$   
 (C)  $v_A = -v_B$

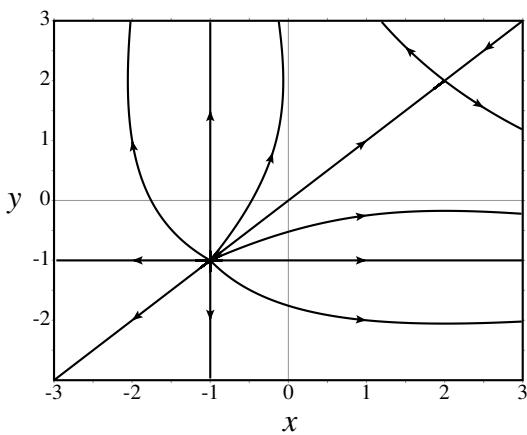
Resposta:

10. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é:  $2t^2 \hat{i} + 0.4t^2 \hat{j}$  (unidades SI). Em  $t = 0$  a partícula parte do ponto  $y = -7$  no eixo dos  $y$ . Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos  $x$ .

- (A) 3.27 s      (C) 5.92 s      (E) 2.6 s  
 (B) 4.18 s      (D) 3.74 s

Resposta:

11. A figura mostra o retrato de fase dum sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em  $(x, y) = (-1, -1)$  e  $(x, y) = (2, 2)$ . Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto  $(-1, -1)$ ?



- (A)  $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = -3y$       (D)  $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = 3y$   
 (B)  $\dot{x} = -3x \quad \dot{y} = -3y$       (E)  $\dot{x} = 3y \quad \dot{y} = -3y$   
 (C)  $\dot{x} = -3y \quad \dot{y} = 3x$

Resposta:

12. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = k r^5$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $k$  uma constante. Encontre a equação de movimento para  $\ddot{r}$

- (A)  $r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{5k r^4}{m}$       (D)  $r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{5k r^4}{m}$   
 (B)  $r \ddot{\theta} - \frac{5k r^4}{m}$       (E)  $r \dot{\theta} - \frac{5k r^4}{m}$   
 (C)  $r \dot{\theta}^2 - \frac{5k r^4}{m}$

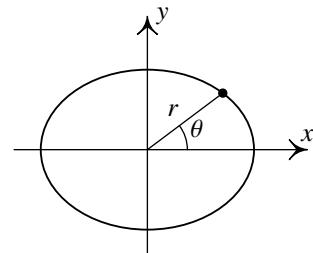
Resposta:

13. Partindo da origem na sua trajetória e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração tangencial  $2\sqrt{v^2 + 5}$ , em unidades SI, onde  $v$  é o valor da velocidade. Determine a posição da partícula na trajetória quando  $v = 30$  m/s.

- (A) 13.8 m      (C) 9.6 m      (E) 16.6 m  
 (B) 19.9 m      (D) 11.5 m

Resposta:

14. Uma partícula desloca-se ao longo de uma elipse no plano  $xy$ . As coordenadas cartesianas da partícula são  $x$  e  $y$  e as suas coordenadas polares são  $r$  e  $\theta$ . Na lista seguinte, quais são as possíveis variáveis que podem ser usadas para descrever os graus de liberdade do sistema?



- (A) Duas variáveis  $(x, y)$  ou  $(r, \theta)$ .  
 (B) As duas variáveis  $r$  e  $\theta$ .  
 (C) Uma única variável  $x$  ou  $y$ .  
 (D) Uma única variável  $x, y$  ou  $\theta$ .  
 (E) As duas variáveis  $x$  e  $y$ .

Resposta:

15. As equações de evolução dum sistema linear são:  
 $\dot{x} = -2x - y \quad \dot{y} = 2x$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

- (A) foco repulsivo.      (D) foco atrativo.  
 (B) nó repulsivo.      (E) ponto de sela.  
 (C) centro.

Resposta:

16. Um objeto descreve uma trajetória circular de raio 1 m; a velocidade aumenta em função do tempo  $t$ , de acordo com a expressão  $v = 4t^2$  (unidades SI). Determine a expressão para o módulo da aceleração.

- (A)  $\sqrt{16t^4 + 8t}$       (D)  $4t^2 + 8t$   
 (B)  $\sqrt{256t^8 + 64t^2}$       (E)  $8t$   
 (C)  $\sqrt{16t^4 + 64t^2}$

Resposta:

17. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = -r^3 + 2r^2 - r$ . Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

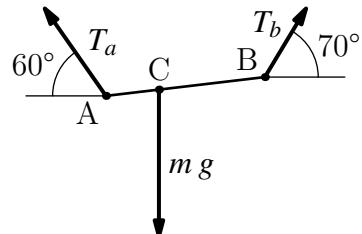
- (A) foco repulsivo      (D) ponto de sela  
 (B) nó repulsivo      (E) foco atrativo  
 (C) nó atrativo

Resposta:

## 2.2.2 Resolução

**Problema 1.** (a) A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre da barra. Como a barra está em equilíbrio, as somas das componentes  $x$  e  $y$  das três forças devem ser nulas:

$$\begin{aligned} T_a \cos(60^\circ) - T_b \cos(70^\circ) &= 0 \\ T_a \sin(60^\circ) + T_b \sin(70^\circ) - mg &= 0 \end{aligned}$$



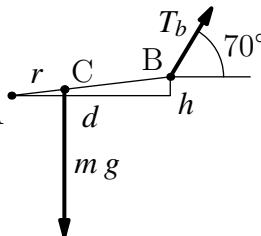
e a solução deste sistema é:

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{mg \cos(70^\circ)}{\sin(60^\circ) \cos(70^\circ) + \sin(70^\circ) \cos(70^\circ)} = 27.1 \text{ N} \\ T_b &= \frac{mg \cos(60^\circ)}{\sin(60^\circ) \cos(70^\circ) + \sin(70^\circ) \cos(70^\circ)} = 39.7 \text{ N} \end{aligned}$$

(b) A diferença de alturas entre os pontos A e B e a distância horizontal entre eles são (ver figura ao lado):

$$h = 4 \sin(60^\circ) - 3 \sin(70^\circ) = 0.6450 \text{ m} \quad d = \sqrt{6^2 - h^2} = 5.965 \text{ m}$$

A soma dos momentos das forças em relação ao ponto A deve ser nula e, como tal,



$$\left| \begin{matrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ 0 & -mg \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} d & h \\ T_b \cos(70^\circ) & T_b \sin(70^\circ) \end{matrix} \right| = -mg r \cos \theta + T_b (d \sin(70^\circ)) - h \cos(70^\circ) = 0$$

na qual  $r$  é a distância desde A até o centro de gravidade C e  $\theta$  é o ângulo que a barra faz com a horizontal. Substituindo os valores de  $m$ ,  $g$ ,  $T_b$  e  $\cos \theta = d/6$ ,

$$60.41r = 213.55 \implies r = 3.535 \text{ m}$$

**Problema 2.** (a) Introduz-se a variável auxiliar  $y = \dot{x}$  para tornar a equação diferencial de segunda ordem numa equação de primeira ordem. As equações de evolução do sistema dinâmico são então,

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = (x^2 - 3)y + 3x - x^3$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema das duas expressões nos lados direitos iguais a zero. No Maxima escreve-se

```
(%i1) e: [y, (x^2-3)*y+3*x-x^3]$
(%i2) p: solve(e);
[ [x=0, y=0], [x=-sqrt(3), y=0], [x=sqrt(3), y=0]]
```

Existem então 3 pontos de equilíbrio  $(x, y)$ :

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (-\sqrt{3}, 0) \quad P_3 = (\sqrt{3}, 0)$$

(b) a matriz jacobiana é

```
(%i3) j: jacobian(e, [x,y]);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2xy - 3x^2 + 3 & x^2 - 3 \end{bmatrix}$$

```

E os valores próprios das matrizes das aproximações lineares do sistema, na vizinhança dos 3 pontos de equilíbrio, são

```
(%i4) map (eigenvalues, makelist (subst(q,j), q, p));

$$\left[ \left[ \left[ \frac{-\sqrt{21}+3}{2}, \frac{\sqrt{21}-3}{2} \right], [1, 1] \right], [[-\sqrt{6}i, \sqrt{6}i], [1, 1]], [[-\sqrt{6}i, \sqrt{6}i], [1, 1]] \right]$$

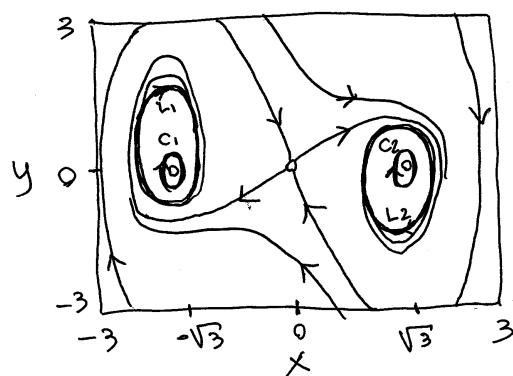
```

Como  $\sqrt{21}$  é maior que 3,  $P_1$  é ponto de sela e  $P_2$  e  $P_3$  parecem ser ambos centros. Os centros podem ser deformados em focos ou nós, devido aos termos não lineares, mas o retrato de fase corrobora que existem ciclos na vizinhança de  $P_2$  e  $P_3$  e, como tal, ambos são centros.

(c) O retrato de fase obtém-se com o comando:

```
(%i5) plotdf (e, [x, y], [x, -3, 3], [y, -3, 3])$
```

e traçando algumas curvas de evolução. A figura seguinte mostra as curvas mais importantes:



$C_1$  e  $C_2$  são dois dos ciclos que existem à volta de  $P_2$  e  $P_3$ . As duas curvas de evolução que saem do ponto de sela aproximam-se desses ciclos mas, como não se podem cruzar com eles, conclui-se que existem dois ciclos limite,  $L_1$  e  $L_2$  à volta de cada um dos pontos  $P_2$  e  $P_3$ .

(d) Existe um número infinito de ciclos, dentro dos dois ciclos limite  $L_1$  e  $L_2$  à volta de cada um dos pontos  $P_2$  e  $P_3$ .

### Perguntas

3. A

6. C

9. D

12. C

15. D

4. A

7. C

10. D

13. A

16. B

5. D

8. D

11. D

14. D

17. E

### 2.2.3 Cotações

#### Problema 1

- Equação da soma das componentes  $x$  das forças \_\_\_\_\_ 0.6
- Equação da soma das componentes  $y$  das forças \_\_\_\_\_ 0.6
- Obtenção dos valores das duas tensões \_\_\_\_\_ 0.8
- Determinação das coordenadas dos pontos A e B e ângulo da barra com a horizontal \_\_\_\_\_ 0.8
- Equação da soma dos momentos das forças \_\_\_\_\_ 0.4
- Obtenção da distância até o centro de gravidade \_\_\_\_\_ 0.8

#### Problema 2

- Equações de evolução \_\_\_\_\_ 0.4
- Obtenção dos três pontos de equilíbrio \_\_\_\_\_ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana e valores próprios \_\_\_\_\_ 0.8
- Caracterização dos três pontos de equilíbrio \_\_\_\_\_ 0.8
- Retrato de fase \_\_\_\_\_ 1.2
- Identificação dos ciclos \_\_\_\_\_ 0.4



# Bibliografia

- Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática*. Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.
- Arnold, V. I. (1987). *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir: Moscovo, Rússia.
- Banks, B. W. (2000). *Differential Equations with Graphical and Numerical Methods*. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.
- Beer, F. P., & Johnston Jr, E. R. (2006). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (7a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México, DF, México: International Thomson Editores.
- Borelli, R. L., & S, C. C. (1998). *Differential equations: a modeling perspective*. México, DF, México: John Wiley & Sons, Inc.
- Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. USA: Westview Press.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2004). *Differential equations. computing and modeling* (3a ed.). Pearson Education, Inc.: New Jersey, USA.
- Farlow, S. J. (1994). *An introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Fiedler-Ferrara, N., & Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução*. São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blücher.
- French, A. P. (1971). *Newtonian mechanics*. New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.
- Galilei, G. (1638). *Dialogue Concerning Two New Sciences*. Itália: Publicado em: [http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns\\_draft/](http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns_draft/). (Tradução de 1914,

- por H. Crew e A. de Salvio)
- Garcia, A. L. (2000). *Numerical methods for physics*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall.
- Gerthsen, C., Kneser, & Vogel, H. (1998). *Física* (2a ed.). Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gregory, R. D. (2006). *Classical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Guckenheimer, J., & Holmes, P. (2002). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag.
- Hand, L. N., & Finch, J. D. (1998). *Analytical mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- Kallaher, M. J. (Ed.). (1999). *Revolutions in Differential Equations. Exploring ODEs with Modern Technology*. The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA.
- Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (1996). *Classical Mechanics* (4a ed.). Essex, UK: Addison Wesley Longman.
- Kittel, C., Knight, W. D., & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. berkeley physics course, volume 1*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE*. Boston, MA, USA: Birkhaüser.
- Maxima Development Team. (2016). *Maxima Manual* (5.39.0 ed.).
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (1998). *Engineering mechanics: Dynamics* (4a ed.). New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física.
- Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied nonlinear dynamics*. Weinheim, Alemanha: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.
- Newton, I. (1687). *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian. (Tradução de J. R. Rodrigues, 2010)
- Redfern, D., Chandler, E., & Fell, R. N. (1997). *Macsyma ODE lab book*. Boston, MA, USA: Jones and Bartlett Publishers.
- Sanchez, D. A., Allen Jr., R. C., & Kyner, W. T. (1988). *Differential equations* (2a ed.). USA: Addison-Wesley.

- Solari, H. G., Natiello, M. A., & Mindlin, G. B. (1996). *Nonlinear dynamics*. Institute of Physics Publishing: Bristol, UK.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2009). *Vector analysis*. New York, NY, USA: Mc Graw-Hill.
- Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books.
- Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*. Sausalito, CA, USA: University Science Books.
- Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2004). *Classical dynamics of particles and systems* (5a ed.). Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.
- Villate, J. E. (2007). *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima*. Porto, Portugal: Edição do autor.
- Villate, J. E. (2016). *Dinâmica e sistemas dinâmicos* (4a ed.). Porto, Portugal: Edição do autor.