7 Sistemas dinâmicos

Problema 1
Uma bola com 0.150 kg é lançada verticalmente para cima, desde $y = 0$ (o eixo dos y aponta para cima, na vertical). Desprezando o atrito com o ar, a energia permanece constante.

(a) Represente o retrato de fase, para $y > 0$, mostrando 4 curvas de evolução diferentes (use o valor 9.8 m/s^2 para g). Para cada curva, explique o significado dos pontos em que a curva intersecta os eixos.

(b) Explique como seria, no retrato de fase da alínea anterior, a curva de evolução de uma bola largada em queda livre, que bate no chão sendo projetada novamente para cima.

(a) A equação de movimento da bola é

$$\ddot{y} = -9.8$$

E as duas equações de evolução são

$$\dot{y} = v \qquad \dot{v} = -9.8$$

O retrato de fase obtém-se com o seguinte comando

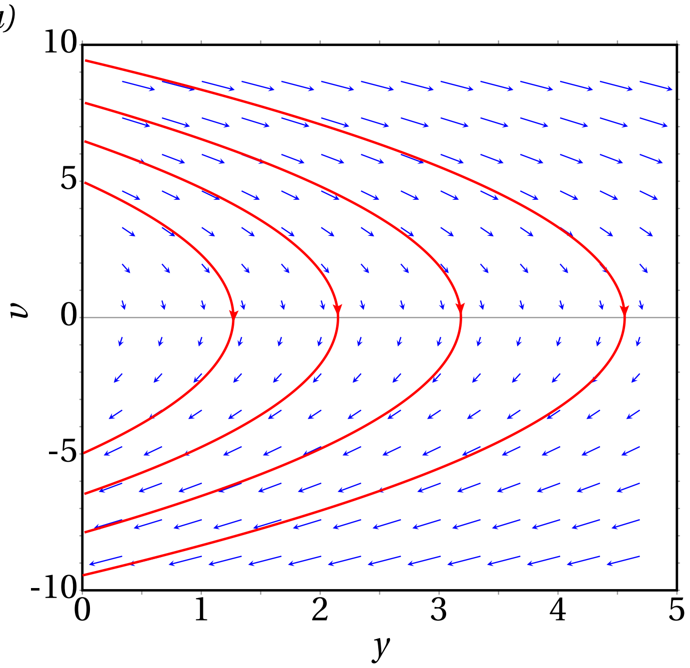
```
(%i1) plotdf ([v,-9.8], [y,v], [y,0,5], [v,-10,10]);
```

O gráfico obtido mostra-se na página seguinte.

As quatro curvas de evolução na figura foram obtidas entrando no menu de configuração, escrevendo “1 0” no campo “Trajectory at” e clicando na tecla “Enter” e o mesmo para os pontos “2 0”, “3 0” e “4 0”. Os intervalos para y e v foram escolhidos, após algumas tentativas, de forma a mostrar bem as quatro curvas, para valores positivos da altura y.

O ponto onde cada curva interseta o eixo y corresponde ao instante em que a bola atinge a sua altura máxima e a velocidade é nula. Os dois pontos onde a curva interseta o eixo v são o instante inicial em que a bola é lançada desde $y = 0$, com velocidade positiva, e o instante em que a bola cai regressando a $y = 0$, com velocidade negativa. Por exemplo, a curva mais à direta apresentada no retrato de fase corresponde a quando a bola é lançada desde $y = 0$ com velocidade aproximadamente 8.8 m/s, atingindo a altura máxima de 4 m e caindo novamente até $y = 0$ onde chega com velocidade igual a −8.8 m/s.

(a)



(b) Quando a curva de evolução chega até o ponto $y = 0$ com velocidade negativa (a bola bate no chão), a curva continua num arco elíptico no lado negativo de y, que corresponde à ação da força elástica enquanto a bola está em contacto com o chão, sendo deformada e recuperando logo a sua forma esférica inicial (oscilador harmónico simples, admitindo que não há perdas de energia durante a deformação). O arco elíptico descreve metade de uma elipse, terminando no ponto inicial da curva de evolução, com $y = 0$ e velocidade positiva e a curva repete-se indefinidamente. Quanto mais rígida for a bola, menor será o semieixo do arco elíptico no lado negativo do eixo y.

Problema 2
Em todos os problemas do capítulo 1, diga quais correspondem a sistemas autónomos ou não autónomos e conservativos ou não conservativos. Represente o retrato de fase do sistema do problema 6, mostrando a curva de evolução com as condições iniciais dadas.

Para determinar se um sistema com um grau de liberdade é ou não autónomo, há que conhecer a expressão da aceleração tangencial. No problema 1 essa expressão é desconhecida, mas nos restantes problemas a expressão de a_t é dada ou pode ser calculada. As respostas mostram que no problema 5, $a_\text{t} = 3\,t^2 - 2\,t - 2$ e no problema 11, $a_\text{t} = 15\,t - 124$. No problema 7, o gráfico mostra que $v^2 = b - m\,s$, onde b e m são constantes; derivando os dois lados dessa equação obtém-se a expressão da aceleração tangencial:

$$2\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -m \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -\frac{m}{2}$$

Como tal, há quatro problemas (2, 4, 5 e 11), em que a expressão da aceleração é uma função que depende do tempo. Isso implica que os sistemas nesses 4 problemas não são autónomos e, como tal, também não são conservativos.

Nos restantes 6 problemas (3, 6, 7, 8, 9 e 10), o respetivo sistema é autónomo, porque a expressão da aceleração (equação de movimento) não depende do tempo. Nesses 6 casos a equação de movimento, $a_\text{t} = f(s,v)$, escreve-se como o sistema de duas equações de evolução:

$$\dot{s} = v \qquad \dot{v} = f(s,v)$$

E a divergência da velocidade de fase será:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f(s,v)}{\partial v} = \frac{\partial f(s,v)}{\partial v}$$

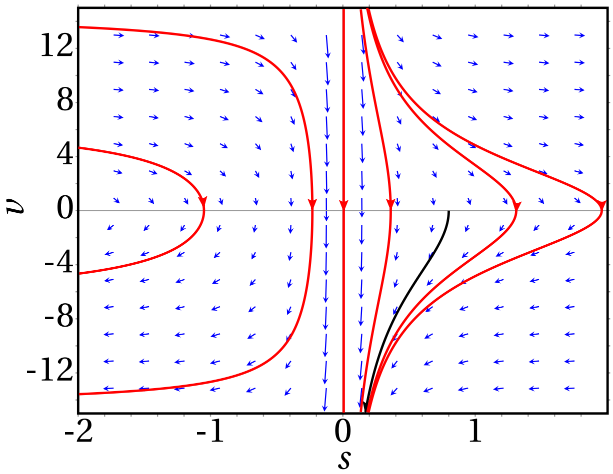
Unicamente no problema 10 a expressão da aceleração tangencial, $f(s,v)$, depende de v, ou seja, a divergência é diferente de zero e, como tal, o sistema não é conservativo.

Nos problemas 3, 6, 7, 8 e 9, o sistema é conservativo, porque a expressão $f(s,v)$ não depende realmente de v, ou seja, a divergência é nula.

O retrato de fase do problema 6 obtém-se com o seguinte comando

```
(%i2) plotdf ([v,-24/s^2], [s,v], [s,-2,2], [v,-15,15]);
```

E o resultado é o seguinte



A curva de evolução correspondente às condições iniciais dadas (s = 0.8 m e $v = 0$) foi obtida entrando no menu de configuração, mudando o campo “direction” para “forward” a cor no campo “fieldlines” para “black”, escrevendo “0.8 0”no campo “Trajectory at” e clicando na tecla “Enter”.

Problema 4
Uma partícula com massa de 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. Em unidades SI, a força tangencial sobre a partícula é dada pela expressão $F = x^3 - 4x$.

(a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Encontre as expressões para a energia potencial e a energia mecânica, em função da posição x e da velocidade v.

(c) Escreva as equações de evolução e diga que tipo de sistema dinâmico representam.

(d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.

(e) Determine se o sistema tem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas e, nos casos afirmativos represente uma dessas curvas no retrato de fase.

(a) Os pontos de equilíbrio são os pontos onde a velocidade e a aceleração $a = F/m$ são nulas, ou seja, onde a força é nula. Fatorizando a expressão da força (pode também usar-se o comando solve do Maxima):

$$F = x\,(x^2 - 4) = x\,(x-2)\,(x+2)$$

Conclui-se que há 3 pontos de equilíbrio, em $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$, com $v = 0$. No espaço de fase $(x,\, v)$, as coordenadas dos pontos de equilíbrio são $(-2,\, 0)$, $(0,\, 0)$ e $(2,\, 0)$.

(b) A energia potencial é igual a uma primitiva qualquer da expressão da força, multiplicada por -1

$$U(x) = -\int \left(x^3 - 4\,x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4} + 2\,x^2$$

E a expressão da energia mecânica é:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + U = \frac{v^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2\,x^2$$

(c) As duas equações de evolução são (unidades SI):

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = \frac{F}{m} = x^3 - 4\,x$$

Trata-se de um sistema dinâmico autónomo, porque o tempo não aparece explicitamente no lado direito das equações, e conservativo, porque a divergência da velocidade de fase é:

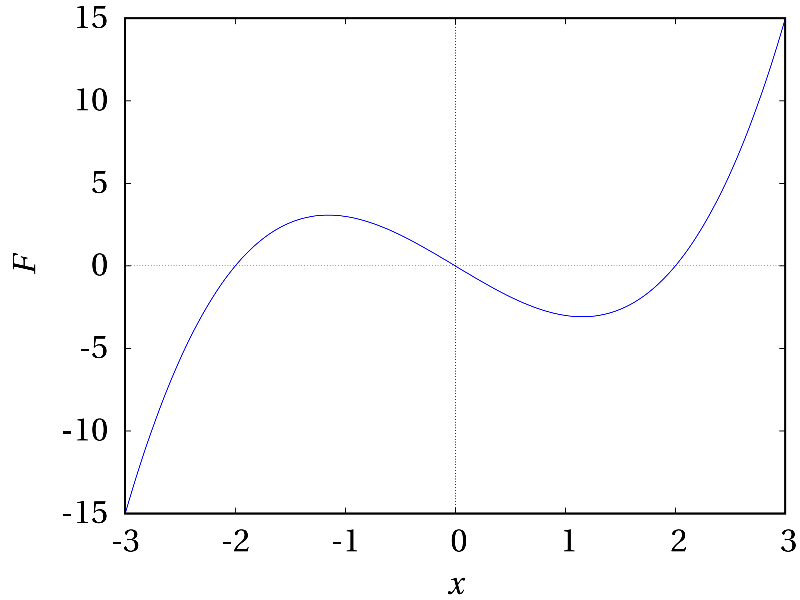
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^3 - 4\,x\right)}{\partial v} = 0$$

A função hamiltoniana é, neste caso, a própria energia mecânica.

(d) O gráfico da força, apresentado na página seguinte, foi obtido som o comando:

```
(%i3) plot2d (x^3-4*x, [x,-3,3], [ylabel,"F"]);
```

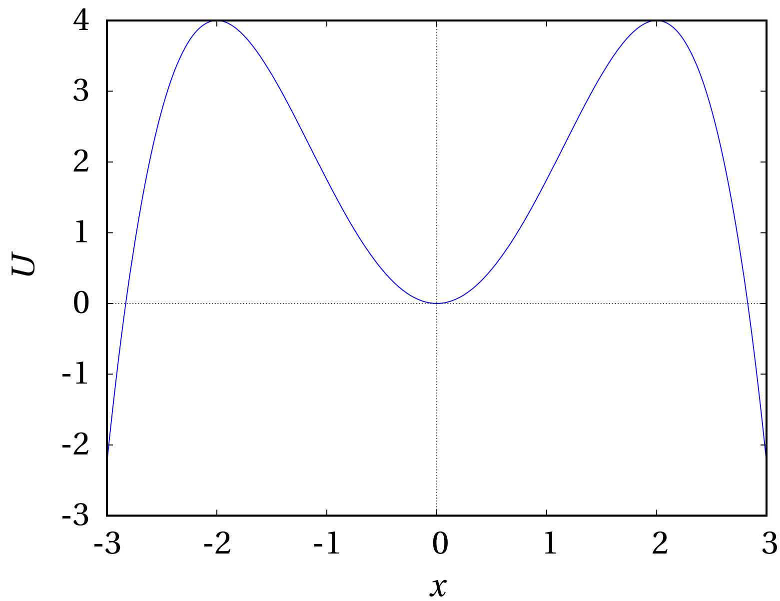
E mostra os três pontos de equilíbrio (raízes da função $F(x)$). Nos pontos $x = -2$ e $x = 2$, a força é negativa ao lado esquerdo do ponto e positiva ao lado direito; isso quer dizer que na vizinhança do ponto de equilíbrio, a força aponta no sentido oposto do ponto e, como tal, os pontos de equilíbrio $(-2,\, 0)$ e $(2,\, 0)$ no espaço de fase são instáveis.



No ponto $x = 0$, a força é positiva no lado esquerdo, ou seja, aponta no sentido de $x = 0$, e negativa no lado direito: também aponta no sentido de $x = 0$. Como tal, o ponto $(0, 0)$ no espaço de fase é ponto de equilíbrio estável.

(e) Os ciclos e órbitas encontram-se mais facilmente analisando o gráfico da energia potencial:

```
(%i4) plot2d (-x^4/4+2*x^2, [x,-3,3], [ylabel,"U"]);
```



Se a energia mecânica for maior que 0 e menor que 4, o sistema pode estar a oscilar à volta do ponto de equilíbrio em $x = 0$. Como tal, existem infinitos ciclos. Se a energia mecânica for exatamente igual a 4, há seis possíveis movimentos:

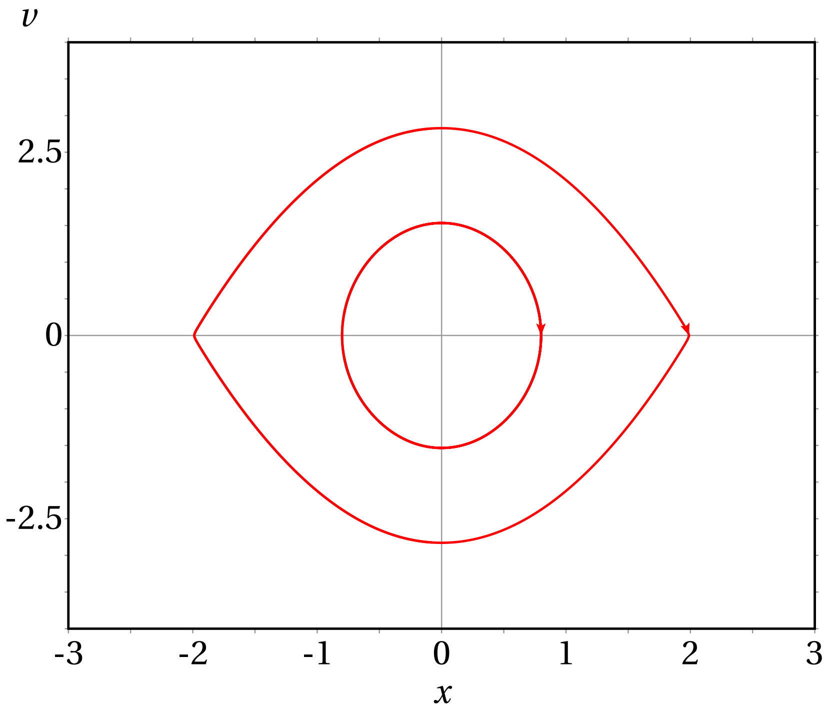
1. O sistema, inicialmente em $x < -2$, com velocidade positiva, aproxima-se assimptoticamente de $x = -2$.
2. O sistema, inicialmente em $x < -2$, com velocidade negativa, afasta-se até $x \to -\infty$. (em $t \to -\infty$ aproxima-se de $x = -2$).
3. O sistema, inicialmente em $x > 2$, com velocidade negativa, aproxima-se assimptoticamente de $x = 2$.
4. O sistema, inicialmente em $x > 2$, com velocidade positiva, afasta-se até $x \to \infty$ (em $t \to -\infty$ aproxima-se de $x = 2$).
5. O sistema, inicialmente em $-2 < x < 2$, com velocidade positiva, aproxima-se assimptoticamente de $x = 2$ (em $t \to -\infty$ aproxima-se de $x = -2$).
6. O sistema, inicialmente em $-2 < x < 2$, com velocidade negativa, aproxima-se assimptoticamente de $x = -2$ (em $t \to -\infty$ aproxima-se de $x = 2$).

As curvas de evolução correspondentes aos últimos dois movimentos na lista anterior formam uma órbita heteroclínica. Não existem órbitas homoclínicas; para que existissem seria necessário que houvesse um nível de energia mecânica que passasse por apenas um ponto de equilíbrio instável e por um ponto de retorno, mas isso não acontece no gráfico de U.

O retrato de fase obtém-se com o seguinte comando (a opção vectors é usada neste caso para que não seja mostrado o campo de direções):

```
(%i5) plotdf ([v,x^3-4*x], [x,v], [x,-3,3], [v,-3,3], [vectors,""]);
```

Se no instante inicial a partícula estiver na região $-2 < x < 2$ com velocidade zero, ficará oscilando em torno do ponto $x = 0$. Como tal, para mostrar um ciclo no gráfico produzido por plotdf basta clicar num ponto com coordenada $v \approx 0$ e x no intervalo]-2, 2[. Ou, com maior precisão, entra-se no menu de configuração e escrevem-se as coordenadas x e v do estado inicial, separadas por espaço; por exemplo: 0.8 0. A seguir clica-se na tecla “Enter” e aparecerá o respetivo ciclo no gráfico. A trajetória heteroclínica pode ser traçada usando como estado inicial um ponto próximo dum dos pontos de equilíbrio instável (-2, 0) ou (2, 0). No entanto, a instabilidade do ponto faz com que o método numérico usado por plotdf para traçar a trajetória seja instável. É necessário experimentar com diferentes valores do estado inicial; o resultado na figura seguinte foi obtido usando como estado inicial (1.99, 0).



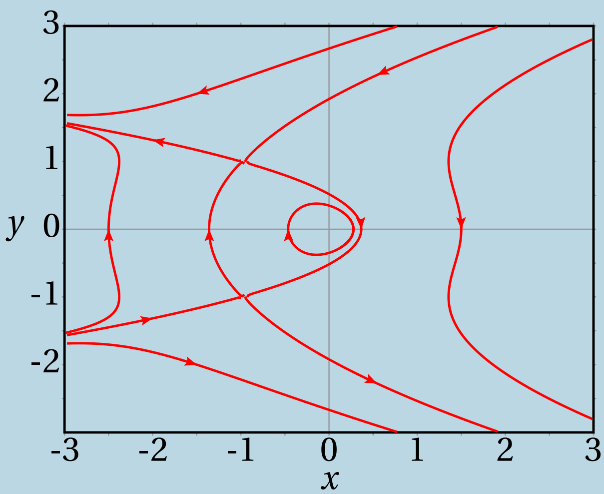
Problema 6

A figura mostra o retrato de fase do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = y - y^3 \qquad \dot{y} = -x - y^2$$

(*a*) Indique se o sistema tem algum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica.

(*b*) Explique porque a seguinte afirmação é errada: "*O retrato de fase inclui duas curvas de evolução parabólicas que se cruzam em dois pontos*".



(a) A primeira componente da velocidade de fase, $y - y^3$, é nula quando y for igual a 0, 1 ou −1. Existem então unicamente 3 pontos de equilíbrio, (0, 0), (−1, 1) e (−1, −1), que aparecem todos na figura e, como tal, as curvas de evolução importantes já estão todas na figura. A figura mostra que não existe nenhuma órbita homoclínica, existem infinitos ciclos em torno da origem e uma órbita heteroclínica entre os pontos (−1, 1) e (−1, −1).

(b) As duas parábolas são realmente 2 pontos de equilíbrio e 6 curvas de evolução diferentes, que se aproximam assimptoticamente ou se afastam desses dois pontos, sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se.

Problema 9

A equação de movimento de um pêndulo simples é (problema 6 do capítulo 6)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

As variáveis de estado são o ângulo com a vertical, θ e a derivada desse ângulo, ω.

(a) Escreva as equações de evolução do sistema.

(b) Determine a função hamiltoniana $H(\theta, \omega)$ a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \qquad \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

(c) Analisando o gráfico da energia potencial (função hamiltoniana com $\omega = 0$), demostre que o sistema tem muitas órbitas heteroclínicas e ciclos mas nenhuma órbita homoclínica.

(a) Introduzindo a velocidade angular ω, a equação de movimento transforma-se num sistema de duas equações de primeira ordem

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

(b) Substituindo as equações de evolução nas equações de Hamilton obtém-se

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial \omega} \qquad \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

A primeira equação implica que H é igual a $\omega^2/2$, mais uma função f que depende de θ. Derivando essa expressão em ordem a θ e substituindo na segunda equação acima, obtém-se

$$\frac{g}{l}\sin\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} \quad\Longrightarrow\quad f = -\frac{g}{l}\cos\theta$$

e a função hamiltoniana é

$$H(\theta,\omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\theta$$

observe-se que é igual à energia mecânica E_m, dividida pelo momento de inércia $m\,l^2$.

(c) A energia potencial é igual a uma constante negativa vezes $\cos\theta$. Assim sendo, o seu gráfico tem a mesma forma do gráfico de $-\cos\theta$, mas oscila entre $-g/l$ e g/l, em vez de -1 e 1. O gráfico tem mínimos (pontos de equilíbrio estável) em 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$,... e pontos máximos (pontos de equilíbrio instável) em $\pm\pi$, $\pm 3\pi$,... Qualquer valor de H entre $-g/l$ e g/l produz um segmento horizontal que corta o gráfico de U em dois pontos e, assim sendo, corresponde a um ciclo. A recta horizontal $H = g/l$ passa por todos os pontos máximos de U e, portanto, corresponde a uma órbita heteroclínica entre $-\pi$ e π, outra órbita heteroclínica entre 3π e 5π, etc. Não existem órbitas homoclínicas porque qualquer segmento na reta $H = g/l$ começa e termina em dois pontos máximos diferentes e não interseta a curva U em nenhum outro ponto.