

## 8 Mecânica lagrangiana

### Problema 3

Uma partícula com massa  $m = 2 \text{ kg}$  desloca-se sobre uma calha parabólica vertical com equação  $y = x^2$ , onde  $x$  é medida na horizontal e  $y$  na vertical (ambas em metros). Assim sendo, o movimento da partícula tem apenas um grau de liberdade, que pode ser escolhido como a coordenada  $x$ .

- (a) Escreva a equação da energia cinética em função de  $x$ .
- (b) Escreva a equação da energia potencial gravítica em função de  $x$  (use o valor  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ).
- (c) Admitindo que sobre a partícula não atua nenhuma força não conservativa, use a equação de Lagrange para encontrar a sua equação de movimento.
- (d) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema no espaço de fase, e determine se são estáveis ou instáveis.

(a) A relação entre  $\dot{y}$  e  $\dot{x}$  encontra-se derivando a equação da calha  $y = x^2$

$$\dot{y} = 2 x \dot{x}$$

Em função da coordenada generalizada  $x$  e da velocidade generalizada  $\dot{x}$ , a energia cinética da partícula é:

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{x}^2 (4 x^2 + 1)$$

(b) Arbitrando energia potencial gravítica nula em  $y = 0$ , A energia potencial gravítica da partícula é:

$$U_g = m g y = 19.6 x^2$$

(c) A equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U_g}{\partial x} = 0$$

$$\ddot{x} (8x^2 + 2) + 16\dot{x}^2 x - 8\dot{x}^2 x + 39.2x = 0$$

e a equação de movimento:

$$\ddot{x} = - \frac{x (4\dot{x}^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = - \frac{x (4v^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

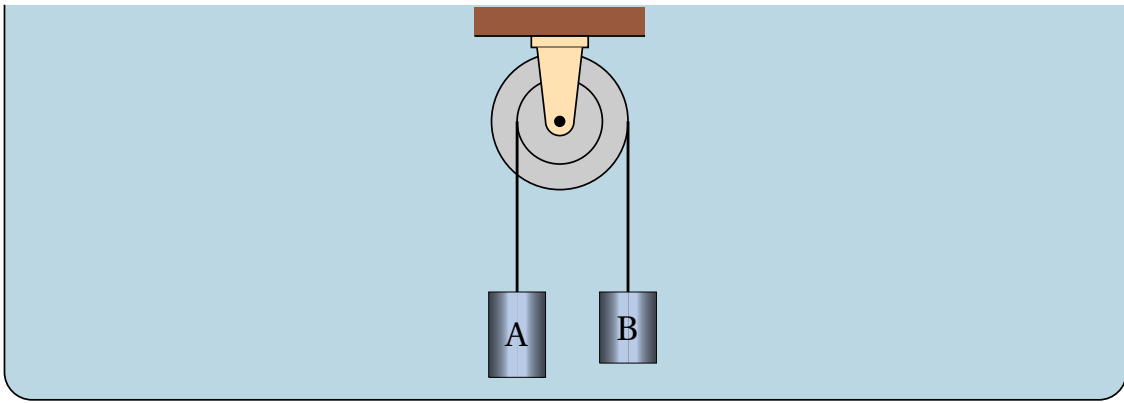
$$\begin{cases} v = 0 \\ -\frac{x (4v^2 + 19.6)}{4x^2 + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ou seja, o único ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase, que corresponde a quando a partícula se encontra em repouso, no ponto mais baixo da calha. Nessa situação, se a partícula fosse afastada do ponto mais baixo da calha, a sua tendência será regressar a esse ponto; como tal, trata-se de um ponto de equilíbrio estável. Pode também traçar-se o retrato de fase correspondente às equações de evolução e conferir que a origem é ponto de equilíbrio estável, com infinitos ciclos à sua volta.

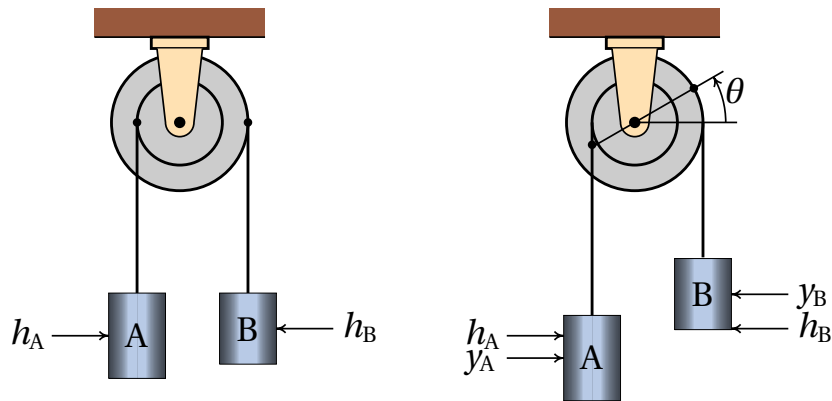
#### Problema 4

O cilindro A na figura tem massa de 36 gramas, o cilindro B tem massa de 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é  $4.43 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda.

(a) Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo. (b) Determine o valor das tensões nos dois fios.



(a) Se  $h_A$  e  $h_B$  são as alturas dos centros de massa dos dois cilindros, num instante inicial, como mostra o lado esquerdo da figura seguinte,



num instante posterior a roldana terá rodado um ângulo  $\theta$ , que se for no sentido contrário aos ponteiros do relógio, como no lado direito da figura, faz diminuir a altura do cilindro A num comprimento igual ao arco de círculo com 5 cm e ângulo  $\theta$ , e a altura do cilindro B aumenta uma distância igual ao arco de círculo de 8 cm e ângulo  $\theta$ . Como tal, num instante qualquer as alturas dos dois cilindros serão

$$y_A = h_A - 0.05\theta \quad y_B = h_B + 0.08\theta \quad (8.1)$$

Onde  $h_A$  e  $h_B$  são duas constantes (alturas iniciais). Como tal, o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo  $\theta$ . As expressões para as velocidades e acelerações dos cilindros são então:

$$\begin{aligned} v_A &= -0.05\omega & v_B &= 0.08\omega \\ a_A &= -0.05\alpha & a_B &= 0.08\alpha \end{aligned}$$

onde  $\omega = \dot{\theta}$  é a velocidade angular da roldana e  $\alpha = \ddot{\theta}$  é a sua aceleração

angular. A expressão da energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{0.036}{2}(-0.05\omega)^2 + \frac{0.024}{2}(0.08\omega)^2 + \frac{4.43 \times 10^{-7}}{2}\omega^2$$

$$= 1.220215 \times 10^{-4} \omega^2$$

E a energia potencial gravítica, excluindo a energia potencial da roldana e outros termos constantes, é:

$$U = -0.036 \times 9.8 \times 0.05\theta + 0.024 \times 9.8 \times 0.08\theta$$

$$= 1.176 \times 10^{-3} \theta$$

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se a aceleração angular:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$2.44043 \times 10^{-4} \alpha - 0 + 1.176 \times 10^{-3} = 0$$

$$\alpha = -4.8188 \text{ s}^{-2}$$

O sinal negativo indica que a roldana acelera no sentido dos ponteiros do relógio. Como tal, a aceleração do bloco A é para cima e a do bloco B é para baixo, e os seus valores absolutos são:

$$a_A = 0.05 \times 4.8188 = 0.2409 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_B = 0.08 \times 4.8188 = 0.3855 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(b) Para determinar as tensões nos fios, faz-se de conta que as alturas dos cilindros podem variar independentemente do ângulo que a roldana rode. Ou seja, o sistema passa a ter três graus de liberdade,  $\theta$ ,  $y_A$  e  $y_B$ , com três equações de Lagrange. Nessas 3 equações de Lagrange introduzem-se dois multiplicadores de Lagrange  $\lambda_A$  e  $\lambda_B$ , que correspondem às duas condições nas equações 8.1 da alínea anterior, que devem ser escritas como funções com valor constante:

$$f_A(y_A, \theta) = y_A + 0.05\theta \quad (8.2)$$

$$f_B(y_B, \theta) = y_B - 0.08\theta$$

A expressão da energia cinética do sistema deve ser escrita agora em função das três velocidades  $\omega$ ,  $v_A$  e  $v_B$ , consideradas independentes entre si

$$E_c = 0.018 v_A^2 + 0.012 v_B^2 + 2.215 \times 10^{-7} \omega^2$$

E a energia potencial gravítica, excluindo a energia potencial da roldana que permanece constante, é:

$$U = 0.036 \times 9.8 y_A + 0.024 \times 9.8 y_B = 0.3528 y_A + 0.2352 y_B$$

A equação de Lagrange associada a  $y_A$  e  $v_A$  é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial v_A} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_A} + \frac{\partial U}{\partial y_A} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial y_A} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial y_A} = 0$$

$$0.036 a_A + 0.3528 - \lambda_A = 0$$

A equação associada a  $y_B$  e  $v_B$  é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial v_B} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_B} + \frac{\partial U}{\partial y_B} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial y_B} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial y_B} = 0$$

$$0.024 a_B + 0.2352 - \lambda_B = 0$$

E a equação associada a  $\theta$  e  $\omega$  é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial \theta} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial \theta} = 0$$

$$4.43 \times 10^{-7} \alpha - 0.05 \lambda_A + 0.08 \lambda_B = 0$$

Estas três equações de Lagrange devem ser resolvidas junto com as duas expressões obtidas derivando duas vezes as funções constantes  $f_A$  e  $f_B$  (equações 8.2):

$$a_A + 0.05 \alpha = 0$$

$$a_B - 0.08 \alpha = 0$$

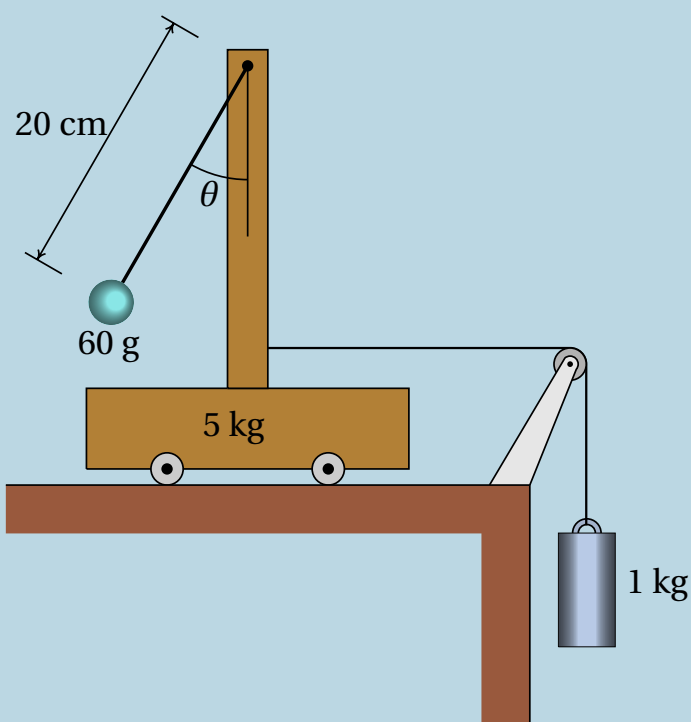
No Maxima, usa-se o comando **solve**. Observe-se que os dois multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_A$  e  $\lambda_B$ , são as próprias tensões nos dois fios,  $T_A$  e  $T_B$

```
(%i1) float(solve([0.036*aA+0.3528-TA, 0.024*aB+0.2352-TB,
4.43e-7*a-0.05*TA+0.08*TB, aA+0.05*a, aB-0.08*a]));
(%o1) [[a=-4.819, TB=0.2259, aB=-0.3855, TA=0.3615, aA=0.2409]]
```

Que corrobora os resultados obtidos na alínea anterior para as acelerações e mostra que a tensão no fio ligado ao cilindro A é 0.3615 N e a tensão no fio ligado ao cilindro B é 0.2259 N. Observe-se que, apesar de que a tensão  $T_A$  é maior que  $T_B$ , a roldana roda no sentido dos ponteiros do relógio, porque o momento produzido por  $T_B$  é maior do que o produzido por  $T_A$ .

### Problema 5

No sistema representado na figura, a massa das rodas e da roldana e o atrito nos seus eixos podem ser desprezados. (a) Determine as expressões para as energias cinética e potencial do sistema, em função do ângulo  $\theta$  e do deslocamento horizontal  $x$  do carrinho. (b) Determine as expressões da aceleração do carrinho e da aceleração angular  $\ddot{\theta}$ . (c) Encontre o valor do ângulo  $\theta$  na posição de equilíbrio do pêndulo e diga se o equilíbrio é estável ou instável. (d) Determine o valor da aceleração do carrinho, no caso em que o pêndulo permaneça na posição de equilíbrio.



(a) Este sistema tem dois graus de liberdade, o ângulo  $\theta$  de oscilação do pêndulo e a posição horizontal  $x$  do carrinho. As velocidades do carrinho e do cilindro são ambas iguais a  $\dot{x}$ . O vetor velocidade da esfera é a soma do vetor velocidade do carrinho, mais o vetor velocidade de rotação da

esfera em relação ao ponto de contacto do fio com o poste; escolhendo o eixo  $x$  horizontal e para a direita e o eixo  $y$  vertical e para cima, o vetor velocidade da esfera é:

$$\vec{v}_e = (\dot{x} - 0.2\dot{\theta} \cos\theta) \hat{i} + 0.2\dot{\theta} \sin\theta \hat{j}$$

Representando no Maxima o ângulo  $\theta$  pela variável  $q$ ,  $\dot{\theta}$  pela variável  $w$  e  $\dot{x}$  pela variável  $v$

```
(%i2) ve: [v-0.2*w*cos(q), 0.2*w*sin(q)]$
```

A energia cinética do sistema é a soma das energias cinéticas do carrinho, do cilindro e da esfera

```
(%i3) Ec: float(expand(trigsimp(5*v^2/2 + 1*v^2/2 + 0.06*ve.ve/2)));
(%o3)      0.0012 w^2 - 0.012 cos(q) v w + 3.03 v^2
```

E as energias potenciais que não permanecem constantes são as energias potenciais gravíticas da esfera e do cilindro; a energia potencial do sistema é igual à soma dessas duas energias

```
(%i4) U: -1*9.8*x - 0.06*9.8*0.2*cos(q);
(%o4)      -9.8 x - 0.1176 cos q
```

(b) Antes de usar as equações de Lagrange, definem-se as derivadas das duas coordenadas e duas velocidades generalizadas, em ordem ao tempo

```
(%i5) gradef (x, t, v)$
(%i6) gradef (q, t, w)$
(%i7) gradef (v, t, a)$
(%i8) gradef (w, t, f)$
```

As duas equações de Lagrange são

```
(%i9) eq1: diff (diff(Ec,v),t) - diff(Ec,x) + diff(U,x) = 0;
(%o9)      0.012 sin(q) w^2 - 0.012 f cos(q) + 6.06 a - 9.8 = 0
(%i10) eq2: diff (diff(Ec,w),t) - diff(Ec,q) + diff(U,q) = 0;
(%o10)      0.1176 sin(q) - 0.012 a cos(q) + 0.0024 f = 0
```

E as expressões para a aceleração do carrinho,  $a$ , e a aceleração angular do pêndulo,  $f$ , são

```
(%i11) sol: trigsimp (solve( [eq1,eq2], [a,f]))$
(%i12) [a,f]: subst (sol, [a,f]);
(%o12) 
$$\left[ \begin{array}{l} \frac{3 \sin(q) w^2 + 147 \cos(q) \sin(q) - 2450}{15 \cos^2(q) - 1515}, \\ \frac{3 \cos(q) \sin(q) w^2 + 14847 \sin(q) - 2450 \cos(q)}{3 \cos^2(q) - 303} \end{array} \right]$$

```

(c) Este sistema nunca chega a estar em equilíbrio porque o cilindro desce sem parar. No entanto, o pêndulo sim pode ficar em equilíbrio. As duas equações de evolução só do pêndulo são

$$\frac{dq}{dt} = w \quad \frac{dw}{dt} = f$$

onde  $f$  é a expressão obtida em (%o12). As condições de equilíbrio do pêndulo são então  $w=0$  e  $f=0$ .

```
(%i13) solve (subst (w=0, f=0));
(%o13) 
$$\left[ \sin(q) = \frac{50 \cos(q)}{303} \right]$$

```

`solve` não consegue resolver problemas com infinitas soluções mas como só interessa a solução no primeiro quadrante, o ângulo da posição de equilíbrio, em graus, é

```
(%i14) float (180*atan (50/303)/%pi);
(%o14) 9.37
```

Para determinar a estabilidade desse ponto de equilíbrio, calcula-se o valor da derivada de  $f$  no ponto de equilíbrio.

```
(%i15) subst ([w=0, q=atan(50/303)], diff (f, q));
(%o15) 
$$-\frac{4994309^{\frac{3}{2}}}{28300200}$$

```

este resultado negativo implica que o ponto de equilíbrio é estável.



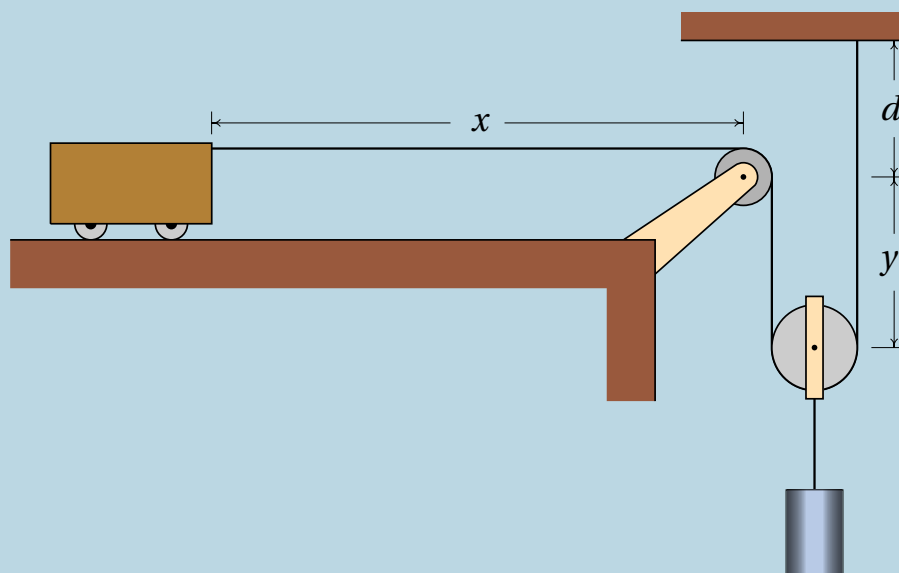
**Problema 6**

A roldana fixa no sistema da figura tem massa  $m$  e a roldana móvel tem massa  $2m$  (ambas podem ser consideradas discos uniformes). A massa do carrinho é  $20m$  e a massa do cilindro mais o suporte que o liga à roldana móvel é  $8m$ . Admita que a massa do fio e das rodas do carrinho, a força de atrito cinético nos eixos das roldanas e das rodas do carrinho e a resistência do ar são desprezáveis.

- (a) Mostre que, em função da altura  $y$  que o cilindro desce, as energias cinética e potencial do sistema são

$$E_c = \frac{93}{2} m \dot{y}^2 \quad U = -10 m g y$$

- (b) Determine o valor das acelerações do cilindro e do carrinho.



- (a) O comprimento constante do fio implica  $x + 2y$  constante e, como tal, a relação entre as velocidades do carrinho,  $v_x = \dot{x}$ , e do cilindro,  $v_y = \dot{y}$ , é

$$v_x = -2 v_y$$

A energia cinética do sistema é a soma das energias de translação do carrinho, do cilindro e da roldana móvel, mais as energias de rotação das duas roldanas.

$$v_x = -2 v_y$$

$$E_c = 20 m v_x^2 / 2 + (m r_1^2 / 2) * (v_x / r_1)^2 / 2 +$$

$$\begin{aligned}
 & (2*m*r^2/2)*(v_y/r)^2/2 + 2*m*v_y^2/2 + 8*m*v_y^2/2; \\
 (\%o17) \quad & \frac{93 m v_y^2}{2}
 \end{aligned}$$

A única energia potencial que está a mudar é a energia potencial gravítica do cilindro mais a roldana móvel. O peso total desses dois objetos é  $10 m$  e, ignorando termos constantes, a energia potencial do sistema é

$$(\%i18) \quad U: -10*m*g*y$$

(b) A aceleração do cilindro,  $a_y = \dot{v}_y$ , encontra-se a partir da equação de Lagrange

```

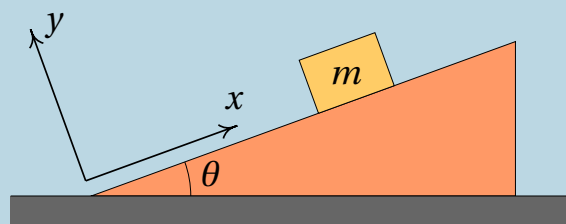
(%i19) gradef (y,t,v_y)$
(%i20) gradef (v_y,t,a_y)$
(%i21) eq: diff (diff (Ec,v_y), t) - diff (Ec,y) + diff (U,y) = 0$
(%i22) solve (eq,a_y);
(%o22)  [ a_y = 10 g / 93 ]
(%i23) subst (g=9.8, %);
(%o23)  [ a_y = 1.054 ]

```

O valor absoluto da aceleração do carrinho,  $a_x = \dot{v}_x$ , é o dobro, ou seja,  $|a_x| = 20 g/93 = 2.108 \text{ m/s}^2$ .

### Problema 7

Um bloco de massa  $m$  desce um plano inclinado que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e plano inclinado é  $\mu_c$ . Usando a equação de Lagrange com um multiplicador, encontre as expressões para a reação normal do plano sobre o bloco e da aceleração do bloco,  $\ddot{x}$  (despreze a resistência do ar).



Fazendo de conta que o bloco não mantém o contacto com o plano inclinado, há duas coordenadas generalizadas,  $x$  e  $y$ . A equação da restrição que faz com que o bloco esteja sempre em contacto com o plano inclinado é:

$$y = 0$$

A energia cinética do bloco é

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

A altura do bloco, em relação à mesa é

$$h = x \sin \theta + y \cos \theta$$

e a energia potencial gravítica do bloco é

$$U = m g (x \sin \theta + y \cos \theta)$$

As duas componentes da força generalizada são  $\vec{F}_a \cdot \partial \vec{r} / \partial x$  e  $\vec{F}_a \cdot \partial \vec{r} / \partial y$ , onde  $\vec{F}_a = \mu_c R_n \hat{i}$  é a força de atrito cinético e  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$  é o vetor posição do bloco

$$Q_x = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{i} = \mu_c R_n \quad Q_y = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

Introduz-se um multiplicador de Lagrange  $\lambda$  e as duas equações de Lagrange são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial y}{\partial x} &= Q_x \\ \Rightarrow m(\ddot{x} + g \sin \theta) &= \mu_c R_n \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial y}{\partial y} &= Q_y \\ \Rightarrow m(\ddot{y} + g \cos \theta) - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

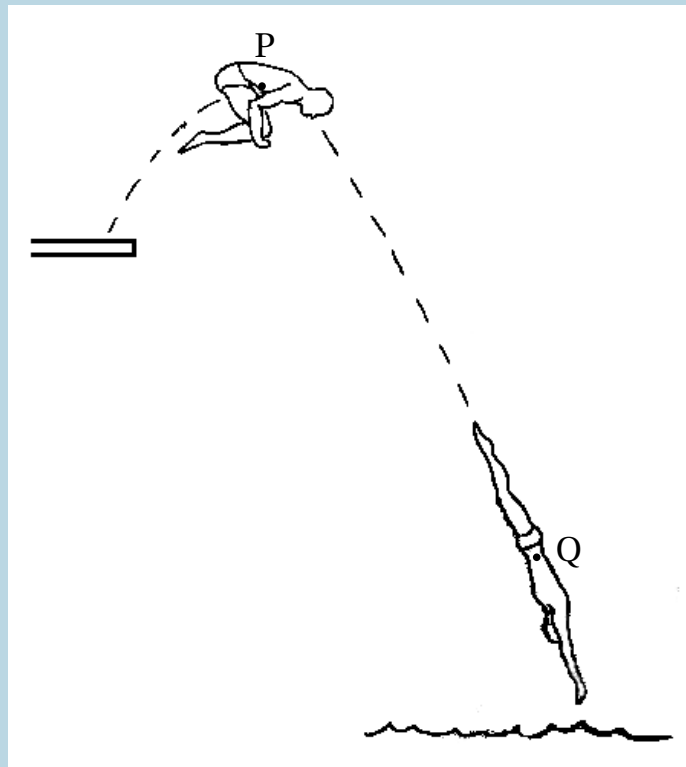
As componentes da força de ligação,  $\lambda \frac{\partial y}{\partial x} = 0$  e  $\lambda \frac{\partial y}{\partial y} = \lambda$ , são as componentes da reação normal. Ou seja, o multiplicador de Lagrange é a reação normal:  $\lambda = R_n$ . Substituindo  $\ddot{y} = 0$  nas equações de Lagrange, obtém-se

$$R_n = m g \cos \theta \quad \ddot{x} = (\mu_c \cos \theta - \sin \theta) g$$

**Problema 10**

O saltador na figura encolhe o corpo no ponto P, para rodar mais rapidamente, e estende-o novamente em Q, para reduzir a rotação na entrada para a água. As alterações da velocidade angular são consequência da alteração do momento de inércia.

- Se o momento de inércia do saltador em relação ao centro de massa é  $I$ , que depende do tempo, escreva as expressões para as suas energias cinética e potencial em função da posição  $(x, y)$  do centro de massa e do ângulo de rotação  $\theta$ .
- Usando a equação de Lagrange para  $\theta$ , demonstre que o **momento angular**,  $L = I\dot{\theta}$ , permanece constante.
- Se no ponto P mais alto da trajetória o momento de inércia é  $3.28 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  e a velocidade angular  $\dot{\theta} = 4 \text{ s}^{-1}$  e no ponto Q o momento de inércia é  $28.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , determine a velocidade angular do saltador no ponto Q.



(a) A velocidade do centro de massa é  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  e a velocidade angular é  $\dot{\theta}$ . A energia cinética do saltador é então

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

e a sua energia potencial gravítica é

$$U = m g y$$

(b) Como nenhuma das duas energias depende explicitamente de  $\theta$ , as suas derivadas parciais em ordem a  $\theta$ , são nulas e a equação de Lagrange para  $\theta$  é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

Que é equivalente a dizer que a função

$$L = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}$$

permanece constante em qualquer tempo  $t$ . Derivando a energia cinética em ordem a  $\dot{\theta}$  obtém-se a expressão do momento angular

$$L = I \dot{\theta}$$

Como tal, quando o saltador encolhe o corpo, diminuindo o valor de  $I$ , a velocidade angular  $\dot{\theta}$  terá de aumentar.

(c) A conservação do momento angular implica

$$I_1 \dot{\theta}_1 = I_2 \dot{\theta}_2$$

e substituindo os valores dados

$$\dot{\theta}_2 = \frac{I_1 \dot{\theta}_1}{I_2} = \frac{3.28 \times 4}{28.2} = 0.465 \text{ s}^{-1}$$