Teoría de Control Moderno

Guias de Laboratorio

Autores

Galo Guzmán
galof.guzman@ucuenca.edu.ec

Pablo Andrés Barbecho Bautista
pablo.barbecho@ucuenca.edu.ec

Esta guía presenta una serie de prácticas diseñadas para llevar a cabo durante las horas de APE, con el propósito de reforzar los conocimientos adquiridos en la asignatura. Cada práctica incluye los pasos necesarios para abordar los retos planteados.

Cuenca, Marzo 2024

Tabla de Contenidos

Taller 8 - Compensador en adelanto

1.1 Objetivos

- Aplicar los conocimientos presentados durante las sesiones de ACD.

1.2 Antecedentes

Un compensador en adelanto es un dispositivo o un algoritmo utilizado en sistemas de control para mejorar la estabilidad y la rapidez de la respuesta de un sistema. Su función principal es ajustar la fase del sistema para aumentar el margen de fase y, por ende, mejorar la estabilidad y reducir el tiempo de establecimiento. Esto se logra introduciendo un adelanto de fase en la respuesta del sistema.

La implementación práctica de un compensador en adelanto puede realizarse mediante componentes electrónicos en un circuito analógico, como resistencias y condensadores, o mediante algoritmos en sistemas de control digital. Este tipo de compensación es común en aplicaciones donde se requiere un rendimiento mejorado, como en sistemas de control de motores, robótica y aeronáutica.

En esta práctica, se propone diseñar un compensador para el modelo de un motor *dc*. Para lograrlo, es esencial recordar el modelo de este tipo de motor, ilustrado en la figura 1.1. Este modelo, que se abordó detalladamente en las sesiones teóricas, se define de la siguiente manera:

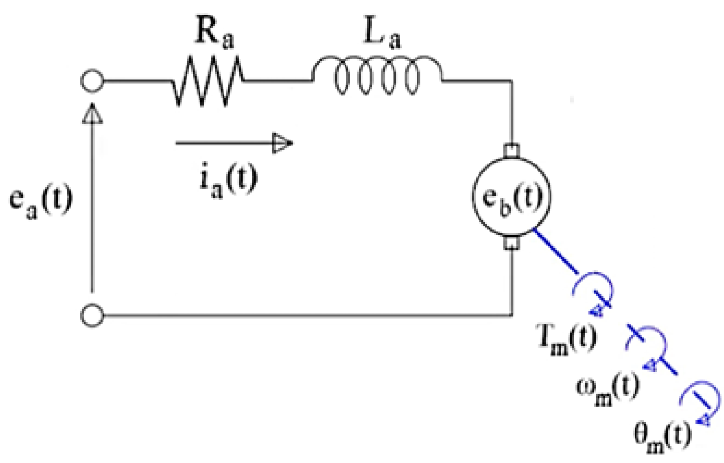

Figure 1.1: Modelo de un motor *dc*

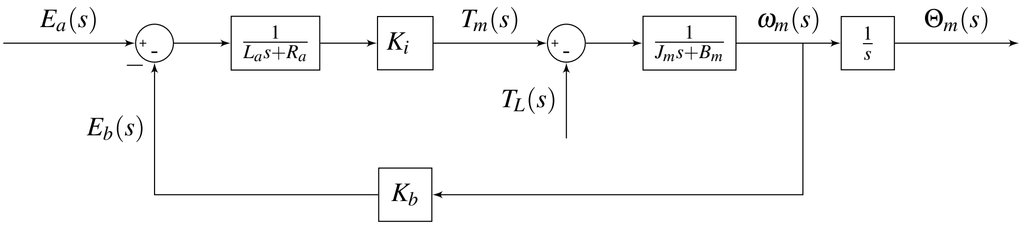

Figure 1.2: Diagrama de bloques - Motor *dc*.

$$\frac{\omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_i}{L_a J_m}}{s^2 + \left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a}\right)s + \frac{R_a B_m + K_i K_b}{L_a J_m}} \tag{1.1}$$

La figura 1.2 muestra diagrama de bloques del modelo del motor propuesto y la ecuación 1.1 es su respectiva función de transferencia, la cual representa la velocidad angular ω_m en función del voltaje de armadura E_a.

1.3 Desarrollo

Considerando el modelo y los parámetros mencionados anteriormente, se propone diseñar un compensador en adelanto que cumpla con los siguientes requisitos: $M_p = 10\%$, $t_{ss} = 1s$.

$$\begin{aligned}
R_a &= 0.635\Omega \\
L_a &= 0.0883H \\
K_i &= 9.43mNm/A \\
K_b &= 1010rpm/V \\
J_m &= 330Kg/m^2 \\
B_m &= 1 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Table 1.1: Características del motor *dc*

1.3.1 Implementación y análisis del modelo del motor *dc*

Al reemplazar los parámetros en la ecuación 1.1, se obtiene la función de transferencia del motor, mostrada en la ecuación 1.2, la cual corresponde a un modelo de segundo orden, por lo que no tendrá ceros y tendrá dos polos.

$$G(s) = \frac{0.0003236}{s^2 + 7.191s + 0.3269} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= -7.1457 \\
s_2 &= -0.0457
\end{aligned}$$

En la figura 1.3 se muestra la respuesta transitoria del sistema, con el diagrama de polos y ceros.

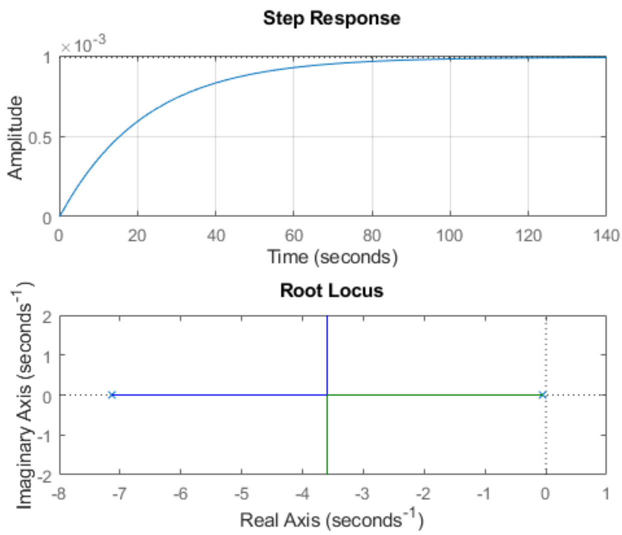

Figure 1.3: Respuesta transitoria del motor *dc*

Ejercicio 1.1 Escriba el código necesario en MATLAB para obtener el modelo del motor *dc* en función de sus parámetros y replicar la gráfica 1.3 con la respuesta al escalón y lugar de las raíces. ■

1.3.2 Compensación del modelo

Ahora, considerando las condiciones impuestas para el diseño $M_p = 10\%$, $t_{ss} = 1s$, se procede a calcular los valores de ζ y ω_n con el objetivo de encontrar la función de transferencia que cumpla con dichas condiciones. Para esto se utiliza las siguientes ecuaciones:

$$\zeta = \frac{\ln(1/M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(1/M_p)^2}}$$

$$\omega_n = \frac{4}{t_{ss}\zeta}$$

$$\zeta = 0.5912,\ \omega_n = 6.7664$$

Partiendo de la forma estándar de un sistema de segundo orden, formamos la ecuación característica a partir de los valores calculados de ζ y ω_n que consideran las condiciones impuestas:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s^2 + 8s + 45.7844 = 0$$

Encontramos las raíces de la ecuación característica que contiene los polos que cumplen con los requisitos impuestos (polos objetivo).

$$s_{d1,2} = -4 \pm j5.4575$$

R Compare los polos del sistema con los de la nueva ecuación característica, tome en cuenta estas diferencias.

Ejercicio 1.2 Encuentre los polos objetivo usando MATLAB, para esto calcule los valores de ζ y ω_n, forme la ecuación característica y encuentre sus raices. Intente replicar la siguiente gráfica:

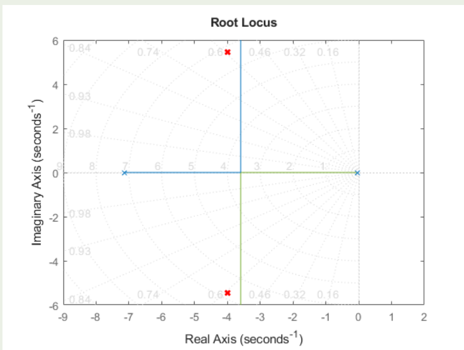

Figure 1.4: Polos del proceso original y polos de la respuesta deseada.

Analice la gráfica y comente sus observaciones.

1.3.3 Diseño del compensador

Para alcanzar el comportamiento deseado del sistema, se procederá a implementar un compensador en adelanto (método 2). Es decir, se colocará un cero en el polo más alejado del sistema original ($s_1 = -7.1457$), de manera que cancele el polo de la planta en esa ubicación obteniendo un sistema de orden reducido. Esto se aprecia en la siguiente figura:

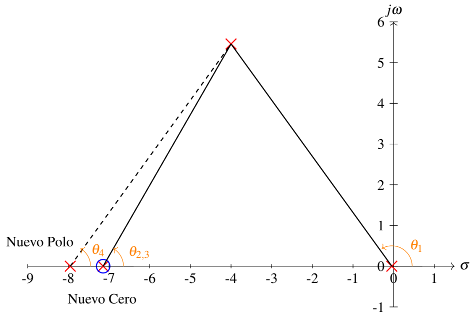

Figure 1.5: Compensación de ceros y polos

Note que el procedimiento implícitamente incluye:

- Asumir la ecuación del compensador (compensador en adelanto).
- Determinar la localización del polo y el cero del compensador para cubrir la deficiencia de ángulo θ.
- Determinar el valor de K_c del compensador en adelanto a partir de la condición de magnitud.

La función de transferencia que define al compensador en adelanto es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$$

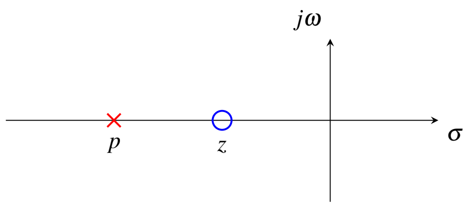

Figure 1.6: Lugar geométrico de un compensador en adelanto.

Por otro lado, para determinar la localización del polo y el cero para cubrir la deficiencia de ángulo θ, aplicamos la condición de ángulo, de donde:

$$\theta_4 = 180 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_1 \tag{1.3}$$
$$\theta_4 = 180 - \theta_1 \tag{1.4}$$

Teniendo en cuenta que, al momento de aplicar la condición de ángulo, el cero anulará al polo que se encuentra en la misma posición, por lo que únicamente influye el ángulo θ_1 para encontrar la deficiencia de ángulo del polo del compensador. El ángulo que va del polo original $s_2 = -0.0457$ a la nueva ubicación $s_{d1} = -4 + j5.4575$, es:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
m &= \frac{5.4575 - 0}{-4 - (-0.0457)} = -1.380143135 \\
\theta_1 &= 180^\circ + \arctan(m) \\
\theta_1 &= 125.9253^\circ
\end{aligned}
$$

En el cálculo anterior, fue necesario restar el ángulo de 180° debido a que m es un valor negativo, por lo que es necesario encontrar su ángulo suplementario; por lo tanto, la deficiencia de ángulo que debe aportar el polo del compensador es, prácticamente, el suplemento de θ_1:

$$\theta_4 = 180 - 125.9253 = 54.07432105^\circ$$

Conociendo el ángulo θ_4, es posible calcular la componente real del polo del compensador, la cual será igual a la parte real del polo deseado sumado a la proyección sobre el eje real del ángulo θ_4:

$$
\begin{aligned}
x &= -4 - \frac{5.4575}{\tan(\theta_4)} \\
x &= -4 - 3.9543
\end{aligned}
$$

Obtenemos entonces que el cero y el polo del compensador son:

$$
\begin{aligned}
p_c &= -7.9543 \\
z_c &= -7.1457
\end{aligned}
$$

Donde z_c corresponde a la misma coordenada del polo que se desea eliminar y p_c es el valor de x calculado anteriormente. Así, el compensador tiene la forma:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p} = K_c \frac{s+7.1457}{s+7.9543}$$

Ejercicio 1.3 Complete el código de forma que pueda replicar las siguientes gráficas, donde se observa los polos originales del sistema, los polos deseados y los ceros y polos del compensador y por otro lado el lugar de las raíces.

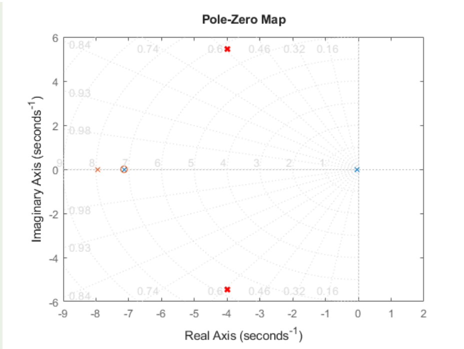

Figure 1.7: Polos y ceros del compensador y proceso a lazo abierto, con los polos deseados.

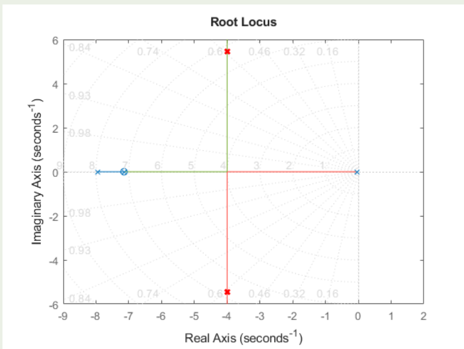

Figure 1.8: Lugar de las raíces a lazo cerrado

Para determinar el valor de K_c del compensador en adelanto, lo hacemos a partir de la condición de magnitud.

$$\left|G_c(s)G(s)H(s)\right| = 1$$

En donde $G_c(s)G(s)$ y $H(s)$ son las funciones de **trayectoria directa** y de **retroalimentación**, respectivamente.

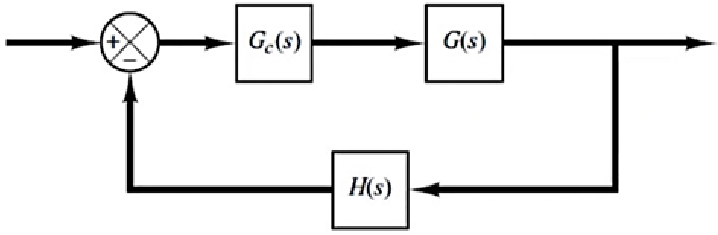

Figure 1.9: Modelo del proceso compensado

Para el ejemplo de la planta tenemos:

$$G(s) = \frac{1}{sL_a + R_a} K_i \frac{1}{sJ_m + B_m} = \frac{3.236 \times 10^{-4}}{s^2 + 7.191s + 0.3269}$$

$$H(s) = K_b = 1010$$

$$\left| K_c \frac{s + 7.1457}{s + 7.9543} \cdot \frac{3.236 \times 10^{-4}}{s^2 + 7.191s + 0.3269} \cdot 1010 \right|_{s=-4+j5.4575} = 1$$

Nota que anulamos la entrada $T_L(s)$.
Reemplazando los valores en la ecuación y resolviendo para K_c, se tiene:

$$K_c = 138.9612$$

La respuesta del sistema compensado se presenta en la siguiente figura donde se observa el cero sobre el polo $s_1 = -7.1457$.

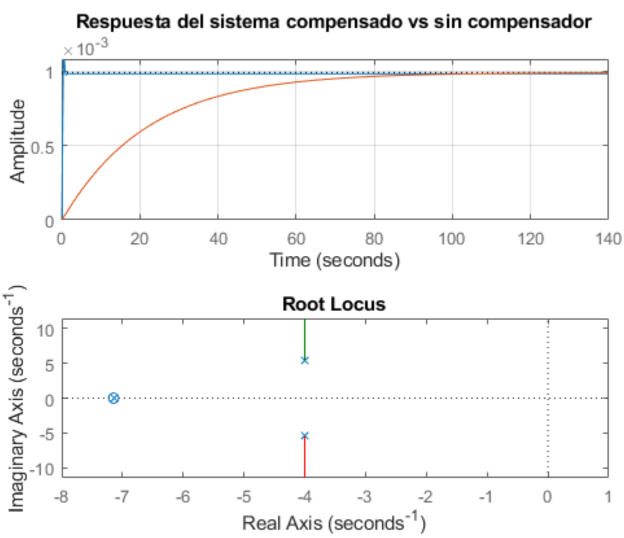

Figure 1.10: Respuesta del sistema compensado

Ejercicio 1.4 Utilice la función *evalfr* para obtener el valor de K_c que ubique los polos a lazo cerrado en el punto deseado. Luego replique la gráfica 1.10. Comente los resultados del sistema compensado vs el sin compensar, observados en la figura. ■

Por último, comprobamos que se cumplan los criterios de diseño $(M_p = 10\%, t_{ss} = 1s)$

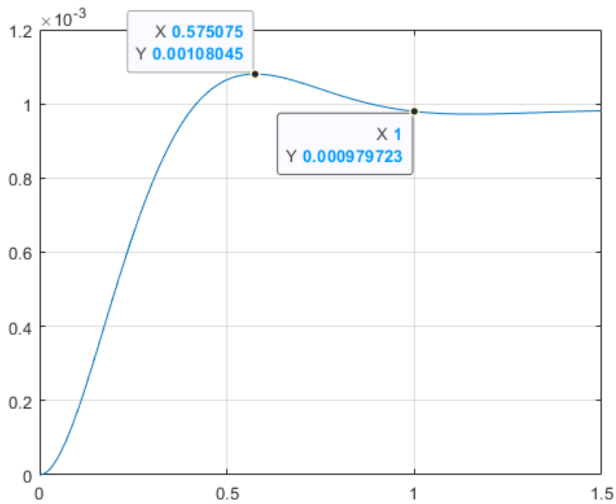

Figure 1.11: Comprobación de criterios de diseño

1.4 Actividad Reto

- Implemente la función de transferencia de un circuito RLC en serie en MATLAB y encuentre los polos y ceros de la misma. Considere los siguientes datos para el circuito:
  - R=22
  - L=500uH
  - C=220uF
- Obtenga la función de transferencia de un circuito RLC (Vo(s)/Vi(s)) con los parámetros dados.
- Diseñe un compensador que permita alcanzar las siguientes características de funcionamiento:
  - $M_p = 25\%$
  - $t_{ss} = 50ms$
- Simule el sistema de control en lazo cerrado y reporte lo siguiente la respuesta del sistema al escalón unitario. Responda: ¿se cumplen los requisitos de M_p y t_{ss}?