

## Taller 7 - Lugar geométrico de raíces

### 1.1 Objetivos

- Aplicar los conocimientos presentados durante las sesiones de ACD.
- Comprender que representa el lugar geométrico de las raíces en la práctica.

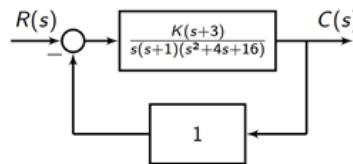
### 1.2 Antecedentes

El método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) es una técnica utilizada en el control de sistemas dinámicos para analizar y diseñar controladores. Desarrollada en 1948 por el ingeniero y matemático Walter Richard Evans, se basa en la ubicación de las raíces del polinomio característico en el plano complejo en función de un parámetro de ajuste, como la ganancia del controlador. A continuación se presenta una descripción básica de cómo funciona:

1. **Polinomio Característico:** El polinomio característico de un sistema lineal es crucial para determinar su estabilidad. Está definido por la ecuación característica  $1 + G(s)H(s) = 0$ , donde  $G(s)$  es la función de transferencia del sistema y  $H(s)$  es la función de transferencia del controlador.
2. **Lugar Geométrico de las Raíces:** Este método consiste en trazar en el plano complejo (eje real vs. eje imaginario) todas las posibles ubicaciones de las raíces del polinomio característico a medida que un parámetro, generalmente la ganancia del controlador, varía de cero a infinito.
3. **Reglas para Construir el LGR:** Se siguen ciertas reglas para construir el LGR:
  - Comenzar con los polos y ceros del sistema y el controlador.
  - Si hay un número impar de polos y ceros en el lado derecho del plano complejo, el LGR comienza en el infinito.
  - Para sistemas de lazo abierto, el LGR termina en el número de polos del sistema más el número de ceros del sistema y el controlador.
  - Los ángulos de partida y llegada del LGR están relacionados con la suma de los ángulos de los polos y ceros.
4. **Análisis y Diseño del Controlador:** Una vez que se traza el LGR, se puede analizar la estabilidad y el desempeño del sistema para diferentes valores del parámetro de ajuste. Por ejemplo, ajustando la ganancia del controlador, se puede observar cómo se mueven las raíces y determinar la estabilidad y la respuesta del sistema.
5. **Selección del Parámetro de Ajuste:** La elección del parámetro de ajuste (como la ganancia del controlador) depende de los requisitos de diseño del sistema, como la rapidez de la respuesta, la estabilidad y el sobrepuerto.

### 1.3 Desarrollo

Resolver de acuerdo a la metodología revisada en clases. Luego comprobar usando las herramientas de Matlab.



$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2 + 4s + 16)}$$

$$H(s) = 1$$

Figure 1.1: Sistema de control a lazo cerrado

Dado el diagrama de bloques de la figura 1.1, realice las siguientes tareas:

1. Determinar los polos y ceros del sistema a lazo abierto.
2. Determinar los ángulos de las asíntotas.
3. Determinar el punto de partida de las asíntotas.
4. Determinar la intersección de las asíntotas con el eje imaginario.
5. Determinar el lugar de raíces.
6. Determinar los puntos de llegada.
7. Intersección de las raíces con el eje imaginario.
8. Determinar los ángulos de salida.
9. Realizar un esbozo del LGR con los puntos y ángulos calculados.

#### 1.3.1 Determinar los polos y ceros del sistema:

El primer paso consiste en encontrar los polos y ceros del sistema a lazo abierto. Una opción es usar la función `roots` de matlab, para calcular las raíces del numerador y denominador. En el caso del denominador, es necesario resolver el producto, dando como resultado la siguiente expresión:

$$s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 16s = 0 \quad (1.1)$$

**Código 1** Encontrar polos y ceros de la función de transferencia del sistema a lazo abierto.

```
% Opción 1: resolver por numerador y denominador
num= [1 3];
den= [1 5 20 16 0];

% Polos y ceros
zs = roots (num);
ps = roots (den);

% Graficar los polos y ceros
figure
v = [-6 6 -6 6]; axis (v); axis('square')
hold on; grid on;
plot(real(zs), imag(zs), 'bo', 'Linewidth',2);
plot(real(ps), imag(ps), 'rx', 'Linewidth',2);
```

---

El código 1 muestra como graficar de forma manual los polos y ceros de la función de transferencia, utilizando los polinomios del numerador y denominador, tras encontrar las raíces y tomar la parte real e imaginaria y graficándolas en el eje  $x$  o real y eje  $y$  o imaginario, respectivamente.

$$z_1 = -3$$

$$p_1 = 0.0000 + 0.0000i$$

$$p_2 = -2.0000 + 3.4641i$$

$$p_3 = -2.0000 - 3.4641i$$

$$p_4 = -1.0000 + 0.0000i$$

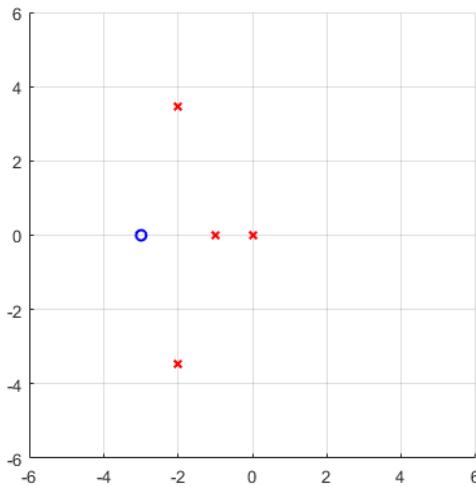


Figure 1.2: Polos y Ceros a lazo abierto

### 1.3.2 Determinar los ángulos de las asíntotas:

En este paso se aplica directamente la formula para calcular ángulos:

$$\theta_A = \pi \frac{(2k+1)}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad (1.2)$$

donde,

$n$  = número de polos

$m$  = número de ceros

Se tiene entonces,  $n = 4$ ,  $m = 1$ , dando como resultado  $n - m = 3$  asíntotas, separadas un ángulo de  $\frac{2\pi}{n-m} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ . Estos ángulos son:

$$\theta_A = \left[ \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3} \right]$$

o expresado en grados,

$$\theta_A = [60^\circ, 180^\circ, -60^\circ]$$

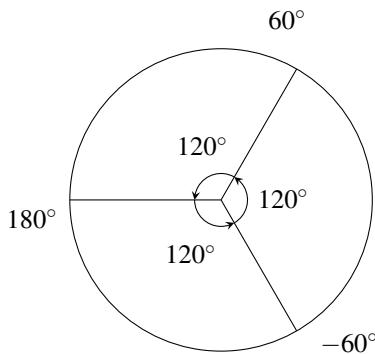


Figure 1.3: Distribución de asíntotas

**1.3.3 Determinar el punto de partida de las asíntotas:**

Aplicando directamente la fórmula:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{(0 - 1 - 2 - 2) - (-3)}{4 - 1} = -\frac{2}{3} \\ \sigma_0 &= -0.6667\end{aligned}$$

- R En el caso de los polos complejos conjugados, se toma en cuenta únicamente la parte real, dado que las componentes complejas se eliminan entre sí.

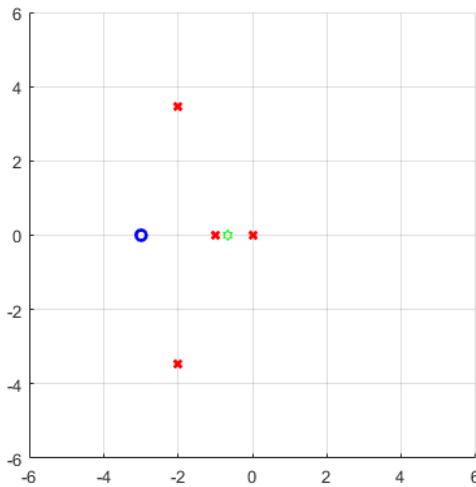


Figure 1.4: Punto de partida de las asíntotas

En la figura 1.4 se dibuja de color verde el punto de origen de las asíntotas.

### 1.3.4 Determinar la intersección de las asíntotas con el eje imaginario:

Se tiene el punto de partida de las asíntotas en  $(-\frac{2}{3}, 0)$  y ,además, se conoce que llegará al punto  $(0, \pm y_{1,2})$ , con un ángulo de  $\pm 60^\circ$ . Mediante la ecuación de la recta  $y = m(x - x_1) + y_1$ , donde  $m$  sería la pendiente igual a  $\tan(\pm 60^\circ) = \pm\sqrt{3}$ , es posible determinar el punto que corta con el eje  $j\omega$ .

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{3} \left( x + \frac{2}{3} \right)$$

$$y_{1,2} = \pm 1.1547 \quad x = 0$$

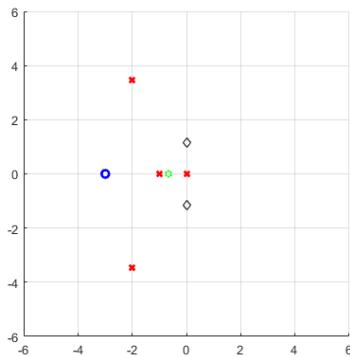
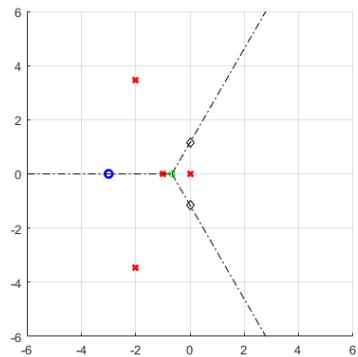
En la figura 1.5(a) se representa los cruces de las asíntotas con el eje imaginario, siendo estos los rombos de color negro sobre el eje  $j\omega$ . Las asíntotas completas se pueden dibujar mediante sus ecuaciones de la recta, para esto se puede hacer un barrido en  $x$  de la ecuación y plotear los pares  $(x, y)$ , dando como resultado la figura 1.5(b).

**Código 2** Gráfica de las asíntotas.

```
% graficamos las líneas de las asíntotas
x = sigma0:0.1:6;
y1 = sqrt(3) * (x - sigma0);
y2 = -y1;

xa = -6:0.1:sigma0;
ya = zeros(1, length(xa));

plot (x, y1, 'k-.');
plot (x, y2, 'k-.');
plot (xa, ya, 'k-.');
```

((a)) Puntos de corte con el eje  $j\omega$ 

((b)) Líneas de las asíntotas

Figure 1.5: Asíntotas

**1.3.5 Determinar el lugar de raíces:**

Considerando que si el número total de polos y ceros reales a la derecha de un punto de prueba es **ímpar**, entonces este segmento forma parte del lugar de raíces.

**1.3.6 Determinar los puntos de llegada:**

Recordando que la función de lazo cerrado es:

$$G_s(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

La ecuación característica toma la forma:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Despejando K:

$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)} = -\frac{s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 16s}{s + 3}$$

Encontrando la derivada  $\frac{dK}{ds} = 0$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d(-1/G(s)H(s))}{ds} = 0$$

Se obtiene:

$$3s^4 + 22s^3 + 65s^2 + 120s + 48 = 0$$

Las raíces de la ecuación anterior son:

$$s_{1,2} = -1.29 \pm j2.36$$

$$s_3 = -4.2376$$

$$s_4 = -0.524$$

Ya que los puntos de llegada al eje real deben ser reales, se toma únicamente los valores de  $s_3$  y  $s_4$ .

Graficamos los puntos de llegada:

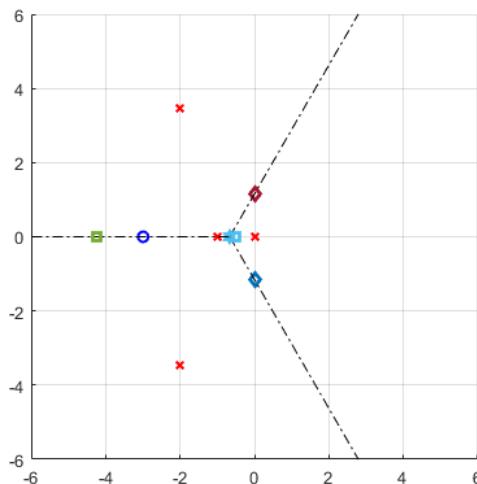


Figure 1.6: Llegadas

### 1.3.7 Intersección de las raíces con el eje imaginario

Para encontrar estos valores es necesario aplicar el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica del sistema:

Considere el siguiente polinomio:

$$s^4 + 5s^3 + 20s^2 + (16 + K)s + 3K = 0$$

$$a_0 = 1; \ a_1 = 5; \ a_2 = 20; \ a_3 = 16 + K; \ a_4 = 3K;$$

$$\begin{array}{r} s^4 \quad 1 \quad 20 \quad 3K \\ s^3 \quad 5 \quad 16+K \quad 0 \\ s^2 \quad \frac{84-K}{5} \quad 3K \\ s^1 \quad \frac{K^2+7K-1344}{84-K} \\ s^0 \quad 3K \end{array}$$

Para que el sistema sea marginalmente estable debe cumplirse que:

$$K^2 + 7K - 1344 = 0$$

$$K_1 = -40.3273$$

$$K_2 = 33.3273$$

De  $s^0$  se tiene  $K > 0$ , por lo tanto, el valor correcto es  $K = 33.3273$ . Reemplazando este valor en  $s^2$ :

$$\frac{84 - 33.3273}{5} s^2 + 3(33.3273) = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j3.1409$$

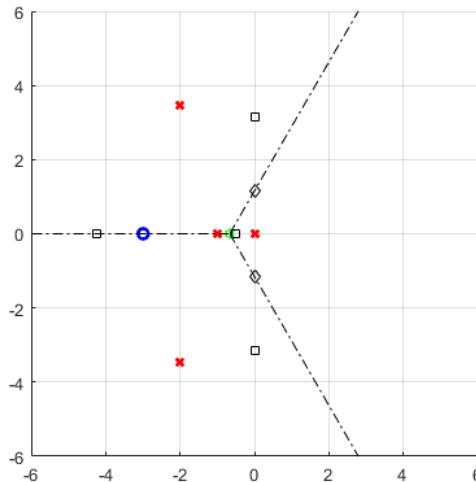


Figure 1.7: Puntos de corte con el eje imaginario

### 1.3.8 Determinar los ángulos de salida:

Para calcular el ángulo de salida del polo superior, nos valemos de la gráfica 1.8:

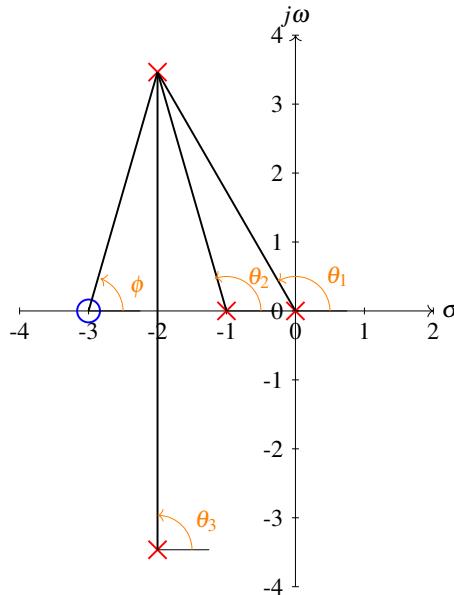


Figure 1.8: Ángulos de salida

La ecuación para calcular el ángulo de salida desde un polo complejo, es la siguiente:

$$\theta = 180 - \Sigma \angle \text{polos} + \Sigma \angle \text{ceros} \quad (1.4)$$

$$\theta = 180 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \phi$$

En donde, aplicando geometría:

$$\theta_1 = 120^\circ, \theta_2 = 106^\circ, \theta_3 = 90^\circ, \phi = 74^\circ$$

Por lo tanto el ángulo de salida es:

$$\theta = 180 - 90^\circ - 106^\circ - 120^\circ + 74^\circ = -62^\circ$$

### 1.3.9 Realizar un esbozo del LGR con los puntos y ángulos calculados:

Por último con los puntos y ángulos calculados haga un esbozo del LGR, usando el comando de MATLAB *rlocus*.

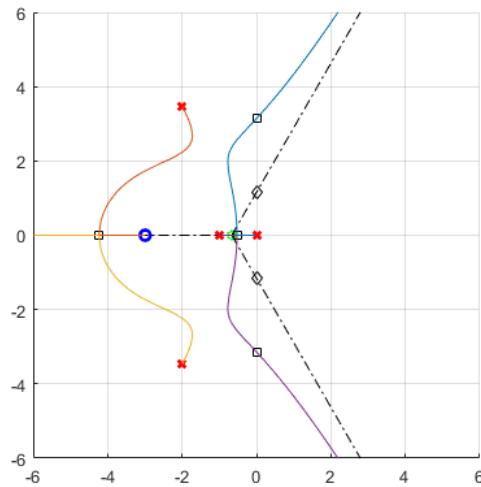


Figure 1.9: Resultado de *rlocus*

## 1.4 Actividad Reto

El reto consiste en replicar los ejemplos mostrados en este documento con Python, haciendo uso de la librería *control* y *scipy*. Documente sus resultados obtenidos y coméntelos en el reporte del taller.