Taller 6: Análisis de estabilidad de sistemas LTI, criterio de Routh-Hurwitz

1.1 Objetivos

- Aplicar los conocimientos presentados durante las sesiones de ACD.
- Analizar la respuesta temporal de sistemas de primer y segundo orden.
- Aplicar el criterio de Routh para el análisis de la estabilidad de sistemas.

1.2 Antecedentes

El problema más importante en los sistemas de control es la estabilidad del mismo, es decir, bajo qué condiciones el sistema será inestable. Surge la pregunta ¿cómo aplicar una técnica de control que estabilice el sistema? En este contexto, la mayoría de los sistemas de control en lazo cerrado poseen funciones de transferencia de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

donde todos los coeficientes a y b son constantes y $m \leq n$. El criterio de estabilidad de Routh nos permite analizar los polos del sistema. Este nos indica si existen polos inestables en la solución de la ecuación polinomial ($A(s) = 0$), sin resolver realmente la ecuación.

1.2.1 El criterio de estabilidad de Routh

El criterio busca responder una pregunta clave: ¿Existen raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano complejo s?

- Si la respuesta es Sí: El sistema es Inestable.
- Si la respuesta es No (todas las raíces están en el semiplano izquierdo): El sistema es Estable.

El procedimiento para aplicar el criterio de Routh es el siguiente:

1. Escriba el polinomio en s de la siguiente forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (1.1)$$

   donde los coeficientes son cantidades reales. Asumimos que $a_n \neq 0$; es decir, ninguna raíz en cero ha sido eliminada.
2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, en presencia de al menos un coeficiente positivo, existe(n) raíz(ces) que son imaginarios ó que tienen componente real positivo. Por lo tanto, el sistema no es estable. Si el propósito es evaluar la estabilidad global, el análisis terminaría aquí. La condición necesaria pero no suficiente para estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación 1.1 tengan signo positivo.
3. Si todos los coeficientes son positivos, realizar con estos un arreglo en filas y columnas, de forma que:
   - Primera fila: coeficientes de potencias pares y descendentes.

- Segunda fila: coeficientes de potencias impares y descendentes.
- El resto de filas se calculan usando determinantes simplificados:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

El arreglo resultante queda de la forma:

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

El proceso de formar filas continúa hasta cuando se terminen los elementos. El número total de filas es $n+1$. Los coeficientes b_1, b_2, b_3, $\dots$, etc. se evalúan como sigue:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \\
b_2 &= \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \\
b_3 &= \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y para los coeficientes c,d, etc.:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\
c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\
c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\
&\vdots \\
d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\
d_2 &= \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

4. El criterio de estabilidad de Routh afirma que el número de raíces de la ecuación 1.1 con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación se ubiquen en el semiplano negativo de s, es que todos los coeficientes de la ecuación 1.1 sean positivos y todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.

Ejemplo
Considere el siguiente polinomio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

donde,

$$a_0 = 1; \;\; a_1 = 2; \;\; a_2 = 3; \;\; a_3 = 4; \;\; a_4 = 5;$$

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & a_0 = 1 & a_2 = 3 & a_4 = 5 \\
s^3 & a_1 = 2 & a_3 = 4 & 0 \\
s^2 & \frac{2\times3-1\times4}{2} = 1 & \frac{2\times5-1\times0}{2} = 5 & \\
s^1 & \frac{1\times4-2\times5}{1} = -6 & & \\
s^0 & \frac{-6\times5-1\times0}{-6} = 5 & &
\end{array}
$$

En este ejemplo, el número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna es 2. Esto significa que existen dos raíces con partes reales positivas.

1.3 Desarrollo

1.3.1 Sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden queda descrito por una ecuación diferencial con la forma:

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

De donde se obtiene su función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

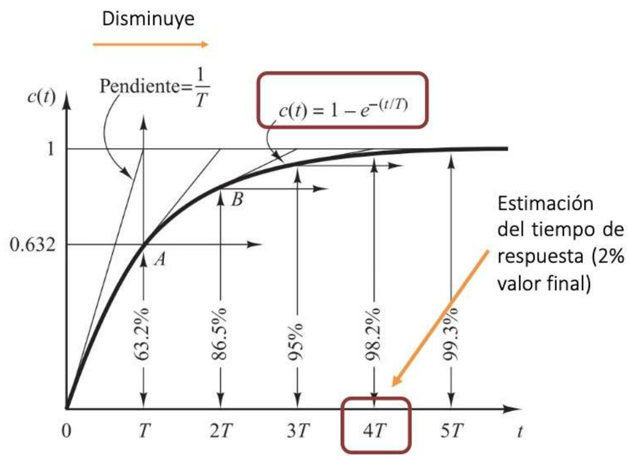
La ecuación de la función de transferencia se conoce como forma normalizada de la función de transferencia. Es común usar otra forma nombrada forma paramétrica, la cual es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

donde:

$$K \rightarrow \text{Ganancia del sistema}$$
$$\tau \rightarrow \text{Constante de tiempo}$$

Se considera que el sistema se ha estabilizado cuando alcanza un valor cercano al 98% de su valor final. Dicho valor τ suele ser tomado, con un valor muy aproximado, de $\tau = 4\tau$. Esto se aprecia en la siguiente figura:

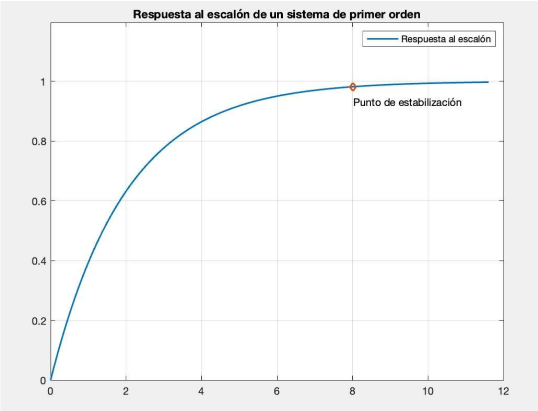


A continuación el estudiante debe implementar un ejemplo de un sistema de primer orden en MATLAB con el objetivo de mostrar que se cumple lo comentado en la figura anterior. Utilice la siguiente función de transferencia:

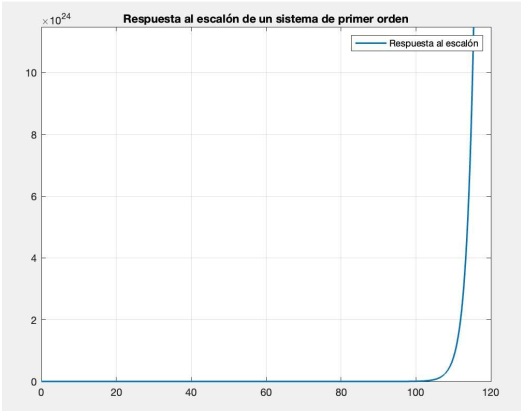
$$G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

Empleando el comando $[y,t] = step(Gs)$, es posible obtener los valores de aplicar una función escalón a una función de transferencia. Con estos datos puede determinar la posición en la cual se cumple $t = 4\tau$. Además, puede usar la función $roots(denominador)$ para encontrar los polos de la función.

Analice en qué caso se producen los siguientes comportamientos del sistema:



((a)) Respuesta estable



((b)) Respuesta Inestable

1.3.2 Sistemas de segundo orden

Recordando la forma general de la función de transferencia de segundo orden, la cual es:

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \tag{1.2}$$

La respuesta de los sistemas de segundo orden depende de las raíces de su ecuación característica (polinomio del denominador). En forma general dicha ecuación es:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0 \tag{1.3}$$

donde:

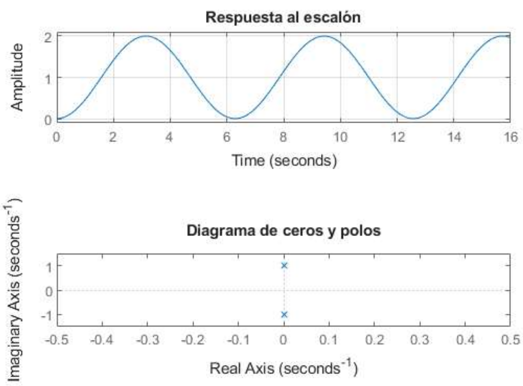
$$\zeta \rightarrow \text{Factor de amortiguamiento}$$
$$\omega_n \rightarrow \text{Frecuencia natural o de resonancia del sistema}$$

Según los valores de las raíces de 1.3, los sistemas se dividen en:

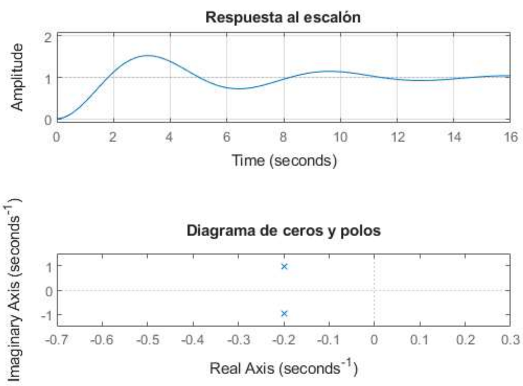
Rango	Estabilidad	Polos	Efecto
$\zeta = 0$	No amortiguado	2 polos imaginarios puros.	Respuesta oscilatoria permanente.
$0 < \zeta < 1$	Subamortiguado	2 polos complejos conjugados.	Respuesta rápida con oscilaciones amortiguadas.
$\zeta = 1$	Críticamente amortiguado	2 polos reales iguales.	Respuesta similar a un proceso de 1er orden.
$\zeta > 1$	Sobreamortiguado	2 polos reales distintos.	Respuesta lenta sin oscilaciones.

En la figura 1.1 se muestra la respuesta de diferentes funciones de transferencia de segundo orden, con diferentes valores de ζ, obteniendo los resultados analizadas en la tabla anterior. Asimismo, en la figura 1.2 se muestra varias figuras de ejemplo de las respuestas de los sistemas con sus polos dibujados con la función $pzmap(Gs)$.

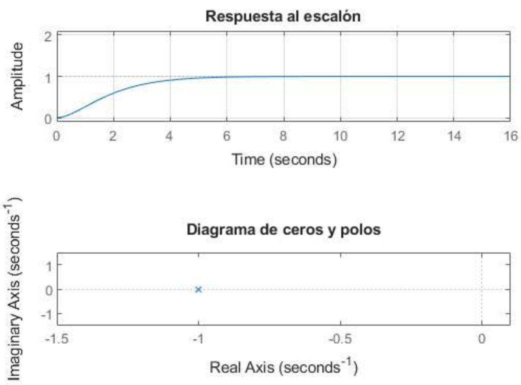
Figure 1.1: Respuesta de los sistemas de segundo orden con diferentes valores de ζ



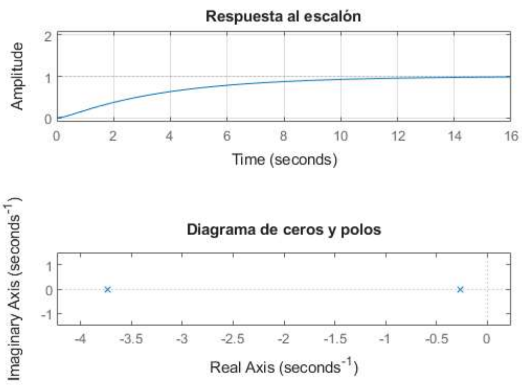
((a)) No amortiguado (resonancia)



((b)) Sub amortiguado



((c)) Críticamente amortiguado



((d)) Sobre amortiguado

Figure 1.2: Respuestas de los sistemas de 2do orden.

Los sistemas mostrados, con excepción de los no amortiguados, son del tipo estable, es decir, sus raíces se encuentran en al semiplano derecho.

Sistemas inestables

A continuación analizaremos los sistema inestables, los cuales tienen raíces con parte real positiva, existen dos tipos:

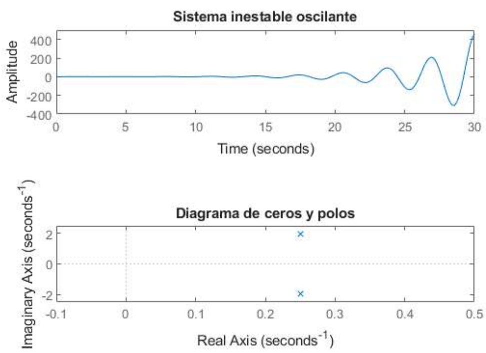
Rango	Estabilidad	Polos	Efecto
$\zeta < -1$	Inestable no oscilante	2 polos reales distintos	Presenta una respuesta exponencial creciente.
$-1 < \zeta < 0$	Inestable oscilante	2 polos complejos conjugados	Presenta oscilaciones que incrementan con el tiempo.

Para evaluar estos sistema inestables podemos usar las siguientes funciones de transferencia. Para el caso de un sistema oscilante se usará la función G_1 y para el caso no oscilatorio se usará la función G_2 mostradas a continuación.

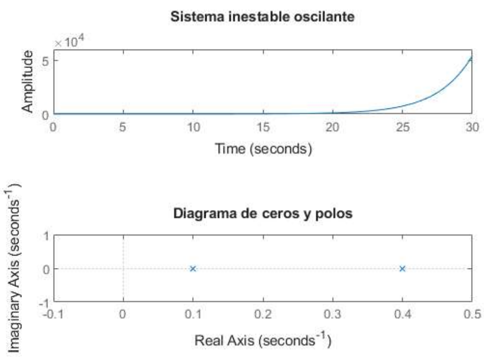
$$G_1 = \frac{1}{s^2 - 0.5s + 4} \tag{1.4}$$

$$G_2 = \frac{1}{25s^2 - 12.5s + 1} \tag{1.5}$$

En las siguiente figuras se muestran la respuesta de un sistema inestable oscilatorio y uno no oscilatorio, respectivamente.



((a)) Sistema inestable oscilante



((b)) Sistema inestable no oscilante

1.4 Simulación de sistemas de lazo cerrado en MATLAB

Suponga el sistema mostrado en la siguiente figura, éste sería muy fácil de replicar en Simulink, pero el objetivo de este punto es modelarlo mediante código en un script de MATLAB.

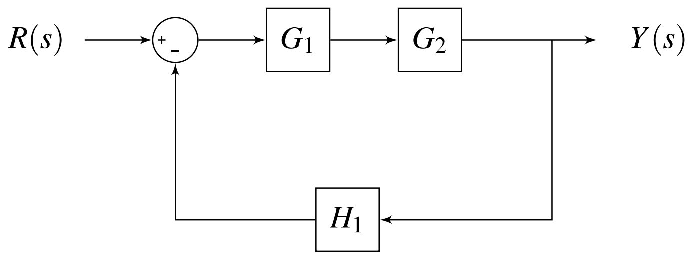


Figure 1.3: Diagrama de bloques de sistemas en serie

Se usarán los siguientes comandos:

- **series**: Permite combinar dos bloques en serie, en este caso G_1 y G_2 se convertirán en $G = G_1 \cdot G_2$.
- **feedback**: Si se tiene un sistema retroalimentado, como el mostrado en la figura, este comando devuelve su equivalente en un único bloque, G_s.

Ejercicio 1.1 En el diagrama de bloques de la figura 1.3, use las siguientes funciones de transferencia como datos:

$$G_1 = \frac{3}{s} \qquad G_2 = \frac{1}{s^2+1} \qquad H_1 = 3$$

A continuación, realice los siguientes pasos:

1. Implemente el diagrama en Simulink y analice la respuesta del sistema.
2. Implemente el diagrama por código en MATLAB y analice la respuesta.
3. Recupere el polinomio del denominador y aplique el criterio de Routh-Hurwitz para determinar la estabilidad del sistema y el número de polos inestables. Considere usar ε en caso necesario.
4. Aplique las pruebas de estabilidad vistas en esta práctica y determine si el sistema es:
    - Estable o inestable.
    - Oscilante o no oscilante.
    - Subamortiguado, críticamente amortiguado, sobreamortiguado o no amortiguado.

■

1.5 Actividad Reto

Reto 1.1 Tomando como base el circuito RLC trabajado en los talleres anteriores y el controlador PID del taller 5, realice lo siguiente:

- Replique el lazo de control PID-RLC en un script de MATLAB, utilizando las funciones *tf*, *series*, *parallel*, *feeback*.
- Aplique el criterio de Routh-Hurwitz sobre la ecuación característica del sistema a lazo cerrado para determinar si el lazo es estable o inestable.
- Con la función de transferencia en lazo cerrado, analice la estabilidad del sistema utilizando la funciones que considere pertinentes (*roots*, *pole*, *pzmap*).

- Genere una gráfica *subplot* con la respuesta al escalón aplicada a la función de transferencia a lazo cerrado, conjuntamente con la gráfica de polos y ceros.
- Replique la misma actividad con Python.