

Filtrado en el dominio de la frecuencia (Parte 2)

Agenda

- Transformada discreta de Fourier (DFT) de una variable.
- Extensión a funciones de dos variables.
- Propiedades de la transformada discreta de Fourier (DFT) en dos dimensiones (2D).
- Conceptos básicos de filtrado en el dominio de frecuencia.
- Filtros paso bajo.
- Filtros paso alto.
- Filtros selectivos en frecuencia.

Relación entre el periodo de muestreo y los intervalos de frecuencia

- Si $f(x)$ consiste de M muestras de la función $f(t)$ tomadas cada ΔT unidades, la duración de la señal es:

$$T = M\Delta T$$

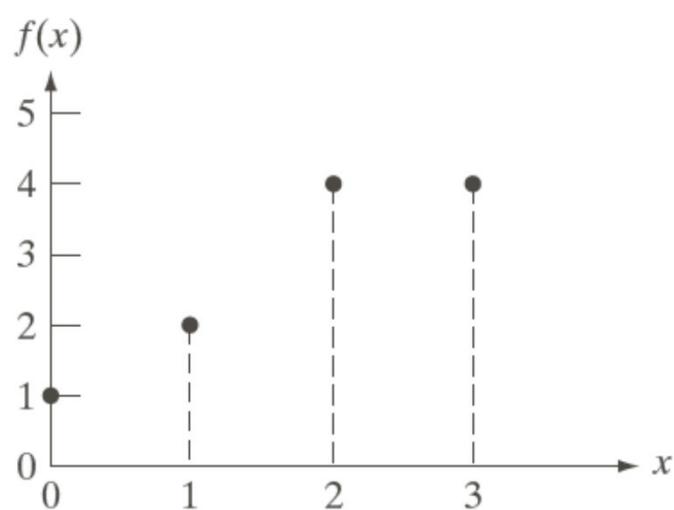
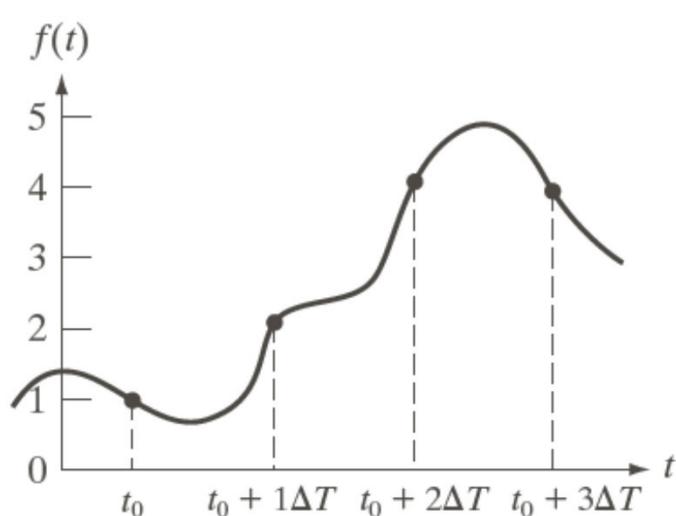
- El espaciamiento entre las muestras en el dominio de frecuencia discreta es:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

- Los M componentes de la DFT cubren un intervalo de frecuencia:

$$\Omega = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

Ejemplo numérico DFT



a b

FIGURE 4.11

(a) A function, and (b) samples in the x -domain. In (a), t is a continuous variable; in (b), x represents integer values.

$$f(x) = [1, 2, 4, 4]$$

$$F(0) = 11$$

$$F(1) = -3 + 2j$$

$$F(2) = -1$$

$$F(3) = -3 - 2j$$

Extensión a funciones de dos variables

El impulso en 2D, caso continuo

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = z = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t, z) dt dz = f(0, 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0)$$

El impulso en 2D, caso discreto

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0)$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$

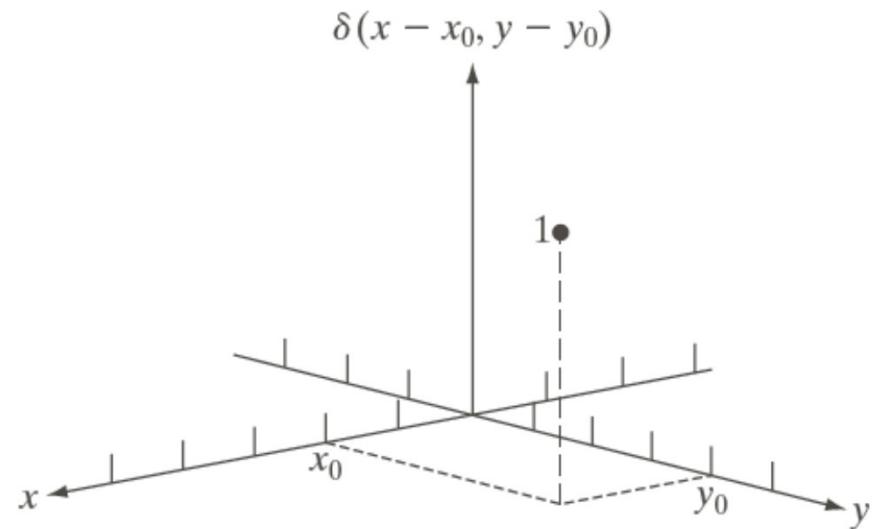


FIGURE 4.12
Two-dimensional unit discrete impulse. Variables x and y are discrete, and δ is zero everywhere except at coordinates (x_0, y_0) .

Transformada continua de Fourier en 2D

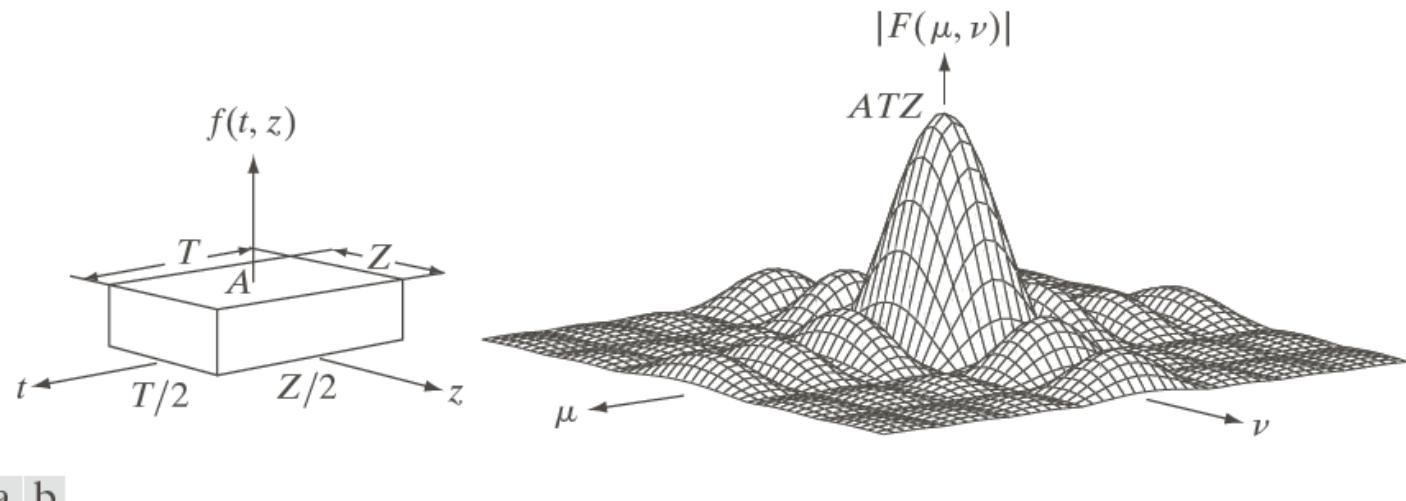
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(ut+vz)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ut+vz)} du dv$$

t, z : Variables espaciales.

u, v : Variables de frecuencia espacial.

Transformada de Fourier en 2D de una ventana rectangular



a b

FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t -axis, so the spectrum is more “contracted” along the μ -axis. Compare with Fig. 4.4.

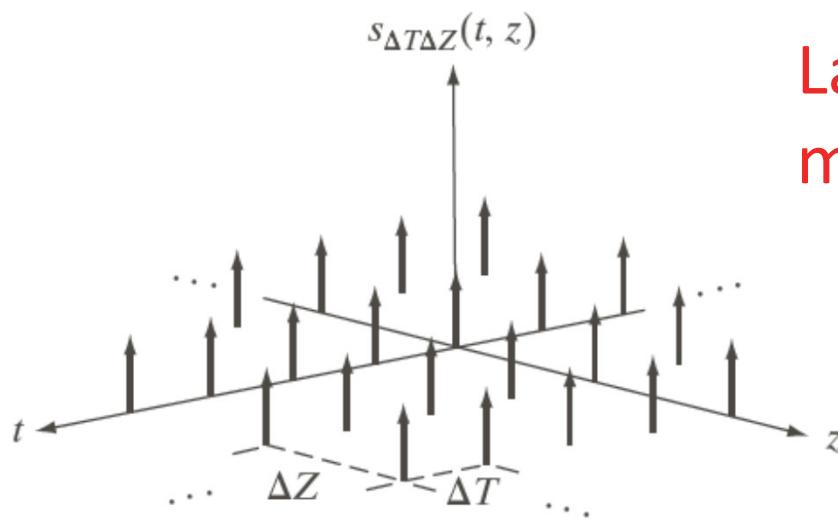
$$F(u, v) = ATZ \left[\frac{\sin(\pi uT)}{\pi uT} \right] \left[\frac{\sin(\pi vZ)}{\pi vZ} \right]$$

$$|F(u, v)| = ATZ \left| \frac{\sin(\pi uT)}{\pi uT} \right| \left| \frac{\sin(\pi vZ)}{\pi vZ} \right|$$

Muestreado en dos dimensiones

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

$\Delta T, \Delta Z$: Separaciones entre las muestras a lo largo de los ejes t y z de la función continua $f(t, z)$.



La función muestreada se obtiene multiplicando $f(t, z)$ por $S_{\Delta T \Delta Z}$

FIGURE 4.14
Two-dimensional
impulse train.

Teorema del muestreo en 2D

- La función $f(t,z)$ es de banda limitada, si su transformada de Fourier es cero por fuera de un rectángulo definido por los intervalos $[-u_{\max}, u_{\max}]$ y $[-v_{\max}, v_{\max}]$, es decir:

$$F(u, v) = 0 \quad \text{para} \quad |u| \geq u_{\max} \quad \text{y} \quad |v| \geq v_{\max}$$

- El teorema del muestreo indica que una función continua de banda limitada $f(t,z)$ se puede reconstruir sin errores a partir de un conjunto de muestras si los intervalos de muestreo satisfacen:

$$\Delta T < \frac{1}{2u_{\max}}$$

$$\Delta Z < \frac{1}{2v_{\max}}$$

$$\frac{1}{\Delta T} > 2u_{\max}$$
$$\frac{1}{\Delta Z} > 2v_{\max}$$

Reconstrucción y *aliasing* en 2D

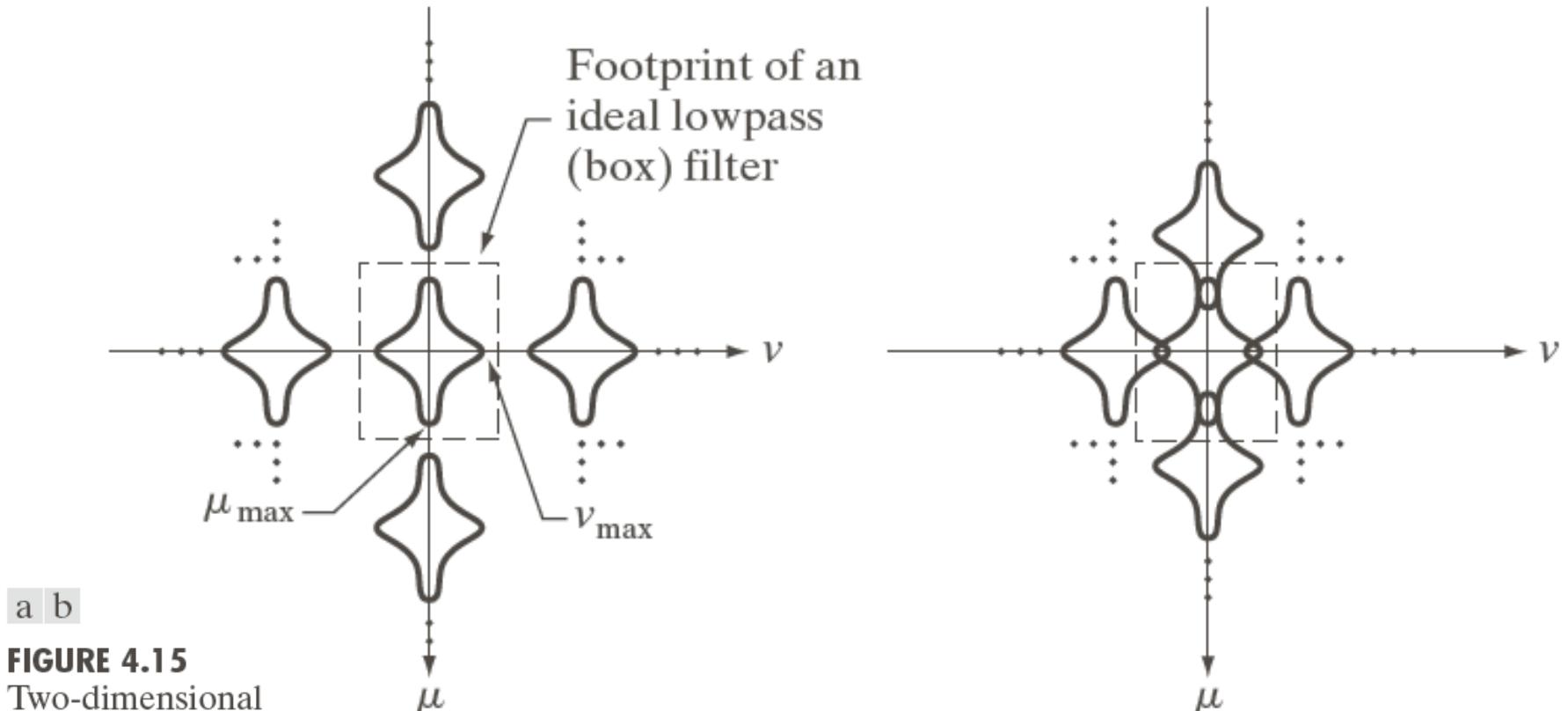


FIGURE 4.15
Two-dimensional
Fourier transforms
of (a) an over-
sampled, and
(b) under-sampled
band-limited
function.

Aliasing en imágenes

- ***Aliasing espacial:*** Ocurre cuando se usa un muestreo espacial que no satisface los valores mínimos indicados en el teorema del muestreo.
- ***Aliasing temporal:*** Se presenta cuando no se respetan los intervalos de tiempo mínimos entre imágenes en una secuencia de imágenes (video).
 - ✓ **Ejemplo:** En muchas películas se ve que la rueda de un auto que va hacia adelante gira hacia atrás. Esto se debe a que la tasa de captura (*frame rate*) es muy baja comparada con la velocidad de rotación de la rueda en la secuencia.

Efectos del *aliasing* en imágenes

Asuma que se tiene un sensor “perfecto” para generar imágenes de 96 x 96 píxeles.

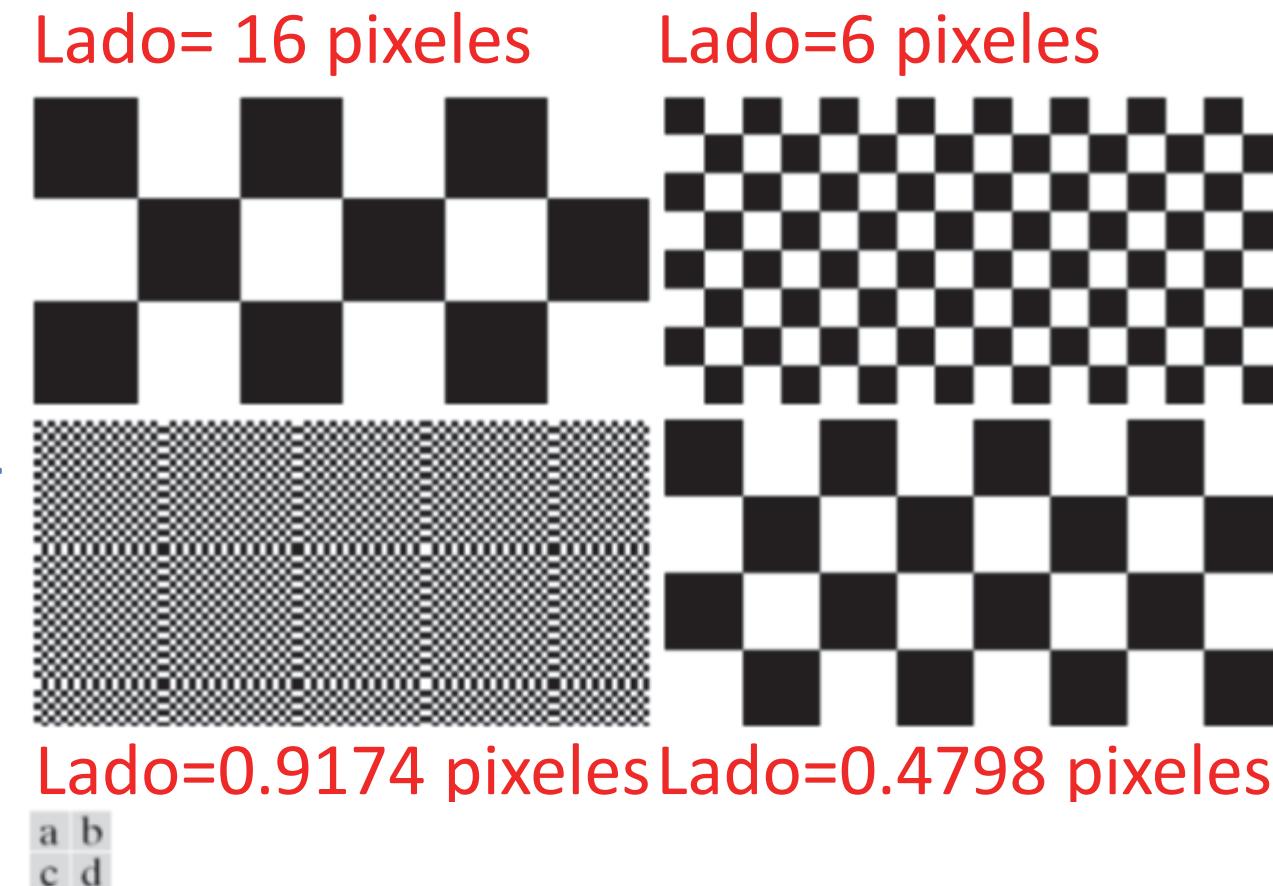
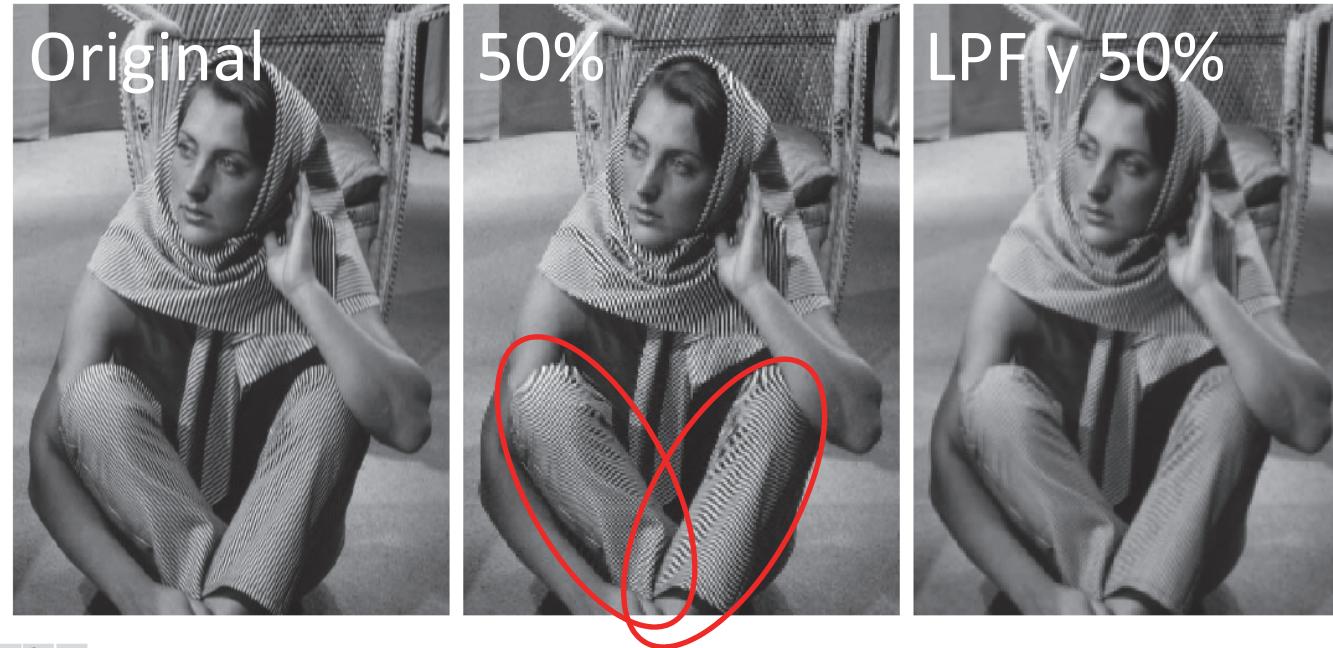


FIGURE 4.16 Aliasing in images. In (a) and (b), the lengths of the sides of the squares are 16 and 6 pixels, respectively, and aliasing is visually negligible. In (c) and (d), the sides of the squares are 0.9174 and 0.4798 pixels, respectively, and the results show significant aliasing. Note that (d) masquerades as a “normal” image.

El aliasing en la interpolación en imágenes y el remuestreo

- Aplicaciones comunes de la interpolación, ampliación (*zooming*) y reducción (*shrinking*).
- ***Zooming***: puede verse como un sobre muestreo en el caso de replicación de pixeles (es decir interpolación del vecino más cercano).
 - ✓ **Ejemplo:** Zoom de 2X. Duplicar cada columna, y sobre ese resultado duplicar cada fila.
- ***Shrinking***: puede verse como un sub-muestreo.
 - ✓ **Ejemplo:** Reducción de 0.5X. Borrar las columnas intermedias (es decir una si, otra no, una si, etc...), y sobre ese resultado borrar las filas intermedias.

Efectos del *aliasing* en la reducción de imágenes digitales



Nota: el LPF que se usó fue un filtro promedio de 3x3 pixeles.

FIGURE 4.17 Illustration of aliasing on resampled images. (a) A digital image with negligible visual aliasing. (b) Result of resizing the image to 50% of its original size by pixel deletion. Aliasing is clearly visible. (c) Result of blurring the image in (a) with a 3×3 averaging filter prior to resizing. The image is slightly more blurred than (b), but aliasing is not longer objectionable. (Original image courtesy of the Signal Compression Laboratory, University of California, Santa Barbara.)

- Atenuar componentes de alta frecuencia antes de remuestrear la imagen !!

Efecto diente de sierra (*jaggies*)

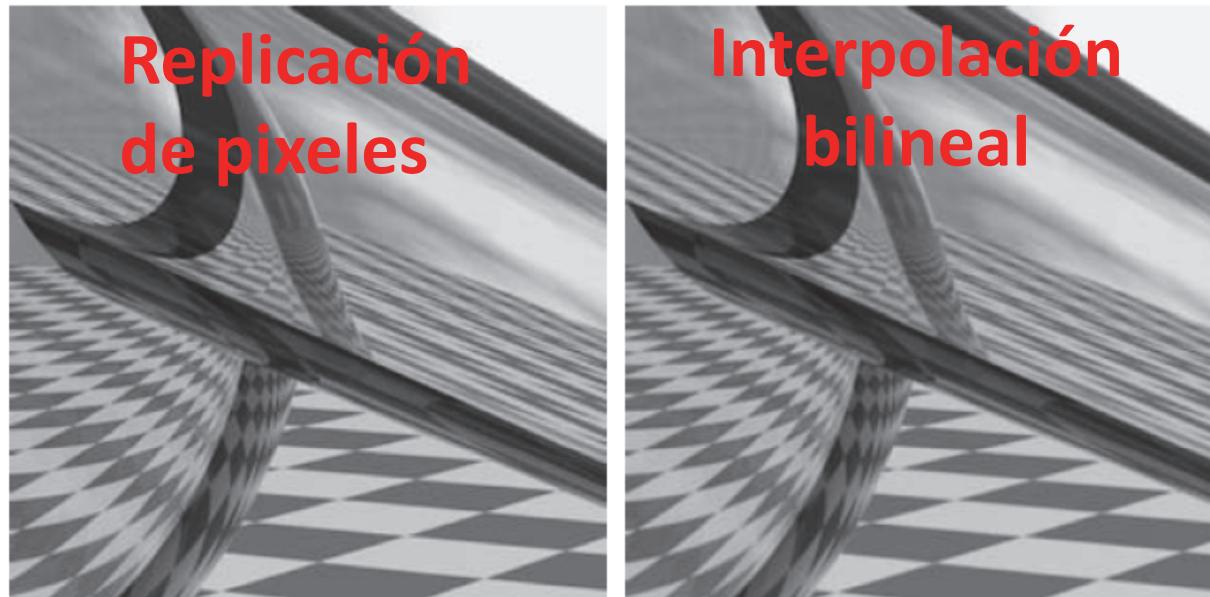


a b c

FIGURE 4.18 Illustration of **jaggies**. (a) A 1024×1024 digital image of a computer-generated scene with negligible visible aliasing. (b) Result of reducing (a) to 25% of its original size using bilinear interpolation. (c) Result of blurring the image in (a) with a 5×5 averaging filter prior to resizing it to 25% using bilinear interpolation. (Original image courtesy of D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

Nota: el LPF que se usó fue un filtro promedio de 5x5 pixeles.

Generación de una imagen de 1024×1024 a partir de una de 256×256 usando dos técnicas de interpolación

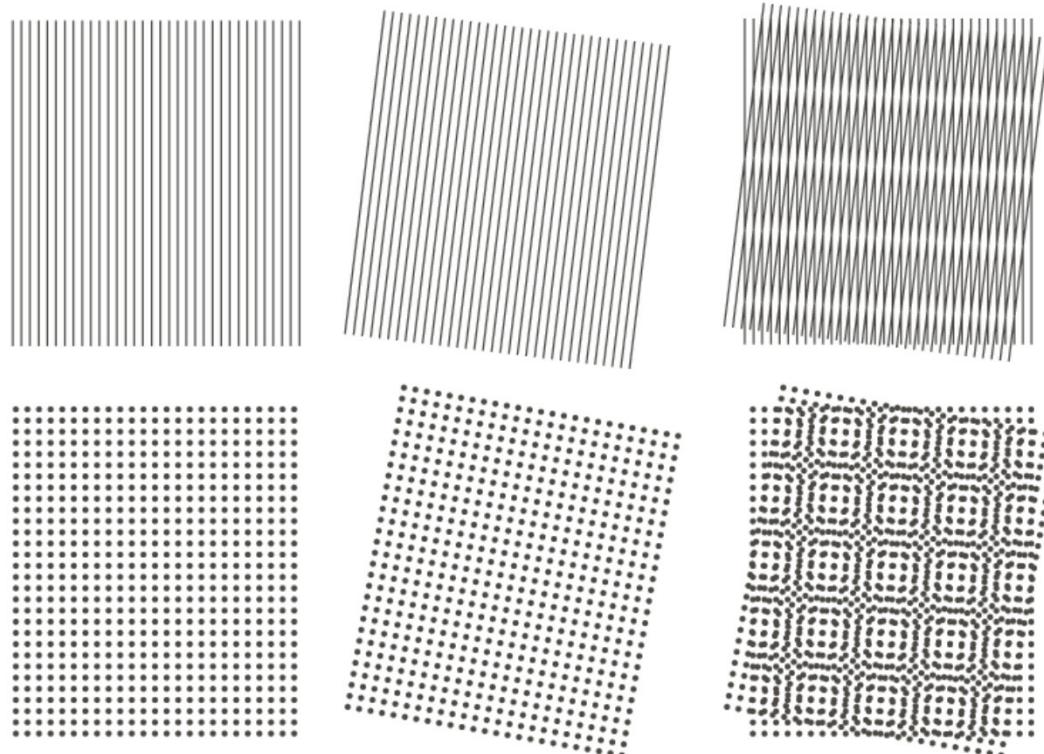


a b

FIGURE 4.19 Image zooming. (a) A 1024×1024 digital image generated by pixel replication from a 256×256 image extracted from the middle of Fig. 4.18(a). (b) Image generated using bi-linear interpolation, showing a significant reduction in jaggies.

Patrones de Moiré

- Algunas veces resultan de muestrear escenas con componentes periódicos o casi periódicos.
- También aparecen por la superposición de patrones.



a	b	c
d	e	f

FIGURE 4.20
Examples of the moiré effect.
These are ink drawings, not
digitized patterns.
Superimposing
one pattern on
the other is
equivalent
mathematically to
multiplying the
patterns.

- Imagen de un periódico impreso con 75 dpi, con puntos orientados a $\pm 45^\circ$, y muestrada a 75 dpi a 0 y 90° .
- Note los patrones de Moiré.



FIGURE 4.21

A newspaper image of size 246×168 pixels sampled at 75 dpi showing a moiré pattern. The moiré pattern in this image is the interference pattern created between the $\pm 45^\circ$ orientation of the halftone dots and the north-south orientation of the sampling grid used to digitize the image.

- Imagen de un periódico de 75 dpi muestreada con 400 dpi para evitar los patrones de Moiré.
- Semitono: el tamaño de cada punto es inversamente proporcional a la intensidad de la imagen (regiones claras, puntos pequeños y viceversa)

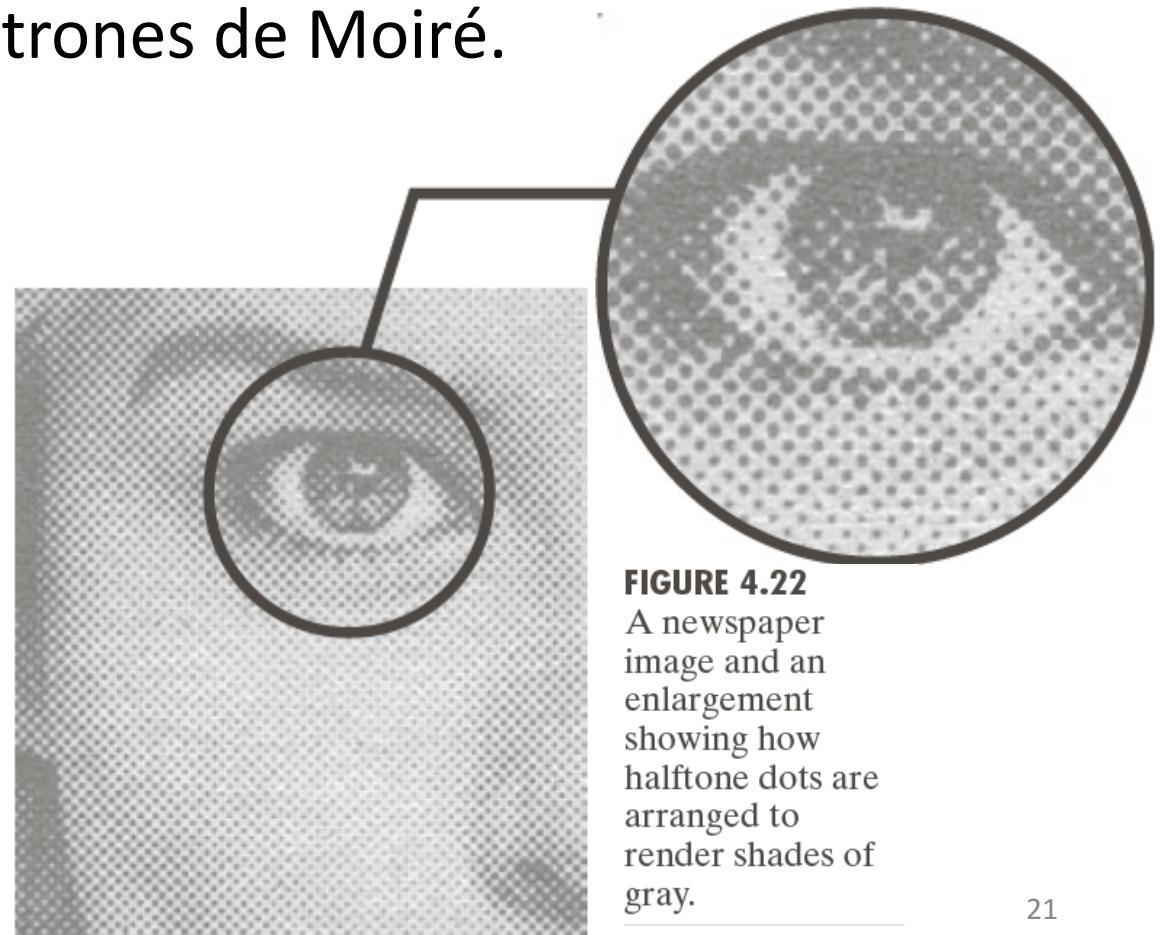


FIGURE 4.22
A newspaper image and an enlargement showing how halftone dots are arranged to render shades of gray.

Transformada discreta de Fourier en 2D y su inversa

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

$$v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

:Transformada directa.

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

:Transformada inversa.

$f(x, y)$:Imagen digital de tamaño $M \times N$.

u, v :Variables de frecuencia espacial.

x, y :Variables espaciales.

Ejercicio

- Demuestre que el valor de $F(0,0)$ es proporcional al valor promedio de intensidad de la imagen $f(x,y)$.
- Cuál es el factor de proporcionalidad?

Propiedades de la transformada de Fourier en 2D

Relación entre los intervalos espaciales y de frecuencia espacial

$f(x, y)$:Imagen digital de tamaño $M \times N$.

$\Delta T, \Delta Z$:Separación entre muestras en coordenadas espaciales.

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta T}$$

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta Z}$$

:Separación entre las variables de frecuencia espacial discreta.

Nota: La separación entre las muestras en el dominio de la frecuencia espacial es inversamente proporcional tanto al espaciamiento entre las muestras espaciales como al número de muestras.

Traslación

$$f(x, y) e^{j2\pi \left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N} \right)} \leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right)}$$

Nota: La translación de una imagen $f(x,y)$ no tiene efecto en la magnitud de $F(u,v)$.

Rotación

- Usando coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta) \quad u = w \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad v = w \sin(\varphi)$$

- Se obtiene el siguiente par de transformación:

$$f(r, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(w, \varphi + \theta_0)$$

Nota: al rotar $f(x,y)$ un ángulo θ_0 , se rota $F(u,v)$ el mismo ángulo y viceversa.

Periodicidad

- La transformada discreta de Fourier en 2D y su inversa son infinitamente periódicas en la dirección u y v , y x e y , respectivamente.

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N) \\ f(x, y) &= f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N) \end{aligned}$$

- Donde k_1, k_2 son enteros.

Centrando la transformada de Fourier

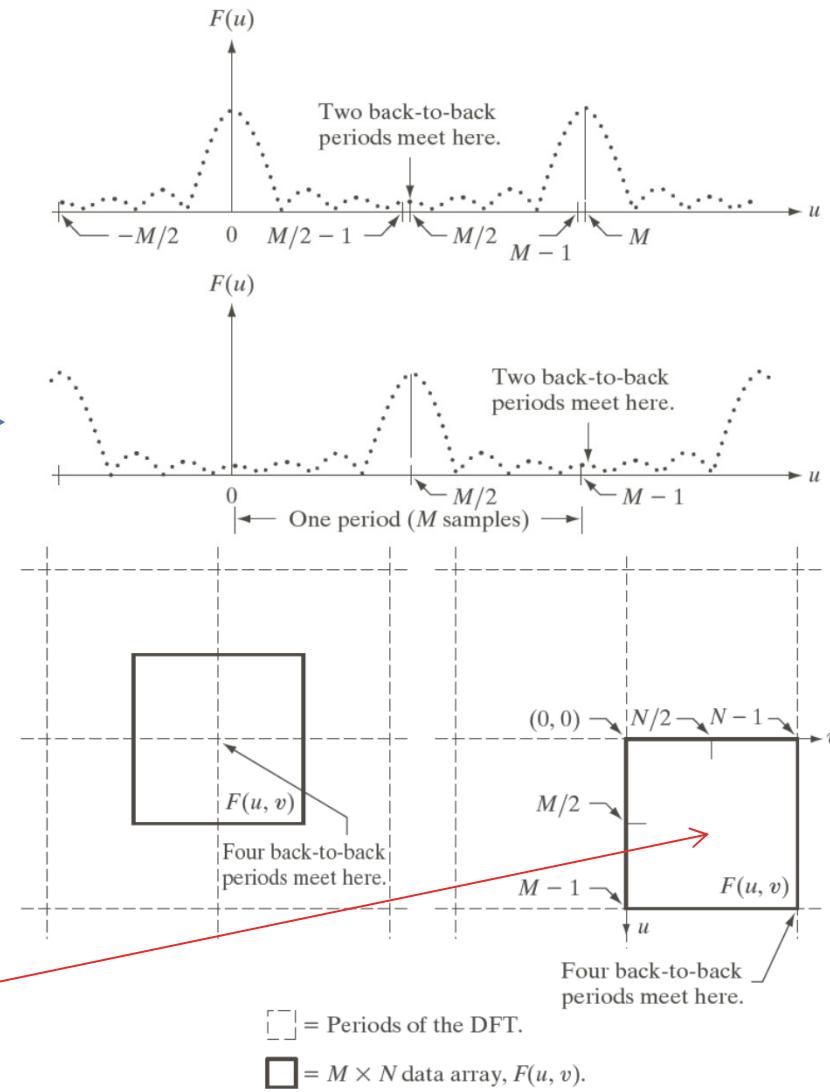
$$f(x)e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}\right)} \leftrightarrow F(u - u_0)$$

$$u_0 = \frac{M}{2}$$

$$f(x)e^{j\pi x} \leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}\right)$$

$$f(x)(-1)^x \leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}\right)$$

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$



a
b
c d

FIGURE 4.23
Centering the Fourier transform.
(a) A 1-D DFT showing an infinite number of periods.
(b) Shifted DFT obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ before computing $F(u)$.
(c) A 2-D DFT showing an infinite number of periods. The solid area is the $M \times N$ data array, $F(u, v)$, obtained with Eq. (4.5-15). This array consists of four quarter periods.
(d) A Shifted DFT obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ before computing $F(u, v)$. The data now contains one complete, centered period, as in (b).

Repasso de simetría

- Funciones pares (simétricas): $w_e(x, y) = w_e(-x, -y)$
- Funciones impares (antisimétricas): $w_o(x, y) = -w_o(-x, -y)$
- Cualquier función real o compleja se puede expresar como la suma de una parte par más otra parte impar.
- El producto de una función par por otra par es par.
- El producto de una función impar por otra impar es par.
- El producto de una función par por una impar es impar.
- Si una función es ímpar, la suma de todos sus elementos es cero.

- Cuando los índices no pueden tomar valores negativos y sólo toman valores mayores o iguales a cero, las definiciones de funciones pares e impares se convierten en:

$$w_e(x, y) = w_e(M - x, N - y)$$

$$w_o(x, y) = -w_o(M - x, N - y)$$

- ✓ Ejemplo de una secuencia impar:

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0
0	0	-2	0	2	0	0
0	0	-1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Propiedades de simetría de la transformada discreta de Fourier en 2D

	Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	\Leftrightarrow	$F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	\Leftrightarrow	$F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and odd

TABLE 4.1 Some symmetry properties of the 2-D DFT and its inverse. $R(u, v)$ and $I(u, v)$ are the real and imaginary parts of $F(u, v)$, respectively. The term *complex* indicates that a function has nonzero real and imaginary parts.

[†]Recall that x, y, u , and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y , and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

Espectros de magnitud y de fase

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) = |F(u,v)| e^{j\phi(u,v)}$$

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

➤ Espectro de magnitud.

$$\phi(u,v) = \arctan \left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \right]$$

➤ Espectro de fase.

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

➤ Espectro de potencia.

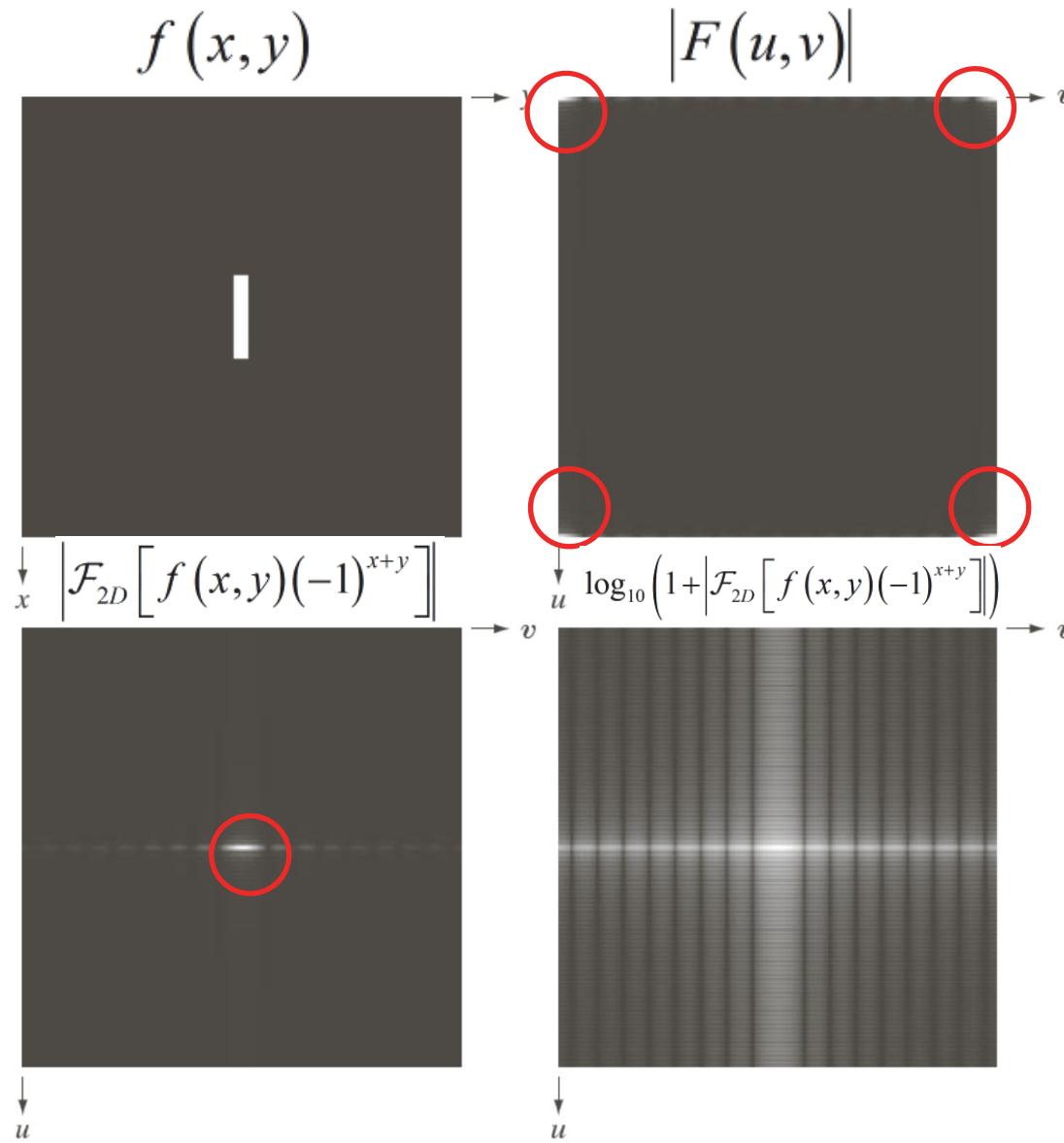
Nota: Cuando calcule el espectro de fase, use la función arcotangente de cuatro cuadrantes (*atan2* en Matlab).

Ejemplo 1: centrado y visualización del espectro de magnitud

a b
c d

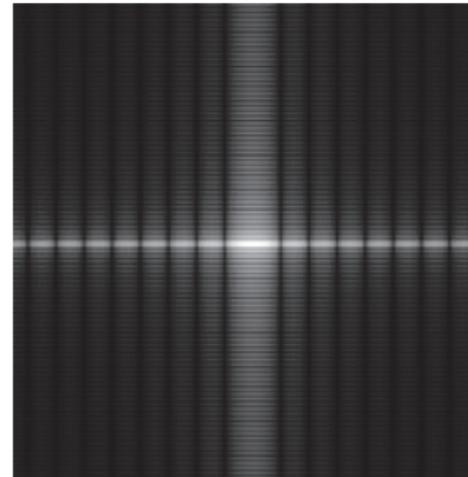
FIGURE 4.24

- (a) Image.
- (b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
- (c) Centered spectrum.
- (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.



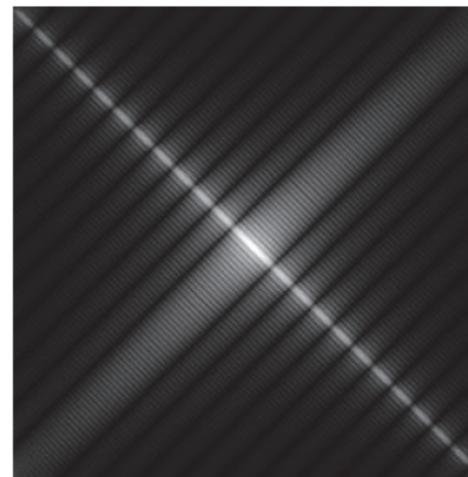
Ejemplo 2: efectos de la translación y rotación en el espectro de magnitud

Traslación



El espectro de magnitud no cambia

Rotación



El espectro de magnitud se rota el mismo ángulo

a
b
c
d

FIGURE 4.25
(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum.
(c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

Ejemplo 3: dificultades interpretando la fase



FIGURE 4.26 Phase angle array corresponding (a) to the image of the centered rectangle in Fig. 4.24(a), (b) to the translated image in Fig. 4.25(a), and (c) to the rotated image in Fig. 4.25(c).

Nota: El análisis visual del espectro de fase provee poca información intuitiva !!!

Ejemplo 4: Importancia de la fase en la reconstrucción de imágenes

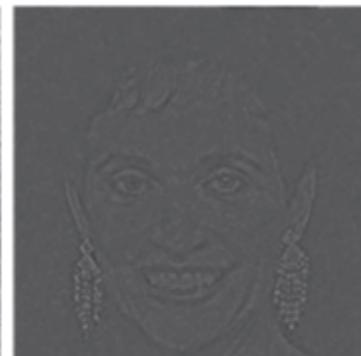
$$f_2(x, y)$$



$$\phi_2(u, v)$$



$$\mathcal{F}_{2D}^{-1}\left[1e^{j\phi_2(u, v)}\right]$$



$$\mathcal{F}_{2D}^{-1}\left[\left|F_2(u, v)\right|\right]$$

a	b	c
d	e	f

$$\mathcal{F}_{2D}^{-1}\left[\left|F(u, v)\right|e^{j\phi_2(u, v)}\right]$$



$$\mathcal{F}_{2D}^{-1}\left[\left|F_2(u, v)\right|e^{j\phi(u, v)}\right]$$

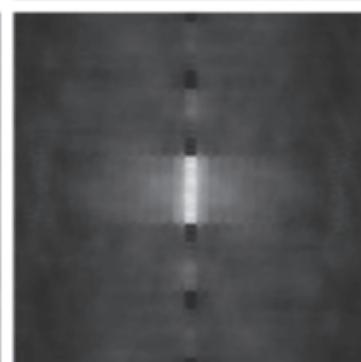


FIGURE 4.27 (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

El teorema de la convolución en 2D

- Convolución circular en 2D:

$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Teorema de la convolución en 2D:

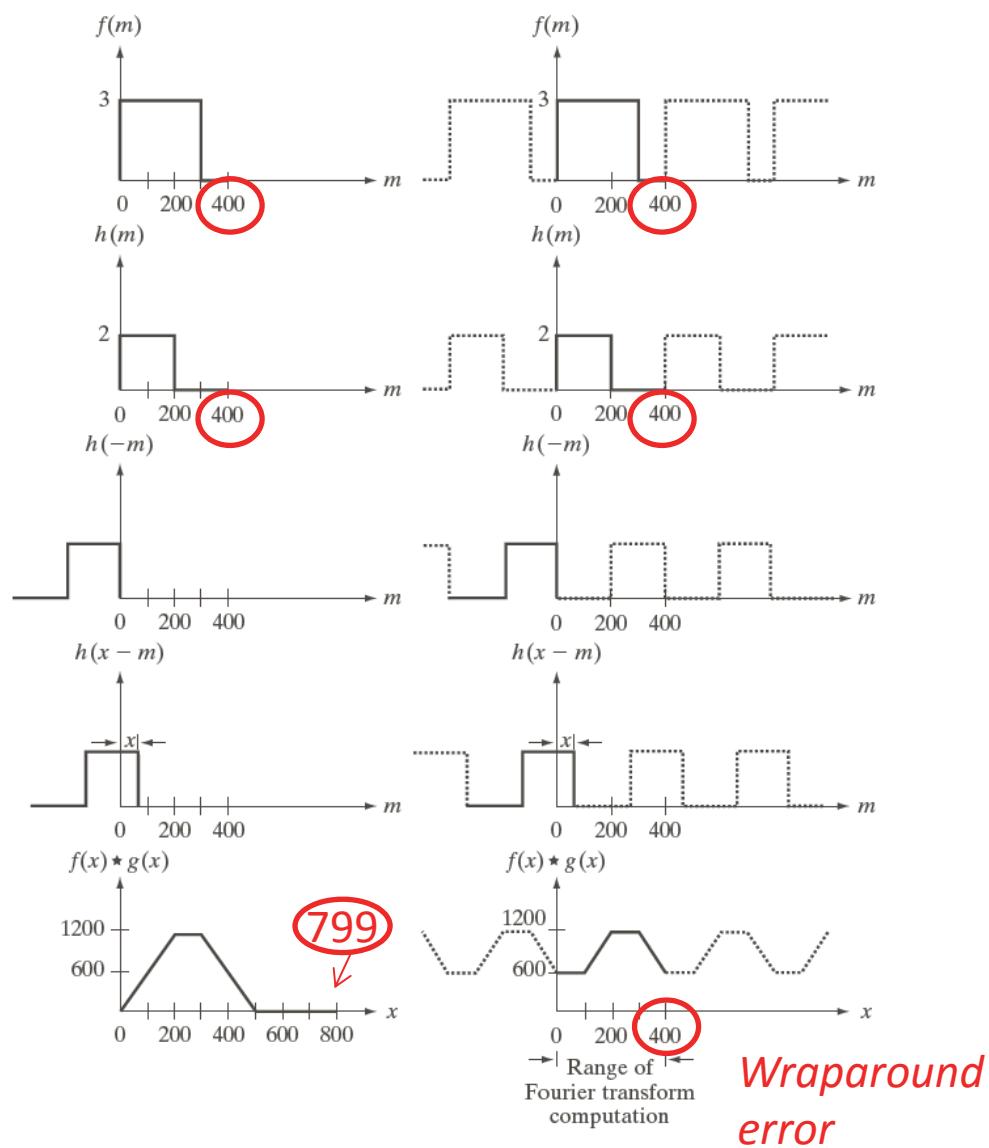
$$\boxed{f(x, y) \star h(x, y) \leftrightarrow F(u, v) H(u, v)}$$
$$\boxed{f(x, y) h(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)}$$

Antes de continuar....

Preguntas en el caso 1D:

- Si $f(x)$ tiene 400 elementos y $h(x)$ tiene 400 elementos, cuántos elementos tiene la convolución de $f(x)$ con $h(x)$?
- Al aplicar la DFT a $f(x)$ y $h(x)$, $F(u)$ tendrá 400 elementos y $H(u)$ tendrá 400 elementos. Cuántos elementos tendrá la transformada inversa de Fourier del producto $F(u)H(u)$?
- Nota algo “extraño” en los resultados anteriores?
- ✓ Tip: Recuerde la convolución y la convolución circular.

Explicación para el caso 1D



a	f
b	g
c	h
d	i
e	j

FIGURE 4.28 Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.

Cómo solucionar el problema en 1D?

- Si $f(x)$ tiene A elementos y $h(x)$ tiene B elementos, la convolución de $f(x)$ con $h(x)$ tendrá $P=A+B-1$ elementos.
- Si tanto $f(x)$ como $h(x)$ se rellenan con ceros al final (*zero padding*) de manera tal que cada secuencia contenga al menos P elementos, y luego de calcular las transformadas de Fourier individuales, se aplica la transformada inversa de Fourier del producto $F(u)H(u)$, el resultado corresponderá a la convolución deseada de $f(x)$ con $h(x)$.

Cómo solucionar el problema en 2D?

$f(x, y)$: Imagen de $A \times B$ pixeles.

$h(x, y)$: Imagen de $C \times D$ pixeles.

- Rellenar con zeros (*zero padding*) ambas imágenes para que queden de dimensiones $P \times Q$, de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$f_P(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad AND \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \quad OR \quad B \leq y \leq Q \end{cases}$$

$$h_P(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad AND \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \quad OR \quad D \leq y \leq Q \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{aligned} P &\geq A + C - 1 \\ Q &\geq B + D - 1 \end{aligned}$$

Nota: Escoger P y Q tal que sean los enteros pares más pequeños que satisfacen las desigualdades.

Fuga en frecuencia (*frequency leakage*)

- Si los valores de los extremos de las señales no tienden a cero, al llenar las señales original con zeros, se crea una discontinuidad que puede modelarse como el producto de la señal original por una ventana rectangular.
- En el dominio de la frecuencia esto corresponde a la convolución de la transformada de la señal con un *sinc*, lo que genera ondulaciones. Las altas frecuencias del sinc generan un fenómeno que se conoce en Inglés como *frequency leakage*.
- Para minimizar el efecto, use una ventana de suavizado antes de transformar con el fin de atenuar los componentes de alta frecuencia. Ejemplo: ventana Gaussiana.

Resumen de las propiedades de la transformada discreta de Fourier en 2D

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
4) Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Real}(F); \quad I = \text{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

TABLE 4.2
Summary of DFT definitions and corresponding expressions.

(Continued)

TABLE 4.2
(Continued)

Name	Expression(s)
8) Periodicity (k_1 and k_2 are integers)	$F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N)$ $= F(u + k_1M, v + k_2N)$ $f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N)$ $= f(x + k_1M, y + k_2N)$
9) Convolution	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$
10) Correlation	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$
11) Separability	The 2-D DFT can be computed by computing 1-D DFT transforms along the rows (columns) of the image, followed by 1-D transforms along the columns (rows) of the result. See Section 4.11.1.
12) Obtaining the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm.	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$ <p>This equation indicates that inputting $F^*(u, v)$ into an algorithm that computes the forward transform (right side of above equation) yields $MNf^*(x, y)$. Taking the complex conjugate and dividing by MN gives the desired inverse. See Section 4.11.2.</p>

TABLE 4.3

Summary of DFT pairs. The closed-form expressions in 12 and 13 are valid only for continuous variables. They can be used with discrete variables by sampling the closed-form, continuous expressions.

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$
6) Convolution theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)

TABLE 4.3
(Continued)

Name	DFT Pairs
7) Correlation theorem [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) Discrete unit impulse	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$
9) Rectangle	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$
10) Sine	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $j \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Cosine	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
The following Fourier transform pairs are derivable only for continuous variables, denoted as before by t and z for spatial variables and by μ and ν for frequency variables. These results can be used for DFT work by sampling the continuous forms.	
12) Differentiation (The expressions on the right assume that $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$)	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) Gaussian	$A 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow A e^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$ (A is a constant)

[†] Assumes that the functions have been extended by zero padding. Convolution and correlation are associative, commutative, and distributive.

Filtrado en el dominio de la frecuencia

Generalidades

- El componente de frecuencia $u=v=0$ es proporcional al promedio de intensidad de la imagen.
- Las bajas frecuencias corresponden a los componentes de intensidad de la imagen que cambian lentamente.
 - ✓ Ejemplo: en una imagen de una habitación, pueden ser las variaciones de intensidad de las paredes y el piso.
- Las altas frecuencias corresponden a cambios rápidos de intensidad en la imagen.
 - ✓ Ejemplo: bordes de objetos en una imagen.

El filtrado en frecuencia se basa en modificar la transformada de Fourier de la imagen de entrada para obtener un objetivo específico y luego usar la transformada inversa de Fourier para obtener el resultado procesado en el dominio espacial.

Ejemplo: asociaciones visuales entre el dominio espacial y el dominio de la frecuencia espacial

- Bordes marcados a $\pm 45^\circ$.
- 2 líneas de óxido blancas que salen de la falla térmica inducida.

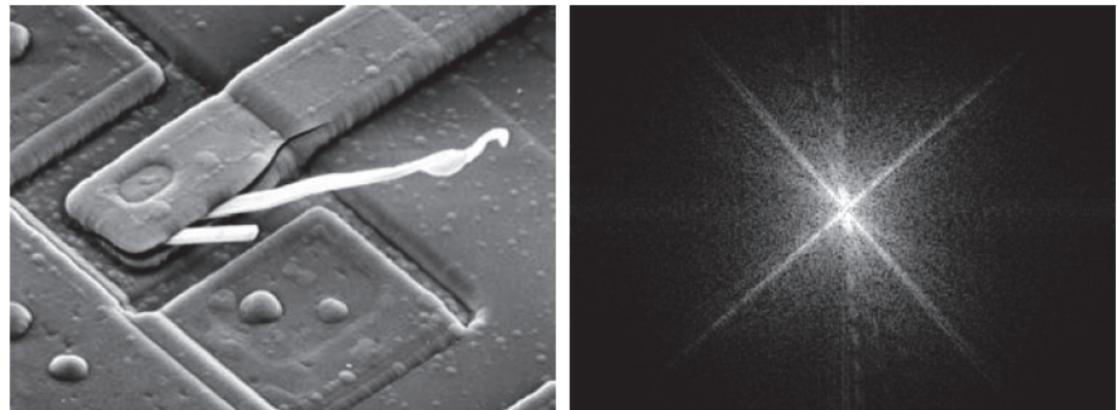


FIGURE 4.29 (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

Fundamentos de filtrado en el dominio de la frecuencia

- Dada una imagen digital $f(x,y)$ de tamaño $M \times N$, la ecuación básica de filtrado es:

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1} [H(u,v) F(u,v)]$$

- Donde $H(u,v)$ es la función de filtrado, también conocida como función de transferencia del filtro, o simplemente filtro.
- Las funciones F , H , y g son arreglos de $M \times N$.
- **Nota:** El producto entre H y F se hace usando operaciones de arreglo!!

- La especificación de $H(u,v)$ se simplifica considerablemente, usando funciones que son simétricas respecto a su centro.
- **Nota:** Si usted diseña el filtro directamente en frecuencia y lo crea “centrado”, recuerde centrar también $F(u,v)$ antes de realizar el proceso de filtrado.

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

- De la misma forma, si H no está centrado, entonces F tampoco debe estarlo al momento de hacer el filtrado.

Filtro para remover el componente de DC de la imagen

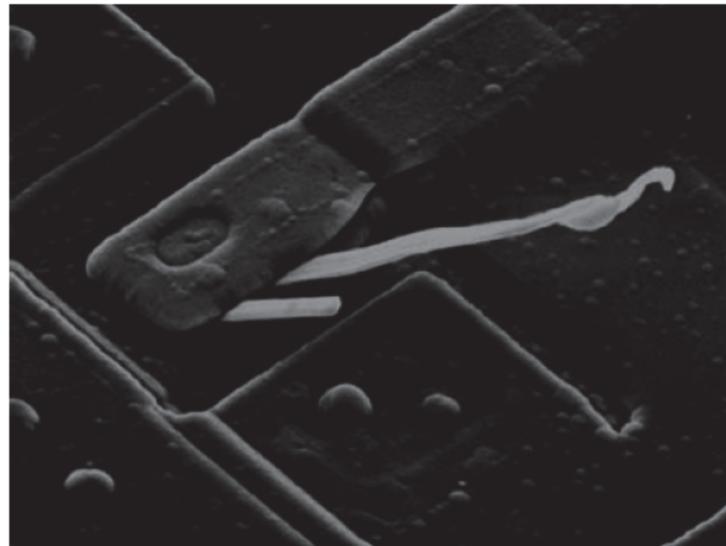
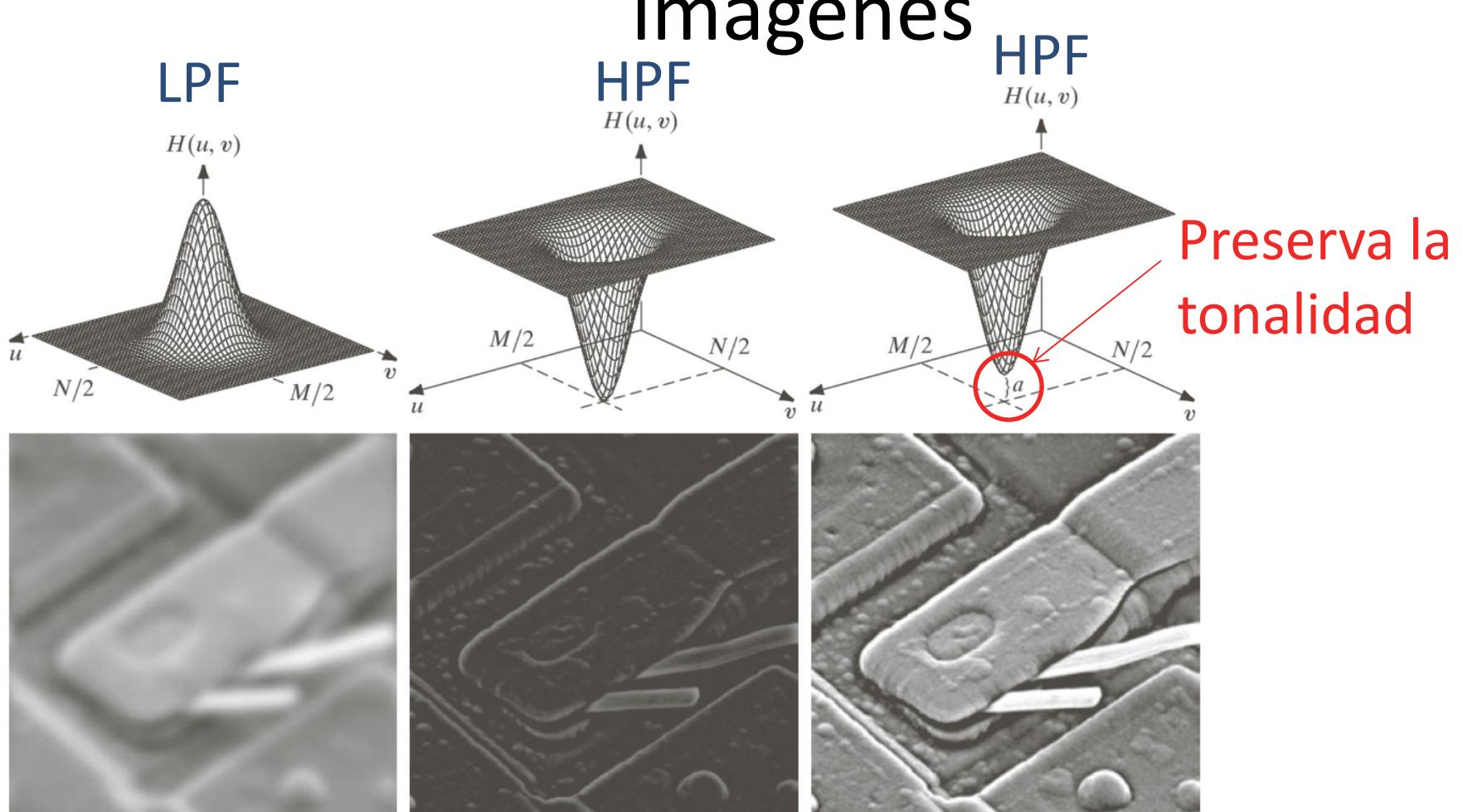


FIGURE 4.30
Result of filtering
the image in
Fig. 4.29(a) by
setting to 0 the
term $F(M/2, N/2)$
in the Fourier
transform.

- Filtro $H(u,v)$ con un cero en el centro y unos en todas las otras posiciones.
- Reduce el valor promedio de intensidad de la imagen a cero.
- Los valores negativos que surgen se colocaron en cero para la visualización de la imagen.

Filtros paso bajo y paso alto para imágenes



a	b	c
d	e	f

FIGURE 4.31 Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used $a = 0.85$ in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).

Efectos del “wraparound error” en el proceso de filtrado cuando no se añaden los ceros requeridos

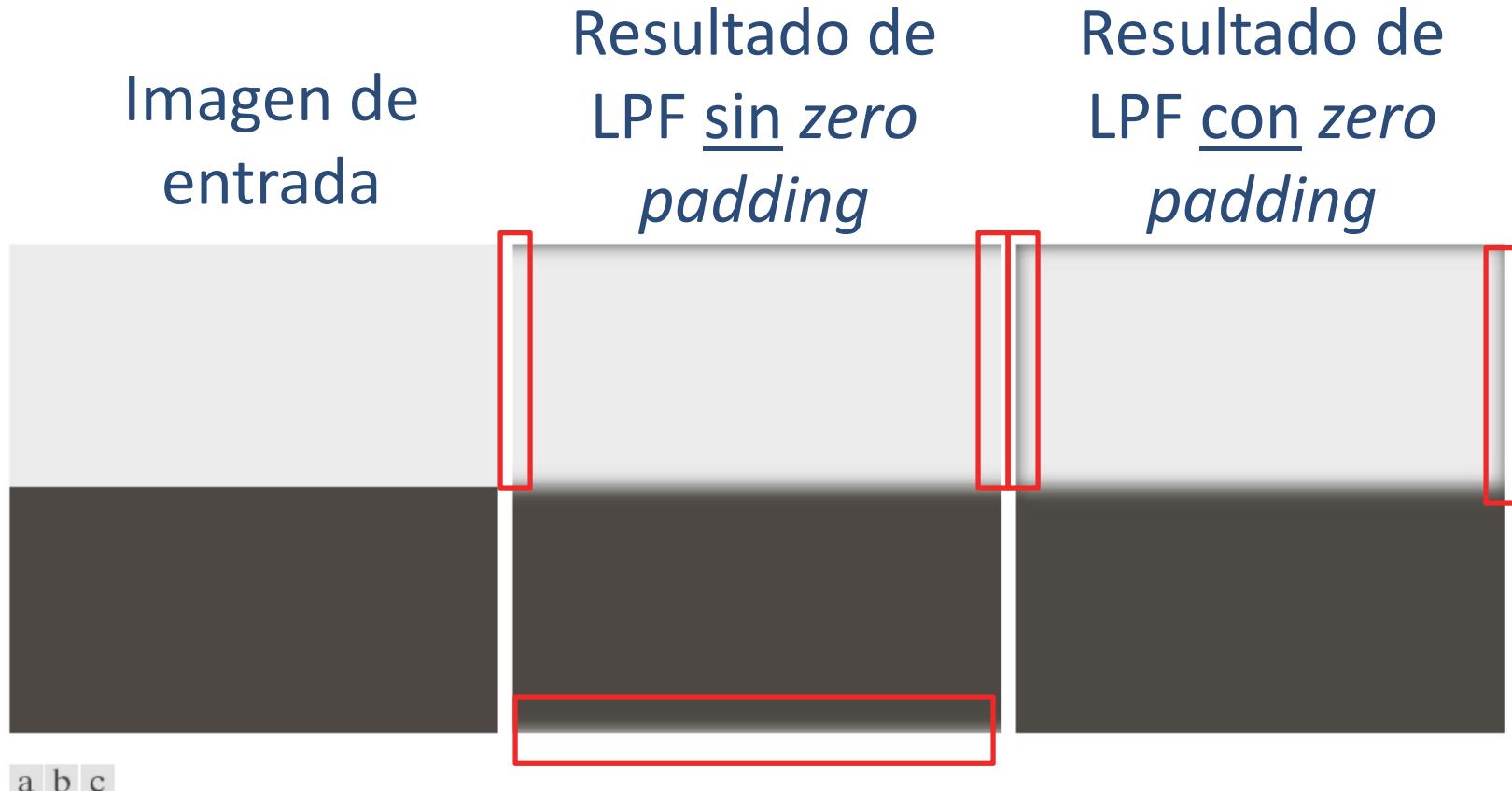


FIGURE 4.32 (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).

Cómo se explican los resultados de la diapositiva anterior?

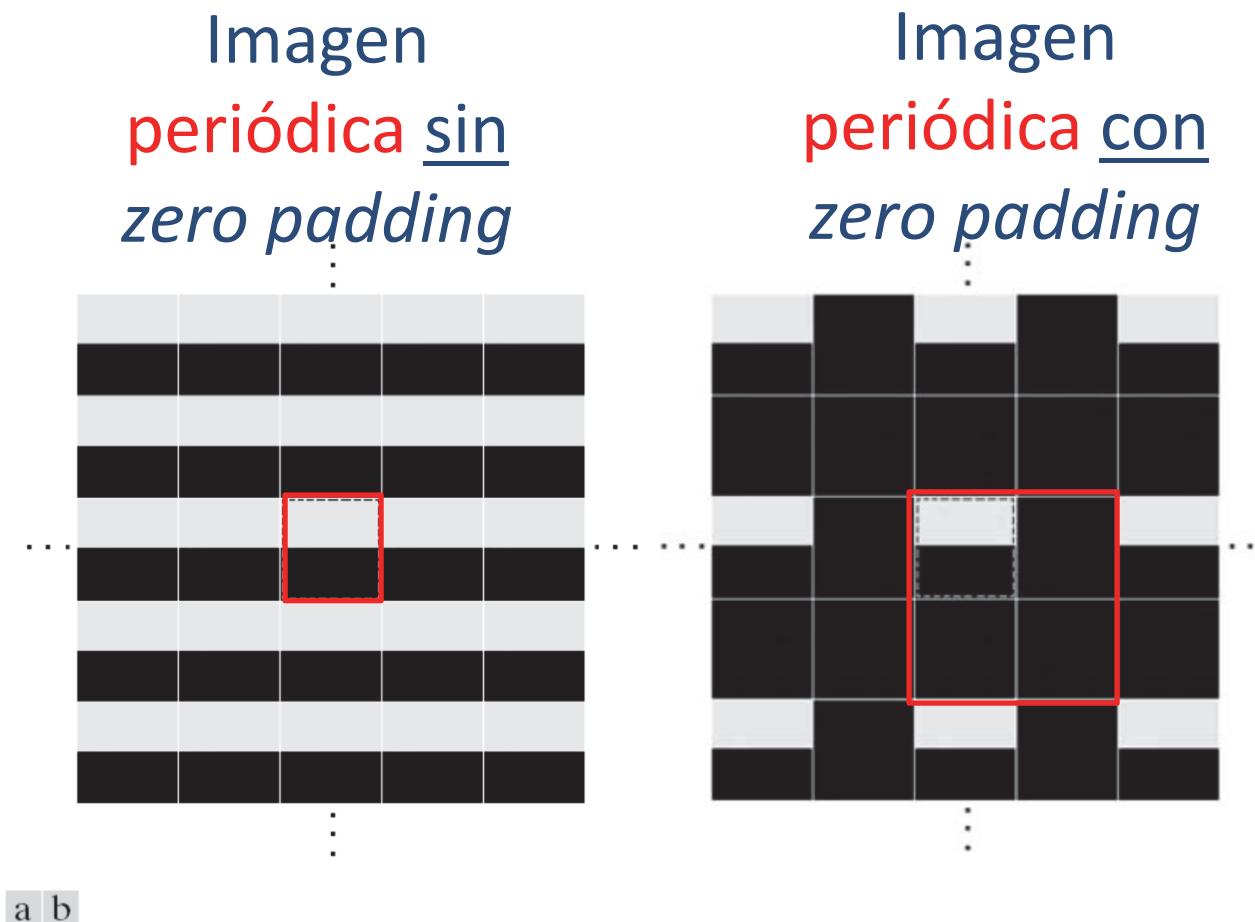


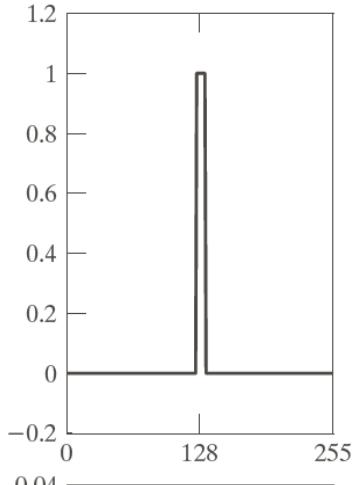
FIGURE 4.33 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

Si no se hace el relleno con ceros (*zero padding*) correspondiente antes del filtrado se pueden obtener resultados erróneos.

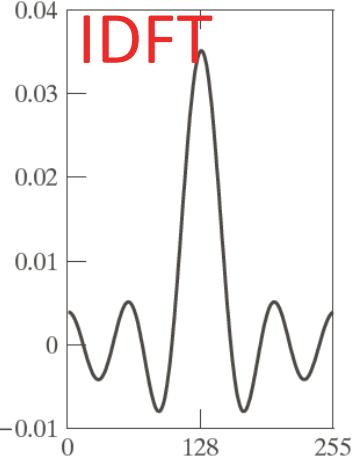
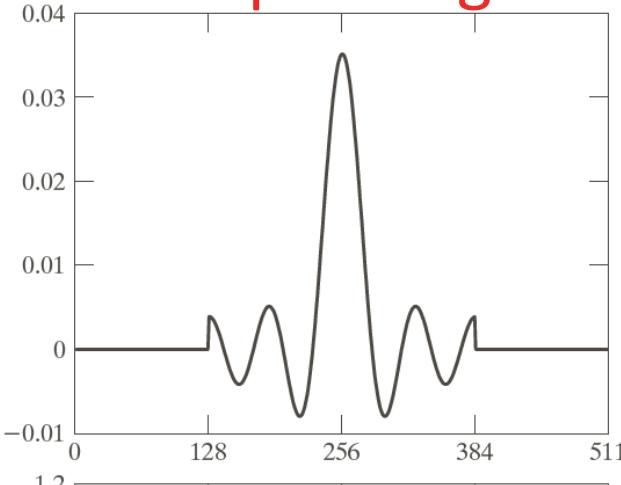
Qué sucede con el *zero padding* del filtro?

LPF original

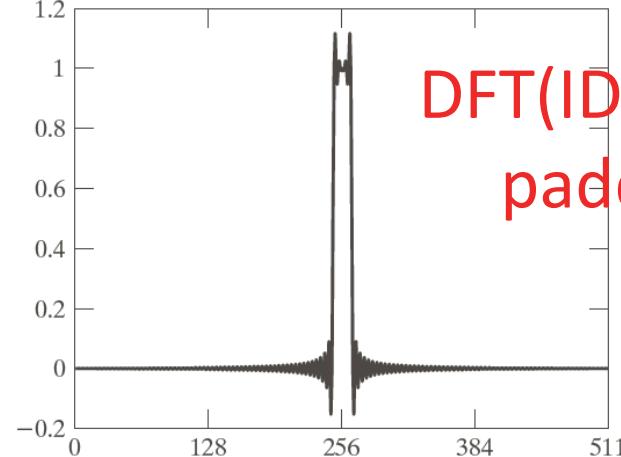
Centrado en
frecuencia



IDFT, zero
padding



DFT(IDFT, zero
padding)



a c
b d

FIGURE 4.34

(a) Original filter specified in the (centered) frequency domain.
(b) Spatial representation obtained by computing the IDFT of (a).
(c) Result of padding (b) to twice its length (note the discontinuities).
(d) Corresponding filter in the frequency domain obtained by computing the DFT of (c). Note the ringing caused by the discontinuities in (c). (The curves appear continuous because the points were joined to simplify visual analysis.) 59

- El dilema consiste en encontrar un balance entre:
wraparound error vs ringing.
- En el libro se hace el “*zero padding*” de la imagen hasta que quede de dimensiones $P \times Q$ y se diseña el filtro de ese mismo tamaño en frecuencia.
 - ✓ Esto introduce un poco de “*wraparound error*”, pero es mejor que lidiar con los efectos de “*ringing*”.

Filtros con cero desplazamiento de fase

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

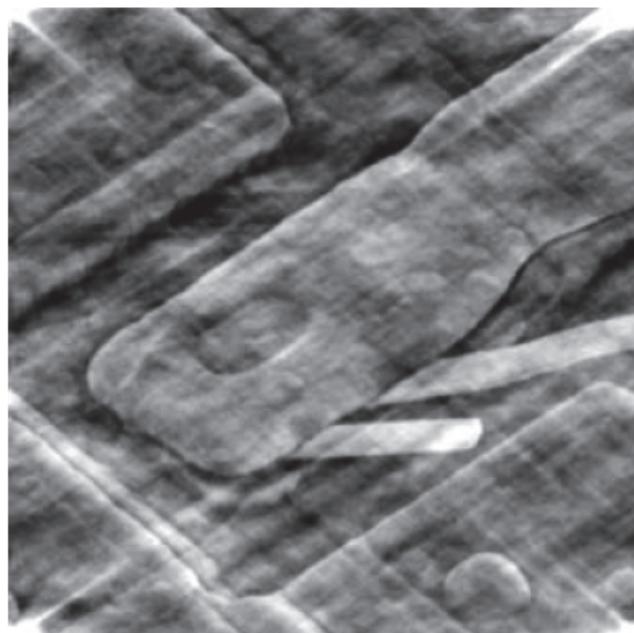
$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)] = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)[R(u, v) + jI(u, v)]\}$$

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)]$$

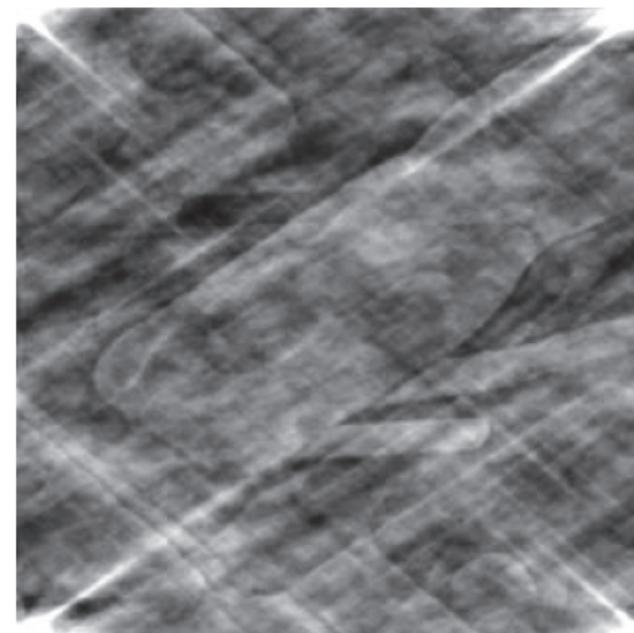
- Si los componentes del filtro $H(u, v)$ son **reales**, el filtro no afecta la fase original de la imagen. Estos filtros se conocen como **filtros con cero desplazamiento de fase** (*zero phase shift filters*).
- Explicación: estos filtros afectan de la misma manera la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier de la imagen de entrada.

Efectos de la alteración de fase en una imagen

Reconstrucción multiplicando la fase por 0.5



Reconstrucción multiplicando la fase por 0.25



a b

FIGURE 4.35
(a) Image resulting from multiplying by 0.5 the phase angle in Eq. (4.6-15) and then computing the IDFT. (b) The result of multiplying the phase by 0.25. The spectrum was not changed in either of the two cases.

En ambos caso se dejó intacta la magnitud

Algoritmo para filtrar en el dominio de la frecuencia

1. Dada una imagen de entrada $f(x,y)$ de tamaño $M \times N$, obtenga los parámetros P y Q de acuerdo con las ecuaciones de la diapositiva 42. Típicamente, se selecciona $P=2M$ y $Q=2N$.
2. Genere una nueva imagen $f_p(x,y)$, de tamaño $P \times Q$ agregando el número necesario de ceros a $f(x,y)$.
3. Multiplique $f_p(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ para centrar su transformada.
4. Calcule la DFT de la imagen del paso 3.
5. Genere un filtro **real y simétrico** $H(u,v)$ de tamaño $P \times Q$ con centro en las coordenadas $(P/2,Q/2)$.

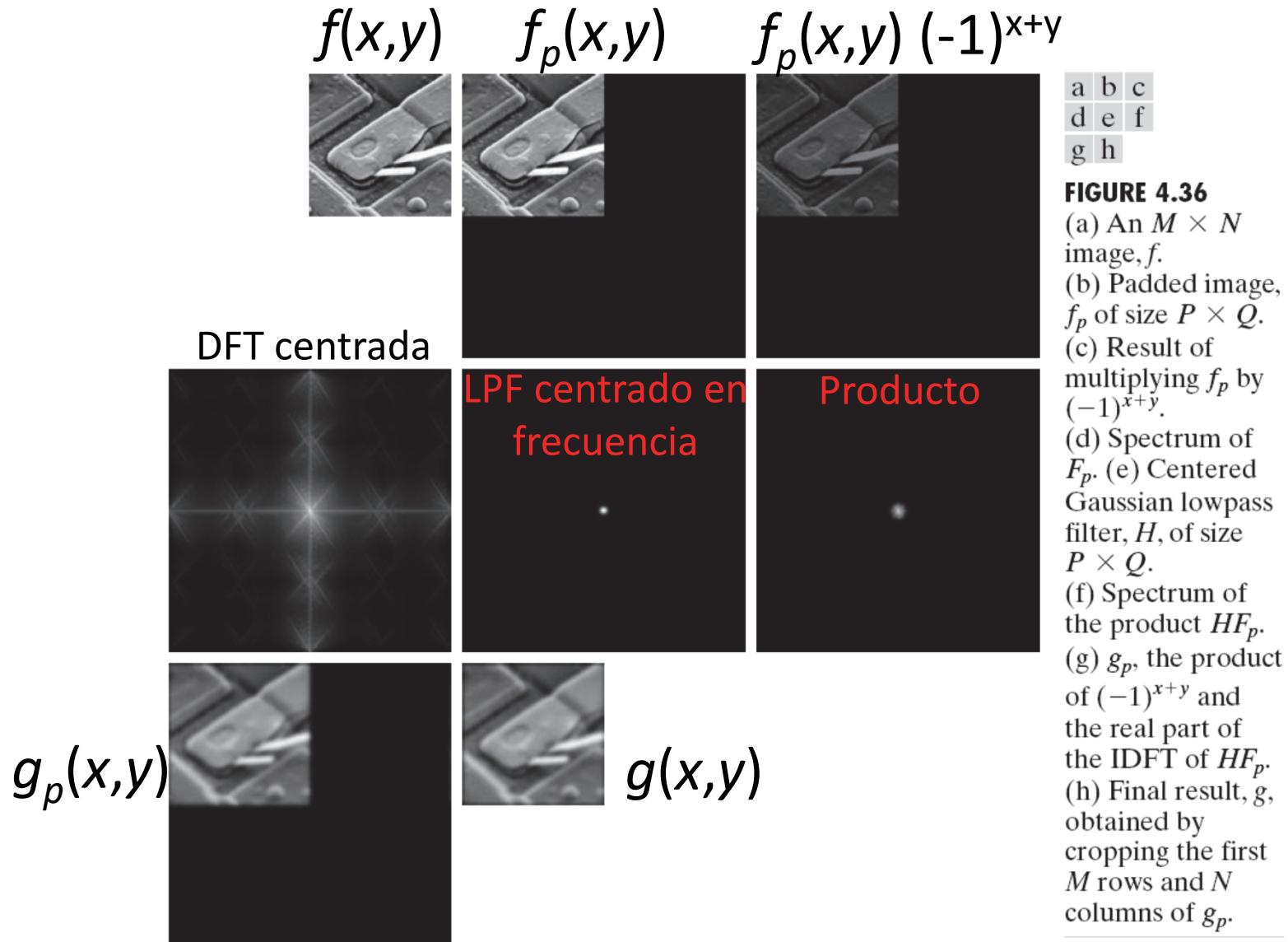
6. Forme el producto $G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$ usando multiplicación de arreglos, es decir $G(i,k)=H(i,k)F(i,k).$
7. Obtenga la imagen procesada:

$$g_p(x,y) = \left\{ \text{real} \left[\mathcal{F}^{-1} [G(u,v)] \right] \right\} (-1)^{x+y}$$

- ✓ Nota: solo se selecciona la parte real para ignorar los valores imaginarios parásitos que aparecen por imprecisiones computacionales.
- ✓ El subíndice p indica que se trata de un arreglo que ha sido rellenoado (*padded*).

8. Obtenga el resultado final, $g(x,y)$, tomando únicamente la región de $M \times N$ elementos del cuadrante superior izquierdo de $g_p(x,y)$.

Ejemplo de aplicación del algoritmo



Terminología

- Dado $h(x,y) \leftrightarrow H(u,v)$
- $h(x,y)$ se conoce como la respuesta al impulso de $H(u,v)$.
- Adicionalmente como todas las cantidades involucradas en la implementación discreta de esta ecuación son finitas, $h(x,y)$ se conoce como filtro de respuesta finita al impulso.

Tarea

- Implemente una función en Matlab que le permita filtrar en frecuencia una imagen de entrada en escala de grises / de dimensiones $M \times N$, dado un filtro real y simétrico H de dimensiones $2M \times 2N$.

Preguntas??