

Filtrado en el dominio de la frecuencia (Parte 4)

Agenda

- Filtros paso alto.
- Filtros selectivos en frecuencia.

Realce de imágenes usando filtros en el dominio de la frecuencia

Metodología

- El realce de imágenes se logra aplicando filtros paso alto (**HPF**) en frecuencia.
- Se busca atenuar los componentes de baja frecuencia sin alterar los componentes de alta frecuencia.
- Al igual que para los LPF, solo se considerarán filtros HPF que presenten **cero desplazamiento de fase** y que sean **radialmente simétricos**.
- Es posible obtener un filtro paso alto a partir de un filtro paso bajo usando:

$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

Nomenclatura

$H(u,v)$ Filtro discreto en frecuencia de tamaño $P \times Q$

Donde:

$$u = 0, 1, 2, \dots, P - 1$$

$$v = 0, 1, 2, \dots, Q - 1$$

Filtro paso alto ideal

- Un filtro paso alto **ideal** se define como:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Donde D_0 es la frecuencia de corte y $D(u,v)$ está dado por:

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$

- Los filtros paso alto **ideales** no son **físicamente** realizables.

Filtro paso alto Butterworth

- Un filtro paso alto **Butterworth** se define como:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u,v)} \right]^{2n}}$$

- Donde D_0 es la frecuencia de corte, n es el orden del filtro, y $D(u,v)$ está dado por:

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2}$$

Filtro paso alto Gaussiano

- Un filtro paso alto **Gaussiano** se define como:

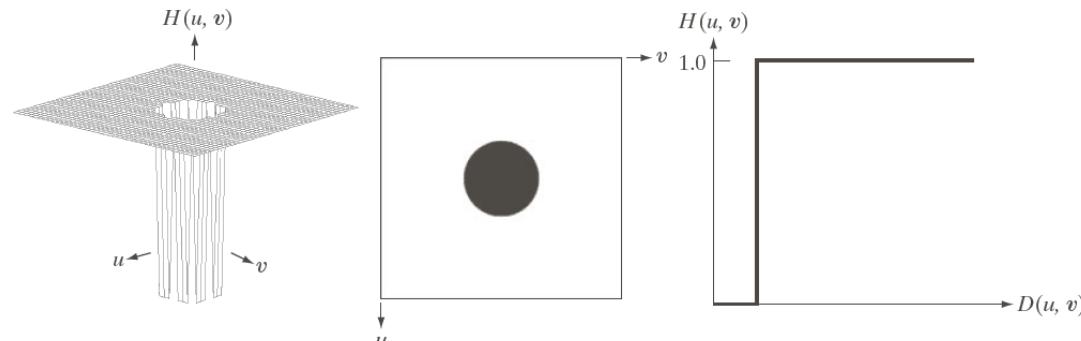
$$H(u,v) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^2}$$

- Donde D_0 es la frecuencia de corte y $D(u,v)$ está dado por:

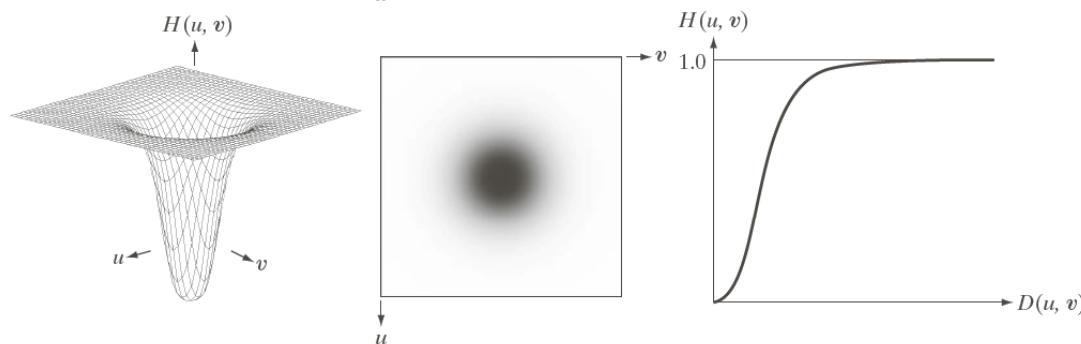
$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$

HPF en frecuencia: Ideal, Butterworth y Gaussiano

Ideal



Butterworth



Gaussiano

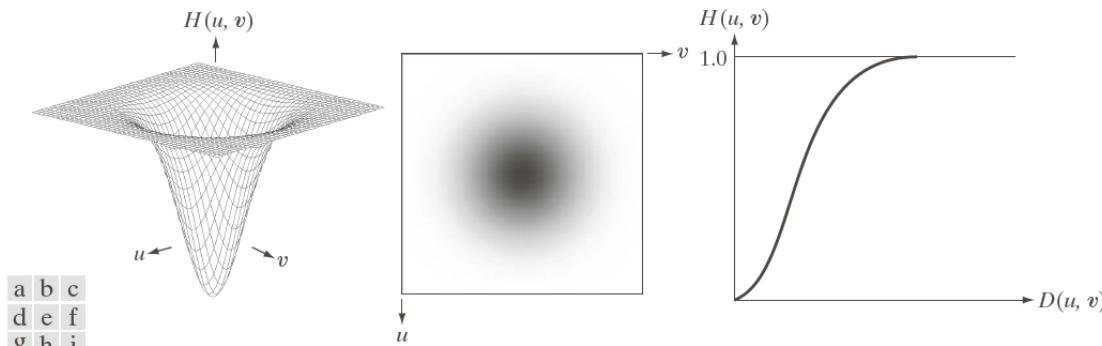


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

HPF en el dominio del espacio: Ideal, Butterworth y Gaussiano

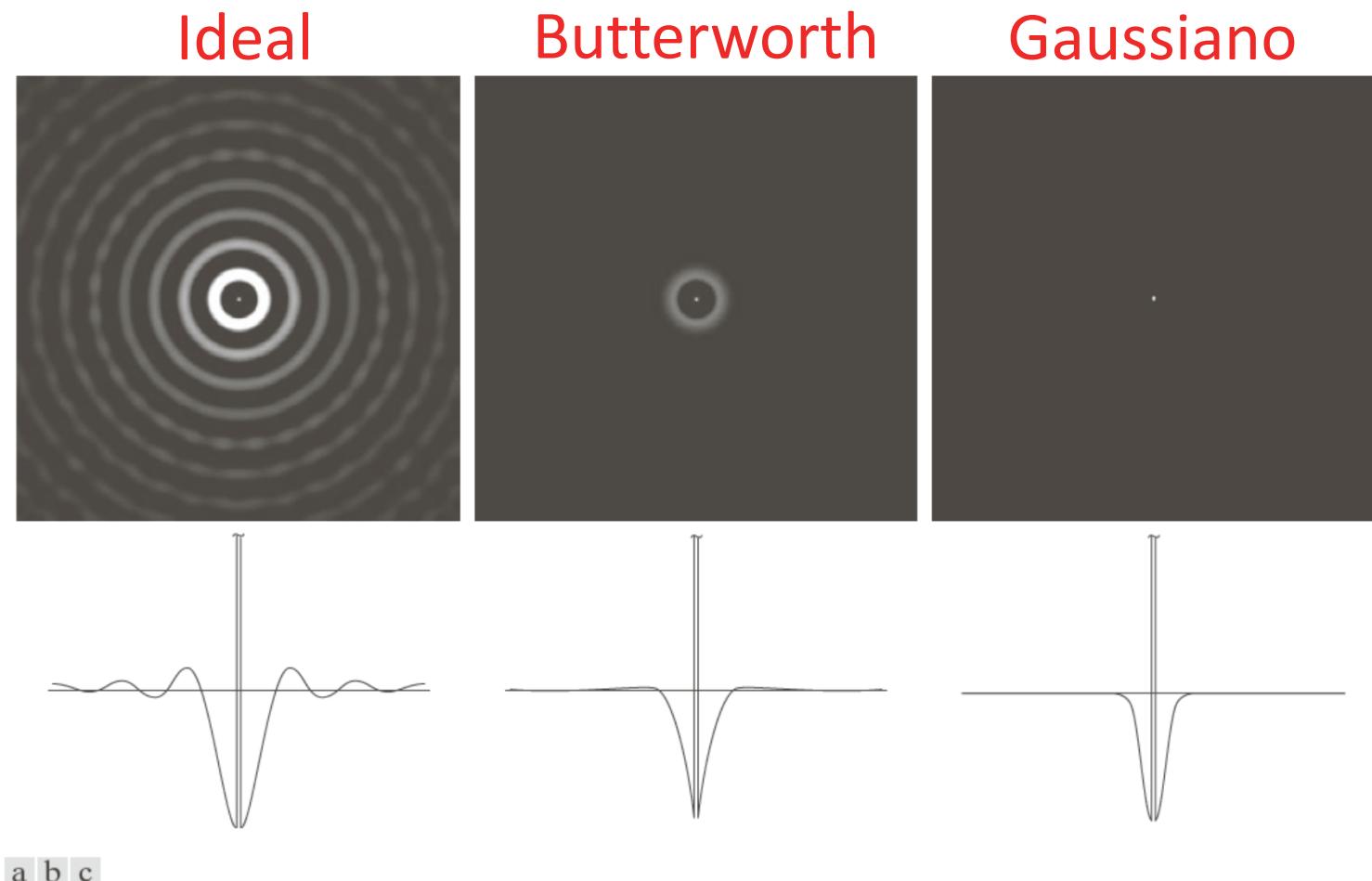


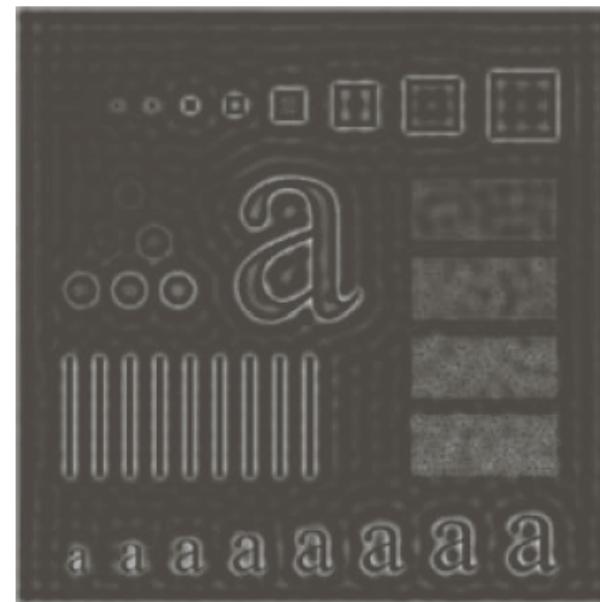
FIGURE 4.53 Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers. 10

Resultados obtenidos al aplicar un filtro paso alto ideal

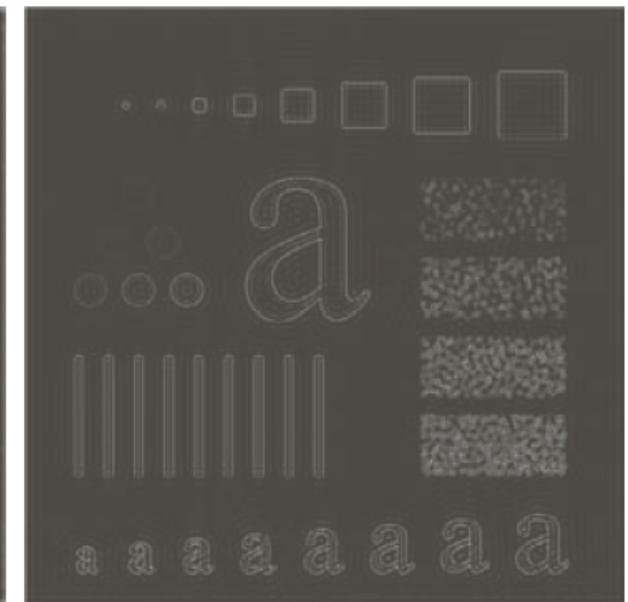
$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$

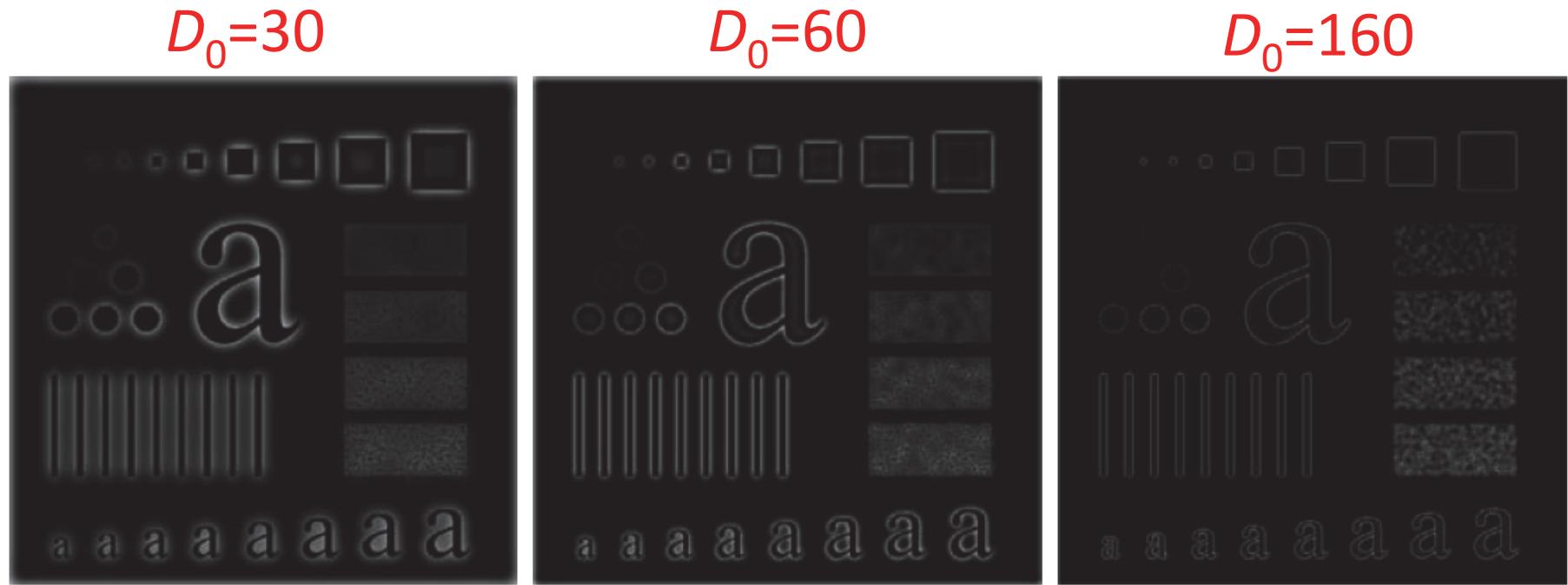


a b c

FIGURE 4.54 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using an IHPF with $D_0 = 30, 60$, and 160 .

Nota: Recuerde la relación “inversa” entre la respuesta en el dominio de la frecuencia y en el dominio del espacio.

Resultados obtenidos al aplicar un filtro paso alto Butterworth de segundo orden ($n=2$)



a | b | c

FIGURE 4.55 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a BHPF of order 2 with $D_0 = 30, 60$, and 160 , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). These results are much smoother than those obtained with an IHPF.

Resultados obtenidos al aplicar un filtro paso alto **Gaussiano**

$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$



a b c

FIGURE 4.56 Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a GHPF with $D_0 = 30, 60$, and 160 , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). Compare with Figs. 4.54 and 4.55.

Tabla comparativa

TABLE 4.5

Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Ejemplo de aplicación de HPF

Imagen de
entrada de
 1026×962

Imagen filtrada con
HPF Butterworth,
 $n=4, D_0=50$

Imagen
binaria



a b c

FIGURE 4.57 (a) Thumb print. (b) Result of highpass filtering (a). (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of the U.S. National Institute of Standards and Technology.)

Laplaciano en el dominio de la frecuencia

$$H(u, v) = -4\pi^2 (u^2 + v^2)$$

- O respecto al centro del rectángulo de frecuencia:

$$H(u, v) = -4\pi^2 \left[\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2 \right] = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

- Laplaciano de la imagen en el espacio:

$$\nabla^2 f(x, y) = IDFT \{ H(u, v) F(u, v) \}$$

- Para resaltar la imagen usando el Laplaciano:

$$g(x, y) = f(x, y) + c \nabla^2 f(x, y) \quad \text{Para este caso } c=-1.$$

Nota: Antes de aplicar el realce, escalar la imagen a [0,1] y el Laplaciano a [-1,1]

Ejemplo de aplicación del Laplaciano en frecuencia

Imagen de entrada



Imagen filtrada



a b

FIGURE 4.58
(a) Original, blurry image.
(b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain. Compare with Fig. 3.38(e).

Enmascarado de desenfoque, filtrado *highboost*, filtrado con énfasis de alta frecuencia

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y)$$

$$f_{LP}(x, y) = IDFT\{H_{LP}(u, v)F(u, v)\}$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k[g_{mask}(x, y)]$$

Si $k=1$: Enmascarado de desenfoque.

Si $k>1$ Filtrado *highboost*.

$$g(x, y) = IDFT\{F(u, v)[1 + k[1 - H_{LP}(u, v)]]\}$$

$$g(x, y) = IDFT\{F(u, v)[1 + (k)H_{HP}(u, v)]\}$$

Filtro con énfasis de alta frecuencia: $[1 + (k)H_{HP}(u, v)]$

Generalización del filtro con énfasis de alta frecuencia

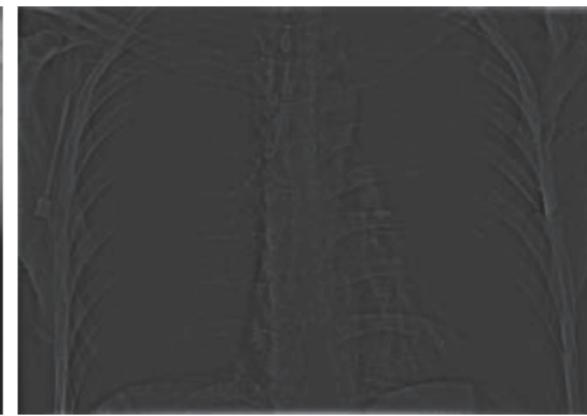
$$g(x,y) = IDFT \left\{ \left[k_1 + k_2 H_{HP}(u,v) \right] F(u,v) \right\}$$

$k_1 \geq 0$ Controla el offset desde el origen.

$k_2 \geq 0$ Controla las contribuciones de alta frecuencia.

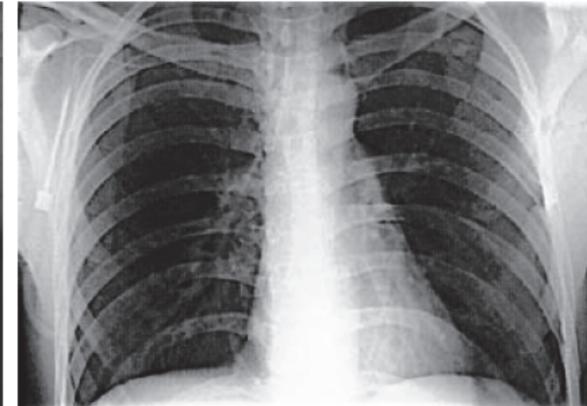
Ejemplo de aplicación combinando varias técnicas de PDI

Imagen de entrada



Resultado de un HPF Gaussiano

Resultado con un filtro de énfasis de alta freq.



Ecualización del histograma

a
b
c
d

FIGURE 4.59 (a) A chest X-ray image. (b) Result of highpass filtering with a Gaussian filter. (c) Result of high-frequency-emphasis filtering using the same filter. (d) Result of performing histogram equalization on (c). (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)

Filtros homomórficos

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

$i(x, y)$ Iluminación.
 $r(x, y)$ Reflectancia.

- El componente de iluminación generalmente se caracteriza por variaciones lentas en el dominio del espacio.
- El componente de reflectancia tiende a cambiar abruptamente, particularmente en las uniones de objetos diferentes.

Aplicando logaritmo a ambos lados:

$$z(x, y) = \ln[f(x, y)] = \ln[i(x, y)r(x, y)]$$

$$z(x, y) = \ln[i(x, y)] + \ln[r(x, y)]$$

$$\mathcal{F}\{z(x, y)\} = \mathcal{F}\{\ln[i(x, y)]\} + \mathcal{F}\{\ln[r(x, y)]\}$$

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- La **iluminación** se “asocia” a las frecuencias **bajas** de la transformada de Fourier del logaritmo de la imagen de entrada.
- La **reflectancia** se “asocia” a las frecuencias **altas** de la transformada de Fourier del logaritmo de la imagen de entrada.

Ahora se aplica un filtro H a los dos componentes:

$$S(u, v) = H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v)$$

$$s(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{S(u, v)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

$$i'(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\}$$

$$r'(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados:

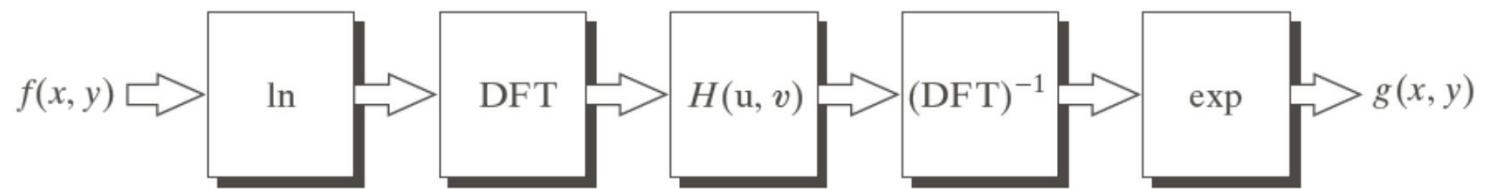
$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y) + r'(x, y)} = e^{i'(x, y)}e^{r'(x, y)} = i_0(x, y)r_0(x, y)$$

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)}$$

$$r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$

Pasos para aplicar un filtro homomórfico

FIGURE 4.60
Summary of steps
in homomorphic
filtering.



- Atenúa la contribución de las frecuencias bajas (iluminación).
- Amplifica la contribución de las frecuencias altas (reflectancia).
- Logra comprimir el rango dinámico y mejorar el contraste.

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-c[D^2(u, v)/(D_0)^2]} \right] + \gamma_L$$

$\gamma_L < 1$
 $\gamma_H > 1$

La constante c , controla la pendiente de la función en la transición de γ_L a γ_H .

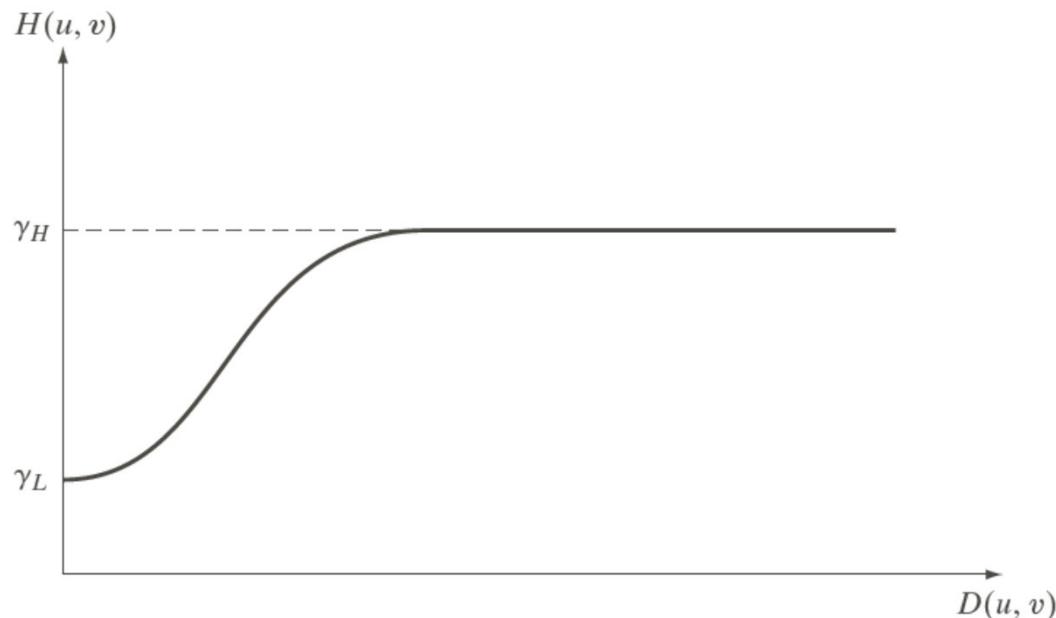


FIGURE 4.61
 Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and $D(u, v)$ is the distance from the center.

Ejemplo de aplicación de un filtro homomórfico

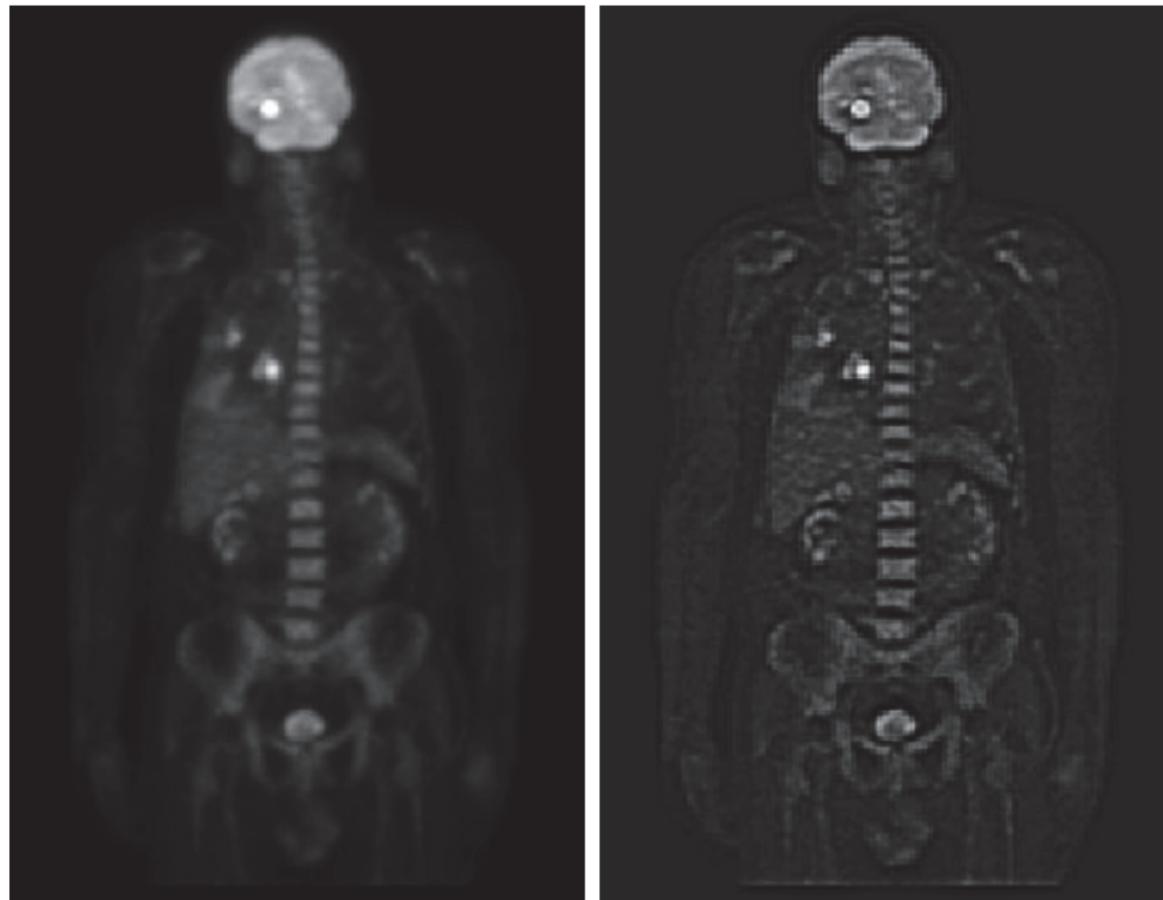


FIGURE 4.62
(a) Full body PET scan. (b) Image enhanced using homomorphic filtering. (Original image courtesy of Dr. Michael E. Casey, CTI PET Systems.)

Otros filtros selectivos en frecuencia

- En algunas ocasiones resulta de interés operar sobre bandas específicas de frecuencia:
 - ✓ Filtros pasa banda.
 - ✓ Filtros rechazo de banda.

Filtros de rechazo de banda

TABLE 4.6

Bandreject filters. W is the width of the band, D is the distance $D(u, v)$ from the center of the filter, D_0 is the cutoff frequency, and n is the order of the Butterworth filter. We show D instead of $D(u, v)$ to simplify the notation in the table.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW}\right]^2}$

- Donde D_0 es el centro radial de la banda, W es el ancho de la banda, y D está dado por:

$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$

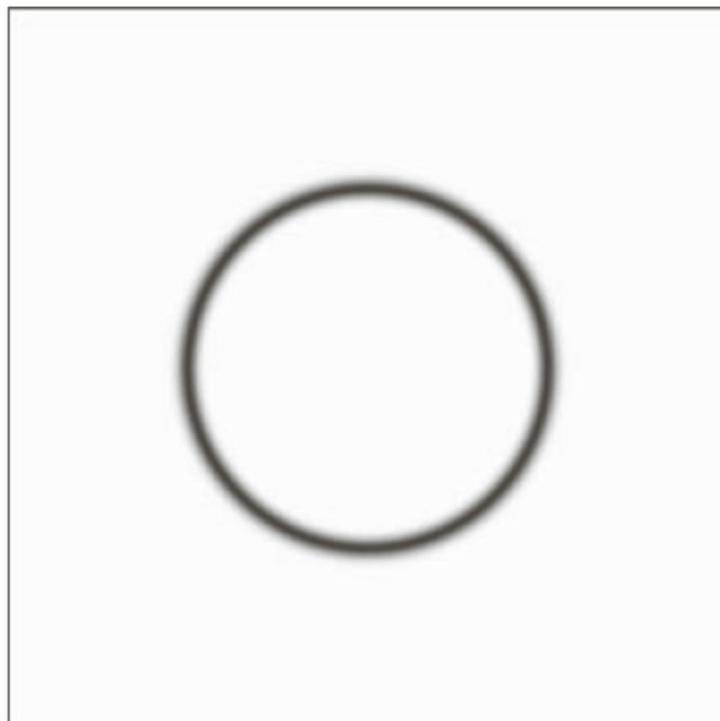
Filtros pasa banda

- Un filtro pasa banda se puede obtener a partir de un filtro rechazo de banda usando la siguiente ecuación:

$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$

Filtros de rechazo de banda y pasa banda

Filtro de rechazo de banda Gaussiano



Filtro pasa banda Gaussiano



a b

FIGURE 4.63
(a) Bandreject Gaussian filter.
(b) Corresponding bandpass filter.
The thin black border in (a) was added for clarity; it is not part of the data.

Filtros de muesca (*notch*)

- Son los filtros selectivos de mayor utilidad.
- Rechazan o pasan frecuencias en un vecindario predefinido alrededor del centro del rectángulo de frecuencia.
- Como los filtros de cero desplazamiento de fase deben ser simétricos, una muesca con centro en (u_0, v_0) debe tener una muesca correspondiente ubicada en $(-u_0, -v_0)$.

Filtros de muesca **de rechazo**

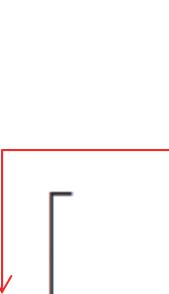
- Se construyen como productos de filtros paso alto cuyos centros han sido trasladados a los centros de las muescas.

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^O H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

- Donde $H_k(u, v)$ y $H_{-k}(u, v)$ son filtros paso alto cuyos centros se ubican en (u_k, v_k) y $(-u_k, -v_k)$ respectivamente.

$$D_k(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} - u_k\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_k\right)^2}$$
$$D_{-k}(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} + u_k\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_k\right)^2}$$

Ejemplo de un filtro de muesca de rechazo Butterworth de orden n , con tres pares de muescas

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{D_{0k}}{D_k(u, v)} \right]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{D_{0k}}{D_{-k}(u, v)} \right]^{2n}} \right]$$


La constante D_{0k} es la misma para cada par de muescas,
pero puede ser diferente para pares diferentes de muescas.

Filtros de muesca **de paso**

- Un filtro de muesca de paso se puede obtener a partir de un filtro muesca de rechazo usando la expresión:

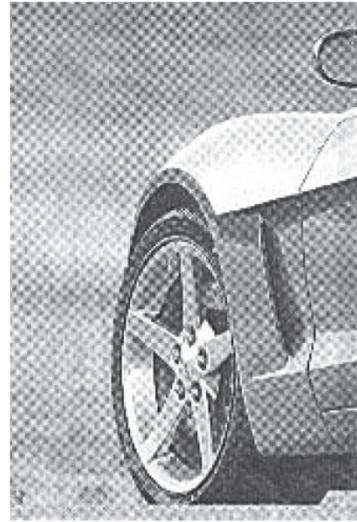
$$H_{NP}(u, v) = 1 - H_{NR}(u, v)$$

Observación práctica

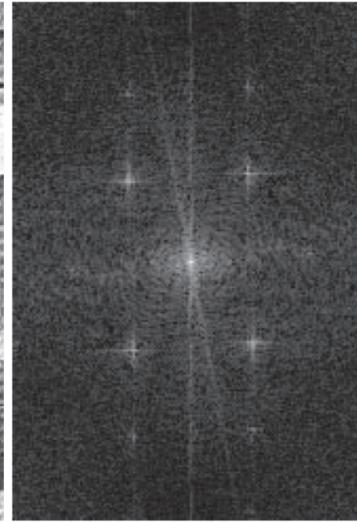
- Cuando se trabaja con filtros de muescas, se opera sobre la DFT de la imagen sin haberla rellenado previamente con ceros.
- Las ventajas de trabajar de manera interactiva con la DFT original sobrepasa los problemas que surgen por errores de “*wraparound*” discutidos en clases anteriores.

Primer ejemplo de aplicación de filtros de muescas

Imagen de entrada con patrones de moiré



Espectro de magnitud



Espectro de magnitud luego de aplicar el filtro de muesca de rechazo tipo Butterworth con $D_0=3$; $n=4$

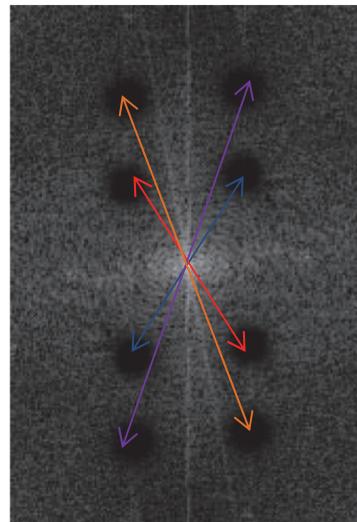
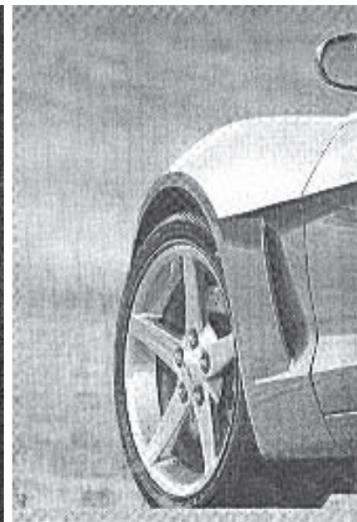


Imagen de salida



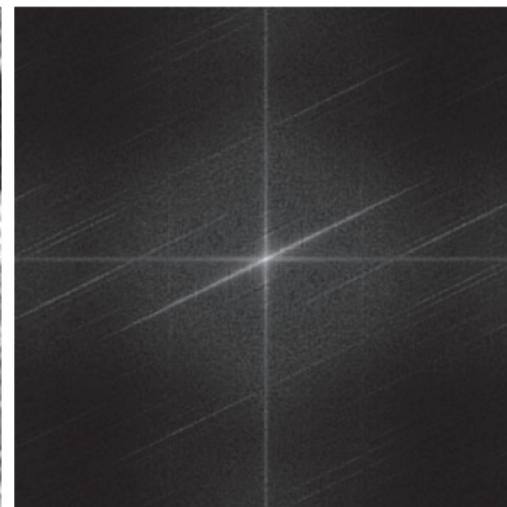
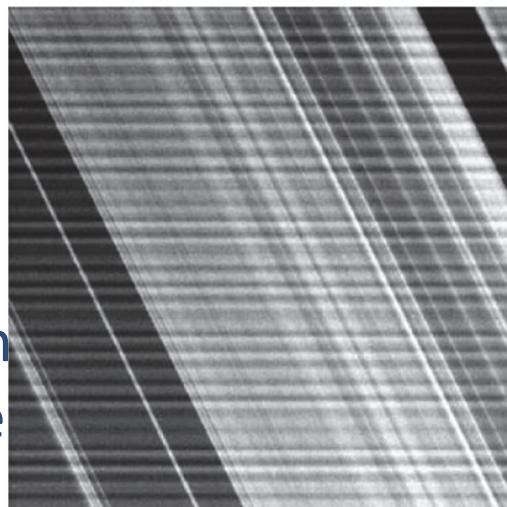
a
b
c
d

FIGURE 4.64

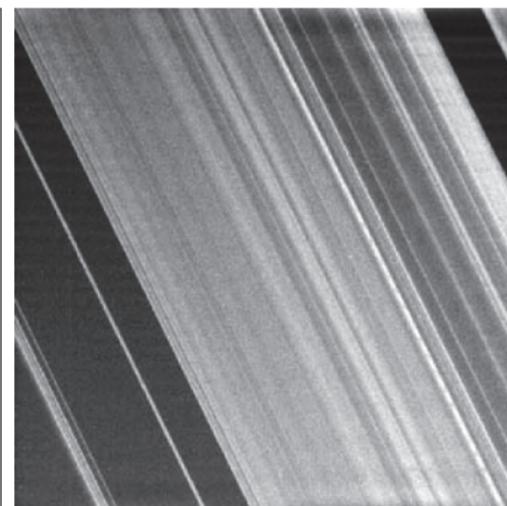
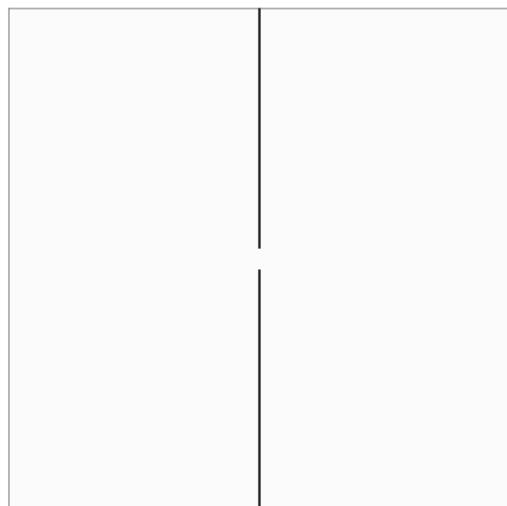
- (a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.
(b) Spectrum.
(c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.
(d) Filtered image.

Segundo ejemplo de aplicación de filtros de muescas

Imagen de
entrada con
marcas
horizontales
que se repiten
verticalmente



Espectro de
magnitud de
un filtro de
muesca
angosta
rectangular
de rechazo



Espectro
de
magnitud

Imagen
de salida

a b
c d

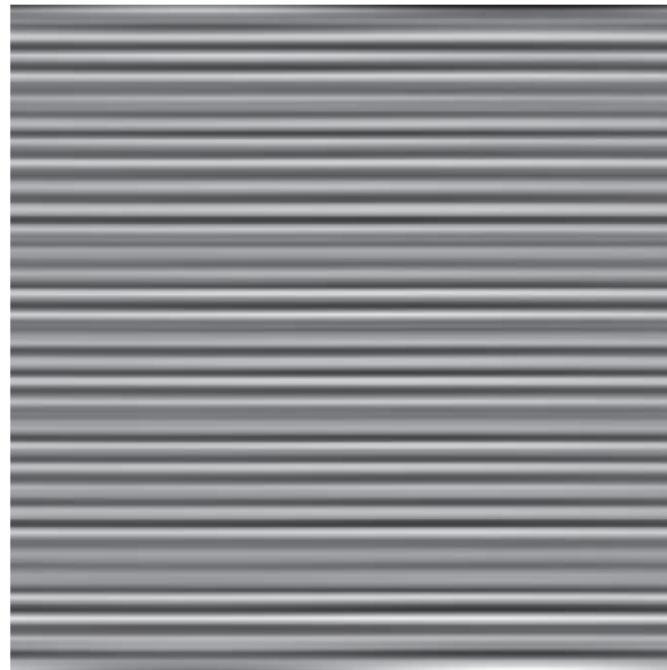
FIGURE 4.65
(a) 674×674 image of the Saturn rings showing nearly periodic interference.
(b) Spectrum: The bursts of energy in the vertical axis near the origin correspond to the interference pattern.
(c) A vertical notch reject filter.
(d) Result of filtering. The thin black border in (c) was added for clarity; it is not part of the data.
(Original image courtesy of Dr. Robert A. West, NASA/JPL.)

Cómo recuperar el patrón de interferencia del ejemplo anterior?

Espectro de magnitud
luego de aplicar un filtro
de muesca angosta
rectangular **de paso** a la
imagen de entrada



Patrón de interferencia
espacial resultante



a b

FIGURE 4.66
(a) Result (spectrum) of applying a notch pass filter to the DFT of Fig. 4.65(a).
(b) Spatial pattern obtained by computing the IDFT of (a).

Comentarios sobre la ventaja computacional del algoritmo FFT para una dimensión

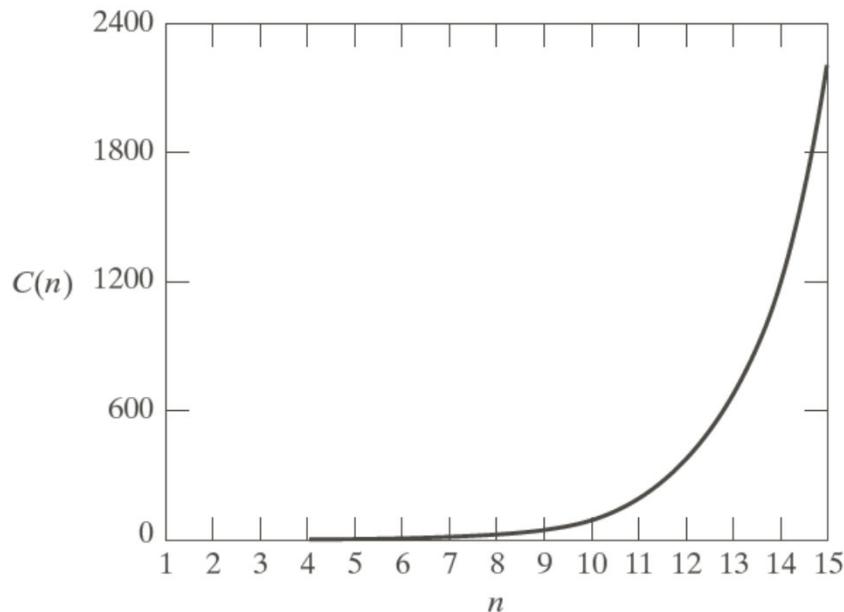


FIGURE 4.67
Computational advantage of the FFT over a direct implementation of the 1-D DFT. Note that the advantage increases rapidly as a function of n .

Nota: La DFT en 2 dimensiones de una imagen se puede calcular aplicando primero la DFT de una dimensión a cada una de las filas de la imagen, y luego aplicando la DFT a cada una de las columnas del resultado obtenido en el paso anterior.

Tarea

- Implemente una función en Matlab que le permita generar filtros paso alto ideales, Butterworth, y Gaussianos, de tamaño MxN según lo requiera el usuario. Tenga presente que cada filtro requiere un número diferente de parámetros de entrada.

- Filtre al menos una imagen en escala de grises de su elección, con tres tipos de filtros paso alto diferentes y observe que sucede cuando cambia la frecuencia de corte D_0 , y el orden del filtro (n) en el caso del filtro Butterworth.

- Implemente una función en Matlab que genere un filtro homomórfico como función de M , N , D_0 , γ_L , γ_H , c .
- Implemente una función en Matlab que genere bien sea un filtro rechazo de banda o pasabanda. El usuario debe poder escoger entre un filtro ideal, Butterworth, y Gaussiano, y debe poder ingresar los valores D_0 , W y n para el filtro Butterworth.

- Implemente una función en Matlab que pueda generar filtros muesca de rechazo y de paso, tipo ideal, Butterworth, o Gaussiano. El usuario debe especificar el número de pares del filtro (Q) y las frecuencias correspondientes D_{0i} (para i desde 1 hasta Q).

Preguntas??