

Filtrado en el dominio de la frecuencia (Parte 3)

Agenda

- Filtros paso bajo.

Observación

- Es preferible computacionalmente implementar el filtrado en el dominio espacial usando máscaras pequeñas.
- Los conceptos de filtrado son más intuitivos en el dominio de la frecuencia.

Estrategia:

- ✓ Especificar el filtro en el dominio de la frecuencia.
- ✓ Calcular su IDFT.
- ✓ Utilizar el filtro resultante (de gran tamaño) como guía para construir una máscara más pequeña, que se pueda aplicar a las imágenes usando el filtrado espacial.

Filtros paso bajo y paso alto Gaussianos en 1D

➤ LPF:

$$H(u) = Ae^{-u^2/(2\sigma^2)}$$

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$

➤ HPF:

$$H(u) = Ae^{-u^2/(2\sigma_1^2)} - Be^{-u^2/(2\sigma_2^2)}$$

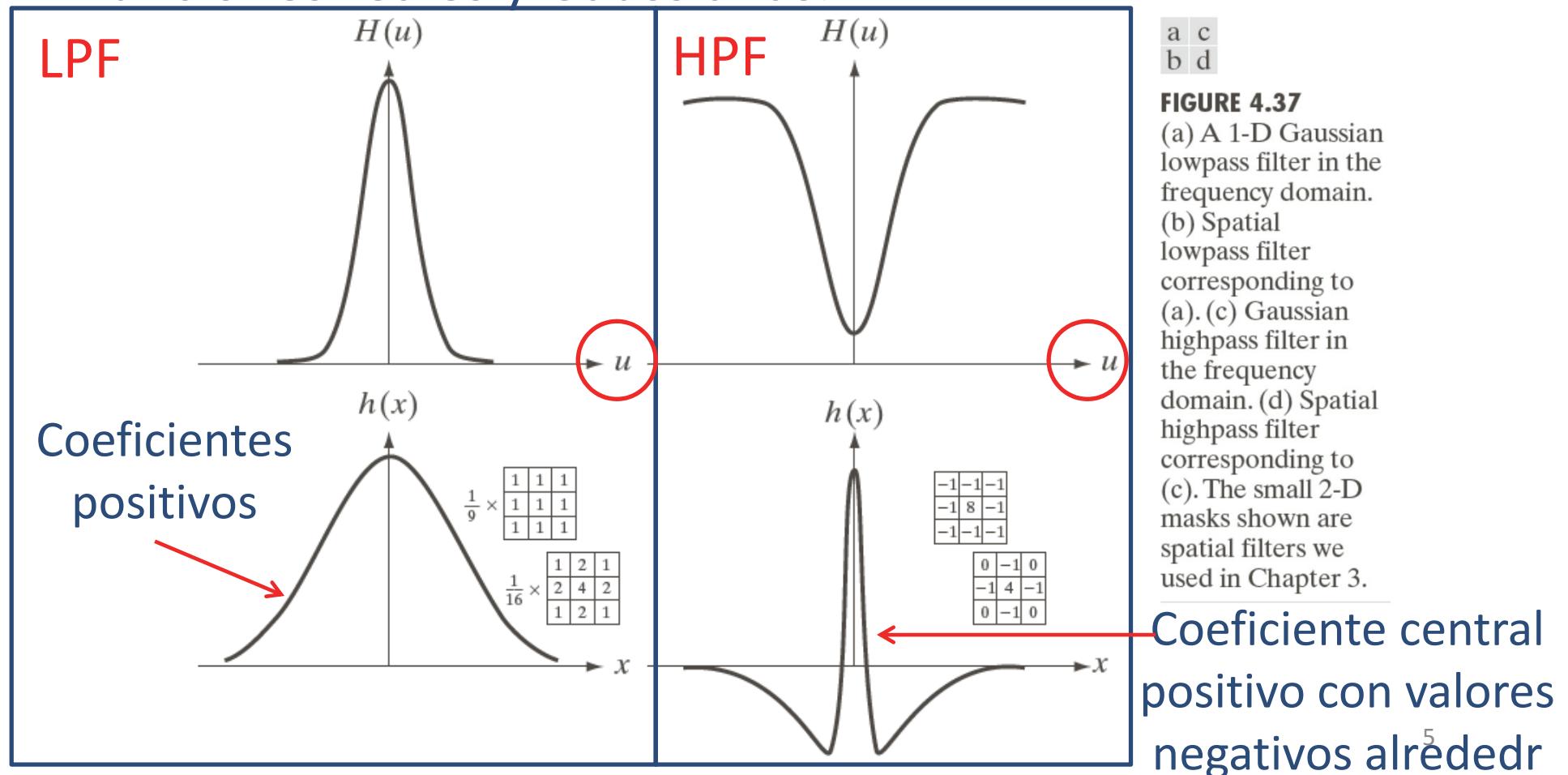
$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 Ae^{-2\pi^2\sigma_1^2x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 Be^{-2\pi^2\sigma_2^2x^2}$$

Con

$$A \geq B$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$

La DFT y la IDFT de funciones Gaussianas, general funciones reales y Gaussianas.

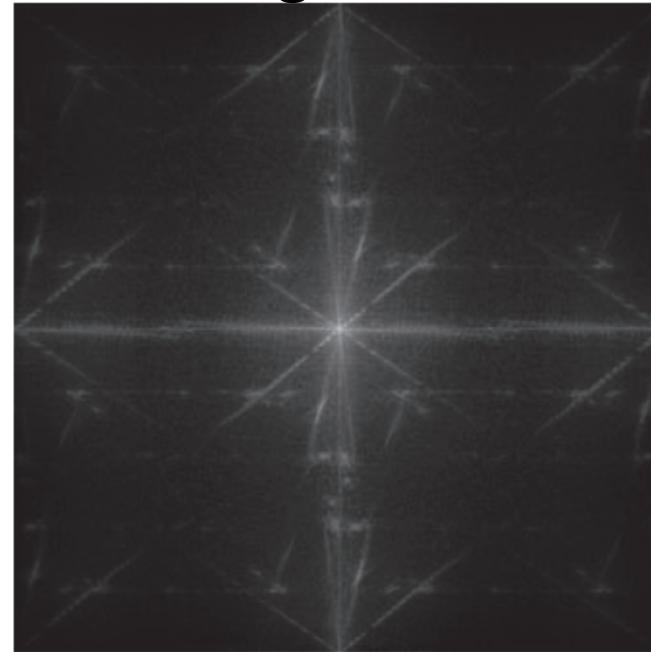


Ejemplo: comparación del filtrado en el dominio del espacio y de la frecuencia

Imagen de entrada
de 600 x 600 pixeles



Espectro de
magnitud



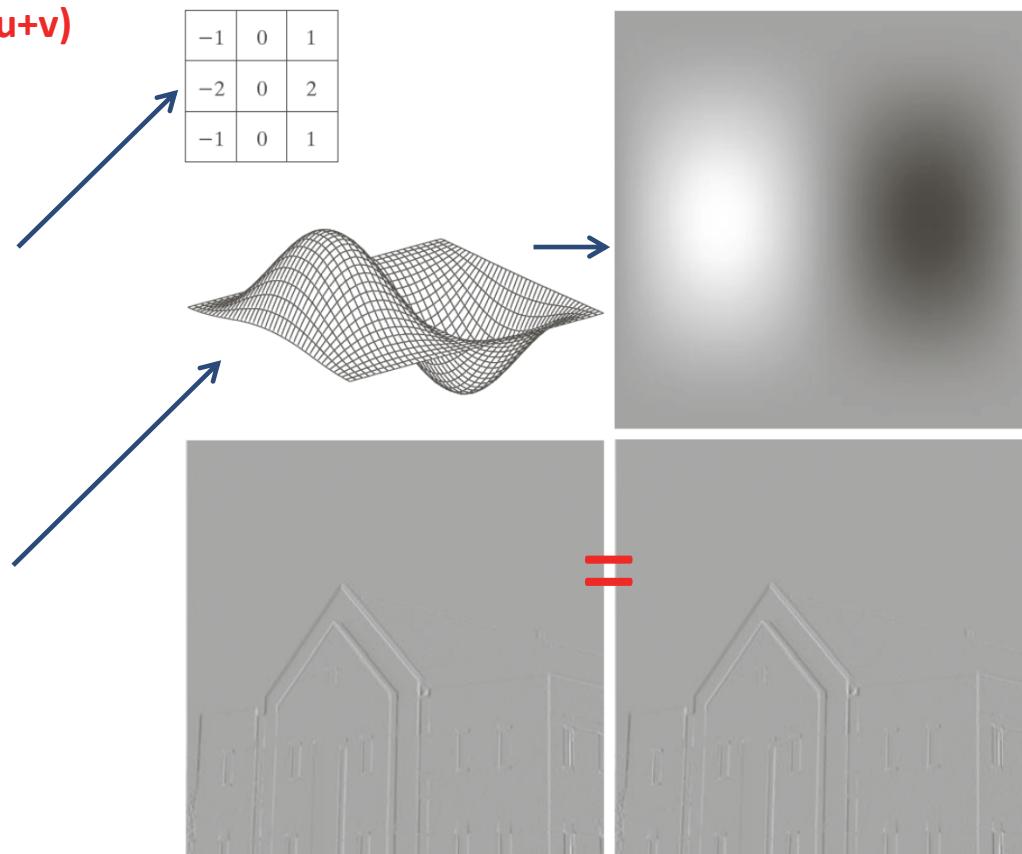
a b

FIGURE 4.38
(a) Image of a
building, and
(b) its spectrum.

Se hace el *zero padding* hasta que las nuevas dimensiones de la imagen y la máscara son 602x602. Adicionalmente, la máscara espacial se **traslada** al centro del arreglo de ceros (para mantener la simetría impar). $(-1)^{(u+v)}$

Máscara Sobel de 3x3 para detectar bordes verticales

Representación del filtro en el dominio de la frecuencia



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

FIGURE 4.39
 (a) A spatial mask and perspective plot of its corresponding frequency domain filter. (b) Filter shown as an image. (c) Result of filtering Fig. 4.38(a) in the frequency domain with the filter in (b). (d) Result of filtering the same image with the spatial filter in (a). The results are identical.

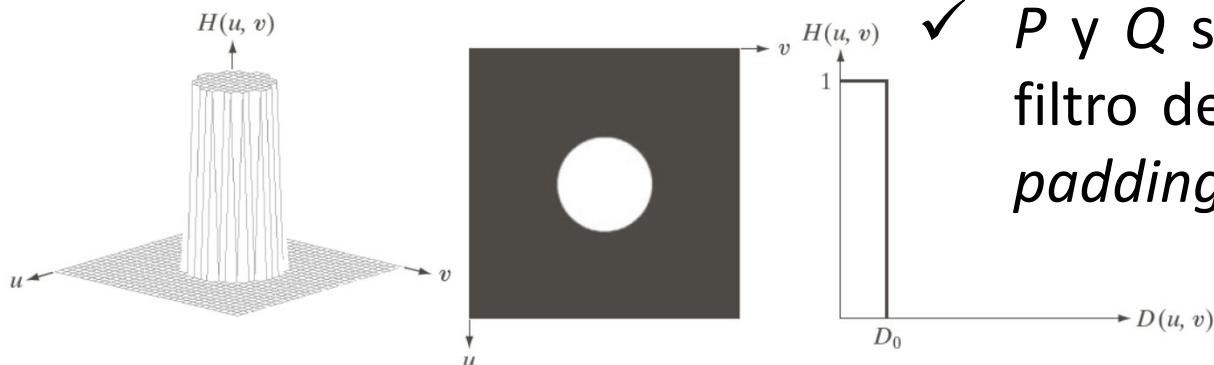
Suavizado usando filtros paso bajo

- Filtros paso bajo:
 - ✓ Ideal.
 - ✓ Butterworth.
 - ✓ Gaussiano.

Filtros paso bajo ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$



a b c

FIGURE 4.40 (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image.
(c) Filter radial cross section.

Donde:

- ✓ D_0 : Frecuencia de corte del filtro (*cut-off frequency*), es una constante positiva.
- ✓ $D(u,v)$: Distancia entre un punto (u,v) y el centro del rectángulo en frecuencia.
- ✓ P y Q son las dimensiones del filtro después de hacer el *zero padding*.

Frecuencia de corte y potencia del espectro en frecuencia

- Una forma de especificar la frecuencia de corte de un filtro consiste en seleccionar círculos que encierran cierta cantidad de la potencia total de la imagen P_T

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2$$

- Si la DFT se ha centrado, un círculo de **radio D_0** , con origen en el centro del rectángulo de frecuencia encierra un porcentaje α de la potencia total:

$$\alpha = \left[\frac{\sum_{u=-D_0}^{D_0} \sum_{v=-D_0}^{D_0} P(u, v)}{P_T} \right] 100$$
$$u, v : u^2 + v^2 \leq (D_0)^2$$

Ejemplo

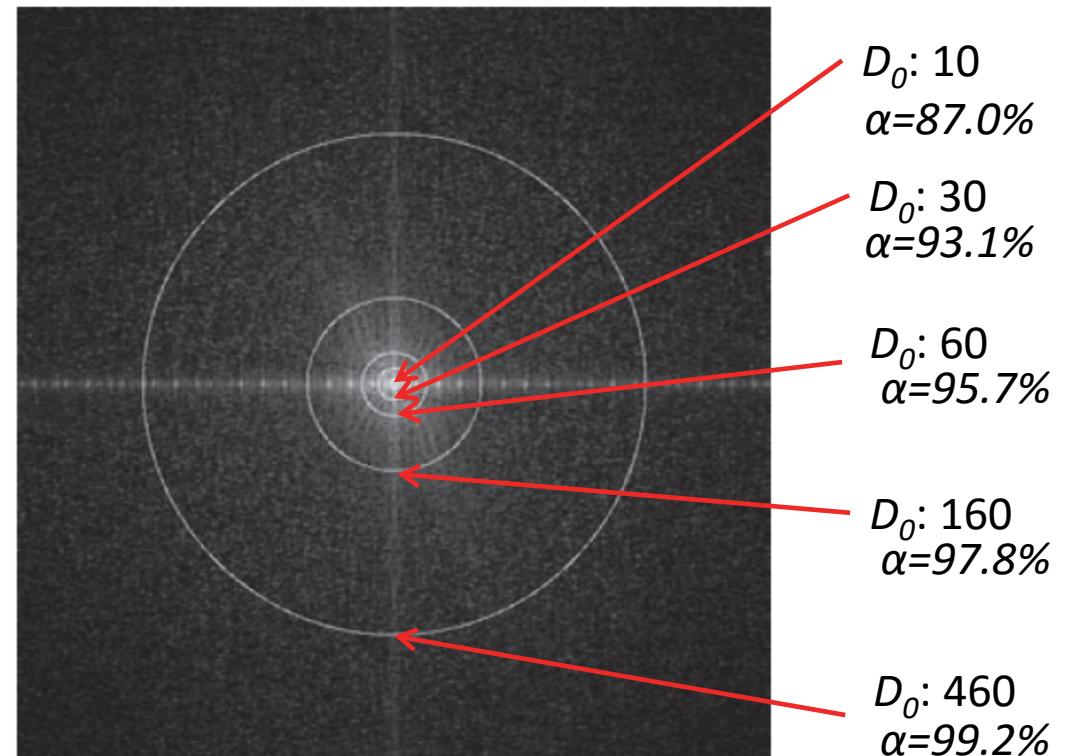


FIGURE 4.41 (a) Test pattern of size 688×688 pixels, and (b) its Fourier spectrum. The spectrum is double the image size due to padding but is shown in half size so that it fits in the page. The superimposed circles have radii equal to 10, 30, 60, 160, and 460 with respect to the full-size spectrum image. These radii enclose 87.0, 93.1, 95.7, 97.8, and 99.2% of the padded image power, respectively.

Ejemplo: filtros paso bajo ideales con diferentes frecuencias de corte

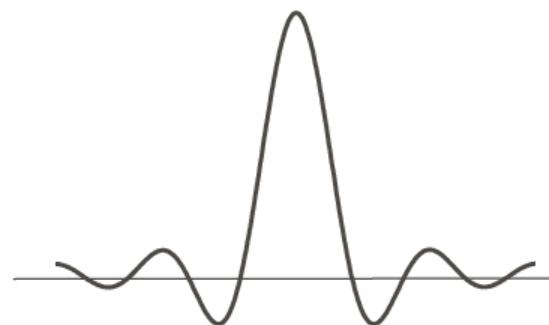
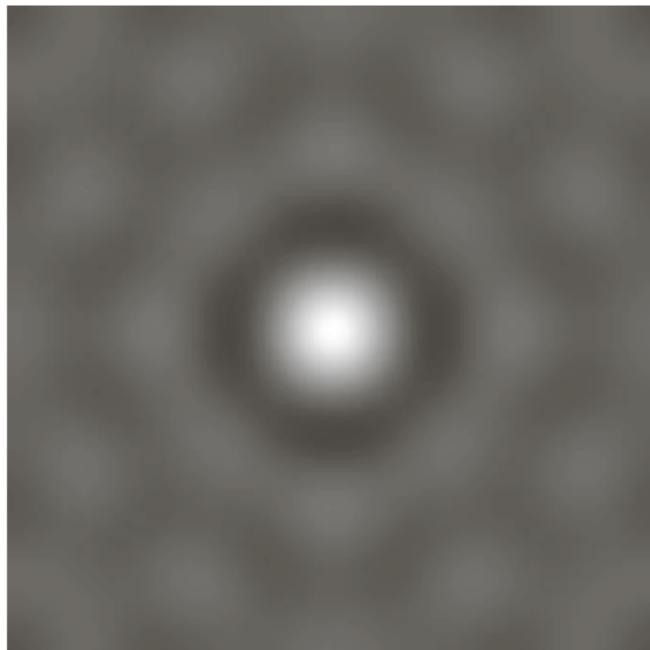
Imagen de
entrada



Las imágenes c-e
presentan
“Ringing”
(típico de filtros
ideales).

FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using ILPFs with cutoff frequencies set at radii values 10, 30, 60, 160, and 460, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.8% of the total, respectively.

Explicación del “*ringing*” en filtros paso bajo ideales



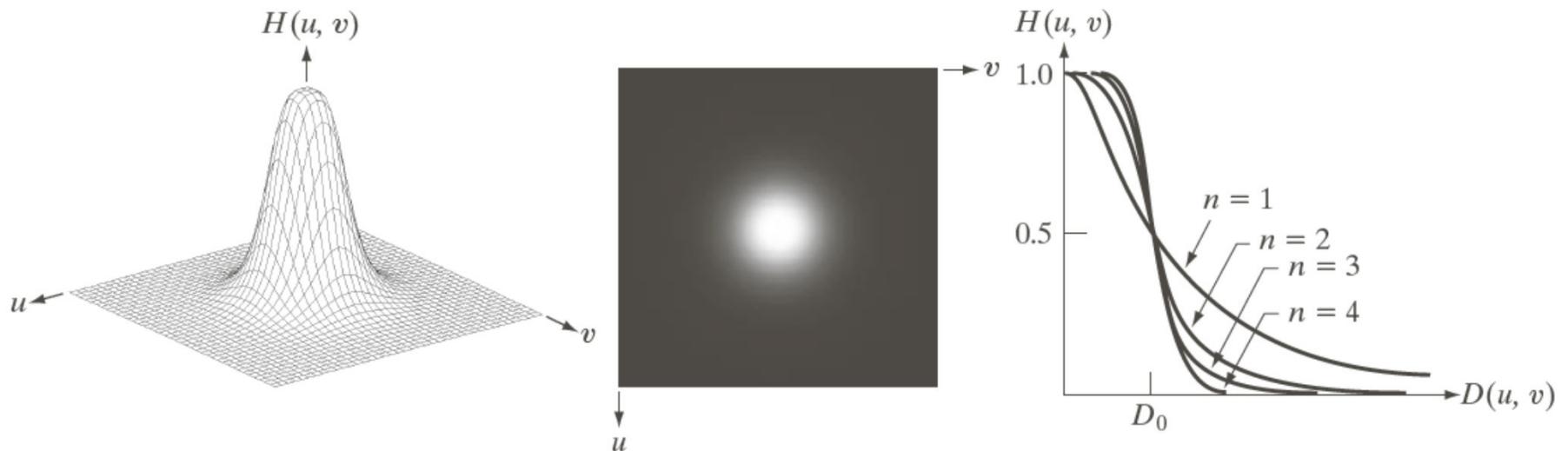
a b

FIGURE 4.43
(a) Representation in the spatial domain of an ILPF of radius 5 and size 1000×1000 .
(b) Intensity profile of a horizontal line passing through the center of the image.

Filtros paso bajo Butterworth

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- Función de transferencia de un filtro paso bajo Butterworth de orden n .
- Cuando $D(u, v)=D_0$, $H(u, v)= 50\%$ de su valor máximo.



a b c

FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Ejemplos usando un LPF Butterworth de orden dos ($n=2$)

Imagen de
entrada

$$D_0 = 30$$

$$D_0 = 160$$

$$D_0 = 10$$

$$D_0 = 60$$

$$D_0 = 460$$



a b
c d
e f

FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.42.

LPF Butterworth con una frecuencia de corte $D_0=5$ para diferentes valores de orden

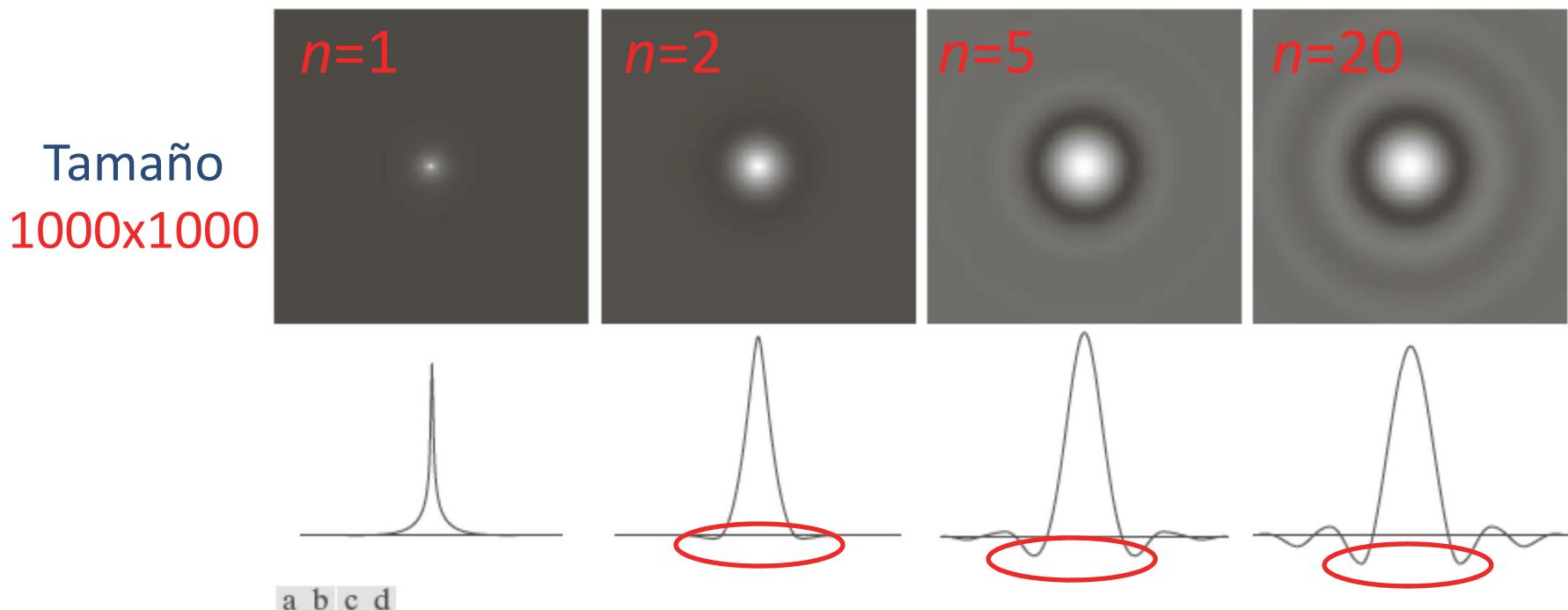


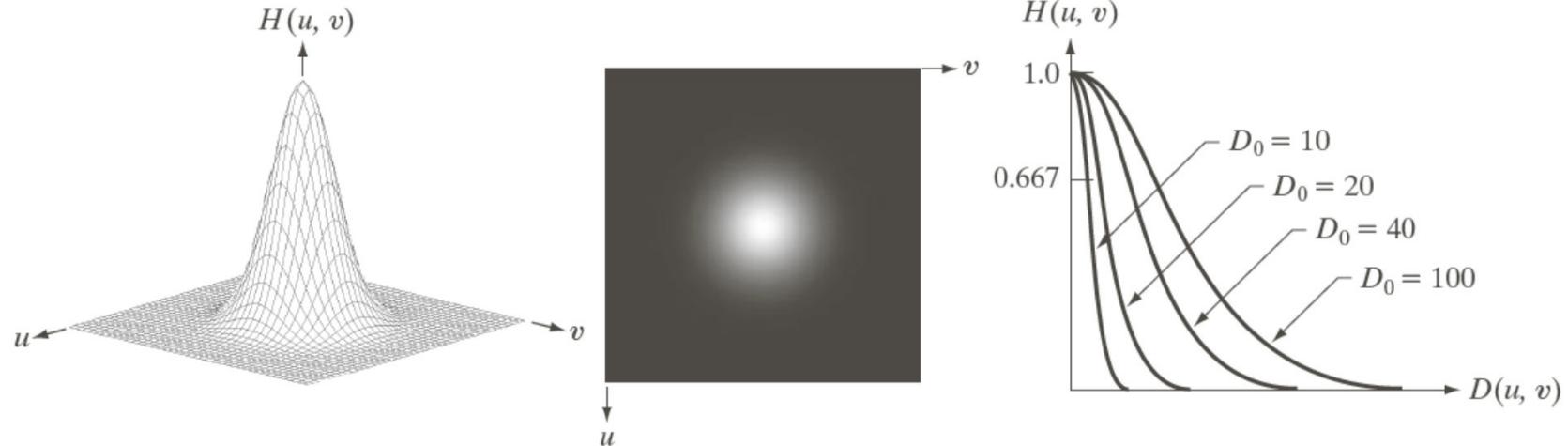
FIGURE 4.46 (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is 1000×1000 and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

Los filtros de segundo orden ($n=2$) representan un buen compromiso entre el efecto neto del filtrado y el ringing.

Filtros paso bajo Gaussianos

$$H(u, v) = e^{-[D(u, v)]^2/(2D_0^2)}$$

- Cuando $D(u, v)=D_0$, la amplitud de $H(u, v)$ cae a 0.607 de su valor máximo.
- Los filtros paso bajo Gaussianos NO presentan “ringing”.



a b c

FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0 .

LPF Gaussiano

Imagen de
entrada



$D_0=10$

$D_0=60$

$D_0=460$

FIGURE 4.48 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using GLPFs with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Figs. 4.42 and 4.45.

Tabla comparativa de filtros paso bajo

TABLE 4.4

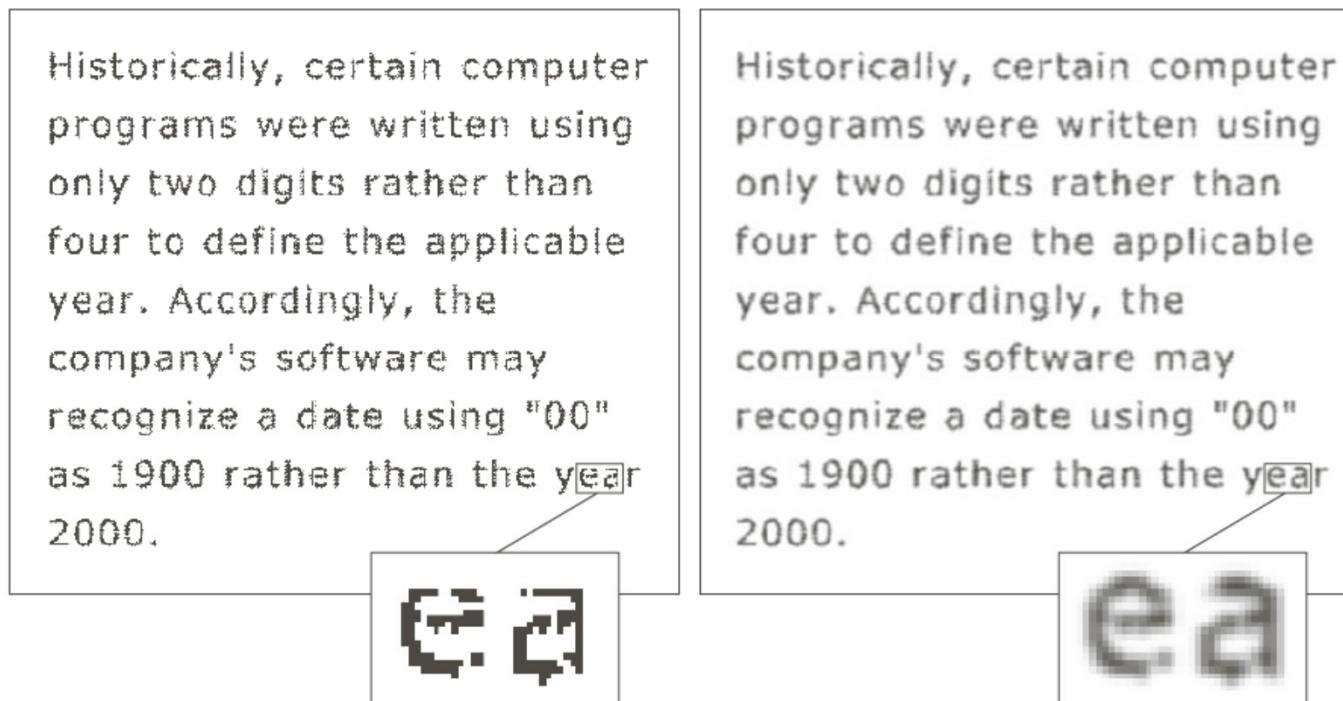
Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

| Ideal | Butterworth | Gaussian |
|---|--|----------------------------------|
| $H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$ | $H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$ | $H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$ |

Aplicaciones de filtros pasobajo

Reconocimiento automático de caracteres

- Se presentan problemas con caracteres no continuos.
- Solución: usar un LPF para que complete los espacios.
Ejemplo: filtro Gaussiano con $D_0=80$. La imagen es de 444x508.



a b

FIGURE 4.49

(a) Sample text of low resolution (note broken characters in magnified view).
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

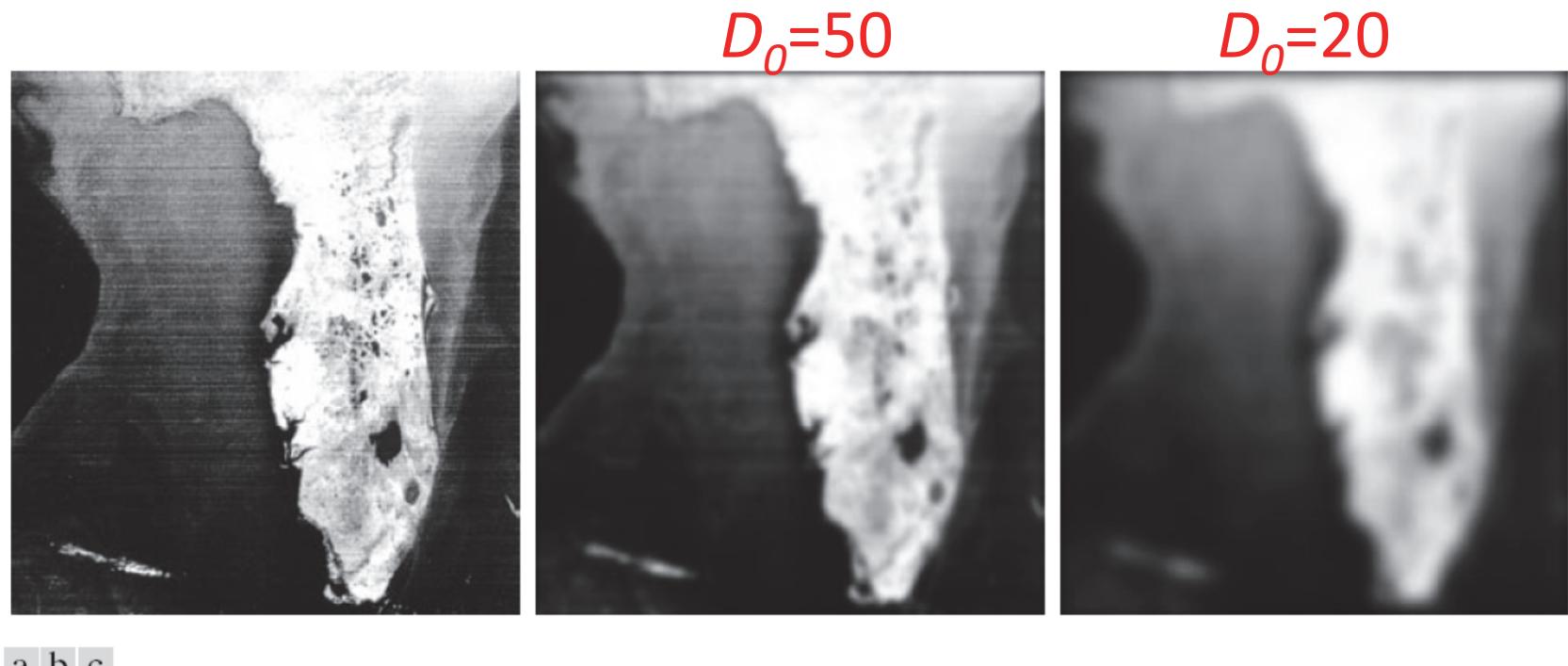
Suavizado de líneas de expresión en fotografías



FIGURE 4.50 (a) Original image (784×732 pixels). (b) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 80$. Note the reduction in fine skin lines in the magnified sections in (b) and (c).

Radiómetro de muy alta resolución

- Reducir líneas del escaneado.



a b c

FIGURE 4.51 (a) Image showing prominent horizontal scan lines. (b) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 50$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 20$. (Original image courtesy of NOAA.)

Tarea

- Implemente una función en Matlab que le permita generar filtros paso bajo ideales, Butterworth, y Gaussianos, de tamaño MxN según lo requiera el usuario. Tenga presente que cada filtro requiere un número diferente de parámetros de entrada.
- Filtre al menos una imagen en escala de grises de su elección, con tres tipos de filtros diferentes y observe que sucede cuando cambia la frecuencia de corte D_0 , y el orden del filtro (n) en el caso del Filtro Butterworth.

Preguntas??