Reducción de dimensión: análisis en componentes principales

Mathieu Kessler

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena

Cartagena

El problema de la reducción de dimensión

Reducción de dimensión

En situaciones donde tenemos muchas variables asociadas a los individuos de un conjunto, buscamos reducir la dimensión del conjunto sin perder demasiada información.

El problema de la reducción de dimensión

Reducción de dimensión

En situaciones donde tenemos muchas variables asociadas a los individuos de un conjunto, buscamos reducir la dimensión del conjunto sin perder demasiada información.

Lo hacemos con posiblemente dos objetivos:

- Compresión del conjunto de datos.
- Visualización del conjunto de datos,

El problema de la reducción de dimensión

Un conjunto con k variables, y n individuos:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{vmatrix}$$

El problema de la reducción de dimensión

Un conjunto con k variables, y n individuos: introducimos la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

El problema de la reducción de dimensión

Un conjunto con k variables, y n individuos: introducimos la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Los datos forman una nube en un espacio k-dimensional: cada fila contiene las k coordenadas del punto asociado a un individuo en el espacio.

El problema de la reducción de dimensión

Ejemplo: Consideremos el conjunto de datos:

$$X = \begin{pmatrix} 1.360 & 0.705 \\ -2.115 & -0.720 \\ -2.460 & 0.670 \\ \vdots & \vdots \\ 4.000 & 1.775 \\ -0.080 & -0.440 \\ -3.960 & -2.605 \\ -2.270 & -1.860 \end{pmatrix}.$$

El problema de la reducción de dimensión

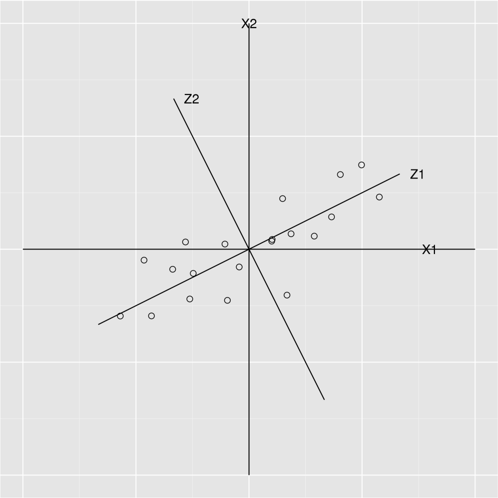
Ejemplo: Consideremos el conjunto de datos: 20 individuos, 2 variables

$$X = \begin{pmatrix} 1.360 & 0.705 \\ -2.115 & -0.720 \\ -2.460 & 0.670 \\ \vdots & \vdots \\ 4.000 & 1.775 \\ -0.080 & -0.440 \\ -3.960 & -2.605 \\ -2.270 & -1.860 \end{pmatrix}.$$

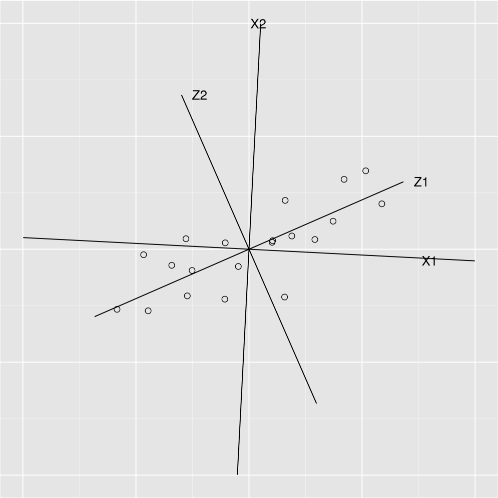
Representación de la nube

Cambio de sistema de coordenadas

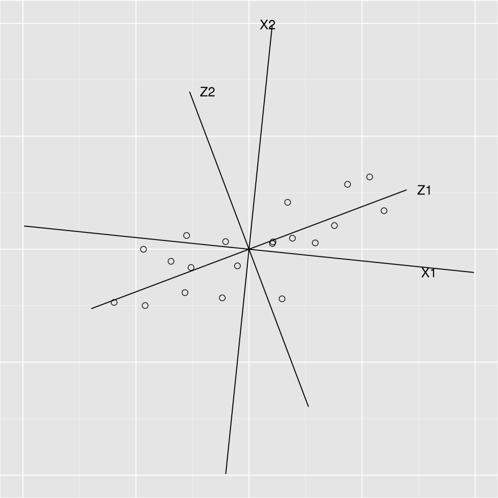
Cambio de sistema de coordenadas



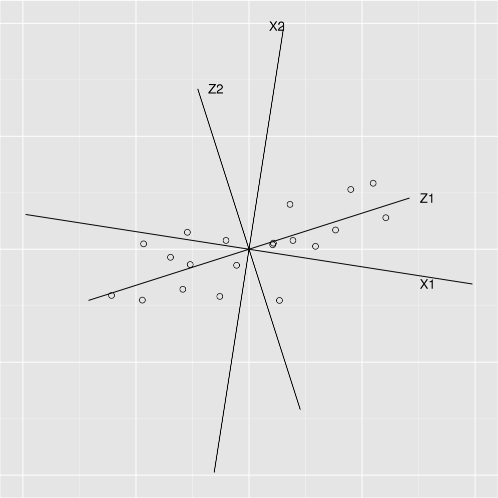
Cambio de sistema de coordenadas



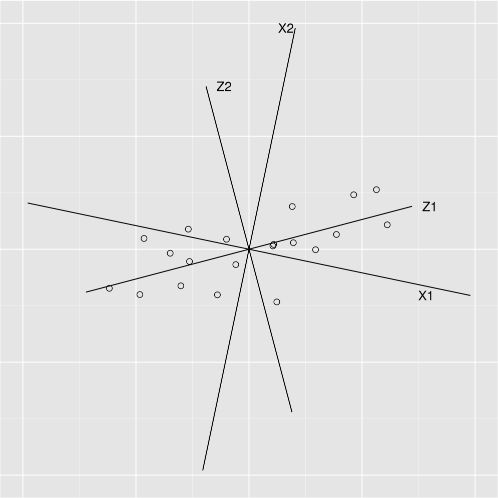
Cambio de sistema de coordenadas



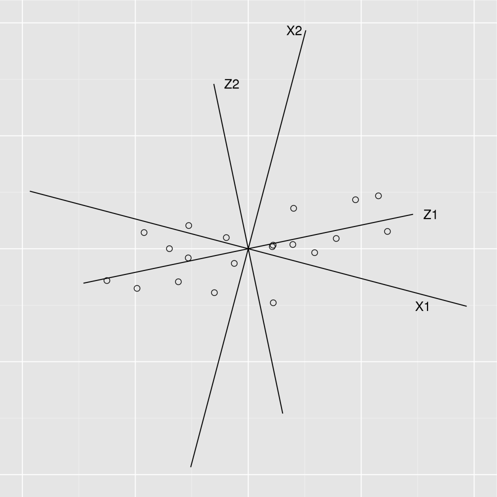
Cambio de sistema de coordenadas



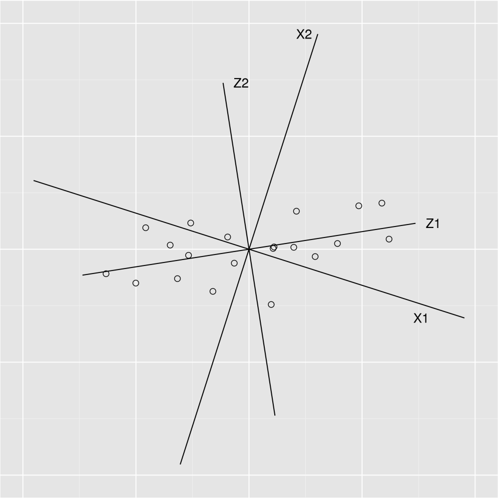
Cambio de sistema de coordenadas



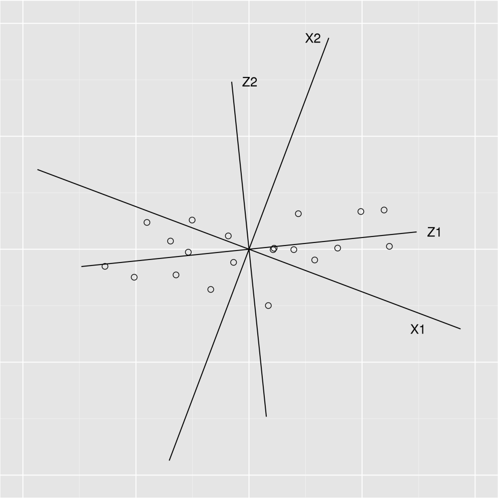
Cambio de sistema de coordenadas



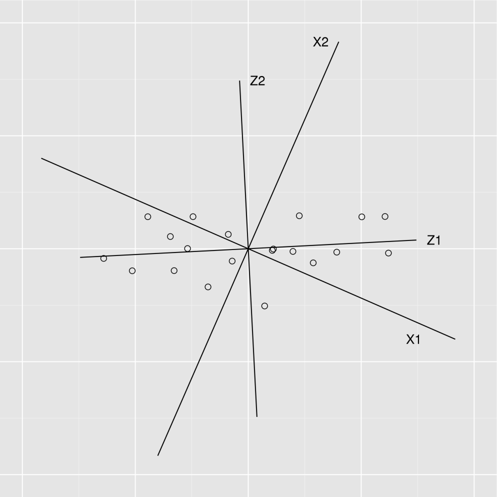
Cambio de sistema de coordenadas



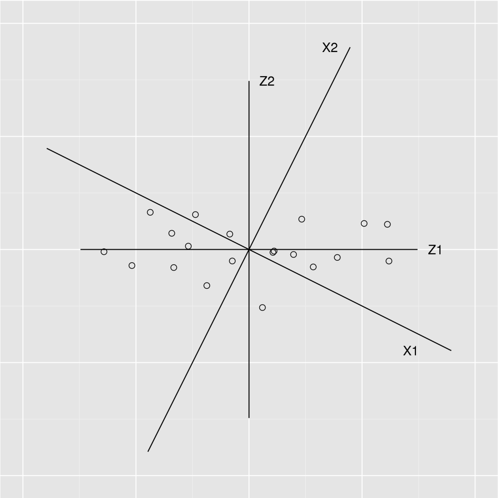
Cambio de sistema de coordenadas



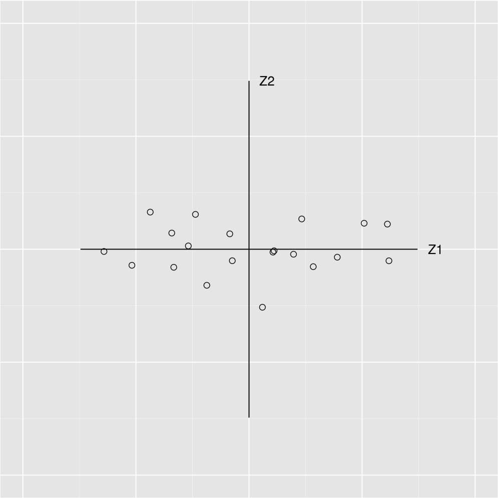
Cambio de sistema de coordenadas



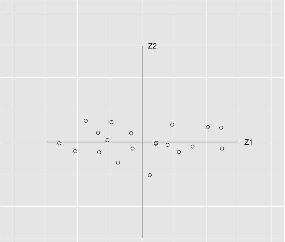
Cambio de sistema de coordenadas



Cambio de sistema de coordenadas

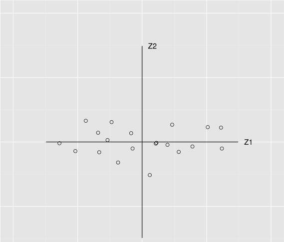


Qué conseguimos con el cambio



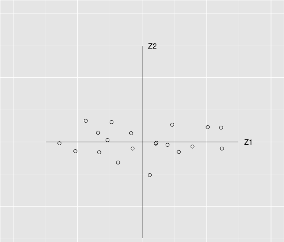
- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas

Qué conseguimos con el cambio



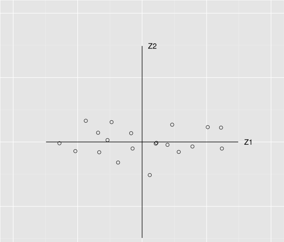
- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:

Qué conseguimos con el cambio



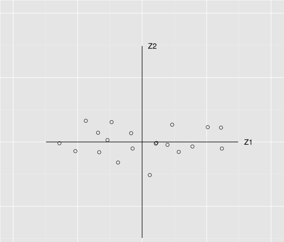
- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:
  - $Var(X_1) = 11.2, \; Var(X_2) = 3.8.$

Qué conseguimos con el cambio



- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:
  - $Var(X_1) = 11.2,\ Var(X_2) = 3.8.$
  - $Var(Z_1) = 11.2,\ Var(Z_2) = 0.9.$

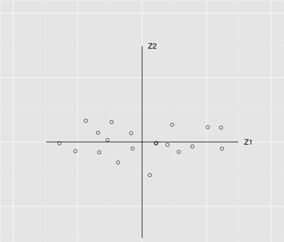
Qué conseguimos con el cambio



- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:
  - $Var(X_1) = 11.2,\ Var(X_2) = 3.8.$
  - $Var(Z_1) = 11.2,\ Var(Z_2) = 0.9.$

En la segunda representación, la variabilidad de Z_2 es pequeña respecto a la variabilidad de Z_1.

Qué conseguimos con el cambio

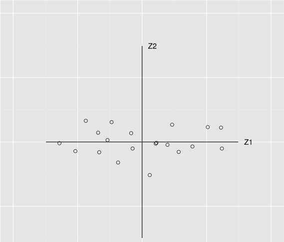


- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:
  - $Var(X_1) = 11.2,\ Var(X_2) = 3.8.$
  - $Var(Z_1) = 11.2,\ Var(Z_2) = 0.9.$

En la segunda representación, la variabilidad de Z_2 es pequeña respecto a la variabilidad de Z_1.

$\Rightarrow$ si tenemos que resumir, nos podemos quedar con Z_1 sólo...

Qué conseguimos con el cambio



- La descripción es equivalente en los dos sistemas de coordenadas
- Pero la variabilidad de las componentes en los dos sistemas es diferente:
  - $Var(X_1) = 11.2,\ Var(X_2) = 3.8.$
  - $Var(Z_1) = 11.2,\ Var(Z_2) = 0.9.$

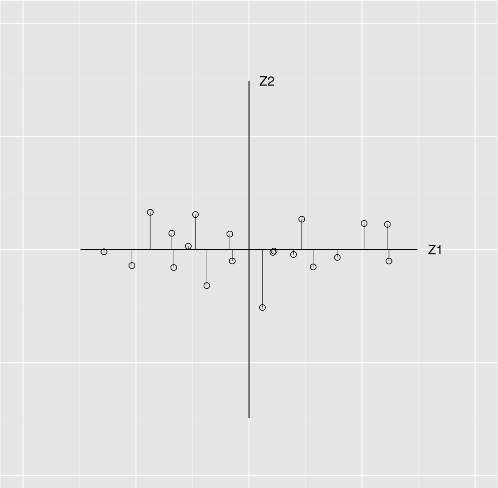
En la segunda representación, la variabilidad de Z_2 es pequeña respecto a la variabilidad de Z_1.

$\Rightarrow$ si tenemos que resumir, nos podemos quedar con Z_1 sólo...

- Z_1 y Z_2 son incorrelados.

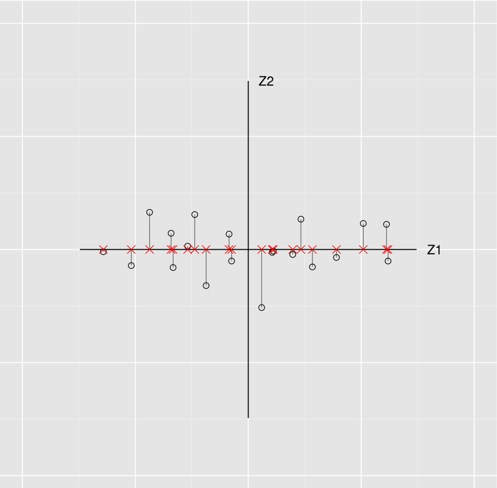
Reducimos la dimensión

Consideramos la componente Z1:



Reducimos la dimensión

Consideramos la componente Z1:

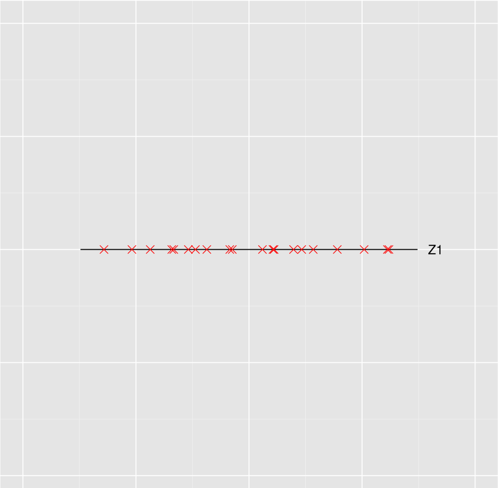


Reducimos la dimensión

Consideramos la componente Z1:

Reducimos la dimensión

Consideramos la componente Z1:



Reducción de dimensión

$$X = \begin{pmatrix} 1.360 & 0.705 \\ -2.115 & -0.720 \\ -2.460 & 0.670 \\ \vdots & \vdots \\ 4.000 & 1.775 \\ -0.080 & -0.440 \\ -3.960 & -2.605 \\ -2.270 & -1.860 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{coordenadas}]{\textit{Cambio de}} Z = \begin{pmatrix} 0.947 & 0.114 \\ -2.400 & -0.131 \\ -2.118 & -1.380 \\ \vdots & \vdots \\ 3.492 & 0.315 \\ -0.660 & 0.455 \\ -4.631 & 0.635 \\ -2.976 & 0.714 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{dim.}]{\textit{Reducc. de}} \hat{Z} = \begin{pmatrix} 0.947 \\ -2.400 \\ -2.118 \\ \vdots \\ 3.492 \\ -0.660 \\ -4.631 \\ -2.976 \end{pmatrix}$$

Reducción de dimensión

Ejemplo en 3D.

Planteamiento general: preliminares

- Sea $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x}_k$ una base de $\mathbb{R}^k$. Nube de puntos k-dimensional de n puntos M_1, $M_2, \ldots, M_n$.

Planteamiento general: preliminares

- Sea $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$ una base de $\mathbb{R}^k$. Nube de puntos k-dimensional de n puntos M_1, $M_2, \ldots, M_n$.
- $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$ son las coordenadas del punto M_i en la base $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$.

Planteamiento general: preliminares

- Sea $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x}_k$ una base de $\mathbb{R}^k$. Nube de puntos k-dimensional de n puntos M_1, $M_2, \ldots, M_n$.
- $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$ son las coordenadas del punto M_i en la base $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x}_k$.
- Consideramos la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Planteamiento general: preliminares

- Escogemos otra base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ de $\mathbb{R}^k$.

Planteamiento general: preliminares

- Escogemos otra base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ de $\mathbb{R}^k$.
- Sean $(z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{ik})$ las coordenadas del punto M_i en esta nueva base

Planteamiento general: preliminares

- Escogemos otra base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ de $\mathbb{R}^k$.
- Sean $(z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{ik})$ las coordenadas del punto M_i en esta nueva base
- Consideramos la matriz

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nk} \end{pmatrix},$$

de las coordenadas de los puntos de la nube.

Planteamiento general: preliminares

- Para relacionar Z con X, escribimos la matriz de paso de la base base $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ a la nueva base.

Planteamiento general: preliminares

- Para relacionar Z con X, escribimos la matriz de paso de la base base $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ a la nueva base.
- La matriz U, es la matriz $k \times k$ cuyas columnas contienen las coordenadas de los vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ en la base inicial, es decir si

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= u_{11}\vec{x}_1 + u_{21}\vec{x}_2 + \cdots + u_{k1}\vec{x}_k \\
\vec{u}_2 &= u_{12}\vec{x}_1 + u_{22}\vec{x}_2 + \cdots + u_{k2}\vec{x}_k \\
\vdots &\;\vdots \\
\vec{u}_k &= u_{1k}\vec{x}_1 + u_{2k}\vec{x}_2 + \cdots + u_{kk}\vec{x}_k,
\end{aligned}
$$

Planteamiento general: preliminares

- .... si

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= u_{11}\vec{x}_1 + u_{21}\vec{x}_2 + \cdots + u_{k1}\vec{x}_k \\
\vec{u}_2 &= u_{12}\vec{x}_1 + u_{22}\vec{x}_2 + \cdots + u_{k2}\vec{x}_k \\
\vdots &\quad \vdots \\
\vec{u}_k &= u_{1k}\vec{x}_1 + u_{2k}\vec{x}_2 + \cdots + u_{kk}\vec{x}_k,
\end{aligned}$$

la matriz de paso será

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{pmatrix}.$$

Planteamiento general: preliminares

- La relación entre Z, X y U es

$$X = ZU^T,$$

Planteamiento general: preliminares

- La relación entre Z, X y U es

$$X = ZU^T,$$

- U es invertible , por lo que

$$X(U^T)^{-1} = Z.$$

Planteamiento general: preliminares

- La relación entre Z, X y U es

$$X = ZU^T,$$

- U es invertible , por lo que

$$X(U^T)^{-1} = Z.$$

- Si los vectores $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ forman una base ortonormal, la matriz U satisface $U^T U = Id$, y por lo tanto $(U^T)^{-1} = U$:

$$Z = XU.$$

Matriz de covarianzas y cambio de bases

- Consideremos el conjunto de datos representado por la matriz X. La matriz de covarianzas de las variables $X_1, \ldots, X_k$ es

$$S_X = \begin{pmatrix} s^2_{X_1} & s_{X_1 X_2} & \cdots & s_{X_1 X_k} \\ s_{X_1 X_2} & s^2_{X_2} & \cdots & s_{X_2 X_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{X_1 X_k} & s_{X_2 X_k} & \cdots & s^2_{X_k} \end{pmatrix},$$

donde $s^2_{X_i}$ representa la varianza de la variable X_i en el conjunto y $s_{X_i X_j}$ es la covarianza de X_i y X_j.

Matriz de covarianzas y cambio de bases

- Consideremos el conjunto de datos representado por la matriz X. La matriz de covarianzas de las variables $X_1, \ldots, X_k$ es

$$S_X = \begin{pmatrix} s^2_{X_1} & s_{X_1X_2} & \cdots & s_{X_1X_k} \\ s_{X_1X_2} & s^2_{X_2} & \cdots & s_{X_2X_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{X_1X_k} & s_{X_2X_k} & \cdots & s^2_{X_k} \end{pmatrix},$$

  donde $s^2_{X_i}$ representa la varianza de la variable X_i en el conjunto y $s_{X_iX_j}$ es la covarianza de X_i y X_j.
- Si $X_1, \ldots, X_k$ tienen cada una media 0:

$$S_X = \frac{1}{n-1} X^T X.$$

Planteamiento general: preliminares

- Deducimos, usando la relación entre Z y X que

$$S_Z = \frac{1}{n-1} Z^T Z = \frac{1}{n-1} U^{-1} X^T X (U^T)^{-1} = U^{-1} S_X (U^T)^{-1}.$$

Planteamiento general: preliminares

- Deducimos, usando la relación entre Z y X que

$$S_Z = \frac{1}{n-1} Z^T Z = \frac{1}{n-1} U^{-1} X^T X (U^T)^{-1} = U^{-1} S_X (U^T)^{-1}.$$

- En el caso en que U es ortogonal,

$$S_Z = U^{-1} S_X U.$$

Planteamiento general: análisis en componentes principales

- Buscamos el cambio de sistemas de coordenadas que nos permita posiblemente una reducción de dimensión.

Planteamiento general: análisis en componentes principales

- Buscamos el cambio de sistemas de coordenadas que nos permita posiblemente una reducción de dimensión.
- En ese nuevo sistema, queremos que haya diferencias entre las variabilidad de los componentes: la primera coordenada debe presentar la mayor varianza, la segunda, la segunda mayor varianza, etc...

Planteamiento general: análisis en componentes principales

- Buscamos el cambio de sistemas de coordenadas que nos permita posiblemente una reducción de dimensión.
- En ese nuevo sistema, queremos que haya diferencias entre las variabilidad de los componentes: la primera coordenada debe presentar la mayor varianza, la segunda, la segunda mayor varianza, etc...
- Teniendo en cuenta

$$S_Z = U^{-1} S_X U,$$

se conseguirá el sistema deseado si S_Z es una matriz diagonal...

Planteamiento general: análisis en componentes principales

- Buscamos el cambio de sistemas de coordenadas que nos permita posiblemente una reducción de dimensión.
- En ese nuevo sistema, queremos que haya diferencias entre las variabilidad de los componentes: la primera coordenada debe presentar la mayor varianza, la segunda, la segunda mayor varianza, etc...
- Teniendo en cuenta

  $$S_Z = U^{-1} S_X U,$$

  se conseguirá el sistema deseado si S_Z es una matriz diagonal...
- Realizar el análisis en componentes principales, consiste en diagonalizar la matriz S_X...

Análisis en componentes principales

- Al calcular los vectores propios de la matriz S_X, obtenemos los coeficientes u_{ij} de la matriz U de pas y

$$\begin{aligned}
Z_1 &= u_{11}X_1 + u_{21}X_2 + \cdots + u_{k1}X_k \\
Z_2 &= u_{12}X_1 + u_{22}X_2 + \cdots + u_{k2}X_k \\
\vdots \; &\;\vdots \\
Z_k &= u_{1k}X_1 + u_{2k}X_2 + \cdots + u_{kk}X_k.
\end{aligned}$$

Análisis en componentes principales

- Al calcular los vectores propios de la matriz S_X, obtenemos los coeficientes u_{ij} de la matriz U de pas y

$$\begin{aligned} Z_1 &= u_{11}X_1 + u_{21}X_2 + \cdots + u_{k1}X_k \\ Z_2 &= u_{12}X_1 + u_{22}X_2 + \cdots + u_{k2}X_k \\ \vdots &\quad \vdots \\ Z_k &= u_{1k}X_1 + u_{2k}X_2 + \cdots + u_{kk}X_k. \end{aligned}$$

$$1^{\text{o}} \text{ vector propio: } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \text{k}^{\text{o}} \text{ vector propio: } \vec{u}_k = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{kk} \end{pmatrix}.$$

Análisis en componentes principales

- Al calcular los vectores propios de la matriz S_X, obtenemos los coeficientes u_{ij} de la matriz U de pas y

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= u_{11}X_1 + u_{21}X_2 + \cdots + u_{k1}X_k \\
Z_2 &= u_{12}X_1 + u_{22}X_2 + \cdots + u_{k2}X_k \\
\vdots \;\; & \;\; \vdots \\
Z_k &= u_{1k}X_1 + u_{2k}X_2 + \cdots + u_{kk}X_k.
\end{aligned}
$$

Componentes principales

Los componentes principales $Z_1, \ldots, Z_k$ se obtienen por lo tanto como combinaciones lineales de las variables originales $X_1, \ldots, X_k$, cuyos coeficientes se deducen de la expresión de los vectores propios.

Análisis en componentes principales: ejemplo

- Para el ejemplo 2D que vimos al principio de la clase, tenemos

$$S_X = \begin{pmatrix} 11.238 & 5.194 \\ 5.194 & 3.835 \end{pmatrix},$$

Análisis en componentes principales: ejemplo

- Para el ejemplo 2D que vimos al principio de la clase, tenemos

$$S_X = \begin{pmatrix} 11.238 & 5.194 \\ 5.194 & 3.835 \end{pmatrix},$$

- Usamos `eigen` en R, para encontrar los valores propios y vectores propios:

Análisis en componentes principales: ejemplo

- Para el ejemplo 2D que vimos al principio de la clase, tenemos
$$S_X = \begin{pmatrix} 11.238 & 5.194 \\ 5.194 & 3.835 \end{pmatrix},$$
- Usamos `eigen` en R, para encontrar los valores propios y vectores propios:
  - $\lambda_1 \simeq 13.93$ y $\lambda_2 \simeq 1.16$.

Análisis en componentes principales: ejemplo

- Para el ejemplo 2D que vimos al principio de la clase, tenemos

$$S_X = \begin{pmatrix} 11.238 & 5.194 \\ 5.194 & 3.835 \end{pmatrix},$$

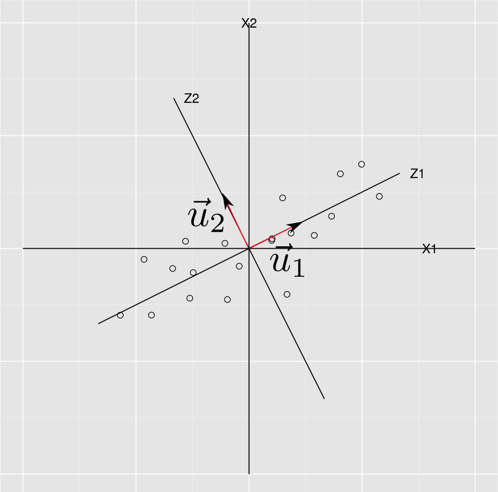
- Usamos `eigen` en R, para encontrar los valores propios y vectores propios:
  - $\lambda_1 \simeq 13.93$ y $\lambda_2 \simeq 1.16$.
  - $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.46 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -0.46 \\ 0.89 \end{pmatrix}$

Análisis en componentes principales: ejemplo

- Para el ejemplo 2D que vimos al principio de la clase, tenemos
$$S_X = \begin{pmatrix} 11.238 & 5.194 \\ 5.194 & 3.835 \end{pmatrix},$$
- Usamos `eigen` en R, para encontrar los valores propios y vectores propios:
  - $\lambda_1 \simeq 13.93$ y $\lambda_2 \simeq 1.16$.
  - $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.46 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -0.46 \\ 0.89 \end{pmatrix}$
- Los dos componentes principales son
$$\begin{aligned} Z_1 &= 0.89X_1 + 0.46X_2 \\ Z_2 &= -0.46X_1 + 0.89X_2 \end{aligned}$$

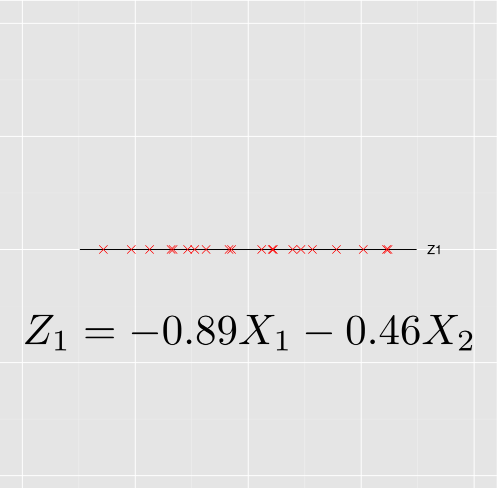
Cambio de sistema en el ejemplo:

La nueva base:



Reducimos la dimensión

Cómo calculamos la componente Z1:



$$Z_1 = -0.89X_1 - 0.46X_2$$

Propiedades fundamentales del ACP

Por la definición de los componentes principales, la matriz de covarianzas S_Z es

$$S_Z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

Por lo tanto:

- $\lambda_i = var(Z_i)$

Propiedades fundamentales del ACP

Por la definición de los componentes principales, la matriz de covarianzas S_Z es

$$S_Z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

Por lo tanto:

- $\lambda_i = var(Z_i)$
- Los componentes principales son incorrelados ($r_{Z_i Z_j} = 0$).

Propiedades fundamentales del ACP

Por teoremas de álgebra lineal:

1. Cualquier combinación lineal estanderizada de las variables iniciales, es decir $a_1X_1 + \cdots + a_kX_k$ con $a_1^2 + \cdots + a_k^2 = 1$, presenta una varianza menor or igual que la del primer componente Z_1, es decir:

$$Var(a_1X_1 + \cdots + a_kX_k) \leq \lambda_1.$$

Es decir:

Cuando fijamos el primer vector del nuevo sistema como $\vec{u_1}$, el vector propio de S_X asociado a λ_1, maximizamos la varianza de los valores que toma la primera componente en la nube de puntos

Propiedades fundamentales del ACP

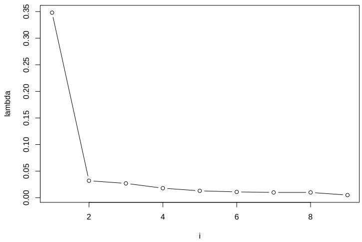
2. La variabilidad total se preserva.

$$
\begin{aligned}
Var(X_1) + \cdots + Var(X_k) &= Var(Z_1) + \cdots + Var(Z_k) \\
&= \lambda_1 + \cdots + \lambda_k
\end{aligned}
$$

¿Cómo escoger con cuántos componentes nos quedamos?

Nos basamos en la evolución de los valores propios: con dos opciones.

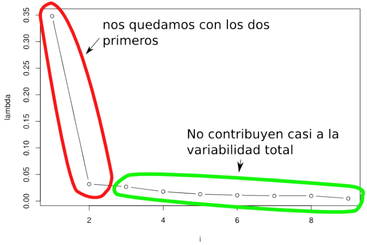
1. Diagrama de codo (Scree plot)



¿Cómo escoger con cuántos componentes nos quedamos?

Nos basamos en la evolución de los valores propios: con dos opciones.

1. Diagrama de codo (Scree plot)



¿Cómo escoger con cuántos componentes nos quedamos?

Nos basamos en la evolución de los valores propios: con dos opciones.

2. Varianza acumulada explicada. Ejemplo:

Valor propio	% Varianza	% acumulado variabilidad explicada
λ_1	0.734	0.734
λ_2	0.068	0.802
λ_3	0.057	0.859
λ_4	0.038	0.897
λ_5	0.027	0.924
λ_6	0.023	0.947
λ_7	0.021	0.968
λ_8	0.021	0.989
λ_9	0.011	1.000

¿Cómo escoger con cuántos componentes nos quedamos?

Nos basamos en la evolución de los valores propios: con dos opciones.

2. Varianza acumulada explicada. Ejemplo:

Valor propio	% Varianza	% acumulado variabilidad explicada
λ_1	0.734	0.734
λ_2	0.068	0.802
λ_3	0.057	0.859
λ_4	0.038	0.897
λ_5	0.027	0.924
λ_6	0.023	0.947
λ_7	0.021	0.968
λ_8	0.021	0.989
λ_9	0.011	1.000

¿Cómo escoger con cuántos componentes nos quedamos?

Nos basamos en la evolución de los valores propios: con dos opciones.

2. Varianza acumulada explicada. Ejemplo:

Valor propio	% Varianza	% acumulado variabilidad explicada
λ_1	0.734	0.734
λ_2	0.068	0.802
λ_3	0.057	0.859
λ_4	0.038	0.897
λ_5	0.027	0.924
λ_6	0.023	0.947
λ_7	0.021	0.968
λ_8	0.021	0.989
λ_9	0.011	1.000

Nos quedamos con los lambdas necesarios para alcanzar aprox. 90% varianza.