Practicas P1 y P2

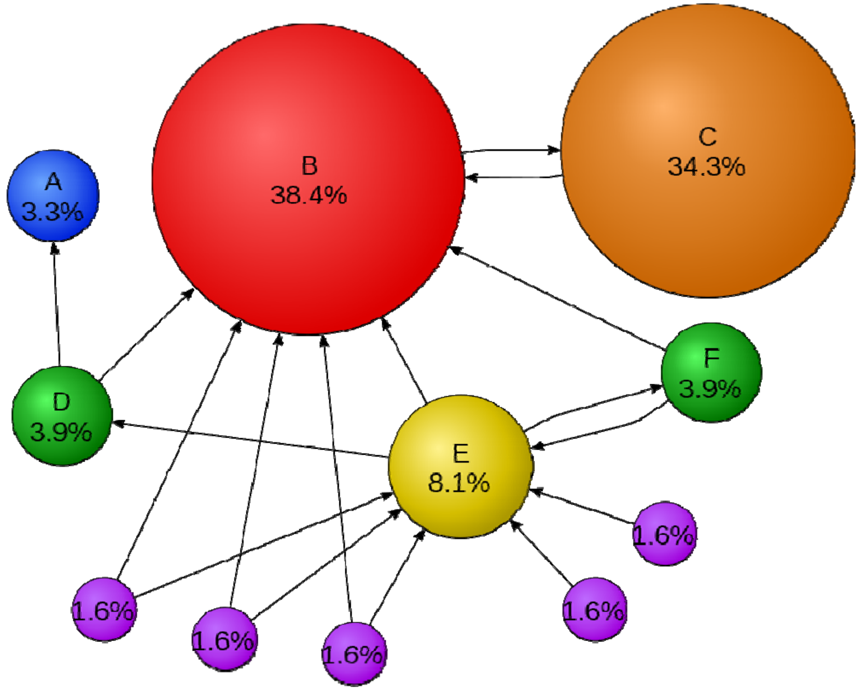
Modelado y Simulación. Prof. Juan José Alcaraz Espín

Práctica 1: El Algoritmo PageRank

PageRank: Introducción
Ecuaciones de balance
Redefinición de PageRank
Ecuaciones finales
Objetivos de la práctica

El Algoritmo PageRank

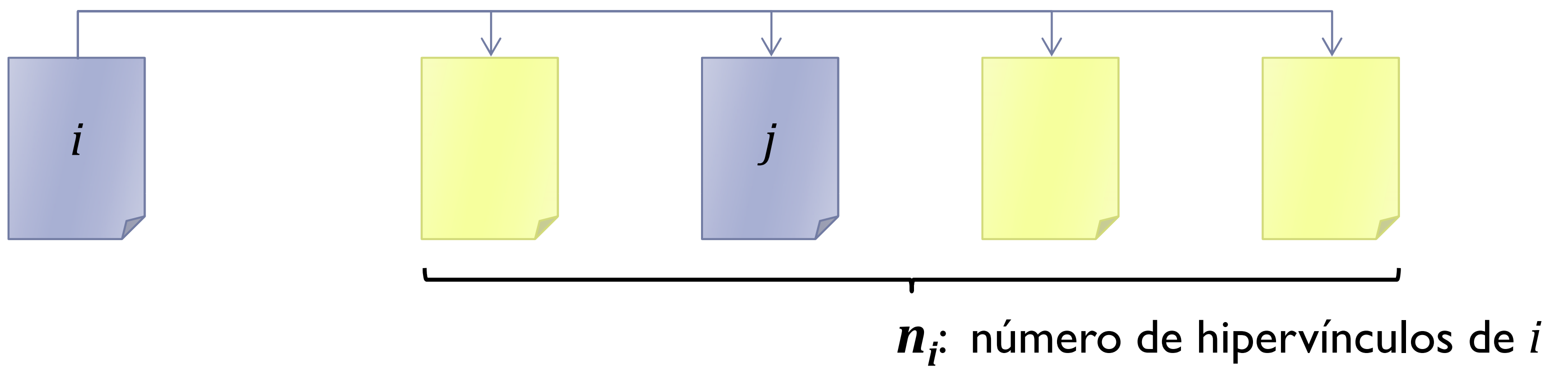
Sergey Brin and Larry Page



- Sergey Brin y Larry Page
- PageRank se presentó en un artículo de 1998: *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine.*
- U.S. Patent 6,285,999: "*Method for node ranking in a linked database*"

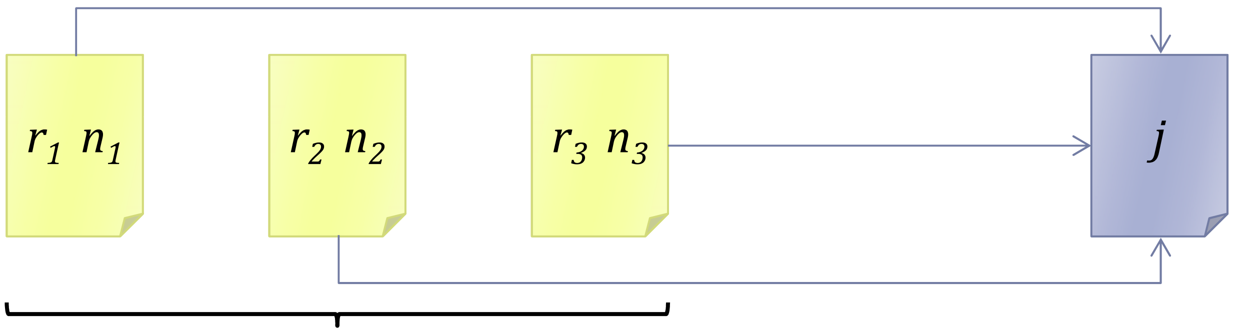
El Algoritmo PageRank: Introducción

- Objetivo: ordenar por importancia las direcciones web.
- Consideremos que una página i referencia a j.



- La contribución de i en la importancia de j es proporcional a la importancia de i ($\boldsymbol{r_i}$) e inversamente proporcional al número total de hipervínculos de i ($\boldsymbol{n_i}$) .

El Algoritmo PageRank: Introducción



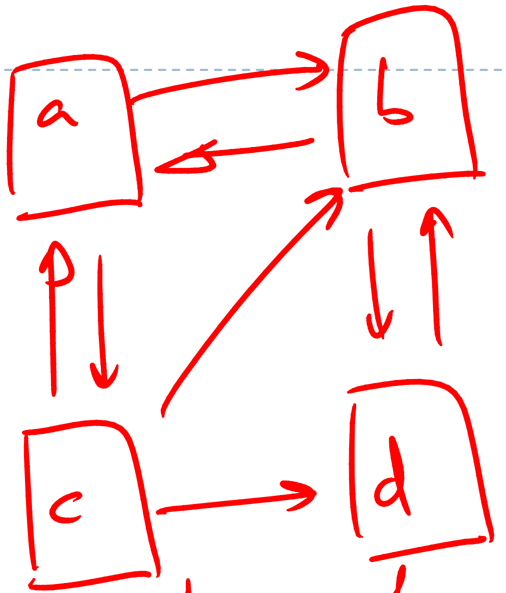
H(*j*): conjunto de páginas que hipervinculan a *j*

- La importancia (Rank) de *j* se define inicialmente como:

$$r_j = \sum_{k \in H(j)} r_k \frac{1}{n_k}$$

- La definición es similar a las ecuaciones de balance:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj}$$



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = A = \text{matriz de incidencia}$$

$$Q = \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & a \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & b \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d \end{array}$$

$$r = rQ \qquad r \cdot e = 1$$

Ecuaciones de balance

- Definimos la matriz $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q}(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_i} & \text{si } i \text{ contiene un hipervínculo a } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz de transición y los *ranks* se obtienen de:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{Q} \text{ con } \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}=1$$

donde $\boldsymbol{e}=[1,1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$

- Sin embargo nada nos garantiza que $\boldsymbol{Q}$ sea ergódica. De hecho en la realidad no lo es.

Redefinición de PageRank

- Para asegurar que la cadena es ergódica redefinimos *rank*:

$$r_j = \alpha \sum_{k \in H(j)} r_k \frac{1}{n_k} + \frac{(1-\alpha)}{N}$$

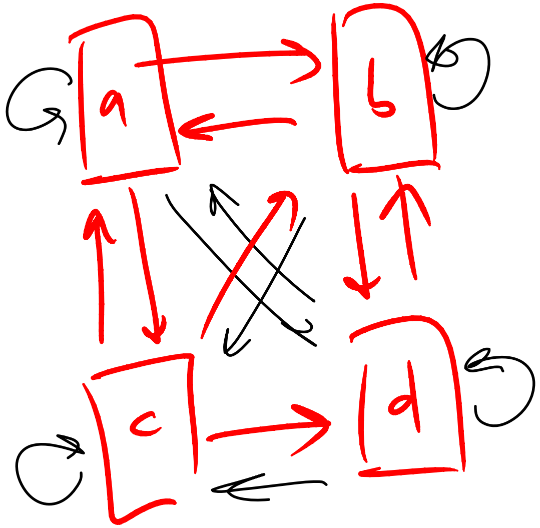
- Donde N es el número total de páginas y α es un factor positivo menor que 1 (generalmente 0.85).
- El factor de la derecha se denomina *damping factor*.
- El *rank* de *j* es una media ponderada entre una importancia homogénea entre todas las páginas y el *rank* definido anteriormente.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\alpha = 0.85} \text{ (ejemplo)}$$

$$M = 0.85 * \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.15 * \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{M} = \alpha \cdot Q + (1-\alpha)\frac{1}{N}\mathbb{1}_{N \times N}$$



Ecuaciones de balance finales

- Para obtener la expresión matricial de *PageRank* definimos la matriz $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{Q} + \frac{(1-\alpha)}{N} \mathbf{1}_{N \times N}$$

- Donde $\mathbf{1}_{N \times N}$ es una matriz de N×N con todos sus elementos iguales a 1.
- Las ecuaciones quedan así:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{M} \text{ con } \boldsymbol{r}\boldsymbol{e} = 1$$

donde $\boldsymbol{e} = [1,1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$

Objetivos de la Práctica

- Programar la función: **v = SolveErgodicDTMC(P).**
  - El argumento (P) es una matriz de transición ergódica
  - El resultado (v) es el vector de estado estacionario de P.
- Programar la función **[r i] = PageRank(A, α)**.
  - **r** *ranks* de las páginas (de mayor a menor)
  - **i** identificadores de las páginas, de mayor a menor *rank*.
  - $\alpha \leq 1$ es un escalar positivo
  - A es la matriz de incidencias definida así:

$$\boldsymbol{A}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ contiene un hipervínculo a } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo de cálculo del estado estacionario

- Modelo de dos estados del funcionamiento de un equipo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(\pi_1 \ \pi_2) = (\pi_1 \ \pi_2) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

2 ec. lineal-mente depen-dientes

- La ecuación $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ (ecuación de balance) es

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_2 \rightarrow 0.2\pi_1 - 0.6\pi_2 = 0$$
$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 \rightarrow -0.2\pi_1 + 0.6\pi_2 = 0$$

- Ambas ecuaciones son equivalentes a $\pi_1 = 3\pi_2$
- La condición de normalización es $\pi_1 + \pi_2 = 1$
- La solución al sistema es

$$\pi_1 = 0.75$$

$$\pi_2 = 0.25$$

$$\pi = \pi P \to \pi - \pi P = 0 \to$$

$$\to \pi (I - P) = 0$$

$$(\pi_1\ \pi_2)\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}\right)}^{I-P} = (0\ \ 0)$$

$$\begin{cases}(\pi_1\ \pi_2)\begin{pmatrix}0.2 & -0.2\\ -0.6 & 0.6\end{pmatrix} = (0\ 0)\\ (\pi_1\ \pi_2)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = 1\end{cases}$$

$$\to (\pi_1\ \pi_2)\underbrace{\begin{pmatrix}0.2 & 1\\ -0.6 & 1\end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{(0,\ 1)}_{y}$$

$$(\pi_1\ \pi_2) = y \cdot M^{-1}$$

En MATLAB

```
m = length(P);
M = eye(m) - P;
M(:,end) = ones(m,1)
y = zeros(1,m);
y(end) = 1;
```

```
1) v = y*inv(M);
2) v = M'\y';
3) v = linsolve(M',y');
```

matriz de incidencia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a = \mathrm{sum}(A, 2) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b = 1./a$

$b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.33 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ b & b & & b \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ (m columnas)

$M = \mathrm{repmat}(b, 1, m)$

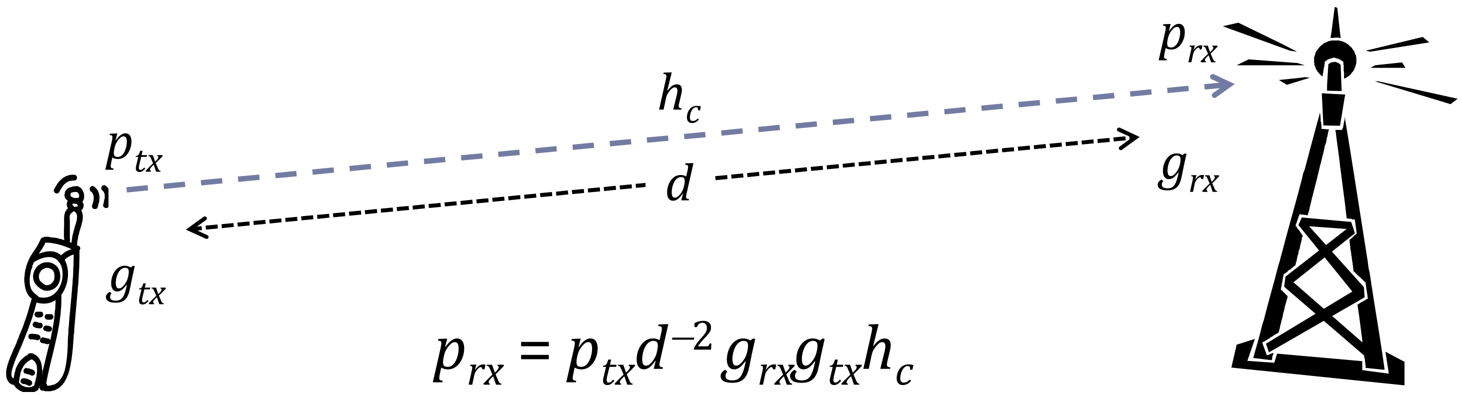
$A.*M$

Practica 2: ARQ con control de potencia

Introducción
Objetivos del protocolo
Formulación como SSP
Matriz de Transición y Vector de Coste
Objetivos de la práctica

Introducción

- Nodo inalámbrico transmitiendo en un canal con fading



$$p_{rx} = p_{tx} d^{-2} g_{rx} g_{tx} h_c$$

- Ganancia del canal: $h_c \in \{h_1, h_2, \ldots, h_C\}$.
- Se transmite un paquete en cada intervalo de tiempo.
- La ganancia del canal cambia de h_i a h_j en cada intervalo con probabilidades p_{ij} conocidas ($i, j \in \{1, 2, \ldots, C\}$).

Objetivo del protocolo

- Si el paquete transmitido llega con errores se vuelve a transmitir en el intervalo siguiente.
- El transmisor conoce el estado h_i del canal.
- En cada intervalo se elige una potencia de transmisión:

$$p_{tx} \in \{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$$

- Se desea transmitir un paquete de L bits consumiendo la ***mínima energía* posible**.
- Hay que encontrar la política que asigna la potencia de transmisión a cada estado del canal.

Formulación como SSP

- Estados del sistema: estado del canal, i, más estado de terminación, t (paquete recibido).
- Control: nivel de potencia seleccionada, $u \in \{1, 2, \ldots, M\}$
- Potencia recibida:

$$p_{rx}(i,u) = d^{-2} g_{tx} g_{rx} p_u h_i = K p_u h_i$$

- Probabilidad de error de bit:

$$P_e(i,u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{p_{rx}(i,u)}{WN_0}} \left(\pi \frac{p_{rx}(i,u)}{WN_0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

  - Donde W es la tasa de transmisión en bits por segundo
  - N_0 es la densidad espectral de ruido

Matriz de Transición y Vector de Coste

- Probabilidad de recibir correctamente una trama:

$$P_R(i,u) = \left(1 - P_e(i,u)\right)^L$$

- La matriz de transición controlada se define así

$$p_{ij}(u) = \begin{cases} p_{ij}\left(1 - P_R(i,u)\right) & \text{si } i \neq t \text{ y } j \neq t \\ P_R(i,u) & \text{si } i \neq t \text{ y } j = t \\ 0 & \text{si } i = t \text{ y } j \neq t \\ 1 & \text{si } i = t \text{ y } j = t \end{cases}$$

- El vector de coste es

$$g(i,u) = \frac{Lp_u}{W} \quad \text{para todo } i \neq t$$

Objetivos de la práctica

- Resolver la ecuación de Bellman mediante *policy iteration*
  1. Definir una política inicial
  2. Determinar su coste resolviendo

$$(I - P_{\mu^0})J_{\mu^0} = g_{\mu^0}$$

  3. Obtener una política que mejore el coste .
  4. Si la política no cambia, terminar el bucle y si no, evaluar el coste de la nueva política y volver al punto 3.
- Recuerde que en la ecuación de Bellman se excluye el estado *t*, y por tanto también estará excluido de $\boldsymbol{P}_{\mu}$ y $\boldsymbol{g}_{\mu}$.