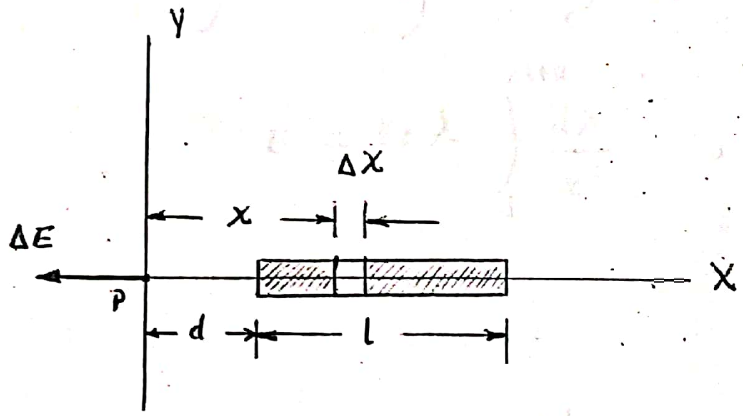
EJEMPLO 1: EL CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA BARRA CARGADA.

Una barra de longitud l tiene una carga positiva uniforme por longitud unitaria λ y una carga total Q. Calcule el campo eléctrico en un punto P a lo largo del eje de la barra, a una distancia d de un extremo (Figura).



$$\boxed{\Delta q = \lambda \Delta x}$$

Razonamiento y solución:

En este cálculo se considera que la barra está sobre el eje x. Utilicemos Δx para representar la longitud de un pequeño segmento de la barra y expresamos con Δq la carga sobre el segmento. La proporción entre Δq y Δx es igual a la proporción entre la carga total y la longitud total de la barra. Es decir, $\dfrac{\Delta q}{\Delta x} = \dfrac{Q}{l} = \lambda$.

Por lo tanto, la carga Δq sobre el pequeño segmento es $\Delta q = \lambda \Delta x$.

El campo ΔE producido por este segmento en el punto P está en la dirección x negativa y su magnitud es

$$\Delta E = k_e \frac{\Delta q}{x^2} = k_e \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

$$\Delta E = k_e \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

El campo total en P producido por todos los segmentos de la barra, que se encuentran a diferentes distancias desde P, está dado por la ecuación

$$E = k_e \lim_{\Delta q \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r},$$

que en este caso se convierte en

$$\Delta E = k_e \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

$$\int \Delta E = \int k_e \frac{\lambda \Delta x}{x^2}$$

$$E = k_e \lambda \int_d^{l+d} \frac{dx}{x^2}$$

, donde los límites en la integral se extienden desde un extremo de la barra ($x = d$) hasta el otro extremo ($x = l+d$); k_e y λ son constantes

$$E = k_e \lambda \int_d^{l+d} x^{-2}\, dx$$

$$E = k_e \lambda \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_d^{l+d} = k_e \lambda \left[\frac{1}{-x} \right]_d^{l+d}$$

$$E = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{l+d} = k_e \lambda \left[-\left(\frac{1}{l+d} - \frac{1}{d} \right) \right]$$

$$E = k_e \lambda \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right) = k_e \lambda \left(\frac{(l+d) - d}{d(l+d)} \right)$$

$$E = k_e \lambda \left(\frac{l+d-d}{d(l+d)} \right) = k_e \lambda \left(\frac{l}{d(l+d)} \right)$$

$$E = \frac{k_e \lambda}{d} \left(\frac{l}{l+d} \right), \quad \text{como} \quad Q = l\lambda \Rightarrow l = \frac{Q}{\lambda}$$

$$E = \frac{k_e \lambda}{d} \cdot \frac{\frac{Q}{\lambda}}{l+d} = \frac{k_e \lambda}{d} \cdot \frac{Q}{\lambda(l+d)}$$

$$\boxed{E = \frac{k_e Q}{d(l+d)}}$$

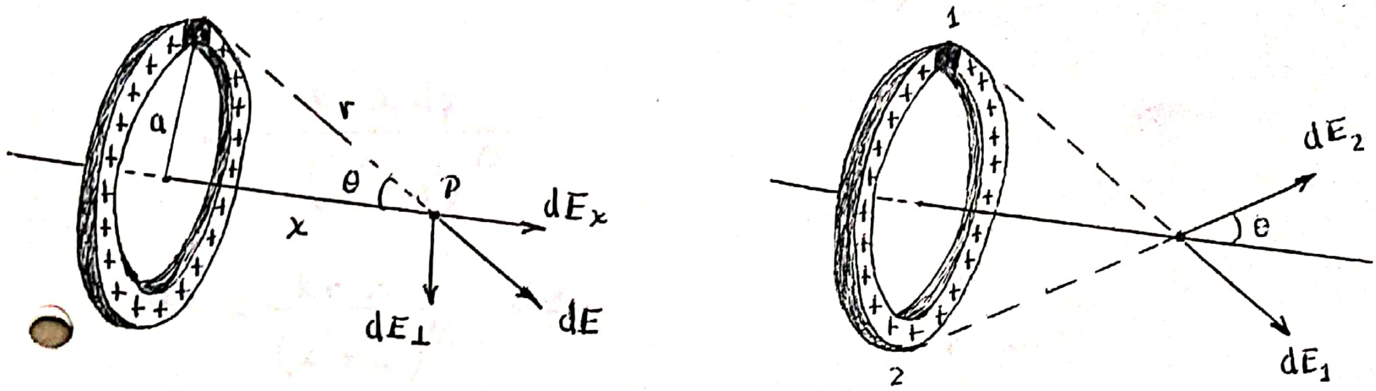
$\therefore$ Si $d \gg l$, entonces l puede ignorarse

$$E = k_e \frac{Q}{d(d)} \Longrightarrow \boxed{E = k_e \frac{Q}{d^2}}$$

$\therefore$ En el caso de grandes valores de $\frac{d}{l}$, la distribución de carga aparece como una carga puntual de magnitud Q.
Si $\frac{d}{l} \longrightarrow \infty$ la distribución de carga aparece como una carga puntual Q.

EJEMPLO 2: EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN ANILLO DE CARGA UNIFORME.

Un anillo de radio a tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud, con una carga total Q. Calcule el campo eléctrico a lo largo del eje x del anillo en un punto P que se encuentra a una distancia x del centro del anillo (Figura).



UN ANILLO CARGADO UNIFORMEMENTE DE RADIO a.

El campo en P sobre el eje x debido a un elemento de carga dq.

RAZONAMIENTO Y SOLUCIÓN:

La magnitud del campo eléctrico en P debido al segmento de carga dq es

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2}$$

Este campo tiene una componente $dE_x = dE\cos\theta$ a lo largo del eje del anillo y una componente $dE_\perp$ perpendicular al eje.

El campo resultante en P debe estar sobre el eje x debido a que la suma de los componentes perpendiculares es igual a cero.

Es decir, la componente perpendicular de cualquier elemento es cancelado por la componente perpendicular de un elemento en el lado opuesto del anillo.

$dE_x = dE \cos\theta$, pero $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$dE_x = dE\left(\frac{x}{r}\right)$, pero $dE = k_e \frac{dq}{r^2}$

$dE_x = \left(k_e \frac{dq}{r^2}\right)\frac{x}{r}$

$dE_x = \left(k_e \frac{dq}{r^3}\right)x$, pero $r = \sqrt{x^2 + a^2}$

$r = (x^2 + a^2)^{1/2}$

$$dE_x = \frac{k_e\, x\, dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$dE_x = \frac{k_e\, x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dq$$

$$\int dE_x = \int \frac{k_e\, x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dq$$

$$E_x = \frac{k_e\, x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq$$

$$\boxed{E_x = \frac{k_e\, x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot Q}$$ Q: carga total

Este resultado demuestra que el campo es cero en $x = 0$.

Si $x \gg a$, a se puede despreciar. Por lo tanto:

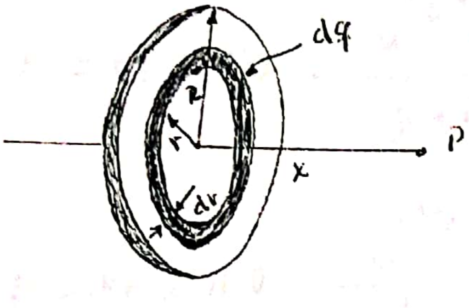
$$E_x = \frac{k_e\, x}{(x^2)^{3/2}} \cdot Q \Rightarrow E_x = k_e \frac{x}{x^3} \cdot Q \Rightarrow \boxed{E_x = k_e \frac{Q}{x^2}}$$

Se puede apreciar que el campo eléctrico a lo largo del eje x se acerca al de una carga puntual de magnitud Q.

%.

EJEMPLO 3: EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN DISCO CARGADO UNIFORMEMENTE

Un disco de radio R tiene una carga uniforme por unidad de área σ. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se encuentra a lo largo del eje central del disco y a una distancia x de su centro.



RAZONAMIENTO:

La solución a este problema es directa si consideramos el disco como un conjunto de anillos concéntricos. Podemos usar entonces el ejemplo 2, el cual produce el campo de un anillo de radio r, y adicionar las contribuciones de todos los anillos que conforman el disco. Por simetría, el campo sobre un punto axial debe ser paralelo a este eje.

SOLUCIÓN: El anillo de radio r y ancho dr tiene un área igual a $2\pi r\,dr$ (ver la figura anterior). La carga dq sobre este anillo es igual al área del anillo multiplicado por la carga por unidad de área, o $dq = 2\pi\sigma r\,dr$. Usando este resultado en la ecuación dada para E_x en el ejemplo 2 (con a sustituido por r) se produce para el campo debido al anillo la expresión

$$dE = \frac{k_e x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\left(2\pi\sigma r\,dr\right)$$

Para obtener el campo total en P, integramos esta expresión sobre los límites $r=0$ hasta $r=R$, observando que x es una constante. Esto produce

(x es constante)

$$E = k_e x \pi\sigma \int_0^R \frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$r=0 \Rightarrow u = x^2$

$r=R \Rightarrow u = x^2+R^2$

Haciendo $u = x^2+r^2$

$$\frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow \boxed{du = 2r\,dr}$$

$$E = k_e x \pi \sigma \int_0^R \frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = k_e x \pi \sigma \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} \Rightarrow E = k_e x \pi \sigma \int_{x^2}^{x^2+R^2} u^{-3/2}\,du \Rightarrow$$

$$E = k_e x \pi \sigma \cdot \left.\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$E = k_e x \pi \sigma \cdot \left.\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$E = k_e x \pi \sigma (-2) \left. u^{-1/2} \right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$E = k_e x \pi \sigma (-2) \left[(x^2+R^2)^{-1/2} - (x^2)^{-1/2} \right]$$

$$E = k_e x \pi \sigma (-2) \left[\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} - x^{-2/2} \right]$$

$$E = k_e x \pi \sigma (-2) \left[\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} - x^{-1} \right]$$

$$E = k_e x \pi \sigma (-2) \left[\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right]$$

$$E = k_e x \pi \cdot 2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right]$$

Como x es la distancia del punto P al centro del disco

$$E = 2\pi k_e \sigma \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \right)$$

El resultado es válido para todos los valores de x. El campo cercano al disco sobre un punto axial puede obtenerse también a partir de la expresión anterior suponiendo que $R >> x$

$$E = 2\pi k_e \sigma = 2\pi \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre.