

# Teoria dos Grafos

## Aula 2

### **Aula passada**

- Logística
- Objetivos
- Grafos, o que são?
- Formando pares

### **Aula de hoje**

- Mais problemas reais
- Definições importantes
- Algumas propriedades

# Objetivos da Disciplina

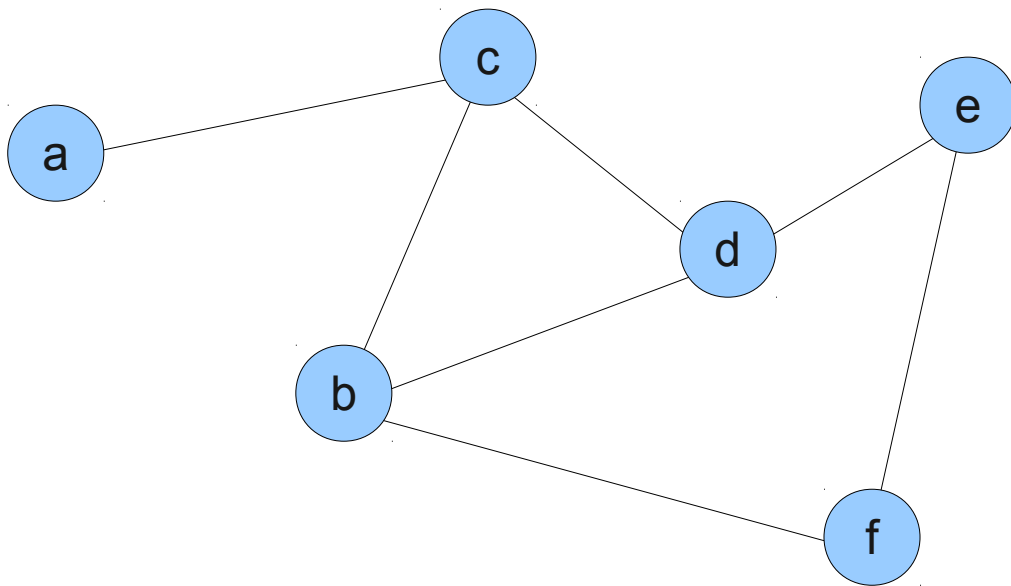
- Grafos como ferramenta de modelagem
  - abstração de problemas reais
- Algoritmos eficientes em grafos para resolver problemas

## Abordagem?

- Estudo de problemas reais
- Construção de algoritmos eficientes
  - complexidade de algoritmos
- Técnicas para construção de algoritmos

# O que é um grafo?

- Definição: “Um grafo é um conjunto de pontos, chamados vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas” [Wikipedia 2008]



É um grafo?

**Definição burocrática!**

# Grafo, outra definição

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

## Que objetos?

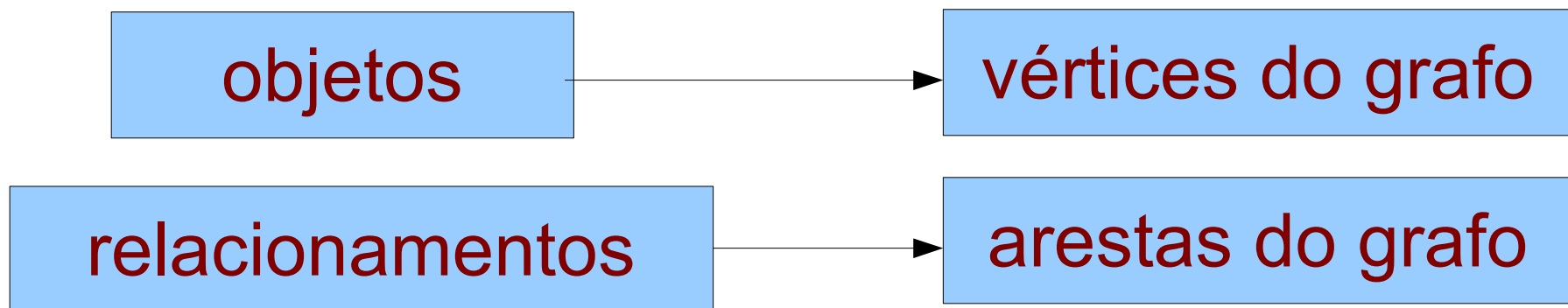
- Qualquer um! Ex. pessoas, cidades, empresas, países, páginas web, filmes, etc...

## Que relacionamentos?

- Qualquer um! Ex. amizade, conectividade, produção, língua falada, etc.
- Simétrico ou assimétrico

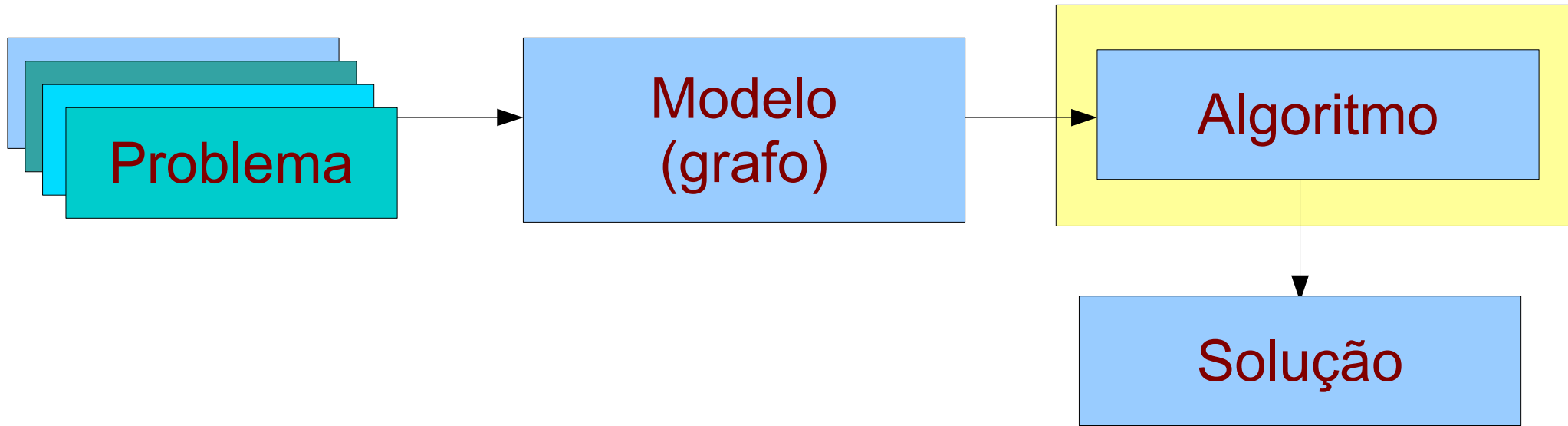
# Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre **pares** de objetos



**Exemplos?**

# Poder da Abstração



- Muitos problemas resolvidos com o mesmo **algoritmo** (solução) em cima da abstração!

# Alocação de Professores



■ N professores



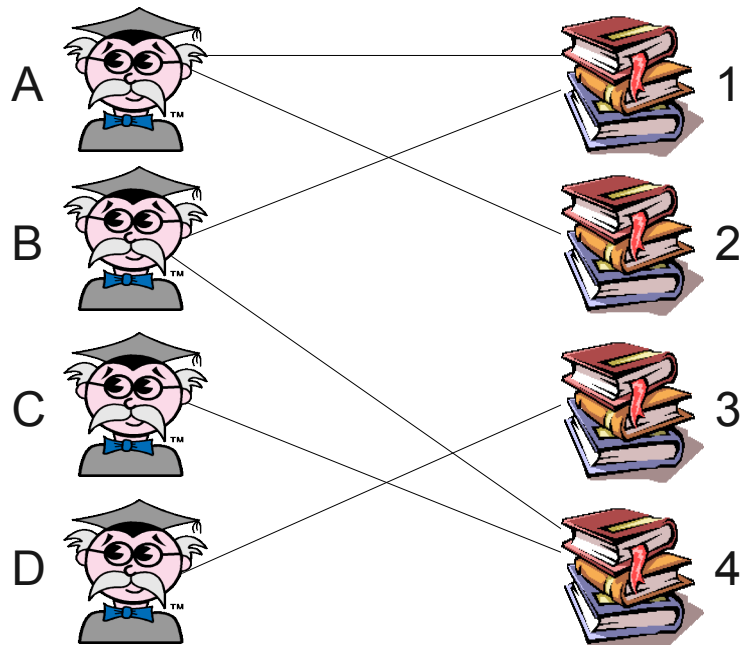
■ M disciplinas  
( $< N$ )

- Cada professor pode lecionar uma ou mais disciplinas
- **Problema 1:** Dado o que cada professor pode lecionar, é possível que as **M** disciplinas sejam oferecidas simultaneamente?
- **Problema 2:** Qual o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas?

# Alocação de Professores

■ Como abstrair o problema (via grafos)?

**Mesma abstração!**



**Mesmo algoritmo!**



# Pesquisando no Orkut



- Milhões de pessoas (profiles)
- Profiles interligadas via relacionamentos declarados

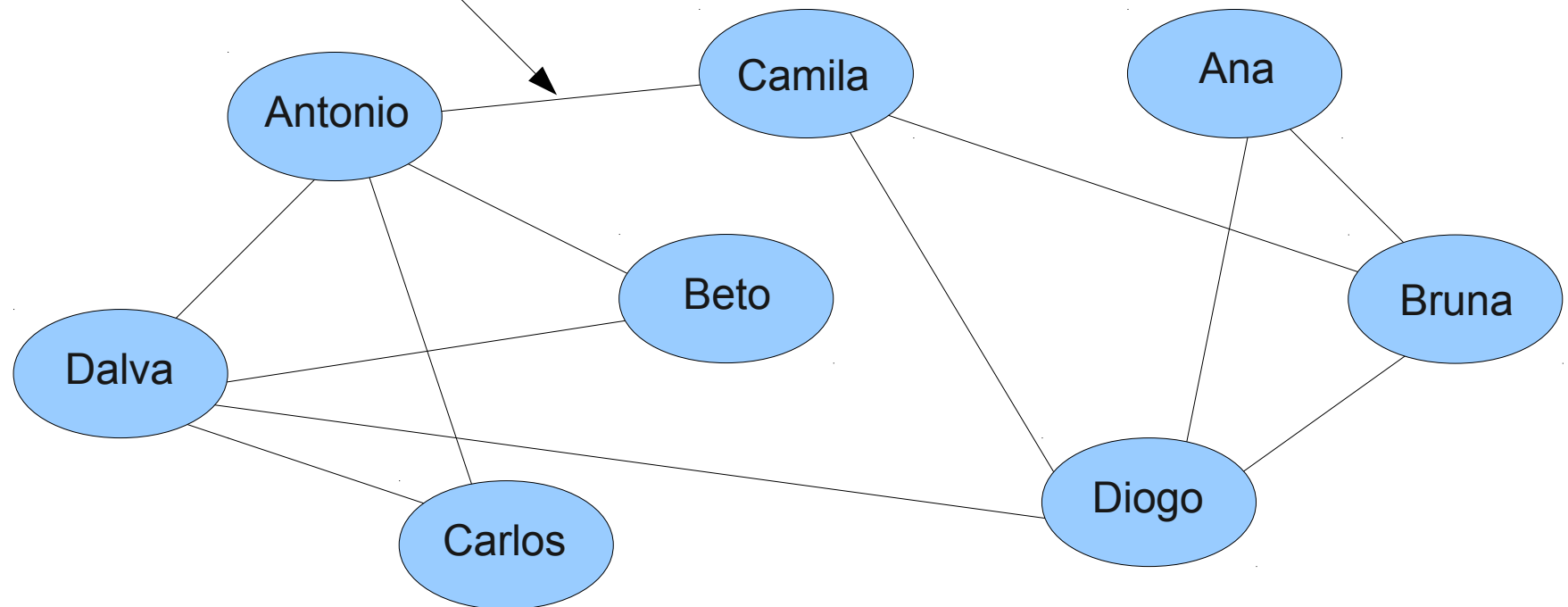
- **Problema 1:** Como saber se duas pessoas estão “conectadas” através de uma sequência de relacionamentos?
- **Problema 2:** Qual é o menor caminho entre duas pessoas?

**Orkut resolve os dois problemas!**

# Pesquisando no **orkut**<sup>beta</sup>

- Como abstrair o problema (via grafos)?
- Objeto: profiles (pessoas)
- Relacionamento: relacionamentos declarados

Antonio é  
“amigo” da Camila

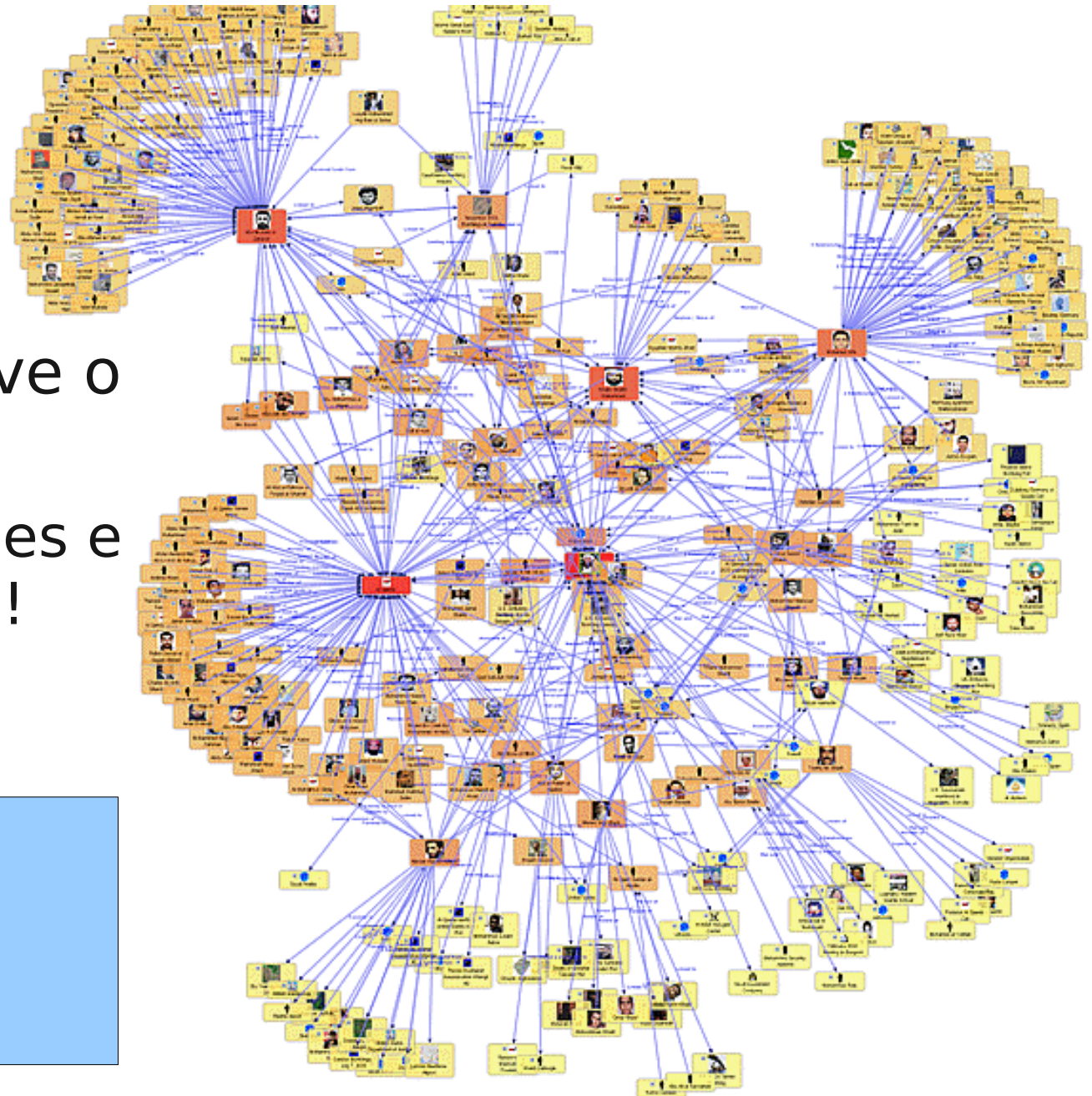


- Carlos e Ana: Conectados? Menor caminho?

# Pesquisando no orkut<sup>beta</sup>

- Como Orkut resolve o problema?
- milhões de profiles e relacionamentos!

**Algoritmo  
(eficiente)!**



# Viagem entre Cidades



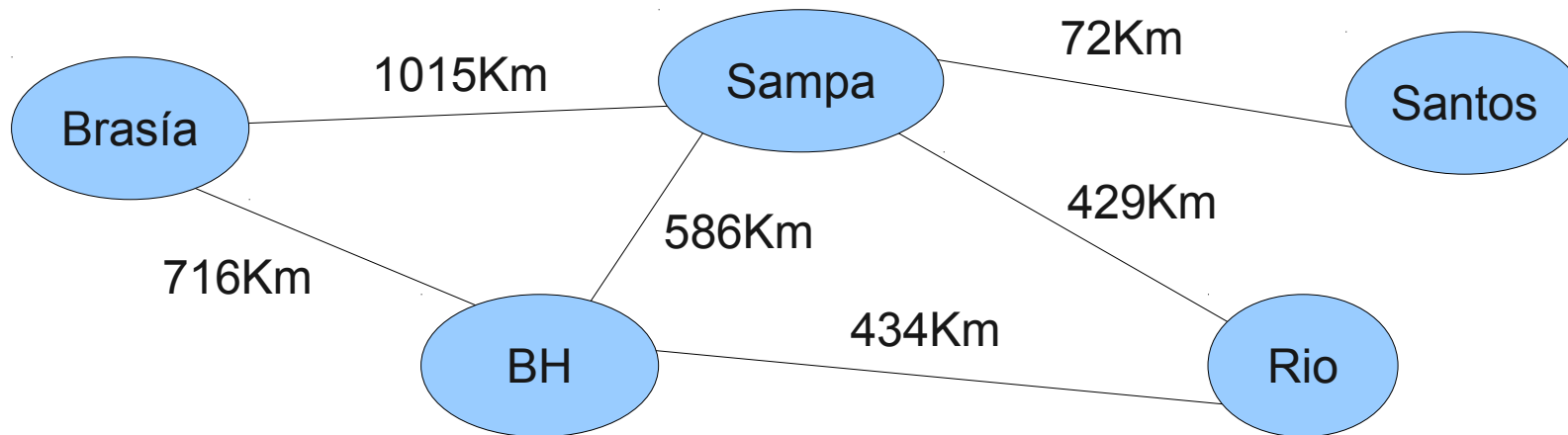
- Cidades brasileiras
- Estradas entre cidades

- **Problema 1:** Como saber se duas cidades estão “conectadas” por estradas?
- **Problema 2:** Qual é o menor (melhor) caminho entre duas cidades?

# Viagem entre Cidades

- Como abstrair o problema (via grafos)?

**Abstração parecida!**



**Algoritmo parecido!  
(algumas variações)**

# Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

**Como representá-lo  
formalmente?**



**Conjuntos!**

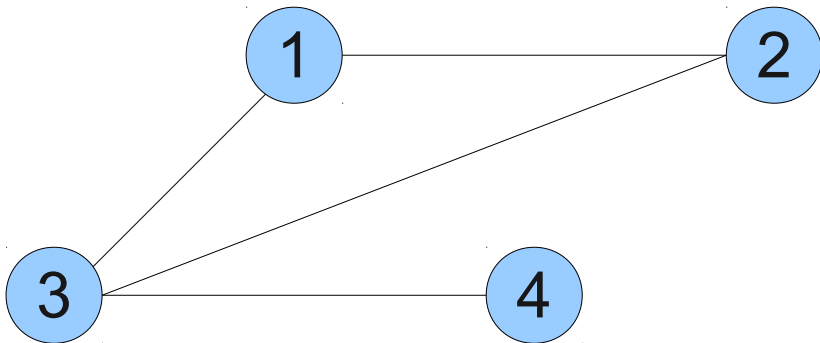
- Conjuntos de objetos e de pares relacionados

# Grafo

- Grafo  $G = (V, E)$
- $V$  = conjunto de objetos
  - chamaremos de vértices ou nós
- $E$  = conjunto de pares relacionados
  - chamaremos de arestas
  - par não ordenado:  $(a,b) == (b,a)$
- Exemplo:  $G = (V, E)$ 
  - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$

# Representação Gráfica

- Desenho de  $G$  (o que vimos até agora)
  - representação gráfica dos conjuntos
- Exemplo:  $G = (V, E)$ 
  - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$





# Adjacência e Incidência

- Vértices adjacentes são vértices “vizinhos”
  - mais precisamente...
- Dado grafo  $G = (V, E)$
- Dois vértices  $a$  e  $b$  são **adjacentes** se existe  $e = (a, b)$  no conjunto  $E$
- Aresta  $e$  é **incidente** aos vértices  $a$  e  $b$
- Exemplo:  $G = (V, E)$ 
  - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$
  - 4 e 1 são adjacentes?
  - 3 e 2 são adjacentes?

# Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo

- $n = |V|$  ← cardinalidade do conjunto

- Número de arestas de um grafo

- $m = |E|$

- Dado  $G = (V, E)$

- Menor número de arestas de  $G$ ? → **zero!**

- Maior número de arestas de  $G$ ?

- número de pares não ordenados em um conjunto de  $n = |V|$  objetos →  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$

# Grau

- Grau de um vértice  $v$ 
  - número de vértices adjacentes a  $v$
  - função  $\text{grau}(v)$
- Exemplo:  $G = (V, E)$ 
  - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$
  - $\text{grau}(1) = ?$
  - $\text{grau}(4) = ?$
- Dado  $G = (V, E)$ 
  - Grau mínimo de um vértice? —————▶ **zero!**
  - Grau máximo de um vértice? —————▶  **$n - 1$**

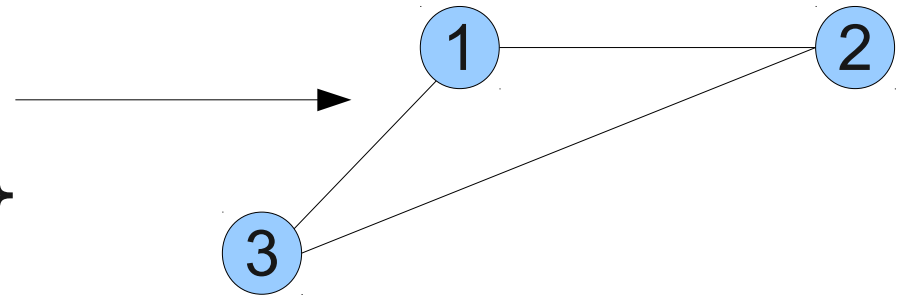
# Grafo Regular

- Todos os vértices têm mesmo grau
  - no caso de  $r$ -Regular, grau é  $r$

- Exemplo:  $G$  é 2-regular,  $n = 3$

- $V = \{1, 2, 3\}$

- $E = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

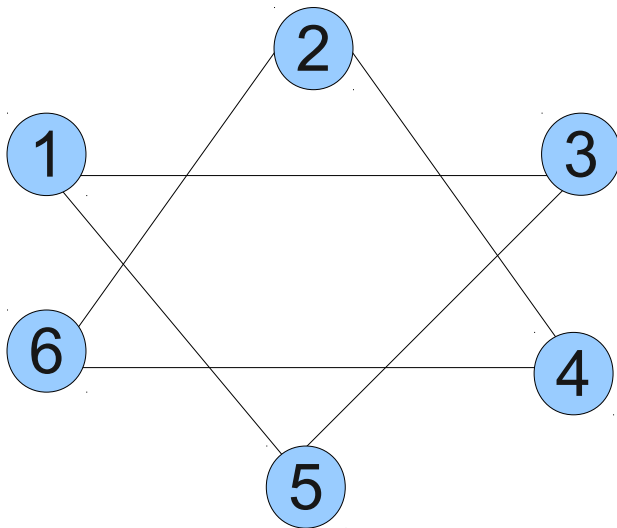
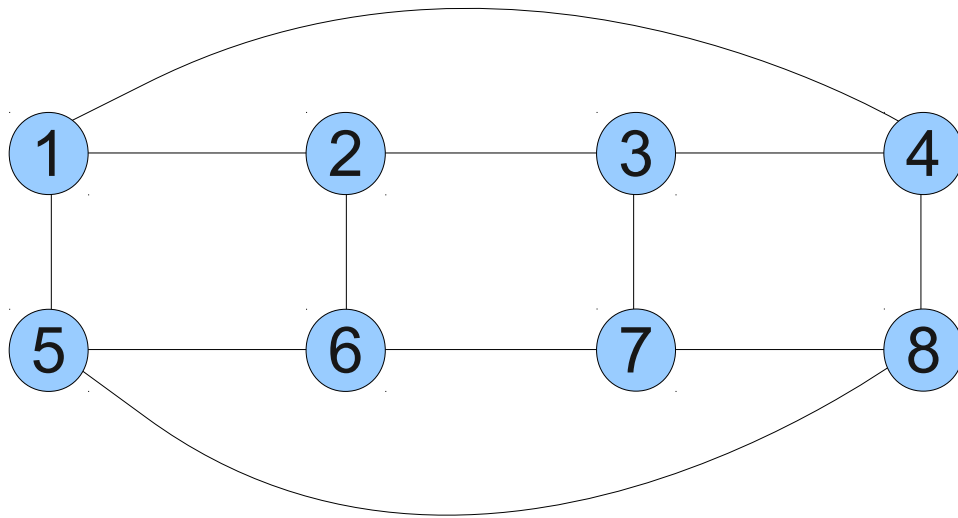


- Dado  $G = (V, E)$ , e  $G$   $r$ -regular
- Quantas arestas tem  $G$ ?

$$|E| = \frac{nr}{2} \quad \leftarrow \text{Por que?}$$

# Grafo Regular

■ São regulares?



■ É possível ter qualquer combinação de  $n$  e  $r$ ?

# Grafo Completo

- Aresta presente entre cada par de vértices
  - todos os vértices tem grau máximo
- Notação de grafo completo
  - $K_n$  onde  $n$  é o número de vértices

## Exemplos

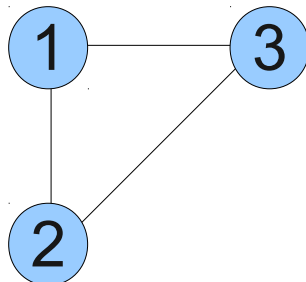
$K_1$



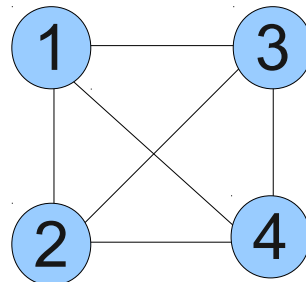
$K_2$



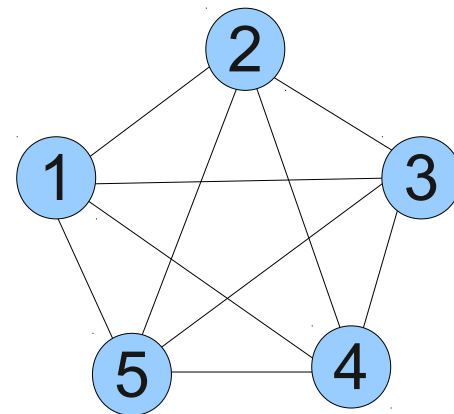
$K_3$



$K_4$



$K_5$



- Quantas arestas têm  $K_n$ ?

# Caminho

- Como definir “caminho” em um grafo?

- Ex. caminho entre 1 e 7?

- Caminho entre dois vértices

- sequência de vértices conectados por arestas

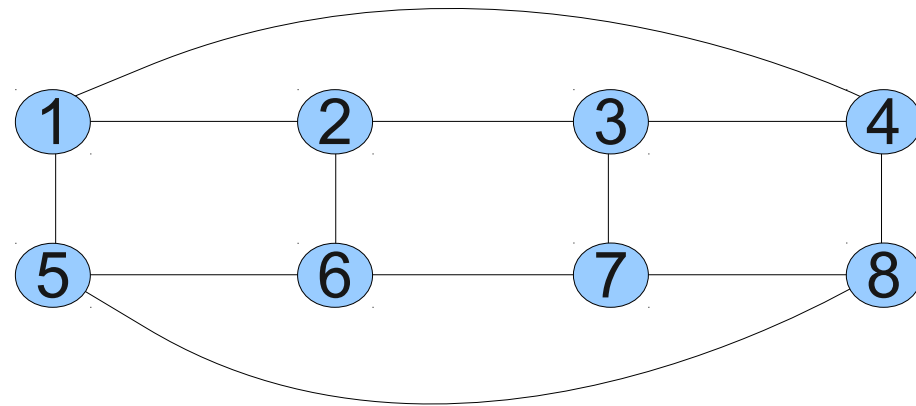
- Caminho entre  $v_1$  e  $v_k$

- sequência  $v_1, \dots, v_k$ , tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in E \quad i=1, \dots, k-1$

- Ex. caminho entre 1 e 7?

- $1, 2, 3, 7 \longrightarrow (1,2), (2,3), (3,7)$

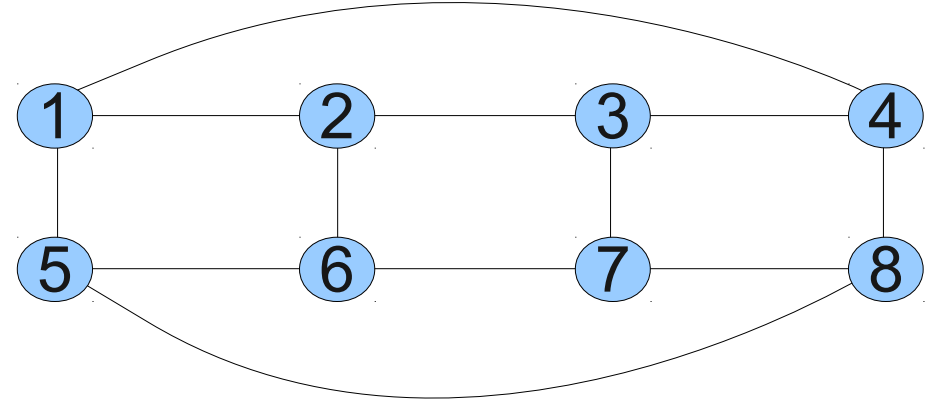
- $1, 5, 6, 2, 6, 7$  é caminho?



# Caminho Simples

- Vértices do caminho são distintos

- não há “voltas”



- Ex. caminho entre 1 e 7?

- 1, 5, 6, 2, 6, 7 ← não é caminho simples

- 1, 5, 8, 7 ← é caminho simples

- Comprimento do caminho

- número de arestas que o forma

- Dado  $G = (V, E)$

- qual é o menor caminho simples entre dois vértices?

- qual é o maior?



# Ciclo

- Caminho simples que começa e termina no mesmo vértice

- $V_1 = V_k$

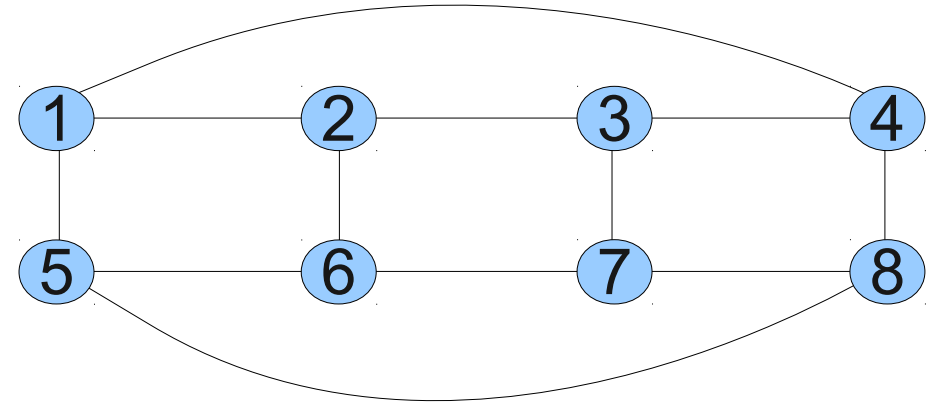
- Ex. ciclo em 5?

- 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5

- 5, 1, 4, 8, 5

- Comprimento do ciclo

- número de arestas que o forma



- Dado  $G = (V, E)$

- qual é o maior ciclo?

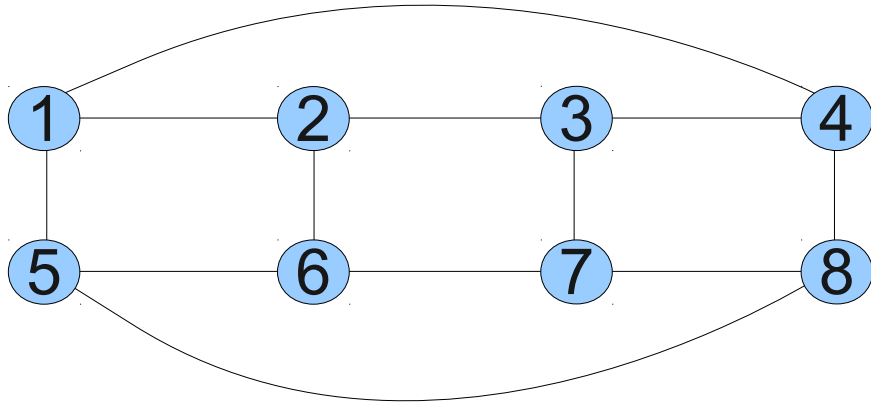
- n vértices, ciclo hamiltoniano

# Subgrafo

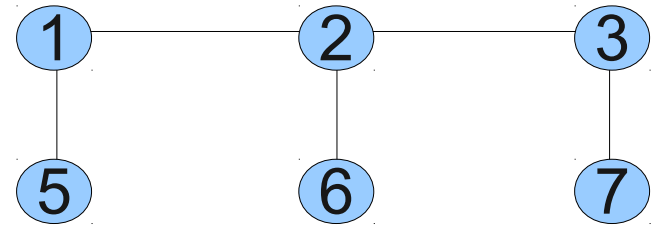
- Um grafo que é “parte” de outro grafo
  - mais precisamente...
- Dado  $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$  é subgrafo de  $G$  se
  - $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$

# Subgrafo Exemplo

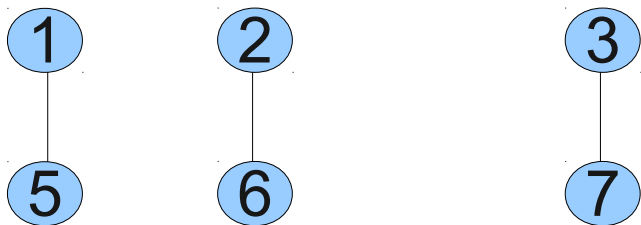
■ Dado  $G = (V, E)$



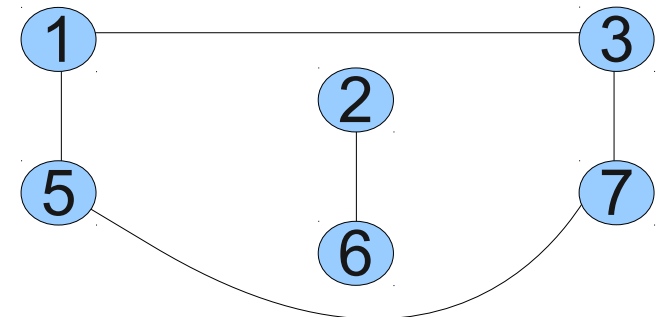
É subgrafo de  $G$ ?



É subgrafo de  $G$ ?



É subgrafo de  $G$ ?

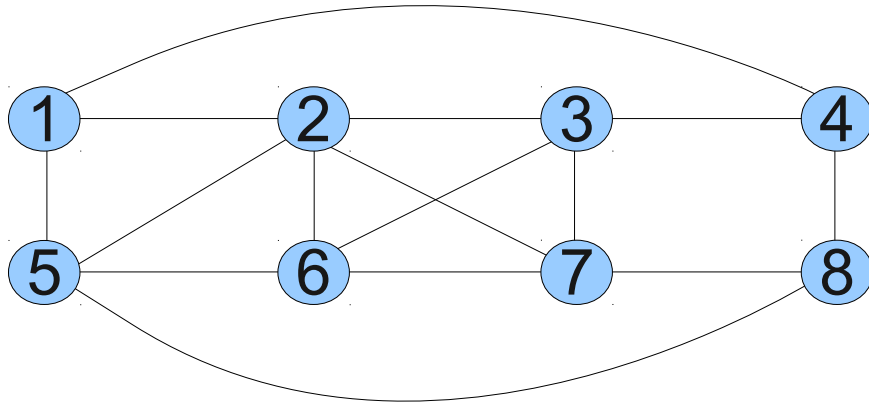


# Clique

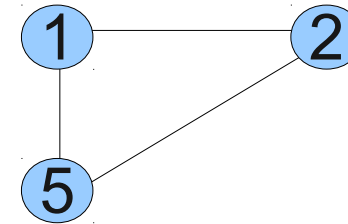
- Um grafo completo “dentro” de outro grafo
  - mais precisamente...
- Dado  $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$  é um *clique* de  $G$  se
  - $G'$  é subgrafo de  $G$
  - $G'$  é um grafo completo

# Clique Exemplo

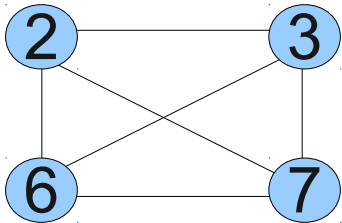
■ Dado  $G = (V, E)$



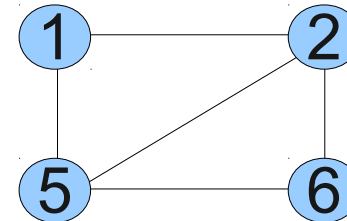
É clique de G?



■ Qual é o maior clique de G?



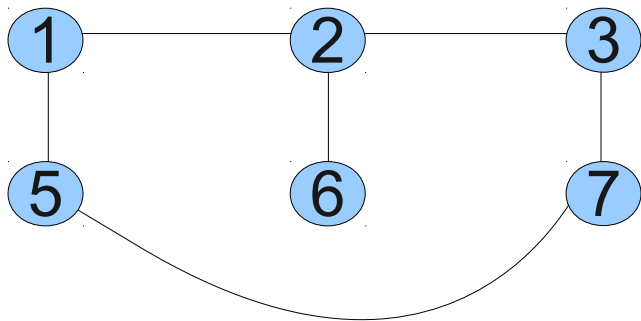
É clique de G?



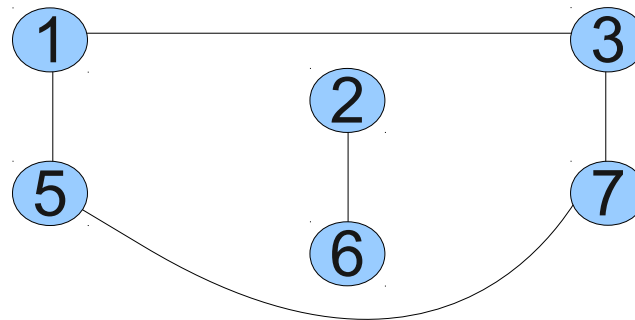
■ Problema “difícil”: encontrar maior clique de um grafo

# Conexo

- Grafo está “conectado”
  - como definir mais precisamente?
- Grafo  $G=(V, E)$  é conexo se
  - existe caminho entre qualquer par de vértices
- Caso contrário,  $G$  é desconexo



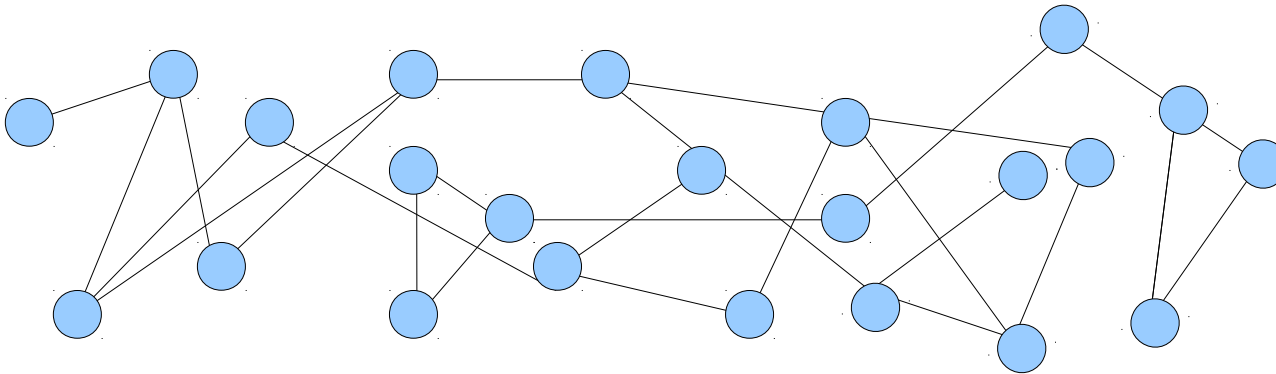
Conexo?



Conexo?

# Conexo

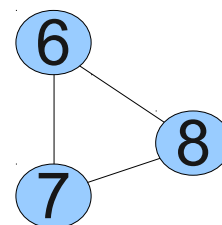
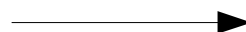
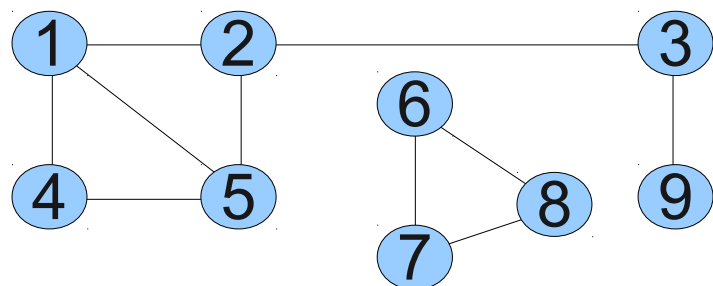
- **Problema:** Como saber se um grafo é conexo?



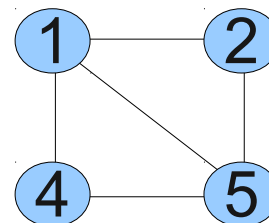
- Como você resolveria este problema?
- Veremos algoritmo (eficiente)
  - em duas aulas...

# Componentes Conexos

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
  - mais precisamente...
- Subgrafos maximais de  $G$  que sejam conexos
  - *maximal*: subconjunto que maximiza a propriedade, no caso subgrafo conexo
- Exemplo:



Componente  
conexo?



Componente  
conexo?