

# Teoria dos Grafos

## Aula 5

### Aula passada

- Explorando grafos
- Mecanismos genéricos
- Ideias sobre BFS, DFS

### Aula de hoje

- Busca em grafos
- Busca em largura (BFS - Breadth-First Search)
- Propriedades

# Busca em Grafos

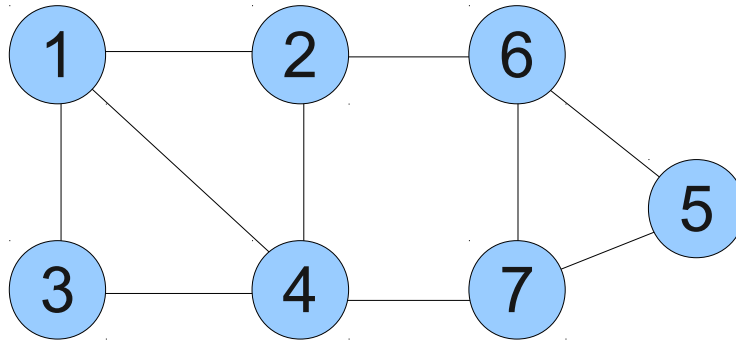
- Problema fundamental em grafos

***Como explorar um grafo de forma sistemática?***

- Muitas aplicações são abstraídas como problemas de busca
- Muitos algoritmos utilizam fundamentos similares

# Busca em Grafos

- Como saber se existe caminho entre dois vértices?
  - de maneira eficiente



- **Idéia:** evitar explorar vértices já explorados
  - marcar os vértices!
  - vértice: *descoberto* ou *explorado*

# Busca em Grafos

- Definir vértice inicial (origem ou raiz)
- Explorar e marcar vértices
  - *Descoberto*: vértice foi descoberto (visitado pela primeira vez)
  - *Explorado*: todas as arestas incidentes ao vértice foram exploradas e vizinhos descobertos
- Algoritmo genérico?

# Algoritmo Genérico

- Passo inicial
  - desmarcar todos os vértices
  - selecionar origem e marcá-lo *descoberto*
- Passo geral (enquanto houver vértice descoberto)
  - Selecionar vértice descoberto,  $u$
  - Considerar aresta não explorada,  $(u, v)$
  - Se  $v$  não estiver marcado, marcar  $v$  como *descoberto*
  - Marcar  $u$  *explorado* quando não houver mais arestas incidentes a  $u$  a serem exploradas

# Ordenação da Exploração

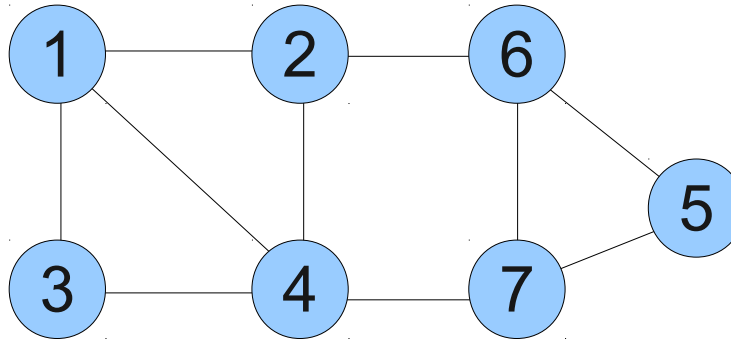
- Ordem de visita dos vértices e arestas?

**Algoritmo genérico não estabelece ordem**

- Qual é uma possível ordem?
  - Sistemática de exploração
- Duas abordagens
  - Explorar o vértice *descoberto* “mais antigo”
  - Explorar o vértice *descoberto* “mais recente”

# Busca em Largura (BFS)

- Explorar vértices descobertos mais antigos primeiro

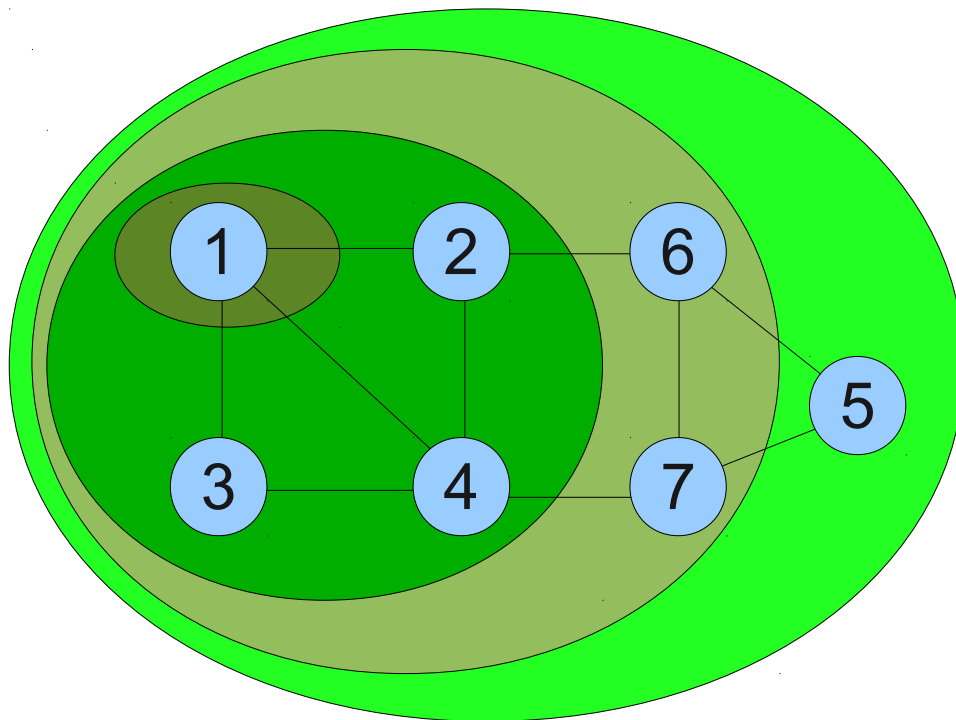


- Origem: vértice 1
- Em que ordem os vértices são *descobertos*?

**Assumir arestas são exploradas em ordem crescente dos vértices adjacentes (matriz ou lista de adjacência)**

# Interpretação

- Onda é propagada à partir da raiz
- Onda expande em círculos, descobrindo vértices alcançáveis!



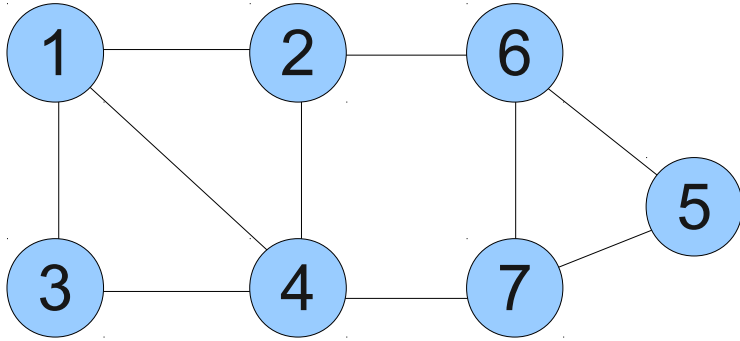
**Busca em Largura!**



# Camadas

- $L_i$  : conjunto de vértices pertencentes a camada  $i=0, 1, 2, \dots$
- $L_0$  : vértice origem
- $L_{i+1}$  : conjunto de vértices que **não fazem parte** de uma camada anterior e que **possuem uma aresta** com algum vértice da camada  $L_i$

# Camadas: Exemplo

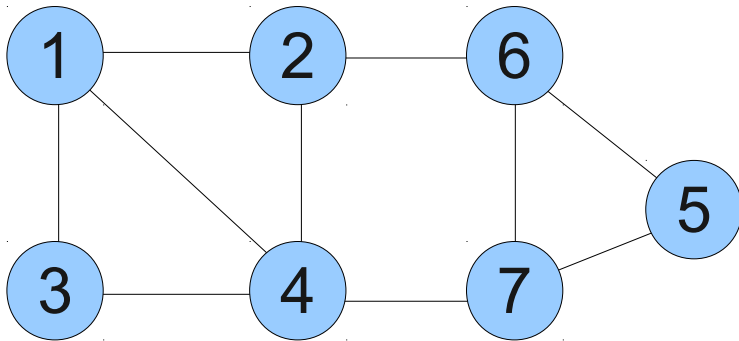


■  $L_0$  : vértice 2

■  $L_i$  : ?

# Distância

- Comprimento do **menor** caminho simples entre dois vértices
- Função  $d(u,v)$ , onde  $u$  e  $v$  são vértices
  - infinito quando não há caminho



- Exemplo

- $d(1,2) = ?$
- $d(6, 3) = ?$
- $d(7, 1) = ?$

# Camadas e Distância

- Qual é a relação entre eles?
- Vértices pertencentes a camada  $L_i$  têm distância  $i$  da origem!

**Busca em largura (BFS)  
calcula distância!**

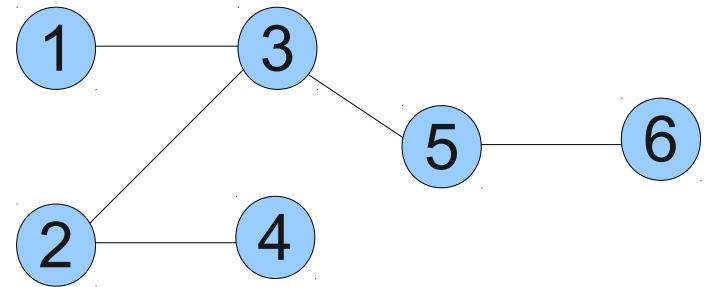
# Grafo Acíclico

- Grafo acíclico é um grafo que não possui ciclos
  - lembrem do “ciclo”?

■ Exemplo:

- $K_4$  é acíclico?

É acíclico?

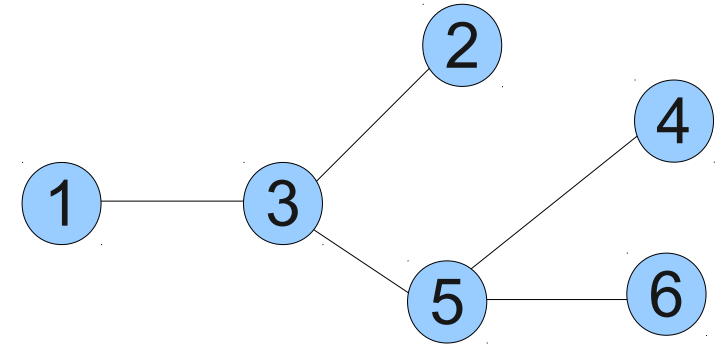


- Como descobrir se um grafo é acíclico?

**Algoritmo eficiente!**

# Árvores

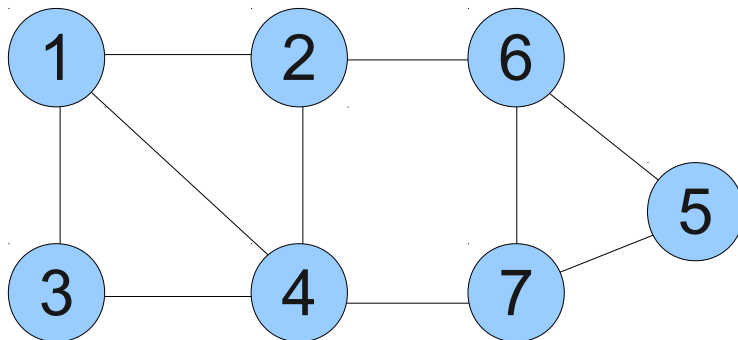
- Uma árvore é um grafo acíclico conexo
  - definição de árvore!



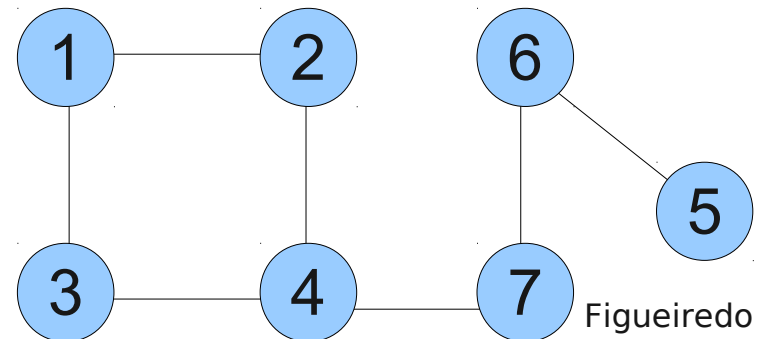
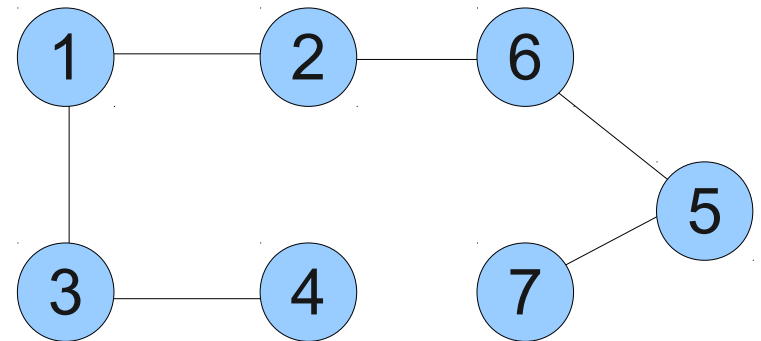
- Folha: vértice com grau 1
- Raiz: um determinado vértice
  - define orientação na árvore (pai, filhos, descendentes e acenstrais)
- Quantos caminhos (simples) distintos existe entre dois vértices quaisquer?
- Quantas arestas possui uma árvore com  $n$  vértices?

# Árvore Geradora

- Subgrafo que contém **todos** os vértices de  $G$  e é uma **árvore**
  - em inglês, “spanning tree”
  - árvore que “alcança” todos os vértices



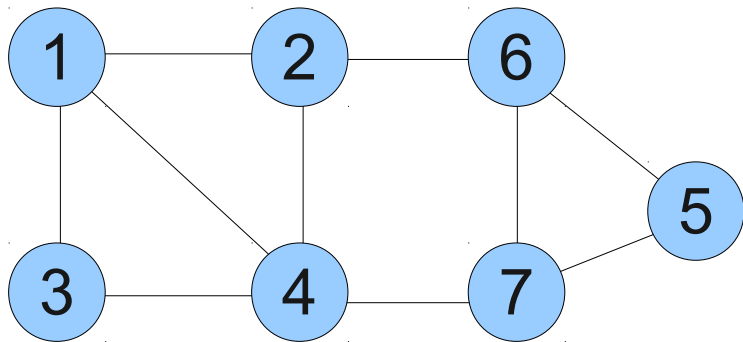
É árvore geradora?



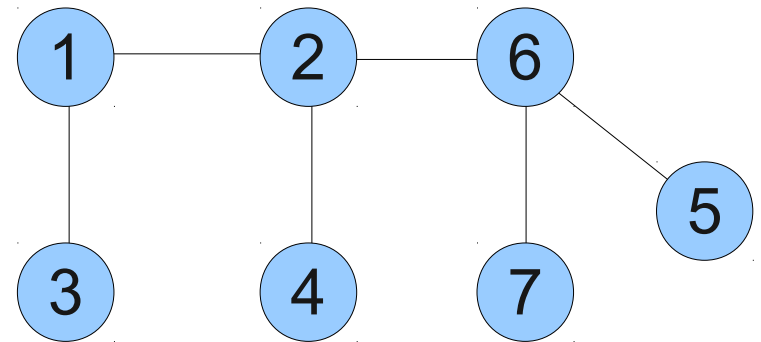
# Árvore Geradora da BFS

- Árvore *induzida* pela busca em largura
  - Raiz: vértice de origem
  - Pai de  $v$ : nó que levou à descoberta de  $v$

raiz: nó 6



Árvore geradora



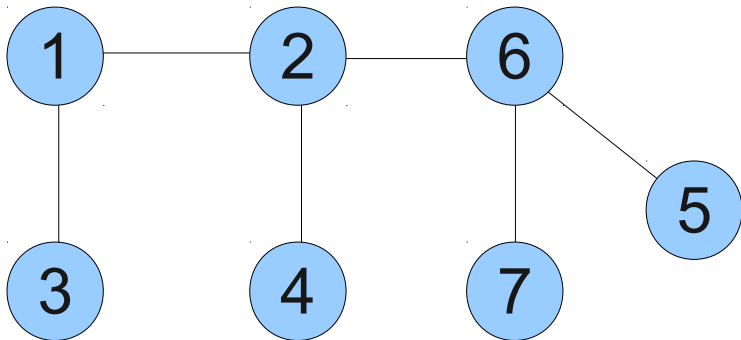
- Ordem da busca *define* árvore
- $L_i$  = nível  $i$  da árvore



# Menor Caminho

- Árvore geradora define menor caminho
- Dado vértice  $v$  (raiz) e outro vértice  $w$  qq.
  - menor caminho definido pela sequência de pais de  $w$  até a raiz

Árvore geradora  
(raiz 6)



- menor caminho entre 3 e 6?
- menor caminho entre 3 e 7?
- **Cuidado!** Árvore define menor caminho para raiz!