MEC8211 — Vérification et validation en modélisation numérique

Devoir 3

Bradley Victor (1961392)
James Riemen Schneider Jean Louis (2219769)
Lucas Pandolphi Zini (2177706)

25 mars 2024

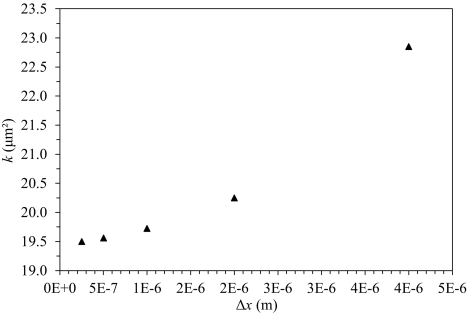
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

(A) Incertitude sur la solution numérique (u_{num})

Maillage le plus fin consideré : $N_x = 200$ et $\Delta x = 1 \times 10^{-6}$ m.
L'ordre de convergence observé ($\hat{p}$) a été obtenu en calculant la perméabilité (k) pour trois maillages avec un facteur de raffinement $r = 2$:

$$\hat{p} = \frac{\ln\left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{22{,}8513 - 20{,}2503}{20{,}2503 - 19{,}7265}\right)}{\ln 2} = 2{,}3120.$$

La convergence asymptotique est illustrée dans la figure ci-dessous :



(A) Incertitude sur la solution numérique (u_{num})

Il s'est avéré qu'il faut calculer le *Grid Convergence Index* (GCI), défini à un niveau de confiance de 95,4 % :

$$\left|\frac{\hat{p}-p_f}{p_f}\right| = \left|\frac{2{,}3120-2}{2}\right| = 0{,}1560 > 0{,}1 \Rightarrow Fs = 3;$$

$$p = \min(\max(0{,}5; \hat{p}); p_f) = \min(\max(0{,}5; 2{,}3120); 2) = 2;$$

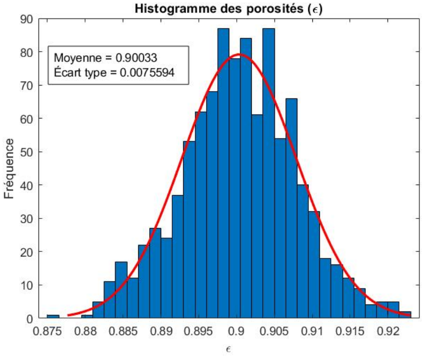
$$\mathrm{GCI} = \frac{3}{r^p-1}|f_2-f_1| = \frac{3}{2^2-1}|20{,}2503-19{,}7265| = 0{,}5238\,\mu\mathrm{m}^2.$$

L'incertitude numérique est donc

$$u_{\mathrm{num}} = \frac{\mathrm{GCI}}{2} = 0{,}2619\,\mu\mathrm{m}^2.$$

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

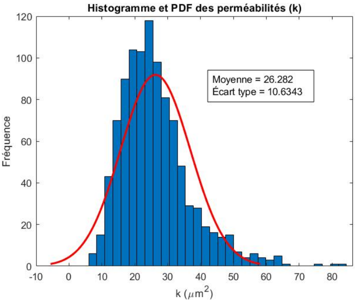
La méthode Monte-Carlo a été utilisée pour estimer u_{input} avec un échatillon de 1000 valeurs de porosité (ϵ) et de taille des fibres. L'histogramme des porosités obtenues et leur fonction de densité de probabilité (PDF) sont présentés ci-dessous :



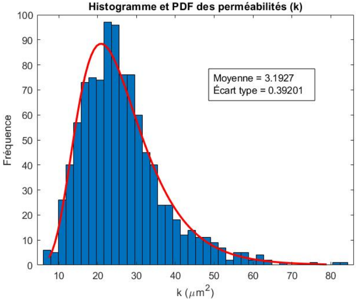
La distribution normale obéit aux données d'entrée ($\bar{\epsilon} = 0{,}900$, $\sigma = 0{,}0075$).

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

Les résultats de perméabilité suivent la loi log-normale, comme le montrent les figures ci-dessous :



Distribution normale

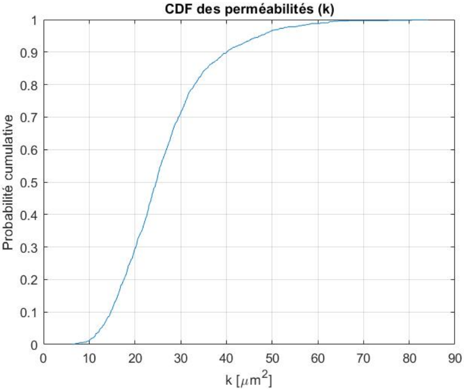


Distribution log-normale

Moyenne : $e^{\mu} = e^{3,1927} = 24{,}3532\,\mu\text{m}^2$.
Écart type : $e^{\sigma} = e^{0,39201} = 1{,}4800\,\mu\text{m}^2$.

(B) Incertitude sur les données d'entrée (u_{input})

La fonction de distribution cumulative (CDF) correspondant à la distribution log-normale est présentée dans la figure suivante :



u_{input} correspond à l'écart type, soit $u_{\text{input}} = 1{,}4800$.

(C) Incertitude des données expérimentales (u_D)

L'incertitude des données expérimentales a deux composantes :

- b_r, la composante épistémique, informée par le manufacturier du perméamètre ($\pm 10\,\mu\text{m}^2$);
- s_r, la composante aléatoire, représentée par l'écart type des mesures de perméabilité ($14{,}7\,\mu\text{m}^2$).

u_D est donc

$$u_D^2 = u_r^2 = b_r^2 + s_r^2 = 10^2 + 14{,}7^2 = 316{,}1\,\mu\text{m}^4$$

$$u_D = u_r = \sqrt{316{,}1} = 17{,}8\,\mu\text{m}^2.$$

(D) Erreur de la simulation (E)

L'erreur de la simulation est obtenue par

$$E = S - D,$$

où S est la solution numérique, prise comme la médiane des valeurs de perméabilités, et D est la valeur expérimentale, considerée comme la perméabilité médiane mesurée.

Donc, $S = 24{,}7\,\mu\text{m}^2$ et $D = 80{,}6\,\mu\text{m}^2$.

$$E = 24.7 - 80.6 = -55{,}9\,\mu\text{m}^2.$$

(E) Erreur du modèle (δ_{model})

δ_{model} contient différentes contributions :

$$\delta_{\mathrm{model}} = E - (\delta_{\mathrm{input}} + \delta_{\mathrm{num}} - \delta_D)$$

Soit u_{val} l'estimation de l'écart type de la combinaison des erreurs $(\delta_{\mathrm{input}} + \delta_{\mathrm{num}} - \delta_D)$. L'erreur du modèle est contenue dans un intervalle :

$$\delta_{\mathrm{model}} \in [E - \kappa u_{\mathrm{val}}, E + \kappa u_{\mathrm{val}}],$$

où $\kappa = 2$ pour un niveau de confiance de 95,4 %.
u_{val} est calculée par

$$u_{\mathrm{val}} = \sqrt{u_{\mathrm{num}}^2 + u_{\mathrm{input}}^2 + u_D^2} = \sqrt{0{,}2619^2 + 1{,}4800^2 + 17{,}8^2}$$

$$u_{\mathrm{val}} = 17{,}8633\,\mu\mathrm{m}^2 \approx 17{,}8\,\mu\mathrm{m}^2.$$

u_{val} est dominée par la composante expérimentale, u_D.

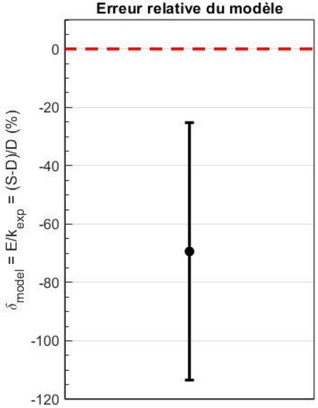
(E) Erreur du modèle (δ_{model})

E est donc une estimation de δ_{model} dans l'intervalle

$$[-55{,}9 - 2 \times 17{,}8 \leqslant \delta_{\text{model}} \leqslant -55{,}9 + 2 \times 17{,}8]\ \mu\text{m}^2$$

$$[-91{,}5 \leqslant \delta_{\text{model}} \leqslant -20{,}3]\ \mu\text{m}^2.$$

L'erreur relative du modèle est répresentée dans la figure suivante :



(E) Adéquation du modèle

Le modèle n'est pas valide. Étant donné que $|E| > 2 \times u_{\text{val}}$, il y a une erreur significative entre la simulation et les données expérimentales. Les approximations grossières dans l'étape de simulation suggèrent que le modèle est inadéquat.

Le graphique précédent montre que l'incertitude sur δ_{model} n'atteint pas zéro ; il n'y a donc pas de chevauchement entre les données expérimentales et les réponses de la simulation. Cet écart correspond à un fort biais négatif causé par une erreur systématique constante.

À partir de ces conclusions, certaines améliorations peuvent être envisagées :

- ne pas considérer un ensemble de fibres parallèles, mais un maillage plus complexe et physiquement raisonnable ;
- réaliser la simulation en 3D ;
- considérer la distribution log-normale pour des tailles des fibres et des valeurs de porosité.

Les codes sont disponibles sur
`https://github.com/jajeab/Mec8211.git`.