Introdução à Análise Real

Daniel Frederico Lins Leite

2015/09/19

1 Topologia do Espaço Euclidiano

1.1 O Espaço Euclidiano

O espaço euclidiano n-dimensional é representado por $\mathbb{R}^n$ e é formado por todas as n-tuplas de números reais que são representadas por $x = (x_1, \ldots, x_{n})$. Quando se fala do espaço euclidiano estas n-tuplas também são chamadas de pontos e/ou vetores.

As seguintes operações entre tuplas são:

Igualdade: x é igual a y se e somente se ($\leftrightarrow$) para todo ($\forall$) i entre 1 e n, x_i é igual a y_i.

$$x = y \;\leftrightarrow\; x_i = y_i \forall i \in (1 \ldots n)$$

Soma:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Escala:

$$\alpha \in R, \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Deste modo:

$$0x = (0x_1, \ldots, 0x_n)$$

$$0x = x - x = (x_1 - x_1, \ldots, x_n - x_n)$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Deste modo qualquer tupla pode ser escrita na forma:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

$$e_i = (x_j) \ \ onde\ j \ \in [1, n] \ \text{ e } \begin{cases} 0, \ se\ j \ \neq i \\ 1, \ se\ j = 1 \end{cases}$$

1.1.1 Produto Interno

O espaço euclidiano possui uma operação chamada de produto interno:

$$< x, y >= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Propriedades do Produto Interno

$$< x, y >=< y, x >$$

$$< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$$

$$< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$$

$$< x, x > > 0 \ se\ x \ \neq 0$$

Provas:

Comutatividade

$$\begin{aligned} &< x, y > \\ &\qquad = \ x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ &\qquad = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n \\ &\qquad =< y, x > \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Distributatividade Vetorial

$$\begin{aligned} &< x, y + z > \\ &\qquad = x_1 \left(y_1 {+} z_1\right) + \ldots + x_n \left(y_n {+} z_n\right) \\ &\qquad = x_1 y_1 {+} x_1 z_1 + \ldots + x_n y_n {+} x_n z_n \\ &\qquad = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n \\ &\qquad =< x, y > + < x, z > \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Distrivutatividade Escalar

$$\begin{aligned} &< \alpha x, y > \\ &\qquad = \alpha x_1 y_1 + \ldots + \alpha x_n y_n \\ &\qquad = \alpha \left(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\right) \\ &\qquad = \alpha < x, y > \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ortogonalidade

$$< x, y > = 0$$

Se x e/ou y forem zero, o caso é trivialmente provado. Porém, caso

$$y = z - \frac{< x, z >}{< x, x >} x$$

$$< x, y > = < x, z - \frac{< x, z >}{< x, x >} x >$$

$$=< x, z > - < x, \frac{< x, z >}{< x, x >} x >$$

$$=< x, z > - \frac{< x, z >}{< x, x >} < x, x >$$

$$=< x, z > - \frac{< x, z >}{< x, x >} < x, x >$$

$$=< x, z > - < x.z >$$

$$= 0$$

Isso significa que toda tupla do espaço euclidiano possui pelo menos uma outra tupla que é ortogonal a esta.

Desse modo, z pode ser escrito por:

$$z = y + \frac{< x, z >}{< x, x >} x$$

Isto significa que (y, $\frac{<x,z>}{<x,x>} x$) podem descrever qualquer vetor do espaço o que os fazem serem a base do espaço. Mais sobre bases à seguir.

1.1.2 Norma

Sendo $< x, x >$:

$$< x, x >$$

$$= x_1 x_1 + \ldots + x_n x_n$$

$$= x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

E sendo a fórmula

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Podemos chamar de "Norma de X":

$$|x| = \sqrt{< x, x >}$$

$$< x, x > = |x|^2$$

Mais genericamente, toda função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser chamada como norma.

Caso a tupla/vetor possua norma 1, se diz que a tupla/vetor está normalizado, que é um(a) tupla/vetor unitário. Pode-se normalizar qualquer tupla/vetor diferente de zero do seguinte modo:

$$u = \frac{x}{|x|}$$

Propriedades da Norma Por esta definição a norma possui as seguintes propriedades

$$|x| > 0, \ se \ x \neq 0$$

$$|\alpha x| = |\alpha| \, |x|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x|| = |x|$$

Exemplo:

$$a = b - c + d$$

$$|a| = |b - c + d|$$

$$|a| \leq |b - c| + |d|$$

Teorema de Pitágoras Se analisarmos o Teorema de Pitágoras, na sua forma do espaço euclidiano:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2, x \perp y$$

$$\begin{aligned} < x, x > &= |x|^2 \\ < x+y, x+y > &= |x+y|^2 \\ &= < x, x > +2 < x, y > + < y, y > \end{aligned}$$

$$< x, y > = 0 \qquad \text{by x orthogonal to y}$$

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= < x+y, x+y > \\ &= < x, x > +2 < x, y > + < y, y > \\ &= < x, x > +2 * 0 + < y, y > \\ &= < x, x > + < y, y > \\ &= |x|^2 + |y|^2 \end{aligned}$$

■

Desigualdade de Schwarz

$$| < x, y > | \leq |x| \, |y|$$

Pela propriedade da base do espa?ºo euclidiano ?® poss?¡vel escrever

$$y = \alpha x + z$$

sendo $x \perp z$ e $\alpha = \frac{<x,y>}{|x|^2}$
Utilizando o Teorema de Pit?ígoras

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

$$|y|^2 = |x+y|^2 - |x|^2$$

Substituindo

$$|y|^2 = |x + \alpha x + z|^2 - |x|^2$$

$$= |x|^2 + |\mathrm{ax}|^2 + |z|^2 - |x|^2$$

$$= \alpha^2 |x|^2 + |z|^2$$

Logo

$$|y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2$$

Substituindo α

$$|y|^2 \geq \left(\frac{< x, y >}{|x|^2}\right)^2 |x|^2$$

$$\geq \frac{(< x, y >)^2}{|x|^4} |x|^2$$

$$\geq \frac{(< x, y >)^2}{|x|^4 |x|^2} |x|^2$$

logo

$$|y|^2 \geq \frac{(< x, y >)^2}{|x|^2}$$

$$|y|^2 \, |x|^2 \geq (< x, y >)^2$$

$$|y| \, |x| \geq | < x, y > |$$

Invertendo temos que

$$|< x, y > | \leq |x| | \, y|$$

Norma Dada a propriedade da norma

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Elevando ambos lados ao quadrado temos:

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Por?Ⓡm:

$$|x + y|^2$$

$$=< x + y, x + y >$$

$$|x|^2 + 2 < x, y > + |y|^2$$

Aplicando a Desigualdade de Schwarz:

$$\leq |x|^2 + 2 \, |x| \, |y| + |y|^2$$

$$(|x| + |y|)^2$$

Norma Euclidiana Caso a fun?º?úo |x| for declarada como

$$|x| = \sqrt[2]{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Norma do M?íximo

$$|x| = |x|_M = max\{|x_{\prime}|, \dots, |x_n|\}$$

Norma da Soma

$$|x| = |x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$$

Compara?º?úo entre as Normas Euclidianas, M?íximo e Soma Dada estas defini?º?Áes, podemos provar que:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n\,|x|_M$$

A prova pode ser repartida em:

$$|x|_M \leq |x|$$

$$|x|_M = \max\{|x_{\prime}|, \dots, |x_n|\} = \sqrt[2]{|x|_M^2}$$

$$|x| = \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + |x|_M^2 + \dots + x_n^2}$$

Deste modo, necessariamente

$$\sqrt[2]{|x|_M^2} \leq \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + |x|_M^2 + \dots + x_n^2}$$

A segunda parte ?®:

$$|x| \leq |x|_S$$

$$\sqrt[2]{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

Elevando os dois lados ao quadrado

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$$

Pelo Regra do Quadrado da Soma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\,|x_j|$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\,|x_j|$$

Como:

$$2\sum_{i<j} |x_i| |x_j| \geq 0$$

Ent?úo temos que de fato

$$|x| \leq |x|_S$$

A terceira parte ?® provar que:

$$|x|_S \leq n |x|_M$$

$$|x_1| + \ldots + |x_n| \leq n(\max \{|x_{'}|, \ldots, |x_n|\})$$

Onde

$$|x_1| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$n(\max \{|x_{'}|, \ldots, |x_n|\} = \sum_{i=1}^{n} |x_{\max}|$$

Ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{\max}|$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{\max}| - \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_{\max}| - |x_i|) \geq 0$$

Como $|x_{\max}| \geq |x_i|$ ent?úo temos que a inequa?º?úo ?® sempre verdade.
Com isso temos que:

$$\begin{cases} |x|_M \leq |x| \\ |x| \leq |x|_S \\ |x|_S \leq n |x|_M \end{cases}$$

O que nos leva a concluir que, de fato,

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n |x|_M$$

Propriedade da Norma Outra propriedade da norma ?®

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Para esta prova s?úo precisos dois passos. Primeiro:

$$x = (x - y) + y$$

Pelas propriedades b?ísicas da norma

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Tirando a norma dos dois lados, temos que:

$$||x| - |y|| < ||x - y||$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Norma Euclidiana como Dist?óncia Dentro de uma interpreta?º?úo geom?®trica mais cl?íssica, a Norma Euclidiana pode ser interpretada como a dist?óncia entre dois pontos.

1.1.3 Bolas e Conjuntos Limitados

Uma bola aberta pode ser definida como:

$$B\,(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$$

Uma bola fechada pode ser definida como:

$$B\,[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}$$

Uma esfera pode ser definida como:

$$S\,[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$$

De modo que

$$B\,[a;r] = B(a;r) \cup S[a;r]$$

Tamb?®m pode ser chamado de Disco. De particular interesse ?® o disco B[0;1] que ?® chamado de disco unit?írio.

Uma nota?º?úo espec?¡fica existe tamb?®m para a esfera unit?íria:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$