

1 Topologia do Espaço Euclidiano

1.1 O Espaço Euclidiano

O espaço euclidiano n -dimensional é representado por \mathbb{R}^n e é formado por todas as n -tuplas de números reais que são representadas por $x = (x_1, \dots, x_n)$. Quando se fala do espaço euclidiano estas n -tuplas também são chamadas de pontos e/ou vetores.

A seguir as operações entre tuplas são:

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Deste modo:

$$0x = (0x_1, \dots, 0x_n)$$

$$0x = x - x = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n)$$

$$x + y = y + x$$

$$x + 0 = x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Deste modo qualquer tupla pode ser escrita na forma:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Onde

$$e_i = (x_j) \text{ onde } j \in [1, n] \text{ e } \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i \\ 1, & \text{se } j = i \end{cases}$$

1.1.1 Produto Interno

O espaço euclidiano ainda possui uma operação chamada de produto interno:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Propriedades do Produto Interno

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ se } x \neq 0$$

Comutatividade

$$\langle x, y \rangle$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= y_1 x_1 + \dots + y_n x_n$$

$$= \langle y, x \rangle$$

Distributividade Vetorial

$$\langle x, y + z \rangle$$

$$= x_1 (y_1 + z_1) + \dots + x_n (y_n + z_n)$$

$$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \dots + x_n y_n + x_n z_n$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + x_1 z_1 + \dots + x_n z_n$$

$$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Distributividade Escalar

$$\begin{aligned} & \langle \alpha x, y \rangle \\ &= \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_n y_n \\ &= \alpha (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \alpha \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Ortogonalidade

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Se x e/ou y forem zero o caso trivialmente é provado. Por outro lado, caso

$$\begin{aligned} y &= z - \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} x \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, z - \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} x \rangle \\ &= \langle x, z \rangle - \langle x, \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} x \rangle \\ &= \langle x, z \rangle - \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, z \rangle - \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso significa que toda tupla do espaço euclidiano possui pelo menos uma outra tupla que é ortogonal a esta.

Desse modo, z pode ser escrito por:

$$z = y + \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} x$$

Isto significa que $(y, \frac{\langle x, z \rangle}{\langle x, x \rangle} x)$ podem descrever qualquer vetor do espaço ou que os fazem serem a base do espaço. Mais sobre bases a frente.

1.1.2 Norma

Sendo $\langle x, x \rangle$:

$$\langle x, x \rangle$$

$$= x_1x_1 + \dots + x_nx_n$$

$$= x_1^2 + \dots + x_n^2$$

E sendo a fórmula

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Podemos chamar de “Norma de X”:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle = |x|^2$$

Mais genericamente, toda função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser chamada como norma.

Caso a tupla/vetor possua norma 1, se diz que está normalizado, que é um vetor unitário. Pode-se normalizar qualquer tupla/vetor diferente de zero do seguinte modo:

$$u = \frac{x}{|x|}$$

Propriedades da Norma Por esta definição a norma possui as seguintes propriedades

$$|x| > 0, \text{ se } x \neq 0$$

$$|\alpha x| = |\alpha| |x|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x|| = |x|$$

Exemplo:

$$a = b - c + d$$

$$|a| = |b - c + d|$$

$$|a| \leq |b - c| + |d|$$

Teorema de Pitágoras Se analisarmos o Teorema de Pitágoras, na sua forma do espaço euclidiano:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

$$\text{Como } \langle x, x \rangle = |x|^2$$

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\text{Como } x \perp y, \langle x, y \rangle = 0, \text{ então}$$

$$= \langle x, x \rangle + 2 \cdot 0 + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\text{Como } \langle x, x \rangle = |x|^2$$

$$= |x|^2 + |y|^2$$

Desigualdade de Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$$

Pela propriedade da base do espaço euclidiano podemos escrever

$$y = \alpha x + z$$

sendo $x \perp z$ e $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$

Utilizando o Teorema de Pitágoras

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

$$|y|^2 = |x + y|^2 - |x|^2$$

Substituindo

$$|y|^2 = |x + \alpha x + z|^2 - |x|^2$$

$$= |x|^2 + |\alpha x|^2 + |z|^2 - |x|^2$$

$$= \alpha^2 |x|^2 + |z|^2$$

Logo

$$|y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2$$

Substituindo α

$$\begin{aligned}
|y|^2 &\geq \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} \right)^2 |x|^2 \\
&\geq \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{|x|^4} |x|^2 \\
&\geq \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{|x|^4 |x|^2} |x|^2
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
|y|^2 &\geq \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{|x|^2} \\
|y|^2 |x|^2 &\geq (\langle x, y \rangle)^2 \\
|y| |x| &\geq |\langle x, y \rangle|
\end{aligned}$$

Invertendo temos que

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$$

Norma Dada a propriedade da norma

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Elevando ambos lados ao quadrado temos:

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Porém:

$$|x + y|^2$$

$$= \langle x + y, x + y \rangle$$

$$|x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2$$

Aplicando a Desigualdade de Schwarz:

$$\leq |x|^2 + 2 |x| |y| + |y|^2$$

$$(|x| + |y|)^2$$

Norma Euclidiana Caso a função $|x|$ for declarada como

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Norma do Máximo

$$|x| = |x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Norma da Soma

$$|x| = |x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$$

Comparação entre as Normas Euclidianas, Máximo e Soma Dada estas definições, podemos provar que:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n |x|_M$$

A prova pode ser repartida em:

$$|x|_M \leq |x|$$

$$|x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \sqrt[n]{|x|_M^2}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Deste modo, necessariamente

$$\sqrt[n]{|x|_M^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

A segunda parte é:

$$|x| \leq |x|_S$$

$$\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

Elevando os dois lados ao quadrado

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^2$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2$$

Pelo Regra do Quadrado da Soma

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j|$$

Logo

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j|$$

Como:

$$2 \sum_{i < j} |x_i| |x_j| \geq 0$$

Então temos que de fato

$$|x| \leq |x|_S$$

A terceira parte é provar que:

$$|x|_S \leq n |x|_M$$

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq n(\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\})$$

Onde

$$|x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$n(\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}) = \sum_{i=1}^n |x_{\max}|$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| &\leq \sum_{i=1}^n |x_{\max}| \\ 0 &\leq \sum_{i=1}^n |x_{\max}| - \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \sum_{i=1}^n (|x_{\max}| - |x_i|) &\geq 0 \end{aligned}$$

Como $|x_{\max}| \geq |x_i|$ então temos que a inequação é sempre verdadeira. Com isso temos que:

$$\begin{cases} |x|_M \leq |x| \\ |x| \leq |x|_S \\ |x|_S \leq n |x|_M \end{cases}$$

O que nos leva a concluir que, de fato,

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n |x|_M$$

Propriedade da Norma Outra propriedade da norma $\|\cdot\|$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Para esta prova s?o precisos dois passos. Primeiro:

$$x = (x - y) + y$$

Pelas propriedades b?asicas da norma

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Tirando a norma dos dois lados, temos que:

$$||x| - |y|| < |x - y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Norma Euclidiana como Dist?ncia Dentro de uma interpreta?o geom?trica mais cl?ssica, a Norma Euclidiana pode ser interpretada como a dist?ncia entre dois pontos.

1.1.3 Bolas e Conjuntos Limitados

Uma bola aberta pode ser definida como:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$$

Uma bola fechada pode ser definida como:

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}$$

Uma esfera pode ser definida como:

$$S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$$

De modo que

$$B[a; r] = B(a; r) \cup S[a; r]$$

Tamb?m pode ser chamado de Disco. De particular interesse ? o disco $B[0; 1]$ que ? chamado de disco unit?rio.

Uma nota?o espec?fica existe tamb?m para a esfera unit?ria:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$$