Ustni izpit - Klasična fizika

Jaka Korošak

Physics student, FMF, University of Ljubljana
www.jakakorosak.com

Kazalo

Uvod

Odgovore na vprašanja pri ustnem izpitu iz klasične fizike, sem zbral iz večih virov (predvsem Fizika I in Fizika II (Strnad), Theoretical physics 1, 2, 3... (Nolting), Course of Theoretical Physics (Landau), skripta s predavanj prof. Seligerja, predavanja prof. Mikuža...). Namen zapiskov je priprava na ustni izpit. Diagrame sem po zgledih iz učbenikov zrisal sam. Glede morebitnih napak mi pišite.

1 Mehanika

1.1 1. Kinematika: lega, tir, povprečna in trenutna hitrost, pospešek, prosti pad, poševni met, enakomerno kroženje, neenakomerno kroženje, relativno gibanje: opazovalni sistemi, Galliejeve transformacije,

Klasična mehanika: analiza zakonov in pravil, v sklopu katerih se telesa premikajo skozi prostor in čas, pod vplivom sil.

Kinematika: veja mehanike, kjer se pri opisu gibanja telesa, ne sprašujemo po vzrokih gibanja. Kinematika združi matematična in fizikalna dognanja ter teoreme, potrebne za opis premikanja masne točke, brez eksplicitnega povpraševanja o vzroku.

Lega: lego točkastega telesa lahko opišemo s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t))$.

Tir: konica krajevnega vektorja opiše z naraščajočim časom prostorkso krivuljo, ki je tir točkastega telesa.

Premik: iz začetne lege $\mathbf{r}_0(t_0)$ v končno lego $\mathbf{r}(t)$ je razlika obeh krajevnih vektorjev $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Pot: pot ki jo opravi telo je $s = \int \lim_{t_0}^{t} |\mathbf{v}| dt = \int \lim_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Povprečna in trenutna hitrost: kvocient premika in razlike časov $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{t-t_0} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ je vektor povprečne hitrosti. Z dovolj majhno razliko $t - t_0 = dt$ definiramo vektor hitrosti. Trenutna hitrost je tako odvod krajevnega vektorja po času $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$.

Pospešek: vektor pospeška je drugi odvod krajevnega vektorja $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}^2}{d^2t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$.
Enačbi za hitrost in krajevni vektor sta $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{a} dt$ in $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{v} dt$.

Prosti pad: na Zemlji se prosto padajoča telesa gibljejo s konstantnim pospeškom $g = 9.81 m/s$, če ne upoštevamo zračnega upora. Hitrost pri prostem padu je $v = -gt$.

Poševni met: telo se giblje z začetno hitrostjo $\mathbf{v}_0$ pod določenim začetnim kotom (zračnega upora ne upoštevamo). Izhodišče koordinatnega sistema je v točki, kjer je kamen v začetnem trenutku t_0. Tako je $\mathbf{v_0} = (v_x, 0, v_z) = (v_0 \cos\beta, 0, v_0 \sin\beta)$. Enačba gibanja pa je

$$\mathbf{r} = (v_0 t \cos\beta, 0, v_0 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2)\ ,\ \mathbf{v} = (v_0 \cos\beta, 0, v_0 \sin\beta - \int\limits_{t_0}^{t} g dt)$$

Gibanje je ravninsko, sestavljeno iz navpičnega meta navzgor in enakomernega gibanja v smeri osi x.

Enakomerno kroženje: je gibanje telesa, čigar tirnica je krog. V ločni meri definiramo kot $\varphi = \frac{s}{r}$. Kotna hitrost je odvod kota po času $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Krožilna hitrost meri velikost vektorja hitrosti $|\mathbf{v}| = v = \omega r = r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Obhodni čas pa je $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$, obratna vrednost pa je frekvenca $\nu = \frac{1}{T}$. Kotna in krožilna hitrost sta pri enakomernem kroženju konstnatni, kljub temu pa je enakomerno kroženje pospešeno gibanje, saj se spreminja smer vektorja hitrosti. Pospešek kaže proti središču kroga in se imenuje radialni oziroma centripetalni pospešek

$$a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Enakomerno pospešeno kroženje: tukaj pa se spreminja tudi kotna hitrost zaradi kotnega pospeška $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ z enoto $[s^{-2}]$. Tangentna komponenta vektorja pospeška je

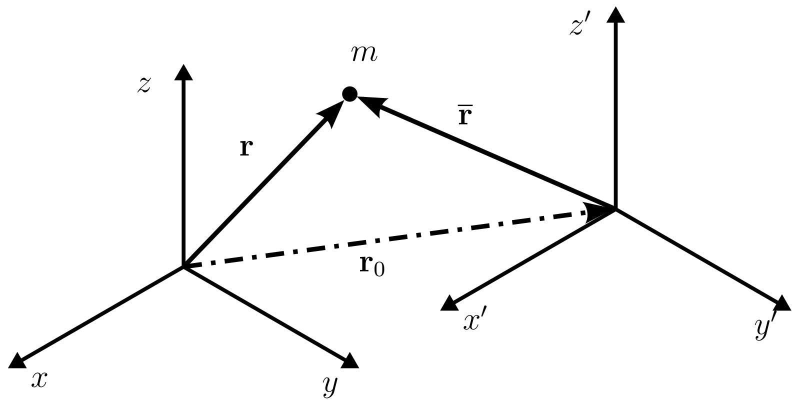
$$a_t(t) = \alpha r = \omega^2 r$$

Velikost vektorja pospeška pa je $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$, kot med polmerom in vektorjem pospeška je $\tan\gamma = \frac{a_t}{a_r}$.

Neenakomerno pospešeno kroženje: v splošnem kroženje določa zasuk kot funkcija časa $\varphi = \varphi(t)$. Enačbi gibanja sta tako $\varphi(t) = \varphi + \int\limits_{t_0}^{t} \omega$ in $\omega(t) = \omega_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha$. Radialna komponenta pospeška je $a_r = (\frac{d\varphi}{dt})^2 r$, tangentna pa $a_t = \frac{d^2\varphi}{dt^2} r$.

Relativno gibanje: gibanje telesa je lahko opisano samo relativno glede na koordinatni sistem.

Galileijeve transformacije: Galileijeva transformacija je transformacija iz enega inercialnega sistema v drugega. Torej med sistemi kjer veljajo Newtonovi zakoni oziroma sistemi, ki so nepospešeni.



Slika 1: Sistema S in S'.

Imamo sistema S in S'. Naj bo S sistem, v katerem je masna točka opisana z vektorjem $\mathbf{r}(t)$, časom t, hitrostjo $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ in pospeškom $\mathbf{a}$. V drugem sistemu S', je lega telesa določena z $\bar{\mathbf{r}}$, časom $\bar{t}$, hitrostjo $\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\bar{t}}$ in pospeškom $\bar{\mathbf{a}}$. Iz slike 1 je razvidno, da velja med vektorjema $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \bar{\mathbf{r}}(t)$, kjer je $\mathbf{r}_0$ krajevni vektor izhodišča sistema S' v sistemu S. Opazovalca v obeh sistemih trdita, da je razdalja med dvema točkama enaka in predpostavita absolutni čas $t = \bar{t}$. Takrat, ko je $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ in s tem $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t$, je izpolnjena zahteva incercialnosti. Tako dobimo Galileijevo transformacijo, ki poveže podatke iz enega inercialnega sistema z drugim inercialnim sistemom

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \bar{\mathbf{r}}\ ,\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \bar{\mathbf{v}}\ ,\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \bar{\mathbf{a}}$$

1.2 2. Dinamika: telo in okolica, 1. Newtonov zakon, sila, masa, 2. Newtonov zakon, inercialni opazovalni sistemi, sile pri kroženju, primeri sil: teža, podlaga, lepenje in trenje, vrvica, škripec, vzmet, sistemske sile

Dinamika: gibanje teles in spreminjanje njihove oblike zaradi sil raziskuje dinamika.

1. Newtonov zakon: Telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če ne deluje nanj nobena sila.

Sila: sila je definirana posredno, preko njenega efekta. Če želimo telesu spremeniti hitrost, ali pa ga deformirati, potrebujemo silo. Je vektorska fizikalna količina z enoto $[N = \frac{kgm}{s^2}]$.

Masa: (postulat) vsako telo, tudi točkasto, ima skalarno lastnost, maso. Masa je sorazmernostni koeficient med silo in pospeškom, s enoto $[kg]$. Masa telesa je neodvisna od kraja, časa, hitrosti in drugih okoliščin (pri hitrostih, ki so veliko manjša od svetlobne). Velja zakon o ohranitvi mase: masa telesa se ne spremeni, če telesu ne dodamo ali ne odvzamemo nič snovi.

2. Newtonov zakon: Pospešek je sorazmeren s silo in ima smer sile.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Inercialni opazovalni sistemi: to so nepospešeni opazovalni sistemi. Med njimi velja Galileijeva transformacija. V vseh inercialnih sistemih ima osnovna enačba gibanja (2. Newtonov zakon) enako obliko in so vsi takšni opazovlani sistemi pri opisovanju pojavov iz mehanike enakopravni. Tako je $\mathbf{F}$ rezultanta vseh sil na telo z maso m in $\mathbf{a}$ pospešek telesa. Za pospešene opazovalne sisteme, oziroma neinercialne to ne velja. Tako imamo sistemsko silo.

Sile pri kroženju: pri enakomernem kroženju imamo centripetalno silo

$$\mathbf{F}_c = m\mathbf{a}_c = mr\omega^2$$

V neinercialnem sistemu zapišemo Newtonov zakon tako, da pravim silam dodamo še sistemsko silo $\sum \mathbf{F}' + \mathbf{F}_s = m\mathbf{a}$. Telo v vrtečem sistemu občuti centrifugalno sistemsko silo, ki je nasprotna smeri centripetalnega pospeška. Drugi primer sistemske sile je Coriolisova sila $F_{Cor} = -2\omega v_r$.

Primeri sil:

- teža: Zemlja deluje na druga telesa s silo ($g = 9.81\frac{m}{s^2}$).
- podlaga: nasprotuje sili teže.
- lepenje in trenje: Maksimalna sila lepenja je sorazmerna s silo, s katero pritiska telo na podlago. Ko potisna sila preseže maskimalno silo trenja, se telo začne premikati, nakar deluje v nasprotni smeri gibanja sila trenja.
- vrvica: lahka vrvica prenaša silo (ohranja velikost in smer).
- škripec: lahek škripec brez trenja prenaša silo (ohranja velikost, spremeni smer)
- vzmet: raztezek vzemti je sorazmeren sili $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$, kjer je k koeficient vzmeti. Negativni predznak, ker želi sila povrniti stanje nazaj v ravnovesno.

Sistemske sile: so prisotne pri neinercialnih opazovalnih sistemih.

1.3 3. 3. Newtonov zakon, delo, kinetična energija, izrek o kinetični energiji, konzervativne sile, potencialna energija, izrek o kinetični in potencialni energiji, moč, ohranitev energije

3. Newtonov zakon: če deluje prvo telo na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo. To je zakon o akciji in reakciji oziroma zakon o vzajemnem učinku. Formuliran je z

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$$

Delo: je integral sile po poti

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

z enoto $[J = \frac{kgm^2}{s^2}]$. Da premaknemo masno točko za $d\mathbf{s}$ v polju sil, moramo opraviti dA dela.

Kinetična energija: Po integriranju rezultante sil na telo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dobimo

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_{(1)}^{(2)} m\mathbf{a} d\mathbf{s} = \int_{(1)}^{(2)} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{s} = \int_{(1)}^{(2)} m\mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta W_k$$

Izrek o kinetični energiji: skupno delo vseh zunanjih sil je enako spremembi kinetične energije.

Konservativne sile: sila je konservativna, če integral $\int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ ni odvisen od poti ali če je integral po sklenjeni $\oint \mathbf{F} d\mathbf{s}$ enak nič. To je naprimer sila teže. Nekonservativna sila pa je naprimer sila trenja.

Potencialna energija: Vsoto vseh zunanjih sil razdelimo na težo in na vsoto preostalih zunanjih sil $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \sum \mathbf{F}_1$. Enako pri delu, razdelimo skupno delo vseh zunanjih sil na delo teže $\int m\mathbf{g} d\mathbf{s}$ in na skupno delo preostalih zunanjih sil $A_1 = \int \mathbf{F}_1 d\mathbf{s}$, tako dobimo $\Delta W_k = A = \int m\mathbf{g} d\mathbf{s} + A_1$. Pri delu teže predpostavimo, da sila teža prijemlje v težišču, kjer je navor teže glede na težiščno os vedno enak nič $\int M^* d\varphi = 0$. Tako lahko zapišemo $A_1 = \Delta W_k - \int m\mathbf{g} d\mathbf{s}$. Definiramo razliko potencialnih energij točkastega telesa kot negativno delo konservativne sile

$$\Delta W_p = \int_{(1)}^{(2)} -\mathbf{F} d\mathbf{s}$$

Obratno pa lahko izračunamo silo kot $\mathbf{F} = -\nabla W_p$.

Izrek o kinetični in potencialni energiji:

$$A = W_k - W_{k0} + W_p - W_{p0}$$

kjer je A delo vseh zunanjih sil razen teže.

Ohranitev energije: izrek o ohranitvi kinetične energije $W_k = W_{k0}$ velja, če je skupno delo vseh zunanjih sil enako nič. Polna energija, ki jo sestavljata kinetična in potencialna se ohranja takrat, ko je rezultanta vseh zunanjih sil razen sile teže enaka nič $W_k + W_p = W_{k0} + W_{p0}$.

1.4 4. Gravitacija: Newtonov gravitacijski zakon, spreminjanje g z višino, gravitacijska potencialna energija, Keplerjevi zakoni, zgledi: kozmične hitrosti

Gravitacija: naravni pojav, kjer se vsa telesa z maso ali z energijo privlačijo med sabo. V drugem Newtonovem zakonu je bila opisana vztrajnostna masa, kot lastnost telesa, da se upira pospeševanju. V gravitacijskem zakonu, pa imamo gravitacijsko maso, s katero opišemo kako na telo deluje gravitacija drugega telesa. Razločimo aktivno od pasivne gravitacijske mase. Pri prvi mislimo, da telo z maso ustvari gravitacijsko polje, pri drugi, pa da se telo odzove. Zaradi zakona o vzajemnem učinku sta enaki. Da lahko enačimo vztrajnostno in gravitacijsko maso, sklepamo po merjenjih.

Newtonov gravitacijski zakon: planet kroži enakomerno, če nanj deluje centripetalna sila. Zunanja sila, ki deluje na planet, je privlačna sila ali gravitacijska sila Sonca. Tako mora veljati $F = m\omega^2 r = m\frac{konst.}{r^3}r = konst.\frac{m}{r^2}$. Po tretjem Keplerjevem zakonu je $\omega^2 = \frac{konst.}{r^3}$. Tako lahko zapišemo Newtonov gravitacijski zakon

$$F = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}$$

oziroma

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor od prvega telesa do drugega in gravitacijska konstanta enaka $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $[\frac{Nm^2}{kg^2}]$.

Spreminjanje g z višino: velikost težnostnega pospeška nad površjem Zemlje $g(h) = g_0(\frac{R_0}{R})^2$, kjer je $g_0 = \frac{\mathcal{G}m_z}{r_0^2}$. Znotraj Zemlje pa velja $g = -\frac{\mathcal{G}M(r)}{r^2}$ ob predpostavki, da je Zemlja homogena krogla $M(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$. V notranjosti krogelno simetrične lupine ni gravitacije, zato preostali del Zemlje na razdalji $r > r_0$, na telo ne deluje.

Gravitacijska potencialna energija: delo gravitacijske sile je

$$A = \Delta W_p = -\int \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int \frac{\mathcal{G}mM}{r^2}dr = -\mathcal{G}mM(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

V neskončnosti je sila enaka nič, tako lahko definiramo gravitacijsko potencialno energijo, kot delo potrebno, da premaknemo telo iz neskončnosti do radija r

$$W_p(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}d\mathbf{r} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r}$$

Sprememba potencialne energije je vedno pozitivne, če se poveča razdalja telesa od središča Zemlje.

Keplerjevi zakoni:

- Planet se giblje po elipsi, Sonce je v gorišču elipse.
- Zveznica Sonca in planeta v enakih časih opiše enake ploščine. Površinska hitrost je konstanta

- Kvocient kuba velike polosi elipse in kvadrata obhodnega časa je za vse planete enak.

Izrek o kinetični in potencialni energiji uporabimo za opis gibanja teles okoli Sonca. Sonce z maso M je izhodišče opazovalnega sistema, opazovano telo ima maso m. Velja $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{r} = W$. Vpeljemo polno energijo preračunano na enoto mase $w = \frac{W}{m}$, da dobimo

$$v^2 - \frac{2\mathcal{G}M}{r} = \dot{r}^2 + (r\varphi)^2 - \frac{2\mathcal{G}M}{r} = 2w$$

Kvadrat hitrosti je sestavljen iz kvadrata komponent v smeri naraščajočega polmera $\dot{r}$ in komponente v smeri naraščajočega kota $r\dot{\varphi}$. Na telo deluje samo Sonce, čigar sila je centralna. Poleg polne energije se ohrani tudi vrtilna količina $\mathbf{\Gamma} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ po smeri (zato se giblje po ravnini) in velikosti. $\mathbf{\Gamma} = mr^2\dot{\varphi}$ preračunanmo na enoto mase $\gamma = \frac{\Gamma}{m}$, izrazimo $\dot{\varphi} = \frac{\gamma}{r^2}$. Enačbo $\dot{r}^2 + \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{2\mathcal{G}M}{r} = 2w$ dopolnimo do popolnega kvadrata $\gamma^2(\frac{1}{r^2} - \frac{2\mathcal{G}M}{\gamma^2 r}) = \gamma^2(\frac{1}{r^2} - \frac{\mathcal{G}M}{\gamma^2})^2 - \frac{\mathcal{G}^2M^2}{\gamma^2}$. Vsota dveh spremenljivih kvadratnih členov je konstantna

$$\dot{r}^2 + \gamma^2(\frac{1}{r} - \frac{\mathcal{G}M}{\gamma^2})^2 = 2w + \frac{\mathcal{G}^2M^2}{\gamma^2}$$

kar se ujema z zvezo $A^2\sin^2(\alpha) + A^2\cos^2(\alpha) = A^2$ in nastavimo $A\sin(\alpha) = \dot{r}$, $A\cos(\alpha) = \gamma(\frac{1}{r} - \frac{\mathcal{G}M}{\gamma^2})$ ter $A = (2w + \frac{\mathcal{G}^2M^2}{\gamma^2})^{\frac{1}{2}}$. Dobimo polarno enačbo stožnice

$$\frac{1}{r} = \mathcal{G}\frac{M}{\gamma^2} + \frac{A}{\gamma}\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\mathcal{G}M}{\gamma^2}(1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0))$$

kjer je ε ekscentričnost. Če je telo vezano na Sonce, je ekscentričnost manjša kot ena in je tirnica elipsa. Če ni je večja kot ena in je tirnica hiperbola. Na meji med obema je polna energija enaka nič, ekscentričnost ena in tirnica je parabola. Za prvi primer sledijo Kepplerjevi zakoni. Drugi zakon izhaja iz $\gamma = r^2\dot{\varphi} = \frac{2dS}{dt}$, kjer je $S = \int \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ ploščina, ki jo zveznica pokrije v času t in $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\gamma$ hitrost s katero jo pokrije. Enačbo inegriramo, na levi dobimo ploščino elipse πab, na desni pa $\frac{1}{2}\gamma T$, z obhodnim časom T, kar da tretji zakon $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$. Kepplerjevi zakoni sledijo iz energijskih, ki pa iz Newtonovih. Newton je to ugotovil po geometrijski poti.
Prvi in drugi zakon sledita direktno iz zakonov ohranitve energije in vrtilne količine. Tretji zakon pa izpeljemo iz površine elipse in ohranitve površine (če se ohranja vrtilna količina, radij vektor opiše enake površine v enakih časih).

Kozmične hitrosti:

- Prva kozmična hitrost: da postane satelit nebesnega telesa morata biti centripetaln in gravitacijska sila v ravnovesju. $\frac{mv_1^2}{r} = \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \to v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} = 7.9\frac{km}{s}$ Takrat je energija manjša kot 0.

- Druga kozmična hitrost (ubežna hitrost): da satelit zapusti orbito potrebuje vsaj $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} = 0 \to v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{2gR} = 11.2\frac{km}{s}$. Energija mora biti vsaj 0.

  Tretja kozmična hitrost: ubežati gravitacijskemu polju Sonca (velja enaka enačba kot pri 2.).

./efektivni_potencial.png

Slika 2: Efektivni potencial pri dveh različnih vztrajnostnih momentih L'.

1.5 5. Sistemi delcev, težišče, Newtonov zakon za gibanje težišča, izrek o kinetični energiji težišča, togo telo, izrek o kinetični energiji za togo telo

Sistemi delcev: večina realnih fizikalnih sistemov je sestavljenih iz večih delcev, kjer bi bilo pisati enačbe gibanja za vsak delec posebej, potratno ali pa skoraj da nemogoče. Delce združimo v sistem delcev in želimo priti do trditev o sistemu kot celoti. Imejmo N-točkastih mas. Tako lahko zapišemo maso i-tega delca m_i. Njegovo pozicijo s $\mathbf{r}_i$. $\mathbf{F}_i$ je rezultanta sil na i-ti delec, kar pa ločimo na rezultanto zunanjih sil $\mathbf{F}_i^{zun}$ in rezultanto notranjih sil, oziroma po j seštetih silah $\mathbf{F}_{ij}$, j-tega delca na i-ti delec. Zunanje sile imajo izvor izven sistema, npr. gravitacijska sila. Sistemje zaprt, če ni znunanjih sil. V mehaniki se v sklopu notranje sile upošteva samo silo med dvema delcema. Zaradi tretjega Newtonovega zakona je $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ in $\mathbf{F}_{ii} = 0$.

Težišče: je unikatna točka, določena kot uteženo povprečje vseh masnih točk, oziroma točka v kateri je navor sile teže enak nič.

Newtonov zakon za gibanje težišča: če seštejemo enačbe gibanja za vseh N delcev, $m_i\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{zun} + \sum\limits_{i,j} \mathbf{F}_{ij}$, se seštevek notranjih sil izniči $\sum\limits_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = 0$. Tako ostane $\sum\limits_i m_i\ddot{\mathbf{r}} = \sum\limits_i \mathbf{F}_i^{zun}$. Tako lahko definiramo celotno maso $M = \sum\limits_i m_i$ in težišče $\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum\limits_i m_i\mathbf{r}_i$. Newtonov zakon za gibanje težišče: težišče sistema se giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa sistema in na katerega bi delovala vsota vseh zunanjih sil $m\ddot{\mathbf{R}} = \sum\limits_i \mathbf{F}_i^{zun}$

Izrek o kinetični energiji sistema: izrek se glasi $A + A_n = W_k - W_{k0}$. Na desni je sprememba skupne energije sistema. Skupna kinetična energija sistema je $W_k = \frac{1}{2}\sum\limits_j m_j v_j^2$. Na levi strani enačbe pa sta dva člena. Prvi je skupno delo vseh zunanjih sil $A = \sum\limits_i\sum\limits_j \int \mathbf{F}_{ij}\cdot d\mathbf{s}_j$, kjer indeks i obide vsa telesa v okolici in j obide vsa telesa v sistemu. Poleg prvega je še drugi člen A_n, delo vseh notranjih sil $A_n = \sum\limits_j\sum\limits_{j'} \int \mathbf{F}_{jj'}\cdot d\mathbf{s}_{j'}$, kjer indeks j ne sme biti enak indeksu j'.

Togo telo: pri togem telesu je delo notranjih sil vedno enako nič.

Izrek o kinetični energiji za togo telo: togo telo razdelimo na majhne dele in jih obravnavamo kot točkasta telesa. Kinetična energija je tako $W_k = \frac{1}{2}\int v^2 dm$. Integriramo po celem telesu. Hitrost točke togega telesa $\mathbf{v}$ v inercialnem sistemu izrazimo s hitrostjo težišča $\mathbf{v}^*$ in s hitrostjo $\mathbf{v}'$ te točke glede na težišče $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'$. $\mathbf{v}'$ je hitrost točke v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v težišču in koordinatne osi vzporedne s koordinatnimi osmi inecrialnega sistema. Tako preide integral v

$$W_k = \frac{1}{2}\int(\mathbf{v}^* + \mathbf{v}')^2 dm = \frac{1}{2}v^{*2}\int dm + \mathbf{v}^*\int \mathbf{v}' dm + \frac{1}{2}\int v'^2$$

Mešani člen ne prispeva nič, saj je hitrost težišča v težiščnem sistemu enaka nič $(\mathbf{v}')^* = \int \mathbf{v}'\frac{dm}{m} = 0$. Hitrost izbrane točke togega telesa glede na težišče je zmeraj pravokotna na zveznico do težišča $\mathbf{r}'$ in ima velikost $v' = \omega r_n'$. Kotna hitrost vrtenja okoli neke osi, ki je vsaj trenutno nepremična glede na togo telo, je za vse točke enaka. Tako je $\int v'^2 = \omega^2 \int v r_n'^2 dm = \omega^2 J^*$. Kjer je J^* vztrajnostni moment okoli tiste težiščne osi. Tako razdelimo kinetično energijo togega telesa na dva dela

$$W_k = \frac{1}{2}mv^{*2} + \frac{1}{2}J^*\omega^2$$

Prvi del je translacijska kinetična energija, ki bi jo imelo telo, če bi se translacijsko gibalo s hitrostjo težišča, drugi del je rotacijska (vrtilna) kinetična energija okoli ene od težiščnih osi. Skupno delo, ki ga opravijo zunanje sile na telo pokažemo s primerom kjer je $\mathbf{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil. Premik prijemališča rezultante izrazimo $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$ s premikom težišča $d\mathbf{s}^* = d\mathbf{r}^*$ in premikom prijemališča glede na težišče $d\mathbf{s}' = d\mathbf{r}'$. Dobimo $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^* + d\mathbf{s}'$. Delo je potem $A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}^* + \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}' = A^0 + A^*$. A^0 je delo rezultante, kot da bi prijela v težišču, A^* je delo vsote navorov glede na težišče $A^* = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}' = \int F_t \cdot ds' = \int F_t r' \cdot d\varphi = \int M * d\varphi$

1.6 6. Gibalna količina, ohranitev gibalne količine, sunek sile, izrek o gibalni količini, sila curka, trki, zgledi: popolnoma neprožni, prožni centralni trk, necentralni trk

Gibalna količina: produkt vztrajnostne mase in hitrosti. $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ pomnožimo z dt in dobimo$\mathbf{F}dt = md\mathbf{v} = d(m\mathbf{v}) = d\mathbf{G}$.

Ohranitev gibalne količine: če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič, je potem tudi skupni sunek zunanjih sil enak nič in velja $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$.

Sunek sile: integral vsote vseh zunanjih sil po času je skupni sunek vseh zunanjih sil.

Izrek o gibalni količini: je enačba

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t)dt = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0$$

Sila curka curek vode brizga v vodoravni smeri proti navpični oviri in spolzi v posodo na oviri. Opazujemo delček mase v curku dm. Na začetku pred oviro je hitrost dela vode v_0, na koncu pa je enaka nič. Če težo zanemarimo se giblje enakomerno in je pred oviro rezultanta sil enaka nič. Na oviri se delu vode zaradi sunka sile ovire F_0 spremeni gibalna količina $F_0 dt = vdm - v_0 dm = -v_0 dm$, po vzajemnem učinku je sila ovire na vodo nasprotno enaka sili vode na oviro $F = -F_0$. Vpeljemo masni tok kot kvocient delčka mase in časa v katerem priteče na oviro $\Phi_m = \frac{dm}{dt}$. Volumenski pretok je $\Phi_m = \rho\Phi_V$.

Trki:

- popolnoma neprožni trk: v eni rasežnosti opazujemo centralni trk, pri katerem se gibajoče telo z maso m_1 in hitrostjo v_0 zaleti v mirujoče telo z maso m_2. Telesi se sprimeta in po trku gibljeta s hitrostjo v. Med trkoma deluje samo notranja sila med telesoma, zato se gibalna količina ohranja. $m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v$. Kinetična energija pred trkom je $W_{k0} = \frac{1}{2}m_1 v_0^2$, po trku pa $W_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)(m_1 v_0)^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}W_{k0}$. Kinetična energija se zmanjša za faktor $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ zaradi dela notranjih sil med trkom.
- popolnoma prožen trk: podobno kot prej. Drugo telo se odbije v isti smeri kot se je sprva gibalo prvo telo. V kateri smeri se giblje prvo telo, pa je odvisno od mas in v_0. Ohranita se gibalna količina in kinetična energija. Dobimo enačbi $m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ in $\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$.
- necentralni trk: trk v dveh razsežnostih: ohranja se vektor gibalne količine $\mathbf{G}_1 = (v_x, v_y)$. Imamo štiri neznanke v_{x1}, v_{x2}, v_{y1}, v_{y2}. Iz zakona o ohrantivi gibalne količine dobimo dve enačbi, še dve v povezavi s smerjo ali kinetično energijo sta potrebni. Prestavimo

se v težiščni koordinatni sistem, v katerem je skupna gibalna količina enaka nič. V podobnem primeru gibajočega prvega telesa in mirujočega drugega, se sistem giblje s hitrostjo $v = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2}$.

1.7 7. Vrtenje togega telesa okoli nepremične osi: kinetična energija, vztrajnostni moment, Steinerjev izrek, navor, Newtonov zakon za vrtenje, vrtilna količina, izrek o vrtilni količini okoli inercialnega osišča, osišče v težišču, ohranitev vrtilne količine, delo in moč pri vrtenju, kotaljenje, precesija

Vrtenje togega telesa okoli nepremične osi: v takšnem primeru imamo samo eno prostostno stopnjo, kot.

Kinetična energija: predpostavimo, da so vse zunanje sile konservativne. Nastavimo koordinatni sistem tako, da z os leži na nepremični osi, okoli katere se telo vrti. Kinetična energija je $W_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$. Kotna hitrost je $\omega = (0, 0, \omega)$ oziroma $\omega = \dot{\varphi}$. Vsaka točka togega telesa kroži, kar pomeni $\dot{\mathbf{r}}_i = (\omega \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \omega(-y_i, x_i, 0)$. Tako dobimo kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega^2$$

Vztrajnostni moment: Vztrajnostni moment je $J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$. Vztrajnostni moment je skalarna količina, ki je odvisna od pozicije in smeri osi vrtenja.

Steinerjev izrek: s slike 3 je razvidno vztrajnostni moment J okoli poljubne osi je seštevek vztrajnostnega momenta okoli vzporedne osi, ki gre skozi težišče J^* in vztrajnostnega momenta celotne mase zbrane v težišču okoli željene osi $J = J^* + mr^{*2}$. Iizpeljava: os z koordinatnega sistema S postavimo v nepremično os, os z' sistema S' pa postavimo v vzporedno težiščno os. Oba sistema imata skupni ravnini xy in $x'y'$, kjer so posamezne osi vzporedne. Velja $x = x^* + x'$, kjer je x^* projekcija r^* (razdalja od izhodišča S do S') na x os.

$$\begin{aligned} J &= \int (x^2 + y^2)dm = \int (x'^2 + 2x'x^* + x^{*2} + y'^2 + 2y'y^* + y^{*2})dm \\ &= \int (x'^2 + y'^2)dm + 2x^* \int x'dm + 2y^* \int y'dm + m(x^{*2} + y^{*2}) \end{aligned}$$

Prvi integral je vztrajnostni moment J^* okoli nepremične osi z', zadnji člen pa je mr^{2*}, saj velja $x^{2*} + y^{2*} = r^{2*}$. Srednja integrala sta enaka nič $(x')^* = \int x' \frac{dm}{m}$, sta namrec koordinati težišča v sistemu S', ker gre os z' skozi težišče sta $(x')^* = 0$, $(y')^* = 0$.

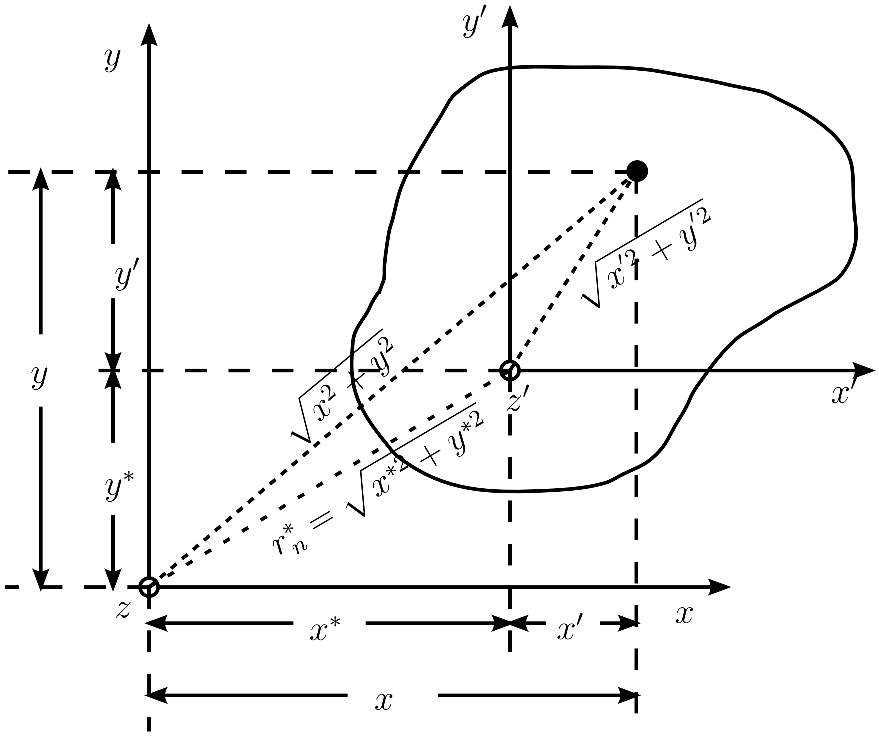
Navor je vektorski zmnožek ročice in sile

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Ročica je krajevni vektor od osišča do prijemališča sile.

Newtonov zakon za vrtenje: 2. Newtonov zakon prepišemo pomnožimo z ročico

$$m\mathbf{r} \times \mathbf{a} = m\mathbf{r} \times \alpha r \mathbf{e}_t = mr^2\alpha \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_t = mr^2\alpha_{vector} \rightarrow \mathbf{M} = J\alpha$$



Slika 3: Izpeljava Steinerjevega izreka.

Pri kroženju enotski vektor $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_t$ določa smer navora in je pravokoten na ravnino kroženja.

Vrtilna količina: je ekvivalent gibalne količine za vrtenje.

Izrek o vrtilni količini okoli inercialnega osišča: integriramo Newtonov zakon za vrtenje po času

$$\int_{t_0}^{t} M dt = \int_{t_0}^{t} J \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{\omega_0}^{\omega} J d\omega = J\omega - J\omega_0 = \Gamma - \Gamma_0$$

Na levi je skupni sunek vseh zunanjih navorov. Izrek pravi, da je skupni sunek vseh zunanjih navorov enak spremembi vrtilne količine, v diferencialni obliki $M = \frac{d\Gamma}{dt}$. Vrtilna količina točkastega telesa je $\mathbf{\Gamma} = J\omega$.

Osišče v težišči: Izrek velja za osišče, ki miruje v inercialnem sistemu. Za togo telo je pogosto težko izračunati vrtilno količino glede na nepremično osišče. Računanje se poenostavi z razdelitvijo vrtilne količine $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^0 + \mathbf{\Gamma}^*$. Prvi del je tirna vrtilna količina telesa glede na nepremično osišče, kjer je privzeto, da je vsa masa zbrana v težišču $\mathbf{\Gamma}^0 = m\mathbf{r}^* \times \mathbf{v}^*$, kjer je $\mathbf{r}^*$ vektor od osišča to težišča. Drugi del je lastna vrtilna količina $\mathbf{\Gamma}^* = \int \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm$, kjer je $\mathbf{r}'$ vektor od težišča do izbranega dela telesa. Opazovalni sistem postavljen v težišče v katerem računamo $\mathbf{\Gamma}^*$ sme biti neinercialen. Mora biti v težišču in njegove koordinatne osi morajo biti vzporedne ustreznim osem v inercialnem sistemu. Podobno se razdeli skupni zunanji navor na telo $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 + \mathbf{M}^*$. $\mathbf{M}^0$ je navor rezultante vseh zunanjih sil za katero si mislimo, da prijemlje v težišču. $\mathbf{M}^*$ je skupni zunanji navor glede na osišče v težišču. Naj bo $\mathbf{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil, potem sta $\mathbf{M}^0 = \mathbf{r}^* \times \mathbf{F}$ in $\mathbf{M}^* = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$, $\mathbf{r}'$ je vektor od težišča do prijemališča rezultante.

Ohranitev vrtilne količine: če je vsota vseh zunanjih navorov enaka nič je tudi sunek vsote vseh zunanjih navorov enak nič. Tako je $\Gamma_0 = \Gamma$.

Delo in moč pri vrtenju: delo je $dA = Fdl = rFd\varphi$ oziroma

$$A = \int Md\varphi = \int J\alpha d\varphi = J \int \frac{d\omega}{dt} d\varphi = J \int \omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

Moč je $P = \frac{dA}{dt} = J\omega\alpha = \mathbf{M} \cdot \omega$.

Kotaljenje: val s polmerom r in maso m se kotali po klancu. V smeri gibanja deluje projekcija sile teže $F_g \sin\varphi$, v nasprotni smeri pa deluje sila lepenja F_l. Izrek o gibanju težišča pove $F_g \sin\varphi + F_l = ma$, kjer je a pospešek težišča. Vrtilna količina valja glede na težišče je $\Gamma = J\omega$, navor pa $J\alpha$. Navor glede na težišče pa povzroča sila lepenja, torej velja $F_l r = J\alpha$. Hitrost točke stika valja s podlago pa je enaka razliki hitrosti težišča in obodne hitrosti pomnožene s polmerom. Ker se kotali brez spodrsavanja je razlika nič $v = \omega r$ oziroma $a = \alpha r$.

Precesija: vrtavka naj bo podprta v nepremičnem osišču zunaj težišča. Okoli geomtrijske osi se vrti z veliko kotno hitrostjo ω_ξ. V vodoravni smeri jo rahlo sunemo. Geomtrijska os začne krožiti v vodoravni ravnini. Navpična komponenta vsote vseh zunanjih sil na vrtavko je enaka nič. V težišči prijemlje sila teže, ki deluje navpično navzdol, in v nepremičnem osišču deluje enaka sila navpično navzgor. Na vrtavko je navor sile podpore $M^* = mgr^*$. Ta edini zunanji navor je pravokoten na geomtrijsko os in na vrtilno količino $\mathbf{\Gamma}^*$. Ta navor ne more spremeniti velikosti kotne hitrosti vrtenja okoli geomtrijske osi. Spremeni lahko smer vektorja $\mathbf{\Gamma}^*$. Po izreko o vrtilni količini je $M^*dt = d\Gamma^*$, kjer je sprememba $d\Gamma^*$ vzporedna z navorom. Velja tudi $d\Gamma^* = \Gamma^* d\varphi$. Enačbi združimo $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_p = \frac{M^*}{\Gamma^*}$ in dobimo kotno hitrost precesije ω_p. Kotna hitrost precesije je neodvisna od naklona vrtavke, če se ne spremeni kotna hitrost okoli geomtrijske osi. V splošnem $\mathbf{M}^* = \omega_p \times \mathbf{\Gamma}^*$.

1.8 8. Statika: ravnovesje, statično ravnovesje, vrste ravnovesja, pogoji za ravnovesje, neodvisnost navora od osišča, navor teže, nedoločeni sistemi, deformacije: nateg in stisk, strig, tlak, napetost in deformacija, moduli: prožnostni, strižni, stisljivost, območja deformacij: sorazmernostno, prožno, plastično, meja natezne trdnosti

Statika: obravnavanje sistemov v statičnem ravnovesju.

Ravnovesje: izrek o ravnovesju pove, da telo miruje ali se giblje premoenakomerno ali se vrti enakomerno okrog ene od treh geometrijskih osi, če sta vsoti vseh zunanjih sil in navorov enaki nič.

Statično ravnovesje: stanje sistema, ki v celoti miruje.

Vrste ravnovesja: ravnovesje je lahko stabilno, labilno ali pa indiferentno. V stabilnem ravnovesju se ob majhni spremembi vrne v prvotno stanje. V labilnem ravnovesju se ob majhni spremembi, sistem ne vrne v prvotno stanje. V indiferentnem ravnovesju pa se tudi ob veliki spremembi ostane v prvotnem stanju.

Pogoji za ravnovesje: dopolnimo, kar je sledilo iz Newtonovega zakona $\mathbf{a} = 0$ ali iz izreka o gibnaju težišč $\mathbf{a}^* = 0$, z zahtevo, da je kotni pospešek enak nič. Torej dobimo izrek o ravnovesju, ki pravi da če je vsota zunanjih sil enaka nič in vsota zunanjih navorov enaka nič potem togo telo miruje ali se giblje premo enakomerno.

Neodvisnost navora od osišča: to velja, ko je rezultanta sil enaka nič. Rezultanta navorov je $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Rezultanto navorov glede na novo osišče, ki je določeno s krajevnim vektorjem $\mathbf{r_0}$, izračunamo z novimi ročicami $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$. Dobimo $\mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_0 \times (\sum_i \mathbf{F}_i)$. Če je vsota sil enaka nič potem velja $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$.

Navor teže: ker je teža prostorko porazdeljena sila, potrebno upoštevati, da prijemlje v vsaki točki telesa. Na del telesa s maso dm in krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$, deluje sila teže $dm\mathbf{g}$. Navor teže je enak

$$d\mathbf{M} = \int \mathbf{r}dm \times \mathbf{g} = (\int \mathbf{r}dm) \times \mathbf{g} = m\mathbf{r}_t \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_t \times m\mathbf{g}$$

Torej je navor teže tak, kot da cela teža prijemlje v težišču.

Nedoločeni sistemi: sistemi, kateri niso dovolj dobro opisani. Naprimer neupoštevanje deformacije pri statiki.

Deformacije: telo se deformira zaradi zunanjih sil. Telo, ki se deformira, obravnavamo kot gosto množico točk, kot kontinuum.

Nateg in stisk: v eni smeri. Pri dovoljmajhni sili je raztezek ali skrček sorazmeren s silo $F = kx$, ki ga lahko zapišemo z enačbo $\frac{F}{S} = \frac{Es}{l}.\frac{F}{S}$ je natezna napetost, $\frac{s}{l}$ je relativni skrček. E je prožnostni modul z enoto $[\frac{N}{m^2}]$. Enačbi dodamo minus saj je s pri natezanju pozitiven podaljšek. Pri nategi sile vlečejo vzporedno z normalo preseka.

Strig: pri strigu sile vlečejo pravokotno na normalo preseka. Uporabi se strižni modul $G = -\frac{E}{2(1+\mu)}$. Kjer je μ Poissonovo število, razmerje med relativnim prečnim skrčkom in relativnim vzdolžnim podaljškom $\frac{\Delta y}{y} = -\mu\frac{\Delta x}{x}$. Primer strižne deformacije je torzijska deformacija palice, kjer zasukamo en konec cevi proti drugemu za φ. Preko zapisa z navorom $M = D\varphi$ izrazimo torzijski koeficient D

Tlak: razmerje med ploskovno porazdeljeno silo in površino $p = \frac{F}{S}$.

Napetost in deformacija: Premik izbranega dela telesa, gledamo glede na izhodišno lego. Deformacija telesa okoli kake točke je dana z odvodi treh komponent premika te točke $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. V mislih izrežemo majhen kvader, kjer delujejo okolni deli z rezultantami sil na njegove ploskve. Zanimamo se le za deformacijo mirujočih teles. Telo obremenimo in opazujemo deformacijo v ravnovesju. Če vzamemo dovolj majhen kvader, je velikost sil sorazmerna s površino, na katerih prijemljejo. Po deljenju sile s usrezno površino dobimo napetost. Takih napetosti je devet, amapak so tri enake. Tako potrebujemo za opis napetostnega stanja šest podatkov. Šest količin, ki določajo deformacijo, je odvisnih od šest napetosti. Obravnavamo izotropna telesa.

Moduli:

- Prožnostni: ali Youngov modul je razmerje med mehansko napetostjo in relativnim raztezkom. Pri raztezanju se telo skrči v prečni smeri.
- Strižni: $G = -\frac{E}{2(1+\mu)}$. Kjer je μ Poissonovo število.
- Stisljivost: pri vsestranskem stiskanju imamo odvisnost $\frac{\Delta V}{V} = -\chi\frac{F}{S}$, kjer je χ stisljivost in $K = \chi^{-1}$ stisljivostni modul.

Območje deformacij:

- Sorazmernostno: znotraj meje linearnosti velja Hookov zakon.
- Prožno: ne velja Hookov zakon, ampak je snov še vendo prožna.
- Plastično: trajne deformacije.
- Meja natezne trdnosti: meja pri kateri pride do trganja.

2 Tekočine in termodinamika

2.1 1. Tekočine: trdno telo<->tekočina, kapljevina<->plin, gostota, tlak, Pascalov zakon, hidrostatski tlak, vzgon, Arhimedov zakon, površinska napetost: mikroskopska slika medmolekulskih sil, površinska energija, sila, tlak v kapljici, mehurčku

Tekočine: Pod izrazom tekočine razumemo tekočine v vsakdanjem pomeni, imenovali jih bomo kapljevine in plini. Tekočino v mislih razdelimo na majhne dele, podobno kot trdno telo. Nima lastne oblike, zavzame obliko posode.

Gostota: je masa ulomljeno s prostornino $\rho = \frac{m}{V}$

Tlak: razmerje med ploskovno porazdeljeno silo in ploskvijo $p = \frac{F}{S}$ z enoto $[Pa] = [\frac{N}{m^2}]$, kjer je $1bar = 10^5 Pa$

Pascalov zakon: sprememba tlaka v kateri koli točki v zaprti nestisljivi tekočini, se prenese po celotni tekočini.

Hidrostatski tlak: v mirujoči tekočini na vsako ploskev potopljenega predmeta, deluje tekočina s silo. Ta sila je pravokotna na ploskev. V mirovanju v tekočini ni strižnih sil. Sile so sorazmerne s površino, to lahko pokažemo na primeru potpljene tristrane prizme.

Vzgon: seštejemo vse prispevke hidrostatičnega tlaka na telo

$$\mathbf{F}_v = \int \mathbf{p} dS$$

kjer je v vsaki točki pravokoten na telo. Ker je sila odvisna samo od oblike oziroma volumna telesa, lahko v mislih telo nadomestimo z enakim telesom, le da ima gostoto okoliške tekočine. Sila teže takšnega telesa deluje navpično navzdol $F = m_t g = \rho_{tekoina} V g$ in tako mora tekočina delovati s nasprotno enako silo navzgor. Tako dobimo silo vzgona.

Arhimedov zakon: vzgon je enako velik kot teža tekočine, ki jo izpodrine telo.

Površinska napetost: o površinski napetosti govorimo pri kapljevinah, ki napram tekočinam tvorijo kaplje in gladine. Preko poskusa s milnim mehurčkom, ki ga nanesemo na pravokoten okvir s prečko. Prečko premaknemo za dx in se s tem spremeni površina za $dS = bdx$, kjer je $b = 2b_0$ saj milni mehurček tvori dve površini. Zunanja sila F opravi delo $dA = Fdx$, kvocient $\frac{dA}{dS} = \frac{Fdx}{bdx}$ je površinska napetost. Tako velja $dA = \gamma dS$ oziroma $A = \gamma S - \gamma S_0$. Delo je odvisno samo od začetne in končne površine, tako lahko vpeljemo površinsko energijo $W_{pov} = \gamma S$. Sila je enaka $F = \gamma b$

Mikroskopska slika medmolekuslkih sil: površinska napetost je posledica privlačni van der Waalsovih sil med molekulami. V notranjosti je molekula obdana s vseh strani z drugimi molekulami in jo enakomerno vlečejo v vse smeri in je rezultanta sil enaka nič. V plasti na površini to ne velja. Z ene strani jih še vedno vlečejo druge molekule, z druge strani pa ne. To silo uravnovesi površinska napetost oziroma nestisljivost kapljevine.

Površinska energija: izpeljana preko poskusa z milnim mehurčkom

$$A = \Delta W_{pov} = \gamma S - \gamma S_0$$

Molekula, ki je dlje od notranjosti je manj vezana in ima večjo površinsko energijo.

Sila in tlak:

- kapljica: ima v ravnovesju, če odmislimo težo, obliko krogle s polmerom R. Odsek krogle s polmerom r miruje, zato mora biti v ravnovesju. Na odsek deluje sila zaradi razlike tlakov (v notranjosti je večji) $S(p - p_0) = \pi r^2 (p - p_0)$ in sile površinske napetosti $-F \cos\theta = -\gamma b \cos\theta = -2\pi\gamma r \cos\theta$. Iz tega sledi

$$p - p_0 = \frac{2\gamma \cos\theta}{r}$$

za kroglo velja $r = R\cos\theta$, tako je razlika tlakov obratno sorazmerna s polmerom krogle $p - p_0 = \frac{2\gamma}{R}$.

- mehurček: ker ima mehurček dve površji zanj velja $p - p_0 = \frac{4\gamma}{R}$.

2.2 2. Hidrodinamika: tok, tokovnice, prostorninski, masni tok, hitrostno polje, ohranitev masnega, prostorninskega toka, Bernoullijeva enačba, zastojni tlak, kvadratni zakon upora, viskoznost, linearni zakon upora, Stokesova enačba, Poiseullov zakon, Reynoldsovo število, upor cevi

Hidrodinamika: opis gibajočih tekočin.

Tok: pri tekočini se deli tekočine po prenehanju delovanja sile ne vrnejo na prvotno mesto, tekočina se premeša. Zato so vse lege enakopravne. Tok tekočine opišemo tako, da za vsak del tekočine povemo tri komponente hitrosti v izbranem inercialnem sistemu. V splošnem so odvisne od časa, kar velja za nestacionaren tok. Takrat ko hitrosti niso odvisne od časa, je tok stacionaren.

Tokovnice: dobimo tako, da v izbrani točki poiščemo hitrost $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$ in narišemo premik $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)dt$. V novi točki ponovno poiščemo hitrost in naredimo premik. Dobljeno lomljeno črto narišemo kot gladko krivuljo ob dovolj majhnem dt. Če združimo več sosednjih tokovnic dobimo tokovno nit. Tokovnice, ki od trenutka do trenutka spreminjajo svoj položaj opisujejo turbulentni tok. Nepremične tokovnice opisujejo laminarnega.

Prostorninski tok: je določen s prostornino tekočine, ki steče v časovni enoti skozi izbran presek $\Phi_V = \frac{dV}{dt}$. Prostorniski tok izračunamo, če poznamo hitrost za vsako tokovno nit v toku. Prostorniski tok po tokovni niti $d\Phi_V = v dS$, kjer je dS presek tokovne niti pravokoten na smer hitrosti. V tako majhnem perseku lahko privzamemo da je znotraj tega hitrost konstantna.

Poznamo tudi srednjo hitrost. To je hitrost, ki bi jo morala imeti tekočina pri enakem prostorniskem toku, če bi bil ahitrost po vsem preseku konstantna. Turbulenten tok je lahko v povprečju stacionaren.

Masni tok: je določen z maso tekočine $\Phi_m = \frac{dm}{dt}$. Tokova sta v zvezi preko gostote.

Hitrostno polje: je vektorsko polje hitrosti tekočine.

Ohranitev masnega, prostorninskega toka: v stacionarnem toku naj med dvema presekoma S_0 in S, ne bo pritokov ali odtokov in nobenih izvirov ali ponorov. K sistemu štejemo tekočino med obema presekoma. V času dt preteče skozi S_0 masa tekočine $\Phi_{m0}dt$ in skozi S odteče $\Phi_m dt$. Ker je tok stacionaren, mora biti masa sistema konstantna in mora veljati $\Phi_{m0}dt - \Phi_m dt = 0$. Iz tega sledi $\Phi_m = \Phi_{m0}$. To je kontinuitetna enačba. Ob konstantni gostoti tudi velja za prostorniski tok.

Bernoullijeva enačba: opazujemo stacionaren laminarni tok. K sistemu štejemo kapljevino v tokovni niti med presekoma dS_0 in dS. Po kratkem času se kapljevina premakne. Na levi strani se zmanjša masa sistema za dm_0 in prostornina za $dV_0 = \frac{dm_0}{\rho_0}$. Kinetična energija se zmanjša za $dW_{k0} = \frac{1}{2}v_0^2 dm_0$, če je v_0 hitrost dela tekočine z maso dm_0 in potencialna energija za $dW_{p0} = gz_0 dm_0$, kjer so v_0 hitrost dela kapljevine s hitrostjo dm_0 in z_0 višina težišča dela kapljevine. Zaradi premika na desni strani se poveča masa za dm, prostornina za $dV = \frac{dm}{\rho}$, kinetična energija $dW_k = \frac{1}{2}v^2 dm$ in potencialna za $dW_p = gzdm$. Ker je tok stacionaren velja $dm_0 = dm$ in ker gre za kapljevino $\rho_0 = \rho$. Iz tega sledi $dV_0 = dV$ in. $v_0 dS_0 = vdS$. Skupna sprememba kinetične in potencialne energije sistema je

$$\Delta W_k + \Delta W_p = (\frac{1}{2}v^2\frac{1}{2}v_0^2 + gz - gz_0)dm$$

K delu vseh zunanjih sil razen teže prispevata delo sile okolne kapljevine na presekih dS_0 in dS ter delo sile okolne kapljevine na plašču tokovne niti. Prvi prispevek je skupno delo tlaka $-p_0(-dV_0) - pdV = (p_0 - p)dV$. Sila okolne tekočine na plašč niti ima hidrostatično komponento in strižno komponento. Hidrostatična je pravokotna na premik kapljevine, zato ne opravi dela. Strižna komponenta pa ima nasprotno smer premika in opravi negativno delo $dA_0 = -|dA_0|$. Delo vseh zunanjih sil je torej $(p_0 - p)dV - |dA_0|$. Pri gibanju se tekočina neprožno deformira in imamo delo notranjih sil oziroma delo notranjega trenja, kot posledico strižnih sil med plastmi kapljevine in je negativno $dA_n = -|dA_n|$. Tako se energijski zakon glasi

$$(p_0 - p)dV + dA_0 + dA_n = (p_0 - p)dV - |dA_0| - |dA_n| = (\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 + gz - gz_0)dm$$

Delo zunanje strižne sile in delo notranjega trenja ne moremo enostavno izračunati. Tako dA_0 in dA_n spustimo in dobimo neenačbo

$$(p_0 - p)dV > (\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 + gz - gz_0)dm$$

V mislih zoožimo preseka v srednjo tokovno nit. Neenačba pove, da vsota tlaka, gostota kinetične energije in gostote potencialne energije po tokovnici pojema v smeri toka.
Ker si z neenačbo ne moremo pomagati, sklepamo dalje. Kapljevina z viskoznostjo nič sta $dA_0 = dA_n = 0$, ki sta posledici strižnih sil in lahko iz preurejene neenačbe

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 > p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

dobimo enačbo

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

Zastojni tlak: pred oviro tekočina zastaja. V zastojni točki na zastojni tokovnici je hitrost tekočine $v = 0$ torej $p - p_0 = \frac{1}{2}\rho v_0^2$.

Kvadratni zakon upora: sila tekočine na telo, ki ne miruje. Kvadratni zakon upora je ocena

$$F = \frac{1}{2}c_u \rho v^2 S$$

v je relativna hitrost tekočine.

Viskoznost: obnašanje tekočine pod obremenitvijo na strig. Med ploščicama nanesemo židko tekočino. Hitrost zgornje plošče glede na spodnjo je sorazmerna s silo F_s s katero vlečemo eno od ploščic. Hitrost plasti v kaplji, merjena glede na spodnjo ploščo, je sorazmerna z oddaljenostjo plasti od spodnje plošče, tako dobimo zakon o viskoznosti

$$\frac{F_s}{S_s} = \eta \frac{v}{z}$$

kjer imamo strižno napetost in strižno hitrost ter koeficient viskoznosti η z enoto $[\frac{Ns}{m^2}]$.

Linearni zakon upora: upor dobimo, ko seštejemo prispevke komponente strižne sile v smeri toka po vsej površini telesa. V laminarnem toku okoli tleesa je hitrost oddaljenih plasti enaka hitrosti v nemotenem toku, medtem ko plast ob telesu miruje glede na telo. V splošnem je zakon $F = koef.\ l\eta v$.

Stokesova enačba: je linearni zakon upora za kroglo $F = 6\pi R\eta v$.

Poiseullov zakon: razlika med uporom in trenjem je v tem, da še tako majhna sila povzroči, da upor spremeni gibanje. Upor pri pretakanju tekočin po valjsatih ceveh za laminaren tok opiše Poiseuillov zakon. Laminaren tok teče po cevi s polmerom R in dolžino l. Na valj tekočine s polmerom r deluje strižna sila, ki prijemlje v plašču in ima smer nasprotno od gibanja. Po zakonu o viskoznosti $F_s = -S_s\eta\frac{dv}{dr} = -2\pi r l\eta\frac{dv}{dr}$. Vstavili smo $-\frac{dv}{dr}$, ker pričakujemo, da pojema hitrost z naraščajočo razdaljo od osi. Vsota vseh zunanjih sil mora biti nič, saj se giblje težišče enakomerno. Tlak na levi ploskvi mora biti večji od tlaka na desni. Sila zaradi razlike tlakov je $-(p_0 - p)\pi r^2$ in je nasprotno enaka strižni sili. Zvezi enačimo in integriramo od $r = 0$ in $v(0) = v_0$ do r in $v = v(r)$. Tekočina tik ob cevi miruje glede na cev tako da je $v(R) = 0$. Iz vseh enačb, preko srednje hitrosti dobimo za prostorninski tok, Poiseuillov zakon

$$\Phi_V = v_s \pi R^2 = \frac{\pi R^4 (p_0 - p)}{8 l \eta}$$

Linerani zakon lahko zapišemo kot

$$\frac{(p_0 - p)}{l} = \frac{8\eta v_s}{R^2}$$

Negativni tlak opozarja, da teče tekočina z mesta kjer je večji tlak na mesto, kjer je manjši.

Reynoldsovo število: je $Re = \frac{2R\rho v}{\eta}$. V splošnem je $Re = \frac{l\rho v}{\eta}$.Izpeljemo ga tako, da se delamo da sta linearni in kvadratni zakon dva člena v potenčni vrsti za upor v odvisnosti od relativne hitrosti. Če je Reynoldsovo število manjše kot nekako 0.5 velja linearni zakon in če je večje kot 10^3 velja kvadratni zakon. Linearni zakon zapišemo

$$\frac{(p_0 - p)}{l} = \frac{8\eta v_s}{R^2}$$

Kvadratnega pa lahko prepišemo v

$$\frac{(p_0 - p)}{l} = \frac{c_u' \rho v^2}{R}$$

Upor cevi: upor cevi opiše Poiseuillov zakon.

2.3 3. Termodinamični sistemi in spremenljivke, ravnovesna stanja. 0. zakon termodinamike. Idealni plin. Temperatura.

Termodinamični sistemi in spremenljivke: termodinamični sistemi izmenjujejo s okolico delo in toploto. Opisujemo jih makroskopsko. Lastnosti sistema označujejo stanja sistema. Obravnavamo večinoma ravnovesna stanja. Takšna stanja so določena z majhnim številom podatkov, tako imenovanimi termodinamičnimi spremenljivkami. Masa to ni, je vnaprej dana in nespremenljiva. Spremenljivke so naprimer tlak, volumen in temperatura. Termodinamične spremenljivke so povezane z enačbo stanja. Notranja energija, entropija, entalpija... so enolične funkcije stanja. Sprememba količine je odvisna samo od začetnega in končnega stanja in ne od vmesnih stanj.

Ravnovesna stanja: sistem, ki je v ravnovesnem stanju se ne spremeni, če se ne spremenijo razmere v okolici.

0. zakon termodinamike: če sta v ravnovesju prvi in drugi sistem ko sta v toplotnem stiku, a sta adiabatno izolirana od okolice, in če sta v ravnovesju drugi in tretji sistem, izolirana na enak način, sta v ravnovesju tudi prvi in tretji sistem.

Idealni plin: je preprost termodinamični sistem. Sestavljajo ga molekule zanemarljivih dimenzij, med katerimi ni sil. Je dober približek za razredčene pline. Velja

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

splošna plinska konstanta je $R = 8314.5\ [\frac{J}{kmolK}]$.

Temperatura: Sistem je lahko v toplotnem stiku z bližnjo okolico ali pa je adiabatno izoliran. Temperaturi dveh sistemov bosta enaki, ko bosta sistema v ravnovesnem stanju. Z merjenjem ugotovimo da sta pri kosntantnem tlaku temperatura in volumen v sorazmerni količini. Premice odvisnosti različnih plinov se sekajo v ničli. Tako je definirana absolutna ničla in absolutna temperaturna lestvica. Kinetična definicija temperature poda temperaturo kot povprečno energijo ene molekule idealnega plina $\overline{W_k} = \frac{3}{2} k_b T$, $p = n k_b T = \frac{N}{V} k_b T \frac{m}{M} N_A$, $R = k_b N_A$.

2.4 4. Enačba stanja, fazne spremembe, fazni diagrami. Mešanice plinov. Temperaturno raztezanje.

Enačba stanja: stanje sistema z eno sestavino in eno fazo opišemo s tremi osnovnimi termodinamičnimi spremenljivkami: tlakom, prostornino in temperaturo. Najpreprostejši primer je plin. Pri konstantni temperaturi velja Boylov zakon $pV = p_0 V_0$. Pri konstantnem tlaku velja Gay-Lussacov zakon $\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$. Zakone združimo v $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$. $\frac{pV}{T}$ je sorazmeren z maso.

Pomaga množina snovi z enoto $[mol]$. En mol vsebuje toliko atomov ter en mol spojine toliko molekul, kolikor je atomov v 12.000 gramih ${}^{12}C$. Sorazmernosti koeficient med maso in $\frac{pV}{T}$ je R. Tako dobimo plinsko enačbo $pV = \frac{m}{M}RT$, ki opiše idealni plin. Stisljivost idealnega plina pri konstantnem tlaku je $\beta = \frac{1}{V}(\frac{dV}{dT})_{p=konst}$ in stisljivost pri konstantni temperaturi $\kappa = -\frac{1}{V}(\frac{dV}{dp})_{T=konst}$.

Fazne spremembe: ali fazni prehod je sprememba iz ene faze v drugo. Iz trdne v kapljevinsko je taljenje, obraten je strjevanje. Iz kapljevinske v plinsko je izparevanje, obraten je utekočinjanje. Prehod iz trdne v plinsko je sublimacija, obratno pa izločanje kristalov iz plina. Temperaturo prehoda imenujemo pri taljenju tališče, pri utekočinjanju in izparevanju vrelišče, pri sublimaciji pa sublimacijska temperatura. Med faznim prehodom ostane temperatura konstantna, čeprav dovajamo/odvajamo toploto.

.5 ./phasediag1.png .5 ./phasediag2.png

Slika 4: Primera faznih diagramov.

Fazni diagram: ponazori območja faz, v katerem projeciramo meje območij na ravnino p, T. Stanjem z eno fazo ustrezajo v faznem diagramu liki, stanjem z dvema fazama črte in stanju s tremi fazami točka. Pri počasni kvazistatični spremembi gre sistem skozi sama ravnovesna stanja, pri konstantni temperaturi. V diagramu $p(V)$ temu ustreza izoterma. Trojna črta pa povezuje stanja, v katerih so v ravnovesju vse tri faze. V tridimenzionalnem diagramu p, V, T ležijo vsa ravnovesna stanja na ploskvi stanj. Imamo območja s po eno fazo in območja s po dvema fazama, kjer je neodvisna samo ena od spremeljivk p, T. Na trojni črti ni neodvisna nobena od p, T. V splošnem velja Gibbsovo fazno pravilo

$$\text{število faz} + \text{število neodvisnih spremenljivk} = \text{število sestavin} + 2$$

Neodvisna spremenljivka je prostostna stopnja.

Mešanice plinov: pojavi se spremenljivka koncetracija. Za prostornino velja Daltonov zakon $V = V_1 + V_2$. Zamislimo si da vsak plin zapolni celotno prostornino takrat je njegov parcialni tlak $p_{1,2}$. Za vsako sestavino velja plinska enačba. Ko upoštevamo $p = p_1 + p_2$, $p_{1,2}V = \frac{m_{1,2}}{M_{1,2}}RT$ in $m = m_1 + m_2$, lahko zapišemo maso povprečnega mola mešanice $M = \frac{m_1+m_2}{\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}}$.

Temperaturno raztezanje: dolžina palice l je odvisna od temperature, raztezek dl je sorazmeren z začetno dolžino l in razliko temperatur dT, če je razlika dovolj majhna

$$dl = \alpha l dT$$

kjer je sorazmernostni koeficient α dolžinska razteznost z enoto $[K^{-1}]$. V linearnem približku je sprememba prostornine sorazmerna s spremembo temperature in z začetno prostornino V, $dV = \beta V dT$, kjer je $\beta = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$ z enoto $[K^{-1}]$ prostorninska razteznost. Pri trdnih telesih velja $\beta = 3\alpha$.

2.5 5. Delo, toplota, specifična in latentna toplota, 1. zakon termodinamike. Notranja energija in entalpija. Prenos toplote.

Delo: delo je energija, ki ga termodinamski sistem prejme ali odda v okolico $dA = Fdx = pSdx - pdV$ oziroma

$$A = -\int pdV$$

Toplota: je energija, ki jo termodinamski sistem prejme ali odda. Prenaša se med sistemoma v toplotnem stiku. Izmenjano toploto izmerimo s kalorimetrijo $Q = C\Delta T$. Pri segrevanju preko toplotnega stika je delo enako nič, se pa vseeno spremeni notranja energija $Q = \Delta W_n$, Q je dovedena toplota sistemu. Sistemu v toplotnem stiku dovajamo delo in tako velja $\Delta W_n = A+Q$.

Specifična in latentna toplota: specifična topltoa je energija potrebna da $1kg$ snovi segrejemo za $1K$. Sistem, v katerem je ves čas ena sama faza in v katerem ni faznih sprememb, dovajamo toploto na različne načine in po različnih poteh. V splošnem računamo

$$Q = \Delta W_n + \int pdV$$

Poznati moramo začetno in končno stanje za izračun spremembe notranje energije in vsa vmesna stanja za izračun integrala. Dva skrajna primera sta pri izohorni in izobarni spremembi. Pri izohorni je delo tlaka enako nič $(dQ)_V = dW_n$. Dovedena toplota je pri izohorni spremembi odvisna samo od začetnega in končnega stanja. Tako lahko izrazimo spremembo toplote kot enolično funkcijo temperature, kjer velja linearni približek, če je sprememba dT dovolj majhna. Telesu z maso m dovedemo toploto $(dQ)_V$, da se mu temperatura spremeni za dT. Sorazmernostni koeficient je specifična toplotna kapaciteta pri konstantni prostornini z enoto $[\frac{J}{kgK}]$,

$$(dQ)_V = mc_V dT,\ \ c_V = m^{-1}(\frac{dQ}{dT})_V = m^{-1}(\frac{dW_n}{dT})_V$$

Kjer je c_T specifična toplota pri konstantnem volumnu.
Pri konstantnem tlaku je

$$(dQ)_p = mc_p dT,\ \ c_p = m^{-1}(\frac{dQ}{dT})_p = m^{-1}(\frac{dH}{dT})_p$$

Pri večji temperaturni spremembi je sama specifična toplota odvisna od temperature. V sistemih z dvema fazama poteka fazni prehod pri konstantnem tlaku in konstantni temperaturi. Stanje je določeno z navedbo deleža ene od faz, navadno maso faze, katere delež med prehodom naraste. Dovedena toplota je sorazmerna z razliko končne in začetne mase $m_1 - m_{10} = m$, to je z maso snovi, ki preide iz druge faze v prvo $(dQ)_{p,T} = qm$. Specifična latentna ali utajena toplota q. Tako se imenuje saj pri se pri dovajanju toplote ne spremeni temperatura. Za vsak prehod obstaja specifična latentna toplota, ki je razlika specifičnih entalpij posameznih faz. Pri taljenju $q_t = h_{kaplj} - h_{trdno}$.

1. zakon termodinamike: je energijski zakon

$$\Delta W_k \Delta W_p \Delta W_n = A + Q$$

Oziroma minus pred A. Sprememba polne energije sistema je enaka dovedeni toploti in dovedenemu delu vseh zunanjih sil razen sile teže. Pri primerih v termodinamiki, se kinetični in potencialni energiji večinoma ne spremenita. Poleg tega je večinoma samo delo tlaka različno od nič. Delo je pozitivno (dovedeno delo), če zunanja sila opravi delo na sistemu, prostornina se zmanjša. Delo je negativno (oddano delo), če opravi sistem delo proti zunanji sili, prostornina se poveča. Delo je tako $A = -\int pdV$. Delo ni odvisno od vmesnih stanj in ni enolična funkcija stanja. Tudi ni termodinamična spremenljivka. Pri krožni spremembi je delo različno od nič, če se ne vračamo po isti poti, po takšni sklenjeni poti je $A_{kr} = -\oint pdV$. Integral na desni je enak ploščini lika, ki ga določa pot. Nasprotno mora biti sprememba vsake termodinamične spremenljivke pri krožni spremembi enaka nič. Tako tudi toplota ni enolična funkcija stanja, saj je odvisna od poti (ne smemeo reči, da ima telo toploto). Zato zapišemo energijski zakon v termodinamiki navadno

$$dW_n = đQ + đA$$

Kjer z A označimo majhno dovedeno delo in z opozorimo, da ne gre za majhno spremembo ali razliko dela, ker ni termodinamična spremenljivka.

Notranja energija in entalpija: Pri izobarni spremembi je delo tlaka različno od nič $(A)_p = p(V - V_0)$. Spremembo toplote ne moremo spraviti v neposredno zvezo s spremembo notranje energije, lahko pa zapišemo

$$(Q)_p = \Delta W_n - A = \Delta W_n + p(V - V_0) = W_n + pV - (W_{n0} + pV_0)$$

Količina $H = W_n + pV$ je entalpija z enoto $[J]$ in je enolična funkcija stanja ali termodinamična spremenljivka. Velja $(Q)_p = H(T,p) - H(T_0,p)$. V splošnem velja

$$dH = dW_n + p(dV) = dW_n + pdV + Vdp \rightarrow dH = Q + Vdp$$

kjer je $Q = dW_n + pdV$.

Prenos toplote: toplota se prenaša (brez toplotne črpalke) z mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo temperaturo s prevajanjem (kondukcijo) po trdninah in mirujočih tekočinah, konvekcijo in sevanjem.
Toplota, ki jo v časovni enoti odda toplejše telo je toplotni tok $P = \frac{dQ}{dt}$. Zaradi energijskega zakona je toplotni tok, ki teče na hladnejše telo enak toku, ki zapušča toplejše, če ga nič ne gre vstran in če se ga nič ne dovede. Tako je toplotni tok konstanten skozi kateri koli presek telesa. $P = P_0$ je primer kontinuitetne enačbe brez dodatnih izvorov in ponorov. Toplotni tok na enoto preseka dS, ki je pravokoten na smer toka, je gostota toplotnega toka $j = \frac{dP}{dS}$.
Toplotni tok je sorazmeren s ploskvijo, in iz meritev se izkaže, da je sorazmeren z razmerjem $\frac{T_0 - T}{x} = -\frac{T - T_0}{x}$, ki se imenuje negativni temperaturni gradient. Zakon o prevajanju toplote se glasi

$$P = -\lambda \frac{S(T - T_0)}{x}$$

kjer je λ toplotna prevodnost z enoto $[\frac{W}{mK}]$. Gostota toplotnega toka je $j = -\lambda\frac{(T-T_0)}{x}$, v diferencialni obliki pa je

$$\mathbf{j} = -\lambda\nabla T$$

2.6 6. Obrnljivi, neobrnljivi, krožni procesi. 2. zakon termodinamike, entropija.

Obrnljivi, neobrnljivi, krožni procesi: obrnjeno spremembo dobimo tako, da v mislih obrnemo čas in spremenimo znake vseh količin, ki vsebujejo čas. Sprememba, ki vodi v teh okoliščinah iz prejšnega končnega stanja v prejšnje začetno stanje, preko poljubnih vmesnih zunanjih stanj, je obrnjena sprememba. Spremembo imamo za reverzibilno, če je ta uresničljiva. Ni trajnih sprememb v bližnji ali daljni okolici. Tako mora pri obrnjeni spremembi oddati bližnji okolici delo $|A|$ in toploto $|Q|$, če je pri prvotni spremembi dobil od nje delo A in toploto Q. Sprememba je ireverzibilna, če ne ustreza tem zahtevam. Proces, ki ga lahko prikažemo s krivuljo na $p-V$ diagramu je obrnljiv.

2. zakon termodinamike: energijski zakon velja splošno. Ugotovimo pa, da nekateri pojavi, ki bi bili pod tem zakonom mogoči, niso uresničljivi. To eksperimentalno dejstvo izraža drugi zakon termodinamike oziroma entropijski zakon. Sam zakon lahko formuliramo na več načinov. Kelvin-Planck razlaga je ta, da ni možen proces, kjer bi vso toploto pretvoril v delo, ni možen toplotni stroj s 100% izkoristkom. Druga, Clausius-ova razlaga je, da ni možen proces, v katerem toplota preide s telesa z nižjo temperaturo na telo z višjo. V toplotni črpalki je za to potrebno delo. Drugi zakon lahko zapišemo tudi z entropijo, katera se v zaprtem sistemu ohranja ali povečuje, nikole pa ne s časom zmanjšuje.

Entropija: z idealnim plinom. Maso m idealnega plina iz začetnega stanja p_2, V_2, T_0 reverzibilno izotermno razpnemo do končnega stanja p_0, V_0, T_0. Dovesti moramo toploto $Q_0 = p_0V_0ln(\frac{V_0}{V_2}) = \frac{m}{M}RT_0ln(\frac{V_0}{V_2})$. Hkrati moramo dovesti enako veliko delo $A_0 = -Q_0$. Pri drugi reverzibilni izotermni spremembi preide ista masa iz drugega začetnega stanja p, V, T v drugo končno stanje p_1, V_1, T in moramo dovesti toploto $Q = pVln(\frac{V_1}{V}) = \frac{m}{M}RT_0ln(\frac{V_1}{V})$ in delo $A = -Q$. Zahtevajmo, da preide plin iz prvega začetnega stanja v drugo začetno stanje, adiabatna sprememba. Enako zahtevamo prehod iz prvega končnega stanja v drugo končno stanje. Velja $TV^{\kappa-1} = T_0V_2^{\kappa-1}$ in $TV_1^{\kappa-1} = T_0V_0^{\kappa-1}$. Dobimo zvezo $\frac{V_1}{V} = \frac{V_0}{V_2}$. Logaritma obeh dovedenih toplot sta enaka in se toploti razločujeta samo po temperaturi $\frac{Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0}$. Tako lahko vpeljemo entropijo $S - S' = \frac{Q}{T}$. Velja samo za izotermno reverzibilno spremembo. Pri majhni spremembi je $dS = \frac{dQ}{T}$. Entropija je enolična funkcija stanja. Sprememba entropije je pri krožni in reverzibilni adiabatni spremembi enaka nič. Pri ireverzibilnih ne moremo računati s to enačbo. Zamislimo si nadomestno reverzibilno spremembo, ki vodi iz istega začetnega v isto končno stanje. Tako pa lahko uporabimo enačbo. Pri sistemu, ki ni toplotno izoliran velja $S - S_0 > \int \frac{dQ}{T}$ in dobimo entropijski zakon $S - S_0 \geq \int \frac{dQ}{T}$.
Za izkoristek za Carnotov cikel velja

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} \to \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_1} + \frac{\Delta .Q_2}{\Delta Q_2} = 0$$

Termodinamski sistem se premika kvazistatično po nenujno reverzibilnem ciklu K. Razdelimo ga na n korakov, med vsakim je temperatura konstantna zaradi stika z toplotnim rezervoarjem $HB(T_i)$ (heat bath).

.5 ./heatbath1.png .5 ./heathbath2.png

Slika 5: Potek procesa K.

Izmenja se ali pozitivna ali negativna toplota δQ_i. Po prvem zakonu termodinamike imamo celotno delo opravljeno na K, $\Delta A = \Delta W_k = -\sum\limits_{i=1}^{n} \delta Q_i$. Na vsak toplotni rezervoar priklopimo Carnotov toplotni stroj C_i, ki deluje med rezervoarjem $HB(T_i)$ in rezervoarjem $HB(T_0)$, kjer $T_0 > T_i$. Vsak C_i je lahko ali toplotni stroj ali toplotna črpalka. C_i nastavimo tako, da dobijo $\delta Q_{C_i} = -\delta Q_i$ in tako imamo za vsak Carnotov stroj $\delta Q^{(0)}_{C_i} = -\frac{T_0}{T_i}\delta Q_{C_i} = \frac{T_0}{T_i}\delta Q_i$. Carnotovi stroji skupaj opravijo delo

$$\Delta A = \Delta W_C = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = -\sum_{i=1}^{n} \eta_{C_i} \delta Q^{(0)}_{C_i} = -\sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{T_i}{T_0}) \frac{T_0}{T_i} \delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{T_0}{T_i}) \delta Q_i$$

V celotnem ciklu se izmenja z glavnim rezervoarjem $\Delta Q^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta Q^{(0)}_{C_i} = T_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta Q_i}{T_i}$ toplote. Celotno opravljeno delo je $W = W_K + W_C = -T_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta Q_i}{T_i}$. Prvi zakon termodinamike $\Delta A = -\Delta Q$ velja, drugi pa zahteva $\Delta A \geq 0$. V obrnjenem postopku se nebi zgodilo nič razen tega, da celoten sistem vzel toploto iz glavnega rezevoarja in jo popolnoma spremenil v delo, kar je nemogoče. Tako dobimo rezultat $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0$, ki ima podatke samo iz originalnega cikla K. Če velja $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta Q_i}{T_i} = 0$ je K reverzibilen. Generaliziramo $n \to \infty$ in dobimo Clausiusovo neenakost $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$. Naj bo x fiksna točka v prostoru stanj, entropijo definiramo kot integral $S(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\delta Q}{T}$

2.7 7. Spremembe z idealnim plinom. Toplotni stroji in hladilniki.

Spremembe z idealnim plinom: pri izohorni spremembi plin preide iz začetnega stanja p_0, V, T_0 v končno stanje p, V, T. Velja zveza $\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}$. Dela plin ne opravi, dovedena toplota je enaka spremembi notranje energije $(Q)_V = W_n - W_{n0} = mc_V(T - T_0)$, sprememba entalpije pa je $H - H_0 = mc_p(T - T_0)$. Pri izobarni spremembi je konstanten tlak in velja zveza $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T}$. Delo ki ga prejme plin je $(A)_p = -p(V - V_0)$, toplota pa $(Q)_p = mc_p(T - T_0)$. Spremembi notranje energije in entalpije sta $W_n - W_{n0} = mc_V(T - T_0) = (Q)_p + (A)_p$ in $H - H_0 = mc_p(T - T_0) = (Q)_p$. Pri izotermni spremembi je konstantna temperatura in velja zveza $p_0V_0 = pV$, spremembi notranje energije in entalpije sta enaki nič. Delo pa je $(A)_T = \int\limits_{V_0}^{V} pdV = -p_0V_0 \int\limits_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -p_0V_0 ln(\frac{V}{V_0})$. Dovedena toplota je $(Q)_T = -(A)_T$. Pri izentropni spremembi je konstatna entropija (pri spremembi adiabatno izoliranega idealnega plina). Iz p_0, V_0, T_0 v p, V, T in velja enačba $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$. Spremeba notranje energije je enaka $dW_n = (dA)_S$ dobimo enačbo $mc_V dT = -pdV$, izrazimo $p = \frac{mRT}{MV}$, vstavimo $c_p - c_V$ za $\frac{R}{M}$ ter delimo s c_V in preuredimo v $\frac{dT}{T} = -(\kappa - 1)\frac{dV}{V}$. Integriramo v $ln(\frac{T}{T_0}) = -(\kappa - 1)ln(\frac{V}{V_0}) = ln(\frac{V_0}{V})^{\kappa-1}$. Tako dobimo zvezo $TV^{\kappa-1} = T_0V_0^{\kappa-1}$, podobno lahko izrazimo $\frac{T_0^\kappa}{p_0^{\kappa-1}} = \frac{T^\kappa}{p^{\kappa-1}}$ in $p_0V_0^\kappa = pV^\kappa$.

Sprememba	Konstanta	Enačba stanja	Q	A	ΔW_n
Izohora	$V = konst$	$\frac{p}{T} = konst$	$mc_V\Delta T$	0	$mc_V\Delta T$
Izobara	$p = konst$	$\frac{V}{T} = konst$	$mc_p\Delta T$	$-p\Delta V$	$mc_V\Delta T$
Izoterma	$T = konst$	$pV = konst$	$\frac{m}{M}RTln\frac{V}{V'}$	$-\frac{m}{M}RTln\frac{V}{V'}$	0
Izentropa	$S = konst$	$pV^\kappa = konst$	0	$mc_V\Delta T$	$mc_V\Delta T$

Slika 6: Spremembe z idealnim plinom.

Toplotni stroji in hladilniki: k toplotnim strojem štejemo stroje, ki prejemajo toploto, oddajajo delo in ponavljajo pri tem krožno spremembo. Toplota, ki jo prejemajo stroji, izvira od spremembe entalpije pri gorjenju goriv. Ne glede na to ali je krožna sprememba reverzibilna ali ireverzibilna je sprememba notranje energije in entropije enaka nič. Tako sledi iz energijskega zakona $-A_{kr} = Q_{kr}$. Stroj, ki bi mu ne bi dovajali toplote in bi oddajal delo, bi bil prepetum mobile prve vrste. Tak bi nasprotoval energijskemu zakonu. Lahko pa stroj oddaja delo, če mu dovajamo delo ne pa toplote, tako je $A_{kr} = A_{do} - |A_{od}| = 0$, iz energijskega zakona sledi $A_{do} = |A_{od}|$. Moramo upoštevati trenja in podobne izgube, v približku pa velja za iskoristek mehanskih strojev približek $\frac{|A_{od}|}{A_{do}} = \frac{|P_{od}|}{P_{do}} = \eta$.
Toplotni stroji se razlikujejo potem, da izkoristek niti približno ni 1. Ne moremo uresničiti izotermnega stroja, tak bi prejemal toploto pri konstantni temperaturi in oddajal delo. Potopljen v morje ali velik rezervoar, katerega temperatura se ne bi znanto spremenila, bi prejemal toploto in oddajal delo. Tak stroj ne nasprotuje energijskemu zakonu, nasprotuje pa entorpijskem in je tako perpetum mobile druge vrste. Za takšen stroj bi ali bilo delo in toplota krožne spremembe enaka nič, ali pa bi zapravljal delo in oddajal toploto. Izkoristek vpeljemo kot $\eta = \frac{|A_{kr}|}{Q_{do}}$ iz sklepanja, da mora toplotni stroj nekaj toplote tudi oddajati. Iz energijsekga zakona $0 = A_{kr} + Q_{kr} = A_{kr} + Q_{do} - |Q_{od}|$ in $A_{kr} = Q_{do} - |Q_{od}|$ sledi

$$\eta = \frac{|A_{kr}|}{Q_{do}} = 1 - \frac{|Q_{od}|}{Q_{do}}$$

Toplotni stroj ne more delovati pri eni temperaturi. Privzamemo v bližnji okolici dva toplotna rezervoarja, toplejši s T in hladnejši s T_0. Carnotovo krožno spremembo opravlja idealni toplotni (Carnotov) stroj. Ima dve odliki, krožna sprememba je reverzibilna in stroj prejme Q med reverzibilno izotermno spremembo pri T in odda $|Q_0|$ pri T_0. $Q_{od} = Q_0$ in $Q_{do} = Q$. Za reverzibilno krožno spremembo je $S - S_0 = 0 = \oint \frac{Q}{T} = \frac{Q}{T} - \frac{|Q_0|}{T_0}$. Iz tega sledi $\frac{|Q_0|}{Q} = \frac{T_0}{T}$ in

izkoristek $\eta = 1 - \frac{T_0}{T}$. Ta enačba velja ne glede na snov v toplotnem stroju. $\frac{|Q_0|}{Q} = \frac{T_0}{T}$ je osnova za termodinamično definicijo temperature.
Pri idealnem hladilnem stroju dovedemo delo, stroj prejme toploto Q_0 pri nižji temperaturi T_0 in odda $|Q|$ pri T. Imenuje se tudi toplotna črpalka. Ta proces ni v nasportju z nobenim zakonom saj vmes dovajamo delo. $0 = A_{kr} + Q_0 - |Q|$ in po entropijskem zakonu $\frac{Q_0}{T_0} - \frac{|Q|}{T}$ sledi $A_{kr} = Q_0(\frac{|Q|}{Q_0} - 1) = Q_0(\frac{T}{T_0} - 1)$ dobimo izkoristek

$$\eta = \frac{A_k r}{Q_0} = \frac{T}{T_0} - 1$$

Da bi bila sprememba čim manj ireverzibilna, morata pri krožni spremembi biti izotermni spremembi zelo dolgi. Tako uporabni toplotni stroji ne morejo opravljati reverzibilne spremembe. Za take stroje sledi iz entropijskega zakona $0 = S - S_0 > \frac{Q}{T} - \frac{|Q_0|}{T_0}$ oziroma $\frac{|Q_0|}{Q} > \frac{T_0}{T}$ in je za to $\eta = 1 - \frac{|Q_0|}{Q} < 1 - \frac{T_0}{T} = \eta_C$. Za hladilnega iz $0 = S - S_0 > \frac{Q_0}{T_0} - \frac{|Q|}{T}$ sledi $A_{kr} = Q_0(\frac{|Q|}{Q_0} - 1) > Q_0(\frac{T}{T_0} - 1)$. Drugi razlog za manjši izkoristek je, da prejemajo toploto pri temperaturi nižji od T in oddajajo pri višji od T_0.

2.8 8. Kinetična teorija plinov. Statistični opis plina. Maxwell-Boltzmannova porazdelitev.

Kinetična teorija plinov: vzamemo, da sestavlja plin v posodi množica molekul. Kinetična teorija plinov pojasnjuje lastnosti plinov z lastnostmi molekul. Kilomol kateregа koli plina ima v enakih okoliščinah enako prostornino. Iz tega sklepa, da je pri plinih še najmanj potrebno obravnavati posebne lastnosti molekul. Iz dejstva, da imajo plini enako molsko prostornino sledi Avogadrov zakon, v molu kateregakoli plina je enako število molekul. To pove Avogadrova konstanta N_A. Skupna masa plina $m = NM_1$ in maso kilomola $M = N_A m_1$, gostota molekul $n = \frac{N}{V}$. Boltzmannova konstanta $k = \frac{R}{N_A}$ z enoto $[m^{-3}]$. Gostoto snovi izrazimo z gostoto molekul $p = \frac{m}{V} = \frac{m_1 N}{V} = m_1 n$, te količine vstavimo v plinsko enačbo in dobimo $p = nkT$. Tlak v izotermnem ozračju pojema po enačbi $p = p_0 e^{-\frac{z}{z_0}}$, kjer je $z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$. Gostota molekul je pri konstantni temperaturi je sorazmera s tlakom.
Molekule imajo hitrosti od nič do zelo velike vrednosti enakomerno porazdeljene v vse smeri. Neurejeno gibanje molekul imenujemo termično gibanje. Sprememebe hitrosti pri trkih ne prizadanejo povprečij, saj je sistem v ravnovesnem stanju. Tlak plina pojasnimo s trki molekul s steno. Pri prožnem trku z gladko steno se spremeni samo smer komponente hitrosti molekule v_z, ki je pravokotna na steno. Skupni sunek sil, s katerimi deluje stena na molekulo je $\int F_1 dt = -m_1 v_z - m_1 v_z = -2m_1 v_z$. V času t dospe na del steno S ravno $N = \frac{1}{2} nSv_z t$ molekul. Pri tem smo upoštevali molekule s prostornino $Sv_z t$ in vzeli, da ima polovica molekul hitrosti od stene proč in ne trči v steno. Skupni sunek stene na molekule je $-2m_1 v_z S$. Na ploskovno enoto preračunan sunek je tlak $p = 2m_1 v_z \frac{N}{St} = 2m_1 v_z \frac{1}{2} n v_z = nm_z v_z^2$. Ker smo privzeli, da je kompnenta hitrosti za vse molekule enaka, kar seveda ni res, prepišemo v $p = nm_1 \langle v_z^2 \rangle$, dobimo povprečno vrednost tlaka. Povprečna kinetična energija je $\langle W_{k1} \rangle = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_x^2 + \frac{1}{2} m_1 v_y^2 + \frac{1}{2} m_1 v_z^2 = \frac{1}{2} m_1 \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m_1 \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m_1 \langle v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} m_1 \langle v_z^2 \rangle$, kjer smo upoštevali, da so smeri enakovredne. Vstavimo $m_1 \langle v_z^2 \rangle = \frac{p}{n} = kT$ in dobimo povprečno kinetično energijo molekule $\langle W_{k1} \rangle = \frac{3}{2} kT$. Tako lahko definiramo absolutno temperaturo. $\frac{1}{2} m_1 \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$ dobimo koren povprečne vrednosti kvadrata hitrosti $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, kot mera vrednosti velikosti hitrosti molekul v plinu. Skupna energija vseh molekul je notranja energija plina $W_n = N \langle W_{k1} \rangle$, specifična toplota $c_V = \frac{1}{m} \frac{dW_n}{dT} = \frac{3}{2} \frac{R}{M}$, $c_p = c_V + \frac{R}{M}$.

Kinetična energija plinov je v povzetku termodinamični opis plinov z velikim številom identičnih delce, ki se gibljejo konstantno s naključnimi hitrostmi. Njihova velikost je veliko manjša od medatomskih razdalji. Delci se med sabo in s stenami elastično odbijajo in njihove hitrosti so porazdeljene po Boltzmannovi porazdelitvi. Najosnovnejši model je idealni plin. Termično gibanje makroskopkih delcev se imenuje Brownovo gibanje.

Statistični opis plina: zelo veliko število molekul dopušča samo statistični opis. Vse definicijsko območje od 0 do ∞ razdelimo na razrede. Naprimer pri opisavnju razporeditve molekul v delu ozračja. Molekule razdelimo v razrede tako, da vsaka molekula sodi v določen razred. Izbrani razred, ki sega od $z - dz$ do $z + dz$ označimo z z. Nanj odpade dN molekul, to število je sorazmerno s širino razreda dz. Sorazmernostni koeficient w se spreminja od razreda do razreda, $w(z) = w$. Tako lahko postavimo

$$\frac{dN}{N} = w(z)dz$$

S tem je določena porazdelitev molekul po višini. Zahtevamo, da je porazdelitev normirana $\int\limits_0^\infty w(z)dz = 1$. Poleg zveznih porazdelitev so tudi diskretne. V izotermnem ozračju je porazdelitov po višini

$$w(z)dz = z_0^{-1} e^{-\frac{z}{z_0}}$$

Porazdelitev okvirno opredelimo s majhnim številom podatkov. Naprimer s popvrečno vrednostjo $\langle z \rangle = \int\limits_0^\infty z\frac{dN}{N} = \int\limits_0^\infty zw(z)dz$ in povprečno vrednostjo kvadrata višine $\langle z^2 \rangle = \int\limits_0^\infty z^2 w(z)dz$. Kot vrjetnost vpeljemo $dP = w(z)dz$.

./maksvel.png

Slika 7: Maxwell-Boltzmannova porazdelitev.

Maxwell-Boltzmannova porazdelitev: je osnova kinetične teorije plinov, vpeljana s pomočjo statistične mehanike. Ustreza najverjetnejši porazdelitvi energije v sistemu z velikim številom delcev, ki si energijo izmenjujejo s trki. Ker so trki med molekulami plinov redki, Boltzmannova porazdelitev zelo dobro opiše razmere v plinu. V porazdelitvi lahko razberemo povprečno hitrost, koren povprečnega kvadrata hitrosti in najverjetnejšo hitrost naključnega delca. Zanima nas porazdelitev po hitrosti. Komponenta v_x je projekcija hitrosti molekul na x os, njeno definicijsko območje je realna os. Razred, ki ga označuje srednja vrednost v_x, sega od $v_x - \frac{1}{2}dv_x$ do $v_x + \frac{1}{2}dv_x$. Delež molekul v tem razredu je sorazmeren s širino dv_x in če je ta dovolj majhna velja $(\frac{dN}{N})_{v_x} = w(v_x)dv_x$. V porazdelitvi po višini izrazimo konstanto $z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{n_0 kT}{n_0 m_1 g} = \frac{kT}{m_1 g}$. Tako je

$$(\frac{dN}{N})_z = w(z)dz = \frac{m_1 g}{kT} e^{-\frac{m_1 gz}{kT}} dz$$

$m_1 gz$ je potencialna energija molekule. Pri porazdelitvi po višini ima odločilno vlogo potencialna energija. Pri porazdelitvi hitrosti pa ima to vlogo kinetična energija. Zapišemo $w(v_x)dv_x = Ae^{-\frac{m_1 v_x^2}{2kT}}$. Z normalizacijo izluščimo $A = (\frac{m_1}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}}$. Povprečna vrednost komponente hitrosti je enaka nič $\langle v_x \rangle = 0$, kvadrata pa $\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m_1}$. Vse tri komponente hitrosti so medseboj neodvisne. $(\frac{dN}{N})_v = w(v_x)dv_x w(v_y)dv_y w(v_z)dv_z = A^3 e^{-\frac{m_1 v^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$. Gre za delež molekul v kvadru s prostornino $dv_x dv_y dv_z$. Kvader lahko zamenjamo s krogelno lupino med kroglama s polmeroma $v_x - \frac{1}{2}dv_x$ in $v_x + \frac{1}{2}dv_x$, ter prostornino s $4\pi v^2 dv$ in dobimo

$$(\frac{dN}{N})_v = 4\pi A^3 v^2 e^{-\frac{m_1 v^2}{2kT}} dv = w(v)dv$$

Definicijsko območje spremenljivke v sega od 0 do inf. To je Maxwellova porazdelitev. Povprečni vrednosti sta

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v w(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}, \ \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 w(v)dv = \frac{3kT}{m_1}$$

Navedemo najverjetnejšo hitrost $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}$, kjer ima $w(v)$ maksimum.

3 Elektrika in magnetizem

3.1 1. Električni naboji. Električno polje, električna poljska jakost, električni potencial. Gaussov zakon.

Električni naboji: je produkt električnega toka in časa. Ob nestacionarnem toku je

$$e = \int I dt$$

Električni naboj je lastnost snovi, da neko telo čuti silo, ko ga damo v električno polje. Na telesa z nabojem deluje elektromagnetno polje. Naboj je lahko pozitiven ali negativen, kjer odbojno delujeta enaka naboja. Če imamo dve nabiti kroglici, zaznamo naboj na kroglici po sili, s katero deluje na drugo nabito kroglico. Po kontinuitetni enačbi velja zakon o ohranitvi naboja, naboj na sistemu teles se ne spremeni, če sistemu ne dovedemo nič naboja in z njega ne odvedemo nič naboja $e = e^+ + e^- = konst.$. Sistem, ki mu ne dovajamo naboja je izoliran in sistem ki ima skupni naboj enak nič, je električno nevtralen.

Podobno. kot pri mehaniki, idealiziramo točkasti naboj. Za električno silo ali Coulombovo silo med nabitima točkastima telesoma velja Coulombov zakon $F\alpha\frac{e_1e_2}{r^2}$. Spominja na gravitacijski zakon, kjer sta tukaj naboja lahko negativna in da je lahko sila tudi odbojna. Koeficient določimo $\kappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, kjer je influenčna konstanta $\varepsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}$. Tako dobi Coulombov zakon obliko $F = \frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Sili med točkastima nabojema ležita na zveznici nabojev. Zanju velja zakon o vzajemnem učinku. V izbranem sistemu do nabojev $e_{1,2}$ segata krajevna vektorja $\mathbf{r}_{1,2}$. Električna sila prvega telesa na drugo je

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$$

in drugega na prvo

$$\mathbf{F}_{2,1} = -\frac{e_2e_1}{4\pi\varepsilon_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2}\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$$

Velja $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2 = (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2 = (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2$. Za naboja z nasprotnima znakoma velja $-e_1e_2 > 0$ in je sila privlačna obratno za naboja z enakima znakoma. V sistemu točkastih nabojev, izvaja vsak naboj električno silo na preostale in je skupna električna sila na naboj vektorska vsota vseh sil

$$\mathbf{F} = -e\sum_j \frac{e_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r})}{4\pi\varepsilon_0(|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}|)^3}$$

Električni naboj lahko zapišemo kot porazdeljenega po ploskvi oziroma volumnu $\sigma = \frac{de}{dS}$ in $\rho_e = \frac{de}{dV}$. Silo porazdeljenih nabojev izračunamo $\mathbf{F} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma(\mathbf{r}'dS')(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}{(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)^3}$ in $\mathbf{F} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_e(\mathbf{r}'dV')(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}{(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|)^3}$.

Električno polje: naboj spremeni lastnosti prostora okoli sebe, ki postane električno polje. To polje izvaja silo na druge naboje. Prvi točkasti naboj v izhodišču izvaja na drugi naboj $e_2 = e$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ električno silo

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{1,2} = -\frac{ee_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Električna poljska jakost: električno polje prvega naboja določimo z jakostjo električnega polja E,

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$ merimo v enotah $[\frac{N}{As} = \frac{VAs}{Asm} = \frac{V}{m}]$. Jakost električnega polja je vektor, čigar smer je tudi smer električnega polja. Podobno se tudi izračuna jakost kot vsota posameznih jakosti $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Sila električnega polja na porazdeljen naboj zapišemo s gostoto sile $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{dV} = \frac{\mathbf{Ede}}{dV} = \rho_e\mathbf{E}$.

Električni potencial: električna sila opravi delo

$$A = \int \mathbf{F}d\mathbf{s} = e\int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}d\mathbf{s}$$

ko premaknemo naboj iz točke s krajevnim vektorjem $\mathbf{r_1}$ v točko z $\mathbf{r}$. Stroj, ki je priključen na električni krog, opravlja delo in če se mu ne spremeni notranja, potencialna ali kinetična energija, je po energijskem zakonu moral prejeti toliko dela kot ga je oddal, in to je dobil v obliki električnega dela. V stacionarnem primeru, kjer se razmere ne spreminjajo s časom, sledi da je električno delo sorazmerno s pretočenim nabojem, kot koeficient vpeljemo napetost, $A = Ue$, kjer je vedno določena med dvema točkama kroga. Uporabimo $A = -eU$, zavzamemo stališče, da je delo pozitivno, če ga točkasti naboj prejme, tako je napetost

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r_1}) = -\int\limits_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{s}$$

Tako je $U(\mathbf{r}, \mathbf{r_1})$ napetost med dvema točkama električnega polja. Napetost med točkama v polju naboja e_1 izračunamo z $U(\mathbf{r}, \mathbf{r_1}) = -\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r}} \frac{\rho}{\rho} \frac{d\mathbf{s}}{\rho^2}$, kjer je skalarni produkt $d\mathbf{s}$ in enotskega vektorja $\frac{\rho}{\rho}$ enak $\cos(\varphi) \cdot ds$, če je φ kot med premikom in krajevnim vektorjem. Projekcija na krajevni vektor $\cos(\varphi) \cdot ds$ je sprememba velikosti krajevnega vektorja, to je sprememba razdalje od izhodišča $U(\mathbf{r}, \mathbf{r_1}) = -\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r}} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$. Pogosto računamo napetosti vseh točk glede na izbrano točko. V tem primeru krajevnega vektorja $\mathbf{r_0}$ do izbrane točke ni potrebno navajati, saj je določen enkrat za vselej in konstanten, tako nastane iz napetost $U(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})$ električni potencial $U(\mathbf{r})$. Pri točkastem naboju postavimo izbrano točko v neskončnost $r_0 \to \infty$. Tako je potencial

$$U(r) = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Napetost med dvema točkama v polju je razlika ustreznih potencialov $U(r, r_1) = U(r) - U(r_1)$. Potencial je odvisen od izbire točke, v kateri predpišemo vrednost nič in je do konstante nedoločen, razlika potencialov pa ni nedoločena. Napetost tudi ni odvisna od poti med točkama. Velja izrek o električni napetosti $-U(r, r_1) = \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$, v kateri vidimo posplošitev drugega Kirchoffovega izreka. Jakost električnega polja je vektor, potencial pa skalar. Obadva lahko isto popolno navedeta električno polje. Izračun jakosti iz potenciala je $\mathbf{E} = -(\frac{dU}{dr})_{v\ smeri\ najmonejega\ naraanja} = \nabla U = (\frac{\delta U}{\delta x}, \frac{\delta U}{\delta y}, \frac{\delta U}{\delta z})$.
Ker je delo odvisno od začetne in končne lege naboja, je delo električne sile po sklenjeni poti $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$ in je električna sila konservativna sila. Tako lahko vpeljemo potencialno energijo naboja e,

$$W_{ep} = eU(\mathbf{r})$$

Delo vseh zunanjih sil, razen električne, je pri počasnem premikanju naboja enako razliki potencialnih energij v električnem polju $A' = W_{ep} - W'_{ep}$. Delo zunanjih sil je enako seštevu razlik kinetične, težne potencialne in električne potencialne energije. Skupna električna potencialna energija sistema točkastih nabojev je vsota prispevkov vseh nabojev v sistemu $W_{ep} = \frac{1}{2} \sum\limits_k e_k U(\mathbf{r_k})$.

Gaussov zakon: iz pozitivnega naboja izvirajo silnice v radialni smeri, v negativnega se stekajo. Ekvipotencialne ploskve so kocentrične krogle. Skozi katerkoli ploskev gredo silnice, ki izvirajo ali se stekajo v naboj, nobena silnica ne pride s strani in nobena ne zaide. Nobena silinca ne izvira v ekvipotencialni ploskvi. Koliko jih gre določi naboj. Lastnost električnega polja naboja izvira iz dejstva, da sila med točkastima nabojema pojema s kvadratom razdalje. Jakost električnega polja pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje. Med tem se veča površina ekvipotencialne ploskve sorazmerno s kvadratom razdalje.
Vpeljemo električni pretok ϕ_e, ponazorimo ga s številom silnic skozi dano ekvipotencialno ploskev. Ker je sorazmeren z nabojem postavimo, $\phi_e = e_1$, da je električni pretok skozi dano ploskev, enak naboju. Površina ekvipotencialne ploskve je $S' = 4\pi r^2$. Vpeljemo gostoto električnega pretoka

$$D = \frac{\phi_e}{S'} = \frac{e_1}{4\pi r^2}$$

z enoto $[\frac{As}{m^2}]$. $\mathbf{D}$ je vektor, ki je pravokoten na ekvipotencialno ploskev. Cev silnic s presekom S razdelimo na niti silnic, presek niti z ekvipotencialno ploskvijo dS' je tako majhen, da lahko vzamemo gostoto električnega polja za konstantno. Električni pretok je torej DdS', električni pretok po cevi silnic pa $\int\limits_S DdS'$, integriramo po preseku cevi silnic. Električni pretok je podobno vpeljan kot prostorninski tok pri tekočinah. V splošnem ploskev S, skozi katero računamo električni pretok, ni ekvipotencialna ploskev. Moramo upoštevati projekcije te ploskve na ekvipotencialno ploskev. Za nit silnic velja $dS' = dS\cos(\varphi)$. Električni pretok skozi poljubno ploskev $\phi_e = \int\limits_S DdS\cos(\varphi) = \int\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{S}$. $d\mathbf{S}$ je vektor, ki ima velikost preseka silnic s ploskvijo S in smer pravokotnice na to ploskev. Električni pretok, ki vstopa skozi prvi presek v cev silnic, je enak pretoku, ki iztopa, če med presekoma ni nabojev. Na začetku smo uogotvili, da je električni pretok skozi ekvipotencialno ploskev enak naboju $\oint_{S'} DdS' = e_1$. Razširimo na katero koli zaporto ploskev okoli točkastega naboja $\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = e_1$. Vsak naboj si predstavljamo, da je sestavljen iz samih točkastih nabojev in za vsakega velja prejšnja enačba. Seštejemo prispevke vseh točkastih nabojev in ugotovimo, da je pretok skozi zaprto ploskev enak skupnemu naboju v notranjosti te ploskve

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = e$$

to je zakon o električnem pretoku oziroma Gaussov zakon, ki velja popolnoma splošno.
Iz zapisanih enačb ugotovimo, da je gostota električnega polja v preprosti zvezi z jakostjo električnega polja $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, velja samo v vakuumu.

3.2 2. Prevodniki in dielektriki v električnem polju. Gostota električnega polja. Kondenzator. Energija električnega polja.

Prevodniki in dielektriki v električnem polju: kovine, katere imajo gibljive negativne prevodniške elektrone, pozitivne pa vezane v kristalno mrežo, postavljene v električno polje, imenujemo prevodniki. Prevodnik zvezan z negativnim priključkom generatorja ima negativen skupen naboj, ima presežek prevodniških elektronov nad pozitivnimi ioni. Obratno ima primankljaj prevodniških elektronov. Presežek ali primankljaj sta majhen del vseh prevodniških elektronov. V prevodniku je električno polje le, če teče po njem tok. V elektrostatiki ni električnega polja v prevodinkih. Prevodniški elektroni so sicer gilbjivi, a ne zapustijo prevodnika in se nabere presežek ali primankljaj na površini. Električno silo, ki deluje na elektrone v električnem polju uravnovesi sila, ki jih veže na prevodnik, ki ima komponento v smeri pravokotnice. Tangentna komponenta električne sile bi povzročila tok po površini. To velja tudi za jakost električnega polja, v vsaki točki je pravokoten na površino prevodnika. V statičnem polju je površina ekvipotencialna ploskev. V notranjosti prevodnika ni silnic. Če je votlina znotraj prevodnika prazna, v njem ne more biti naboja, ker v prevodniku ni električnega polja.
Nevtralen in izoliran prevodnik damo v električno polje, prvo vdre električno polje v prevodnik in povrzoči kratkotrajen tok. Tok dovede na površino naboj in preneha. Končno električno polje je sestavljeno iz zunanjega in polja na površini nabranih nabojev. V notranjosti se polji izravnata, tako da ga tam ni. Površina postane ekvipotencialna ploskev, v splošnem se polje zunaj prevodnika razlikuje od prvotnega polja. Razdelitev nabojev v izoliranem prevodniku v električnem polju imenujemo influenca. Na površini nabran naboj pa influencirani naboj. Ko

vzmamemo prevodnik iz polja po njem steče tok v nasprotni smeri in se tako influencirani naboji izravnajo. Lahko pa zaznamo influenciran naboj. Skupaj damo dve kovinski plošči v električno polje, na prvi se influencira negativni naboj na drugi pa pozitivni. Plošči razmaknemo in se naboja ne moreta izravnati, ko vzamemo plošči iz električnega polja. Plošči sestavljata nabiti ploščati kondenzator. V homogenem polju se na plošči influencira

$$e = DS$$

Z influenco pojasnimo zakaj so naboji na vseh elektrodah zaporedno vezanih kondeznatorjev enako veliki.
Privzamemo da izolatorji sploh ne prevajajo toka, v njih ni nabitih delcev. To so dielektriki. Preprost primer je ko je celoten prostor zapolnjen s homogenim dielektrikom. V izoliran nabiti ploščati kondenzator z velikima ploščama in majhnim razmikom, damo plast dielektrika, ki zapolni ves prostor med ploščama. Napetost med ploščama pade. Ker je kondenzator izoliran je naboj na ploščah konstantenn $e = CU = konst.$. Zmanjšana napetost dokazuje, da se kapaciteta C poveča, s kapaciteto C_0 kondenzatorja v vakuumu definiramo dielektričnost dielektrika $\varepsilon = \frac{C}{C_0}$, tako je kapaciteta kondenzatorja z dielektrikom $C = \varepsilon C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l}$. Gostota električnega polja v dielektriku $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$.
Dielektrik je izolator, ki se ga lahko "polarizira" v magnetnem polju. Nima nabitih delcev. Iz atomov in molekul v zunanjem električnem polju nastane električni dipol z dipolnim momentom. V snovi lahko influenciramo dipole, obrnejo se tako, da zmanjšajo polje znotraj dielektrika. Zmanjšano polje pomeni zmanjšano napetost in s tem povečano kapaciteto.

Gostota električnega polja: (marsikaj v prejšnjem odgovoru) pri dielektriku z ozko prečno režo ali rovom, kjer je ni dielektrika. Električni pretok v reži je konstanten. Vstopajoči je enak iztopajočemu $DS - D_0S = 0$ iz tega sledi $D = D_0$ in. $\varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0$, jakost električnega polja v reži je večja kot v dielektriku. Napetost po rovu je enaka napetosti po dielektriku, saj sta elektrodi kondenzatorja ekvipotencialni ploskvi. Napetost po sklenjeni ploskvi mora biti enaka nič $-E_0 s - (-Es) = 0$, iz tega sledi $E = E_0$ in $\frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0}$.

Kondenzator: Je naprava, ki shranjuje električno energijo v obliki električnega polja. Za naboj porazdeljen po ravnini velja, da morajo zaradi simetrije biti silnice pravokotne na ravnino. Ekvipotencialne ploskve so ravnine vzporedno s to. Okoli te ravnine si zamislimo prizmo s ploskvama S. Pri pretoku skozi prizmo prispeva le pretok skozi osnovni ploskvi $2SD$, ta je po Gaussu enak naboju znotraj prizme $2S\varepsilon_0 E = e = \sigma S$ in tako $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Absolutna vrednost napetosti med dvema točkama $|U| = \int \mathbf{E}d\mathbf{s} = Ez = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$, kjer je z razdalja med dvema ekvipotencialnima ploskvama. Jakost električnega polja je v vseh točkah enako velika in enako usmerjena, silnice so enako goste, takšno polje je homogeno. Homogeno je tudi polje med vzporednima ravninama, kjer sta različna naboja z enakima gostotama. Silnice izvirajo iz pozitivno nabite in se stekajo v negativno nabito. Med ravninama je polje z jakostjo $E = \frac{\sigma^+}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma^-|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{e}{S\varepsilon_0}$. Na obeh straneh je prostor brez polja, takemu homogenemu polju se približa polje ploščatega kondenzatorja, kjer je daleč od robov približno homogeno. Napetost med ploščama je $U = El = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}l$. Če priključimo na kondenzator napetost U, se nabere na pozitivni plošči naboj $e = e^+ = DS = \varepsilon_0 ES = \frac{\varepsilon_0 S}{l}U$, na negativni plošči pa $|e^-| = e$. Naboj na elektrodi kondenzatorja je sorazmeren z napetostjo. Sorazmernostni koeficien vpeljemo kot kapaciteto $C = \frac{e}{U}$ z enoto $[1\frac{As}{V} = 1F]$. Za ploščatega velja $C = \frac{\varepsilon_0 S}{l}$, v splošnem pa

$$e = CU$$

Jakost električnega polja enakomerno nabitega dolgega valja mora biti rotacijsko simetrično glede na geometrijsko os valja in simetrično glede na ravnino, ki je pravokotna na geometrijsko os. Jakost je tako odvisna samo od razdalje r od geometrijske osi. Ekvipotencialne ploskve so plašči kocentričnih valjev. Silnice so poltrakovi v radialni smeri. Okoli nabitega valja si predstavljamo zaprto ploskev v obliki kocentričnega valja z radijem r in dolžino l. K pretoku skozi valj prispeva le pretok skozi plašč $SD = 2\pi r l \varepsilon_0 E$, ki je enak naboju znotraj ploskve $2\pi r l \varepsilon_0 E = e$, tako je $E = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{r}$. Potencial zunaj pozitivno nabitega valja z radijem r' je $U(r) = -\int\limits_{r'}^{r} \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{d\rho}{r\rho} = -\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r}{r'}$, če izberemo površino valja za potencial nič. Enačbi veljata neglede ali je enakomerno porazdeljen po plašči ali po volumnu. Valjast kondenzator sestavimo iz kocentričnih elektrod z radijema r' in R in dolžino l. Če je R znatno manjši od l lahko zanemarimo pojave na robovih. Med elektrodama imamo napetost $U(R, r') = U = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R}{r'}$, kapaciteta pa tako $C = \frac{e}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R}{r'}}$.

Za kroglo velja podobno, kjer so ekvipotencialne ploskve kocentrični krogi in za pretok skozi zaprto ploskev velja $SD = 4\pi r^2\varepsilon_0 E = e$, ki je enak naboju. Za zunanjost krogle velja $U(r) = -\int\limits_{r}^{\infty} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ne glede ali je porazdeljen po volumnu ali po površini. Če je naboj enakomerno porazdeljen po površini, v notranjosti ni naboja. Jakost električnega polja je nič, potencial za vse $r < r'$, torej od polmera, pa je konstanten $U(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon r'}$. Če je naboj porazdeljen po prostornini pa velja, da je znotraj krogle z radijem r naboj $\rho_e\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\frac{e}{\frac{4}{3}\pi r'^3}4\pi r^3}{3} = \frac{er^3}{r'^3}$ in $SD = 4\pi r^2\varepsilon_0 E = \frac{er^3}{r'^3}$. Ustrezni potencial je $U(r) = -\int E ds = -\frac{er^2}{8\pi\varepsilon_0 r'^3} + konst.$. Konstanto določimo z zahtevo, da mora biti potencial na površini krogle pri $r = r'$ zvezen, tako dobimo jakost električnega polja in potencial v notranjosti krogle za $r < r'$, $E = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$ in $U(r) = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r'^3}(3r'^2 - r^2)$. Krogelni kondezator pa ima $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r' R}{R - r'}$. Kondenzator je tudi ena sama krogelna elektroda.

Vzporedno zvezana kondenzatorja imata enako napetost, na prvem je naboj $e_1 = C_1 U$, na drugem pa $e_2 = C_2 U$, skupni naboj je $e_1 + e_2 = C_1 U + C_2 U$, torej je skupna kapaciteta $C = C_1 + C_2$. Pri zaporedno vezanih se na vsaki izmed elektrod nabere enako velik naboj e. Na prvem je napetost $U_1 = \frac{e}{C_1}$ na drugem pa $U_2 = \frac{e}{C_2}$. Velja $U = U_1 + U_2 = \frac{e}{C_1} + \frac{e}{C_2}$, oziroma $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Iz statičnega električnega polja preidemo do polja, ki se spreminja s časom. Za ohranitev enačb za statična polje, zahtevamo da se spreminja počasi in s tem dobimo kvazistatično polje.

Kondenzator priključimo na generator s konstantno gonilno napetostjo, imamo električni krog po katerem ne teče tok. Vsota vseh napetosti je nič. Velja $U + U_C = 0$, U je gonilna napetost, ko gremo z negativnega priključka skozi generator do pozitivnega, U_C je napetost na kondezatorju, ko gre s pozitivne elektrode do negativne skozi kondenzator. Napetost je $U_C = -\int E ds$, $U = \frac{e}{C}$ torej je $U_C = -\frac{e}{C}$. Ko se naboj spreminja, kapaciteta pa ostane ista velja $U_C = -\frac{e(t)}{C}$, odvajamo in dobimo $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{I}{C}$.

Spočetka nabit kondenzator zvežemo z upornikom. Po sklenjeni poti je napetost $U_R + U_C = 0$ in $\frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$. Na uporniku je $U_R = -IR$ in $\frac{dU_R}{dt} = -R\frac{dI}{dt}$. Dobimo diferencialno enačbo $-R\frac{dI}{dt} - \frac{I}{C}$, uvedemo $\tau = RC$, $\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau}$. Integriramo od $t = 0$ do t in od $I(t = 0) = I_0$ do $I = I(t)$. Dobimo $ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{\tau}$ oziroma $I = I_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$. Napetost na kondenzatorju je pozitivna $U_C = -U_R = IR$, kondezator deluje kot generator, $U_C = U_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$.

Polnjenje preko upornika in generatora. Imamo enačbo $U + U_R + U_C = 0$ oziroma $U - IR - \frac{e}{C} = 0$ z odvajanjem nastane diferencialna enačba za tok, enaka kot prej, njena rešitev je $I = I_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$, napetost na kondenzatorju pa je $U = U_0(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$, na uporniku pa $U_R = -U e^{\frac{-t}{\tau}}$.

V krogu s kondenzatorjem, na katerem je spremenljiva napetost, na prvi pogled ne velja kontinuitetna enačba za električni tok, oziroma prvi Kirchhoffov izrek. Na kondenzatorjevi elektrodi doteka naboj in z njiju odteka, tako se ustvarja električno polje in izginja. Po ostalem delu vezja teče tok, ko po kondenzatorju ne. Veljavnost kontinuitetne enačbe obvelja, če upoštevamo to spreminjajoče polje. Vpeljati moramo nov tok, premikalni tok. Vpeljemo

$$I = S\frac{dD}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$$

ki je tok nabojev po ploščatem kondenzatorju.
Pri računanju sile na naboj v električnem polju, ne smemo upoštevati polja tega naboja. Upoštevamo da je v $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, sila na točkasti naboj električnega polja preden smo tja postavili naboj. To upoštevamo pri sili ene plošče kondenzatorja na drugo. Zaradi homogenosti polja je račun preprost. Na vso ploščo deluje druga plošča s silo $F = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}eE = w_e S$.

Energija električnega polja: nabiti kondenzator vzdržuje nekaj časa tok skozi upornik in odda uporniku delo. To delo je prejel kondenzator od upornika med polnjenjem. Delo pri polnjeju je

$$A = \int U de = C\int_{U'}^{U} U dU = \frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}CU'^2$$

Velja $A = W_e - W_e'$. Kondenzator lahko povrne vso električno energijo. Lahko jo vzporedimo s prožnostno energijo vzmeti, kjer je U skrček in C koeficient vzmeti. Enačba za energijo nabitega ploščatega kondenzatorja vstavimo $C = \frac{\varepsilon_0 S}{l}$, $W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Sl(\frac{U}{l})^2$, kjer je $\frac{|U|}{l} = E$ med ploščama. Gostota električne energije

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED$$

3.3 3. Električni tok, električni tok v kovinah, Ohmov zakon, Kirchoffova izreka. Časovno odvisen električni tok.

Električni tok: po sklenjenem električnem krogu teče električni tok, po njemu sklepamo zaradi pojavov v njegovi okolici, naprimer elektroliza. Vodnik sklenjenega električnega kroga deluje s silo na drug tak vodnik in z navorom na magnetnico. Kot mero za izrazitost teh učinkov vpeljemo električni tok I. Smer definiramo po učinku na magnetnico. Ko se tok ne spreminja s časom teče po krogu konstanten oziroma stacionaren tok. Ob dovol dolg raven vodnik, damo magnetnico vzporedno z vodnikom, ta se postavi pravokotno na zveznico z vodnikom. Tok teče v smeri v katero leze desni sveder pri vrtenju v smeri severnega pola magnetnice (desna roka z iztegnjenim palcem). Vpeljemo enoto amper $[A]$. Po dveh dolgih vodnikih v razmiku $1m$ teče tok $1A$, če deluje vodnik na $1m$ dolg odsek drugega vodnika s silo $2 \cdot 10^{-7}N$. Amper je osnovna enota. Masa izločene snovi pri elektrolizi narašča sorazmerno s časom, ta in drugi pojavi namigujejo, da se vpelje količino, ki je produkt električnega toka in časa

$$e = It$$

električni naboj. Ne stacionaren tok $I = \frac{de}{dt}$. Tok merimo z ampermetrom. Če med izbranima presekoma električnega kroga ni izvirov ali ponorov, je v stacionarnem primeru tok skoziprvi presek enak toku skozi drugega, velja kontinuitetna enačba.

Električni tok v kovinah: v mikroskopski sliki se po vodniku gibljejo električni naboji. V kovinah so to elektroni, v polprevodnikih elektroni in vrzeli, v ionskih prevodnikih pa ioni.

Ker so v splošnem gibljivi nosilci naboja pozitivno ali negativno nabiti, predpostavimo, da je v vodniku število gibljivih nosilcev naboja na enoto prostornine n, njihov naboj e, hitrost pa v. Presek vodnika je S. V času dt steče skozi presek naboj $de = enSvdt$, čemur ustreza tok $I = \frac{de}{dt} = enSv$. V resnici ni to edino gibanje, zato je v enačbi za tok v resnici povprečna hitrost $\langle v \rangle$ v smeri toka. Stalna napetost vzdolž vodnika pomeni, da je vzdolž vodnika stalna električna poljska jakost $E = \frac{U}{l}$ (pri stalnem preseku). Nespremenljiva napetost pomeni, da je povprečna hitrost gibljivih nosilcev naboja stalna. Na nosilce naboja deluje v nasprotni smeri upor, ki je po velikosti enak sili eE. Podvojimo napetost, se podvoji sila. Podvoji se hitrost in električni tok, torej velja linearni zakon upora. $\langle v \rangle = \mu \mathbf{F}$, kjer je μ gibljivost nosilcev naboja in je povezana s trki nosilcev, ki so posledica napak v kristalni strukturi.

Ohmov zakon: napetost je sorazmerna s tokom, če poskrbimo da je temperatura vodnika konstantna, velja

$$U = RI$$

Upor je enak $R = \frac{1}{ne^2\mu S} = \xi \frac{l}{S}$, kjer je ξ specifični upor. Sorazmernostni koeficient R ima enoto $1\Omega = 1\frac{V}{A}$ ohm. Gonilna napetost generatorja U je enaka padcu napetosti RI na vodniku $U + U_R = 0$.

Kirchoffova izreka: za sklenjen krog s tokom velja kontinuitetna enačba. Za razvejišče, v katero priteka in iz katerega odteka več tokov velja, da je vsota veh pritekajočih tokov enaka vsoti odtekajočih

$$\sum_k I'_k = \sum_j I_j$$

To je prvi Kirchhoffov izrek. Generator poganja tok po porabniku, njegova napetost U je gonilna ali generatorska napetost. Napetost na porabniku U' je padec napetosti. Za vsak sklenjen električni krog, tudi tiste ki so del večjega kroga, velja da je vsota vseh gonilnih napetosti enaka vsoti vseh padcev napetosti

$$\sum_k U_k = \sum_j U'_j$$

To je drugi Kirchhoffov izrek. Napetost na generatorju je gonilna le, če teče skozenj tok v smeri, v katero bi potiskal generator, či bi bil sam priključen na porabnik. Generator imamo za padec napetosti, če teče v nasprotni smeri. Napetost na porabniku imamo za padec, če gremo pri obhodu skozi v smeri toka, obratno imamo napetost za gonilno.
Napetost je sorazmernostni koeficient med delom in pretečenim nabojem $A = eU$, z enoto $[\frac{J}{As}] = [V]$. $A = \int U de$ in moč je $P = \frac{dA}{dt} = U\frac{de}{dt} = UI$

Časovno odvisen električni tok: stacionarni tok je enosmerni tok. Izmenični tok je vsak tok, ki spreminja smer, ponavadi sinusno. Zapišemo ga $I = I_0 \cos(\omega t)$, I_0 je amplituda toka in $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ frekvenca. Gonilna napetost na istem porabniku niha s tokom z enako frekvenco, vendar ne nujno sočasno. Dodamo fazni premik δ. Zapišemo $I = I_0 \cos(\omega t)$ in $U = U_0 \cos(\omega t + \delta)$. Napetost prehiteva v tem primeru tok v fazi za δ in v času za $\frac{\delta}{\omega}$. Porabnik, po katerem teče stacionarni tok dobiva od generatorja moč $P = UI$. Ta enačba določa trenutno moč pri izmeničnem toku $P(t) = U(t)I(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \delta)\cos(\omega t)$. Povprečna moč je $\overline{P} = T^{-1}\int\limits_0^T P(t)dt$, kjer je T mnogokratnik nihajnega časa, ali pa zelo dolg čas. Dobimo $\overline{P} = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos(\delta)$. Velja Ohmov zakon $U(t) = RI(t)$. Tok in napetost na uporniku nihata sočasno,

fazni premik je enak nič, kar pomeni za povprečno moč $\overline{P} = \frac{1}{2}U_0I_0 = avgP = \frac{1}{2}RI_0^2avgP = \frac{1}{2}\frac{U^2}{R}$, ki jo dobiva in ki jo oddaja okolici kot Joulov toplotni tok, če je temperatura konstantna. Isti toplotni tok bi oddajal upornik, če bi skozenj tekel stacionarni tok $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ in na njem konstantna napetost $U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, tako bi bila $\overline{P} = U_{ef}I_{ef}$.
Primer časovno odvisnega toka je tudi polnjenje in praznjenje kondenzatorja ter polnjenje in praznjenje tuljave.

3.4 4. Magnetno polje trajnih magnetov in električnega toka. Gostota magnetnega polja. Sile in navori v magnetnem polju. Magnetni pretok. Amperov zakon in Biot-Savartov zakon.

Magnetno polje trajnih magnetov in električnega toka: trajni magneti in vodniki s stacionarnim tokom delujejo s silo ali z navorom na druge trajne magnete in vodnike. Spremenijo prostor okoli sebe v magnetno polje, ki deluje z magnetno silo ali magnetnim navorom. Paličast magnet ima pola. Pol, ki je obrnjen proti severu je severni pol (N) in pol, ki je obrnjen proti jugu, južni pol (S). Nasprotna pola se privlačita. Zemlja je velik magnet, ki ima v bližini severnega geografskega pola južni magnetni pol. Smer magnetnega polja definiriamo z magnetnico, v vsaki točki polja je določena z vrtljivim paličastim magnetom, takšno lomljeno črto nadomestimo z gladko krivuljo oziroma magnetno silnico. Paličasti magnet je magnetni dipol. Vsak trajni magnet ima parno število polov, v naravi ni monopolov. Silnice med poloma podkvastega magneta so sredi reže deli vzporednih premic in so enakomerno goste, če je reža dovolj ozka. V magnetnem polju ravnega vonika so silnice kocentrični krogi, smer je določena s svedrskim pravilom, glede na smer toka. Raven vodnik zvijemo v vijačnico in dobimo tuljavo (solenoid). V tuljavi je homogeno magnetno polje, s smerjo geometrijske osi. Zunanje polje se vede podobno kot pri dipolu. Tuljavo zvijemo v svitek in dobimo toroid. Ker monopoli ne obstajajo, magnetno polje nima izvirov. Silnice so sklenjene.

Gostota magnetnega polja: določa magnetno polje, določa magnetno silo v pravokotnem polju na ravni vodnik. Koeficient B z enoto $[1\frac{N}{Am} = 1\frac{Vs}{m^2} = 1T], [1gauss = 10^{-4}]$. Gostoti magnetnega polja priredimo vektor $\mathbf{B}$, ki ima smer magnetnega polja.

Sile in navori v magnetnem polju: po ravnem vodniku dolžine l teče tok I. Magnetna sila na vodnik je $F = IlB$. Magnetna sila na vodnik je odvisna od kota φ med smerjo magnetnega polja in smerjo toka. Torej velja

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

kjer je $\mathbf{l}$ vektor s smerjo električnega toka in velikostjo dolžine vodnika v polju.
Rezultanta magnetnih sil, ki delujejo v homogenem magnetnem polju na sklenjen električni krog iz togega vodnika, je enaka nič. To ne velja za rezultanto navorov. Postavimo ovoj s stranicama a in b ter tokom I v homogeno magnetno polje tako, da je smer polja pravokotna na ravnino ovoja. Na nasprotni stranici ovoja delujeta nasprotni magnetni sili na isti premici, rezultante sil ter navorov so enake nič. Nato postavimo zanko tako, da je b vzporedna s smerjo polja. Na stranici b ne deluje sila, na stranici a pa delujeta nasprotni sili $F = IaB$, pravokotno na ravnino ovoja. Rezultanta sil je nič, rezultanta navorov pa ne, saj sta za b narazen. Sili sestavljata dvojico z navorom $M = bF = IabB = ISB$, ki ni odvisen od izbire osi. Navor vrti okoli osi, ki je vzporedna stranicama a in pravokotna na smer magnetnega polja. Enačba velja za poljuben ravninski ovoj. Rezultat je tudi uporaben za togo tuljavo z N ovoji. Potrebno je sešteti navore za posamezne ovoje, ki imajo vsi enako smer. Navor je enak nič, če je gostota

magnetnega polja vzporedna z geometrijsko osjo. Navor je $M = NISB$, za geometrijsko os pravokotno na magnetno polje.
Sorazmernostni koeficient med magnetnim navorom in gostoto magnetnega polja vpeljemo kot magnetni dipolni moment p_m z enoto $[Am^2]$. Prepišemo navor na tuljavo $M = p_m B$, oziroma $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$. Za tuljavo velja $\mathbf{p}_m = NI\mathbf{S}$. Navor pri zasuku iz φ' v φ opravi delo $A' = \int_{\varphi'}^{\varphi} M d\phi = p_m B \int_{\varphi'}^{\varphi} \sin(\phi) d\phi = -p_m B \cos(\varphi) - (-p_m B \cos(\varphi'))$. Odvisno je samo od začetne in končne lege, zato lahko vpeljemo energijo magnetnega dipola $W_{mp} = -p_m B \cos(\varphi)$, $A = W_{mp} - W'_{mp}$.

Magnetni pretok: skozi dan presek cevi silnic $\phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$. Integriramo po vsem preseku, enota za magnetni pretok je $[Tm^2 = Vs = Wb(veber)]$. Zakon o magnetnem pretoku skozi zaprto ploskev je

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

V nobenem magnetnem polju ne izvira iz kake zaprte ploskve več silnic, kot se jih vanjo steka. Magnetni pretok skozi vse preseke izbrane cevi je konstanten, $\phi' = \phi$. Na to mislimo, ko pravimo, da je magnetni pretok sklenjen.

Amperov in Biot-Savartov zakon: gostota magnetnega polja dolgega ravnega vodnika je obratno sorazmerna z razdaljo od vodnika. Gostota magnetnega polja je sorazmerna s tokom, saj ko dva vzporedna vodnika z enakim tokom v isti smeri sestavimo skupaj dobimo tok $2I$, in enako se podvoji sila, saj delujeta v isti smeri. Torej $B = \frac{konst.I}{r}$. Konstanto določimo s definicijo ampera. Prvi ravni vodnik s I_1 ima na razdalji r magnetno polje $B_1 = konst.\frac{I_1}{r}$ v tangenti smeri. Drugi ravni vodnik z I_2 je pravokoten na to magnetno polje. Na njegov odesk l deluje magnetno polje s $F = I_2 l B = \frac{konst.I_1 I_2 l}{r}$. Sila je privlačna če tečeta tokova v isto smer. Ko teče $1A$, deluje na $1m$ odsek drugega vodnika sila $2 \cdot 10^{-7}$. Tako je gostota magnetnega polja v dolgem vodniku popolnoma določena. izračunamo krivuljni integral po sklenjeni silnici, po krogu s radijem r,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r = \frac{konst.I}{r} 2\pi r = 2\pi konst.I$$

Enačbo poenostavimo, če izrazimo gostoto magnetnega polja z jakostjo magnetnega polja

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Kjer je $\mu_0 = 2\pi konst. = 4\pi \cdot 10^{-7}$ indukcijska konstanta z enoto $[\frac{Vs}{Am}]$. Gostoti električnega polja $\mathbf{D}$ ustreza gostota magnetnega polja. Tako ustreza električni napetosti po sklenjeni poti $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s}$, magnetna napetost $\oint \mathbf{H} d\mathbf{s}$ z enoto A. Krivuljni integral jakosti magnetnega polja ali magnetna napetost po sklenjeni silnici v polju dolgega ravnega vodnika s tokom, je enak objetemu toku $\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = I$, kar je izrek o magnetni napetosti. Potrebno je vpeljati premikalni tok, da ohranimo veljavnost kontinuitetne enačbe $I = \int \frac{d\mathbf{D}}{dt} d\mathbf{S}$, premikalni tok je enakovreden toku nosilcev naboja. V primeru, da objame sklenjena pot poleg toka nosilcev naboja tudi spremenljivo električno polje, je magnetna napetost po sklenjeni poti

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = I + \int \frac{d\mathbf{D}}{dt} d\mathbf{S}$$

To je zakon o magnetni napetosti oziroma Amperov zakon, ki velja popolnoma splošno.

Če vodnik s tokom nima posebne oblike kot toroid ($\oint \mathbf{H}d\mathbf{s} = H2\pi r = NI$ torej $H = \frac{NI}{H2\pi}$) ali pa dolga tuljava ($H = \frac{NI}{l}$, kjer je približek ta da je l mnogo večji od $2r$ in s tem notranje polje homogeno, upoštevamo samo prispevek notranjosti.), si z izrekom o magnetni napetosti ne moremo pomagati. Jakost magnetnega polja poljubnega vodnika s tokom moramo izračunati iz Biot-Savartove enačbe

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\int \mathbf{r} \times d\mathbf{l}\frac{1}{r^3}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor do kratkega odseka vodnika z dolžino dl, vekotr $d\mathbf{l}$ pa ima smer toka. Velikost jakosti magnetnega polja pa je $H = \frac{I}{4\pi}\int \frac{dl \sin(\varphi)}{r^2}$

3.5 5. Indukcija, lastna indukcija, tuljava. Energija magnetnega polja. Snov v magnetnem polju, feromagnetne snovi.

Indukcija: magnetni pretok skozi ravninski ovoj v homogenem magnetnem polju je $\phi = \mathbf{BS} = BS\cos(\varphi) = \mu_0 HS\cos(\varphi)$, φ je kot med smerjo magnetnega polja in pravokotnico na ravnino ovoja. Za tuljavo velja $\phi = N\mathbf{BS} = NBS\cos(\varphi) = \mu_0 NHS\cos(\varphi)$, kot je glede na geometrijsko os. Razlikujemo dve možnosti, pri prvi nastane magnetni preok zaradi lastnega magnetnega polja tuljave $\phi = NBS = \mu_0 NHS$ in se smer polja vedno ujema z geometrijsko osjo. Vstavimo $H = \frac{NI}{l}$ in dobimo lastni magnetni pretok za tuljavo $\phi = \frac{\mu_0 N^2 SI}{l}$. Ta magnetni pretok je sorazmeren s tokom in lahko zapišemo $\phi = LI$, kjer je sorazmernostni koeficient $L = \frac{\phi}{I}$ z enoto $[\frac{Vs}{A}]$, induktivnost. V splošnem je lastni magnetni pretok sorazmeren z električnim tokom. Induktivnost tuljave je $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, toroida pa $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r}$. Induktivnost dolgega koaksialnega vodnika, ki ima žilo z radijem r' in plašč z notranjim radijem R. Po vsem preseku žile teče enakomerno porazdeljen tok, in se po preseku plašča enako velik, enakomerno porazdeljen tok. Med žilo in plaščem je magnetno polje s kocentričnimi silnicami z jakostjo $H = \frac{I}{2\pi r}$, magnetni pretok za dolžnio l je $\phi = \mu_0 \int HdS = \frac{Il\mu_0 \ln\frac{R}{r'}}{2\pi}$, induktivnost je $L = \frac{l\mu_0 \ln\frac{R}{r'}}{2\pi}$.
Statično električno polje povzročajo mirujoči naboji, statično magnetno polje pa stacionarni tokovi. Razlikujeta se po tem, da v statičnem primeru električnega polja naboji mirujejo, pri statičnem magnetnem polju pa ne. Tako lahko pri kvazistatičnih spremembah električnega polja prezremo magnetno, obratno pa ne.
Tok, ki ga po vodniku v magnetnem polju požene generator, povzroči magnetno silo na vodnik. Ta sila lahko opravi delo, če se vodnik premakne. Energijski zakon zagotavlja, da obstaja obraten pojav. Torej premik vodnika po magnetnem polju povzroči tok po sklenjenem krogu, pri tem opravi delo zunanja sila. To je indukcija in tok induciran tok.
V homogenem magnetnem polju z gostoto B, v ravnini pravokotni na smer polja, krog iz debelih bakrenih vondikov. Na mirujoč del je priključen voltmeter. Po tem delu drsi prečka, pravokotna na B, z dolžino l. Prečko moramo potiskati s F', da se giblje s konstantno hitrostjo v v smeri pravokotno na B in prečko. Takrat je vsota zunanjih sil nič. Zunanjo silo uravnovesi magnetna sila $F = IlB$. F' opravi v dt delo $dA' = F'ds = F'vdt$. Energija sistema kamor štejemo krog brez voltmetra, se ne spremeni. Ohrani se magnetno polje. Majhen tok po vodniku pomeni, da je v njih razvita Joulova toplota zanemraljiva, zanemarimo tudi delo sile trenja. Ko se vzpostavjo stacionarne razmere, oddaja sistem prejeto delo voltmetrum, ki ima mnogo večji upor kot vodniki. Voltmeter kaže napetost U_i in prejme $dA = U_i I dt$. To oddaja okolici kot Joulovo toploto. Tako je delo, ki ga opravi sila na prečki enaka delu, ki ga prejme voltmeter, saj ostane energija sistema nespremenjena. Velja $dA = dA'$ in $U_i I dt = F'vdt$. Zunanja sila F' je enako velika kot magnetna sila, zato je inducirana napetost $U_i = \frac{Fv}{I} = \frac{IlBv}{I} = lvB$.

Lenzovo pravilo pove, da inducirana napetost požene induciran tok tako, da magnetna sila na induciran tok nasprotuje zunanji sili, magnetna sila na induciran tok se upira gibanju. Inducirana napetost ni vezana na sklenjen krog. Lahko nastane inducirana napetost, samo ta napetost ne požene toka, če krog ni sklenjen. Tako je Lenzovo pravilo, inducirana napetost je obrnjena tako, da bi se magnetna sila na tok, ki bi ga pognala napetost, upirala zunanji sili.
V splošnem je induciana napetost

$$U_i = \mathbf{v}(\mathbf{B} \times \mathbf{l})$$

Še splošnejše za nehomogeno magnetno polje pa velja

$$U_i = \int \mathbf{v}(\mathbf{B} \times d\mathbf{l})$$

Velja tudi $U_i = lvB = \frac{lBds}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$.

Lastna indukcija: se pojavi, ko se tok spreminja s časom. Splošno velja indukcijski (Faradayev) zakon $U_i = \frac{d\phi}{dt}$, kar integriramo v $\int U_i dt = \phi - \phi'$. Gostoto magnetnega polja lahko merimo preko tuljavice, ki jo damo v polje, da nastane magnetni pretok ϕ, $B = \frac{\phi - 0}{NS} = \int \frac{U_i dt}{NS}$, če je geometrijska os tuljavice v smeri polja. Vemo da je napetost po sklenjeni poti različna od nič, če nastopa spremenljivo magnetno polje, v statičnem elekrtičnem polju pa je enaka nič. Izrek o električni napetosti po sklenjeni poti je torej le poseben primer indukcijskega zakona in velja, če ni spremenljivega magnetnega polja. V $U_i = -\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{d\phi}{dt}$ vstavimo $\phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$, dobimo

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} d\mathbf{S}$$

Na levi strani integriramo po sklenjeni krivulji, ki omejuje integracijsko polje desnega integrala. Dobimo indukcijski zakon.

Tuljava: ali solenoid je elektronski element, keterega značilnost je induktivnost. Dobimo jo, če zvijemo raven vodnik v vijačnico. Če so ovoji tuljave dovolj gosti so silnice deli vzporednih premic in so enakomerno goste. Enosmerni električni tok ustvari v navitju magnento polje. Spremenljiv otok povzroči samoindukcijo, ki generira električno napetost, ki požene nasproti vzroku. Tuljava nasprotuje hitrim spremembam toka. Velja $\phi = NBS$, $L = \frac{N^2 \mu_0 S}{l}$ in $U_L = -L\frac{dI}{dt}$. Dve tuljavi sestavimo tako da imata skupno geometrijsko os, se v manjši inducira izmenična napetost, če teče skozi veliko tuljavo izmenični tok in ustvarja v njej izmenično magnetno polje. To izkorišča transformator, sestavljen iz primarne in sekundarne tuljave. Dodamo jedro in povečamo magnetni pretok ter dosežemo, da je pretok skozi tuljavi sklenjen.

Energija magnetnega polja: tuljava po kateri teče tok, lahko za kratek čas vzdržuje tok skozi upornik. Delo, ki ga pri tem odda, je prejela od generatorja. Med naraščanjem toka, tuljava prejme

$$A = \int U de = -\int U_L I dt = L \int_{I'}^{I} I dI = \frac{1}{2} L I^2 - \frac{1}{2} L I'^2$$

saj je $-U_L dt = L dI$. Prejeto delo ni odvisno od tega kako narašča tok po tuljavi. Uvedemo magnetno energijo tuljave $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$ in velja $A = W_m - W_m'$. Tuljava lahko povrne vso dovedeno delo, magnetna energija je zaloga dela. To energijo lahko vzporedimo s kinetično, induktivnosti ustreza masa in toku hitrost. Vstavimo $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ in dobimo $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 S l (\frac{NI}{l})^2$, kjer je $H = \frac{NI}{l}$ jakost magnetnega polja v tuljavi in $Sl = V$ volumen tuljave. Gostota magnetnege energije je $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}HB$. Ta enačba velja v vsakem magnetnem polju

Snov v magnetnem polju, feromagnetne snovi: spremembe merimo tako, da okoli snovi navijemo toroid, med ovoje toroida in svitka vrinemo tuljavo Rogowskega s katero merimo. Predpostavimo, da snov popolnoma zapolnjuje prostor. Pri ploskem svitku računamo, da je jakost polja po preseku svitka S enaka $H = \frac{NI}{2\pi\overline{r}}$, kjer je $\overline{r}$ povprečni radij svitka. Gostoto magnetnega polja v svitku izmerimo neodvisno od jakosti magnetnega polja z indukcijo. Na toroidu je merilna napravica z N_1 ovoji. Presek tuljavice jeenak preseku svitka S. Hitro spremenimo tok v toroidu od I' na I. Spremeni se jakost magnetnega polja $H - H' = \frac{N(I-I')}{2\pi\overline{r}}$. Sprememba magnetnega pretoka v tuljavici je $\phi - \phi' = N_1 S(B - B')$. Po indukcijskem zakonu je sunek inducirane napetosti $\int U_1 dt = \phi - \phi' = N_1 S(B - B')$, torej je sprememba gostote magnetnega polja $B - B' = \frac{1}{N_1 S}\int U_1 dt$. Za snovi z izjemo železa, kobalta, niklja in nekaterih zlitin ter spojin, se izkaže da je sprememba $B - B'$ sorazmerna s spremembo toka $I - I'$ in tudi s spremembo jakosti magnetnega polja. Zato smemo pri poskusih začeti brez polja in toka. Ko nista gostota in jakost v vakuumu velja zveza

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$$

kjer je μ permeabilnost, ki meri razmerje med gostoto magnetnega polja B v snovi in ustrezno gostoto v vakuumu. Koeficient ni odvisen od jakosti magnetnega polja. Snovi, ki imajo permeabilnost večjo kot ena so paramagnetne, manjšo kot ena pa diamagnetne. Vakuum je enak 1. Velja tudi $L = \mu L_0$. Enako velja $w_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2$. Prej izvzete snovi (železo, nikelj...) so feromagnetne in se izkaže iz meritev, da gostota magnetnega polja ni sorazmerna z jakostjo magnetnega polja. Merimo drugače, iz 0 povečamo tok na dI in potem na $2dI$ in tako dalje. Jakost se spremeni iz 0 na dH na $2dH\ldots$ in je $dH = \frac{NdI}{2\pi\overline{r}}$. Dobimo sunke inducirane napetosti $(Udt)_1$, $(Udt)_2\ldots$ ki med seboj niso enaki. Ustrezne spremembe gostote magnetnega polja so $(dB)_1 = \frac{(Udt)_1}{N_1 S}$, $(dB)_2 = \frac{(Udt)_2}{N_1 S}\ldots$ Definiramo diferencialno permeabilnost $\mu_1 = \frac{(dB)_1)}{\mu_0 dH}$, $\mu_2 = \frac{(dB)_2)}{\mu_0 dH}\ldots$ v splošnem $\mu = \frac{dB}{\mu_0 dH}$. Diferencialna sprememba permeabilnosti je odvisna od spremembe jakosti magnetnega polja. Definiramo povprečno permeabilnost $\overline{\mu} = \frac{B}{\mu_0 H}$. Z merjenjem B in H pridemo do magnetilne krivulje $B(H)$. Pri veliki jakosti postanejo vse krivulje položne, to je območje nasičenja. Strmina krivulje deljena s μ_0 poda pri določenem H permeabilnost.
Gostota magnetnega polja je pri zmanjševanju drugače odvisna od jakosti kkot pri naraščanju. Tako gostota magnetnega polja v feromagnetni snovi ni enolično določena z jakostjo magnetnega polja, ampak je tudi odvisna še od tega, kaj se je dogajalo prej s snovjo. Gostota ne pade na nič ko pade na nič jakost, takrat je enaka remanentni gostoti B_r. Gostoto nič dosežemo, ko je jakost enaka koercitivni jakosti H_k. Dobimo histerezno krivuljo. Obstajajo feroelektrične snovi, ki ustrezajo feromagnetnim. Navadne dielektrične bi lahko imenovali paraelektrične. Pri feroelektričnih snoveh gostota električnega polja ni sorazmerna z jakostjo. Podobno lahko definiramo diferencialno dielektričnost $\varepsilon(E) = \frac{dD}{\varepsilon dE}$ in povprečno dielektričnost.
Gostota magnetnega polja v snovi postavljeni v magnetno polje je veliko večja od gostote magnetnega polja zunaj te snovi.
Delo pri magnetenju

$$A = -\int U_L I dt = \int U_i I dt = \int \frac{d\phi}{dt} I dt = \int I d\phi = \int_{B'}^{B} INS dB = Sl \int_{B'}^{B} \frac{IN}{l} dB = V \int_{B'}^{B} H dB$$

Delo pri krožni spremembi je različno od nič $A = V\oint HdB = V\oint BdH$. Nazorno je delo na enoto prostornine pri krožni spremembi enako ploščini histerezne krivulje.
Zaradi elektronov, ki se gibljejo po snovi, se vedejo atomi in molekule v zunanjem magnetnem polju podobno kot ovoji s tokom. Obravnavamo jih kot navadne sklenjene električne kroge. Magnetni moment ovoja s tokom je pravokoten na ovoj. V snovi, ki ni v zunanjem magnetnem polju, kažejo magnetni momenti enakomerno v vse smeri. Povprečen magnetni moment je enak nič. V zunanjem polju pa se ovoji uredijo, tako da jih večina kaže v smeri polja, zato je prispevek ovojev s tokom k magnetnemu polju različen od nič. Magnetni moment prostorninske enote snovi v zunanjem magnetnem polju je $M = n\langle p_{m1}\rangle$, n je gostota atomov ali moleku, $\langle p_{m1}\rangle$ pa povprečna vrednost komponente magnetnega momenta molekule v smeri zunanjega polja. To količino z enoto $[\frac{Am^2}{m^3} = \frac{A}{m}]$ vpeljemo kot magnetizacijo. Je odvisna od zunanjega polja.
V ravninah se učinki tokov izravnavajo, le na plašču valja nimajo sosedov, ki bi izravnali učinek njihovih tokov. Preostane površinski tok I_M v smeri pravokotno na zunanje magnetno polje. Opis s površinskim tokom je enakovreden opisu s permeabilnostjo, $I_M = Ml$. Če se odločimo za tak opis, uporabimo izrek o magnetni napetosti za sklenjeno pot v obliki ploskega pravokotnika s stranico l. Naj zajame ovoje tuljave in površino valja, z eno osnovnico tik pod površino druga pa zunaj valja. Tako zajame samo tokove v ovojih. K objetemu toku prispevata tok I po N ovojih tuljave IN in površinski tok I_M. K magnetni napetosti prispeva $\frac{Bl}{\mu_0}$, drugi del pa teče izven magnetnega polja. Tako je $NI + I_M = \frac{Bl}{\mu_0}$. Za površinski tok postavimo Ml, za NI pa $\frac{B_0 l}{\mu_0}$ in za gostoto magnetnega polja v snovi $B = \mu B_0$, dobimo $\frac{B_0 l}{\mu_0} + Ml = \mu\frac{B_0 l}{\mu_0}$. In končno magnetizacijo $M = (\mu - 1)\frac{B_0}{\mu_0} = \chi\frac{B_0}{\mu_0}$, kjer je χ magnetna susceptibilnost. Susceptibilnost je obratno sorazmerna s temperaturo (Curiejev zakon). Magnetni momenti znotraj feromagnetne snovi se spontano uredijo in so urejeni tudi zunaj polja. Feromagnetno jedro v tuljavi poveča induktivnost.

3.6 6. Izmenični tok. Impedanca. Efektivna napetost in tok. Električni nihajni krog.

Izmenični tok: v splošnem je to vsak tok, ki spreminja smer. Ponavadi mislimo sinusni tok, $I = I_0 \cos(\omega t)$. Gonilna napetos na istem porabniku niha z enako frekvenco ampak lahko se zgodi, da ne sočasno torej velja $U = U_0 \cos(\omega t + \delta)$. Skozi kondenzator, ki je priključen na konstantno napetost ne teče tok. V njem je neprevodna plast, ki ne prevaja toka in ima za enosmerni tok neskončen upor. Drugače je z izemničnim tokom. Priključimo ga na napetost $U = U_0 \cos(\omega t + \delta)$. Iz zvez $U + U_C = 0$ in $\frac{dU}{dt} - \frac{I}{C} = 0$ razberemo, da teče skozi kondenzator tok $I = C\frac{dU}{dt} = -\omega C U_0 \sin\omega t$. Velja $I_0 = \omega C U_0$ in vpeljemo fazni premik $\delta = -\frac{1}{2}\pi$. Tako imamo $I = I_0 \cos(\omega t)$ in $U = U_0 \sin\omega t$. Tak kondezator rabi povprečno moč $\overline{P} = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos(\delta) = 0$. Velja $U_{ef} = Z I_{ef}$, kjer je Z impedanca. Tok in napetost nihata na uporniku istočasno. Pri kondenzatorju tok prehiteva za $\frac{\pi}{2}$, $I_0 = \omega C U_0$, pri tuljavi tok zaostaja za $\frac{\pi}{2}$, $L_0 = \frac{U_0}{\omega L}$.

Impedanca: kompleksna količina, omogoča da imamo amplitudo in fazo kot eno količino. Deluje kot nekakšen kompleksen upor. Meri koliko se porabnik upira električnemu toku, če nanj priključimo napetost. Je kompleksna prezentacija sinusnega valovanja. V splošnem je impedanca razmerje $\frac{U_0}{I_0} = \frac{I_{ef}}{U_{ef}}$. V primeru upora $\frac{U_0}{I_0} = R$. Impedanca kondenzatorja se imenuje tudi reaktanca $X_C = \frac{1}{\omega C}$.
Na vir izmenične napetosti priključimo zaporedno vezana upornik in kondenzator. Mejna primera sta $R >> \frac{1}{\omega C}$ in določa razmere v vezju upornik $I = \frac{U_0}{R}\sin\omega t$. Drugi mejni primer $R << \omega C$, kjer določa razmere v vezju kondenzator $I = U_0\omega C \cos(\omega t) = U_0 \omega C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. V

splošnem pričakujemo zvezo $I = \frac{U_0}{Z}\sin(\omega t + \delta)$. Zapišemo drugi Kirchhoffov izrek $IR + \frac{e}{C} = R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = U_0 \sin \omega t$. Zanima nas stacionarne razmere, zato po vključitvi počakamo nekaj značilnih časov $\tau = RC$. V stacionarnih razmerah tok, napetost in naboj nihajo s krožno frekvenco ω. Vpeljemo kompleksni naboj $\tilde{e}$, $R\frac{d\tilde{e}}{dt} + \frac{\tilde{e}}{C} = U_0 e^{i\omega t}$. Imaginarni del te enačbe je originalna enačba. Odvajamo po času in dobimo enačbo za kompleksni tok $R\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{\tilde{I}}{C} = i\omega U_0 e^{i\omega t}$. Tako imamo $I = Im(\tilde{I})$. Rešitev enačbe $\tilde{I}$ iščemo z $\tilde{I} = Ae^{i\omega t}$, kjer je A splošna kompleksna konstanta. Vstavimo v enačbo in dobimo nastavek $A = \frac{U_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} e^{i\delta} = \frac{U_0}{Z} e^{i\delta}$. Tu je $Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + X_C{}^2}$ impedanca vezja, fazni kot pa je podan z enačbo $tg\delta = \frac{1}{\omega RC}$. Kompleksni tok je $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{Z} e^{i(\omega t + \delta)}$, tok pa $I = Im(\tilde{I}) = \frac{U_0}{Z}\sin(\omega t + \delta)$. Padec napetosti na uporniku je $U_R = IR = \frac{U_0 R}{Z}\sin(\omega t + \delta)$. Na kondenzatorju pa $U_C = -\frac{U_0 X_C}{Z}\cos(\omega t + \delta)$. Iz tega izhaja račun s kompleksnimi impedancami $\tilde{X_C} = \frac{1}{i\omega C}$, $\tilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$, kompleksna impedanca vezja $\tilde{Z} = R + \tilde{X_C} = R + \frac{1}{i\omega C}$. Tok je $\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}} = \frac{U_0}{Z} e^{i(\omega t + \delta)}$. Impedanca tuljave se imenuje induktanca $\tilde{Z_L} = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\tilde{Z_C} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{i(1 - \frac{\pi}{2})}$. Impedanca zaporedno veznaih členov se seštevajo $Z = Z_1 + Z_2$, vzporedno pa $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$.

Električni nihajni krog: idealni nihajni krog sestavljata tuljava, ki za enosmerni tok nima upora in kondenzator, ki ima neskončen upor za enosmerni tok. Za kratek čas priključimo na kondenzator generator s konstantno napetostjo U_0, in ga odstranimo. Sklenjen krog prepustimo samemu sebi $U_L + U_C = -L\frac{dI}{dt} - \frac{e}{C} = 0$. Odvajamo po času $\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0$. Rešitev te diferencialne enačbe, če začnemo meriti čas v trenutku, ko je tok največji je $I = I_0 \cos(\omega_0 t)$, in lastna krožna frekvenca $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Skupna energija nihajnega kroga je konstantna $W_0 = W_m + W_e = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2$. Na začetku je nabit kondenzator, prva elektroda je pozitivna druga negativna. Vsa energija je v električnem polju kondenzatorja. Deluje kot generator in požene tok po tuljavi od pozitivne elektrode k negativni. Čeprav nima upora tok ne naraste v hipu. Med naraščanjem se v tuljavi inducira napetost, ki poskuša zmanjšati tok. Kondenzator se prazni in na njemu se manjša naboj. Ko je napetost na kondenzatorju nič, teče po tuljavi največji tok in vsa energija v magnetnem polju tuljave. Tok ne preneha teči v hipu, saj se na tuljavi inducira napetost, ki po Lenzovem pravilu skuša vzdrževati tok. Ta tok dovaja na drugo elektrodo pozitivni naboj in negativnega na prvo. Napetost na kondenzatorju narašča, ampak je obrnjena nasprotno. Ponovi se v nasprotni smeri.
Nihajni krog z uporom. Imamo $U_L + U_R + U_C = -L\frac{dI}{dt} - RI - \frac{e}{C} = 0$, odvajamo in dobimo $\frac{d^2I}{dt^2} - 2\beta\frac{dI}{dt} - \omega^2 I = 0$, kjer sta $\beta = \frac{R}{2L}$ in $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Enačbo rešimo z nastavkom $I = I_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0' t)$, kjer je $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Torej se lastna frekvenca nihajnega kroga zmanjšuje z naraščajočim koeficientom dušenja. Pogoj za nihanje je realen ω_0'. V nasprotnem primeru tok ne zaniha, ampak se aperiodično zmanjša na nič. Pri kritičnem dušenju $\beta = \omega_0$ je časeoven potek $I = I_0 e^{-\beta t}(1 + \beta t)$. Napetost pri krogu z majhnim koeficientom dušenja, je $U_C = -U_R - U_L = RI + L\frac{dI}{dt} = I_0 I_0 e^{-\beta t}(\frac{1}{2}R\cos(\omega_0' t) - \omega_0' L \sin\omega_0' t)$. Napetosti ni enaka nič, ko doseže tok relativni maksimum. Skupna energija kroga je $W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU_C^2$. Povprečna energija pojema s časovno konstanto $\frac{1}{2\beta}$, $\overline{W} = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2\beta t}$.
Lahko imamo tudi no nihanje. Poleg vezane tuljave postavimo drugo tuljavo zvezano z generatorjem s sinusno napetostjo. Tako ju induktivno sklopimo. Tok nihajnega kroga ne sme vplivati na tok v krogu z generatorjem, ko to dosežemo, dosežemo šibko sklopitev.

3.7 7. Povezave med električnim in magnetnim poljem. Maxwellske enačbe.

Povezave med električnim in magnetnem poljem: dosedaj smo govorili o električnem in magnetnem polju skoraj da ločeno. Lahko bi ju poimenovali elektrostatika in magnetostatika. V elektrostatiki imamo Coulombov zakon, v magnetostatiki pa Amperov. Prekrivanja so v tehniki in načinu računanja podobnih problemov, ampak ni resnih odvisnosti. To se spremeni, če upoštevamo časovno odvisne fenomene. Zato se uvede pojem elektromagnetizem. Električno polje povzroči že stacionarni naboj, magnetno pa gibajoči se naboj. Statično magnetno polje je brez izvorov, ni prostih magnetnih monopolov, so pa vrtinci. Nasprotno ima statično električno polje izvore v monopolih, nabojih. Spremenljivo magnetno polje povzroči nastanek vrtincev v električnem polju in spremenljivo električno polje povzroči vrtince v magnetnem. Delovanje elektromagnetnega polja na naboj opiše Lorentzova sila, kombinacjia električne in magnetne sile na naboj $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
Obnašanje "feedback-loop-like" elektrmagnetnega polja se lahko razdeli na dele, premikajoči naboj ustvari magnetno in električno polje, ti dve polji interagirata, polji delujeta s silama na delce, naboji se premikajo po prostoru. Interakcija polj je naprimer spreminjajoče električno polje, ki deluje kot tok in ustvari vrtince v magnetnem, Faradeyev zakon kjer spreminjajoče magnetno polje ustvari (negativne) vrtince v električnem in Lenzovo pravilo, ki je v resnici "negative feed back loop" med električnim in magnetnim poljem.

Maxwellske enačbe:

ime	integralska oblika	diferencialna oblika
zakon o električnem pretoku (Gaussov zakon)	$\oint \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int \rho_e dV$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$
zakon o magnetnem pretoku	$\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
zakon o magnetni napetosti (Amperov zakon)	$\oint \mathbf{H}d\mathbf{s} = \int (\mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
indukcijski zakon (Faradayev zakon)	$\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = -\int (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Slika 8: Maxwellske enačbe.

V prvem in drugem zakonu integriramo na levi strani po površini zaprte ploskve. Naboj na desni strani smo izrazili z integralom gostote naboja po prostornini v notranjosti zaprte ploskve $e = \int \rho_e dV$. V tretjem in četrtem zakonu integriramo na levi strani po sklenjeni krivulji, na desni pa po ploskvi, ki jo oklepa ta krivulja. Parcialna odvoda pomenita časovni odvod na danem kraju. V tretjem zakonu smo izrazili tok z integralom gostote toka po ploskvi, ki jo okelpa sklenjena krivulja $I = \int \mathbf{j}_e d\mathbf{S}$.
Simetrija med količinami pride do izraza predvsem v vakuumu, kjer ni električnih nabojev $\rho_e = 0$ in električnih tokov $\mathbf{j}_e = 0$. Med poljema je predcejšna razlika, posebej očitna ko sta statični. Statično magnetno polje je brez izvorov, v naravi ni monopolov, ampak s vrtinci, sklenjene silnice okoli vodnika s tokom. Statično električno polje ima izvire, električne naboje, a nima vrtincev, sklenjenih silnic, vse silnice izvirajo iz nabojev in se vanje stekajo. Spremenljivo magnetno polje povzroči vrtince v električnem in spremenljivo električno jih povzroči v magnetnem.
K osnovnim zakonom je treba dodati zakon o ohranitvi naboja, zapišemo v obliki kontinuitetne enačbe. Iz zaprte ploskve teče v celoti tolikšen tok, za kolikor se zmanjša v časovni enoti naboj

v notranjosti ploskve $I = -\frac{de}{dt}$ oziroma $\oint \mathbf{j}_e d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$. Lahko pridružimo tudi Ohmov zakon $\mathbf{E} = \zeta \mathbf{j}_e$, ki ne velja splošno.

4 Valovanje in optika

4.1 1. Nihanje: periodično gibanje, nihajni čas, frekvenca, sinusno nihanje, amplituda, faza, krožilna frekvenca, sile pri nihanju, nihalo na vijačno vzmet, energija nihanja, dušeno nihanje, sučno nihalo, matematično in fizično nihalo, no nihanje, resonance, sklopljeno nihanje, utripanje

Nihanje: ali oscilacija je vsako periodično gibanje, ponavadi sinusno (harmonično) nihanje, ki se ga opredeli z amplitudo ter frekvenco ali nihajnim časom. Nihanje se pojavi pri odklonu iz stabilne ravnovesne lege. Deli izbranega enostavnega nihala nihajo vsi z enako frekvenco in z enako fazo. Pri premem nihanju, naprimer nihalo na polžasto vzmet, je odmik vseh delov enak. Pri sučnem nihanju, naprimer nitno, težno, na vijačno vzmet, je zasuk za vse dele enak.

Periodično gibanje: gibanje, kjer je odklon oziroma radij vektor po nekem času (nihajnem času) enak $\mathbf{R}(t + t_0) = \mathbf{R}$. Fourierova vrsta omogoča, da vsako periodično funkcijo izrazimo s sinusi.

Nihajni čas ali perioda je čas t_0 v katerem opravi en nihaj.

Frekvenca: število ponavljajočih se dogodkov v časovni enoti, recipročna vrednost nihajnega časa $\nu = \frac{1}{t_0}$. Enostavno niha sinusno (harmonično) z določeno frekvencom, ko ga zanimaho in prepustimo samega sebi (z dovolj majhno amplitudo nitnega in težnega nihala). To je lastno nihanje, in frekvenca lastna frekvenca ν_0 ter lastni nihajni čas $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$.

Sinusno nihanje: enačba za premo sinusno nihanje velja

$$s = s_0 \cos(\omega t + \delta) = s_1 \cos(\omega_0 t) + s_2 \cos(\omega_0 t)$$

Zamenjamo odmik s z zasukom φ, hitrost v z kotno hitrostjo ω, in pospešek a s kotnim pospeškom α. Sinusno nihanje je rešitev enačbe $\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$ (nedušeno nihanje).

Amplituda: s je odmik, s_0 pa je največji odmik oziroma amplituda.

Faza: je $(\omega t + \delta)$.

Krožilna frekvenca: je $\omega = 2\pi\nu$. Lastna krožilna frekvenca nitnega nihala je $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, težnega nihala $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr_n^*}{J}}$, nihala na vijačno vzmet $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ in na polžasto $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$.

Sile pri nihanju: dodatna zunanja sila ali navor opravi delo, ko premakne nihalo iz ravnovesne lege. Ponavadi imamo opravka z diferencialno enačbo drugega reda oblike $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (ko je situacija preprosta).

Nihalo na vijačno vzmet: vzmet lahko postavimo vodoravno ali navpično. Za vodoravno vzmet zapišemo enačbo nihanja $ma = -kx$, oziroma $m\ddot{x} + kx = 0$, katere rešitev je $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$ in $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Za navpično postavljeno vzmet pa $m\ddot{x} + kx - mg = 0$.

Energija nihanja: po tem ko sila oziroma navor izmakne iz ravnovesne lege zaniha. Prepuščeno je samo sebi in je delu zunanjih sil razen teže enako nič, odmislimo delo upora. Velja izrek

o ohranitvi polne energije. Del polne energije, ki je odvisen od nihajočih količin, imenujemo energija nihanja.
Za vijačno vzmet, ki niha vodoravno, se sestavljeno iz kinetične in prožnostne energije $W_0 = W_k + W_{pr} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2$. Nihalo, ki sinusno niha ima $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)$ in $W_{pr} = \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}ks_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$. Vsota kinetične in prožnostne energije je konstanta. Navpična vzmet se podaljša za $s_1 = \frac{mg}{k}$, ko obesimo nanjo maso m. Za amplitude manjše od s_1 je polna energija $W_k + W_p + W_{pr} = W_k + mgs + \frac{1}{2}k(s - s_1)^2 = W_k \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}ks_1^2$. Srednji člen $2\frac{1}{2}kss_1$ izravnava potencialno energijo. Energija nihanja je $W_0 = W_k + W_p + W_{pr} - \frac{1}{2}ks_1^2 = W_k + \frac{1}{2}ks^2$.
Pri nitnem nihalu je energija sestavljena iz kinetične $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)$ in potencialne energije $W_p = mgz = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos(\varphi))$.
Za težno nihalo je kinetilna energija $W_k = \frac{1}{2}J(2\pi\nu_0)^2\varphi_0^2 \sin^2(2\pi\nu_0 t + \delta)$, potencialna pa $W_p = \frac{1}{2}mgr^*\varphi_0^2 \cos^2(2\pi\nu_0 t + \delta)$. Lastna frekvenca je $\nu_0 = \frac{\sqrt{\frac{mgr^*}{J}}}{2\pi}$.
Nihalo na polžasto vzmet ima enako kinetično energijo mizice kot težno nihalo. Prožnostna energija vzmeti pa je $W_{pr} = \frac{1}{2}D\varphi_0^2 \cos^2(2\pi\nu_0 t + \delta)$.

Dušeno nihanje: zaradi negativnega dela upora, se energija nihanja s časom manjša. Pogosto je izguba energije v časovni enoti, torej moč upora, sorazmerna z energijo nihanja $-\frac{dW}{dt} = 2\beta W$. Enačbo preuredimo v in integriramo od začetne energije ob čsau nič do energije ob času t, $\int\limits_{W_0}^{W} \frac{dW}{W} = -2\int\limits_0^t \beta dt$ in dobimo $\ln\frac{W}{W_0} = -2\beta t$ oziroma $W = W_0 e^{-2\beta t}$. Energija nihanja se s časom eksponentno manjša. Energija nihanja je sorazmerna z kvadratom amplitude, in se torej tudi amplituda eksponentno manjša $s_0 e^{-\beta t}$. Dušeno nihanje opiše torej enačba $s = s_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0' t)$. O nihanju je smiselno govoriti ko je čas$\frac{2\pi}{\omega_0} << \frac{1}{\beta}$.
β je koeficient dušenja, $\frac{1}{\beta}$ pa čas v katerem se amplituda zmanjša na $\frac{1}{e}$ začetno vrednost. Namesto koeficienta lahko navedemo logaritemski dekrament $A = -\ln\frac{s(t+T_0')}{s(t)} = \ln\frac{s_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0' t)}{s_0 e^{-\beta(t+T_0')}\cos(\omega_0'(t+T_0'))} = \ln e^{\beta T_0'} = \beta T_0' = \frac{2\pi\beta}{\omega_0'}$.
Za upor se izkaže, da je pri takem dušenem nihanju sorazmeren s hitrostjo in ima nasprotno smer kot hitrost, velja torej linearni zakon. Iz Newtonovega zakona $F = ma = -2\beta mv - ks$ dobimo $a + 2\beta v + \omega_0' s = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Dušeno nihanje $s = s_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0' t + \delta)$ rešitev te enačbe. Enačba je izpolnjena, če velja $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Sučno nihalo: na simetrično telo, vrtljivo okoli svoje osi z vztrajnostnim momentom J, je pripeta polžasta vzmet s koeficientom D ali palica ki se torzijsko deformira. V obeh primerih je navor pri zasuku iz ravnovesne lege za φ enak $M = -D\varphi$. Enačba nihanja je $\alpha + \frac{D}{J}\varphi = 0$. Napram fizičnemu in matematičnem nihalu, enačbe ni potrebno linearizirati.

Matematično in fizično nihalo: matematično nihalo predstavlja majhna utež z maso m na lahki vrvici dolžine l. Utež se giblje po krožnici, uporabimo enačbo za kroženje $M = J\alpha$. Navor teže $\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_g$ je po velikosti enak $mgl\sin(\varphi)$. Torej velja $J\ddot{\varphi} = -mglsin\varphi$. Uporabimo približek malih kotov $\varphi = \sin(\varphi)$. Rešitev dobljene enačbe $\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$ je sinusno nihanje $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$.
Fizično nihalo je katerokoli telo, ki je vrtljivo okrog vodoravne osi, ki ne gre skozi težišče. Če je v nekem trenutku izmaknjeno za kot φ, deluje nanj navor $M = -mgr_T \sin(\varphi)$, tako dobimo iz $M = J\alpha$, $\ddot{\varphi} + \frac{mgr_T}{J}\sin(\varphi) = 0$. Upoštevamo vztrajnostni moment telesa za vrtenje okoli osi.

Vsiljeno nihanje: nihalu z lastno krožno frekvenco ω_0 vsiljujemo nihanje s krožno frekvenco ω. To dosežemo s časovno odvisno silo ali navorom (naprimer sinusna funkcija časa). Krajišče vzmeti nihala na vijačno vzmet zanihamo z ω_0, nato zanihamo roko z amplitudo s_0 in ω, gibanje roke opiše $s = s_0 \cos(\omega t)$. Prvi primer vzamemo ω veliko manjšega od ω_0. Utež sledi roki, kot

da bi bila vzmet toga. Amplituda uteži s_1 se ujema z amplitudo nihanja roke s_0, med njima ni faznega premika. Nato izberemo obratno, ω veliko večjega od ω_0. Utež niha z aplitudo s_1, ki je veliko manjša od amplitude roke s_0. Pri tem nihanje uteži za pol nihaja zaostaja za nihanjem roke. Fazni premik uteži proti roki je π.
Prosto krajišče uteži naj niha s $s' = s_0 \cos(\omega t)$, Newtonov zakon se glasi $-k(s - s') - 2\beta m v = ma$, kjer upoštevamo dušenje. Preuredimo v $a + 2\beta v + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_0 \cos(\omega t)$, kjre je $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Rešitev uganemo. Nihalo niha s frekvenco, ki jo vsiljujemo in hkrati niha po svoje z lastno krožno frekvencom. Rešitev je oblike $s = s_2 e^{-\beta t} \cos(\omega_0' t + \delta) + s_1 \cos(\omega t - \delta)$. Če ne bi bilo dušenja bi dobili enačbo podobni za sestavljeno nihanje dveh nihal. Vsako nihalo je dušeno, zato po dolgem času v primerjavi z $\frac{1}{\beta}$ lastno nihanje izveni in izpustimo člen $s = s_1 \cos(\omega t - \delta) = s_1 \cos(\delta) \cos(\omega t) + s_1 \sin(\delta) \sin(\omega t)$.

Resonanca: ko je frekvenca nihanja roke enaka lastni frekvenci, pri majhni amplitudi roke, je amplituda uteži največja. Takrat sta nihanji v resnonanci. Nihanje uteži zaostaja za četrt nihaja za nihanjem roke. Ko je odmik roke največji, gre utež skozi ravnovesno lego. Fazni premik nihanja uteži proti roki je $\frac{\pi}{2}$.
Resonanco pogosto izkoristimo za merjenje lastne frekvence nihala, ali sinusnega nihanja. Skupini nihal z različnimi lastnimi frekvencami vsiljujemo nihanje z določeno frekvenco. Z največjo amplitudo niha tisto nihalo, katerega lastna frekvenca je najbližja vsiljeni.
Da lahko uspešno merimo, moramo ohranjati nihanje, torej dovajati energijo, da bo amplituda konstantna. Dovajamo v najugodnejših trenutkih. Nihalu z lastno frekvenco poganjamo, ko gre skozi ravnovesno lego in ima največjo hitrost. Zunanja sila dela takrat z največjo močjo saj $P = Fv$.
Rešitve enačbe za vsiljeno nihanje po dolgem času odvajamo $v = \frac{ds}{dt} = -s_1 \omega \cos(\delta) \sin(\omega t) + s_1 \omega \sin(\delta) \cos(\omega t)$ in $a = \frac{dv}{dt} = -s_1 \omega^2 \cos(\delta) \cos(\omega t) - s_1 \omega^2 \sin(\delta) \sin(\omega t)$. Odmik pomnožimo z ω_0^2, hitrost z 2β in skupaj z pospeškom seštejmo. V vsakem trenutku je desna stran enačbe enaka levi le, če se ujemata koeficienta pred $\cos(\omega t)$ na obeh straneh in je koeficient pred $\sin(\omega t)$ enak nič. Velja $(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\delta) + 2\beta\omega \sin(\delta) = \frac{\omega_0^2 s_0}{s_1}$ in $(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\delta) - 2\beta\omega \cos(\delta) = 0$. Iz druge enačbe dobimo odvisnost δ, nastavimo razmerje frekvenc $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ in dobimo $\tan\delta = 2\frac{\beta}{\omega_0}\frac{x}{1-x^2}$. Če izrazimo s_0 in s_1 in ju vstavimo v $\frac{s_1}{s_0} = \sqrt{(1-x^2)^2 + (\frac{2\beta}{\omega_0})^2 x^2}$ dobimo resonačno krivuljo. Manjši koeficient dušenja pomeni manjšo resonančno krivuljo. Vrh ni točno pri ω_0 ampak pri malo manjši. Iz $P = Fv$ izračunamo moč, ko vstavimo silo upora $\beta m v$, $P = 2\beta m v^2$. Krivulja povprečna moči je $\frac{\overline{P}}{\beta m \omega_0^2 s_0^2} = (\frac{\omega}{\omega_0})^2 (\frac{s_1}{s_0})^2$. Mera za izrazitost resonance je razpolovna širina $\omega_{\frac{1}{2}}$, širina krivulje za povprečno moč pri polovični višini. Pri dovolj majhnem koeficientu dušenja je razpolovna širina enaka dvojnemu koeficientu dušenja.

Sklopljeno nihanje: nihala, sestavljena iz večjega števila enostavnih nihal, v splošnem ne nihajo sinusno in vsi njihovi deli ne nihajo z enako fazo. Na poseben način zanihano lahko nihajo vsi deli in v celoti, sinusno. Tako nihanje je lastno nihanje sestavljenega nihala. Število lastnih nihanj se ujema s številom nihal. Nihalo sestavljeno iz dveh nihal ima dve lastni nihanji in dve različni lastni krožni frekvenci. V splošnem $s = s_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + s_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)$. Energija je seštevk posameznih energij $W = W_1 + W_2$, kjer je W_1 naložen v prvo lastno nihanje. Pri energiji, fazni premik nima vloge. Za razna možna nihanja sta deleža W_1 in W_2 različna. Nihanje lahko tako ponazorimo s sliko, spektrom v diagramu $W(\omega)$.

Utripanje: pojav pri dveh enostavnih nihalih, če sta lastni frekvenci približno enaki. Naprimer dve težni nihali, sklopljeni s šibko vijačno vzmet. Zasučemo obe nihali za enak kot v isto smer. Dobimo prvo lastno nihanje s ω_1. Za enak kot v nasprotnih smereh dobimo drugo lastno nihanje s frekvenco ω_2. Nato eno nihalo zasučemo za majhen kot, drugo pa pustimo. Na začetku niha samo prvo, drugo miruje. Potem začne nihati drugo in prvo miruje. To je utripanje. Zasuk prvega in drugega zapišemo $\varphi_1 = \varphi_0 \cos(\omega_1 t) + \varphi_0 \cos(\omega_2 t) = 2\varphi_0 \cos(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t) \cos(\omega t)$ in $\varphi_2 = \varphi_0 \cos(\omega_1 t) - \varphi_0 \cos(\omega_2 t) = 2\varphi_0 \cos(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t) \sin(\omega t)$, kjer je srednja krožna frekvenca $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$. Čas med dvema zaporednima trenutkoma, ko je amplituda istega nihala nič je čas utripanja $t_u = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$.

4.2 2. Valovanje: Širjenje motenj v prožnih sredstvih, valovna enačba, potujoče valovanje v eni razsežnosti, hitrost valovanja. Disperzija, fazna hitrost, skupinska hitrost.

Valovanje: mehansko valovanje predstavlja širjenje motenj po sredstvu, pri čemer se deli snovi ne premaknejo dosti. Je nematerialni prenos energije po sredstvu. Val je motnja v zveznem sredstvu, ki se pomika s konstantno hitrostjo in določeno obliko. Funkcija $f(x,t)$ opisuje odmik (displacement) na točki x ob času t za katero velja, da je odmik na točki x, enak odmiku čez čas t za ct vstran (torej je odmik $x - ct$). Velja $f(x,t) = f(x-ct, 0) = g(x-ct)$. Torej je funkcija $f(x,t)$ odvisna od x in t ko sta v posebni relaciji $x - ct$, takrat takšna fukncija opiše val.

Širjenje motenj v prožnih sredstvih: pri potovanje motnje po prožnem (nedisipativnem sredstvu) velja Hookov zakon in se ohranja energija. Motnje so lahko longitudinalne, kjer se deli snovi premikajo v smeri valovanja in nastajajo razredčine in zgoščine in transverzalna, kjer se deli snovi premikajo prečno smeri valovanja. Lahko se širi v eni, dveh ali treh rasežnostih. Vsem telesom je skupno, da potuje motnja samo v eni smeri. Potujoči val opišemo kot $f(x-ct)$. Opisujemo odmik s, ki je v odvisnosti od kraja in časa, $s(x,t)$.
Longitudinalno širjenje sprožimo tako, da na en konec palice začne delovati sila, zaradi katere se konec palice začne premikati z hitrostjo v. V času dt se konec palice premakne za vdt, motnja pa prepotuje v tem istem času razdaljo cdt. Deli palice od prijemališča sile do meje, do katere je pripotovala motnja, se gibljejo s hitrostjo v. Ostali deli mirujejo. Izrek gibalne količine je $Fdt = dmv = \rho Scdtv$, pokrajšamo in dobimo $F = \rho Scv$, del palice do koder je pripotovala motnja je skrčen. Dolžina tega dela je cdt, dolžina skrčka pa vdt. Enačba za vzdolžno deformacijo je $\frac{F}{S} = E\frac{dl}{l} = E\frac{vdt}{cdt} = E\frac{v}{c}$. Izenačimo razmerje s $\frac{F}{vS}$ in dobimo $\frac{F}{vS} = \rho c = \frac{E}{c}$. Izrazimo lahko $c^2 = \frac{E}{\rho}$ kot hitrost širjenja motnje.

Valovna enačba: enačbo za raztezek ponovno preuredimo $\frac{F}{S} = E\frac{dl}{l} = E\frac{ds}{dx}$ v $F = E\frac{dl}{l} = SE\frac{ds}{dx}$ in enačimo z $F = ma = S\rho\frac{d^2s}{dt^2}dx$ da dobimo $SE\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = S\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. Preuredimo v valovno enačbo $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$, oziroma

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$$

Potujoče valovanje v eni rasežnosti: pri sinusnem valovanju v eni rasežnosti je odmik enak $s = s_0 \cos(\omega t - kx)$, kjer je $k = \frac{\omega}{c}$ valovni vektor. Funkcije dveh spremenljivk ne moremo ponazoriti z ravninskim diagramom. Običajno vzamemo eno od spremenljiv za parameter. Lahko s časovnim potem $s(x = konst, t)$, opišemo gibanje izbrane točke v odvisnosti od časa. S trenutno sliko $s(x, t = konst)$, pa opišemo odmike vseh delov vrvice v izbranem trenutku. Po časovnem poteku ugotovimo, da izbrana točka sinusno niha. Časovna perioda je nihajni čas $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$. Tudi v trenutni sliki odmik mkt funkcija razdalje x sinusna krivulja. Krajevno periodo uvedemo kot valovno dolžino λ. To je razdalja med dvema sosednjima vrhovoma (kjer je odmik ali maksimalen $s = s_0$, ali minimalen $s = -s_0$), v splošnem je valovna dolžina razdalja med dvema točkama, ki nihata sočasno. Zapišemo enačbo za potujoče valovanje $s = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Uporabili smo $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{t_0}$ in ugotovili, da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Tako izpeljemo iz $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $c = \lambda\nu$.

Hitrost valovanja: za palico velja $c^2 = \frac{E}{\rho}$, za kapljevino $c^2 = \frac{1}{\chi\rho}$ in za plin $c^2 = \frac{\kappa p}{\rho}$.

Disperzija: pojav, kjer je hitrost valovanja odvisna od valovne dolžine ali od frekvence.
Pri valovanju v globoki vodi se gibljejo deli vode po krogih v navpični ravnini, ki vsebuje smer valovanja. Je hkrati longitudinalno in transverzalno. Na gladini je polmer krogov enak amplitudi valovanja s_0, z globino pojema. Pri dovolj majhni amplitudi imamo slik ogladine za sinusno. Hitrost delov vode na gladini je $v = \omega s_0 = 2\pi\nu s_0$. Frekvenca kroženja delov vode je enaka frekvenci valovanja. Gibanje delov vode opazujemo v sistemu s hitrostjo c v semri potovanja valovanja. Gibanje je stacionarno, velja Bernoullijeva enačba. Za opazovalca v sistemu mirujejo valovne črte in se deli vode gibljejo v nasprotni smeri njegovega gibanja. Zanj je hitrost delov vode v valovnih vrhovih $c - v$ in dolinah $c + v$. Razlika gostote kinetične energije v dolini in vrhu gre na račun potencialne energije $\frac{1}{2}\rho(c+v)^2 - \frac{1}{2}\rho(c-v)^2 = \rho g 2 s_0$. Sledi $cv = g s_0$ in $c(\nu) = \frac{g}{2\pi\nu}$, upoštevamo $v = 2\pi\nu s_0$ in $c = \lambda\nu$, dobimo hitrost potovanja valovanja $c(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Če postane valovna dolžina manjša od $5cm$ moramo upoštevati, še delo zaradi površinske napetosti $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$. Enačbi veljata, če je voda dovolj globoka. Hitrost valovanja na gladini, katere globina h je manjša od polovice valovne dolžine je $c = \sqrt{gh}$.
Hitrost valovanja na vodni gladini je odvisna od valovne dolžine ali od frekvence. Na vodni gladini potujejo dolgi valovi hitreje kot kratki. Disperzija ima daljnosežne posledice. Ne moremo uresničiti nihanja ali valovanja, ki bi bilo sinusno z natančno določeno krožno frekvenco ω. Takšno nihanje bi moralo biti popolnoma nedušeno in trajati od $t \to -\infty$ do $t \to \infty$. V nihanju, ki traja končen čas so prisotni še manjši deleži sinusnih sestavin z malo manjšimi in večjimi frekvencami. Čisto sinusno valovanje je dober približek za valovanja brez disperzije. Ko pa je prisotna se zgodi, da manjše sestavine potujejo različno hitro in tako potuje energija z drugačno hitrostjo kot sinusno valovanje. Zato ločujemo med fazno in skupinsko hitrostjo.

Fazna hitrost: to je hitrost sinusnega valovanja c. Oziroma hitrost s katero se širi valovno čelo.

Skupinska hitrost: potovanje valovanja opišemo s spektrom sinusnih sestavin, zvezno porazdeljenih okoli osrednje sestavine s krožno frekvenco ω_0. Za primer, kjer sta samo dve valovanji s rekvencama $\omega_0 \pm d\omega$. Pri valovanju z disperzijo potujeta z različnima hitrostima, z interferenco nastane

$$\begin{aligned} s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = \\ \frac{1}{2}s_0 \cos\left[(\omega_0 + d\omega)t - (k_0 + dk)x\right] + \frac{1}{2}s_0 \cos\left[(\omega_0 - d\omega)t - (k_0 - dk)x\right] = \\ s_0 \cos\left(t d\omega - x dk\right) \cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right) \end{aligned}$$

. To je valovanje s spremenljivo amplitudo in s krožno frekvenco ω. Časovni potek se ujema z utripanjem s krožno frekvenco utripanja 2ω. V trenutni sliki pa sledijo območjem z veliko amplitudo, skupinam (grupam) valov, območja z majhno amplitudo. Hitrost opazujemo, tako da sledimo vrhu z njavečjo amplitudo v skupini, dobimo grupno hitrost $c_g = (\frac{d\omega}{dk})_{\omega_0}$, odvod ω po k moramo vzeti pri ω_0. Izpeljemo $c_g = c + k(\frac{dc}{dk})_{\omega_0} = c - \lambda(\frac{dc}{d\lambda})_{\lambda_0}$. Pri valovanju na gladini je fazna hitrost $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$, njen odvod po valovni dolžini $\frac{dc}{d\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Skupinska hitrost pa je $c_g = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$, je enaka polovici fazne hitrosti.

4.3 3. Superpozicija valovanj, stoječe valovanje, odboj valovanja. Energija valovanja, energijski tok

Superpozicija valovanj: ali sestavljanje valovanj v novo valovanje iz interference. Odmik v novem valovanju v izbrani točki in izbranem trenutku je vsota odmikov vseh valovanj v tej točki in trenutku. Če imamo naprimer dve valovanju z enako frekvenco in potujeta v isti smeri velja $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$. V longotudinalnem imajo vsi odmiki isto smer, pri transverzalnem pa ne vedno. Za primer predpostavimo, da tudi imajo. Opazujemo dve valovanji, ki potujeta v isti smeri z enakima amplitudama in frekvencama. Med njima je lahko fazni premik δ. Imamo

$$s = s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0 \cos(\omega t - kx + \delta) =$$
$$s_0 \left[\cos(\omega t - kx + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta) + \cos(\omega t - kx + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta)\right] = 2s_0 \cos(\frac{1}{2}\delta)\cos(\omega t - kx + \frac{1}{2}\delta)$$

.

Lahko preoblikujemo v $s = S_0 \cos(\omega t - kx + \Delta)$, kjer sta $S_0 = 2s_0 \cos(\frac{1}{2}\delta)$ in$\Delta = \frac{1}{2}\delta$. S_0 si lahko predstavljamo kot velikost vektorske vsote obeh začetnih amplitud, če ju vzamemo kot vektroja v ravnini in je kot med njima δ. Podobno poiščemo amplitudo in fazni premik med valovanji z različnima amplitudama, če sta frekvenci enaki. Valovanji sta v fazi , če je fazna razlika enaka nič, kar pomeni $S_0 = 2s_0$ in sta v nasprotni fazi, če je $S_0 = 0$.

Stoječe valovanje: z interferenco dveh valovanj, ki potujeta v nasprotnih smereh, z enakima amplitudama in frekvencama, dobimo stoječe valovanje. Naprimer $s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0 \cos(\omega t + kx) = 2s_0 \cos(kx)\cos(\omega t)$. V stoječem valovanju je nihanje v vseh točkah sočasno in sinusno z enako frekvenco. Amplituda, naprimer $2s_0 \cos(kx)$, je odvisna od kraja. V nekaterih točkah je največja, tam je nihanje najizrazitejše, te točke so hrbti, drugje je enaka nič, tam pa so vozli. Razmik med sosednjima hrbtoma ali vozloma je polovica valovne dolžine.
Stoječe valovanje spomni na lastno nihanje. Vrvica je kot struna, stebriček plina v cevi pa piščal. Struna ima hitrost valovanja $c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$, palica $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ in piščal $c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$. Upoštevamo še robni pogoj, torej če sta krajišči vpeti ali ne. Na prostem mora biti hrbet, na vpetem vozel. Tako izrazimo valovno dolžino, preko dolžine strune, palice ali piščaki in iz $c = \lambda\nu$ še lastno frekvenco.
Če sta obe krajišči vpeti in je vmes vsaj en vozel, potem mora biti razmik med krajišči l enak ali $\frac{1}{2}\lambda$, ali $2\frac{1}{2}\lambda$, $3\frac{1}{2}\lambda\ldots$ V splošnem je torej $l = (N+1)\frac{1}{2}\lambda$, če je $N = 0, 1, 2...$ število dodatnih vozlov. Za lastno frekvenco velja $\nu_N = \frac{c}{\lambda} = (N+1)\frac{1}{2}\frac{c}{l}$. ν_0 je osnovna lastna frekvenca. Večkratniki osnovne lastne frekvence so višje harmonične frekvence.
Če sta obe krajišči prosti, kjer ni mogoče nihanje brez vozla, velja $\nu_{N-1} = \frac{1}{2}\frac{Nc}{l}$, za $N = 1, 2, 3....$
Če je prvo pveto in drugo prosto pa velja $\nu_N = \frac{1}{4}(2N+1)\frac{c}{l}$. Ni nujno da nihajo vsi deli strune ali plina sočasno in sinusno.

Odboj: potujoče valovanje se na krajišču vrvice, palice, vijačne vzmeti, stebrička plina ali kapljevine tam odbije in potuje po odboju v nasprotni smeri. Prosto krajišče vrvice ne more prenesti sile v prečni smeri, zato je tam tangenta vedno vzporedna z začetno lego vrvice. To je mogoče le če se odbije z enako fazo. Vpeto krajišče pa ves čas miruje, zato morata biti odmika vpadnega in odbitega valovanja nasprotno enaka, odbije se z nasprotno fazo.

Energija valovanja: motnja ima dodatno energijo. Ko se deli vrvi gibljejo v transverzalni smeri imamo dodatno silo F', ki opravi na vrvici v dt delo $dA = F'vdt$. Vrvica je napeta s silo F, ki ne opravi dela, ker je pravokotna na premik. Deformacija je prožna in zato uporabimo izrek o kinetični, potencialni in prožnostni energiji. Sprememba potencialne energije je majhna,

če je razmerje $\frac{F'}{F} = \frac{v}{c}$ zelo majhno. Polna energija, ki jo sestavljata kinetična in prožnostna energija, se zveča za delo prečne sile $dW = dW_k + dW_{pr} = dA = F'vdt$, vstavimo $F' = \frac{Fv}{c} = \frac{c^2\rho Sv}{c} = vc\rho S$. Upoštevamo $Scdt = dV$ in dobimo $dW = \rho v^2 dV$, gostota dodatne polne energije je $dw = \frac{dW}{dV} = \rho v^2 = w_k + w_{pr}$, kjer je $w_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{1}{2}\frac{dmv^2}{dV}$ in $w_{pr} = w - w_k = \frac{dW_{pr}}{dV} = \frac{1}{2}\frac{dmv^2}{dV}$. V splošnem je $w_k = \frac{1}{2}\rho(\frac{ds}{dt})^2_{x=konst}$ in $w_{pr} = \frac{1}{2}c^2\rho(\frac{ds}{dx})^2_{t=konst}$.
Za energijo potujočega valovanja velja podobno kot za valovno čelo. Skupna gostota enegije je tudi v potujočem valovanju $w = \rho v^2$. Hitrost izrazimo z odvajanjem $s = s_0 \cos(\omega t - kx)$ po času pri konstantnem x, $v = (\frac{ds}{dt})\{x = konst\} = -\omega s_0 \sin(\omega t - kx)$. Gostota energije je $w = \rho\omega^2 s_0^2 \sin^2(\omega t - kx)$. Spreminja se v odvisnosti od časa in od kraja. Pogosto je tako hitro da ne moremo slediti z merilniki. Zato je zanimivo časovno popvrečje $\overline{w}$. Za sinus ga definiramo čez en nihajni čas, ali več nihajnih časov. $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, $\overline{\cos^2(\varphi)} + \overline{\sin^2(\varphi)} = 1$, ker sta funkciji le premaknjeni ena za drugo velja $\overline{\cos^2(\varphi)} = \overline{\sin^2(\varphi)} = \frac{1}{2}$. Tako dobimo povprečno gostot $\overline{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$.
V stoječem valovanju $s = s_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$ velja $w_k = \frac{1}{2}\rho(\frac{ds}{dt})^2_{x=konst} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t)$ in $w_{pr} = \frac{1}{2}c^2\rho(\frac{ds}{dx})^2_{t=konst} = \frac{1}{2}c^2\rho k^2 s_0^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t)$. Tako je $w_k + w_pr = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2(\sin^2(kx)\sin^2(\omega t) + \cos^2(kx)\cos^2(\omega t))$, energija ne potuje ampak se samo preliva sem in tja in se pri tem spreminja iz prožnostne v kinetično in obratno. Časovno povprečje ni odvisno od kraja $\overline{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2(\frac{1}{2}\sin^2(kx) + \frac{1}{2}\cos^2(kx)) = \frac{1}{4}\rho\omega^2 s_0^2$, kar sledi iz tega da mora biti vsota povprečnih gostot energij v potujočih valovanjih enaka povprečni gostoti energije stoječega valovanja (dve valovanji s amplitudama $\frac{1}{2}s_0$ se združita v amplitudo s_0).

Energijski tok: Valovanje potuje s hitrostjo c in s seboj nosi energijo s povprečno gosototo $\overline{w}$. V časovni enoti gre skozi izbrani presek S, pravokoten na smer potovanja, energijski tok $P = \frac{\overline{W}}{t} = V\frac{\overline{w}}{t}$, v času t prepotuje valovanje razdaljo ct, tako da je prostornina, ki jo napolni v tem času energija enaka $V = Sct$. Sledi $P = Sc\overline{w} = Sj$, kjer je $j = c\overline{w}$ gostota energijskega toka. Torej pove koliko energije prenese valovanje.

4.4 4. Maxwellske enačbe v praznem prostoru. Elektromagnetno valovanje. Dipolna antena. Koaksialni vodnik.

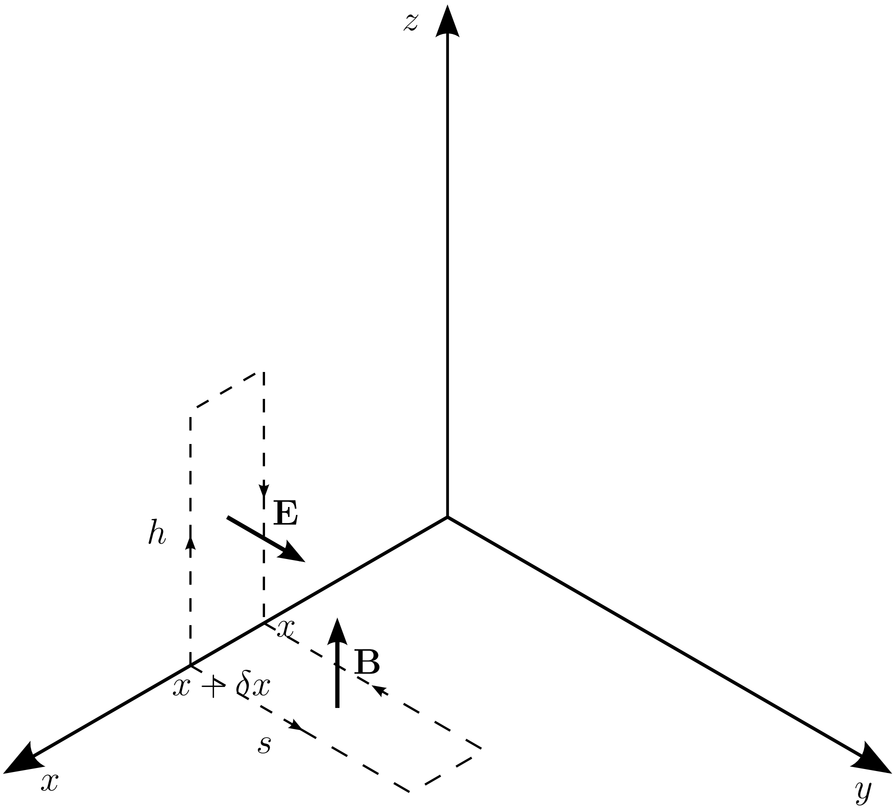
Maxwellske enačbe v praznem prostoru: v praznem prostoru ni naboja ali toka, zato velja

ime	integralska oblika	diferencialna oblika
zakon o električnem pretoku (Gaussov zakon)	$\oint \mathbf{D}d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
zakon o magnetnem pretoku	$\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
zakon o magnetni napetosti (Amperov zakon)	$\oint \mathbf{H}d\mathbf{s} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
indukcijski zakon (Faradayev zakon)	$\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = -\int(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Slika 9: Maxwellske enačbe v praznem prostoru.

V vakuumu imata $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ zaljučene silnice in sta brez izvorov. Zato velja $\oint \mathbf{D}d\mathbf{S} = 0$ in $\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$. Preko indukcijskih zakonov pa pridemo do elektromagnetne valovne enačbe. V vakuumu velja $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ in $\mathbf{H} = \mu_0\mathbf{B}$, torej lahko zapišemo Amperov zakon $\oint \mathbf{H}d\mathbf{s} = \int(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})d\mathbf{S} \rightarrow \oint \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}d\mathbf{s} = \int(\frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t})d\mathbf{S}$ oziroma zapišemo $\oint \mathbf{B}d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0\int(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})d\mathbf{S}$.

Elektromagnetno valovanje: Iz enačb $\oint \mathbf{B}d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0 \int (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})d\mathbf{S}$ in $\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = -\int (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})d\mathbf{S}$ lahko zapišemo elektromagnetno valovanje.
Naj ima E smer osi y in B smer osi z. Vzdolž osi x izberemo koordinati x in $x + \delta x$, kjer je δx majhen. Izberemo dve zaključeni poti, prva naj bo pot dolžine s in širine δx v xy ravnini, druga pot pa dolžine h in širine δx v xz ravnini.



Slika 10: Skica poti.

Integral električne poljske jakosti po zaključeni poti v xy ravnini je enak

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = E(x + \delta x, t)s - E(x, t)s = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}\delta x s$$

Pri tej poti imata vektorja $\mathbf{B}$ in $d\mathbf{S}$ isto smer, zato velja

$$\int (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})d\mathbf{S} = \frac{\partial B(x, t)}{\partial t}\delta x s$$

Tako dobimo iz Faradayevega indukcijskega zakona zvezo

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$$

Podobno izračunamo integral magnetnega polja v xz ravnini

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{s} = H(x + \delta x, t)h - H(x, t)h = \frac{\partial H(x, t)}{\partial x}\delta x h$$

V integralu gostote električnega polja upoštevamo, da imata $\mathbf{D}$ in $d\mathbf{S}$ nasprotno smer in zapišemo

$$\int (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) d\mathbf{S} = -\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}\delta x h$$

Amperov zakon poda zvezo

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}$$

Prvo enačbo parcialno odvajamo po x, dobimo $\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x \partial t}$ in drugo po času, da dobimo $\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t^2}$, vstavimo eno v drugo in tako izpeljemo valovno enačbo za E,

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$$

Podobno izpeljemo za B,

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}$$

Splošno sta $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ in $\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$. Oziroma lepše zapisano

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},\ \ \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Elektromagnetno valvoanje v katerem niha E v smeri y in B v smeri z, se širi v vakuumu v smeri x s hitrostjo c_0. Kot primer vzamemo sinusno nihanje, kjer velja $E = E_0 \sin(\omega t - kx) = B_0 c \sin(\omega t - kx)$, kjer velja $E_0 = B_0 c$, oziroma vektorsko $\mathbf{E_0} = \mathbf{B_0} \times \mathbf{c}$.
Cena, da smo ločili enačbi, kjer sta E in B v odvisnosti je ta, da dobimo diferencialno enačbo drugega reda. Za izračun valovne ena

Dipolna antena: električni naboj e, ki se enakomerno giblje, povzroča v svoji okolici električno in magnetno polje. Obe poljski jakosti sta obratno sorazmerni z razdaljo od naboja. Naboj lahko tudi pospešuje. Seva elektromagnetno valovanje.
Koaksialnemu vodniku odstranimo plašč, ostane raven vodnik, po katerem teče visokofrekvenčni izmenični tok, oziroma dipolna antena. Valovanje v bližini antene je podobno stoječemu elektrmagnetnemu valovanju v bližini žile koaksialnega vodnika. V veliki razdalji od antene pa nastane potujoče elektromagnetno valovanjem, ki se širi od antene v prostor. Antena torej oddaja valovanje oziroma seva.
Iz zaprtega nihajnega kroga z kondenzatorjem in tuljavo nastane odprt nihajni krog, dipolna antena, če se zmanjšata kapaciteta in induktivnost ter se porazdelita po vsem krogu. Za razliko od zaprtega, odprti nihajni krog seva. Nihanje v krogu vzdržujemo z vsiljenim nihanjem z njegovo lastno frekvenco. Osnovna lastna frekvenca dipolne antene je $\nu_0 = \frac{1}{2}\frac{c_0}{l}$, če jo vzbujamo na sredi in $\nu_0 = \frac{1}{4}\frac{c_0}{l}$, če vzbujamo na krajišču. Elektromagnetno polje oddajne antene preiščemo s sprejemno dipolno anteno, ki je enako dolga kot oddajna. Lastni frekvenci obeh sta enaki in lahko izkoristimo resonanco. V sprejemno anteno vključimo majhna žarnico ali ampermeter z usmernikom. Žarnica sveti najmočneje, ko je sprejemna antena v smeri jakosti električnega polja. Takrat teče po sprejemni anteni zaradi influence in indukcije največji tok. Jakost električnega polja je največja v ekvatorski ravnini, ki je pravokotna na oddajno anteno in gre skozi sredino antene. V smeri oddajne antene je jakost električnega polja nič.
Lahko ga preiščemo tudi z majhnim ovojem v katerem je spremenljiv kondenzator in žarnica. Kondenzator je naravnan tako, da je lastna frekvenca ovoja enaka frekvenci nihanja v dipolni

anteni. Žarnica sveti najmočneje, ko je ovoj pravokoten na smer gostote magnetnega polja. Takrat se inducira največji tok. Gostota magnetnega polja, daleč od oddajne antene je pravokotna na zveznico do antene in pravokotna na jakost električnega polja.

./dipoleantena.png

Slika 11: Dipolna antena.

"Half-wave dipole" antena je sestavljena iz dveh krakov dolgih eno četrtino valovne dolžine, kjer je na sredini "Reciever". Prihajajoče nihajoče električno polje potiska elektrone z ene strani na drugo, naboja na enem koncu in drugem se izmenjujeta. Tangentna komponenta jakosti električnega polja poganja tok, nastane stoječe valovanje, ki ga otipamo s sprejemno anteno. Razdalja med sosednjima hrbtoma jakosti električnega polja je $\frac{1}{2}\lambda$, če poznamo frekvenco lahko iz znane valovne dolžine izračunamo hitrost. Nihajoč tok steka skozi upornik R.
V vsaki točki je jakost električnega polja pravokotna na gostoto magnetnega polja, obe sta pravokotni na smer razširjanja valovanja, vektorji ležijo na oseh x, y, z.
Ko je antena velikomanjša od valovne dolžine, obravnavamo nihajoči elementrani dipol. Dva nasprotno enaka točkasta naboja, ki nihata drug proti drugemu premo sinusno okoli skupne srednje lege. Na začetku sta zelo blizu, imata največjo hitrost in se gibljeta vsaksebi. Razmik narašča, hitrost pojema. Med nabojema se širijo silnice jakosti električnega polja, izvirajo iz pozitinvega in se stakajo v negativnega. Po četrtini nihaja mirutjeta v največjem odmiku. Nato se gibljeta drug proti drugemu. Po polovici nihaja sta zopet zelo blizu, silnice se sklenejo. Nato se odlepijo in širijo v prostor. Vse se ponovi, le da so silnice obrnjene. Naboja, nasprotnih znakov, ki se gibljeta vstran drug od drugega predstavljata električni tok. Okoli toka nastane magnetno polje s kocentričnimi silnicami, smer je odvisna od smeri toka.

Koaksialni vodnik: vsak odsek vodnika ima majhno kapaciteto, lahko si predstavljamo, da je drobna elektroda kondenzatorja, katerega druga elektroda je v veliki razdalji. Podobno ima vsak odsek induktivnost, predstavljamo si da je del električnega kroga, ki se sklene v veliki razdalji. Tako sta kapaciteta in induktivnost zvezno porazdeljeni. Nihajni krog s kondenzatorjem in tuljavo ima eno lastno frekvenco. Takšen odsek vodnika jih ima ogromno, predstavljamo si da ga sestavlja veliko drobnih nihajnih krogov. Podoben razmislek je bil pri mehaniki med lahko vrvico in odsekom prožne vrvice. Pri tem vodniku sta električno in magnetno polje omejeni na prostor med žilo in plaščem, enačbe so preproste. Drobni nihajni krogi so sklopljeni. Nihanje se hitro razširi na druge dele vodnika, če ga nekje vzbudimo. Hitrost najlažje dobimo z računanjem valovnega čela elektromagnetne motnje.
Odsek koaksialni vodnik z dolžino l, radijem žiile r' in notranjim radijem plašča R. Med žilo in plaščem je vakuum, za valjast kondenzator je $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(\frac{R}{r'})}$ in induktivnost $L = \frac{\mu_0 l \ln(\frac{R}{r'})}{2\pi}$. Za enosmerni tok nima upora. Na krajišču med žilo in plaščem je droben generator s konstantno gonilno napetostjo U. Kratek čas po vključitvi generatorja se na plašču in žili nabereta nasprotno enaka naboja. Med njima je takrat statično električno polje $E = \frac{U}{r\ln(\frac{R}{r'})}$. Zdaj ne moremo več privzeti, da se polji vzpostavita v hipu. Polji se širita s končno hitrostjo. Valovno čelo se širi s c_0, onstran čela še ni toka in ni nobenega polja. Dolžina nabitega dela se daljša s časom $l = c_0 t$. Preko $c_0 = \frac{dl}{dt}$ in $e = CU = \frac{2\pi\varepsilon_0 lU}{\ln(\frac{R}{r'})}$ izrazimo tok $I = \frac{de}{dt} = \frac{2\pi\varepsilon_0 c_0 U}{\ln(\frac{R}{r'})}$. Zaradi daljšanja dela vodnika s tokom, narašča magnetni pretok $\phi_m = LI$, inducira se napetost $U_i = \frac{\phi_m}{dt}$, ki je nasprotno enaka gonilni napetosti $U = \frac{\mu_0 I c_0}{2\pi}\ln(\frac{R}{r'})$. Vstavimo v enačbo za tok $I = \frac{\mu_0 I c_0}{2\pi}\ln(\frac{R}{r'})\frac{2\pi\varepsilon_0 c_0}{\ln(\frac{R}{r'})} = Ic_0^2\mu_0\varepsilon_0 \to c_0 = (\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0})^{\frac{1}{2}} = 3\cdot 10^8\frac{m}{s}$. Tok po vodniku zaradi indukcije ne naraste preko vseh mej napram temu da je upor vodnika enak nič. $R = \frac{U}{I}$, kjer je prvi člen lastnost vodnika, drugi pa upor vakuuma $R_0 = (\frac{\mu_0}{\varepsilon_0})^{\frac{1}{2}}$. Elektromagnetna motnja šteje emd transverzalne motnje, saj sta polji pravokotni druga na drugo ter na smer širjenja. Jakost eletkričnega polja je sorazmerna z napetostjo $E = \frac{U}{r\ln(\frac{R}{r'})}$, gostota magnetnega polja pa s tokom $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Preko enačbe I dobimo zvezo med poljema $E = Bc_0$ oziroma vektorsko $\mathbf{E} = \mathbf{B}\times\mathbf{c_0}$.
Če damo na koaksialni vodnik generator sinusne napetosti s krožno frekvenco ω se po vodniku širi sinusno elektromagnetno valovanje, kjer sta $E = E_0\cos\omega(t - \frac{z}{c_0}) = E_0\cos\omega t - kz)$ in $B = B_0\cos\omega t - kz)$. c_0 ni odvisna od oblike motnje. Motnja potrebuje $t' = \frac{z}{c_0}$, da pride do točke v razdalji z. Tudi v sinusnem sta polji pravokotni in valovanje je transverzalno. Nihata sočasno. Vsak trenutek velja $\mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{c_0}$ v amplitudi pa $E_0 = B_0 c_0$. Stoječe valovanje dobimo v koaksialnem vodniku ob interferenci prvotnega valovanja in valovanja, ki se odbije na krajišču. Na kratko sklenjeno krajišče med žilo in plaščem ni napetosti, tam je vozel napetosti in hrbet toka. Na izoliranem krajišču ni toka, tam je vozel toka in hrbet napetosti. Stoječe elektromagnetno valovanje lahko dobimo tudi če ni žile naprimer v votilini v kovini, votlinski resonator. V splošnem so vozli jakosti električnega polja na mestih hrbtov gostote magnetnega polja in obratno. Ne nihata sočasno ampak doseže električno polje v hrbtih amplitudo, ko je magnetno polje povsod eno nič.

4.5 5. Polarizacija svetlobe. Linearno polarizirano valovanje. Nepolarizirano valovanje. Polarizator, analizator. Optična pot. Anizotropne snovi. Krožna polarizacija.

Polarizacija svetlobe: svetloba je transverzalno elektromagnetno valovanje. Polarizacija je lastnost transverzalnih valovanj, ki definira orientacijo nihanja, torej da smer amplitudi. Ta ni popolnoma poljubna. Zaradi tranverzalnosti leži v ravnini, ki je pravokotna na smer razširjanja. V tej ravnini izberemo dve pravokotni smeri, in projeciramo amplitudo. Pri elektromagnetnem storimo to za amplitudo jakosti električnega polja $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ pa je vedno pravokotna nanjo.

Linearno polarizirano valovanje: valovanje je linearno polarizirano, če ohrani amplituda svojo smer v ravnini xy, če je razmerje med projekcijama E_{0x} in E_{0y} konstantno. Valovanje dipola je linearno polarizirano, saj električna poljska jakost na poljubnem mestu s časom ne spreminja smeri. Pri odboju na dielektriku je sveltoba polarizirana. V splošnem pa odbita sveltoba ni polarizirana.

Nepolarizirano valovanje: drugače je pri svetlobi iz plinskih ali trdnih izvirov. Sestavlja jo množica valovnih potez, vsako si lahko predstavljamo kot sevanje električnega dipola in je linearno polarizirana. Dipoli so v splošnem prosto orietnirani, zato je orientacija vektorja jakosti električnega polja, v ravnini pravokotni na smer širjenja, poljubna. Ko so vse orientacije $\mathbf{E}$ v tej ravnini enakopravne, govorimo o nepolarizirani svetlobi. Tudi faze valovnih potez so poljubne, zato je gostota energije pri nepolarizirani svetlobi enaka vsoti gostot energije valovnih potez. Takšna je svetloba navadnih svetil, sevajo kratkotrajne valovne poteze, ki so drug od druge neodvisne glede faze in polarizacije.

Polarizator: svetlobo polariziramo tako, da uporabimo polaroid, ki del svetlobe absorbira, polariziran del pa prepusti, glede na orientacijo. Polaroid sestavljajo umetni diokroitični kristali, ki prepustijo samo del valovanja, ki ima komponento jakosti električnega polja v izbrani smeri.

Analizator: drugi polaroid postavimo lahko naprimer pravokotno zasukanega glede na prvega in je prepustnost svetlobe enaka nič.
Če med niju postavimo tretjega, malo drugače zasukanega potem v splošnem prepustnost ne bo več nič.
Iz analizatorja izhaja tok z gostoto $j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c_0 = j' \cos^2(\varphi)$, j' je gostota svetlobnega toka, ki ga prepusti polarizator pred tem in pade na analizator.
V nepolarizirani snovi so vsi φ med $[0, 2\pi]$ enakovredni. Najsplošnejši primer polarizacije je eliptična polarizacija (en ima kosinus ena komponenta pa sinus).

Optična pot: to je produkt poti in lomnega količnika snovi.

Anizotropne snovi: dielektričnost v splošnem ni skalar, ampak je tenzor. In v splošnem so dielektriki anizotropni. V anizotropni snovi lahko poiščemo tri medseboj pravokotne smeri, ki jih imenujemo lastne smeri tenzorja dielektričnosti. Vzdolž ene je dielektričnost največja in vzdolž druge najmanjša. Izotropne so tekočine in kubični kristali. V anizotropni snovi je lomni količnik odvisen od smeri jakosti električnega polja, torej od polarizacije svetlobe.
v izotropni snovi z ε in μ velja $\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$, torej je $c = (\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0})^{\frac{1}{2}}$. Snov po katerih se širi elektromagnetno valovanje so ali paramagnetne ali pa diamagnetne, zato lahko vzamemo $\mu = 1$ in dobimo $c = (\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0})^{\frac{1}{2}} = c_0\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ in definiramo lomni kvocient kot $n = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

4.6 6. Svetlobni spektri. Energija EM valovanja, svetlobni tok. Pravokoten vpad na dielektrik: odbojnost, prepustnost.

Svetlobni spektri:

vrsta valovanja	frekvenca	valovna dolžina
žarki γ	$3 \cdot 10^{20} Hz$	$1pm$
rentgenski žarki	$3 \cdot 10^{18} Hz$	$100pm$

vrsta valovanja	frekvenca	valovna dolžina
ultravijolično	$3 \cdot 10^{15} Hz$	$100nm$
vidna svetloba	$6 \cdot 10^{14} Hz$	$500nm$
infrardeče	$3 \cdot 10^{11} Hz$	$10\mu m$
terahercno	$1 \cdot 10^{12} Hz$	$300\mu m$
miktrovalovi	$3 \cdot 10^{10} Hz$	$1cm$
radijsko	$3 \cdot 10^{5} Hz$	$1km$

Tabela 1: Svetlobni spektri

Delimo lahko tudi na dolge, srednje, kratke, ultrakratke radijske valove, na mikrovalove, infrardečo svetlobo, vidno svetlobo, ultravijolično svetlboo, rentgensko svetlobo in sevanje γ.
Sama gostota energijskega toka o svetlobi ne pove dovolj. Z uklonsko mrežico jo razsravimo na enobarvne sestavine. Dobljen spekter analiziramo. V določenih plinih so zastopane enobarvne sestavine, to so črtatsti spektri. Skupna gostota svetlobnega toka je enaka vsoti prispevkov vseh črt. Druga vrsta pa so zvezni spektri. Premerimo ga tako, da premerimo delež dj gostote svetlobnega toka, ki odpade na interval $\lambda \pm \frac{1}{2} d\lambda$. Narišemo kvocient $\frac{dj}{d\lambda}$ v odvisnosti od valovne dolžine. Spekter, ki ga sevajo svetila je emisijski spekter. Prepuščeni spekter skozi snov pa je absorpcijski spekter.

Energija EM valovanja: (nadaljevanje koaksialnega vodnika) gostota energije električnega polja je

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

je enako velika kot gostota energije magnetnega polja

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 B^2 c_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = w_m$$

Skupna gostota je $w = w_e + w_m = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$. Lahko zapišemo $wc_0 = \varepsilon_0 c_0 E^2 = \frac{c_0 B^2}{\mu_0} = EH$, kjer je $H = \frac{B}{\mu}$. Upoštevamo smer razširjanja valovanja in smeri vektorjev $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$, da definiramo Poyntingov vektor

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

kateri ima smer razširjanja polj in velikost gostote energijskega toka.
Po priključitvi sinusne napetosti na vodnik, se po njem širi sinusno potujoče valovanje. Gostota energije je $w = w_e + w_m = 2w_e = 2w_m = 2\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = 2\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)$. Povprečna gostota energije pa je $\overline{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0}$. Povprečje kvadrata je $\frac{1}{2}$. Povprečna gostota energije v elektromagnetnem valovanju je enaka maksimalni gostoti energije električnega polja ali maksimalni gostoti energije magnetnega polja. Gostota energijskega toka je

$$j = \overline{\mathcal{P}} = \overline{w} c_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c_0 B_0^2}{\mu_0}$$

V splošnem je gostota energijskega toka

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}) \mathbf{c} = \boldsymbol{\mathcal{P}}$$

./spekter.png

Slika 12: Spekter.

Nihajoči električni dipol je izvor potujočega elektromagnetnega valovanja s frekvenco nihanja dipola. Poyntingov vektorja $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$ je odvisen od časa. Okoli nihajočega dipola si zamislimo kocentrične krogle. Skozi vsako ploskev krogle gre enak energijski tok, če se valovanje v notranjosti ne absorbira. To je posebna oblika kontinuitetne enačbe za energijski tok. Je enak integralu gostote energijskega toka j po površini krogle, ki jo razdelimo na ozke krogelne pasove po dS,

$$P = \int j dS$$

Energijski tok pove koliko energije preteče skozi dano ploskov v časovni enoti. Zaradi energijskega toka, ki ga seva dipol, se energija dipola manjša, če mu iz okolice ne dovajamo energije. Skupno energijo dipola sestavljata kinetična energija negativnega delca $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dz}{dt})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 z_0^2 \sin^2(\omega t)$ in potencialna energija obeh delcev. Slednja ima enako obliko kot prožnostna energija vijačne vzmeti, če naj delec sinusno niha $\frac{1}{2}Kz^2 = \frac{1}{2}Kz_0^2\cos^2(\omega t)$. Tu vidimo da sila $-Kz$, ki veže negativni delec na pozitivnega, ne more biti Coulombova sila med točkastima nabojema. Za lastno krožno frekvenco velja $\omega = \frac{K}{m}$, tako je vsota kinetične in potencialne energije $W = \frac{1}{2}m\omega^2 z_0^2$, ta bi bila konstantna, če dipol ne bi seval. Ker seva je njegovo nihanje dušeno β_s. V časovni enoti se energija zmanjša za izsevani energijski tok $-\frac{dW}{dt} = P$, če v enačbo za energijski tok vstavimo $z_0^2 = \frac{2W}{m\omega^2}$ dobimo $-\frac{dW}{dt} = -2\beta_s W$. Dušenje je zelo šibko. Krožeči elektron, opisan z Newtonovim in Maxwellovimi zakoni, bi bil neobstojen saj bi neprestano seval.

Svetlobni tok: svetlobni tok pove koliko svetlobne energije se preteče skozi ploskev v časovni enoti $P = \int jdS$. Merimo ga lahko s kalorimetrom. Spremeni se mu temperatura, če nanj posvetimo, $W_n - W_n' = C_p(T - T') = Q$. Toploto Q prejme z absorpcijo energije W iz svetlobe, v časovni enoti velja $\frac{Q}{t} = \frac{W}{t}$. Če je svetlobni tok enakomeren po ploskvi, je na ploskovno enoto preračunana gostota svetlobnega toka $j = \frac{P}{S} = \frac{W}{tS}$. Pri nespremenljivi gostoti svetlobnega toka narašča temperatura kalorimeta linearno s časom $T = T' + \frac{Stj}{C_p}$.
Sevalni tok je merilo za skupno moč elektromagnetnega valovanja, ki ga seva telo ali za sevanje, ki je vpadlo na površino. Je enak energiji ki jo v časovni enoti izseva ali vpade.

Pravokoten vpad na dielektrik: odbojnost, prepustnost: gostota energijskega toka valovanja j_{vp} vpade pravokotno na mejo med dvema dielektrikom ε_1 in ε_2. V vpadnem toku velja

$$E = Bc_1,\ \ c_1 = \frac{c_0}{n_1} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

v prepuščenem toku velja

$$E' = B'c_2,\ \ c_2 = \frac{c_0}{n_2} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

$$E'' = B''c_1$$

za odbit tok pa velja. Na meji se ohranja tangentna komponenta jakosti električnega polja. Ker sta magnetni permeabilnosti obeh sredstev enaki ena, se ohranja tudi tangentna komponenta gostote magnetnega polja. Tako veljata enačbi

$$E + E'' = E' \text{ in } B + B'' = B'$$

Z upoštevanjem zvez med poljema spremenimo drugo enačbo

$$B' + B'' = B \rightarrow E + E'' = E' \frac{c_1}{c_2}$$

Rešitvi enačb sta

$$E' = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E \text{ in } E'' = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} E = \frac{n_1 - n_2 n_1 + n_2}{E}$$

Gostote vpadnega, prepuščenega in odbitega toka so

j$_{vp} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0 E^2 c_1$
$j_{prep} = \frac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_0 E'^2 c_2 = j_{vp}\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$
$j_{odb} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0 E''^2 c_1 = j_{vp}(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2})^2$

Energija se ohranja in velja $j_{vp} = j_{prep} + j_{odb}$.

Odbojnost: ali albedo je definirana kot a in je razmerje vpadnega in odbitega je enako

$$a = \frac{j_{odb}}{j_{vp}} = (\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2})^2$$

Prepustnost: je definirana kot b in je razmerje vpadnega in odbitega je enako

$$b = \frac{j_{prep}}{j_{vp}} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Vedno velja $j_{odb} < j_{vp}$ in $j_{prep} < j_{vp}$ in s tem $a < 1$ in $b < 1$. V splošnem tudi $j_{odb} + j_{prep} < 1$ in $a + b < 1$ saj zaslon ne seva. Če se v zaslonu ne absorbira nič toka, veljajo enačaji $a + b = 1$ in $j_{odb} + j_{prep} = j_{vp}$.

4.7 7. Uklon svetlobe. Huygensovo načelo. Odbojni in lomni zakon. Interferenca svetlobe. Reža, več rež.

Uklon svetlobe: s črtastim svetilom z valovno dolžino λ posvetimo pravokotna na oviro z dvema vzporednima ozkima režama, v majhnem razmiku a. Iz niju izvirata delni valovanji, ki sta koherentni in dasta interferenčno sliko. Na zelo oddaljenem zaslonu se sestaneta skoraj vzporedni delni valovanji iz obeh rež, pri kotu β proti pravokotnici na zaslon velja enačba $a \sin{(\beta)} = N\lambda$. Uklon je posledica interference krogelnih virov valovanj.

Huygensovo načelo: točka, ki jo doseže valovna ploskev je izvor novih elementarnih valov.

Odbojni in lomni zakon: Svetloba se odbije pod odbojnim zakonom, vpadni kot je enak odbojenmu. Odboj je na hrapavi površini razpršen ali difuzen, če je razdalja med vrhovi hrapave površine večja od valovne dolžine. Pri prehodu čez mejo dveh snovi se širi z različnima hitrostma c in c', svetloba se lomi, kar lahko tudi razložimo z Huygensovim načelom. Velja lomni zakon

$$\frac{\sin{(\alpha)}}{\sin{(\beta)}} = \frac{c}{c'}$$

α je vpadni, β je odbojni kot. Pri prehodu se frekvenca ohrani $\nu = \nu'$ zato velja $\frac{c}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda'} \rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{\lambda'}{\lambda}$. Razmerje med hitrostma v vakuumu in v izbrani snovi je lomni kvocient snovi $n = \frac{c_0}{c}$, $\frac{c}{c'} = \frac{n'}{n}$. Disperzija je odvisnost lomnega količnika od valovne dolžine.

Interferenca svetlobe: do interference pride, ko se sreča več valovanj. Naprimer na vodni gladini nastajajo območja ojačanega in območja oslabljenega valovanja. Z dvema točkastima svetiloma ne dobimo ojačanega in oslabljenega valovanja. Zaslon je enakomerno svetel, tudi če pred žarnico postavimo filter ki prepusti samo svetlobo ene barve. Interferenca je fenomen, kjer pride do superpozicije dveh valovanj in ustvarita valovanje z enako, manjšo ali večjo amplitudo. Neopažanje interferenčne slike pojasnimo s časovnim potekom sevanja. Točkasto svetilo seva pdoobno kot radijska antena, a sevanje traja kratek čas. Kratkotrajno sevanje, ki ga izseva svetilo v eni potezi, pravimo valovna poteza. Med zaporednimi valovnimi potezami ni nobene fazne povezave. Tudi valovne poteze obeh svetil so glede faze neodvisne. Preden se odzove merilnik, poteče tisočinka sekunde in sledi iz obeh svetil velika množica valovnih potez, ki imajo proti izbrani valovni potezi naključne fazne razlike, enakomerno porazdeljene med $[0, 2\pi]$. Posamezne valovne poteze sicer interferirajo med seboj, a zaradi spremenljive faze na koncu ni interferenčne slike.
Valovanji, med katerima ni določene fazne povezave in s katerima ne dobimo interferenčne slike, se imenujeta nekoherentni valovanji. Dve ravni valovanji z enako krožno frekvenco in z jakostma električnega polja $E_{x1} = E_{01} \cos{(kz - \omega t - \frac{1}{2}\delta)}$ in $E_{x2} = E_{02} \cos{(kz - \omega t + \frac{1}{2}\delta)}$ potujeta v isti smeri. Od fazne razlike δ med valovanjem pripišemo polovico prvemu in polovico drugemu valovanju. S superpozicijo nastane novo valovanje. V izrazu za gostoto energije v izbrani točki nastopa kvadrat skupne jakosti električnega polja $(E_{x1} + E_{x2})^2 = E_{01}^2 \cos^2{(kz - \omega t - \frac{1}{2}\delta)} + E_{02}^2 \cos^2{(kz - \omega t + \frac{1}{2}\delta)} + 2E_{01}E_{02}[(\cos^2{(kz - \omega t)} \cos^2{(\frac{1}{2}\delta)} - \sin^2{(kz - \omega t)} \sin^2{(\frac{1}{2}\delta)}]$. Povprečna gostota energije in gostota energijskega toka sta sorazmerni s časovnim povprečjem tega izraz. Vzamemo, da je fazna razlika funkcija časa $\delta = \delta(t)$. Zahtevamo, da se razlika δ spreminja tako počasi, da je konstantna v enem nihajnem času, velja $t_0^{-1} \int\limits_0^{t_0} (E_{x1} + E_{x2})^2 dt = \frac{1}{2}E_{01}^2 + \frac{1}{2}E_{02}^2 + E_{01}E_{02} \cos{(\delta)}$. δ se znanto spremeni v času krajšem od časa v katerem se odzove merilnik. Merilnik napravi povprečje po času, kjer je kosinus enak nič. Gostota energijskega toka v novem valovanju je enaka vosti ernegijskih tokov $j = \varepsilon_0 \overline{(E_{01} + E_{02})^2} c = j_1 + j_2$.
Nasprostje nekoherentnih valovanj so koherentna. Imata enako frekvenco, med njima je določena fazna razlika in z njima dobimo interferenčno sliko. Iz enega točkastega svetila moramo narediti dve delni valovanji. Poleg členov $\frac{1}{2}E_{01}^2$ in $\frac{1}{2}E_{02}^2$ je neničelni še člen $E_{01}E_{02}\cos{(\delta)}$, ki vsebuje fazno razliko, ki je odločilna za interferenco.
Izpeljava z vektorji. Imamo $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{01} \cos{(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \delta_1)}$ in $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{02} \cos{(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \delta_2)}$, kjer velja za neko točko $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Kvadrat polj je $\mathbf{E}^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + E_2^2$. Gostota svetlobnega toka je $j = j_1 + j_2 + j_{12}$, kjer velja $j_1 \,\alpha\, E_1^2$, $j_2 \,\alpha\, E_2^2$ in $j_{12} = \varepsilon c_0 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$. Upoštevamo povprečja $\langle \sin^2{(\omega t)} \rangle = \frac{1}{2}$ in $\langle \sin{(\omega t)} \cos{(\omega t)} \rangle = 0$, dobimo

$$j_{12} = \varepsilon c_0 \mathbf{E}_{01} \mathbf{E}_{02} \cos{(\delta)}$$

Kjer je $\delta = \delta_1 - \delta_2$ razlika faz interferirajočih valovanj. Ker se elektromagnetno polje zelo hitro spreminja, spreminjanje težko zaznamo, lahko pa opazujemo gostoto svetlobnega toka.

Reža, več rež: uklonska mrežica je sestavljena iz večjega števila ozkih rež v ramziku a. Iz vseh izvirajo delna valovanja, ki so koherentna in dajo interferenčno sliko. Oko ne more ločiti, kot lahko uho loči ton z eno sinusno sestavino od zvena z več sinusnimi sestavinami in od šuma z zveznim spektrom. Svetloba, ki vsebuje eno samo enobarvno sestavino, lahko ustvari podoben občutek kot mešanica večjega števila enobarvnih sestavin. Ko je zaslon, na katerem opazujemo

./2slit.png

Slika 13: Interferenca ravnega valovanja na dveh režah.

interferenčne slike, dovolj daleč privzamemo, da interferirajo vzporedni curki delnih valovanj. Na oviro z $\mathcal{N}$ zelo ozkimi režami v razmiku a pada širok vzporeden curek enobarvne svetlobe z valovno dolžino λ. Valovanje se uklanja in iz rež izhajajo koherentna delna valovanja. Jakost električnega polja v valovanju na zelo oddaljenem zaslonu je enaka vsoti jakosti električnih polj delnih valovanj. Jakosti delnih valovanj imajo enake amplitude E_0, a ne nihajo sočasno. Med delnima valovanjema sosednjih rež je fazna razlika $\delta = \frac{2\pi\delta_r}{\lambda} = \frac{2\pi a \sin{(\beta)}}{\lambda}$, ki ustreza razliki poti $\delta_r = a\sin{(\beta)}$, kjer je β kot med pravokotnico na oviro in zveznico do opazovane točke na zaslonu. Pri seštevanju si pomagamo z kazalčnim diagramom. Kazalec amplitude jakosti električnega polja na zaslonu $\mathbf{E}_a$ dobimo kot vsoto kazalcev amplitud $\mathbf{E}_0$ v delnih valovanjih. Pri tem sta sosednja kazalca zasukana drug proti drugemu za fazni premik δ. Amplituda na zaslonu $E_a = E_0\frac{\sin{(\frac{1}{2}\mathcal{N}\delta)}}{\sin{(\frac{1}{2}\delta)}}$. Gostota svetlobnega toka na zaslonu je $j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 E_a^2$.

To je vse idealizacija. Primer s eno režo širine b. Nanjo pravokotno pada curek enobarvne svetlobe z valovno dolžino λ. Interferenčno sliko opazujemo na oddaljenem zaslonu. Režo v mislih razdelimo na sodo število vzdolžnih pasov. Vsa delna valovanja enega pasu nadomestimo z valovanjem, ki bi izhajalo iz točkaste zelo ozke reže na sredini pasu. Takšna nadomestna valovanja so koherentna in vsakemu ustreza na zaslonu amplituda jakosti električnega polja. Za začetek vzamemo dva pasova, na simetrijski ravnini reže med obema nadomestnima valovanjema ni fazne razlike. Pri $\beta = 0$ je valovanje ojačeno. Prvič se oslabita ko nastopi fazna razlka π, to se zgodi pri kotu pri katerem se pot nadomestnega delnega valovanja iz sredine prvega pasu za $\frac{1}{2}\lambda$ razlikuje od poti iz sredine drugega pasu, pri fazni razliki π. Velja $b\sin{(\beta)} = N\lambda$. Širino namipljene reže zoožamo na db in delnemu valovanju iz takega pasu ustreza amplituda na zaslonu dE_0. Kazalec skupne amplitude $d\mathbf{E}_b$ je vsota kazalcev amplitud v delnih valovanjih $d\mathbf{E}_0$, zasukanih drug proti drugemu za $d\delta$. Dobimo $E_b = E_0\frac{\sin{(\frac{1}{2}\delta)}}{\frac{1}{2}\delta}$ in $j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 E_b^2$.

./singleslit.png

Slika 14: Enojna reža.