

## VREDNOTENJE EKSOTIČNIH OPCIJ

Privzemimo, da finančni trg lahko modeliramo z večobdobnim binomskim modelom. Naj  $S_t$  označuje ceno delnice v trenutku  $t$ . Definirajmo slučajne spremenljivke

$$Z_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

za  $t = 1, \dots, T$ . Temeljna predpostavka<sup>1</sup> binomskega modela je neodvisnost porazdelitve spremenljivk  $Z_t$  od časa  $t$  ter od preostalih vrednosti  $Z_{t'}$  za  $t \neq t'$ .

Slučajne spremenljivke  $Z_t$  so zato neodvisne in enako porazdeljene z verjetnostno funkcijo

$$Z_t \sim \begin{pmatrix} u & d \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Naj bo izplačilo finančnega instrumenta v času  $T$  slučajna spremenljivka  $X$ . Izplačila *enostavnih* (*plain-vanilla*) instrumentov so odvisna le od cene delnice  $S_T$  ob zapadlosti, izplačila *eksotičnih* (*exotic*) instrumentov pa so odvisna od celotne poti cene delnice  $S_0, S_1, \dots, S_T$ .

Z vpeljavo do tveganja nevtralne verjetnosti  $Q$  namesto naravne verjetnosti  $P$  lahko začetno ceno instrumenta izračunamo z diskontiranjem njegovega pričakovanega izplačila

$$c = \frac{E_Q(X_T)}{(1+R)^T}.$$

Pričakovano vrednost  $E_Q(X_T)$  izračunamo z *analizo polnega binomskega drevesa*, lahko pa jo ocenimo z *Monte Carlo simulacijami*. Če simuliramo vrednosti  $x_1, \dots, x_N$  slučajne spremenljivke  $X$  (t.j. slučajno izberemo  $N$  vrednosti iz porazdelitve  $X$ ), potem je

$$E_Q(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

### Opcije s povprečno izvršilno ceno

Finančni instrumenti, pri katerih so izplačila odvisna od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju, so *azijski instrumenti*. Privzemimo, da ceno delnice modeliramo z binomskim modelom s parametri  $S_0, u, d, T, R$  in  $W$ . Določiti želimo premiji *nakupne* in *prodajne* *opcije s povprečno izvršilno ceno* (*average strike call and put*) z zapadlostjo  $T$  in utežjo  $W$ .

Nakupni tip opcije ob zapadlosti  $T$  imetniku izplača pozitivni del razlike med končno ceno delnice in uteženim povprečjem cene delnice v obdobju  $[0, T]$ , prodajni tip opcije pa pozitivni del razlike med uteženim povprečjem cen delnice v obdobju  $[0, T]$  in končno ceno delnice.

### Naloga 1

- (a) Naj bo  $S_0 = 50, u = 1.05, d = 0.95, T = 5, R = 3\%$  in  $W = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ . Spodnje vrstice prikazujejo 5 možnih poti cene delnice. K vsaki poti pripišite kolikšno izplačilo ob

<sup>1</sup>Predpostavka je ključna pri vpeljavi binomskega modela kot diskretne aproksimacije zveznega Black-Scholesovega modela. Za vrednotenje v binomskem modelu je dovolj konstantnost parametrov  $u, d$  in  $R$ .

zapidlosti pripada imetniku opcije s povprečno izvršilno ceno nakupnega ( $X$ ) oziroma prodajnega ( $Y$ ) tipa.

$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	Izplačilo $X$	Izplačilo $Y$
50.00	52.50	49.88	47.38	45.01	47.26		
50.00	52.50	55.12	57.88	60.78	63.81		
50.00	47.50	49.88	47.38	45.01	42.76		
50.00	47.50	45.12	47.38	45.01	47.26		
50.00	52.50	49.88	52.37	54.99	52.24		

- (b) Pripravite funkcijo `izplacilo(vrsta, W, type)`, ki določi izplačilo opcije ob zapadlosti, če vrsta (vektor) predstavlja zaporedne cene delnice. Vhodni podatek `type` ima lahko vrednosti "call" in "put".

*Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih. Pred oddajo naloge jo testirajte na podatkih, ki so objavljeni v spletni učilnici.*

## Naloga 2

- (a) Pripravite funkcijo `binomski(S0, u, d, R, T, W, type)`, ki določi premijo opcije s povprečno izvršilno ceno ustreznega tipa z analizo polnega binomskega drevesa. Uporabite funkcijo pri parametrih iz naloge (1a).
- (b) Pripravite funkcijo `monte(S0, u, d, R, T, W, type, N)`, ki oceni premijo nakupne oziroma prodajne opcije s povprečno izvršilno ceno z metodo Monte Carlo. Pri tem simulira  $N$  poti cene delnice. Funkcijo uporabite pri vrednostih parametrov  $S_0 = 60, u = 1.05, d = 0.95, R = 1\%, T = 15, W = \text{rep}(1, 16)$ , `type` = "put" ter  $N_1 = 10, N_2 = 100$  in  $N_3 = 1000$ .

*Pozor: Funkciji morata delati pri poljubnih parametrih.*

## Naloga 3

- (a) Natančnost metode Monte Carlo določamo z večkratnim ocenjevanjem ob nespremenjenih pogojih. Nalogo (2b) ponovite  $M = 100$ -krat. Pri vsakem  $N_i$  narišite histogram, ki prikazuje porazdelitev ocen premije (to je vzorčna porazdelitev ocen). Za boljše primerjavo naj bo razpon na osi  $x$  v vseh histogramih enak.
- (b) Na vsakem histogramu z navpično premico prikažite povprečno oceno, izračunano iz  $M$  ponovitev. Primerjajte izračunano povprečje z vrednostjo dobljeno s funkcijo `binomski`. Z vodoravnima puščicama, položenima na abscisno os in izhodiščem v povprečni oceni, prikažite še standardni odklon vzorčne porazdelitve. To je standardna napaka ocene z metodo Monte Carlo.

*Primer histogramov najdete v spletni učilnici. Zaradi slučajnosti so možna manjša odstopanja od vaših rešitev.*