Razširjanje zaupanja za lokalizacijo senzorskih omrežij

Jaka Velkaverh

9.9.2024

Opis problema

- Naprave izmerijo medsebojno razdaljo.
- Senzorsko omrežje predstavimo z grafom.
- Poznamo lokacijo sider $V_S \subseteq V$.
- Iščemo lokacije agentov $V_A \subseteq V$.

Markovska polja

Pogojna neodvisnost

Slučajna vektorja $\underline{X}, \underline{Y}$ sta pogojno neodvisna ob $\underline{Z}$, če velja:

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\underline{x}, \underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right) = f_{\underline{X}|\underline{Z}}\left(\underline{x} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)\ f_{\underline{Y}|\underline{Z}}\left(\underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)$$

Markovska polja

Pogojna neodvisnost

Slučajna vektorja $\underline{X}, \underline{Y}$ sta pogojno neodvisna ob $\underline{Z}$, če velja:

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\underline{x}, \underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right) = f_{\underline{X}|\underline{Z}}\left(\underline{x} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)\ f_{\underline{Y}|\underline{Z}}\left(\underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)$$

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in slučajne spremenljivke $\underline{X}_V = \left(X_{v_1}, X_{v_2}, \ldots, X_{v_n}\right)$. Spremenljivke $\underline{X}_V$ in graf G tvorijo *Markovsko polje*, če za vsake $A, B, S \subseteq V$, kjer S loči A in B velja, da sta $\underline{X}_A$ in $\underline{X}_B$ pogojno neodvisna ob $\underline{X}_S$.

Hammersley–Cliffordov izrek

Naj bo $G = (V, E)$ graf in $\underline{X}_V$ zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke, ki pripadajo vozliščem. Dodatno mora za vsak $\underline{x}_V$ iz definicijskega območja $\underline{X}_V$ veljati $f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) > 0$. Tedaj G in $\underline{X}_V$ tvorita Markovsko polje natanko tedaj, ko se skupna gostota faktorizira po klikah grafa G, torej za vsako kliko $C \subseteq V$ obstaja $\psi_C(\underline{x}_C)$, da je

$$f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) \propto \prod_{C \text{ klika } G} \psi_C(\underline{x}_C)$$

Gostote slučajnega vektorja

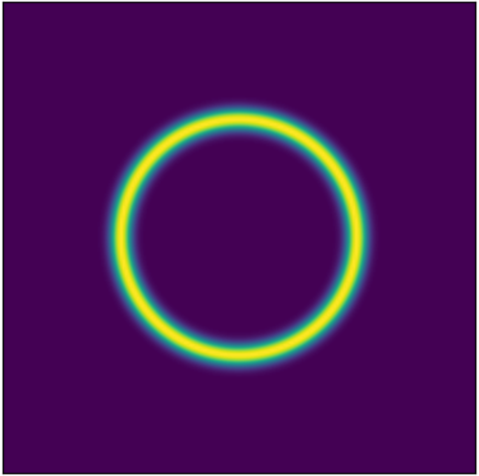
Za $\{u, v\} \in E$ in $d_{u,v}$ izmerjena razdalja definiramo

$$\psi_{u,v}(x_u, x_v) = \exp\left[-\frac{\left(\|x_u - x_v\| - d_{u,v}\right)^2}{2\sigma_{u,v}^2}\right].$$

Tedaj bo

$$f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) \propto \prod_{uv \in E} \psi_{u,v}(x_u, x_v)$$

tvoril z G Markovsko polje.



Slika 1: Primer potenciala parov, če eno od pozicij fiksiramo. Tu je izmerjena razdalja 10, $\sigma_{u,v}$ pa 0,3.

Razširjanje zaupanja

$$\text{Za } u, v \in V_A\text{: } \mu_{u \to v}(x_v) := \int_{X_u} \psi_{u,v}(x_u, x_v) \prod_{t \in N(u) \setminus \{v\}} \mu_{t \to u}(x_u)\, dx_u,$$

$$\text{za } u \in V_S, v \in V_A\text{: } \mu_{u \to v}(x_v) := \psi_{u,v}(y_u, x_v),$$

$$M_u(x_u) := \prod_{t \in N(u)} \mu_{t \to u}(x_u).$$

Razširjanje zaupanja na drevesu

Naj G, $\underline{X}_V$ tvorita Markovsko polje in G drevo ter $f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) > 0$. Za vsak $v \in V_A$ je zaupanje proporcionalno robni gostoti:

$$M_v(x_v) \propto f_{X_v | \underline{X}_{V_S}}\left(x_v | \underline{X}_{V_S} = \underline{y}_{V_S}\right).$$

Iterativno razširjanje zaupanja

Za iteracijo $i \geq 1$ definiramo sporočila $\mu_{u \to v}$ od agentov kot

$$\mu^i_{u \to v}(x_v) := \int_{X_u} \psi_{u,v}(x_u, x_v) \prod_{t \in N(u) \setminus \{v\}} \mu^{i-1}_{t \to u}(x_u)\, dx_u; \quad u \in V_A$$

in od sider kot

$$\mu^i_{u \to v}(x_v) := \psi_{u,v}(y_u, x_v); \quad u \in V_S.$$

Podobno kot prej so

$$M^i_v(x_v) := \prod_{u \in N(v)} \mu^i_{u \to v}(x_v).$$

Iterativno razširjanje zaupanja

Naj graf $G = (V, E)$ in slučajni vektor $\underline{X}_V$ zadostujeta pogojem za razširjanje zaupanja na drevesu. Naj bodo M_v zaupanja klasičnega, M_v^i pa iterativnega razširjanja zaupanja. Tedaj za premer $N := \max_{u,v \in V} d_G(u, v)$ velja, da

$$\forall i \geq N + 1. \ \forall v \in V_A. \ \forall x_v. \ \ M_v^i(x_v) = M_v(x_v).$$

Iterativno razširjanje zaupanja

Naj graf $G = (V, E)$ in slučajni vektor $\underline{X}_V$ zadostujeta pogojem za razširjanje zaupanja na drevesu. Naj bodo M_v zaupanja klasičnega, M_v^i pa iterativnega razširjanja zaupanja. Tedaj za premer $N := \max_{u,v \in V} d_G(u, v)$ velja, da

$$\forall i \geq N + 1.\ \forall v \in V_A.\ \forall x_v.\ \ M_v^i(x_v) = M_v(x_v)\,.$$

- Iterativno razširjanje zaupanja lahko izvajamo, tudi ko ima graf cikle.
- Teoretično to ni utemeljeno, empirično daje dobre rezultate.

Neparametrično razširjanje zaupanja

Namesto z $\mu_{u \to v}$ delamo z

$$\hat{\mu}^{i}_{u \to v}(x_v) = \sum_{j=1}^{n} w^{j,i}_{u \to v} K_{H^{i}_{u \to v}} \left(x_v - x^{j,i}_{u \to v} \right),$$

namesto M_v uporabljamo

$$\hat{M}^{i}_{v}(x_v) = \sum_{j=1}^{n} w^{j,i}_{v} K_{H^{i}_{v}} \left(x_v - x^{j,i}_{v} \right).$$

Iz točke zaupanja $x_v^{j,i-1}$ dobimo točko sporočila $x_{v\to u}^{j,i}$ tako, da jo zamaknemo za $D \sim \mathcal{N}\left(d_{u,v}, \sigma_{u,v}^2\right)$ v naključno smer. Nova utež je

$$w_{u\to v}^{j,i} = w_u^{j,i-1} / \mu_{v\to u}^{i-1}\left(x_u^{j,i-1}\right).$$

Iz točke zaupanja $x_v^{j,i-1}$ dobimo točko sporočila $x_{v\to u}^{j,i}$ tako, da jo zamaknemo za $D \sim \mathcal{N}\left(d_{u,v}, \sigma_{u,v}^2\right)$ v naključno smer. Nova utež je

$$w_{u\to v}^{j,i} = w_u^{j,i-1} / \mu_{v\to u}^{i-1}\left(x_u^{j,i-1}\right).$$

Iz uteži in točk dohodnih sporočil $x_{u\to v}^{j,i}$ dobimo uteži in točke zaupanja $x_v^{j,i+1}$ s tehniko *mixture importance sampling*.

Iz točke zaupanja $x_v^{j,i-1}$ dobimo točko sporočila $x_{v\to u}^{j,i}$ tako, da jo zamaknemo za $D \sim \mathcal{N}\left(d_{u,v}, \sigma_{u,v}^2\right)$ v naključno smer. Nova utež je

$$w_{u\to v}^{j,i} = w_u^{j,i-1} / \mu_{v\to u}^{i-1}\left(x_u^{j,i-1}\right).$$

Iz uteži in točk dohodnih sporočil $x_{u\to v}^{j,i}$ dobimo uteži in točke zaupanja $x_v^{j,i+1}$ s tehniko *mixture importance sampling*.

Na koncu je predvidena lokacija agenta v enaka

$$\hat{y}_v = \sum_{j=1}^{n} w_v^{i_{konec}} x_v^{j,i_{konec}},$$

kar je pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X z gostoto proporcionalno $\hat{M}_v^{i_{konec}}$.

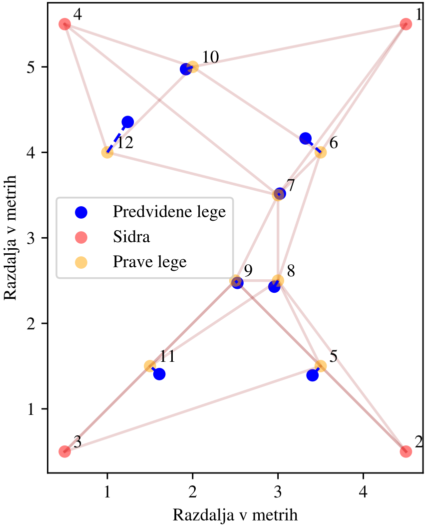
Preizkusi

(a) Slika 1. postavitve.

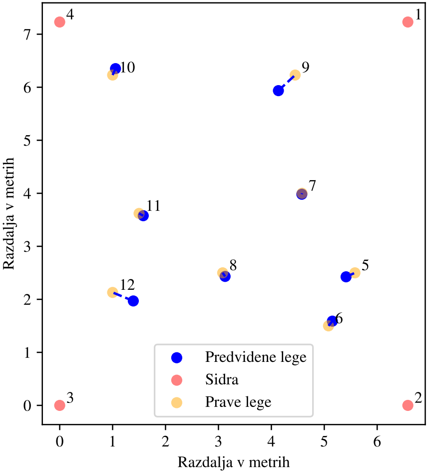
(b) Slika 2. postavitve.

Slika 2

Iz meritev smo določili $d_{u,v}$ in $\sigma_{u,v}$. Postopek smo preizkusili tudi z določenimi omejitvami.



(a) 1. postavitev, 1. zbirka, vse meritve, 3 najbližji pari.



(b) 2. postavitev, 1. zbirka, 5 meritev, vsi pari.