Razširjanje zaupanja za lokalizacijo senzorskih omrežji

Jaka Velkaverh

18.12.2023

Opis problema

Lokalizacija senzorskega omrežja

Omrežje si predstavljamo kot utežen graf, kjer so naprave vozlišča. Dve vozlišči sta povezani, če sta pripadajoči napravi dovolj blizu, da lahko izmerita razdaljo. Utež povezav je izmerjena razdalja, kjer pri merjenju pride do napak.
Vemo lokacije od nekaterih naprav, tem rečemo sidra. Izračunati želimo približke za lokacije ostalih, tem rečemo agenti.

Predpostavimo, da je omrežje naprav povezano.

Verjetnostni pogled

Oznake

- Vozlišča označujemo z črkami u, v, s.
- Napaka pri merjenju $\nu_{u,v} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.
- $\underline{X}_u \in K\left(0, R\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ naključni vektor lokacije naprave.
- $\underline{X}_A$ naključni vektor lokacije množice naprav A.

Markovska polja

Pogojna neodvisnost

Nakjučna vektorja $\underline{X}, \underline{Y}$ sta pogojno neodvisna ob $\underline{Z}$, če velja:

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\underline{x}, \underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right) = f_{\underline{X}|\underline{Z}}\left(\underline{x} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)\; f_{\underline{Y}|\underline{Z}}\left(\underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)$$

Markovska polja

Pogojna neodvisnost

Nakjučna vektorja $\underline{X}, \underline{Y}$ sta pogojno neodvisna ob $\underline{Z}$, če velja:

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}\left(\underline{x}, \underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right) = f_{\underline{X}|\underline{Z}}\left(\underline{x} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)\ f_{\underline{Y}|\underline{Z}}\left(\underline{y} \mid \underline{Z} = \underline{z}\right)$$

Definicija

Graf $G = (V, E)$, in naključni slučajni vektorji $\underline{X}_v$, indeksirani z $v \in V$ tvorijo Markovsko polje, če velja Markova lastnost po parih:
Za vsaka nesosedna $u, v \in V$ sta $\underline{X}_u$, $\underline{X}_v$ pogojno neodvisna ob vseh ostalih $\underline{X}_{V\setminus\{u,v\}}$

Hammersley–Cliffordov izrek

Naj bo $G = (V, E)$ in $\underline{X}_v$ kot prej in dodatno $f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) > 0 \quad \forall \underline{x}_V$. Tedaj G in $\underline{X}_V$ tvorita Markovsko polje natanko tedaj, ko se skupna gostota faktorizira po klikah grafa G:

$$f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) \propto \prod_{C \text{ klika } G} \psi_C(\underline{x}_C)$$

Hammersley–Cliffordov izrek

Naj bo $G = (V, E)$ in $\underline{X}_v$ kot prej in dodatno $f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) > 0 \quad \forall \underline{x}_V$. Tedaj G in $\underline{X}_V$ tvorita Markovsko polje natanko tedaj, ko se skupna gostota faktorizira po klikah grafa G:

$$f_{\underline{X}_V}(\underline{x}_V) \propto \prod_{C \text{ klika } G} \psi_C(\underline{x}_C)$$

Torej če definiramo skupno gostoto kot produkt potencialov, bodo pripadajoče slučajne spremenljivke tvorile Markovsko polje.

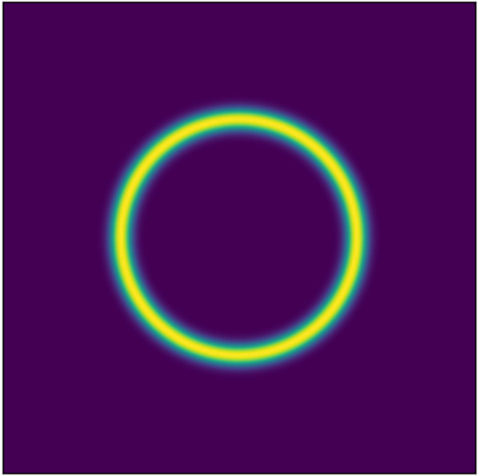
Za $\{u, v\} \in E$ in $d_{u,v}$ izmerjena razdalja definiramo

$$\psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{x}_v\right) = f_{\nu_{u,v}}\left(|\underline{x}_u - \underline{x}_v| - d_{u,v}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(|\underline{x}_u - \underline{x}_v| - d_{u,v}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Za klike C, ki niso velikosti 2

$$\psi_C\left(\underline{x}_C\right) = 1$$

Po izreku bo produkt takih potencialov skupna porazdelitev nekega slučajnega vektorja, ki ima strukturo Markovskega polja.



Slika: Primer potenciala parov, če eno od pozicij fiksiramo. Tu je izmerjena razdalja 10, σ pa 0,3.

Naj bodo V_a agenti, V_s pa sidra. Z $\underline{y}_{V_s}$ označimo (fiksne) znane pozicije sider. Posteriorna gostota bo torej

$$f_{V_a|V_s}\left(\underline{x}_{V_a}|V_s=\underline{y}_{V_s}\right)\propto\prod_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u,v \text{ agenta}}}\psi_{u,v}\left(\underline{x}_u,\underline{x}_v\right)\prod_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u \text{ agent}, v \text{ sidro}}}\psi_{u,v}\left(\underline{x}_u,\underline{y}_v\right)$$

Naj bodo V_a agenti, V_s pa sidra. Z $\underline{y}_{V_s}$ označimo (fiksne) znane pozicije sider. Posteriorna gostota bo torej

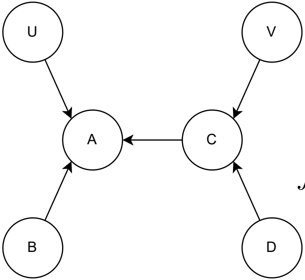
$$f_{V_a|V_s}\left(\underline{x}_{V_a}|V_s = \underline{y}_{V_s}\right) \propto \prod_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u,v \text{ agenta}}} \psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{x}_v\right) \prod_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u \text{ agent}, v \text{ sidro}}} \psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{y}_v\right)$$

Za $u \in V_a$ želimo izračunati robno gostoto

$$f_{X_u|V_s}\left(\underline{x}_u|V_s = \underline{y}_{V_s}\right) = \int_{V_a\setminus X_u} f_{V_a|V_s}\left(\underline{x}_{V_a\setminus X_u}|V_s = \underline{y}_{V_s}\right) d\underline{x}_{V_a\setminus X_u}$$

Razširjanje zaupanja na drevesih

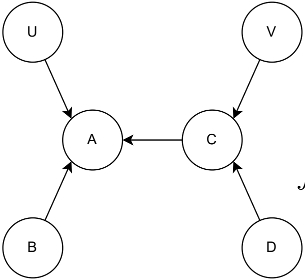
Poglejmo si primer, ko je graf drevo.



$$\int_{V_a \setminus X_u} f_{V_a|V_s}\left(\underline{x}_{V_a \setminus X_A} | V_s = \underline{y}_{V_s}\right) d\underline{x}_{V_a \setminus X_A} \propto$$

$$\int_{\underline{X}_B, \underline{X}_D, \underline{X}_C} \psi_{U,A}\psi_{B,A}\psi_{C,A}\psi_{V,C}\psi_{D,C} d\underline{x}_B d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

Poglejmo si primer, ko je graf drevo.



$$\int_{V_a \setminus X_u} f_{V_a|V_s}\left(\underline{x}_{V_a \setminus X_A} | V_s = \underline{y}_{V_s}\right) d\underline{x}_{V_a \setminus X_A} \propto$$

$$\int_{\underline{X}_B, \underline{X}_D, \underline{X}_C} \psi_{U,A}\psi_{B,A}\psi_{C,A}\psi_{V,C}\psi_{D,C} d\underline{x}_B d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

$$\psi_{U,A} \int_{\underline{X}_B} \psi_{B,A} d\underline{x}_B \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A}\psi_{V,C} \int_{\underline{X}_D} \psi_{D,C} d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

$$\text{Za } u, v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \int_{\underline{X}_u} \psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{x}_v\right) \prod_{t \in N(u) \setminus v} \mu_{t \to u}\left(\underline{x}_u\right) d\underline{x}_u$$

$$\text{Za } u \in V_s \text{ in } v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \psi_{u,v}\left(\underline{y}_u, \underline{x}_v\right)$$

$$\text{Za } u, v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \int_{\underline{X}_u} \psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{x}_v\right) \prod_{t \in N(u) \setminus v} \mu_{t \to u}\left(\underline{x}_u\right) d\underline{x}_u$$

$$\text{Za } u \in V_s \text{ in } v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \psi_{u,v}\left(\underline{y}_u, \underline{x}_v\right)$$

$$\Rightarrow \psi_{U,A} \int_{\underline{X}_B} \psi_{B,A} d\underline{x}_B \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A} \psi_{V,C} \int_{\underline{X}_D} \psi_{D,C} d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

Za $u, v \in V_a$: $\mu_{u \to v}(\underline{x}_v) := \int_{\underline{X}_u} \psi_{u,v}(\underline{x}_u, \underline{x}_v) \prod_{t \in N(u) \setminus v} \mu_{t \to u}(\underline{x}_u)\, d\underline{x}_u$

Za $u \in V_s$ in $v \in V_a$: $\mu_{u \to v}(\underline{x}_v) := \psi_{u,v}\left(\underline{y}_u, \underline{x}_v\right)$

$$\Rightarrow \psi_{U,A} \int_{\underline{X}_B} \psi_{B,A} d\underline{x}_B \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A} \psi_{V,C} \int_{\underline{X}_D} \psi_{D,C} d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

$$\mu_{U \to A}(\underline{x}_A)\, \mu_{B \to A}(\underline{x}_A) \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A} \mu_{V \to C}(\underline{x}_C)\, \mu_{D \to C}(\underline{x}_C)\, d\underline{x}_C =$$

$$\text{Za } u, v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \int_{\underline{X}_u} \psi_{u,v}\left(\underline{x}_u, \underline{x}_v\right) \prod_{t \in N(u) \setminus v} \mu_{t \to u}\left(\underline{x}_u\right) d\underline{x}_u$$

$$\text{Za } u \in V_s \text{ in } v \in V_a\text{: } \mu_{u \to v}\left(\underline{x}_v\right) := \psi_{u,v}\left(\underline{y}_u, \underline{x}_v\right)$$

$$\Rightarrow \psi_{U,A} \int_{\underline{X}_B} \psi_{B,A} d\underline{x}_B \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A} \psi_{V,C} \int_{\underline{X}_D} \psi_{D,C} d\underline{x}_D d\underline{x}_C =$$

$$\mu_{U \to A}\left(\underline{x}_A\right) \mu_{B \to A}\left(\underline{x}_A\right) \int_{\underline{X}_C} \psi_{C,A} \mu_{V \to C}\left(\underline{x}_C\right) \mu_{D \to C}\left(\underline{x}_C\right) d\underline{x}_C =$$

$$\mu_{U \to A}\left(\underline{x}_A\right) \mu_{B \to A}\left(\underline{x}_A\right) \mu_{C \to A}\left(\underline{x}_A\right) =$$

$$\prod_{u \in N(A)} \mu_{u \to A}\left(\underline{x}_A\right)$$

Za grafe s cikli

Naj bosta $u, v \in V_a$, $i \in \mathbb{N}$ pa število iteracije.

$$M_u^{(i)}\left(\underline{x}_u\right) := \prod_{t \in N(u)} \mu_{t \to u}^{(i)}\left(\underline{x}_u\right)$$

$$\mu_{v \to u}^{(i)}\left(\underline{x}_u\right) := \int_{\underline{X}_v} \psi_{v,u}\left(\underline{x}_v, \underline{x}_u\right) \frac{M_v^{(i-1)}\left(\underline{x}_v\right)}{\mu_{u \to v}^{(i-1)}\left(\underline{x}_v\right)} d\underline{x}_v$$

Za drevesa to konvergira k pravim vrednostim.