π kot neskončna vsota ali produkt

Jaka Velkaverh

UL FMF

22.5.2023

Definicija konvergence številske vrste

Definicija

<u>Neskončna vsota</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira k vrednosti S, če velja, da je limita delnih vsot enaka S, to je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = S$$

Definicija

<u>Neskončen produkt</u> $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira k vrednosti P, če velja, da je limita delnih produktov enaka P, to je

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i = P$$

Viètova formula za π

Trditev

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots$$

Viètova formula za π

Trditev

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots$$

Torej:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}^{n \text{ dvojk v števcu}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Wallisova formula

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

Wallisova formula

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

Leibnizova formula

Taylorjev razvoj arctg:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

Leibnizova formula

Taylorjev razvoj arctg:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

Vstavimo $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Baselski problem (Eulerjev pristop)

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$$

Baselski problem (Eulerjev pristop)

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$$

Primerjamo z Taylorjevim razvojem, gledamo koeficiente pri x^2:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} - \dots$$

Baselski problem (Eulerjev pristop)

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$$

Primerjamo z Taylorjevim razvojem, gledamo koeficiente pri x^2:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} - \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Baselski problem

Ideja: Fourierov razvoj funkcije $f(x) = x$

Baselski problem

Ideja: Fourierov razvoj funkcije $\mathrm{f}(x) = x$

Lema (Parsevalova enakost v $L^2(-\pi, \pi)$)

Če so a_n, b_n členi Fourierove vrste funkcije $\mathrm{f}(x)$, velja:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

Baselski problem

Ideja: Fourierov razvoj funkcije $\mathrm{f}(x) = x$

Lema (Parsevalova enakost v $L^2(-\pi, \pi)$)

Če so a_n, b_n členi Fourierove vrste funkcije $\mathrm{f}(x)$, velja:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Machinova in podobne formule

Za $a, b \in (0, \infty)$ velja

$$a + ib = |a + ib|\, \mathrm{e}^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}$$

Machinova in podobne formule

Za $a, b \in (0, \infty)$ velja

$$a + ib = |a + ib|\, \mathrm{e}^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}$$

- Najenostavnjejša: $(2 + i)(3 + i) = (5 + 5i)$

Machinova in podobne formule

Za $a, b \in (0, \infty)$ velja

$$a + ib = |a + ib|\, \mathrm{e}^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}$$

- Najenostavnjejša: $(2 + i)(3 + i) = (5 + 5i)$
- Machinova: $(5 + i)^4(2 + 2i) = (-8 + 1912i)$

Ramanujanove vrste

So oblike:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{Ak + B}{C^k}$$

Recimo

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{k!^4} \frac{26390k + 1103}{396^{4k}}$$

ali pa

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 (640320)^{3k+\frac{3}{2}}}$$