Homotopietypen von Subniveaumengen von Morse-Funktionen

Ein Vortrag für das Seminar
"Topics in Global Analysis"
bei Prof. Ursula Ludwig

Jakob Dimigen

§1 Einführung

Wiederholung von letzter Woche:

Def. 1.1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, $\dim(M) = n$, p ein kritischer Punkt von f. Sei $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von p. Dann ist der *Index* von p die Anzahl der negativen Eigenwerte von der Matrix

$$H_p^\varphi f := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

p heißt *nicht degneriert*, falls $H_p^\varphi f$ invertierbar ist.

Theorem 1.2 (Das Morse-Lemma)**.** *Sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ glatt und p ein nicht degenerierter kritischer Punkt von f mit Index k. Dann existerit ein lokales Koordinatensystem $(x_1, ..., x_n)$ in einer Umgebung U von p, sodass*

$$f = f(p) - x_1^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2$$

und

$$x_1(p) = ... = x_n(p) = 0$$

//

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ eine *Subniveaumenge* von f. Eine *Morse-Funktion* ist eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, sodass alle kritischen Punkte von f nicht degeneriert sind. Das Ziel des Vortrags ist es, die Topologie der Subnieveuamengen von Morse-Funktionen zu verstehen.

Um anhand eines Beispieles die Situation zu untersuchen, benötigen wir eine Definition:

Def. 1.3 (Eine k-Zelle anbringen)**.** Es sei X ein Topologischer Raum. Seien

$$e^k = D^k = \{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + ... + x_k^2 \leq 1\}$$

$$\varphi : \partial e^k \to X \text{ stetig}$$

$$X \cup_\varphi e^k = (X \amalg e^k)/\sim, \text{ wobei}$$

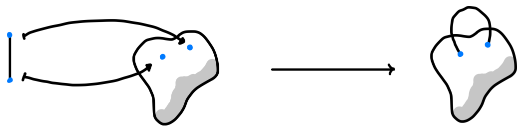
$$\partial e^k \ni x \sim y \in X \Leftrightarrow \varphi(x) = y$$

Dann heißt e^k k-Zelle, φ Anheftungsabbildung und $X \cup_\varphi e^k$ heißt X mit einer k-Zelle angebracht. Per Definition ist

$$\varnothing \cup e^0 := e^0 = * \text{ und falls } X \neq \varnothing : X \cup e^0 := X$$

Ein Paar Beispiele:

– Eine 1-Zelle lässt uns Zusammenhangskomponenten mit einer "Schnur" verbinden, oder ist das Anheften einer "Schlaufe".



– Eine 2-Zelle anzubringen kann sein wie das anbringen einer Blase oder das stopfen eines Loches durch eine "Membran".

Wir Untersuchen die Subniveaumengen M^a der Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$, die den Punkten im Torus ihren minimalen Abstand zur eingezeichneten Ebene zuordnet:

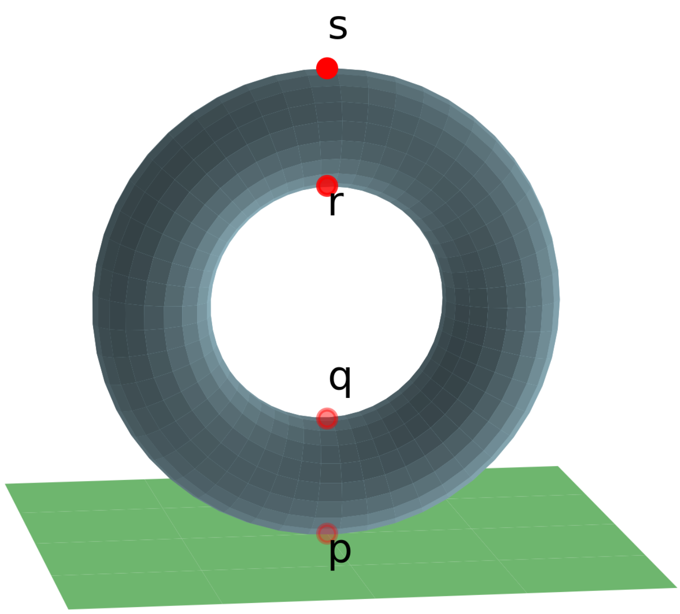


Figure 1: Torus auf der Ebene

Die kritischen Punkte dieser Höhenfunktion sind p, q, r und s.

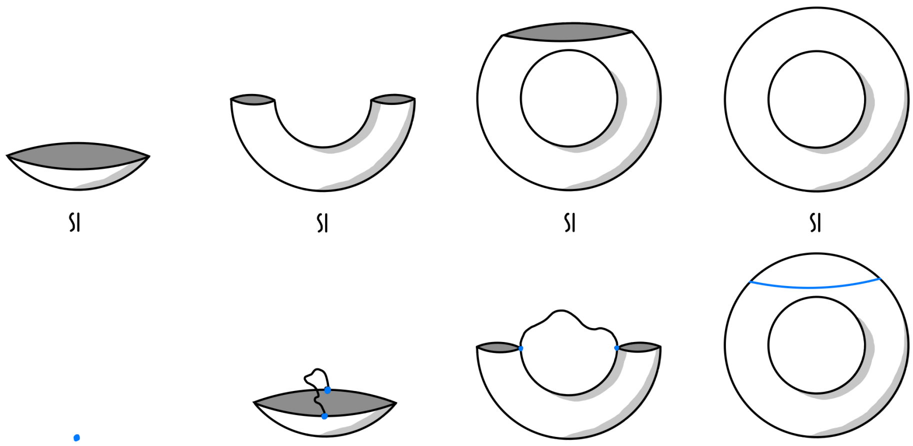


Figure 2: Niveaumengen der Höhenfunktion des Torus

- Für $a < f(p)$ ist $M^a = \varnothing$.
- Für $f(p) \leq a < f(p)$ ist M^a homotopieäquivalent zum Punkt, also dem leeren Raum mit einer 0-Zelle angebracht.
- Für $f(p) \leq a < f(q)$ ist M^a homotopieäquivalent zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 1-Zelle angebracht wurde.
- Für $f(q) \leq a < f(r)$ ist M^a homotopieäquivalent zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 1-Zelle angebracht wurde.
- Für $f(s) \leq a$ ist M^a der Torus selbst, also zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 2-Zelle angebracht wurde.

Wir bemerken:

- Gibt es im Intervall $[a, b]$ keine kritischen Werte, so sind M^a und M^b diffeomorph.
- Gibt es in $f^{-1}[a, b]$ genau einen kritischen Punkt, dann hat M^b den Homotopie-Typ von M^a mit einer k-Zelle angebracht, wobei $k \in \mathbb{N}_0$

Um diese zwei Aussagen zu präzisieren, brauchen wir einige Definitionen:

Def. 1.4 (Deformationsretrakt)**.** Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum von X. Eine stetige Abbildung $r : X \times [0, 1] \to X$ heißt *Deformationsretraktion* auf A, falls gelten:

$$r(\cdot, 0) = \mathrm{id}_X$$
$$r(X, 1) \subseteq A$$
$$r(\cdot, 1)|_A = \mathrm{id}_A$$

A heißt *Deformationsretrakt*, falls eine Deformationsretraktion von X auf A existiert.

Deformationsretrakte haben einige schöne Eigenschaften. Falls A ein Deformationsretrakt von X ist, so ist die Inklusion $A \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, hat ein weiterer Deformationsretrakt B von X deshalb denselben Homotopietypen wie A.
Es ist eine Tatsache, dass zwei Unterräume A und B genau dan denselben Homotopietypen haben, wenn sie beide Deformationsretrakte eines gemeinsamen Oberraumes sind. Um dies einzusehen benötigt man weitere topologische Theorie.

§2 Das erste Deformationslemma

Def. 2.1 (Riemannsche Metrik)**.** Eine *Riemannsche Metrik* g ist ein Skalarprodukt

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

für jeden Punkt p, sodass für alle Vektorfelder X und Y die Abbildung $p \to g_p(X(p), Y(p))$ glatt ist. Wir schreiben

$$g_p(x, y) = \langle x, y \rangle$$

Def. 2.2 (Gradient)**.** Es sei M *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, also eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemannschen Metrik g. Außerdem sei $f : M \to \mathbb{R}$ glatt. Dann ist der *Gradient* von f das (einzigartige) Vektorfeld ∇f für das gilt:

$$\langle X, \nabla f \rangle = \mathrm{d}fX$$

Falls M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, ist $p \in M$ ein kritischer Punkt von f genau dann, wenn $\nabla f(p) = 0$.

Man kann auf jeder Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik definieren.

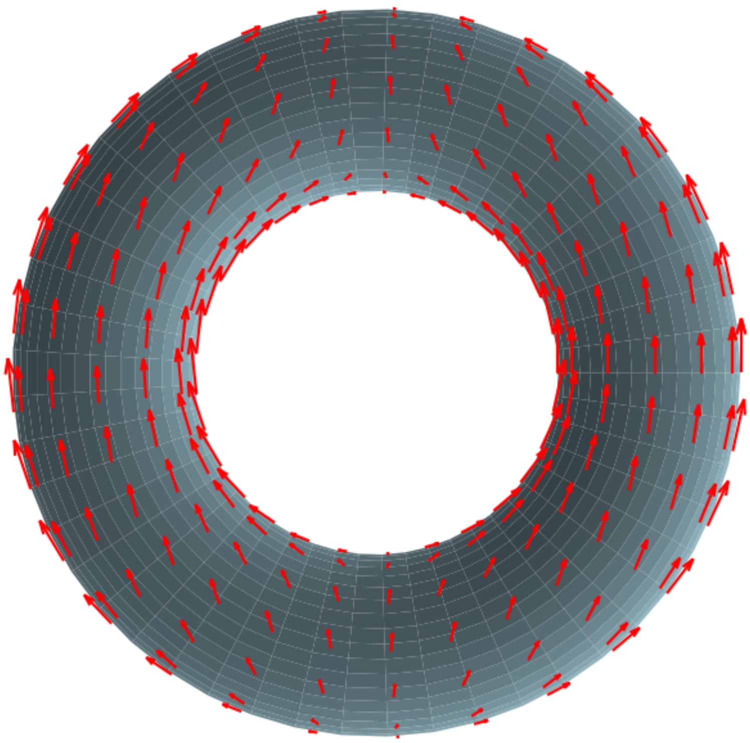


Figure 3: Gradient der Höhenfunktion auf dem Torus

Def. 2.3 (Flusslinie, Wang)**.** Es sei X ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Für einen glatten Weg $\gamma : I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, definiere für $t_0 \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_0) = \mathrm{d}\gamma(t_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in T_pM$ das durch die Identität auf $\mathbb{R}$ induzierte Element im Tangentialraum ist. Ein Weg $\gamma : I \to \mathbb{R}$ heißt *Flusslinie* eines Vektorfeldes X, falls für alle $t_0 \in I$ gilt:

$$X(\gamma(t_0)) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

Def. 2.4 (1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen)**.** Eine *1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M, \text{ wobei } (t, p) \mapsto \varphi_t(p)$$

Sodass für alle s, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

und

$$\varphi_0 = \mathrm{id}_M$$

Ich schreibe:

$$\varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \to M; t \mapsto \varphi_t(p)$$

Wir sagen eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen wird von einem Vektorfeld X generiert, falls für alle $p \in M$ gilt

$$X(p) = \frac{\mathrm{d}\varphi_\bullet(p)}{\mathrm{d}t}(0)$$

Ist φ eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismern, so ist für alle $t \in \mathbb{R}$ φ_t ein Diffeomorphismus mit Inverse φ_{-t}.

Bemerke: Falls X eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen φ erzeugt, dann ist für alle $p \in M$ der Weg $\varphi_\bullet(p)$ eine Flusslinien von X, denn

$$\begin{aligned}
X(\varphi_{t_0}(p)) &= \frac{\mathrm{d}\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p))}{\mathrm{d}t}(0) = T_0\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= T_0\varphi_{t_0+\bullet}(p) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \cdot T_0(t_0 + \mathrm{id}_\mathbb{R}) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\varphi_\bullet(p)}{\mathrm{d}t}(t_0)
\end{aligned}$$

Lemma 2.5. *Es sei X ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M mit kompaktem Träger. Dann generiert X eine eindeutige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen.*

Proof. Der Beweis ist recht umfangreich, wird hier aber ausgelassen. □

Theorem 2.6 (Erstes Deformationslemma)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Hat f keine kritischen Werte im Intervall $[a, b]$ und ist $f^{-1}[a, b]$ kompakt, so existiert ein Diffeomorphismus $M^a \to M^b$, und M^a ist ein Deformationsretrakt von M^b.*

Das ist genau die erste Aussage, die wir schon am Anfang beim Torus beobachtet haben!

Die Idee des Beweises ist es, M^a entlang der Richtung, in die f am stärksten steigt, also entlang des Gradientenfeldes mit einem Diffeomorphismus φ "nach oben zu ziehen", bis $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$.

Beweis erstes Deformationslemma. Es existiert eine kompakte Umgebung $K \in M$ von $f^{-1}[a, b]$. Dies folgt aus Whitneys Einbettungssatz und dem Satz von Heine-Borel. Sei

$\rho : M \to \mathbb{R}$ eine glatte, positive Funktion, sodass

$$\rho(p) = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

für alle $p \in f^{-1}[a, b]$ und die außerhalb von K verschwindet und für die für alle $p \in K$, die keine kritischen Punkte sind, gilt:

$$0 \leq \rho(p) \leq 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

Bemerke dass ρ innerhalb von $f^{-1}[a, b]$ wohldefiniert ist, da sich keine kritischen Punkte im Intervall $[a, b]$ befinden. Definiere ein Vektorfeld X durch

$$X(p) = \rho(p) \cdot \nabla f(p)$$

Dann hat X kompakten Träger, erfüllt also die Vorraussetzungen von Lemma 2.5. Sei also φ die einzigartige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, die von X generiert wird. Wir bekommen für jedes $p \in M$ eine Abbildung $f \circ \varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Behauptung 1. Für alle $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $q = \varphi_{t_0}(q)$ ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_\bullet(p)(t_0) \in [0, 1]$ und falls $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$ gilt sogar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_\bullet(q)(t_0) = 1$.

Für $q = \varphi_{t_0}(p)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_{t_0}(p) &= T_{\varphi_{t_0}(p)} f \cdot T_{t_0} \varphi_\bullet(p) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) = \mathrm{d}f(q) \cdot X(q) \\ &= \langle X(q), \nabla f(q) \rangle = \rho(q) \langle \nabla f(q), \nabla f(q) \rangle \in [0, 1]\end{aligned}$$

$f \circ \varphi_\bullet(p)$ ist also monoton wachsend für alle $p \in M$.

Falls sogar $f(\varphi_p(t_0)) \in [a, b]$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi^p(t_0) = 1$$

//

Behauptung 2. Für $p \in f^{-1}(a)$, $t_0 \in [0, b - a]$ gilt $f(\varphi_{t_0}(p)) \in [a, b]$.

$$f(\varphi_{t_0}(p)) \geq f(\varphi_0(p)) = a$$

und

$$\begin{aligned}
f(\varphi_t(p)) &\leq f(\varphi_{b-a}(p)) \\
&= \int_0^{b-a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_t(p))\mathrm{d}t + f(\varphi_0(p)) \\
&= \int_0^{b-a} \rho(\varphi_t(p))\langle \nabla f(\varphi_t(p)), \nabla f(\varphi_t(p))\rangle \mathrm{d}t + a \\
&\leq \int_0^{b-a} 1\,\mathrm{d}t + a \\
&= b
\end{aligned}$$

//

Behauptung 3. Unter φ_{b-a} wird die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ auf die Niveaumenge $f^{-1}(b)$ abgebildet.

Für $p \in f^{-1}(a)$ gilt:

$$\varphi_{a-a}(p) = \varphi_0(p) = p$$

und für $t_0 \in [0, b-a]$ gilt wegen Behauptung 1 und 2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}-a}(p))(t_0) = 1$$

also

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = f(\varphi_0(p)) + (b-a) = b$$

Genauso gilt für $q \in f^{-1}(b)$: $f(\varphi_{a-b}(q)) = a$, also $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$.

//

Behauptung 4. $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$

"$\subseteq$": Sei $p \in M^a$. OBdA. existiert $s \in [0, b-a]$, sodass $f(\varphi_s(p)) = a$, ansonsten gilt für alle $s \in [0, b-a] : f(\varphi_s(p)) \leq a < b$. Dann gilt

$$f(\varphi_{b-a}(p)) \leq f(\varphi_{b-a+s}(p)) = f(\varphi_{b-a}(\varphi_s(p))) = b$$

"$\supseteq$": Analog.

//

Damit ist $\varphi_{b-a}|_{M^a}$ ein Diffeomorphismus zwischen M^a und M^b.

Betrachte nun $r : M^b \times \mathbb{R} \to M^b$,

$$r(p,t) = \begin{cases} p & \text{falls } f(p) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & \text{falls } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

Dann ist r stetig, $r(\cdot, 0)$ ist die Identität auf M^b, $r(\cdot, 1)|_{M^a}$ ist die Identität auf M^a und $r(1, M^b) \subseteq M^a$, also ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b.

□

Corollary 2.7. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ohne kritische Werte in $[a,b]$. dann ist $f^{-1}[a,b]$ diffeomorph zu den Mannigfaltigkeiten mit Rand $f^{-1}(a) \times [a,b]$ und $f^{-1}(b) \times [a,b]$.*

§3 Das zweite Deformationslemma

Theorem 3.1 (Zweites Deformations-Lemma)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und p ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index k. Sei $c := f(p)$ und $\varepsilon \geq 0$, sd. $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ kompakt ist und außer p keine weiteren kritischen Punkte von f beinhaltet. Dann hat $M^{c-\varepsilon}$ denselben Homotopietypen wie $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$.*

Das ist die zweite Aussage, die wir am Anfang am Beispiel des Torus beobachtet haben!

Die Idee für den Beweis ist, sich eine neue Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ zu definieren, die Außerhalb von einer kleinen Umgebung von p f entspricht und in der Umgebung etwas kleiner ist. Dann bekommen wir die folgende Situation:

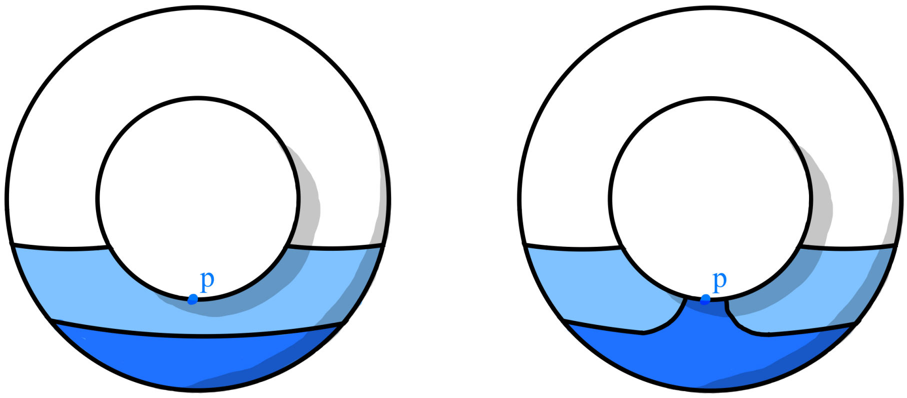


Figure 4: Die Niveaumengen von f (links) und F (rechts)

Wir wollen also, dass $M^{c+\varepsilon} = F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$ gilt und $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ fast dasselbe ist wie $M^{c-\varepsilon}$, nur dass $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ einen "Henkel" enthält der den kritischen Punkt p enthält.

Beweis zweites Deformationslemma. Sei $c := f(p)$. Mit dem Morse-Lemma können wir lokale Koordinaten $\varphi = (u_1, ..., u_n)$ in einer Umgebung U von p wählen, sodass

$$f = c - u_1^2 - ... - u_k^2 + u_{k+1}^2 + ... + u_n^2$$

in dieser Umgebung, und sodass für den kritischen Punkt p gilt:

$$u_1(p) = ... = u_n(p) = 0$$

Sei oBdA. $\varepsilon > 0$ klein genug, sodass

1. $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält
2. $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 2\varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$

Wähle nun die k-Zelle

$$e^k := \{p \in M : (u_1(p))^2 + ... + (u_k(p))^2 \leq \varepsilon \text{ und } u_{k+1}(p) = ... = u_n(p) = 0\}$$

Wir bekommen die folgende Situation:

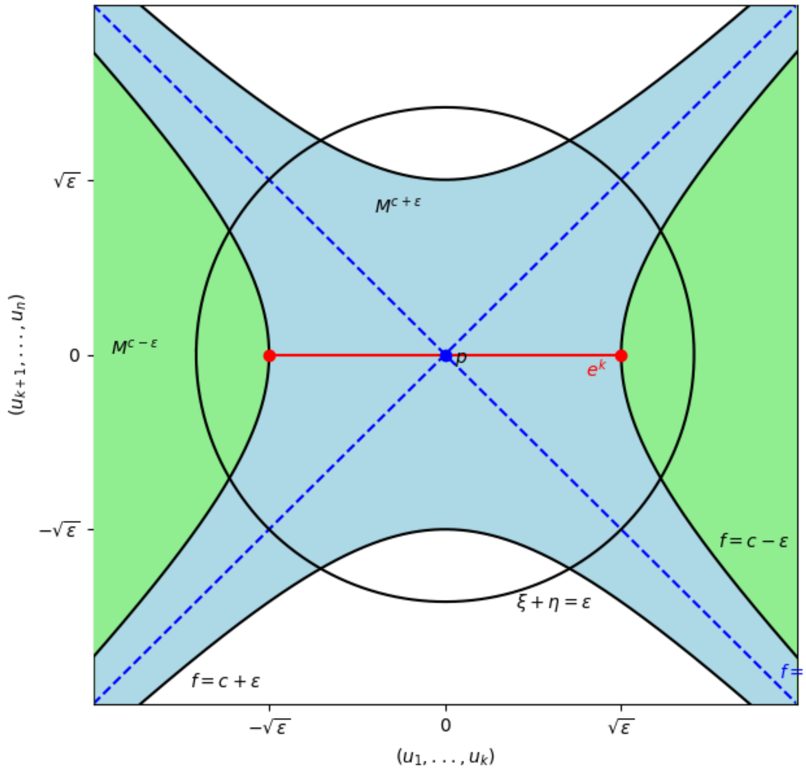


Figure 5: U parametrisiert

Nun definiere eine glatte Funktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1. $\mu(0) > \varepsilon$
2. $\mu(r) = 0$ falls $r \geq 2\varepsilon$
3. $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$

Sei nun F außerhalb von U gleich f, und sei

$$F = f - \mu(u_1^2 + ... + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + ... + 2u_n^2)$$

F ist wohldefiniert und glatt, da F außerhalb des Kreises mit Radius $\sqrt{2\varepsilon}$ mit f übereinstimmt und der gesamte Kreis in U enthalten ist. Damit haben wir einen guten Kandidaten foür F gefunden.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
&\eta, \xi : U \to [0, \infty) \\
&\xi = u_1^2 + ... + u_k^2 \\
&\eta = u_{k+1}^2 + ... + e_n^2
\end{aligned}$$

Dann gilt innerhalb von U:

$$f = c - \xi + \eta$$

und

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$$

Jetzt wollen wir überprüfen:

1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$.
2. $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.
3. $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ ist ein Deformationsretrakt von $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$.

Dann folgt schon die Behauptung.

Behauptung 1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

Sei $q \in M$. Falls gilt $\xi(q) + 2\eta(q) > 2\varepsilon$ gilt $F(q) = f(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)) = f(q)$, also gelte oBdA.

$$\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon$$

Dann:

$$F(q) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon$$

//

Behauptung 2. $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.

Bemerke: Die kritischen Punkte von F stimmen mit denen von f überein, denn:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

Insbsondere sind diese beiden Ableitungen also niemals 0. Da

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta$$

und dξ und dη nur in p gleichzeitig Null sind, haben f und F dieselben kritischen Punkte.

Betrachte die Region $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Wegen Behauptung 1 und der Tatsache, dass $F \leq f$ gilt:

$$F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subseteq f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$$

Da $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ kompakt ist und $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ abgeschlossen ist, ist $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ auch kompakt. Da f und F dieselben kritischen Punkte haben kann diese Menge maximal den kritischen Punkt p enthalten, aber

$$F(p) = c - \xi(p) + \eta(p) + \mu(\xi(p) + 2\eta(p)) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

Also gibt es in $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ keine kritischen Punkte. Mit dem ersten Deformationslemma gilt dann: $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ ist Def. Retrakt von $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$.

//

Behauptung 3. $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ ist ein Deformationsretrakt von $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$.

Diese Aussage ergibt nur Sinn, falls $M^{c-\varepsilon} \cup e^k \subseteq F^(- \infty, c-\varepsilon]$. Wir wissen schon, dass $M^{c-\varepsilon} \subseteq F^{-1}(c-\varepsilon]$.

Sei $q \in e^k$, dann gilt $\xi(p) = 0 \leq \xi(q) \leq 1$ und $\eta(p) = 0 = \eta(q)$. Da $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ gilt dann

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$$

Also ergibt sich folgende Situation:

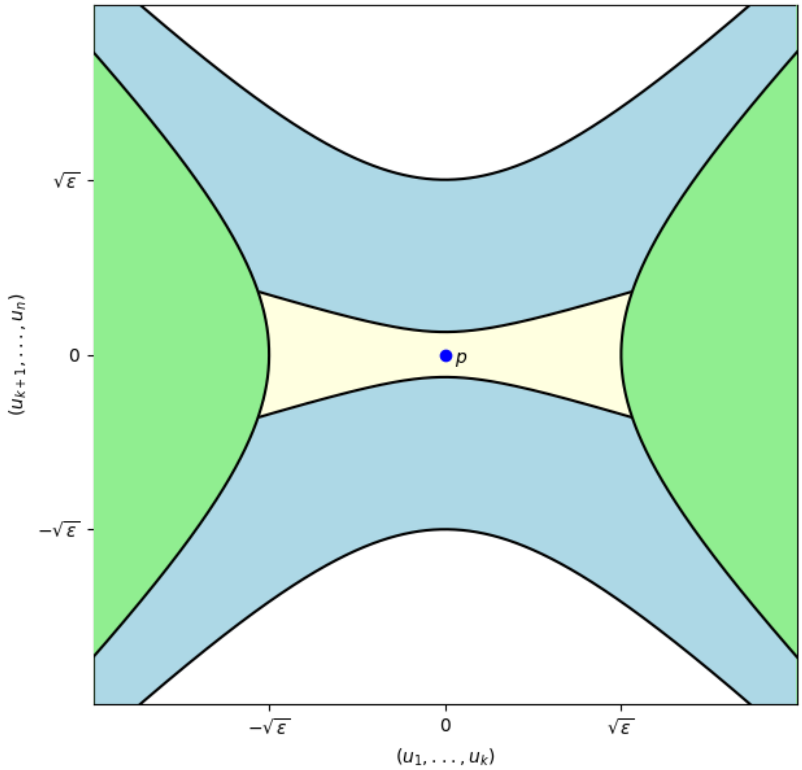


Figure 6: Henkel

Die hellgrün eingefärbte Fläche ist $M^{c-\varepsilon}$ die hellgelbe zusammen mit der hellgrünen Fläch ist $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$.

Dafür konstruieren wir eine Deformationsretraktion $r : F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] \times [0,1] \to F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ für $q \in F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon], t \in [0,1]$, die $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$ auf e^k deformiert, wie folgt.

$$r(q,t) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ (u_1, ..., u_k, tu_{k+1}, ..., tu_n)(q) & \text{im Fall 1: } \xi(q) \leq \varepsilon \\ \varphi^{-1} \circ (u_1, ..., u_k, s_t u_{k+1}, ..., s_t u_n)(q) & \text{im Fall 2: } \varepsilon \leq \xi(q) \leq \eta(q) + \varepsilon \\ q & \text{im Fall 3: } \eta(q) + \varepsilon \leq \xi(q) \end{cases}$$

Wobei

$$s_t = t + (1-t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2}$$

Die Fälle sind dann wie folgt:

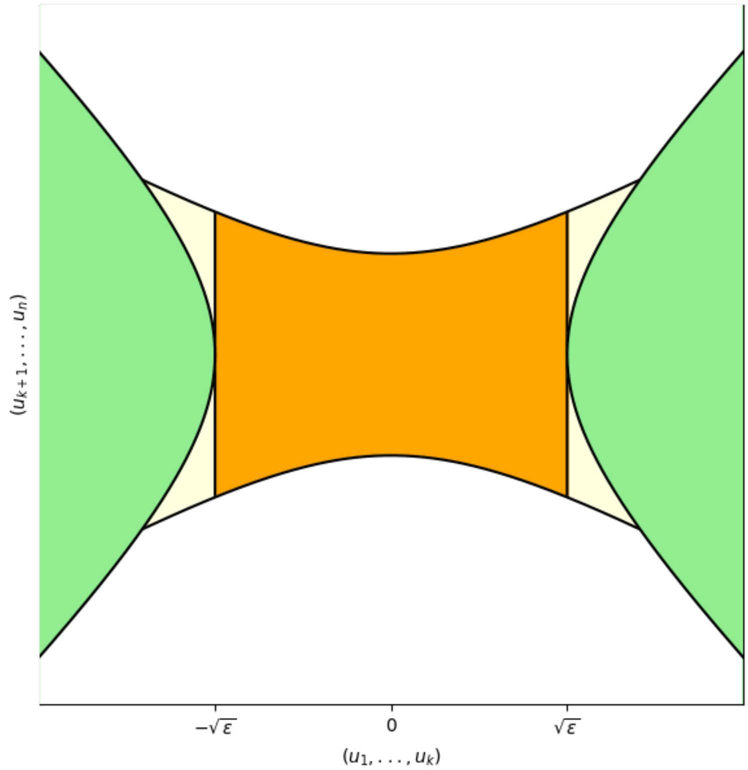


Figure 7: Fall 3 ist $M^{c-\varepsilon}$, also die grün eingefärbte Fläche, die orangene Fläche ist Fall 1 und die gelbe ist Fall 2.

Wir müssen überprüfen:

1. r ist wohldefiniert und stetig
2. $r(F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon], 0) \subseteq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$
3. $r(\cdot, 1) = \mathrm{id}_{F^{-1}(-\infty,c-\varepsilon]}$ und $r(\cdot, 0)|_{M^{c-\varepsilon}\cup e^k} = \mathrm{id}_{M^{c-\varepsilon}\cup e^k}$

3. ist einfach nachzurechnen. In Fall 1 und Fall 3 ist 2. offensichtlich wahr. Für Fall 2

gilt:

$$\begin{aligned}
f(r(0,q)) &= f\left(\varphi^{-1}\left(u_1(q),...,u_k(q),\left(\frac{\xi(q)-\varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2}u_{k+1}(q),...,\left(\frac{\xi(q)-\varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2}u_n(q)\right)\right)\\
&= c-\xi(q)+\left(\left(\frac{\xi(q)-\varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2}u_{k+1}(q)\right)^2+...+\left(\left(\frac{\xi(q)-\varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2}u_n(q)\right)^2\\
&= c-\left(\frac{\xi(q)-\varepsilon}{\eta(q)}\right)\eta(q)\\
&= c-\varepsilon
\end{aligned}$$

also ist $r(0,q) \in f^{-1}(c-\varepsilon)$. Um 1. zu prüfen müssen wir Stetigkeit in den Grenzfällen überprüfen:

$$\begin{aligned}
&\text{For } \xi(q)=\varepsilon: && s_t(q) = t+(1-t)((\varepsilon-\varepsilon)/\eta(q))^{1/2} = t\\
&\text{For } \eta(q)+\varepsilon=\xi(q): && s_t(q) = t+(1-t)((\xi(q)-\varepsilon)/(\xi(q)-\varepsilon))^{1/2} = 1
\end{aligned}$$

Das einzig andere Problem was wir bekommen könnten ist nun in Fall 2 falls $\eta \to 0$. In Fall 1 und Fall 3 bekommen wir für q mit $\eta(q)=0$: $r(q,t)=\varphi^{-1}\circ(u_1,...,u_k,0,...,0)(q)$, also wollen wir zeigen dass für $\eta \in$ Fall 2 mit $\eta \to 0$ gilt $s_t u_i \to 0$ für $i \in \{k+1,...,n\}$. In Fall 2 gilt $0 \leq \xi-\varepsilon \leq \eta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0}|s_t u_i| &= \lim_{\eta\to 0}(1-t)((\xi-\varepsilon)/\eta)^{1/2}|u_i|\\
&\leq \lim_{\eta\to 0}(1-t)(\eta/\eta)^{1/2}|u_i|\\
&= \lim_{\eta\to 0}(1-t)|u_i| = 0
\end{aligned}$$

Also ist r stetig.

//

Mit Behauptung 3 und 4 bekommen wir

$$M^{c+\varepsilon} \simeq F^{-1}(c-\varepsilon]$$

und

$$F^{-1}(-\infty,c-\varepsilon] \simeq M^{c-\varepsilon}\cup e^k$$

Also folgt die Behauptung:

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon}\cup e^k$$

□

Corollary 3.2. *Allgemeiner gilt sogar: Angenommen es gibt m kritische Punkte $p_1, ..., p_m$ mit Indizes $k_1, ..., k_m$ in $f^{-1}(c)$. Dann gilt*

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^{k_1} \cup ... \cup e^{k_m}$$

Die Anheftungssabbildungen können hier so gewählt werden, dass ihre Bilder disjunkt in $M^{c+\varepsilon}$ liegen, also funktioniert hier unsere ursprüngliche Definition vom Anheften einer k-Zelle noch immer.

§4 Anwendungen

Theorem 4.1. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, sodass eine Morse-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ existiert, die genau zwei kritische Punkte besitzt. Dann ist M homeomorph zu S^n.*

Proof. Seien p und q die kritischen Werte mit $f(p) = a < b = f(q)$. Mit dem Morse-Lemma existiert dann $\varepsilon > 0$, sodass $f^{-1}[a, a + \varepsilon]$ und $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$ diffeomorph zu einer n-Zelle e^n sind. Mit dem ersten Deformationslemma 2.6 ist $f^{-1}[a-\varepsilon, b-\varepsilon]$ diffeomorph zu $\partial e^n \times [0, 1]$. Dann ist M der Zylinder $\partial e^n \times [0, 1]$ mit e^n an beiden seiten des Zylinders angebracht. Sei $\mathrm{pr}_1 : S^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koodinate von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann hat pr_1 genau zwei kritische Punkte, beide sind nicht degeneriert, also gilt $M \cong S^n$. $\square$

Achtung: Diffeomorphie ist dann nicht gegeben. Insbesondere gibt es mehrere glatte Strukturen der S^7.

Theorem 4.2 (Morse-Ungleichungen)**.** *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit ausschließlich nicht degenerierten kritischen Punkten. Sei C_k die Anzahl der kritischen Punkte mit Index k. Sei $\mathrm{b}_k(M)$ die k-te Betti-Zahl von M und $\chi(M)$ die Euler-Charakteristik von M. Dann gelten:*

1. $\mathrm{b}_k(M) \leq C_k$
2. $\chi(M) = \sum_k (-1)^k \cdot C_k$
3. $\mathrm{b}_k(M) - b_{k-1}(M) + ... \pm \mathrm{b}_0(M) \leq C_k - C_{k-1} + ... \pm C_0$

Proof. Auch hierfolgt die Behauptung wesentlich aus dem zweiten Deformationslemma 3.1: Wir definieren b_k und χ für ein Raumpaar (X, Y):

$$\mathrm{b}_k(X, Y) = \dim(\mathrm{H}_k(X, Y))$$

und

$$\chi(X, Y) = \sum_k (-1)^k \mathrm{b}_k(X, Y)$$

Man kann zeigen, dass b_k subadditiv und χ additiv sind, also dass für $Z \subseteq Y \subseteq X$ gilt

$$\mathrm{b}_k(X, Z) \leq \mathrm{b}_k(X, Y) + \mathrm{b}_k(Y, Z)$$

und

$$\chi(X, Z) = \chi(X, Y) + \chi(Y, Z)$$

Außerdem zeigt man, dass für $X_0 \subseteq ... \subseteq X_n$ gilt

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_i S(X_i, X_{i-1})$$

falls S subadditiv, und dass falls S additiv ist sogar Gleichheit gilt.

ObdA. hat f nur kritische Werte c, sodass $\#f^{-1}(c) = 1$. Seien dann $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass M^{a_i} genau i kritische Punkte enthalten und $M^{a_m} = M$. Dann gilt schon $M^{a_0} = \varnothing$. Sei nun k_i der Index des kritischen Punktes in $M^{a_i} - M^{a_{i-1}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= \mathrm{H}_k(M^{a_{i-1}} \cup e^{k_i}, M^{a_{i-1}}) && \text{(wegen des zweiten Deformationslemmas)} \\
&= \mathrm{H}_k(e^{k_i}, \partial e^{k_i}) && \text{(wegen der Ausschneidungseigenschaft)} \\
&= \mathrm{H}_k(S^{k_i}, *)
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = k_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da b_k subadditiv ist gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}_k(M) &\leq \sum_i \mathrm{b}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\
&= \sum_i \dim(\mathrm{H}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})) \\
&= C_k
\end{aligned}$$

Und da χ additiv ist gilt

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_i \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\
&= \sum_i \sum_k (-1)^k \dim \mathrm{H}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\
&= \sum_k (-1)^k C_k
\end{aligned}$$

3. folgt aus der Tatsache, dass S_k subadditiv ist, wobei

$$S_k(X,Y) = \mathrm{b}_k(X,Y) - \mathrm{b}_{k-1}(X,Y) + ... \pm \mathrm{b}_0$$

Dann gilt wieder

$$\begin{aligned} S_k(M) &\leq \sum_{i=1}^{m} (-1)^i S_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{b}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - \mathrm{b}_{k-1}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) + ... \pm \mathrm{b}_0(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \end{aligned}$$

aber gerade haben wir schon gesehen, dass gilt

$$\mathrm{b}_k(M^{a_i}, M^{a^{i-1}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{b}_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - \mathrm{b}_{k-1}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) + ... \pm \mathrm{b}_0(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_k - C_{k-1} + ... \pm C_0$$

□

Theorem 4.3. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, sodass M^a kompakt ist für alle $a \in \mathbb{R}$. Dann besitzt M den Homotopie-Typen von einem CW-Komplex mit einer k-Zelle für jeden kritischen Punkt mit Index k von f.*

Remark. Man kann zeigen, dass auf jeder glatten Mannigfaltigkeit eine Morse-Funktion existiert, sodass M^a kompakt für alle $a \in \mathbb{R}$, also hat jede glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) den Homotopie-Typen eines CW-Komplexes!

Proof. Der Beweis ist recht involviert, aber im wesentlichen folgt die Aussage aus dem zweiten Deformationslemma 3.1. □