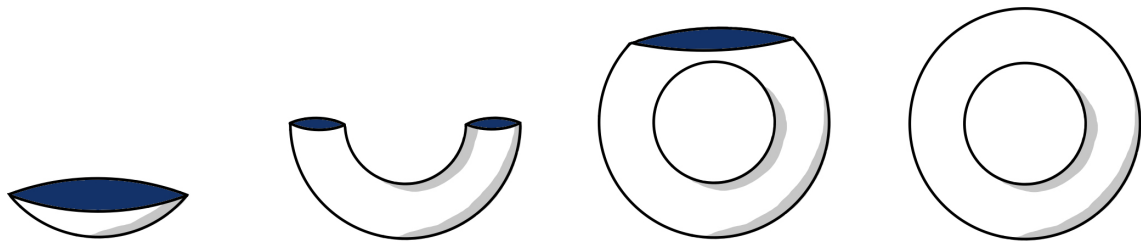

Der Morse-Komplex und Morse-Homologie



eingereicht von
Jakob Dimigen

beaufsichtigt von
Prof. Ursula Ludwig

Universität Münster



Vorwort

Zielsetzung und Inhalt

In der Morse Theorie werden glatte Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind untersucht. Ein kritischer Punkt ist nicht degeneriert, wenn die Hesseche Bilinearform, die lokal durch die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

gegeben ist, nicht ausgeartet ist. Anhand einer solcher Abbildungen lassen sich Rückschlüsse auf topologische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M ziehen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, den *Morse-Komplex* zu definieren und zu zeigen, dass dieser isomorph zu einem zellulären Kettenkomplex ist. Damit ist die *Morse-Homologie*, die Homologie des *Morse-Komplexes*, isomorph zur *zellulären Homologie*, die nicht von der gewählten zellulären Struktur abhängt. Wir folgen dem ersten Teil des Buches *Morse Theory and Floer Homology* [AD14].

Im ersten Kapitel wird ein grundlegender Einblick in die Morse-Theorie gegeben. Wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma* das eine konkrete Vorstellung des Verhaltens von Morse-Funktionen in der Nähe kritischer Punkte liefert. Weitere wichtige Ergebnisse sind die beiden *Deformations-Lemmata* 1.20 und 1.21.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir erst die *stabile- und instabile Mannigfaltigkeit* und definieren den *Raum der Trajektorien*. Die Trajektorien sind Flüsse von einem Pseudo-Gradientenfeldes. Diese starten und enden immer in kritischen Punkten. Das k -te Glied des Morse-Komplexes ist dann dasjenige \mathbb{F}_2 -Modul, das von den kritischen Punkten mit Index k erzeugt wird, und das Differential ist gegeben durch die Anzahl der Trajektorien von kritischen Punkten mit Index k zu kritischen Punkten mit Index $k - 1$. Wir zeigen, dass dieser Komplex wohldefiniert ist und dass es ein Kettenkomplex ist.

Im dritten Kapitel wird bewiesen, dass der Morse-Komplex isomorph zu einem zellulären Komplex ist. Dann werden einige Anwendungen der Morse-Homologie gegeben.

Geschichte der Morse Theorie

Die Morse-Theorie ist zu Ehren des amerikanischen Mathematikers *Marston Morse* benannt, der grundlegende Ergebnisse zum Beispiel wie das *Morse-Lemma* 1.5 in [Mor31] schon im Jahre 1929 bewies. In den späten 60er Jahren untersuchte dann bewies.

Vorraussetzungen

Wir setzen voraus, dass der Leser sich mit Mannigfaltigkeiten auskennt. Außerdem sollten grundlegende Begriffe der Topologie wie *Homotopie*, *Homotopietyp* ... bekannt sein.

Weiterhin sollten Grundlagen der homologischen Algebra bekannt sein, also Definitionen von *Kettenkomplex* und *Homologie*.

Notation

Folgende Notationen werden benutzt:

- \approx für eine Vektorraum-Isomorphie oder eine Homeomorphie.
- \cong für einen Diffeomorphismus.
- Die Tangentialräume werden immer als die Menge der Derivationen betrachtet.
- Um Subskripte in Subskripten weitestgehend zu vermeiden, ist ein Vektorfeld eine glatte Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $p \mapsto X(p) \in T_p M$ (anstatt X_p).
- ist $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, dann ist die Tangentialabbildung von f im Punkt p die Abbildung $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

Inhaltsverzeichnis

1	Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten	1
1.1	Nicht-Degeneriertheit und Index	1
1.2	Morse-Funktionen	5
1.3	Vektorfelder und Pseudo-Gradienten	8
1.4	Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte	10
2	Der Morse-Komplex	15
2.1	Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung	15
2.2	Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien	21
3	Morse-Homologie und zelluläre Homologie	30
3.1	CW-Struktur von Mannigfaltigkeiten	30
3.2	Morse-Homologie ist zelluläre Homologie	31
3.3	Anwendungen	31

1 Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns näher mit den Stars dieser Arbeit:

Morse-Funktionen und *Pseudo-Gradientenfeldern*. Außerdem werden wir das *Morse-Lemma* 1.5 und die so genannten *Deformations-Lemmata* 1.20 und 1.21 beweisen, die allein von den kritischen Punkten einer Morse Funktion Rückschlüsse auf die topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit zulassen.

1.1 Nicht-Degeneriertheit und Index

Dieser Abschnitt folgt dem ersten Kapitel aus [Mil63]. Wir werden Grundlegende Begriffe der Morse-Theorie erklären und das *Morse-Lemma* 1.5 beweisen.

Definition 1.1 (Kritischer Punkt). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein *kritischer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$, sodass $df(p)$ nicht surjektiv ist.

Bemerkung. Wir werden uns ausschließlich mit glatten Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ beschäftigen. bei solchen Abbildungen ist $p \in M$ ein kritischer Punkt genau dann, wenn $df(p) = 0$.

Wir würden gerne eine Hessesche Bilinearform für die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit definieren, allerdings ist dies ein nicht ganz einfaches Unterfangen. Wir werden am Ende einen Begriff erhalten, der mit dem der gewohnten Hesseschen Bilinearform im \mathbb{R}^n übereinstimmt, allerdings nur für kritische Werte definiert ist.

Definition 1.2 (Hessesche Bilinearform). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f . Es seien $x, y \in T_p M$. Wähle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X(p) = x$ und $Y(p) = y$. Definiere nun

$$d^2 f(x, y)(p) = X(p)(Y(\cdot)f).$$

$d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$ heißt *Hessesche Bilinearform*.

Proposition 1.3. $d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$ hängt nicht von den gewählten Vektorfeldern X und Y ab und ist für alle kritischen Punkte eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Wir betrachten die so genannte *Lie-Klammer* für Vektorfelder X und Y :

$$[X, Y] = XY - YX,$$

wobei

$$(XY - YX)(p)(f) = X(p)(Y(\cdot)(f)) - Y(p)(X(\cdot)(f)).$$

Man rechnet nach, dass die Lie-Klammer symmetrisch ist und das für jeden kritischen Punkt p von f gilt $[X, Y](p)(f) = 0$. Bilinearität folgt dann direkt aus der Definition. Da p ein kritischer Punkt ist gilt

$$d^2f(x, y)(p) - d^2f(y, x)(p) = [X, Y](p)(f) = 0,$$

die Zuordnung ist also symmetrisch. Außerdem gilt

$$XYf(p) = X(p)(Y(\cdot)f) = x(Y(\cdot)f),$$

also hängt die Form nicht von X ab, und wegen der Symmetrie auch nicht von Y . \square

Definition 1.4 (nicht-degeneriert, Index). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f . Wir nennen p *nicht degeneriert*, falls die Bilinearform $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$ nicht ausgeartet ist. Der *Index* eines nicht degenerierten kritischen Punktes ist die maximale Dimension der Untervektorräume, auf denen $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$ negativ definit ist.

Bemerkung. Nicht-Degeneriertheit und Index lassen sich auch über lokale Koordinaten definieren. Tatsächlich stimmt die Sichtweise über lokale Koordinaten mit der Vorstellung der Hesseschen- Bilinearform, die wir für Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ haben überein:

Es seien $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten um den kritischen Punkt p . Dann ist $\mathcal{B} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ eine Basis des Vektorraums T_pM . Wir bekommen

$$d^2f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dann ist p nicht degeneriert genau dann wenn die Matrix

$$H_p^\varphi(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

invertierbar ist. Der Index von p ist dann die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_p^\varphi(f)$. Der Index und die nicht-degeneriertheit hängen offensichtlich nicht von den gewählten Koordinaten ab, aber die Matrix $H_p^\varphi(f)$ schon.

Die beiden Begriffe Index und nicht-Degeneriertheit sind zentral in der Morse-Theorie und werden uns über die gesamte Arbeit begleiten. Auch der nachfolgende Satz wird in fast jedem Beweis genutzt:

Satz 1.5 (Morse-Lemma). *Es sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index k einer glatten Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann existieren lokale koordinaten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$,*

sodass in einer Umgebung U von p gilt:

$$f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

und

$$\varphi(p) = 0.$$

(U, φ) heißt Morse-Karte, und U Morse-Umgebung.

Der hier geführte Beweis für das Morse-Lemma ist in [Hir76] zu finden. Bevor wir das Morse Lemma beweisen, benötigen wir eine Aussage aus der Linearen Algebra:

Lemma 1.6. Es sei $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ eine diagonale $n \times n$ Matrix mit Diagonaleinträgen ± 1 . Dann gibt es eine Umgebung N von A im Vektorraum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen und eine glatte Abbildung $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, sodass $P(A) = E_n$ und falls $P(B) = Q$, dann gilt $Q^T B Q = A$.

Beweis. Die Aussage kann man Induktiv beweisen, siehe [Hir76]. □

Beweis von Satz 1.5. Es sei U eine Karten Umgebung von p . Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p = 0$ und $f(0) = 0$. Außerdem können wir mithilfe eines Koordinatenwechsels annehmen, dass

$$A = H_0(f)$$

eine Diagonalmatrix mit ausschließlich Diagonaleinträgen ± 1 hat, denn da p nicht degeneriert ist ist A invertierbar.

Behauptung. Es existiert eine glatte Abbildung $x \mapsto B_x$ von M in die symmetrischen $n \times n$ Matrizen, sodass für $B_x = (b_{ij}(x))_{ij}$ gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j,$$

und sodass $B_0 = A$.

Beweis der Behauptung. Da $f(0) = 0$ bekommen wir mit dem Fundamentalsatz der Differenzial - und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \right) x_i \end{aligned}$$

Da $p = 0$ ein kritischer Punkt ist, gilt $\partial f / \partial x_i(0) = 0$ für alle i . Mit dem selben Argument sehen wir dann, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) ds \right) x_j.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ds dt \right) x_i x_j.$$

Setze also

$$b_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ds dt.$$

Dann gilt schon $B_0 = A$, und die Abbildungen b_{ij} sind glatt, also auch $x \mapsto B_x$. //

Wir dürfen nun das vorherige Lemma 1.6 anwenden:

Sei $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ eine Abbildung wie in 1.6. Setze $P(B_x) := Q_x$. Definiere nun eine glatte Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(x) = Q_x^{-1}x$ in einer Umgebung von 0. Wir rechnen nach, dass $d\varphi(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Identität ist:

Schreibe $Q_x^{-1} = (q_{ij}(x))_{ij}$. Dann

$$\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^n q_{1k}(x)x_k, \dots, \sum_{k=1}^n q_{nk}(x)x_k \right)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}(x)x_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_{ik}}{\partial x_j}(x)x_k + q_{ik}(x)\delta_{kj} \right), \end{aligned}$$

Wobei δ_{ki} das Kronecker Delta ist. Setzen wir also 0 in φ ein bekommen wir

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0) = q_{ij}(0).$$

Das Differential von φ in 0 ist also gegeben durch

$$Q_0^{-1} = P(B_0)^{-1} = P(A)^{-1} = E_n.$$

Das differential an der Stelle 0 ist also invertierbar, und dann können wir mit dem Satz über die Umkehrfunktion annehmen, dass U klein genug ist, sodass φ eingeschränkt aufs Bild ein Diffeomorphismus ist. Dann ist φ eine Karte um 0. Setze $(y_1, \dots, y_n) := \varphi$, dann

gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T B_x x = (Q_x \varphi(x))^T B_x (Q_x \varphi(x)) \\ &= \varphi(x)^T (Q_x^T B_x Q_x) \varphi(x) = \varphi(x)^T A \varphi(x) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} y_i(x)^2. \end{aligned}$$

Das entspricht genau der gewünschten Form. \square

Corollar 1.7. *Jeder nicht degenerierte kritische Punkt besitzt eine offene Umgebung, in der sich keine weiteren kritischen Punkte befinden.*

1.2 Morse-Funktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir *Morse-Funktionen*:

Definition 1.8 (Morse-Funktion). Eine *Morse-Funktion* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind.

Insbesondere zeigen wir, dass Morse Funktionen nichts besonderes sind. Dafür zeigen wir, dass für eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $x \mapsto \|x - p\|^2$ nur für p , die so genannten *Brennpunkte* sind, keine Morse Funktion ist, und dass die Menge der Brennpunkte eine Nullmenge ist. Dann werden wir sehen, dass jede glatte Funktion (auf gewisse Art und Weise) beliebig nah an einer Morse Funktion ist. Dieser Abschnitt folgt zu großen Teilen [Mil63] und [AD14].

Definition 1.9 (Normalenbündel). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Das Normalenbündel ist die Menge

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_x M\}.$$

Wir betrachten hier $T_x M \subseteq T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ via der Basis $(\partial/\partial x_i)$, wobei x_i die Achsen des \mathbb{R}^n sind.

Proposition 1.10. *Das Normalenbündel NM ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es sei $x \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x , eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 und eine Einbettung

$$\begin{aligned} h: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u_1, \dots, u_d) &\longmapsto x(u_1, \dots, u_d) \end{aligned}$$

die ein Diffeomorphismus $h: \Omega \rightarrow U \cap M$ ist. Das orthogonale Komplement von $T_x M$ in \mathbb{R}^n hat Dimension $n - d$. Es sei also $(v_1(x), \dots, v_{n-d}(x))$ eine Basis von $(T_x M)^\perp$. Dann ist

$$(u_1, \dots, u_d, t_1, \dots, t_{n-d}) \mapsto \left(x(u_1, \dots, u_d), \sum_{k=1}^{n-d} t_k \cdot v_k(u_1, \dots, u_d) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von NM als Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$. \square

Definition 1.11 (Brennpunkt). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Es sei $E: NM \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $E(x, v) = x + v$. Ein *Brennpunkt* von M ist ein kritischer Wert von E .

Bemerkung. Aus dem Satz von Sard folgt, dass die Menge der Brennpunkte eine Nullmenge ist. Intuitiv sind die Brennpunkte einer Untermannigfaltigkeit die Punkte im \mathbb{R}^n , an denen sich die Normalen von nahe aneinanderliegenden Punkten schneiden.

Lemma 1.12. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $x \in M$ und NM parametrisiert wie im Beweis von Proposition 1.10. Dann ist $p = x + v$ genau dann ein Brennpunkt von M , wenn die Matrix*

$$\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right)_{ij}$$

nicht invertierbar ist.

Beweis. Den beweis findet man zum Beispiel bei Milnor in Kapitel 6 von [Mil63]. \square

Proposition 1.13. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Für fast jeden Punkt in \mathbb{R}^n ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f_p: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

eine Morse-Funktion.

Beweis. Offensichtlich ist f_p glatt. $x \in M$ ist genau dann ein kritischer Punkt von f_p , wenn $T_x M \perp (x - p)$, denn das Differential von f_p erweitert auf \mathbb{R}^n mit derselben Vorschrift ist

$$df_p(x) = 2(x - p).$$

Also gilt

$$df_p(x)(v) = \langle 2(x - p), v \rangle.$$

$x \in M$ ist folglich genau dann ein kritischer Punkt von f_p , wenn $T_x M$ orthogonal zu $(x - p)$ ist.

Bemerke, dass für eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Derivation X_p gilt

$$X_p(f) = \langle X_p(\varphi_1), \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, X_p(\varphi_2) \rangle.$$

Sei nun $x \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x , eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 und eine Immersion

$$h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die ein Diffeomorphismus $h: \Omega \rightarrow U \cap M$ ist. Schreibe

$$h(u_1, \dots, u_n) = x(u_1, \dots, u_n).$$

Dann bekommen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \langle 2(x - p), \frac{\partial x}{\partial u_i} \rangle$$

und

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle x - p, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right).$$

Also hat nach Lemma 1.12 f_p in einer Umgebung von x genau dann nicht-degenerierte kritische Punkte, wenn f_p ein Brennpunkt von M ist. Mit der Bemerkung nach der Definition von Brennpunkten 1.11 folgt dann direkt die Behauptung. \square

Bemerkung. Mit dem Einbettungssatz von Whitney folgt dann direkt, dass es auf jeder Mannigfaltigkeit M viele Morse-Funktionen gibt. Es gilt sogar noch eine stärkere Aussage:

Satz 1.14. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann kann f in jeder kompakten Teilmenge K beliebig gut von einer Morse Funktion approximiert werden, also für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Morse Funktion $g: K \rightarrow \mathbb{R}$, sodass*

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Beweis. Wir wählen eine Einbettung $h': M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$h: M \longrightarrow \mathbb{R}^n; h(x) = (f(x), h'(x))$$

eine Einbettung von M in \mathbb{R}^n . Seien $c, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, sodass für $p = (c - \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ die Funktion f_p eine Morse Funktion ist. Setze nun

$$g(x) = \frac{f_p(x) - c^2}{2c}.$$

g ist offensichtlich eine Morse-Funktion. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2c} \left((f(x) + c - \varepsilon_1)^2 + (h_1(x) - \varepsilon_2)^2 + \cdots + (h_{n-1}(x) - \varepsilon_n)^2 - c^2 \right) \\ &= f(x) + \frac{f(x)^2 + \sum h_i(x)^2}{2c} - \frac{\varepsilon_1 f(x) + \sum \varepsilon_i h_{i-1}(x)}{c} + \sum \varepsilon_i^2 - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Man kann nun c beliebig groß und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ beliebig klein wählen, sodass g beliebig nah an f ist. \square

Die meiste Zeit werden wir uns in dieser Arbeit kompakte Mannigfaltigkeiten untersuchen, auf solchen kann jede glatte Funktion sogar global mit einer Morse Funktion approximieren.

1.3 Vektorfelder und Pseudo-Gradienten

Wir untersuchen erst ein Paar Eigenschaften von Vektorfeldern.

Definition 1.15 (Flusslinie). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma: I \rightarrow M$ ein glatter Weg. Dann definiere für $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) := d\gamma(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

wobei $\partial/\partial t$ das von der Identität auf \mathbb{R} induzierte Element in $T_t\mathbb{R}$ ist.

Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M . γ heißt Flusslinie von X falls für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = X(\gamma(t_0)).$$

Definition 1.16 (1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \varphi_t(p) \end{aligned}$$

sodass gelten:

- Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ und
- $\varphi_0 = \text{id}_M$.

Für eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen φ schreiben wir

$$\varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow M; t \mapsto \varphi_t(p).$$

Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen φ heißt *von X erzeugt*,

falls für alle $p \in M$ gilt:

$$X(p) = \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(0)$$

Bemerkung. Wie der Name suggeriert, ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t ein Diffeomorphismus: Das Inverse von φ_t ist φ_{-t} .

Ist außerdem φ eine von einem Vektorfeld X erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann sind $\varphi_\bullet(p)$ Flusslinien von X :

$$\begin{aligned} X(\varphi_{t_0}(p)) &= \frac{d\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p))}{dt}(0) = d\varphi_\bullet(0)(\varphi_{t_0}(p)) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= d(\varphi_{t_0+\bullet}(p))(0) \left(\frac{d}{dt} \right) = d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \cdot d(t_0 + \text{id}_{\mathbb{R}})(0) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \left(\frac{d}{dt} \right) = d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(t_0) \end{aligned}$$

Proposition 1.17. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann generiert X eine eindeutige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen.*

Beweis. Einen Beweis für diese Aussage findet man zum Beispiel auch in [Mil63].x □

Bemerkung. Falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann generieren alle Vektorfelder eindeutige 1-Parametergruppen aus Diffeomorphismen.

Definition 1.18 (Pseudo-Gradient). Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *Pseudo-Gradient* oder *Pseudo-Gradientenfeld* von f , falls gelten:

- $df(p)(X(p)) \leq 0$ für alle $p \in M$, mit Gleichheit genau dann wenn p ein kritischer Punkt von f ist.
- Für jeden kritischen Punkt p von f existiert eine Morse-Umgebung (U_p, φ_p) , in der $X(q) = -d(\varphi_p^{-1})(q) \cdot \nabla(f \circ \varphi_p^{-1})$.

∇ ist hier der standard Gradient auf \mathbb{R}^n , der vom standard Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n induziert wird.

Proposition 1.19. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion. Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld von f .*

Beweis. Da M zweitabzählbar ist und die kritischen Punkte isoliert, ist die Menge der kritischen Punkte $p_{i \in I'}$ abzählbar. Seien dann $(U_i, \varphi_i)_{i \in I'}$ Karten-Umgebungen von den kritischen Punkten, sodass in diesen Umgebungen f die Form hat wie im Morse-Lemma 1.5.

Ergänze $(U_i, \varphi_i)_{i \in I'}$ zu einem Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, sodass jeder kritische Punkt p_i nur in U_i enthalten ist. definiere nun die Vektorfelder

$$X_i(p) := d(\varphi_i)(p) \circ \nabla(f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))$$

auf $\varphi_i(U_i)$. Setze nun

$$\tilde{X}_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p) \cdot X_i(p) & \text{falls } p \in \varphi_i(U) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Per Definition gilt schon $df(p)(X_i(p)) \leq 0$ für alle $p \in M$ und $i \in I$. Nun wähle eine Partition der 1 $(\lambda_i)_{i \in I}$ über $(U_i)_{i \in I}$. Dann setze

$$X := \sum_{i \in I} \tilde{X}_i(p).$$

Falls p_i ein kritischer Punkt von M ist, dann ist $\tilde{X}_j(p) = 0$ für alle $j \neq i$. Also ist

$$X(p) = \tilde{X}_i(p) = 0.$$

□

1.4 Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte

Wir wollen die beiden Deformations-Lemmata beweisen, die eine Verbindung zwischen den topologischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit und den kritischen Punkten einer Morse Funktion herstellt. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, dann ist die Subniveaumenge von f bezüglich einer reellen Zahl c die Menge $M^c := f^{-1}(-\infty, c]$. Sind $a < b$ reelle Zahlen, dann stellen die Deformationslemmata die Topologien von M^a und M^b in Relation: Das erste beschreibt, was passiert *wenn kein* kritischer Wert überschritten wird, und das zweite beschreibt, was passiert *wenn ein* kritischer Wert überschritten wird. Die Beweise folgen Milnors Buch [Mor31].

Satz 1.20 (Erstes Deformationslemma). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Hat f keine kritischen Werte im Intervall $[a, b]$ und ist $f^{-1}[a, b]$ kompakt, so existiert ein Diffeomorphismus $M^a \rightarrow M^b$, und M^a ist ein Deformationsretrakt von M^b .*

Die Idee des Beweises ist es, M^a entlang der Richtung, in die f am stärksten steigt, also entlang des Gradientenfeldes mit einem Diffeomorphismus φ nach oben zu ziehen", bis $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$. Wir erinnern uns, dass auf jeder Mannigfaltigkeiten *Riemannsche Metriken* existieren, und dass diese dann für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gradienten-

vektorfeld induzieren. dieses Gradientenvektorfeld ∇f ist definiert durch

$$\langle X, \nabla f \rangle = dfX$$

und $\nabla f(p) = 0$ genau dann, wenn p ein kritischer Punkt von f ist.

Beweis. Es existiert eine kompakte Umgebung $K \in M$ von $f^{-1}[a, b]$, in der keine kritischen Punkte enthalten sind, das folgt zum Beispiel aus Whitneys Einbettungssatz und dem Satz von Heine-Borel. Sei $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, positive Funktion, sodass

$$\rho(p) = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

für alle $p \in f^{-1}[a, b]$ und die außerhalb von K verschwindet und für die für alle $p \in K$, die keine kritischen Punkte sind, gilt:

$$0 \leq \rho(p) \leq 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

Bemerke dass ρ innerhalb von K wohldefiniert ist, da sich keine kritischen Punkte in K befinden. Definiere ein Vektorfeld X durch

$$X(p) = \rho(p) \cdot \nabla f(p)$$

Dann hat X kompakten Träger, erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 1.17. Sei also φ die einzigartige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, die von X generiert wird. Wir bekommen für jedes $p \in M$ eine Abbildung $f \circ \varphi_{\bullet}(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Behauptung. Für alle $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $q = \varphi_{t_0}(p)$ ist $d/dt f \circ \varphi_{\bullet}(p)(t_0) \in [0, 1]$ und falls $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$ gilt sogar $d/dt f \circ \varphi_{\bullet}(p)(t_0) = 1$.

Beweis der Behauptung. Für $q = \varphi_{t_0}(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \varphi_{t_0}(p) &= df(\varphi_{t_0}(p)) \cdot d\varphi_{\bullet}(p)(t_0) \left(\frac{d}{dt} \right) = df(q) \cdot X(q) \\ &= \langle X(q), \nabla f(q) \rangle = \rho(q) \langle \nabla f(q), \nabla f(q) \rangle \in [0, 1] \end{aligned}$$

$f \circ \varphi_{\bullet}(p)$ ist also monoton wachsend für alle $p \in M$. Falls sogar $f(\varphi_p(t_0)) \in [a, b]$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi^p(t_0) = 1$$

//

Man zeigt dann leicht, dass für $p \in f^{-1}(a)$, $t_0 \in [0, b - a]$ gilt $f(\varphi_{t_0}(p)) \in [a, b]$.

Dann ist für $p \in f^{-1}(a)$ die Abbildung $f \circ \varphi_{bullet}(p)$ im Intervall $[0, b - a]$ linear mit Steigung 1 und es gilt

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = f(\varphi_0(p)) + (b - a) = b$$

Genauso für $q \in f^{-1}(b)$: $f(\varphi_{a-b}(q)) = a$, also $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$.

Dann haben wir $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$, also ist $\varphi_{b-a}|_{M^a}$ ein Diffeomorphismus zwischen M^a und M^b .

Betrachte nun $r : M^b \times \mathbb{R} \rightarrow M^b$,

$$r(p, t) = \begin{cases} p & \text{falls } f(p) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & \text{falls } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

r ist stetig, $r(\cdot, 0)$ ist die Identität auf M^b , $r(\cdot, 1)|_{M^a}$ ist die Identität auf M^a und $r(1, M^b) \subseteq M^a$, also ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b . \square

Satz 1.21 (Zweites Deformations-Lemma). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und p ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index k . Sei $c := f(p)$ und $\varepsilon \geq 0$, sd. $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und außer p keine weiteren kritischen Punkte von f beinhaltet. Dann hat $M^{c-\varepsilon}$ denselben Homotopietypen wie $M^{c+\varepsilon} \cup e^k$.*

Beweis. Die Idee für den Beweis ist, sich eine neue Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu definieren, die Außerhalb von einer kleinen Umgebung von p f entspricht und in der Umgebung etwas kleiner ist. Dann bekommen wir die folgende Situation:

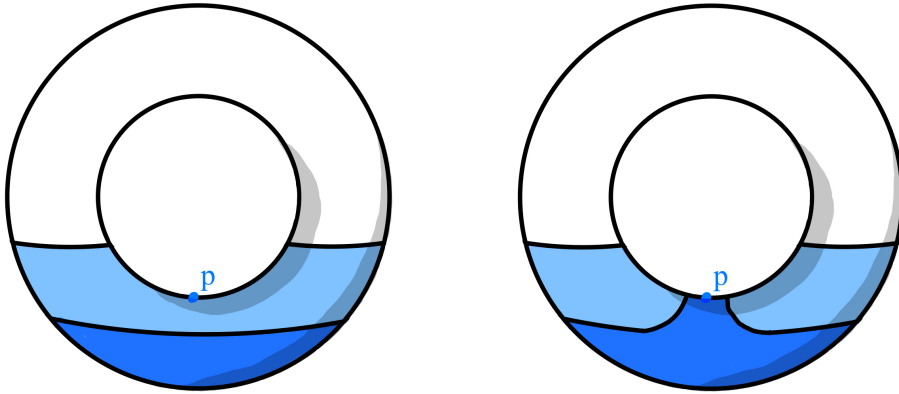


Abbildung 1.1: Die Niveaumengen von f (links) und F (rechts)

Wir wollen also, dass $M^{c+\varepsilon} = F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$ gilt und $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ fast dasselbe ist wie $M^{c-\varepsilon}$, nur dass $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ einen "Henkel" enthält, der den kritischen Punkt p enthält. Wir benutzen das Morse-Lemma 1.5: Wir finden lokale Koordinaten $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$ in einer Umgebung U von p , sodass

$$f = c - u_1 - \dots - u_k + u_{k+1} + \dots + u_n$$

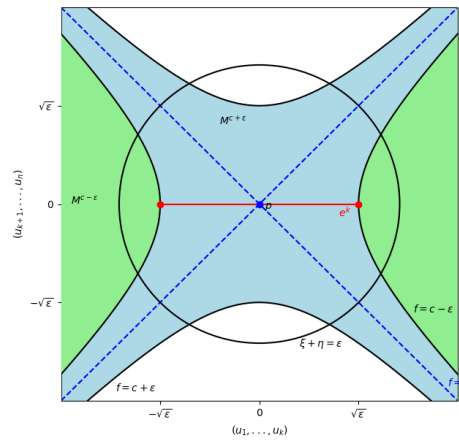
und

$$u_1(p) = \cdots = u_n(p) = 0.$$

Sei ε ohne Beschränkung der Allgemeinheit klein genug, sodass $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und die Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 2\varepsilon\}$ im Bild von φ enthalten ist. Wähle nun die k -Zelle

$$e^k := \{q \in M : u_1^2(q) + \cdots + u_k^2(q) \leq \varepsilon \text{ und } u_{k+1}(q) = \cdots = u_n(q) = 0\}.$$

Wir bekommen folgende Situation:



F wird nun so definiert, dass eine Umgebung der k -Zelle e^k ein wenig abgesenkt wird. Sei $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit den Eigenschaften

1. $\mu(0) > \varepsilon$
2. $\mu(r) = 0$ falls $r \geq 2\varepsilon$
3. $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Sei dann F außerhalb von U gleich f , und innerhalb von U setze

$$F = f - \mu(u_1^2 + \cdots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + \cdots + 2u_n^2).$$

Man überprüft dann die drei Behauptungen

1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$,
2. $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$,
3. $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ ist Deformationsretrakt von $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$.

Die zweite Behauptung folgt aus dem ersten Deformationslemma.

Den detaillierten Beweis findet man zum Beispiel in [Mil63]. □

Mit diesen beiden Aussagen kommt man schon sehr weit. Die berühmten Morse-Ungleichungen lassen sich mit ein bisschen linearer Algebra an exakten Sequenzen leicht

daraus folgern. Man kann sogar zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit den Homotopietypen eines CW-Komplexes (siehe Def. 3.1) besitzt, wie es zum Beispiel Milnor tut. Die folgenden Kapitel geben eine etwas eleganterere Sicht auf die Thematik, die in gewisser Hinsicht stärkere Aussagen liefert:

Kompakte Mannigfaltigkeiten haben nicht nur den selben Homotopie-Typen eines CW-Komplexes, sondern sie sind sogar CW-Komplexe, und wir können uns die zelluläre Homologie, die aus der CW-Struktur hervorgeht sogar auf eine einfache Art und Weise erklären.

2 Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

2.1 Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung

Definition 2.1 (Stabile- und instabile Mannigfaltigkeit). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, p ein kritischer Punkt von f und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Die stabile Mannigfaltigkeit von p ist die Menge

$$W^s(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p \right\}$$

und die instabile Mannigfaltigkeit ist

$$W^u(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(q) = p \right\}.$$

Bevor wir die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit eines kritischen Punktes weiter untersuchen, fixieren wir ein Paar Notationen zu Morse Umgebungen. Für das gesamte Kapitel ist diese Vorstellung von Morse-Umgebungen wichtig.

Definition 2.2 (Notationen zu Morse Umgebungen). Zuerst untersuchen wir eine quadratische Form in \mathbb{R}^n , die die Form hat wie Funktionen in Morse Umgebungen, also $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Q(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

für ein $1 \leq k \leq n$. Mit $x_- := (x_1, \dots, x_k)$ und $x_+ := (x_{k+1}, \dots, x_n)$ gilt dann

$$Q = -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2.$$

Der Gradient von Q ist mit dem Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n

$$\nabla Q(x_-, x_+) = 2(x_-, x_+).$$

Es seien $\varepsilon, \eta > 0$. Dann definiere die Menge

$$U(\varepsilon, \eta) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \leq Q(x) \leq \varepsilon \text{ und } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta) \right\} := U.$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned}\partial_{\pm}U &:= \left\{ x \in U : Q(x) = \pm\varepsilon \text{ und } \|x_{\mp}\|^2 \leq \eta \right\} \text{ und} \\ \partial_0U &:= \left\{ x \in \partial U : \|x_{-}\|^2 \|x_{+}\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta) \right\}.\end{aligned}$$

Dann setzt sich der Rand von U aus diesen drei Teilen zusammen, also

$$\partial U = \partial_{+} \cup \partial_{-} \cup \partial_0.$$

∂_0U ist parallel zu den Trajektorien des negativen Gradienten von Q . $\partial_{+}U$ und $\partial_{-}U$ sind orthogonal zu den Trajektorien des negativen Gradienten von Q , wobei die Trajektorien in $\partial_{+}U$ in die Menge U eintreten und sie in $\partial_{-}U$ wieder verlassen. Wir setzen nun $V_{-} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ und $V_{+} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. V_{+} ist der größte Vektorraum, auf dem $d^2Q(0)(\cdot, \cdot)$ positiv definit ist und V_{-} der größte Vektorraum, auf dem $d^2Q(0)(\cdot, \cdot)(0)$ negativ definit ist. Es gilt

$$\partial U \cap V_{\pm} \subseteq \partial_{\pm}U.$$

0 ist der einzige kritische Punkt von Q und ist offensichtlich nicht degeneriert. Damit ist Q eine Morse Funktion und es gilt $W^s(0) = V_{+}$ und $W^u(0) = V_{-}$.

Ist nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion, p ein kritischer Punkt von f und (V, ψ) eine Morse Umgebung von p , dann gilt $f \circ \psi^{-1} = Q + f(p)$. Sind ε und η klein genug, dann ist $U \subset \psi(V)$. Wir nennen $\Omega(p, \varepsilon, \eta) = \Omega(p) = \psi^{-1}(U)$, und $\partial_{\pm}\Omega(p) = \psi^{-1}(\partial_{\pm}U)$ und $\partial_0\Omega(p) = \psi^{-1}(\partial_0U)$. Dann ist

$$\psi(W^s(p) \cap \Omega(p)) = V^{+} \cap U$$

und

$$\psi(W^u(p) \cap \Omega(p)) = V^{-} \cap U.$$

Wir können uns also mit dieser Notation die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit (wenigstens in einer Umgebung von p) sehr gut vorstellen.

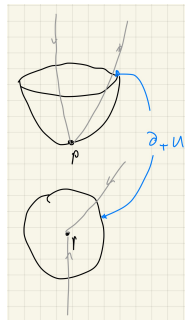


Abbildung 2.1: Index 0

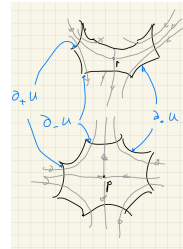


Abbildung 2.2: Index k , $0 < k < n$

ε und η werden häufig in der Notation ausgelassen.

Mit diesen Vorstellungen von Morse-Funktionen können wir die folgende Aussage beweisen.

Proposition 2.3. *Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und p ein kritischer Punkt von f , dann sind $W^s(p)$ und $W^u(p)$ Mannigfaltigkeiten mit*

$$\dim W^u(p) = n - \dim W^s(p) = \text{ind}(p)$$

Beweis. Es sei (ψ, V) eine Morse Karte um p und $\Omega(p) \subseteq V$ in einer Form wie in 2.2. Es sei außerdem φ der Fluss eines Pseudo-Gradientenfeldes von f . Dann ist

$$\Phi: \partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p) \times \mathbb{R} \rightarrow M; \Phi(q, t) = \varphi_t(q)$$

eine Einbettung und es gilt

$$W^s(p) = \text{Im} \Phi \cup \psi^{-1}(U \cap V_+).$$

Tatsächlich ist

$$W^s(p) - \text{Im} \Phi = \{p\},$$

denn $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q) = p$ für $q \in \partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p)$. Außerdem ist

$$\partial_+ U \cap V_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_+\|^2 = \varepsilon\} \cong S^{n-k-1},$$

denn für alle $x \in V_+$ gilt sowieso schon $x_- = 0$. Also ist $W^s(p)$ diffeomorph zum Raum $S^{n-k-1} \times (-\infty, \infty] / \sim$, in dem alle Punkte in ∞ zusammengeklebt werden. Dieser Quotient ist wiederum diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension $n - k$. Genauso zeigt man, dass $W^u(p)$ diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension k ist. \square

Proposition 2.4. *Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Sei außerdem M kompakt. Ist dann φ der Fluss von X , dann existieren für jeden Punkt $p \in M$ kritische Punkte q und r von f , sodass*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(p) = q \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage. Seien für jeden kritischen Punkt p (U_p, ψ_p) Morse Karten. Es ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p$, genau dann wenn der Fluss $\varphi_\bullet(q)$ den Punkt q irgendwann in die Umgebung $\partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p)$ transportiert. Angenommen $\varphi_\bullet(q)$ transportiert q nie zu einem kritischen Punkt. Jedes mal wenn $\varphi_\bullet(q)$ also ins Innere einer Morse-Umgebung U_q gerät, muss diese Umgebung auch wieder verlassen werden. Da $f \circ \varphi_{\text{bullet}}(q)$ monoton

ist, kann nachdem $\varphi_{bullet}(q)$ die Morse-Umgebung $\Omega(p)$ verlassen hat, nie wieder zu dieser zurückgekehrt werden. Sei also

$$\Omega = \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} \Omega(p)$$

und t_0 der Zeitpunkt an dem $\varphi_{\bullet}(q)$ die Umgebung Ω das letzte mal verlässt. Da $M - \Omega$ keine kritischen Punkte von f enthält existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $x \in M - U$ gilt

$$df(x)(X(x)) \leq -\varepsilon.$$

Wir rechnen also: Für jedes $t \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned} f(\varphi_t(q)) - f(\varphi_{t_0}(q)) &= \int_{t_0}^t \frac{df \circ \varphi_{\bullet}(q)}{ds}(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t df(\varphi_s(q))(X(\varphi_s(q))) ds \\ &\leq -\varepsilon_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Also für $t \rightarrow +\infty$ gilt $f(\varphi_t(p)) \rightarrow -\infty$. Das kann aber nicht sein, denn da M kompakt ist und \mathbb{R} Hausdorff, ist f eigentlich, also ist $\text{Im} f$ kompakt. Also kann $\varphi_{\bullet}(p)$ nicht alle U_q verlassen. aber dann ist

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p$$

für einen kritischen Punkt p . Genauso zeigt man, dass $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$ für einen kritischen Punkt r . \square

Definition 2.5 (Smale-Bedingung). Es sei M eine Mannigfaltigkeit und U und V Untermannigfaltigkeiten von M . Wir sagen U und V sind *transversal* und schreiben $U \pitchfork V$, falls für alle Punkte $p \in U \cap V$ gilt

$$T_p U + T_p V = T_p M.$$

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *transversal* zur Untermannigfaltigkeit U , falls für alle p in U gilt

$$\langle X(p) \rangle + T_p U = T_p M.$$

Sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Dann sagen wir, dass X die *Smale-Bedingung* erfüllt, falls für alle kritischen Punkte p und q von f gilt

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q).$$

Ein Paar (f, X) aus einer Morse-Funktion f und einem Pseudo-Gradientenfeld X , das die Smale-Bedingung erfüllt, nennt man *Morse-Smale Paar*.

Proposition 2.6. *Sind U_1 und U_2 Untermannigfaltigkeiten von einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Dimensionen d_1 und d_2 , sodass*

$$U_1 \pitchfork U_2,$$

dann ist $U_1 \cap U_2$ eine Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension $d_1 + d_2 - n$.

Beweis. Es sei $p \in U_1 \cap U_2$. Da U_1 und U_2 Untermannigfaltigkeiten sind existieren Karten (φ_1, V_1) und (φ_2, V_2) von M , sodass

$$\varphi_1 = (\varphi'_1, \varphi''_1): V_1 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega'_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_1}$$

mit $\varphi_1(V_1 \cap U_1) = \Omega_1 \times \{0\}$ und

$$\varphi_2 = (\varphi'_2, \varphi''_2): V_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega'_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{n-d_2}$$

mit $\varphi_2(V_2 \cap U_2) = \Omega_2 \times \{0\}$. Definiere

$$\varphi'' = (\varphi''_1, \varphi''_2): M \supseteq V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_2}.$$

Dann ist $(\varphi'')^{-1}(0) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) := V$. Wir wollen nun den Satz über reguläre Werte anwenden, aber dafür müssen wir zeigen, dass $d\varphi''(p)$ surjektiv ist. Bemerke, dass $d\varphi''(p) = d(\varphi''_1, \varphi''_2)(p) = (d\varphi''_1(p), d\varphi''_2(p))$. Es sei $v \in T_p \mathbb{R}^{n-d_1}$ und $w \in T_p \mathbb{R}^{n-d_2}$. Da $d\varphi''_1(p)$ und $d\varphi''_2(p)$ surjektiv sind, und da U_1 und U_2 transversal sind, existieren $v'_1 + v'_2, w'_1 + w'_2 \in T_p U_1 + T_p U_2$, sodass $d\varphi''_1(p)(v_1 + v_2) = d\varphi''_1(p)(v_2) = v$ und $d\varphi''_2(p)(w_1 + w_2) = d\varphi''_2(p)(w_1) = w$. Die ersten Gleichheiten gelten, da $T_p U_1$ der Kern von $d\varphi''_1(p)$ und $T_p U_2$ der Kern von $d\varphi''_2(p)$ sind. Dann gilt

$$d\varphi''(p)(w'_1 + v'_2) = (d\varphi''_1(p)(v'_2), d\varphi''_2(p)(w'_1)) = (v, w).$$

Wir können also den Satz über reguläre Werte anwenden, dann ist V eine Untermannigfaltigkeit mit Dimension $n - ((n - d_1) + (n - d_2)) = d_1 + d_2 - n$. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Untermannigfaltigkeit von Dimension $d_1 + d_2 - n$. \square

Dann folgt direkt:

Proposition 2.7. *Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und p und q kritische Punkte von f mit Index k_1 und k_2 respektive. Falls X die Smale-Bedingung erfüllt ist*

$$\mathcal{M}(p, q) := W^u(p) \cap W^s(q) = \left\{ r \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) \text{ und } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) \right\}$$

ist eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $k_1 - k_2$.

Der Raum $\mathcal{M}(p, q)$ beinhaltet alle Punkte, die auf Trajektorien zwischen den kritischen Punkten p und q liegen.

Proposition 2.8. \mathbb{R} wirkt via $(p, t) \mapsto \varphi_t(p)$ auf $\mathcal{M}(p, q)$. Sind p und q kritische Punkte mit $p \neq q$ und Indizes k_1 und k_2 , dann ist

$$\mathcal{L}(p, q) = \mathcal{M}(p, q) / \mathbb{R}$$

eine $k_1 - k_2 - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und es gilt

$$\mathcal{L}(p, q) \cong \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$$

für einen regulären Wert c zwischen $f(p)$ und $f(q)$ (Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(p) \neq f(q)$).

Beweis. Die Gruppenwirkung ist frei, denn in $\mathcal{M}(p, q)$ sind keine kritischen Punkte, da $p \neq q$. Es sei x in $\mathcal{M}(p, q)$. Ist nun $t \neq 0$, dann gilt da $f \circ \varphi_\bullet(x)$ streng monoton ist $f(\varphi_t(x)) \neq f(\varphi_0(x)) = f(x)$, also $\varphi_t(x) \neq x$.

Es sei nun c ein regulärer Wert zwischen $f(p)$ und $f(q)$. $f^{-1}(c)$ ist eine $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, und für das Pseudo-Gradientenfeld X gilt $X \pitchfork f^{-1}(c)$, und da für jeden Punkt a gilt $X(a) \in T_a \mathcal{M}(p, q)$ ist $f^{-1}(c) \cap \mathcal{M}(p, q)$ eine $k_1 - k_2 - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei

$$\iota: \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c) \rightarrow \mathcal{M}(p, q)$$

die Inklusion und

$$p: \mathcal{M}(p, q) \rightarrow \mathcal{L}(p, q)$$

die Quotientenabbildung. $p \circ \iota$ ist bijektiv und stetig, und ist $U \subseteq \mathcal{M}(p, q)$ offen, dann ist $p \circ \iota(U)$ offen in $\mathcal{L}(p, q)$. Also ist $p \circ \iota$ ein Homeomorphismus und $\mathcal{L}(p, q)$ ist Hausdorff, also ist $\mathcal{L}(p, q)$ eine Mannigfaltigkeit, und es gilt sogar

$$\mathcal{L}(p, q) \cong \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$$

□

Der Raum $\mathcal{L}(p, q)$ enthält für jede Trajektorie, die zwischen den kritischen Punkten p und q verläuft einen Repräsentanten. Später wird $\mathcal{L}(p, q)$ benutzt, um den Morse-Komplex zu definieren. Die Smale Bedingung ist also für unsere Zwecke wichtig.

Wir gewinnen auch eine wichtige Erkenntnis:

Corollar 2.9. *Der Index von kritischen Punkten verringert sich entlang von Trajektorien. Denn falls $\text{ind}(p) \leq \text{ind}(q)$, dann ist die Dimension von $\mathcal{L}(p, q)$ kleiner 0, also ist dann $\mathcal{L}(p, q) = \emptyset$.*

Um den Morse Komplex für jede (kompakte) Mannigfaltigkeit definieren zu können, muss noch gezeigt werden, dass auf jeder Mannigfaltigkeit tatsächlich ein Morse-Smale Paar existiert. Sogar noch stärker ist die folgende Aussage:

Satz 2.10 (Satz von Smale-Kupta). *Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und f eine Morse-Funktion. Es sei Ω die Vereinigung von Morse-Umgebungen von allen kritischen Punkten. Sei X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld X' von f , das die Smale Bedingung erfüllt, das innerhalb von Ω gleich X ist und für das gilt:*

Für jedes $\varepsilon > 0$, jeden Atlas $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ von M und alle $i \in I$ existiert für jede Kompakte Teilmenge $K_i \subseteq U_i$ ein Vektorfeld X' , sodass

$$\|d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X') - d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X)\| < \varepsilon.$$

Beweis. Der Satz wurde von S. Smale in [Sma61] bewiesen. □

2.2 Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien

Wir sind nun bereit, den Morse-Komplex mit Koeffizienten in \mathbb{F}_2 (wenigstens) hinzuschreiben. Wir fixieren für den gesamten Abschnitt eine glatte **kompakte** Mannigfaltigkeit M und ein Morse-Smale Paar (f, X) . Die Notation, die wir zu Morse-Umgebungen in 2.2 entwickelt haben wird weiterhin wichtig sein. Dann definiere $C_k(M, (f, X))$ als das \mathbb{F}_2 -Modul, das von den kritischen Punkten von f mit Index k erzeugt wird, also

$$C_k = \left\{ \sum_{p \in \text{Crit}_k(f)} a_p \cdot p : a_p \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

Außerdem sei $n_X(p, q) = \#\mathcal{L}(p, q) \bmod 2$. Dann definiere für einen kritischen Punkt p mit Index $k + 1$:

$$\partial_X(p) := \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, q)p.$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass der Komplex $C_*(M, (f, X))$ wohldefiniert ist, also dass gilt $n_X(p, q) < \infty$, und dass es ein Kettenkomplex ist, also dass $\partial_X \circ \partial_X = 0$. Sobald das gezeigt wurde ist es recht leicht, den Komplex auch über die ganzen Zahlen zu definieren.

Wohldefiniertheit

Definition 2.11 (Der Raum der gebrochenen Trajektorien). Es seien p und q kritische Punkte von f . Der *Raum der gebrochenen Trajektorien* ist

$$\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\substack{c_1, \dots, c_{k-1} \\ \in \text{Crit}(f)}} \mathcal{L}(p, c_1) \times \mathcal{L}(c_1, c_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-2}, c_{k-1}) \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \right).$$

Obwohl die Formulierung recht sperrig wirkt ist sie doch intuitiv: $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ ist eine „Verbindung“ zwischen den kritischen Punkten p und q entlang des Pseudo-Gradientenfeldes X . Ein Element $(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ist eine „Verbindung“ zwischen p und q entlang des Pseudo-Gradientenfeldes X , die noch bei den kritischen Punkten c_1, \dots, c_{k-1} „Halt“ macht.

Offensichtlich gilt:

- Für jedes $\ell \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q)$ gilt $\text{ind}(p) < \text{ind}(c_1) < \cdots < \text{ind}(c_{k-1}) < \text{ind}(q)$, denn falls dies nicht der Fall ist, ist mindestens einer der Faktoren leer.
- Ist $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$, so ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q)$.
- Ist $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 2$, so ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q) \cup \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$

Tatsächlich sind die beiden letzten Fälle die, die wir am meisten untersuchen werden. Wir werden sehen, dass man, wie mit der Notation angedeutet, $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ mit einer Topologie ausstatten kann, sodass es die Kompaktifizierung von $\mathcal{L}(p, q)$ ist. (In der Tat ist ja $\mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$).

Definition 2.12 (Topologie von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$). Es seien p und q kritische Punkte von f . Wir erinnern uns an unsere Vorstellung von Morse- Umgebungen $\Omega(p)$ wie in 2.2. Es sei

$$\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q).$$

Seien $U_i = \Omega(c_i)$ Morse Umgebungen von c_i und U_0 und U_k Morse Umgebungen von p und q . $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$ ist der Punkt, an dem λ_i in U_i eintritt, und $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$ ist der Punkt, an dem λ_{i+1} die Umgebung U_i verlässt. Es sei U_i^- eine Umgebung von $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$ in $\partial_+ U$ und U_i^+ eine Umgebung von $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$ in $\partial_- U_i$. Seien dann $U^- = \bigcup U_i^-$ und $U^+ = \bigcup U_i^+$. Dann definiere die Menge $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$ wie folgt:

Wir sagen $\ell' = (\mu_1, \dots, \mu_{k'}) \in \mathcal{L}(p, c_{i_1}) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{i_{k'}-1}, q)$ ist in $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$ enthalten, falls $\mu_j \cap U_j^+ \neq \emptyset$ und $\mu_j \cap U_{j+1}^- \neq \emptyset$.

Eine Menge $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ heißt dann *offen*, falls für alle $\ell \in V$ Umgebungen U_ℓ^+ und U_ℓ^- wie oben existieren, sodass

$$\mathcal{U}(\ell, U_\ell^+, U_\ell^-) \subseteq V.$$

Bemerkung. Die Topologie von $\mathcal{L}(p, q)$ als Quotient stimmt mit der von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ überein. Dies ist wieder ersichtlich, wenn wir uns $\mathcal{L}(p, q)$ als Schnitt $\mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$ vorstellen;

Die U^- beziehungsweise U^+ sind nur offene Umgebungen in den Niveaumengen.

Proposition 2.13. *Es seien p und q kritische Punkte von f . Dann ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ kompakt.*

Um diese Proposition zu beweisen benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma 2.14. *Es sei $x \in M$ kein kritischer Punkt von f . Sei außerdem $(x_n)_n$ eine Folge in M die gegen x konvergiert und seien y_n und y Punkte, die auf den selben Trajektorien wie x_n und x liegen. Es gelte außerdem $f(y_n) = f(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

Beweis. Es sei U eine Umgebung von $\text{Crit}(f)$. Dann ist $df(\cdot)(X)$ in $M - U$ nie Null. Ähnlich wie im Beweis vom ersten Deformationslemma 1.20 betrachten wir das Vektorfeld

$$Y = -\frac{1}{df(\cdot)(X)} \cdot X$$

Auf $M - U$. Sei φ die von Y erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen. Da Y in die selbe Richtung zeigt wie X , stimmen die Trajektorien von Y mit denen von X überein und außerdem gilt

$$f(\varphi_t(z)) = f(z) - t.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{-f(y_n)+f(x_n)}(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{-f(y)+f(x_n)}(x_n) \\ &= \varphi_{-f(y)+f(x)}(x) = y \end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 2.13. Es sei $(\ell_n)_n$ eine Folge in $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$. Um zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ kompakt ist müssen wir zeigen, dass $(\ell_n)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wir nehmen zuerst an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Trajektorie $\ell_n \in \mathcal{L}(p, q)$. Es sei $\ell_n^- \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n die Morse Umgebung $\Omega(p)$ verlässt und $\ell_n^+ \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n in die Morse Umgebung $\Omega(q)$ eintritt. ℓ_n^- und ℓ_n^+ sind im Schnitt von $\partial\Omega(p)$ bzw. $\partial\Omega(q)$ und der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit. Diese Schnitte sind Kugeloberflächen, also kompakt. Die Folgen $(\ell_n^-)_n$ und $(\ell_n^+)_n$ haben also konvergente Teilfolgen, wir können demnach ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie konvergent sind. Setze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = p^- \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^+ = q^+.$$

Sei φ die von X erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann ist $\gamma = \varphi_\bullet(p^-)$ die Trajektorie von p^- . Sei $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_t(p^-)$. Der Punkt c ist nach Proposition 2.4 ein kritischer Punkt, also ist $\gamma \in \mathcal{L}(p, c)$. Es sei d^+ der Punkt, an dem γ in $\Omega(c)$ eintritt. Da φ glatt ist, muss für n groß genug auch ℓ_n die Morse Umgebung $\Omega(c)$ kreuzen. Sei $d_n^+ \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n in $\Omega(c)$ eintritt. Dann gilt $d_n^+, d^+ \in \partial_+ W$, also gilt $f(d_n^+) = f(d^+)$ für alle n . Da d_n^+ auf der selben Trajektorie wie ℓ_n^- liegt, und d^+ auf der selben wie p^- , folgt da $\lim \ell_n^- = p^-$ mit dem letzten Lemma 2.14:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^+ = d^+.$$

Falls $c = q$, dann ist $\lim \ell_n = \gamma \in \mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$, also hat dann die Folge $(\ell_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Es sei also $c \neq q$. Dann muss ℓ_n die Morse Umgebung $\Omega(c)$ wieder durch einen Punkt d_n^- verlassen. Wie oben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $(d_n^-)_n$ konvergent ist, da sie zumindest eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir definieren dann $d^- := \lim d_n^-$. d^- liegt in der instabilen Mannigfaltigkeit von c , denn wäre dies nicht der Fall, dann führt das zu einem Widerspruch:

Angenommen $d^- \notin W^u(c)$. Dann wäre d^- auf der Trajektorie von einem Punkt $d_*^+ \in \partial_+ \Omega(c)$, der nicht in $W^u(c)$ enthalten ist. Wieder wegen des vorherigen Lemmas 2.14 ist dann $\lim d_n^+ = d_*^+$, also gilt dann $d^+ = d_*^+$, aber es gilt $d^+ \in W^u(c)$.

Wir können nun wieder mit dem selben Argument zeigen, dass dann die Trajektorie von d^- im kritischen Punkt q endet, also liegt dann $\lim \ell_n$ in $\mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$.

Jetzt fehlt uns noch der allgemeine Fall. Wir müssen also für eine Folge $(\ell_n)_n$ in $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ zeine konvergente Teilfolge finden. Wegen der Glattheit von φ können wir annehmen, dass für n groß genug alle ℓ_n die Form

$$\ell_n = (\ell_n^1, \dots, \ell_n^k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q)$$

haben. Wir finden mit der vorherigen Überlegung komponentenweise eine Teilfolge, sodass wir für den Grenzwert maximal noch $k - 1$ kritische Punkte als „Zwischenstopp“ einfügen müssen. \square

Bemerkung. Sind nun p und q kritische Punkte von f mit $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$, dann ist $\mathcal{L}(p, q)$ 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Außerdem ist $\mathcal{L}(p, q)$ eine Abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$, und wie wir in der letzten Proposition 2.13 gezeigt haben, ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ kompakt, also auch $\mathcal{L}(p, q)$, also ist $\mathcal{L}(p, q)$ endlich. Damit ist schon mal $n_X(p, q) < \infty$, also $C_k(M(f, X))$ wohldefiniert.

Der Morse Komplex ist ein Kettenkomplex

Wir wollen zeigen, dass der Morse-Komplex tatsächlich ein Kettenkomplex ist, also dass $\partial_X \circ \partial_X = 0$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \partial_X(\partial_X(p)) &= \partial_X\left(\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot c\right) \\ &= \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \left(\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot n_X(c, q)\right) \cdot q \end{aligned}$$

und

$$\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot n_X(c, q) = \# \left(\bigcup_{c \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q) \right) \mod 2.$$

Es genügt also zu zeigen, dass für kritische Punkte p und q mit Index $k+1$ und $k-1$ gilt, dass $\# \left(\bigcup_{c \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q) \right)$ gerade ist.

Wir benutzen die folgende Aussage, ohne sie zu beweisen:

Satz 2.15 (Klassifizierung kompakter 1-Mannigfaltigkeiten). *Es sei M eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist*

- M diffeomorph zu S^1 , falls $\partial M = \emptyset$
- M diffeomorph zu $[0, 1]$, falls $\partial M \neq \emptyset$

Beweis. Ich hab hier die eine gute Quelle gehabt verdammt. □

Satz 2.16. *Es seien p und q kritische Punkte von f mit $\text{ind}(p) = k+1$ und $\text{ind}(q) = k-1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und das Innere von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ist $\mathcal{L}(p, q)$.*

Mit dieser Proposition folgt dann mit der Klassifizierung von 1-Mannigfaltigkeiten mit Rand 2.15 schon, dass der Morse Komplex ein Kettenkomplex ist.

Beweis. Wir wissen schon, dass $\mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Um sagen zu können, dass $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und insbesondere, dass $\mathcal{L}(p, q)$ das Innere von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ist, reicht die folgende Aussage über $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$: Es sei c ein weiterer kritischer Punkt mit Index k . Sei $\lambda_1 \in \mathcal{L}(p, c)$ und $\lambda_2 \in \mathcal{L}(c, q)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ von (λ_1, λ_2) , ein $\delta > 0$ und eine (topologische) Einbettung $\psi: [0, \delta) \rightarrow U$, sodass gelten:

1. $\psi|_{(0, \delta)}$ ist glatt.
2. $\psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2)$.
3. $\psi((0, \delta)) \subseteq \mathcal{L}(p, q)$.

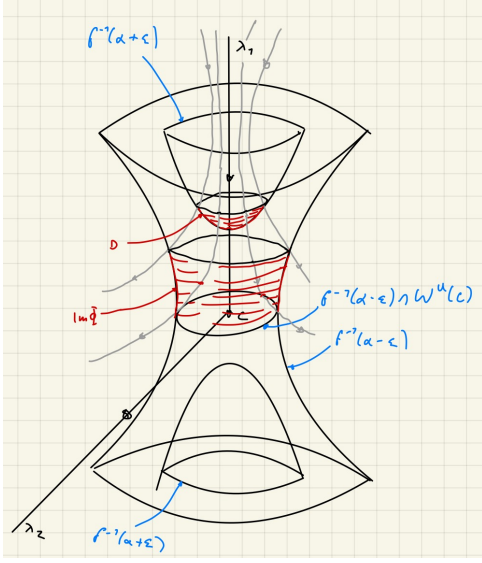


Abbildung 2.3: A figure

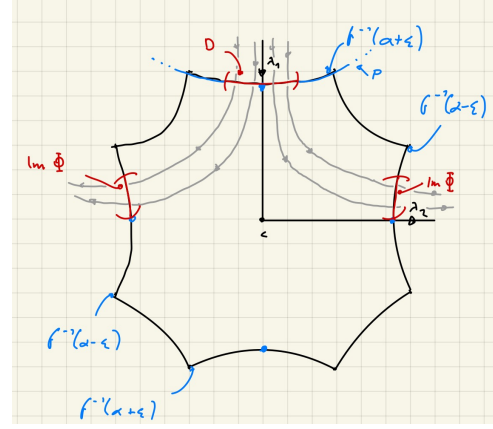


Abbildung 2.4: Another figure

4. Für jede Folge $(\ell_n)_n$ in $\mathcal{L}(p, q)$ die gegen (λ_1, λ_2) konvergiert gilt $\ell_n \in \text{Im}\psi$ für n groß genug.

Die letzte Bedingung stellt sicher, dass sich in (λ_1, λ_2) keine „Kreuzung“ befindet (wie zum Beispiel der Klebepunkt bei $S^1 \wedge S^1$). Wir begeben uns also auf die (recht lange) Suche nach einer solchen Abbildung ψ .

Wir machen ein Paar Konstruktionen. Sei $\alpha := f(c)$ und (V, κ) eine Morse Karte von c , $\Omega(c)$ wie in der Notation zu Morse Umgebungen 2.2. Dann sind $f(\partial_+\Omega) = \alpha + \epsilon$ und $f(\partial_-\Omega) = \alpha - \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Außerdem setze

$$\begin{aligned} S_+(c) &:= W^s(c) \cap f^{-1}(\alpha + \epsilon) \cong S^{n-k-1} \\ S_-(c) &:= W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \epsilon) \cong S^{k-1}. \end{aligned}$$

Dass $S_+(c)$ und $S_-(c)$ diffeomorph zu Sphären sind hatten wir schon vorher gesehen. Es sei $a_1 \in M$ der Punkt, an dem λ_1 auf $\Omega(c)$ trifft, also $a_1 = S_+(c) \cap \lambda_1$, und a_2 der Punkt, an dem λ_2 die Umgebung $\Omega(c)$ wieder verlässt, also $a_2 = S_-(c) \cap \lambda_2$. $\alpha + \epsilon$ ist kein kritischer Wert von f und es gilt $f^{-1}(\alpha + \epsilon) \pitchfork W^u(p)$, also ist mit Proposition 2.6 $P = f^{-1}(\alpha + \epsilon) \cap W^u(p)$ eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $(n-1) + (k+1) - n = k$. Da X die Smale-Eigenschaft erfüllt, $P \subseteq W^u(p)$, $S_+ \subseteq W^s(c)$, $P, S_+(c) \subseteq f^{-1}(\alpha + \epsilon)$ und $\dim P + \dim S_+(c) = n-1$ gilt $P \pitchfork S_+(c)$, also ist $P \cap S_+(c)$ mit Proposition 2.6 eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k + (n-k-1) - (n-1) = 0$. Offensichtlich gilt $a_1 \in P \cap S_+(c)$. Es sei $D_\delta^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < \delta\}$. Dann existiert eine Umgebung D von a_1 in P und ein Diffeomorphismus $\Psi : D \rightarrow D_\delta^k$ mit $\Psi(a_1) = 0$, sodass $D \cap S_+(c) = a_1$ und $D \subseteq \partial_+\Omega(c)$. Wir versuchen die Kernidee des Beweises zu verstehen:

Man betrachte die Abbildungen 2.3 und 2.4.

Wir versuchen, Menge $D - a_1$ entlang der Trajektorien von X auf $\partial_- \Omega(c)$ via einer Abbildung Φ zu projizieren. Wir werden sehen, dass $Q = \text{Im}(\Phi) \cup S_+(c)$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und dass dann $Q \cap W^s(q)$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und $a_2 \in \partial q$. Wie in 2.8 ist $Q \cap W^s(q) - a_2$ eine Teilmenge von $\mathcal{L}(p, q)$, und $a_2 \in \mathcal{L}(c, q)$, wenn wir also $a_2 \in \lambda_2$ mit (λ_1, λ_2) identifizieren, dann bekommen wir unsere Parametrisierung ψ von $\bar{\mathcal{L}}(p, q)$. Also:

Behauptung 1. Es sei φ die von X erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen. Für jedes $x \in D - a_1$ existiert ein $t_x \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi_{t_x}(x) \in \partial_- \Omega(c)$ und $x \mapsto t_x$ glatt ist.

Beweis von Behauptung 1. Via unserer anfangs gewählten Morse Karte (V, κ) , und da wir ohne Einschränkungen D klein genug wählen können, sodass $D \subseteq \Omega(c)$, können wir annehmen, dass sich alles im \mathbb{R}^n abspielt; Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x_-, x_+) = -\|x_-\| + \|x_+\|$. Dann ist φ gegeben durch

$$\varphi_t(x_-, x_+) = (e^{2t}x_-, e^{-2t}x_+).$$

Falls $(x_-, x_+) \in \partial_+ U$ und $x_- \neq 0$, dann gilt auch $x_+ \neq 0$. Setze

$$t_{(x_-, x_+)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} \right).$$

Dann gilt

$$\varphi_{t_{(x_-, x_+)}}(x_-, x_+) = \left(\frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right).$$

Die Zuordnung $(x_-, x_+) \mapsto t_{(x_-, x_+)}$ ist glatt und

$$\begin{aligned} f(\varphi_{t_{(x_-, x_+)}}(x_-, x_+)) &= -\left\| \frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_- \right\| + \left\| \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right\| \\ &= -\|x_+\| + \|x_-\| \\ &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt $\varphi_{t_{(x_-, x_+)}}(x) \in \partial_- U$. //

Wir haben nun also eine Einbettung Φ von $D - a_1$ entlang der Trajektorien von X gefunden. Wie am Anfang besprochen wollen wir jetzt zeigen:

Behauptung 2. Ist δ klein genug, dann ist $Q = \Phi(D - a_1) \cup S_+(c)$ eine k dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und es gilt $\partial Q = S_-(c)$.

Beweis von Behauptung 2. Wieder spielt sich alles via κ im \mathbb{R}^n ab. Man betrachte die Projektion

$$\pi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}; \pi(x_-, x_+) = x_-.$$

und ihre Einschränkung $\partial_+ U \rightarrow D_\eta^k$. Da $S_+ := \kappa(S_+(c)) = (\pi|_{\partial_+ U})^{-1}(0)$ und $D \pitchfork S_+$, ist 0 ein regulärer Wert von $\pi|_{\partial_+ U}$. Also ist $d\pi|_{\partial_+ U}(0)$ surjektiv, und da $\dim \partial_+ U = k = \dim D_\delta^k$ ist das Differential auch invertierbar. Jetzt können wir den Satz über die Umkehrfunktion anwenden bekommen lokal ein Inverses der Abbildung $\pi|_{\partial_+ U}$. Es existiert also ein $\delta' \leq \eta$, sodass das Inverse von $\pi|_{\partial_+ U}$ auf $D_{\delta'}^k$ definiert ist. Dann ist

$$\begin{aligned} (\pi|_{\partial_+ U})^{-1}: D_{\delta'}^k &\longrightarrow D \\ x_- &\longmapsto (x_-, x_+) =: (x_-, h(x_-)) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus. Da $D \subseteq \partial_+ U \subseteq f^{-1}(\varepsilon)$, gilt dann $\|h(x_-)\|^2 = \|x_-\|^2 + \varepsilon$. Ist dann $g = \frac{h}{\|h\|}: D_{\delta'}^k \rightarrow S^{n-k-1}$, dann gilt

$$D = \{(x_-, h(x_-)) : x_- \in D_{\delta'}^k\} = \{(x_-, \sqrt{\|x_-\|^2 + \varepsilon} \cdot g(x_-)) : x_- \in D_{\delta'}^k\}.$$

Dann bekommen wir mit der Einbettung aus Behauptung 1 und da $\|g(x_-)\| = 1$:

$$\Phi(D - a_1) = \left\{ \left(\frac{\sqrt{\|x_-\|^2 + \varepsilon}}{\|x_-\|} x_-, \|x_-\| g(x_-) \right) : x_- \in D_{\delta'}^k - 0 \right\}$$

Wir können nun auf $D_{\delta'}^k - 0$ Polarkoordinaten anwenden. wir erhalten eine Einbettung

$$\begin{aligned} H = \Phi^{-1} \circ \rho: (0, \delta') \times S^{k-1} &\longrightarrow \partial_- U \\ (r, v) &\longmapsto (\sqrt{r^2 + \varepsilon} \cdot v, r \cdot g(\rho(r, v))). \end{aligned}$$

g ist auf ganz $D_{\delta'}^k$ definiert, und wenigstens in einer Umgebung von 0 beschränkt. Also können wir H stetig in 0 durch

$$H(0, v) = (\sqrt{\varepsilon} \cdot v, 0)$$

fortsetzen. Dann ist H auch weiterhin eine (topologische) Einbettung mit $\text{Im}(H) = \Phi(D - a_1) \cup S_-$, und es gilt

$$H(0, S^{k-1}) = S_-.$$

//

Wir wissen, dass für $f(q) < \alpha - \varepsilon < f(c)$ gilt $\mathcal{L}(c, q) \cong (W^u(c) \cap W^s(q)) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$.

Außerdem gilt $W^s(q) \pitchfork \text{Im}\Phi$ und $W^s(q) \pitchfork S_-(c)$ in $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$, also ist mit Proposition 2.6 $W^s(q) \cap Q$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $(n - (k - 1)) + k - n = 1$, und der Rand von $W^s(q) \cap Q$ ist $W^s(q) \cap S_-(c) \subseteq \mathcal{L}(c, q)$, also ist $a_2 \in \partial(W^s(q) \cap Q)$.

Wähle eine Parametrisierung von einer Umgebung von a_2 in $W^s(q) \cap Q$

$$\chi: [0, \delta) \rightarrow W^s(q) \cap Q.$$

Es gilt dann $\chi(0) = a_2$.

Damit erhalten wir die Abbildung

$$\Phi^{-1} \circ \chi: (0, \delta) \longrightarrow W^s(q) \cap (D - a_1) \subseteq \mathcal{L}(p, q).$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} \psi: [0, \delta) &\longrightarrow \overline{\mathcal{L}}(p, q) \\ t &\longmapsto \begin{cases} \Phi^{-1} \circ \chi(t) & \text{falls } t \neq 0 \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \text{falls } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass ψ die gewünschten Eigenschaften vom Anfang erfüllt.

Offensichtlich ist ψ bijektiv. ψ ist stetig, denn ist $(x_n)_n$ eine Folge in $(0, \delta)$, die gegen 0 konvergiert, dann konvergiert die Folge $(\chi(x_n))_n$ in $W^s(q) \cap Q \subseteq \partial_- \Omega(c)$ gegen a_2 . Dann folgt aus dem Lemma 2.14, dass die Folge $(y_n)_n$ in $W^s(q) \cap (D - a_1)$ mit $y_n = \Phi^{-1}(\chi(x_n))$ gegen a_1 konvergiert, also konvergiert $\psi(x_n)$ gegen (λ_1, λ_2) . Genau dasselbe gilt für die Umkehrabbildung:

Ist $(x_n)_n$ eine Folge in $W^s(q) \cap D$, die gegen a_1 konvergiert, dann konvergiert $\Phi(x_n)$ gegen a_2 , also $\chi^{-1}(\Phi(x_n))$ gegen 0. Also ist die Abbildung ψ ein Homeomorphismus, und die drei Bedingungen, die an ψ gestellt werden, sind offensichtlich aufgrund der Konstruktion erfüllt.

Wir müssen nur noch 4. zeigen.

Sei $(\ell_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}(p, q)$, die gegen (λ_1, λ_2) konvergiert. Für n groß genug können wir annehmen, dass die ℓ_n die Morse Umgebung $\Omega(c)$ betreten und verlassen. Seien wieder wie vorher die $\ell_n^+ = \ell_n \cap \partial_+ \Omega(c)$ die Punkte, an denen ℓ_n die Umgebung $\Omega(c)$ verlässt und $\ell_n^- = \ell_n \cap \partial_- \Omega(c)$ die Punkte, an denen ℓ_n in die Umgebung $\Omega(c)$ eintritt. Wegen der Topologie, die wir auf $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ definiert haben gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = a_1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^+ = a_2,$$

und da Φ den Trajektorien von X folgt gilt $\Phi(\ell_n^-) = \ell_n^+$. Für n groß genug gilt also $\ell_n^- \in D - a_1$, also $\ell_n^+ \in Q$. Sowieso gilt schon, dass $\ell_n^+ \in W^s(q)$, also

$$\ell_n^- \in Q \cap W^s(q) = \text{Im} \chi.$$

Außerdem ist $\Phi^{-1}(\ell_n^+) = \ell_n^-$, also $\ell_n \in \text{Im}(\psi)$. □

3 Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

3.1 CW-Struktur von Mannigfaltigkeiten

Die folgenden Definitionen sind in [Dol72] zu finden.

Definition 3.1 (CW-Zerlegung und CW-Komplexe). Es sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung \mathcal{E} von X heißt *CW – Zerlegung*, wenn gelten:

1. Die Elemente in \mathcal{E} sind paarweise disjunkt.
2. Alle $e \in \mathcal{E}$ sind homeomorph zu offenen Kreisscheiben.
Wir nennen X^n die Vereinigung aller $e \in \mathcal{E}$, die Homeomorph zu einer k -dimensionalen offenen Kreisscheibe mit $k \leq n$ sind.
3. Für jedes Element $e \in \mathcal{E}$ existiert eine stetige Abbildung $\Phi_e: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n \cup e, X^n)$, sodass $\Phi_e: B^n - S^n \rightarrow e$ ein Homeomorphismus ist. B^n ist die abgeschlossene n -dimensionale Kreisscheibe.
4. Der Abschluss \bar{e} enthält nur endlich viele Elemente aus \mathcal{E} .
5. Eine Teilmenge U ist offen in X genau dann, wenn für alle $e \in \mathcal{E}$ die Menge $U \cap \bar{e}$ offen in \bar{e} ist.

Ein topologischer Raum X zusammen mit einer CW-Zerlegung \mathcal{E} heißt *CW-Komplex*. Wir nennen die k -dimensionalen $e \in \mathcal{E}$ k -Zellen, die Abbildung Φ_e heißt charakteristische Abbildung von e , die Abbildung $\varphi_e := \Phi_e|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ heißt Anheftungsabbildung. X^n heißt n -Skelett von X . Existiert ein n , sodass $X^n = X$, dann ist n die dimension des CW-Komplexes. Existiert kein solches n , dann ist die Dimension ∞ .

Bemerkung. Ist X kompakt mit einer CW-Zerlegung \mathcal{E} , dann ist \mathcal{E} endlich dimensional, und die Bedingungen 4. und 5. sind sowieso erfüllt.

Definition 3.2 (Zelluläre Homologie). Bemerke, dass X^n/X^{n-1} das Wedge-Produkt vieler $D^n/S^{n-1} = S^n$'s ist. Wir bekommen durch die Anheftungsabbildung für jede k -Zelle e eine Abbildung in den Quotienten

$$\varphi_e: S^{k-1} \longrightarrow X^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}/X^{k-2}.$$

ist d eine $k - 1$ -Zelle, dann bekommen wir außerdem eine Abbildung

$$\psi_d: X^{k-1}/X^{k-2} \longrightarrow S^{k-1},$$

die alle Sphären in dem Quotienten außer die, die aus $\text{Im}(\Phi_d)$ entstanden ist auf den Klebepunkt abbildet.

Sei dann $N(e, d)$ der Grad mod 2 der Abbildung

$$\psi_d \circ \varphi_c: S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}.$$

Dann ist das k -te Glied K_k des *zellulären Komplexes* (K_*, ∂) das \mathbb{F}_2 -Modul, das von den k -Zellen in \mathcal{E} erzeugt wird, und das Differential ist für eine k -Zelle e gegeben durch

$$\partial(e) = \sum_{d \in K_{k-1}} N(e, d) \cdot d$$

Bemerkung. Man zeigt, dass $\partial \circ \partial = 0$, also dass (K_*, ∂) ein Kettenkomplex ist. Siehe [Dol72]. Außerdem ist die Homologie des zellulären Kettenkomplexes isomorph zur singulären Homologie, und damit unabhängig von der gewählten CW-Zerlegung ([Hat02]). Wie schon vorher angedeutet, gibt es nicht für jeden topologischen Raum eine CW-Zerlegung, aber es ist tatsächlich gar nicht leicht einen topologischen Raum zu konstruieren, der kein CW-Komplex ist.

3.2 Morse-Homologie ist zelluläre Homologie

3.3 Anwendungen

Literatur

- [Mor31] Marston Morse. „The critical points of a function of n variables“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 33.1 (1931), S. 72–91. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.2307/1989459. URL: <https://doi.org/10.2307/1989459>.
- [Sma61] Stephen Smale. „On Gradient Dynamical Systems“. In: *Annals of Mathematics* 74.1 (1961), S. 199–206. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1970311> (besucht am 02.09.2023).
- [Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Bd. No. 51. Annals of Mathematics Studies. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963, S. vi+153.
- [Dol72] A. Dold. *Lectures on algebraic topology*. Bd. Band 200. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972, S. xi+377.
- [Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Bd. No. 33. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, S. x+221.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, S. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- [AD14] Michèle Audin und Mihai Damian. „Morse theory and Floer homology“. In: Universitext. Translated from the 2010 French original by Reinie Ern . Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2014. Kap. 1 - 4, S. xiv+596. ISBN: 978-1-4471-5495-2; 978-1-4471-5496-9; 978-2-7598-0704-8. DOI: 10.1007/978-1-4471-5496-9. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5496-9>.