

# **Homotopietypen von Subniveaumengen von Morse-Funktionen**

Ein Vortrag für das Seminar  
"Topics in Global Analysis"  
bei Prof. Ursula Ludwig

**Jakob Dimigen**

## §1 Einführung

Wiederholung von letzter Woche:

**Def. 1.1.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung,  $\dim(M) = n$ ,  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Sei  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von  $p$ . Dann ist der *Index* von  $p$  die Anzahl der negativen Eigenwerte von der Matrix

$$H_p^\varphi f := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$p$  heißt *nicht degeneriert*, falls  $H_p^\varphi f$  invertierbar ist.

**Theorem 1.2** (Das Morse-Lemma). Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und  $p$  ein nicht degenerierter kritischer Punkt von  $f$  mit Index  $k$ . Dann existiert ein lokales Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , sodass

$$f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

und

$$x_1(p) = \dots = x_n(p) = 0$$

//

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$  eine *Subniveaumenge* von  $f$ . Eine *Morse-Funktion* ist eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass alle kritischen Punkte von  $f$  nicht degeneriert sind. Das Ziel des Vortrags ist es, die Topologie der Subniveaumengen von Morse-Funktionen zu verstehen. Wir untersuchen die Situation anhand des Torus. Man stellt sich Morse-Funktionen einfachheitshalber als "Höhenfunktionen" vor.

Um die vorherrschende Situation besser zu untersuchen benötigen wir eine weitere Definition, die im weitesten eine Umbenennung bekannter Objekte ist:

**Def. 1.3** (Eine  $k$ -Zelle anbringen). Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Seien

$$e^k = D^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq 1\}$$

$$\varphi : \partial e^k \rightarrow X \text{ stetig}$$

$$X \cup_\varphi e^k = (X \amalg e^k) / \sim, \text{ wobei}$$

$$\partial e^k \ni x \sim y \in X \Leftrightarrow \varphi(x) = y$$

Dann heißt  $e^k$   $k$ -Zelle,  $\varphi$  Anheftungsabbildung und  $X \cup_\varphi e^k$  heißt  $X$  mit einer  $k$ -Zelle

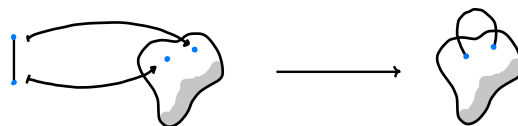
angebracht. Per Definition ist

$$\emptyset \cup e^0 := e^0 = * \text{ und falls } X \neq \emptyset : X \cup e^0 := X$$

### ZEICHNUNG 1-Zelle anbringen

Ein Paar Beispiele:

- Eine 1-Zelle lässt uns Zusammenhangskomponenten mit einer "Schnur" verbinden, oder ist das Anheften einer "Schleife".



- Eine 2-Zelle anzubringen kann sein wie das anbringen einer Blase oder das stopfen eines Loches durch eine "Membran".

Eine  $k$ -Zelle kann also unter anderem zwei Sachen: "Löcher", die von der  $k$ -ten Homologie "gemessen" werden zu erschaffen oder "Löcher", die von der  $(k-1)$ -ten Homologie "gemessen" werden zu "stopfen". Wenn wir also unsere Mannigfaltigkeit in Bezug auf solche Zellen bringen können, dann macht es uns das leichter die Topologie (und Homologie) der Mannigfaltigkeit besser zu verstehen. Wenn wir sogar die gesamte Mannigfaltigkeit durch iteratives anbringen von  $k$ -Zellen an den leeren Raum "erschaffen" können, dann können wir einigen Aussagen über die Homologie des Raumes machen.

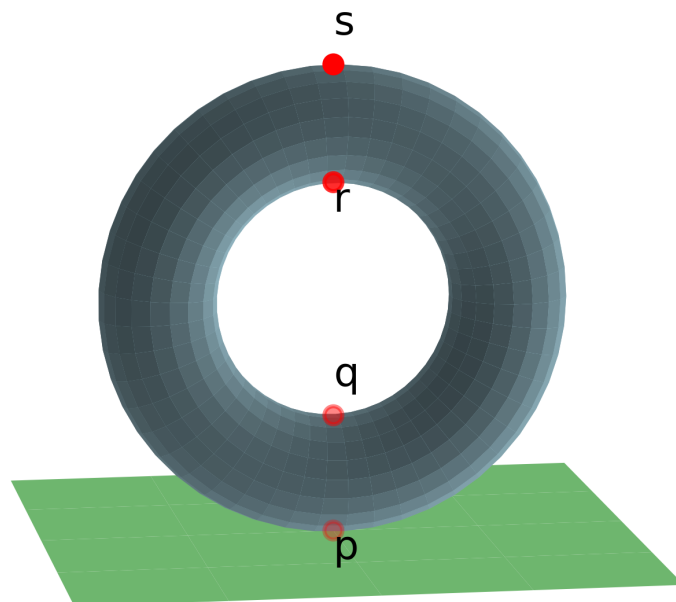


Figure 1: Torus auf der Ebene

Es sei  $f$  die Abbildung vom Torus nach  $\mathbb{R}$ , die jedem Punkt den minimalen Abstand zu der eingezeichneten Ebene zuordnet. Die kritischen Punkte dieser Höhenfunktion sind  $p$ ,  $q$ ,  $r$  und  $s$ .

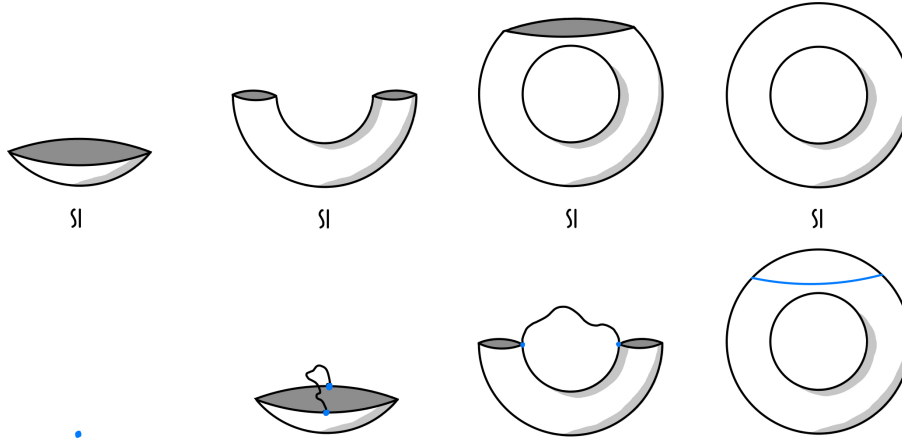


Figure 2: Niveaumengen der Höhenfunktion des Torus

- Für  $a < f(p)$  ist  $M^a = \emptyset$ .
- Für  $f(p) \leq a < f(q)$  ist  $M^a$  homotopieäquivalent zum Punkt.
- Für  $f(q) \leq a < f(p)$  ist  $M^a$  homotopieäquivalent zum Kreis, an dem ein "Henkel" befestigt wurde.
- Für  $f(p) \leq a < f(r)$  ist  $M^a$  Homotopieäquivalent zum Zylinder, an dem ein "Henkel" befestigt wurde.
- Für  $f(r) \leq a$  ist  $M^a$  der Torus selbst.

Wir bemerken:

- Gibt es im Intervall  $[a, b]$  keine kritischen Werte, so sind  $M^a$  und  $M^b$  diffeomorph.
- Gibt es in  $f^{-1}[a, b]$  genau einen kritischen Punkt, dann hat  $M^b$  den Homotopie-Typ von  $M^a$  mit einer  $k$ -Zelle angebracht, wobei  $k \in \mathbb{N}_0$

Um diese zwei Aussagen zu präzisieren, brauchen wir einige Definitionen:

**Def. 1.4** (Deformationsretrakt). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  ein Unterraum von  $X$ . Eine stetige Abbildung  $r : X \times [0, 1] \rightarrow X$  heißt *Deformationsretraktion* auf  $A$ ,

falls gelten:

$$\begin{aligned}r(\cdot, 0) &= \text{id}_X \\ r(X, 1) &\subseteq A \\ r(\cdot, 1)|_A &= \text{id}_A\end{aligned}$$

$A$  heißt *Deformationsretrakt*, falls eine Deformationsretraktion von  $X$  auf  $A$  existiert.

Deformationsretrakte haben einige schöne Eigenschaften. Falls  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$  ist, so ist die Inklusion  $A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, hat ein weiterer Deformationsretrakt  $B$  von  $X$  deshalb denselben Homotopietypen wie  $A$ .

Es ist eine Tatsache, dass zwei Unterräume  $A$  und  $B$  genau den denselben Homotopietypen haben, wenn sie beide Deformationsretrakte eines gemeinsamen Obertraumes sind. Um dies einzusehen benötigt man weitere topologische Theorie.

## §2 Das erste Deformationslemma

**Def. 2.1** (Riemannsche Metrik). Eine *Riemannsche Metrik*  $g$  ist ein Skalarprodukt

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

für jeden Punkt  $p$ , sodass für alle Vektorfelder  $X$  und  $Y$  die Abbildung  $p \rightarrow g_p(X(p), Y(p))$  glatt ist. Wir schreiben

$$g_p(x, y) = \langle x, y \rangle$$

**Def. 2.2** (Gradient). Es sei  $M$  *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, also eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Riemannschen Metrik  $g$ . Außerdem sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann ist der *Gradient* von  $f$  das (einzigartige) Vektorfeld  $\nabla f$  für das gilt:

$$\langle X, \nabla f \rangle = \text{d}f X$$

Falls  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, ist  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$  genau dann, wenn  $\nabla f(p) = 0$ .

Man kann auf jeder Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik definieren.

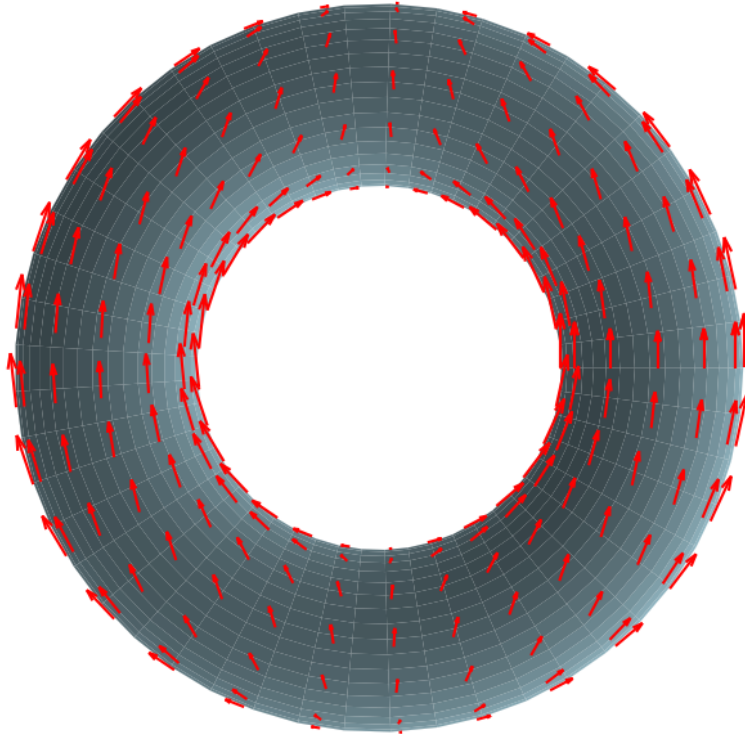


Figure 3: Gradient der Höhenfunktion auf dem Torus

**Def. 2.3** (Flusslinie, Wang). Es sei  $X$  ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ . Für einen glatten Weg  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, definiere für  $t_0 \in I$ :

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = d\gamma(t_0) \left( \frac{d}{dt} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

wobei  $\frac{d}{dt} \in T_pM$  das durch die Identität auf  $\mathbb{R}$  induzierte Element im Tangentialraum ist. Ein Weg  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Flusslinie* eines Vektorfeldes  $X$ , falls für alle  $t_0 \in I$  gilt:

$$X(\gamma(t_0)) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$$

**Def. 2.4** (1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen). Eine *1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \text{ wobei } (t, p) \mapsto \varphi_t(p)$$

Sodass für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

und

$$\varphi_0 = \text{id}_M$$

Ich schreibe:

$$\varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow M; t \mapsto \varphi_t(p)$$

Wir sagen eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen wird von einem Vektorfeld  $X$  generiert, falls für alle  $p \in M$  gilt

$$X(p) = \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(0)$$

Ist  $\varphi$  eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, so ist für alle  $t \in \mathbb{R}$   $\varphi_t$  ein Diffeomorphismus mit Inverse  $\varphi_{-t}$ .

Bemerke: Falls  $X$  eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen  $\varphi$  erzeugt, dann ist für alle  $p \in M$  der Weg  $\varphi_\bullet(p)$  eine Flusslinien von  $X$ , denn

$$\begin{aligned} X(\varphi_{t_0}(p)) &= \frac{d\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p))}{dt}(0) = T_0\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p)) \left( \frac{d}{dt} \right) \\ &= T_0\varphi_{t_0+\bullet}(p) \left( \frac{d}{dt} \right) = T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \cdot T_0(t_0 + \text{id}_{\mathbb{R}}) \left( \frac{d}{dt} \right) \\ &= T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \left( \frac{d}{dt} \right) = T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \left( \frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{d\varphi_\bullet}{dt}(t_0) \end{aligned}$$

**Lemma 2.5.** *Es sei  $X$  ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  mit kompaktem Träger. Dann generiert  $X$  eine eindeutige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen.*

*Proof.* Der Beweis ist recht umfangreich, wird hier aber ausgelassen.  $\square$

**Theorem 2.6** (Erstes Deformationslemma). *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung. Hat  $f$  keine kritischen Werte im Intervall  $[a, b]$  und ist  $f^{-1}[a, b]$  kompakt, so existiert ein Diffeomorphismus  $M^a \rightarrow M^b$ , und  $M^a$  ist ein Deformationsretrakt von  $M^b$ .*

Das ist genau die erste Aussage, die wir schon am Anfang beim Torus beobachtet haben!

Die Idee des Beweises ist es,  $M^a$  entlang der Richtung, in die  $f$  am stärksten steigt, also entlang des Gradientenfeldes mit einem Diffeomorphismus  $\varphi$  "nach oben zu ziehen", bis  $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$ .

*Beweis erstes Deformationslemma.* Es existiert eine kompakte Umgebung  $K \in M$  von  $f^{-1}[a, b]$ . Dies folgt aus Whitneys Einbettungssatz und dem Satz von Heine-Borel. Sei

$\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte, positive Funktion, sodass

$$\rho(p) = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

für alle  $p \in f^{-1}[a, b]$  und die außerhalb von  $K$  verschwindet und für die für alle  $p \in K$ , die keine kritischen Punkte sind, gilt:

$$0 \leq \rho(p) \leq 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

Bemerke dass  $\rho$  innerhalb von  $f^{-1}[a, b]$  wohldefiniert ist, da sich keine kritischen Punkte im Intervall  $[a, b]$  befinden. Definiere ein Vektorfeld  $X$  durch

$$X(p) = \rho(p) \cdot \nabla f(p)$$

Dann hat  $X$  kompakten Träger, erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 2.5. Sei also  $\varphi$  die einzigartige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, die von  $X$  generiert wird. Wir bekommen für jedes  $p \in M$  eine Abbildung  $f \circ \varphi_{\bullet}(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Behauptung 1.** Für alle  $p \in M$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $q = \varphi_{t_0}(p)$  ist  $\frac{d}{dt} f \circ \varphi_{\bullet}(p)(t_0) \in [0, 1]$  und falls  $f(\varphi_t(p)) \in [a, b]$  gilt sogar  $\frac{d}{dt} f \circ \varphi_{\bullet}(p)(t_0) = 1$ .

Für  $q = \varphi_{t_0}(p)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \varphi_{t_0}(p) &= T_{\varphi_{t_0}(p)} f \cdot T_{t_0} \varphi_{\bullet}(p) \left( \frac{d}{dt} \right) = df(q) \cdot X(q) \\ &= \langle X(q), \nabla f(q) \rangle = \rho(q) \langle \nabla f(q), \nabla f(q) \rangle \in [0, 1] \end{aligned}$$

$f \circ \varphi_{\bullet}(p)$  ist also monoton wachsend für alle  $p \in M$ .

Falls sogar  $f(\varphi_p(t_0)) \in [a, b]$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi_p(t_0) = 1$$

//

**Behauptung 2.** Für  $p \in f^{-1}(a)$ ,  $t_0 \in [0, b - a]$  gilt  $f(\varphi_{t_0}(p)) \in [a, b]$ .

$$f(\varphi_{t_0}(p)) \geq f(\varphi_0(p)) = a$$



und

$$\begin{aligned}
f(\varphi_t(p)) &\leq f(\varphi_{b-a}(p)) \\
&= \int_0^{b-a} \frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) dt + f(\varphi_0(p)) \\
&= \int_0^{b-a} \rho(\varphi_t(p)) \langle \nabla f(\varphi_t(p)), \nabla f(\varphi_t(p)) \rangle dt + a \\
&\leq \int_0^{b-a} 1 dt + a \\
&= b
\end{aligned}$$

//

**Behauptung 3.** Unter  $\varphi_{b-a}$  wird die Niveaumenge  $f^{-1}(a)$  auf die Niveaumenge  $f^{-1}(b)$  abgebildet.

Für  $p \in f^{-1}(a)$  gilt:

$$\varphi_{a-a}(p) = \varphi_0(p) = p$$

und für  $t_0 \in [0, b-a]$  gilt wegen Behauptung 1 und 2

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_{\text{id}_{\mathbb{R}}-a}(p))(t_0) = 1$$

also

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = f(\varphi_0(p)) + (b-a) = b$$

Genauso gilt für  $q \in f^{-1}(b)$ :  $f(\varphi_{a-b}(q)) = a$ , also  $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$ .

//

**Behauptung 4.**  $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$

" $\subseteq$ ": Sei  $p \in M^a$ . OBdA. existiert  $s \in [0, b-a]$ , sodass  $f(\varphi_s(p)) = a$ , ansonsten gilt für alle  $s \in [0, b-a]$ :  $f(\varphi_s(p)) \leq a < b$ . Dann gilt

$$f(\varphi_{b-a}(p)) \leq f(\varphi_{b-a+s}(p)) = f(\varphi_{b-a}(\varphi_s(p))) = b$$

" $\supseteq$ ": Analog.

//

Damit ist  $\varphi_{b-a}|_{M^a}$  ein Diffeomorphismus zwischen  $M^a$  und  $M^b$ .

Betrachte nun  $r : M^b \times \mathbb{R} \rightarrow M^b$ ,

$$r(p, t) = \begin{cases} p & \text{falls } f(p) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & \text{falls } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

Dann ist  $r$  stetig,  $r(\cdot, 0)$  ist die Identität auf  $M^b$ ,  $r(\cdot, 1)|_{M^a}$  ist die Identität auf  $M^a$  und  $r(1, M^b) \subseteq M^a$ , also ist  $M^a$  ein Deformationsretrakt von  $M^b$ . □

**Corollary 2.7.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion ohne kritische Werte in  $[a, b]$ . dann ist  $f^{-1}[a, b]$  diffeomorph zu den Mannigfaltigkeiten mit Rand  $f^{-1}(a) \times [a, b]$  und  $f^{-1}(b) \times [a, b]$ .*

### §3 Das zweite Deformationslemma

**Theorem 3.1** (Zweites Deformations-Lemma). *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung und  $p$  ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index  $k$ . Sei  $c := f(p)$  und  $\varepsilon \geq 0$ , sd.  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und außer  $p$  keine weiteren kritischen Punkte von  $f$  beinhaltet. Dann hat  $M^{c-\varepsilon}$  denselben Homotopietypen wie  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ .*

Das ist die zweite Aussage, die wir am Anfang am Beispiel des Torus beobachtet haben!

Die Idee für den Beweis ist, sich eine neue Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  zu definieren, die Außerhalb von einer kleinen Umgebung von  $p$   $f$  entspricht und in der Umgebung etwas kleiner ist. Dann bekommen wir die folgende Situation:

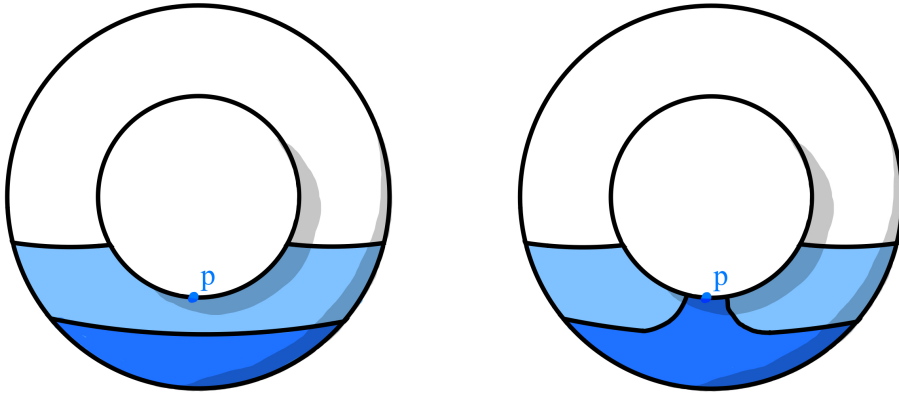


Figure 4: Die Niveaumengen von  $f$  (links) und  $F$  (rechts)

Wir wollen also, dass  $M^{c+\varepsilon} = F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$  gilt und  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  fast dasselbe ist wie  $M^{c-\varepsilon}$ , nur dass  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  einen "Henkel" enthält der den kritischen Punkt  $p$  enthält.

*Beweis zweites Deformationslemma.* Sei  $c := f(p)$ . Mit dem Morse-Lemma können wir lokale Koordinaten  $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$  wählen, sodass

$$f = c - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2$$

in dieser Umgebung, und sodass für den kritischen Punkt  $p$  gilt:

$$u_1(p) = \dots = u_n(p) = 0$$

Sei oBdA.  $\varepsilon > 0$  klein genug, sodass

1.  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und keine kritischen Punkte außer  $p$  enthält
2.  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 2\varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$

Wähle nun die  $k$ -Zelle

$$e^k := \{p \in M : (u_1(p))^2 + \dots + (u_k(p))^2 \leq \varepsilon \text{ und } u_{k+1}(p) = \dots = u_n(p) = 0\}$$

Wir bekommen die folgende Situation:

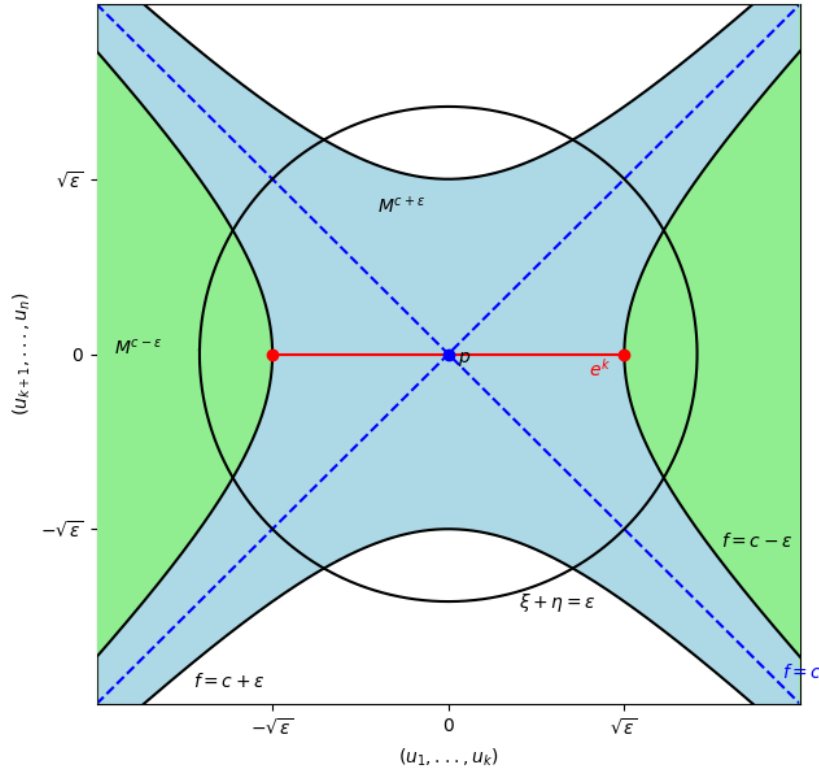


Figure 5:  $U$  parametrisiert

Nun definiere eine glatte Funktion  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

1.  $\mu(0) > \varepsilon$
2.  $\mu(r) = 0$  falls  $r \geq 2\varepsilon$
3.  $-1 < \mu'(r) \leq 0$  für alle  $r \in \mathbb{R}$

Sei nun  $F$  außerhalb von  $U$  gleich  $f$ , und sei

$$F = f - \mu(u_1^2 + \dots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + \dots + 2u_n^2)$$

$F$  ist wohldefiniert und glatt, da  $F$  außerhalb des Kreises mit Radius  $\sqrt{2\varepsilon}$  mit  $f$  übereinstimmt und der gesamte Kreis in  $U$  enthalten ist. Damit haben wir einen guten Kandidaten für  $F$  gefunden.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}\eta, \xi &: U \rightarrow [0, \infty) \\ \xi &= u_1^2 + \dots + u_k^2 \\ \eta &= u_{k+1}^2 + \dots + e_n^2\end{aligned}$$

Dann gilt innerhalb von  $U$ :

$$f = c - \xi + \eta$$

und

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$$

Jetzt wollen wir überprüfen:

1.  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$ .
2.  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  ist ein Deformationsretrakt von  $M^{c+\varepsilon}$ .
3.  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$  ist ein Deformationsretrakt von  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ .

Dann folgt schon die Behauptung.

**Behauptung 1.**  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

Sei  $q \in M$ . Falls gilt  $\xi(q) + 2\eta(q) > 2\varepsilon$  gilt  $F(q) = f(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)) = f(q)$ , also gelte oBdA.

$$\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon$$

Dann:

$$F(q) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon$$

//

**Behauptung 2.**  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  ist ein Deformationsretrakt von  $M^{c+\varepsilon}$ .

Bemerke: Die kritischen Punkte von  $F$  stimmen mit denen von  $f$  überein, denn:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

Insbesondere sind diese beiden Ableitungen also niemals 0. Da

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

und  $d\xi$  und  $d\eta$  nur in  $p$  gleichzeitig Null sind, haben  $f$  und  $F$  dieselben kritischen Punkte.

Betrachte die Region  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ . Wegen Behauptung 1 und der Tatsache, dass  $F \leq f$  gilt:

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$$

Da  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  abgeschlossen ist, ist  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  auch kompakt. Da  $f$  und  $F$  dieselben kritischen Punkte haben kann diese Menge maximal den kritischen Punkt  $p$  enthalten, aber

$$F(p) = c - \xi(p) + \eta(p) + \mu(\xi(p) + 2\eta(p)) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

Also gibt es in  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  keine kritischen Punkte. Mit dem ersten Deformationslemma gilt dann:  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  ist Def. Retrakt von  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$ .

//

**Behauptung 3.**  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$  ist ein Deformationsretrakt von  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ .

Diese Aussage ergibt nur Sinn, falls  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k \subseteq F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ . Wir wissen schon, dass  $M^{c-\varepsilon} \subseteq F^{-1}(c - \varepsilon]$ .

Sei  $q \in e^k$ , dann gilt  $\xi(p) = 0 \leq \xi(q) \leq 1$  und  $\eta(p) = 0 = \eta(q)$ . Da  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$  gilt dann

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$$

Also ergibt sich folgende Situation:

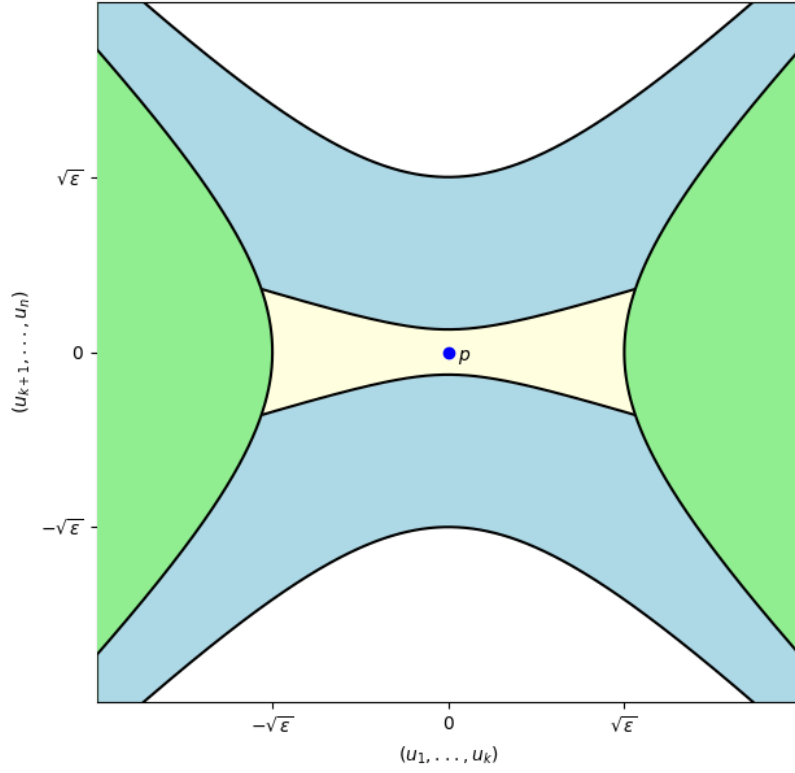


Figure 6: Henkel

Die hellgrün eingefärbte Fläche ist  $M^{c-\varepsilon}$  die hellgelbe zusammen mit der hellgrünen Fläche ist  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ .

Dafür konstruieren wir eine Deformationsretraktion  $r : F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] \times [0, 1] \rightarrow F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  für  $q \in F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ,  $t \in [0, 1]$ , die  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$  auf  $e^k$  deformiert, wie folgt.

$$r(q, t) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, tu_{k+1}, \dots, tu_n)(q) & \text{im Fall 1: } \xi(q) \leq \varepsilon \\ \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, s_t u_{k+1}, \dots, s_t u_n)(q) & \text{im Fall 2: } \varepsilon \leq \xi(q) \leq \eta(q) + \varepsilon \\ q & \text{im Fall 3: } \eta(q) + \varepsilon \leq \xi(q) \end{cases}$$

Wobei

$$s_t = t + (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2}$$

Die Fälle sind dann wie folgt:

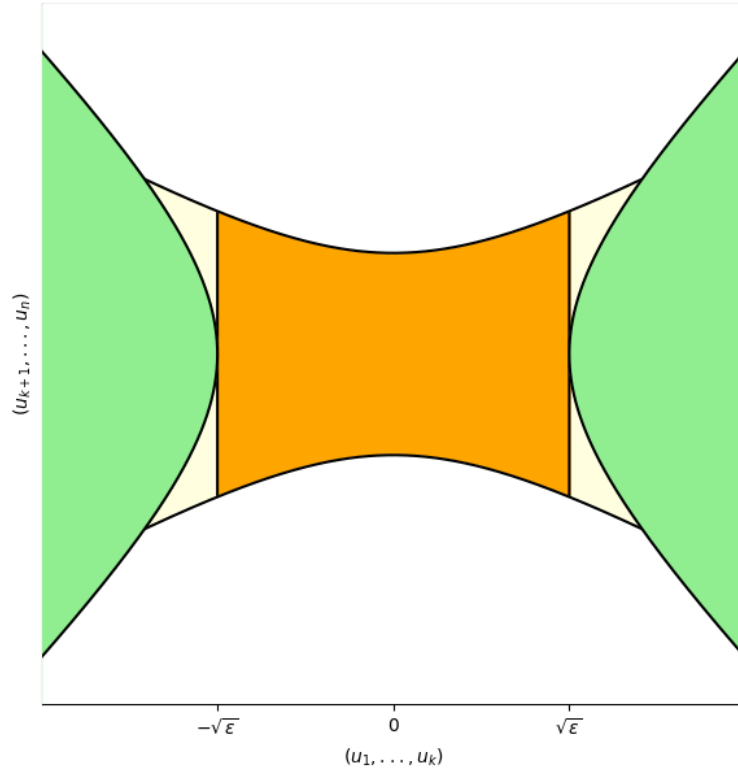


Figure 7: Fall 3 ist  $M^{c-\varepsilon}$ , also die grün eingefärbte Fläche, die orangene Fläche ist Fall 1 und die gelbe ist Fall 2.

Wir müssen überprüfen:

1.  $r$  ist wohldefiniert und stetig
2.  $r(F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon], 0) \subseteq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$
3.  $r(\cdot, 1) = \text{id}_{F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]}$  und  $r(\cdot, 0)|_{M^{c-\varepsilon} \cup e^k} = \text{id}_{M^{c-\varepsilon} \cup e^k}$
3. ist einfach nachzurechnen. In Fall 1 und Fall 3 ist 2. offensichtlich wahr. Für Fall 2



gilt:

$$\begin{aligned}
f(r(0, q)) &= f\left(\varphi^{-1}\left(u_1(q), \dots, u_k(q), \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2} u_{k+1}(q), \dots, \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2} u_n(q)\right)\right) \\
&= c - \xi(q) + \left(\left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2} u_{k+1}(q)\right)^2 + \dots + \left(\left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)}\right)^{1/2} u_n(q)\right)^2 \\
&= c - \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)}\right) \eta(q) \\
&= c - \varepsilon
\end{aligned}$$

also ist  $r(0, q) \in f^{-1}(c - \varepsilon)$ . Um 1. zu prüfen müssen wir Stetigkeit in den Grenzfällen überprüfen:

$$\begin{aligned}
\text{For } \xi(q) = \varepsilon : & \quad s_t(q) = t + (1 - t)((\varepsilon - \varepsilon)/\eta(q))^{1/2} = t \\
\text{For } \eta(q) + \varepsilon = \xi(q) : & \quad s_t(q) = t + (1 - t)((\xi(q) - \varepsilon)/(\xi(q) - \varepsilon))^{1/2} = 1
\end{aligned}$$

Das einzig andere Problem was wir bekommen könnten ist nun in Fall 2 falls  $\eta \rightarrow 0$ . In Fall 1 und Fall 3 bekommen wir für  $q$  mit  $\eta(q) = 0$ :  $r(q, t) = \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)(q)$ , also wollen wir zeigen dass für  $\eta \in \text{Fall 2}$  mit  $\eta \rightarrow 0$  gilt  $s_t u_i \rightarrow 0$  für  $i \in \{k + 1, \dots, n\}$ . In Fall 2 gilt  $0 \leq \xi - \varepsilon \leq \eta$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 0} |s_t u_i| &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2} |u_i| \\
&\leq \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t)(\eta/\eta)^{1/2} |u_i| \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t) |u_i| = 0
\end{aligned}$$

Also ist  $r$  stetig.

//

Mit Behauptung 3 und 4 bekommen wir

$$M^{c+\varepsilon} \simeq F^{-1}(c - \varepsilon]$$

und

$$F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$$

Also folgt die Behauptung:

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$$

□

**Corollary 3.2.** *Allgemeiner gilt sogar: Angenommen es gibt  $m$  kritische Punkte  $p_1, \dots, p_m$  mit Indizes  $k_1, \dots, k_m$  in  $f^{-1}(c)$ . Dann gilt*

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_m}$$

*Die Anheftungssabbildungen können hier so gewählt werden, dass ihre Bilder disjunkt in  $M^{c+\varepsilon}$  liegen, also funktioniert hier unsere ursprüngliche Definition vom Anheften einer  $k$ -Zelle noch immer.*

## §4 Anwendungen

**Theorem 4.1.** *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, sodass eine Morse-Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, die genau zwei kritische Punkte besitzt. Dann ist  $M$  homeomorph zu  $S^n$ .*

*Proof.* Seien  $p$  und  $q$  die kritischen Werte mit  $f(p) = a < b = f(q)$ . Mit dem Morse-Lemma existiert dann  $\varepsilon > 0$ , sodass  $f^{-1}[a, a + \varepsilon]$  und  $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$  diffeomorph zu einer  $n$ -Zelle  $e^n$  sind. Mit dem ersten Deformationslemma 2.6 ist  $f^{-1}[a - \varepsilon, b - \varepsilon]$  diffeomorph zu  $\partial e^n \times [0, 1]$ . Dann ist  $M$  der Zylinder  $\partial e^n \times [0, 1]$  mit  $e^n$  an beiden Seiten des Zylinders angebracht. Sei  $\text{pr}_1 : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf die erste Koordinate von  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann hat  $\text{pr}_1$  genau zwei kritische Punkte, beide sind nicht degeneriert, also gilt  $M \cong S^n$ .  $\square$

Achtung: Diffeomorphie ist dann nicht gegeben. Insbesondere gibt es mehrere glatte Strukturen der  $S^7$ .

**Theorem 4.2** (Morse-Ungleichungen). *Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit ausschließlich nicht degenerierten kritischen Punkten. Sei  $C_k$  die Anzahl der kritischen Punkte mit Index  $k$ . Sei  $b_k(M)$  die  $k$ -te Betti-Zahl von  $M$  und  $\chi(M)$  die Euler-Charakteristik von  $M$ . Dann gelten:*

1.  $b_k(M) \leq C_k$
2.  $\chi(M) = \sum_k (-1)^k \cdot C_k$
3.  $b_k(M) - b_{k-1}(M) + \dots \pm b_0(M) \leq C_k - C_{k-1} + \dots \pm C_0$

*Proof.* Auch hier folgt die Behauptung wesentlich aus dem zweiten Deformationslemma 3.1: Wir definieren  $b_k$  und  $\chi$  für ein Raumpaar  $(X, Y)$ :

$$b_k(X, Y) = \dim(H_k(X, Y))$$

und

$$\chi(X, Y) = \sum_k (-1)^k b_k(X, Y)$$

Man kann zeigen, dass  $b_k$  subadditiv und  $\chi$  additiv sind, also dass für  $Z \subseteq Y \subseteq X$  gilt

$$b_k(X, Z) \leq b_k(X, Y) + b_k(Y, Z)$$

und

$$\chi(X, Z) = \chi(X, Y) + \chi(Y, Z)$$

Außerdem zeigt man, dass für  $X_0 \subseteq \dots \subseteq X_n$  gilt

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_i S(X_i, X_{i-1})$$

falls  $S$  subadditiv, und dass falls  $S$  additiv ist sogar Gleichheit gilt.

ObdA. hat  $f$  nur kritische Werte  $c$ , sodass  $\#f^{-1}(c) = 1$ . Seien dann  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $M^{a_i}$  genau  $i$  kritische Punkte enthalten und  $M^{a_m} = M$ . Dann gilt schon  $M^{a_0} = \emptyset$ . Sei nun  $k_i$  der Index des kritischen Punktes in  $M^{a_i} - M^{a_{i-1}}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_k(M^{a_{i-1}} \cup e^{k_i}, M^{a_{i-1}}) \quad (\text{wegen des zweiten Deformationslemmas}) \\ &= H_k(e^{k_i}, \partial e^{k_i}) \quad (\text{wegen der Ausschneidungseigenschaft}) \\ &= H_k(S^{k_i}, *) \end{aligned}$$

Also haben wir

$$H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = k_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da  $b_k$  subadditiv ist gilt

$$\begin{aligned} b_k(M) &\leq \sum_i b_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= \sum_i \dim(H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})) \\ &= C_k \end{aligned}$$

Und da  $\chi$  additiv ist gilt

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_i \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= \sum_i \sum_k (-1)^k \dim H_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= \sum_k (-1)^k C_k \end{aligned}$$

3. folgt aus der Tatsache, dass  $S_k$  subadditiv ist, wobei

$$S_k(X, Y) = b_k(X, Y) - b_{k-1}(X, Y) + \dots \pm b_0$$

Dann gilt wieder

$$\begin{aligned} S_k(M) &\leq \sum_{i=1}^m (-1)^i S_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^m b_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - b_{k-1}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) + \dots \pm b_0(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) \end{aligned}$$

aber gerade haben wir schon gesehen, dass gilt

$$b_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^m b_k(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) - b_{k-1}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) + \dots \pm b_0(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_k - C_{k-1} + \dots \pm C_0$$

□

**Theorem 4.3.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Funktion, sodass  $M^a$  kompakt ist für alle  $a \in \mathbb{R}$ . Dann besitzt  $M$  den Homotopie-Typen von einem CW-Komplex mit einer  $k$ -Zelle für jeden kritischen Punkt mit Index  $k$  von  $f$ .*

*Remark.* Man kann zeigen, dass auf jeder glatten Mannigfaltigkeit eine Morse-Funktion existiert, sodass  $M^a$  kompakt für alle  $a \in \mathbb{R}$ , also hat jede glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand) den Homotopie-Typen eines CW-Komplexes!

*Proof.* Der Beweis ist recht involviert, aber im wesentlichen folgt die Aussage aus dem zweiten Deformationslemma 3.1. □