

# **Der Morse-Komplex und die Morse-Homologie**

Eine Bachelorarbeit

Betreuerin Prof. Ursula Ludwig

**Jakob Dimigen**

Abstrct Text

# Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Der Morse-Komplex</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Morse-Homologie und zelluläre Homologie</b>	<b>7</b>
4.1	Zellulärer Kettenkomplex . . . . .	8
4.2	Morse-Funktionen . . . . .	8
4.3	Der Morse Komplex . . . . .	8

# 1 Einführung

Anschauliche Beispiele, vielleicht die zu den Deformations-Lemmata? Dann müsste ich aber auch noch die Deformations-Lemmata machen.

## 2 Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten zu definieren und ihre allgegenwertigkeit zu zeigen. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma*.

allgegenwertigkeit ist  
nicht so  
ein schönes  
Wort

## 3 Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

## 4 Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

## 4.1 Zellulärer Kettenkomplex

**Definition 4.1.1** (CW-Komplex).

**Definition 4.1.2** (Zellulärer Kettenkomplex, Zelluläre Homologie).

## 4.2 Morse-Funktionen

**Definition 4.2.1** (kritischer Punkt).

**Definition 4.2.2** (Index, nicht degeneriertheit).

**Lemma 4.2.3** (Unabhängigkeit von Karte).

**Theorem 4.2.4** (Morse Lemma).

**Theorem 4.2.5** (Existenz von Morse-Funktionen). *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist für fast alle  $p \in \mathbb{R}^n$  die Funktion*

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

*eine Morse-Funktion.*

## 4.3 Der Morse Komplex

**Definition 4.3.1** (Pseudo-Gradient).

**Definition 4.3.2** (Aufsteigende und Absteigende Mannigfaltigkeit).

**Definition 4.3.3** (Morse-Komplex und Morse-Homologie).

**Lemma 4.3.4** (Unabhängigkeit von  $g$  und  $f$ ). *Die Morse Homologie einer Mannigfaltigkeit  $M$  hängt nicht von dem gewählten Pseudo-Gradienten  $g$  und der Morse-Funktion  $f$  ab.*

**Theorem 4.3.5.** *Die Morse-Homologie einer Mannigfaltigkeit entspricht der Zellulären Homologie.*