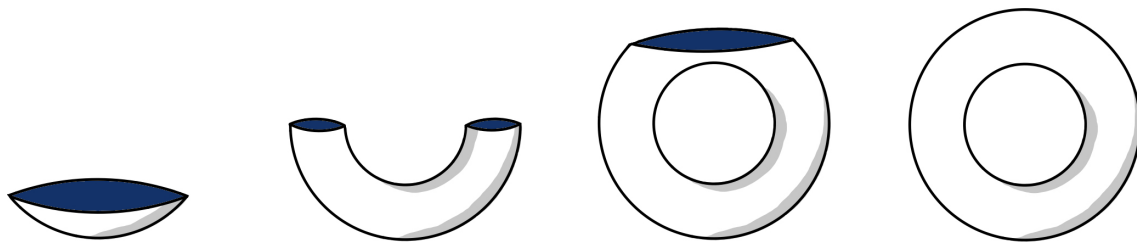


Bachelorarbeit Mathematik

Der Morse-Komplex und Morse-Homologie



eingereicht von
Jakob Dimigen

beaufsichtigt von
Prof. Ursula Ludwig

Universität Münster



Inhaltsverzeichnis

1. Traditionelle Morse-Theorie	1
1.1. Einführung	1
1.2. Nicht-Degeneriertheit und Index	1
2. Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten	8
2.1. Morse-Funktionen	8
2.2. Vektorfelder und Pseudo-Gradienten	12
2.3. Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte	16
3. Der Morse-Komplex	27
3.1. Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung .	27
3.2. Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien . .	32
4. Morse-Homologie und zelluläre Homologie	38
4.1. CW-Komplexe	38
4.2. CW-Struktur von Mannigfaltigkeiten	38
4.3. Morse-Homologie ist zelluläre Homologie	38
4.4. Anwendungen	38
A. Anhang	39

In der Morse Theorie werden glatte Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind untersucht. Anhand einer solcher Abbildungen lassen sich Rückschlüsse auf topologische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M ziehen. In dieser Arbeit wird der *Morse-Komplex* definiert, und gezeigt, dass dieser isomorph zu einem zellulären Kettenkomplex ist. Dafür wird anfangs eine kurze Einführung in die Morse-Theorie gegeben und grundlegende Begriffe definiert. Im zweiten Kapitel werden Morse Funktionen und Pseudo-Gradienten untersucht. Im dritten Kapitel wird bewiesen, dass der Morse Komplex ein Kettenkomplex ist und im letzten Kapitel wird anhand der erarbeiteten Theorie eine zelluläre Struktur auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstruiert, deren zellulärer Kettenkomplex isomorph zum Morse-Komplex ist. Zu guter letzt werden einige bekannte Eigenschaften der zellulären Homologie anhand der Morse Homologie bewiesen. Something something

1. Traditionelle Morse-Theorie

Anschauliche Beispiele, vielleicht die zu den Deformations-Lemmata? Dann müsste ich aber auch noch die Deformations-Lemmata machen.

1.1. Einführung

1.2. Nicht-Degeneriertheit und Index

Dieser Abschnitt folgt dem ersten Abschnitt aus CITE[milnor].

Definition 1.1 (Kritischer Punkt). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein *kritischer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$, sodass $df(p) = 0$.

Bemerkung. Allgemeiner lassen sich kritische Punkte von glatten Abbildungen $f: M \rightarrow N$ definieren, siehe im Anhang Definition A.4.

Wir würden gerne eine Hessische Bilinearform für die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit definieren, allerdings ist dies ein nicht ganz einfaches Unterfangen. Wir werden am Ende einen Begriff erhalten, der mit dem der gewohnten Hessischen Bilinearform im \mathbb{R}^n übereinstimmt, allerdings nur für kritische Werte definiert ist.

Definition 1.2 (Lie-Klammer). Es seien X und Y Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Die *Lie-Klammer* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] := XY - YX \end{aligned}$$

Wobei

$$(XY - YX)(p)(f) = X(p)(Y(\cdot)(f)) - Y(p)(X(\cdot)(f))$$

Bemerkung. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Lie-Klammer tatsächlich eine Lie-Klammer ist, also dass sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $[\cdot, \cdot]$ ist \mathbb{R} -bilinear.
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Proposition 1.3. *Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, p ein kritischer Punkt von f , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt:*

$$[X, Y](p)f = 0$$

Beweis. Es seien (x_1, \dots, x_n) lokale Koordinaten um p . Wir können ohne beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $X = g_X \cdot \partial/\partial x_i$ und $Y = g_Y \cdot \partial/\partial x_j$ für $g_X, g_Y \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left[g_X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, g_Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right] (p)(f) &= g_X(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \left(g_Y \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - g_Y(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \left(g_X \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= g_X(p) \cdot \left(\frac{\partial g_Y}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + g_Y(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \right) \\ &\quad - g_Y(p) \cdot \left(\frac{\partial g_X}{\partial x_j}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + g_X(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist Null wegen des Satzes von Schwarz und da p ein kritischer Punkt von f ist, also gilt $\partial f/\partial x_i(p) = 0$. \square

Definition 1.4 (Hessische Bilinearform). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f . Es seien $x, y \in T_p M$. Wähle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X(p) = x$ und $Y(p) = y$. Definiere nun

$$d^2 f(x, y)(p) = X(p)(Y(\cdot)f).$$

$d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$ heißt *Hessische Bilinearform*.

Proposition 1.5. $d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$ hängt nicht von den gewählten Vektorfeldern X und Y ab und ist für alle kritischen Punkte eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Bilinearität folgt direkt aus der Definition. Da p ein kritischer Punkt ist gilt

$$d^2 f(x, y)(p) - d^2 f(y, x)(p) = [X, Y](p)(f) = 0,$$

die Zuordnung ist also symmetrisch. Außerdem gilt

$$XYf(p) = X(p)(Y(\cdot)f) = x(Y(\cdot)f),$$

also hängt die Form nicht von X ab, und wegen der Symmetrie auch nicht von Y . \square

Definition 1.6 (nicht-degeneriert, Index). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f . Wir nennen p *nicht degeneriert*, falls die Bilinearform $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$ nicht ausgeartet ist. Der *Index* eines nicht degenerierten kritischen Punktes ist die maximale Dimension eines Untervektorraumes, auf dem $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$ negativ definit ist.

Bemerkung. Nicht-Degeneriertheit und Index lassen sich auch über lokale Koordinaten definieren, aber nachzurechnen, dass diese Begriffe wohldefiniert sind ist recht aufwändig. Trotzdem wollen wir diese Sichtweise nicht vorenthalten:

Es seien $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten um den kritischen Punkt p . Dann ist $\mathcal{B} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ eine Basis des Vektorraums $T_p M$. Wir bekommen

$$d^2f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dann ist p nicht degeneriert genau dann wenn die Matrix

$$H_p^\varphi(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

invertierbar ist. Der Index von p ist dann die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_p^\varphi(f)$. Der Index und die nicht-degeneriertheit hängen offensichtlich nicht von den gewählten Koordinaten ab, aber die Matrix $H_p^\varphi(f)$ schon.

Die Hessische Bilinearform lässt sich auch mithilfe von *Zusammenhängen* für alle Punkte von M definieren.

Bemerkung. Die beiden Begriffe Index und nicht-Degeneriertheit sind zentral in der Morse-Theorie und werden uns über die gesamte Arbeit begleiten. Auch der nachfolgende Satz wird in fast jedem Beweis genutzt:

Satz 1.7 (Morse-Lemma). *Es sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index k einer glatten Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann existieren lokale koordinaten*

$\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, sodass in einer Umgebung U von p gilt:

$$f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

und

$$\varphi(p) = 0.$$

(U, φ) heißt Morse-Karte, und U Morse-Umgebung.

Der hier geführte Beweis für das Morse-Lemma ist in CITE[hirsch] zu finden. Bevor wir das Morse Lemma beweisen, benötigen wir eine Aussage aus der Linearen Algebra:

Lemma 1.8. *Es sei $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ eine diagonale $n \times n$ Matrix mit Diagonaleinträgen ± 1 . Dann gibt es eine Umgebung N von A im Vektorraum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen und eine glatte Abbildung $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, sodass $P(A) = E_n$ und falls $P(B) = Q$, dann gilt $Q^T B Q = A$.*

Beweis. Betrachte zuerst den Fall $n = 1$:

Dann ist $A = (\pm 1)$. Wähle $N = (0, 2)$ oder $N = (-2, 0)$, $P(B) := 1/\sqrt{|B|}$

Nun $n - 1 \rightsquigarrow n$:

Es sei B eine symmetrische $n \times n$ Matrix, die nah genug an A ist, sodass $b_{11} \neq 0$ und das selbe Vorzeichen hat wie a_1 . Betrachte die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{13}}{b_{11}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass

$$T^T B T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & B_1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix $\text{diag}(a_2, \dots, a_n)$ ist invertierbar, und da die Determinante stetig ist, ist falls B nah genug an A ist die symmetrische Matrix B_1 auch invertierbar.

Bemerke dass sowohl T als auch B_1 glatte Abbildungen definieren. Laut Induktionsannahme existiert eine Matrix $Q_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ die glatt von B_1 abhängt, sodass $Q_1^T B_1 Q_1 = A_1$. Definiere nun $P(B) = Q$ durch $Q = TS$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Q^T B Q = S^T (T^T B T) S = A$. □

Beweis von Satz 1.7. Es sei U eine Karten Umgebung von p . Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p = 0$ und $f(0) = 0$. Außerdem können wir mithilfe eines Koordinatenwechsels annehmen, dass

$$A = H_0(f)$$

eine Diagonalmatrix mit ausschließlich Diagonaleinträgen ± 1 hat, denn da p nicht degeneriert ist ist A invertierbar.

Behauptung. Es existiert eine glatte Abbildung $x \mapsto B_x$ von M in die symmetrischen $n \times n$ Matrizen, sodass für $B_x = (b_{ij}(x))_{ij}$ gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j,$$

und sodass $B_0 = A$.

Beweis der Behauptung. Da $f(0) = 0$ bekommen wir mit dem Fundamentalsatz der Differenzial - und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) \\ &= \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \right) x_i \end{aligned}$$

Da $p = 0$ ein kritischer Punkt ist, gilt $\partial f / \partial x_i(0) = 0$ für alle i . Mit dem selben

Argument sehen wir dann, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(sx) ds \right) x_j.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ds dt \right) x_i x_j.$$

Setze also

$$b_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ds dt.$$

Dann gilt schon $B_0 = A$, und die Abbildungen b_{ij} sind glatt, also auch $x \mapsto B_x$. //

Wir dürfen nun das vorherige Lemma 1.8 anwenden:

Sei $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ eine Abbildung wie in 1.8. Setze $P(B_x) := Q_x$. Definiere nun eine glatte Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(x) = Q_x^{-1}x$ in einer Umgebung von 0. Wir rechnen nach, dass $d\varphi(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Identität ist:

Schreibe $Q_x^{-1} = (q_{ij}(x))_{ij}$. Dann

$$\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^n q_{1k}(x)x_k, \dots, \sum_{k=1}^n q_{nk}(x)x_k \right)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n q_{ik}(x)x_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_{ik}}{\partial x_j}(x)x_k + q_{ik}(x)\delta_{kj} \right), \end{aligned}$$

Wobei δ_{ki} das Kronecker Delta ist. Setzen wir also 0 in φ ein bekommen wir

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0) = q_{ij}(0).$$

Das Differential von φ in 0 ist also gegeben durch

$$Q_0^{-1} = P(B_0)^{-1} = P(A)^{-1} = E_n.$$

Das differential an der Stelle 0 ist also invertierbar, und dann können wir mit dem Satz über die Umkehrfunktion annehmen, dass U klein genug ist, sodass φ eingeschränkt aufs Bild ein Diffeomorphismus ist. Dann ist φ eine Karte um 0. Setze

$(y_1, \dots, y_n) := \varphi$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T B_x x \\ &= (Q_x \varphi(x))^T B_x (Q_x \varphi(x)) \\ &= \varphi(x)^T (Q_x^T B_x Q_x) \varphi(x) \\ &= \varphi(x)^T A \varphi(x) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} y_i(x)^2. \end{aligned}$$

Das entspricht genau der gewünschten Form. □

| Corrolar 1.9. *Nicht-degenerierte kritische Punkte sind isoliert.*

2. Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten zu definieren und ihre *allgegenwertigkeit* zu zeigen. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma*.

2.1. Morse-Funktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir *Morse-Funktionen*:

Definition 2.1 (Morse-Funktion). Eine *Morse-Funktion* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind.

Insbesondere zeigen wir, dass Morse Funktionen nichts besonderes sind. Dafür zeigen wir, dass für eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $x \mapsto \|x - p\|^2$ nur für p , die so genannten *Brennpunkte* sind, keine Morse Funktion ist.

Definition 2.2 (Normalenbündel). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Das Normalenbündel ist die Menge

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_x M\}.$$

Wir betrachten hier $T_x M \subseteq T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ via der Basis $(\partial/\partial x_i)$, wobei x_i die Achsen des \mathbb{R}^n sind.

Proposition 2.3. *Das Normalenbündel NM ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es sei $x \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x , eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 und eine Immersion

$$\begin{aligned} h: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u_1, \dots, u_d) &\longmapsto x(u_1, \dots, u_d) \end{aligned}$$

die ein Diffeomorphismus $h: \Omega \rightarrow U \cap M$ ist. Das orthogonale Komplement von $T_x M$ in \mathbb{R}^n hat Dimension $n - d$. Es sei also $(v_1(x), \dots, v_{n-d}(x))$ eine Basis von $(T_x M)^\perp$. Dann ist

$$(u_1, \dots, u_d, t_1, \dots, t_{n-d}) \longmapsto \left(x(u_1, \dots, u_d), \sum_{k=1}^{n-d} t_k \cdot v_k(u_1, \dots, u_d) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von NM als Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$. \square

Definition 2.4 (Brennpunkt). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Es sei $E: NM \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $E(x, v) = x + v$. Ein *Brennpunkt* von M ist ein kritischer Wert von E .

Bemerkung. Aus dem Satz von Sard folgt, dass die Menge der Brennpunkte eine Nullmenge ist. Intuitiv sind die Brennpunkte einer Untermannigfaltigkeit die Punkte im \mathbb{R}^n , an denen sich die Normalen von nahe aneinanderliegenden Punkten schneiden.

Lemma 2.5. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , $x \in M$ und M in einer Umgebung von x und NM parametrisiert wie im Beweis von Proposition 2.3. Dann ist $p = x + v$ genau dann ein Brennpunkt von M , wenn die Matrix

$$\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right)_{ij}$$

nicht invertierbar ist.

Beweis. Wir haben partielle Ableitungen

$$\frac{\partial e}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial t_j} = v_j$$

Nun ein kleines Ergebnis aus der Linearen Algebra:

sind $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ und u_1, \dots, u_n linear unabhängig, dann ist

$$(v_1 \dots v_n)^T \cdot (u_1 \dots u_n) = (\langle v_i, u_j \rangle)_{ij},$$

Also

$$\text{rank}(v_1 \dots v_n) = \text{rank}(\langle v_i, u_j \rangle)_{ij}.$$

Die Vektoren $\partial x / \partial u_1, \dots, \partial x / \partial u_d, v_1, \dots, v_{n-d}$ sind linear unabhängig. Außerdem ist $\partial x / \partial u_i$ orthogonal zu v_k , also hat die Matrix mit Einträgen die Skalarprodukte dieser linear unabhängigen Vektoren mit den obigen partiellen Ableitungen von E die Form

$$\begin{pmatrix} \left(\langle \partial x / \partial u_i, \partial x / \partial u_j \rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \langle \partial v_k / \partial u_i, \partial x / \partial u_j \rangle \right)_{ij} & \left(\sum_{k=1}^{n-d} \langle \partial v_k / \partial u_i, v_j \rangle \right)_{ij} \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang $< n$ genau dann, wenn

$$\text{rank} \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{ij} < d,$$

Aber da v_k und $\partial x / \partial u_j$ orthogonal aufeinander stehen gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle v_k, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle v_k, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$$

Also

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle v_k, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Proposition 2.6. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Für fast jeden Punkt in \mathbb{R}^n ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f_p: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

! eine Morse-Funktion.

Beweis. Offensichtlich ist f_p glatt. $x \in M$ ist genau dann ein kritischer Punkt von f_p , wenn $T_x M \perp (x - p)$, denn das Differential von f_p erweitert auf \mathbb{R}^n ist

$$df_p(x) = 2(x - p).$$

Also gilt

$$df_p(x)(v) = \langle 2(x - p), v \rangle.$$

$x \in M$ ist folglich genau dann ein kritischer Punkt von f_p , wenn $T_x M$ orthogonal zu $(x - p)$ ist.

Bemerke, dass für eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Derivation X_p gilt

$$X_p(f) = \langle X_p(\varphi_1), \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, X_p(\varphi_2) \rangle.$$

Sei nun $x \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x , eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 und eine Immersion

$$h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die ein Diffeomorphismus $h: \Omega \rightarrow U \cap M$ ist. Schreibe

$$h(u_1, \dots, u_n) = x(u_1, \dots, u_n).$$

Dann bekommen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \langle 2(x - p), \frac{\partial x}{\partial u_i} \rangle$$

und

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle x - p, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right).$$

Also hat nach Lemma 2.5 f_p in einer Umgebung von x genau dann nicht-degenerierte kritische Punkte, wenn f_p ein Brennpunkt von M ist. Mit der Bemerkung nach der Definition von Brennpunkten 2.4 folgt dann direkt die Behauptung. \square

Bemerkung. Mit dem Einbettungssatz von Whitney folgt dann direkt, dass es auf jeder Mannigfaltigkeit M viele Morse-Funktionen gibt. Wir können sogar noch eine stärkere Aussage beweisen:

Satz 2.7. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann kann f in jeder kompakten Teilmenge K beliebig gut von einer Morse Funktion approximiert werden, also für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Morse Funktion $g: K \rightarrow \mathbb{R}$, sodass*

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Beweis. Wir wählen eine Einbettung $h': M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$h: M \longrightarrow \mathbb{R}^n; h(x) = (f(x), h'(x))$$

eine Einbettung von M in \mathbb{R}^n . Seien $c, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, sodass für $p = (c - \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ die Funktion f_p eine Morse Funktion ist. Setze nun

$$g(x) = \frac{f_p(x) - c^2}{2c}.$$

g ist offensichtlich eine Morse-Funktion. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2c} \left((f(x) + c - \varepsilon_1)^2 + (h_1(x) - \varepsilon_2)^2 + \dots + (h_{n-1}(x) - \varepsilon_n)^2 - c^2 \right) \\ &= f(x) + \frac{f(x)^2 + \sum h_i(x)^2}{2c} - \frac{\varepsilon_1 f(x) + \sum \varepsilon_i h_{i-1}(x)}{c} + \sum \varepsilon_i^2 - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Man kann nun c beliebig groß und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ beliebig klein wählen, sodass g beliebig nah an f ist. \square

Bemerkung. Die meiste Zeit werden wir uns in dieser Arbeit kompakte Mannigfaltigkeiten untersuchen, auf solchen kann jede glatte Funktion sogar global mit einer Morse Funktion approximieren.

2.2. Vektorfelder und Pseudo-Gradienten

Wir untersuchen erst ein Paar Eigenschaften von Vektorfeldern.

Definition 2.8 (Flusslinie). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma: I \rightarrow M$ ein glatter Weg. Dann definiere für $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) := d\gamma(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\gamma(t_0)} M$$

wobei $\partial/\partial t$ das von der Identität auf \mathbb{R} induzierte Element in $T_t \mathbb{R}$ ist.

Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M . γ heißt Flusslinie von X falls für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = X(\gamma(t_0)).$$

Definition 2.9 (1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \varphi_t(p) \end{aligned}$$

sodass gelten:

- Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ und
- $\varphi_0 = \text{id}_M$.

Für eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen φ schreiben wir

$$\varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow M; t \mapsto \varphi_t(p).$$

Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen φ heißt *von X erzeugt*, falls für alle $p \in M$ gilt:

$$X(p) = \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(0)$$

Bemerkung. Wie der Name suggeriert, ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ φ_t ein Diffeomorphismus: Das Inverse von φ_t ist φ_{-t} .

Ist außerdem φ eine von einem Vektorfeld X erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann sind $\varphi_\bullet(p)$ Flusslinien von X :

$$\begin{aligned} X(\varphi_{t_0}(p)) &= \frac{d\varphi_\bullet(\varphi_{t_0}(p))}{dt}(0) = d\varphi_\bullet(0)(\varphi_{t_0}(p)) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= d(\varphi_{t_0+\bullet}(p))(0) \left(\frac{d}{dt} \right) = d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \cdot d(t_0 + \text{id}_{\mathbb{R}})(0) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \left(\frac{d}{dt} \right) = d(\varphi_\bullet(p))(t_0) \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(t_0) \end{aligned}$$

Proposition 2.10. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann generiert X eine eindeutige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen.*

Beweis. Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Karten-Umgebung (U_p, φ_p) . In dieser Umgebung hat das Anfangswertproblem

$$\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma), \quad \gamma(0) = p$$

eine eindeutige Lösung in einem Intervall $[-\varepsilon_p, \varepsilon_p]$. Diese Lösung γ hängt glatt vom Anfangswert ab. Wir schreiben $\varphi_\bullet(p) := \gamma$. In dieser Umgebung gilt schon $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, solange $t, s, t+s \in [-\varepsilon_p, \varepsilon_p]$. Da $\text{supp } X$ kompakt ist existiert eine endliche Menge p_1, \dots, p_k , sodass $\text{supp } X \subseteq \bigcup_i U_{p_i}$. Es sei ε das Minimum der ε_{p_i} . Setze $\varphi_t(p) = p$ für alle p nicht im Träger von X . Wir haben nun fast einen Kandidaten für die von X generierte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen; $\varphi_t(p)$ ist definiert für alle $p \in M$ und $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Wir müssen also nur noch einen Kandidaten für $\varphi_t(p)$ finden, falls $|t| \geq \varepsilon$.

Wir können jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ schreiben als $t = m \cdot \varepsilon/2 + r$ mit $0 \leq r < \varepsilon/2$ und $m \in \mathbb{Z}$. Sei nun zuerst $t \geq 0$, dann ist $m \geq 0$. Setze für alle $p \in M$

$$\varphi_t(p) := \varphi_{\varepsilon/2} \circ \dots \circ \varphi_{\varepsilon/2} \circ \varphi_r,$$

Wobei wir $\varphi_{\varepsilon/2}$ $|m|$ mal anwenden. Falls $t < 0$ ersetze $\varepsilon/2$ mit $-\varepsilon/2$. □

Bemerkung. Falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann generieren alle Vektorfelder eindeutige 1-Parametergruppen aus Diffeomorphismen.

Definition 2.11 (Riemannsche Metrik). Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Es sei

$$g_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M$$

ein Skalarprodukt für jedes $p \in M$, sodass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung

$$p \longmapsto g_p(X(p), Y(p))$$

glatt ist. Dann heißt g *Riemannsche Metrik* auf M . Wir schreiben für $x, y \in T_p M$

$$\langle x, y \rangle := g_p(x, y) \text{ und } \|x\| := \sqrt{g_p(x, x)}.$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass alle Mannigfaltigkeiten eine Riemannsche Metrik besitzen.

Definition 2.12 (Gradient). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Gradient von f das eindeutige Vektorfeld ∇f , sodass für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\langle X, \nabla f \rangle = dfX.$$

Definition 2.13 (Pseudo-Gradient). Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *Pseudo-Gradient* oder *Pseudo-Gradientenfeld* von f , falls gelten:

- $df(p)(X(p)) \leq 0$ für alle $p \in M$, mit Gleichheit genau dann wenn p ein kritischer Punkt von f ist.
- Für jeden kritischen Punkt p von f existiert eine Morse-Umgebung (U_p, φ_p) , in der $X(q) = -d(\varphi_p^{-1})(q) \cdot \nabla(f \circ \varphi_p^{-1})$.

Proposition 2.14. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion. Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld von f .*

Beweis. Da M zweitabzählbar ist und die kritischen Punkte isoliert, ist die Menge der kritischen Punkte $p_{i \in I'}$ abzählbar. Seien dann $(U_i, \varphi_i)_{i \in I'}$ Karten-Umgebungen von den kritischen Punkten, sodass in diesen Umgebungen f die Form hat wie im Morse-Lemma 1.7. Ergänze $(U_i, \varphi_i)_{i \in I'}$ zu einem Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, sodass jeder kritische Punkt p_i nur in U_i enthalten ist. definiere nun die Vektorfelder

$$X_i(p) := d(\varphi_i)(p) \circ \nabla(f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p))$$

auf $\varphi_i(U_i)$. Setze nun

$$\tilde{X}_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p) \cdot X_i(p) & \text{falls } p \in \varphi_i(U) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Per Definition gilt schon $df(p)(X_i(p)) \leq 0$ für alle $p \in M$ und $i \in I$. Nun wähle eine Partition der 1 $(\lambda_i)_{i \in I}$ über $(U_i)_{i \in I}$. Dann setze

$$X := \sum_{i \in I} \tilde{X}_i(p).$$

Falls p_i ein kritischer Punkt von M ist, dann ist $\tilde{X}_j(p) = 0$ für alle $j \neq i$. Also ist

$$X(p) = \tilde{X}_i(p) = 0.$$

□

2.3. Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte

In diesem Abschnitt werden wir das erste Mal das Ausmaß der Möglichkeiten, die Morse Theorie bietet erfahren. Es werden die beiden Deformationslemmata bewiesen. Anhand dieser kann man die Morse Ungleichungen beweisen und sogar zeigen, dass jede (glatte) Mannigfaltigkeit den Homotopietypen eines CW-Komplexes besitzt.

Satz 2.15 (Erstes Deformationslemma). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Hat f keine kritischen Werte im Intervall $[a, b]$ und ist $f^{-1}[a, b]$ kompakt, so existiert ein Diffeomorphismus $M^a \rightarrow M^b$, und M^a ist ein Deformationsretrakt von M^b .*

Die Idee des Beweises ist es, M^a entlang der Richtung, in die f am stärksten steigt, also entlang des Gradientenfeldes mit einem Diffeomorphismus φ nach oben zu ziehen, bis $\varphi(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$.

Beweis erstes Deformationslemma. Es existiert eine kompakte Umgebung $K \subset M$ von $f^{-1}[a, b]$. Dies folgt aus Whitney's Einbettungssatz und dem Satz von Heine-Borel. Sei $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, positive Funktion, sodass

$$\rho(p) = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

für alle $p \in f^{-1}[a, b]$ und die außerhalb von K verschwindet und für die für alle $p \in K$, die keine kritischen Punkte sind, gilt:

$$0 \leq \rho(p) \leq 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

Bemerke dass ρ innerhalb von $f^{-1}[a, b]$ wohldefiniert ist, da sich keine kritischen

Punkte im Intervall $[a, b]$ befinden. Definiere ein Vektorfeld X durch

$$X(p) = \rho(p) \cdot \nabla f(p)$$

Dann hat X kompakten Träger, erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 2.10. Sei also φ die einzigartige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, die von X generiert wird. Wir bekommen für jedes $p \in M$ eine Abbildung $f \circ \varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Behauptung 1. Für alle $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $q = \varphi_{t_0}(p)$ ist $\frac{d}{dt}f \circ \varphi_\bullet(p)(t_0) \in [0, 1]$ und falls $f(\varphi_t(p)) \in [a, b]$ gilt sogar $\frac{d}{dt}f \circ \varphi_\bullet(p)(t_0) = 1$.

Beweis von Behauptung 1. Für $q = \varphi_{t_0}(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f \circ \varphi_{t_0}(p) &= T_{\varphi_{t_0}(p)}f \cdot T_{t_0}\varphi_\bullet(p) \left(\frac{d}{dt} \right) = df(q) \cdot X(q) \\ &= \langle X(q), \nabla f(q) \rangle = \rho(q) \langle \nabla f(q), \nabla f(q) \rangle \in [0, 1] \end{aligned}$$

$f \circ \varphi_\bullet(p)$ ist also monoton wachsend für alle $p \in M$.

Falls sogar $f(\varphi_p(t_0)) \in [a, b]$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}f \circ \varphi^p(t_0) = 1$$

//

Behauptung 2. Für $p \in f^{-1}(a)$, $t_0 \in [0, b - a]$ gilt $f(\varphi_{t_0}(p)) \in [a, b]$.

Beweis von Behauptung 2.

$$f(\varphi_{t_0}(p)) \geq f(\varphi_0(p)) = a$$

und

$$\begin{aligned} f(\varphi_t(p)) &\leq f(\varphi_{b-a}(p)) \\ &= \int_0^{b-a} \frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) dt + f(\varphi_0(p)) \\ &= \int_0^{b-a} \rho(\varphi_t(p)) \langle \nabla f(\varphi_t(p)), \nabla f(\varphi_t(p)) \rangle dt + a \\ &\leq \int_0^{b-a} 1 dt + a \\ &= b \end{aligned}$$

//

Behauptung 3. Unter φ_{b-a} wird die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ auf die Niveaumenge $f^{-1}(b)$ abgebildet.

Beweis von Behauptung 3. Für $p \in f^{-1}(a)$ gilt:

$$\varphi_{a-a}(p) = \varphi_0(p) = p$$

und für $t_0 \in [0, b-a]$ gilt wegen Behauptung 1 und 2

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_{\text{id}_{\mathbb{R}}-a}(p))(t_0) = 1$$

also

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = f(\varphi_0(p)) + (b-a) = b$$

Genauso gilt für $q \in f^{-1}(b)$: $f(\varphi_{a-b}(q)) = a$, also $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$. //

Behauptung 4. $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$

Beweis von Behauptung 4. " \subseteq ": Sei $p \in M^a$. OBdA. existiert $s \in [0, b-a]$, sodass $f(\varphi_s(p)) = a$, ansonsten gilt für alle $s \in [0, b-a]$: $f(\varphi_s(p)) \leq a < b$. Dann gilt

$$f(\varphi_{b-a}(p)) \leq f(\varphi_{b-a+s}(p)) = f(\varphi_{b-a}(\varphi_s(p))) = b$$

" \supseteq ": Analog. //

Damit ist $\varphi_{b-a}|_{M^a}$ ein Diffeomorphismus zwischen M^a und M^b .

Betrachte nun $r : M^b \times \mathbb{R} \rightarrow M^b$,

$$r(p, t) = \begin{cases} p & \text{falls } f(p) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p) & \text{falls } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

Dann ist r stetig, $r(\cdot, 0)$ ist die Identität auf M^b , $r(\cdot, 1)|_{M^a}$ ist die Identität auf M^a und $r(1, M^b) \subseteq M^a$, also ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b . □

Satz 2.16 (Zweites Deformations-Lemma). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und p ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index k . Sei $c := f(p)$ und $\varepsilon \geq 0$, sd. $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und außer*

p keine weiteren kritischen Punkte von f beinhaltet. Dann hat $M^{c-\varepsilon}$ denselben Homotopietypen wie $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$.

Die Idee für den Beweis ist, sich eine neue Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu definieren, die Außerhalb von einer kleinen Umgebung von p f entspricht und in der Umgebung etwas kleiner ist. Dann bekommen wir die folgende Situation:

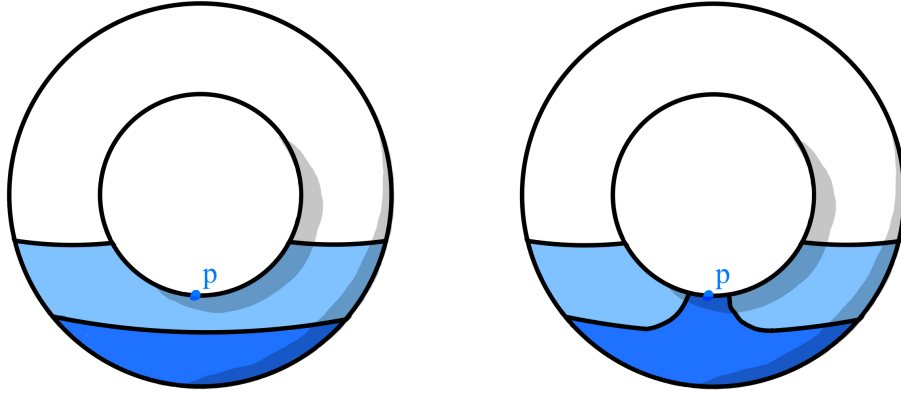


Abbildung 2.1.: Die Niveaumengen von f (links) und F (rechts)

Wir wollen also, dass $M^{c+\varepsilon} = F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ gilt und $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ fast dasselbe ist wie $M^{c-\varepsilon}$, nur dass $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ einen "Henkel" enthält, der den kritischen Punkt p enthält.

Beweis zweites Deformationslemma. Sei $c := f(p)$. Mit dem Morse-Lemma können wir lokale Koordinaten $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$ in einer Umgebung U von p wählen, sodass

$$f = c - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2$$

in dieser Umgebung, und sodass für den kritischen Punkt p gilt:

$$u_1(p) = \dots = u_n(p) = 0$$

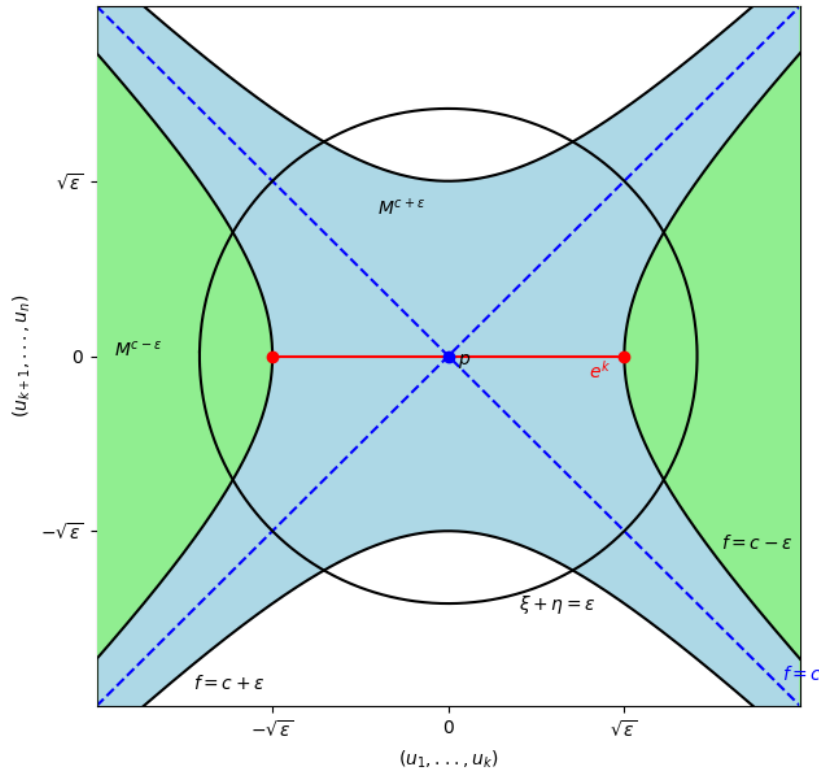
Sei oBdA. $\varepsilon > 0$ klein genug, sodass

1. $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und keine kritischen Punkte außer p enthält
2. $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 2\varepsilon\} \subseteq \varphi(U)$

Wähle nun die k -Zelle

$$e^k := \{p \in M : (u_1(p))^2 + \dots + (u_k(p))^2 \leq \varepsilon \text{ und } u_{k+1}(p) = \dots = u_n(p) = 0\}$$

Wir bekommen die folgende Situation:

Abbildung 2.2.: U parametrisiert

Nun definiere eine glatte Funktion $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1. $\mu(0) > \varepsilon$
2. $\mu(r) = 0$ falls $r \geq 2\varepsilon$
3. $-1 < \mu'(r) \leq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$

Sei nun F außerhalb von U gleich f , und sei

$$F = f - \mu(u_1^2 + \dots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + \dots + 2u_n^2)$$

F ist wohldefiniert und glatt, da F außerhalb des Kreises mit Radius $\sqrt{2\varepsilon}$ mit f übereinstimmt und der gesamte Kreis in U enthalten ist. Damit haben wir einen guten Kandidaten für F gefunden.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}\eta, \xi &: U \rightarrow [0, \infty) \\ \xi &= u_1^2 + \dots + u_k^2 \\ \eta &= u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2\end{aligned}$$

Dann gilt innerhalb von U :

$$f = c - \xi + \eta$$

und

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$$

Jetzt wollen wir überprüfen:

1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$.
2. $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.
3. $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ ist ein Deformationsretrakt von $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$.

Dann folgt schon die Behauptung.

Behauptung 1. $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

Beweis von Behauptung 1. Sei $q \in M$. Falls gilt $\xi(q) + 2\eta(q) > 2\varepsilon$ gilt $F(q) = f(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)) = f(q)$, also gelte oBdA.

$$\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon$$

Dann:

$$F(q) \leq f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon$$

//

Behauptung 2. $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\varepsilon}$.

Beweis von Behauptung 2. Bemerke: Die kritischen Punkte von F stimmen mit denen von f überein, denn:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

Insbesondere sind diese beiden Ableitungen also niemals 0. Da

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

und $d\xi$ und $d\eta$ nur in p gleichzeitig Null sind, haben f und F dieselben kritischen Punkte.

Betrachte die Region $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Wegen Behauptung 1 und der Tatsache, dass $F \leq f$ gilt:

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$$

Da $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ kompakt ist und $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ abgeschlossen ist, ist $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ auch kompakt. Da f und F dieselben kritischen Punkte haben kann diese Menge maximal den kritischen Punkt p enthalten, aber

$$F(p) = c - \xi(p) + \eta(p) + \mu(\xi(p) + 2\eta(p)) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

Also gibt es in $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ keine kritischen Punkte. Mit dem ersten Deformationslemma gilt dann: $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ ist Def. Retrakt von $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$. //

Behauptung 3. $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ ist ein Deformationsretrakt von $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$.

Beweis von Behauptung 3. Diese Aussage ergibt nur Sinn, falls $M^{c-\varepsilon} \cup e^k \subseteq F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$. Wir wissen schon, dass $M^{c-\varepsilon} \subseteq F^{-1}(c - \varepsilon]$.

Sei $q \in e^k$, dann gilt $\xi(p) = 0 \leq \xi(q) \leq 1$ und $\eta(p) = 0 = \eta(q)$. Da $\partial F / \partial \xi < 0$ gilt dann

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$$

Also ergibt sich folgende Situation:

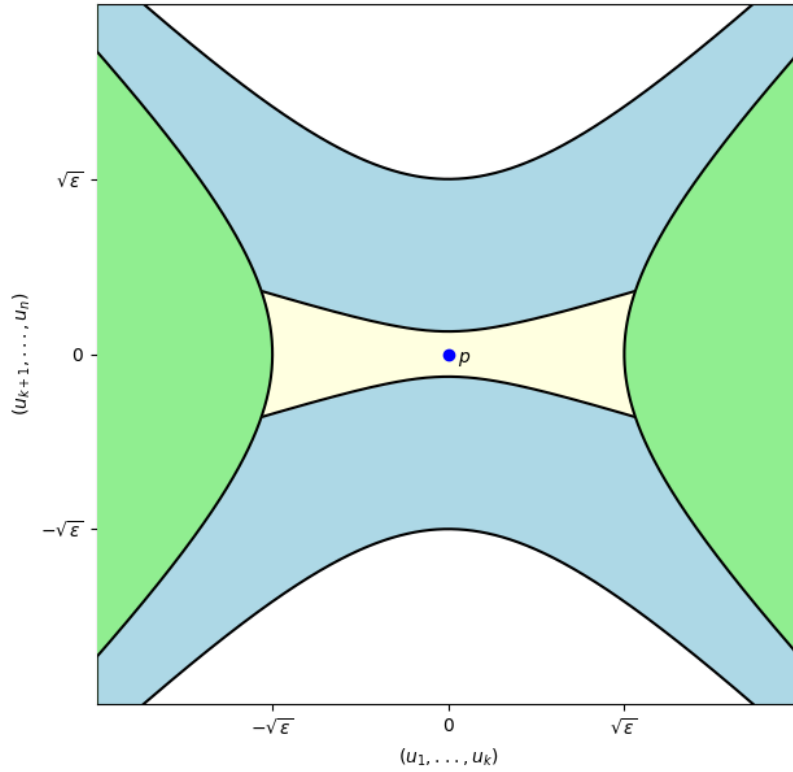


Abbildung 2.3.: Henkel

Die hellgrün eingefärbte Fläche ist $M^{c-\varepsilon}$ die hellgelbe zusammen mit der hellgrünen Fläche ist $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$.

Dafür konstruieren wir eine Deformationsretraktion $r : F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] \times [0, 1] \rightarrow F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ für $q \in F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$, $t \in [0, 1]$, die $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$ auf e^k deformiert, wie folgt.

$$r(q, t) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, tu_{k+1}, \dots, tu_n)(q) & \text{im Fall 1: } \xi(q) \leq \varepsilon \\ \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, s_t u_{k+1}, \dots, s_t u_n)(q) & \text{im Fall 2: } \varepsilon \leq \xi(q) \leq \eta(q) + \varepsilon \\ q & \text{im Fall 3: } \eta(q) + \varepsilon \leq \xi(q) \end{cases}$$

Wobei

$$s_t = t + (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2}$$

Die Fälle sind dann wie folgt:

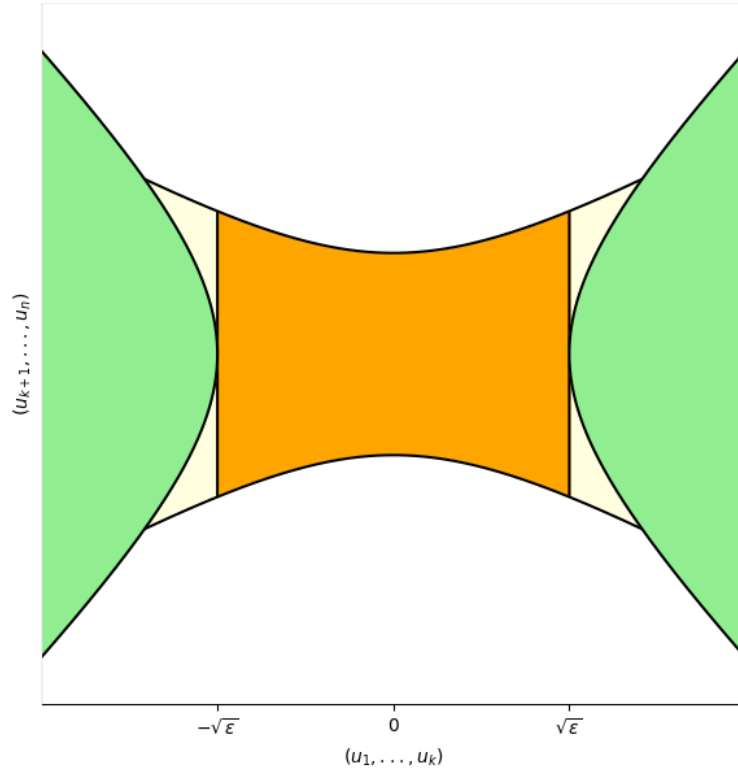


Abbildung 2.4.: Fall 3 ist $M^{c-\varepsilon}$, also die grün eingefärbte Fläche, die orangene Fläche ist Fall 1 und die gelbe ist Fall 2.

Wir müssen überprüfen:

1. r ist wohldefiniert und stetig
2. $r(F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon], 0) \subseteq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$
3. $r(\cdot, 1) = \text{id}_{F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]}$ und $r(\cdot, 0)|_{M^{c-\varepsilon} \cup e^k} = \text{id}_{M^{c-\varepsilon} \cup e^k}$

3. ist einfach nachzurechnen. In Fall 1 und Fall 3 ist 2. offensichtlich wahr. Für Fall

2 gilt:

$$\begin{aligned}
 f(r(0, q)) &= f \left(\varphi^{-1} \left(u_1(q), \dots, u_k(q), \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \right)^{1/2} u_{k+1}(q), \dots, \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \right)^{1/2} u_n(q) \right) \right) \\
 &= c - \xi(q) + \left(\left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \right)^{1/2} u_{k+1}(q) \right)^2 + \dots + \left(\left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \right)^{1/2} u_n(q) \right)^2 \\
 &= c - \left(\frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \right) \eta(q) \\
 &= c - \varepsilon
 \end{aligned}$$

also ist $r(0, q) \in f^{-1}(c - \varepsilon)$. Um 1. zu prüfen müssen wir Stetigkeit in den Grenzfällen überprüfen:

$$\begin{aligned}
 \text{For } \xi(q) = \varepsilon : & \quad s_t(q) = t + (1 - t)((\varepsilon - \varepsilon)/\eta(q))^{1/2} = t \\
 \text{For } \eta(q) + \varepsilon = \xi(q) : & \quad s_t(q) = t + (1 - t)((\xi(q) - \varepsilon)/(\xi(q) - \varepsilon))^{1/2} = 1
 \end{aligned}$$

Das einzig andere Problem was wir bekommen könnten ist nun in Fall 2 falls $\eta \rightarrow 0$. In Fall 1 und Fall 3 bekommen wir für q mit $\eta(q) = 0$: $r(q, t) = \varphi^{-1} \circ (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)(q)$, also wollen wir zeigen dass für $\eta \in \text{Fall 2}$ mit $\eta \rightarrow 0$ gilt $s_t u_i \rightarrow 0$ für $i \in \{k + 1, \dots, n\}$. In Fall 2 gilt $0 \leq \xi - \varepsilon \leq \eta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\eta \rightarrow 0} |s_t u_i| &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2} |u_i| \\
 &\leq \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t)(\eta/\eta)^{1/2} |u_i| \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (1 - t) |u_i| = 0
 \end{aligned}$$

Also ist r stetig. //

Mit Behauptung 3 und 4 bekommen wir

$$M^{c+\varepsilon} \simeq F^{-1}(c - \varepsilon]$$

und

$$F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$$

Also folgt die Behauptung:

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^k$$



3. Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

3.1. Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung

Definition 3.1 (Stabile- und instabile Mannigfaltigkeit). Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, p ein kritischer Punkt von f und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Die stabile Mannigfaltigkeit von f ist die Menge

$$W^s(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p \right\}$$

und die instabile Mannigfaltigkeit ist

$$W^u(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(q) = p \right\}.$$

Bevor wir die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit eines kritischen Punktes weiter untersuchen, fixieren wir ein Paar Notationen zu Morse Umgebungen.

Definition 3.2 (Notationen zu Morse Umgebungen). Zuerst untersuchen wir eine quadratische Form, die die Form hat wie Funktionen in Morse Umgebungen, also

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; Q(x_1, \dots, x_n) = -x_1 - \dots - x_k + x_{k+1} + \dots + x_n$$

für ein $1 \leq k \leq n$. Mit $x_- := (x_1, \dots, x_k): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $x_+ := (x_{k+1}, \dots, x_n)$ gilt dann

$$Q = -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2.$$

Der Gradient von Q ist mit dem Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n

$$\nabla Q(x_-, x_+) = 2(x_-, x_+).$$

Seien nun $\varepsilon, \eta > 0$. Dann setzen wir

$$U(\varepsilon, \eta) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon < Q(x) < \varepsilon \text{ und } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta) \right\} := U$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned} \partial_{\pm} U &:= \left\{ x \in U : Q(x) = \pm \varepsilon \text{ und } \|x_{\mp}\|^2 \leq \eta \right\} \text{ und} \\ \partial_0 U &:= \left\{ x \in \partial U : \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta) \right\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\partial U = \partial_+ \cup \partial_- \cup \partial_0.$$

Wir setzen nun $V_- = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ und $V_+ = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. V_+ ist der größte Vektorraum, auf dem Q positiv definit ist und V_- der größte Vektorraum, auf dem Q negativ definit ist. Es gilt

$$\partial U \cap V_{\pm} \subseteq \partial_{\pm} U.$$

Ist nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion, p ein kritischer Punkt von f und (U, φ) eine Morse Umgebung von p , dann hat $\varphi \circ (f - f(p))$ auf U genau die Form von Q , wenn k der Index von p ist. Dann gilt

$$\varphi(W^s(p) \cap U) = V_- \cap \varphi(U) \text{ und } \varphi(W^u(p) \cap U) = V_+ \cap \varphi(U).$$

Wir sind nun bereit eine grundlegende aber wichtige Aussage zu beweisen.

Proposition 3.3. *Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und p ein kritischer Punkt von f , dann sind $W^s(p)$ und $W^u(p)$ Mannigfaltigkeiten mit*

$$\dim W^u(p) = n - \dim W^s(p) = \text{ind}(p)$$

Beweis. Es sei (ψ, V) eine Morse Karte um p in einer Form wie in 3.2, also sodass $\varepsilon, \eta > 0$ existieren, sodass $\psi(V) = U(\varepsilon, \eta) := U$. Es sei außerdem φ der Fluss eines Pseudo-Gradientenfeldes von f . Dann ist

$$\Phi: \psi^{-1}(\partial_+ U \cap V_+) \times \mathbb{R} \rightarrow M; \psi(q, t) = \varphi_t(q)$$

eine Einbettung und es gilt

$$W^s(p) = \text{Im} \Phi \cup \psi^{-1}(U \cap V_+).$$

Tatsächlich ist

$$W^s(p) - \text{Im}\Phi = \{p\}.$$

Außerdem ist $\partial_+ U \cap V_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_+\|^2 = \varepsilon\} \approx S^{n-k-1}$, denn für alle $x \in V_+$ gilt sowieso schon $x_- = 0$. Also ist $W^s(p)$ diffeomorph zum Raum $S^{n-k-1} \times (-\infty, \infty] / \sim$, in dem alle Punkte in ∞ zusammengeklebt werden. Dieser Quotient ist wiederum diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension $n - k$. Genauso zeigt man, dass $W^u(p)$ diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension k ist. \square

Proposition 3.4. *Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Sei außerdem M kompakt. Ist dann φ der Fluss von X , dann existieren für jeden Punkt $p \in M$ kritische Punkte q und r von f , sodass*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(p) = q \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage. Seien für kritische Punkte q (U_q, ψ_q) die Karten, auf denen der Pseudo Gradient mit dem negativen Gradienten auf \mathbb{R}^n übereinstimmt. Es ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(p) = q$, genau dann wenn der Fluss $\varphi_\bullet(p)$ den Punkt p irgendwann in die Umgebung $\partial_+ \psi_q(U_q) \cap W^s(q)$ transportiert. Angenommen $\varphi_\bullet(p)$ transportiert p nie zu einem kritischen Punkt. Jedes mal wenn $\varphi_\bullet(p)$ also ins Innere einer Morse-Umgebung U_q gerät, muss diese Umgebung auch wieder verlassen werden. Da $f \circ \varphi_{\text{bullet}}(p)$ monoton ist, kann nachdem $\varphi_{\text{bullet}}(p)$ die Morse-Umgebung U_q verlassen hat, nie wieder zu dieser zurückgekehrt werden. Sei also

$$U = \bigcup_{q \in \text{Crit}(f)} U_q$$

und t_0 der Zeitpunkt an dem $\varphi_\bullet(p)$ die Umgebung U das letzte mal verlässt. Da $M - U$ keine kritischen Punkte von f enthält existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $x \in M - U$ gilt

$$df(x)(X(x)) \leq -\varepsilon.$$

Wir rechnen also: Für jedes $t \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned} f(\varphi_t(p)) - f(\varphi_{t_0}(p)) &= \int_{t_0}^t \frac{df \circ \varphi_\bullet(p)}{ds}(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t df(\varphi_s(p))(X(\varphi_s(p))) ds \\ &\leq -\varepsilon_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Also für $t \rightarrow +\infty$ gilt $f(\varphi_t(p)) \rightarrow -\infty$. Das kann aber nicht sein, denn da M kompakt ist muss auch $\text{Im} f$ kompakt sein. Also kann $\varphi_\bullet(p)$ nicht alle U_q verlassen. aber dann ist

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(p) = q$$

für einen kritischen Punkt q . Genauso zeigt man, dass $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$ für einen kritischen Punkt r . \square

Definition 3.5 (Smale-Bedingung). Es sei M eine Mannigfaltigkeit und U und V Untermannigfaltigkeiten von M . Wir sagen U und V sind *transversal* und schreiben $U \pitchfork V$, falls für alle Punkte $p \in U \cap V$ gilt

$$T_p U + T_p V = T_p M.$$

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *transversal* zur Untermannigfaltigkeit U , falls für alle p in U gilt

$$\langle X(p) \rangle + T_p U = T_p M.$$

Sei nun $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Dann sagen wir, dass X die *Smale-Bedingung* erfüllt, falls für alle kritischen Punkte p und q von f gilt

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q).$$

Ein Paar (f, X) aus einer Morse-Funktion f und einem Pseudo-Gradientenfeld X , das die Smale-Bedingung erfüllt, nennt man *Morse-Smale Paar*.

Proposition 3.6. Sind U_1 und U_2 Untermannigfaltigkeiten von einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Dimensionen d_1 und d_2 , sodass

$$U_1 \pitchfork U_2,$$

dann ist $U_1 \cap U_2$ eine Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension $d_1 + d_2 - n$.

Beweis. Fixiere einen Punkt $p \in U_1 \cap U_2$. Da U_1 und U_2 Untermannigfaltigkeiten sind existieren Karten (φ_1, V_1) und (φ_2, V_2) von M , sodass

$$\varphi_1 = (\varphi'_1, \varphi''_1): V_1 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega'_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_1}$$

mit $\varphi_1(V_1 \cap U_1) = \Omega_1 \times \{0\}$ und

$$\varphi_2 = (\varphi'_2, \varphi''_2): V_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega'_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{n-d_2}$$

mit $\varphi_2(V_2 \cap U_2) = \Omega_2 \times \{0\}$. Definiere

$$\varphi'' = (\varphi''_1, \varphi''_2): M \supseteq V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_2}.$$

Dann ist $(\varphi'')^{-1}(0) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) := V$. Wir wollen nun den Satz über reguläre Werte anwenden, aber dafür müssen wir zeigen, dass $d_p \varphi''$ surjektiv ist. Bemerke, dass $d_p \varphi'' = d_p(\varphi''_1, \varphi''_2) = (d_p \varphi''_1, d_p \varphi''_2)$. Es sei $v \in T_p \mathbb{R}^{n-d_1}$ und $w \in T_p \mathbb{R}^{n-d_2}$. Da $d_p \varphi''_1$ und $d_p \varphi''_2$ surjektiv sind, und da U_1 und U_2 transversal sind, existieren $v'_1 + v'_2, w'_1 + w'_2 \in T_p U_1 + T_p U_2$, sodass $d_p \varphi''_1(v_1 + v_2) = d_p \varphi''_1(v_2) = v$ und $d_p \varphi''_2(w_1 + w_2) = d_p \varphi''_2(w_1) = w$. Die ersten Gleichheiten gelten, da $T_p U_1$ der Kern von $d_p \varphi''_1$ und $T_p U_2$ der Kern von $d_p \varphi''_2$ sind. Dann gilt

$$d_p \varphi''(w'_1 + v'_2) = (d_p \varphi''_1(v'_2), d_p \varphi''_2(w'_1)) = (v, w).$$

Wir können also den Satz über reguläre Werte anwenden, dann ist V eine Untermannigfaltigkeit mit Dimension $n - ((n - d_1) + (n - d_2)) = d_1 + d_2 - n$. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Untermannigfaltigkeit von Dimension $d_1 + d_2 - n$. \square

Dann folgt direkt:

Proposition 3.7. *Es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion und p und q kritische Punkte von mit Index k_1 und k_2 respektive. Falls X die Smale-Bedingung erfüllt ist*

$$\mathcal{M}(p, q) := W^u(p) \cap W^s(q) = \left\{ r \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) \text{ und } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) \right\}$$

ist eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $k_1 - k_2$.

Der Raum $\mathcal{M}(p, q)$ beinhaltet alle Punkte, die auf Trajektorien zwischen den kritischen Punkten p und q liegen.

Proposition 3.8. *Ist M kompakt, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse Funktion, $p \neq q$ kritische Punkte mit Index k_1, k_2 , dann wirkt \mathbb{R} via $(p, t) \mapsto \varphi_t(p)$ frei und eigentlich auf $\mathcal{M}(p, q)$, also ist*

$$\mathcal{L}(p, q) = \mathcal{M}(p, q) / \mathbb{R}$$

| eine $(k_1 - k_2 - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Abbildung $\Phi: \mathcal{M}(p, q) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}(p, q) \times \mathcal{M}(p, q); (p, t) \mapsto (p, \varphi_t(p))$ ist glatt, denn da M kompakt ist, ist φ eine 1-Parameter-Gruppe aus Diffeomorphismen (2.10). Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

Die Gruppenwirkung ist frei, denn in $\mathcal{W}(p, q)$ sind keine kritischen Punkte, da $p \neq q$. Es sei x in $\mathcal{M}(p, q)$. Ist nun $t \neq 0$, dann gilt da $f \circ \varphi_\bullet$ streng monoton ist $f(\varphi_t(x)) \neq f(\varphi_0(x))$, also $\varphi_t(x) \neq x$. \square

Der Raum $\mathcal{L}(p, q)$ enthält für jede Trajektorie, die zwischen den kritischen Punkten p und q verläuft einen Repräsentanten. Später wird $\mathcal{L}(p, q)$ benutzt, um den Morse-Lomplex zu definieren. Die Smale Bedingung ist also für unsere Zwecke wichtig.

Wir gewinnen auch eine wichtige Erkenntnis:

Corollar 3.9. *Der Index von kritischen Punkten erhöht sich entlang von Trajektorien. Denn falls $\text{ind}(p) < \text{ind}(q)$, dann ist die Dimension von $\mathcal{M}(p, q)$ kleiner 0, also ist dann $\mathcal{M}(p, q) = \emptyset$.*

Um also den Morse Komplex für jede (kompakte) Mannigfaltigkeit definieren zu können, müssen wir noch die Existenz von Morse-Smale Paaran zeigen. Sogar noch stärker ist die folgende Aussage:

Satz 3.10 (Satz von Smale-Kupta). *Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und f eine Morse-Funktion, sodass $f|_{\text{Crit}f}$ bijektiv ist. Es sei Ω die Vereinigung von Morse-Umgebungen von allen kritischen Punkten. Sei X ein Pseudo-Gradientenfeld von f . Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld X' von f , das die Smale Bedingung erfüllt, das innerhalb von Ω gleich X ist und für das gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$, jeden Atlas $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ von M und alle $i \in I$ existiert für jede Kompakte Teilmenge $K_i \subseteq U_i$ ein Vektorfeld X' , sodass*

$$\|d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X') - d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X)\| < \varepsilon.$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist zum Beispiel in CITE[audin] zu finden. \square

3.2. Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien

Wir sind nun bereit, den Morse-Komplex mit Koeffizienten in \mathbb{F}_2 (wenigstens) hinzuschreiben. Wir fixieren für den gesamten Abschnitt eine glatte kompakte Man-

nigfaltigkeit M und ein Morse-Smale Paar (f, X) . Dann definiere $C_k(M, (f, X))$ als das \mathbb{F}_2 Modul, das von den kritischen Punkten von f mit Index k erzeugt wird. Außerdem sei $n_X(p, q) = \#\mathcal{L}(p, q) \bmod 2$. Dann definiere für einen kritischen Wert p :

$$\partial_X(p) := \sum_{\substack{q \in \text{Crit}(f) \\ \text{ind}(p)+1=\text{ind}(q)}} \partial_X(p, q)p.$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass der Komplex $C_*(M, (f, X))$ ein Kettenkomplex ist, also dass $\partial_X \circ \partial_X = 0$.

Sind dafür p und q zwei kritische Punkte von f mit $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 2$, dann genügt es zu zeigen, dass $\#\mathcal{L}(p, q)$ gerade ist. Dafür benötigen wir folgende Konstruktion:

Definition 3.11 (Der Raum der gebrochenen Trajektorien). Es seien p und q kritische Punkte von f . Der *Raum der gebrochenen Trajektorien* ist

$$\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\substack{c_1, \dots, c_{k-1} \\ \in \text{Crit}(f)}} \mathcal{L}(p, c_1) \times \mathcal{L}(c_1, c_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-2}, c_{k-1}) \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \right).$$

Obwohl die Formulierung recht sperrig wirkt ist sie doch intuitiv: $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ ist eine „Verbindung“ zwischen den kritischen Punkten p und q entlang des Pseudo-Gradientenfeldes X . Ein Element $(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ist eine „Verbindung“ zwischen p und q entlang des Pseudo-Gradientenfeldes X , die noch bei den kritischen Punkten c_1, \dots, c_{k-1} „Halt“ macht.

Offensichtlich gilt:

- Ist $\text{ind}(p) + 1 = \text{ind}(q)$, so ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q)$.
- Ist $\text{ind}(p) + 2 = \text{ind}(q)$, so ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q) \cup \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$

Wir werden sehen, dass man wie mit der Notation angedeutet $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ mit einer Topologie ausstatten kann, sodass es die Kompaktifizierung von $\mathcal{L}(p, q)$ ist. (In der Tat ist ja $\mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$).

Definition 3.12 (Topologie von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$). Es seien p und q kritische Punkte von f . Wir erinnern uns an unsere Vorstellung von Morse- Umgebungen $U = U(\varepsilon, \eta)$ wie in 3.2:

- $\partial_+ U$ sind alle Punkte auf dem Rand von U , auf denen Trajektorien von X in die Umgebung U eintreten.
- $\partial_- U$ sind alle Punkte auf dem Rand von U , auf denen Trajektorien von X die Umgebung U verlassen.

– Die Trajektorien von X verlaufen tangential zu $\partial_0 U$.

Es sei nun

$$\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q).$$

Seien $U_i = U_i(\varepsilon_i, \eta_i)$ Morse Umgebungen von c_i und U_0 und U_k Morse Umgebungen von p und q . $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$ ist der Punkt, an dem λ_i in U_i eintritt, und $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$ ist der Punkt, an dem λ_{i+1} die Umgebung U_i verlässt. Es sei U_i^- eine Umgebung von $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$ in $\partial_+ U$ und U_i^- eine Umgebung von $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$ in $\partial_- U_i$. Seien dann $U^- = \bigcup U_i^-$ und $U^+ = \bigcup U_i^+$. Dann definiere die Menge $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$ wie folgt:

Wir sagen $\ell' = (\mu_1, \dots, \mu_{k'}) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{k'-1}, q)$ ist in $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$ enthalten, falls $\mu_j \cap U_j^+ \neq \emptyset$ und $\mu_j \cap U_{j+1}^- \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ offen genau dann, wenn es für jedes $\ell \in \mathcal{W}$ Umgebungen U^+ und U^- wie oben gibt, sodass $\mathcal{U}(\ell, U^+, U^-) \subseteq \mathcal{W}$.

Bemerkung. Die Topologie von $\mathcal{L}(p, q)$ als Quotient stimmt mit der von $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ überein.

Proposition 3.13. *Es seien p und q kritische Punkte von f . Dann ist $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ kompakt.*

Um diese Proposition zu beweisen benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma 3.14. *Es sei $x \in M$ kein kritischer Punkt von f . Sei außerdem $(x_n)_n$ eine Folge in M die gegen x konvergiert und seien y_n und y Punkte, die auf den selben Trajektorien wie x_n und x liegen. Es gelte außerdem $f(y_n) = f(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

Beweis. Es sei U eine Umgebung von $\text{Crit}(f)$. Dann ist $df(\cdot)(X)$ nie Null, und ähnlich wie Im Beweis vom ersten Deformationslemma 2.15 betrachten wir das Vektorfeld

$$Y = -\frac{1}{df(\cdot)(X)} \cdot X$$

Auf $M - U$. Sei φ die von Y erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen. Da Y in die selbe Richtung zeigt wie X , stimmen die Trajektorien von Y mit denen von X überein und es gilt

$$f(\varphi_t(z)) = f(z) - t.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{-f(y_n)+f(x_n)}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{-f(y)+f(x_n)}(x_n) = \varphi_{-f(y)+f(x)}(x) = y$$

□

Beweis von Proposition 3.13. Es sei $(\ell_n)_n$ eine Folge in $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$. Um zu zeigen, dass $Lb(p, q)$ kompakt ist müssen wir zeigen, dass $(\ell_n)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir nehmen zuerst an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Trajektorie ℓ_n in $\mathcal{L}(p, q)$. Seien U und V Morse Umgebungen von p und q in der Form wie bei der eingeführten Notation für Morse Umgebungen 3.2. Es außerdem sei $\ell_n^- \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n die Morse Umgebung U verlässt und $\ell_n^+ \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n in die Morse Umgebung V eintritt. ℓ_n^- und ℓ_n^+ sind im Schnitt von ∂U bzw. ∂V und der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit. Diese Schnitte sind Kugeloberflächen, also kompakt. Die Folgen $(\ell_n^-)_n$ und $(\ell_n^+)_n$ haben also konvergente Teilfolgen, wir können demnach ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie konvergent sind. Setze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = p^- \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^+ = q^+.$$

Sei φ die von X erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann ist $\gamma = \varphi_\bullet(p^-)$ die Trajektorie von p^- . Sei $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_t(p^-)$. c ist nach Proposition 3.4 ein kritischer Punkt, also ist $\gamma \in \mathcal{L}(p, c)$. Es sei nun W eine Morse-Umgebung von c , die auch die Form hat wie in 3.2. Da φ glatt ist, muss für n groß genug auch ℓ_n die Morse Umgebung W von c kreuzen. Sei $d_n^+ \in M$ der Punkt, an dem ℓ_n in W eintritt. Dann gilt $d_n^+, d^+ \in \partial_+ W$, also gilt $f(d_n^+) = f(d^+)$ für alle n . Da d_n^+ auf der selben Trajektorie wie p_n^- liegt, und d^+ auf der selben Trajektorie wie p^- , folgt da $\lim p_n^- = p^-$ mit dem letzten Lemma 3.14:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^+ = d^+.$$

Falls $c = q$, dann ist $\lim \ell_n = \gamma \in \mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$, also hat dann die Folge $(\ell_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Es sei also $c \neq q$. Dann muss ℓ_n die Morse Umgebung W wieder durch einen Punkt d_n^- verlassen. Wie oben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $(d_n^-)_n$ konvergent ist, da sie zumindest eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir definieren dann $d^- = \lim d_n^-$. d^- liegt in der instabilen Mannigfaltigkeit von c , denn wäre dies nicht der Fall, dann führt das zu einem Widerspruch:

Angenommen $d^- \notin W^u(c)$. Dann wäre d^- auf der Trajektorie von einem Punkt $d_*^+ \in \partial_+ W$, der nicht in $W^s(c)$ enthalten ist. Wieder wegen des vorherigen Lemmas 3.14 ist dann $\lim d_n^+ = d_*^+$, also gilt dann $d^+ = d_*^+$, aber es gilt $d^+ \in W^s c$.

Wir können nun wieder mit dem selben Argument zeigen, dass dann die Trajektorie von d^- im kritischen Punkt q endet, also liegt dann $\lim \ell_n$ in $\mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$.

Jetzt fehlt uns noch der allgemeine Fall. Wir müssen also für eine Folge $(\ell_n)_n$ in $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ eine konvergente Teilfolge finden. Wegen der Glattheit von φ können wir annehmen, dass für n groß genug alle ℓ_n die Form

$$\ell_n = (\ell_n^1, \dots, \ell_n^k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q)$$

haben. Wir finden mit der vorherigen Überlegung komponentenweise eine Teilfolge, sodass wir für den Grenzwert maximal noch $k - 1$ kritische Punkte als „Zwischentopp“ einfügen müssen. \square

Satz 3.15 (Klassifizierung kompakter 1-Mannigfaltigkeiten). *Es sei M eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist*

- M diffeomorph zu S^1 , falls $\partial M = \emptyset$
- M diffeomorph zu $[0, 1]$, falls $\partial M \neq \emptyset$

Beweis. Betrachte zuerst den ersten Fall, also dass M keinen Rand hat. Es sei $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$ ein Atlas von M . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass alle U_i zusammenhängend sind. Da M zusammenhängend ist, können wir außerdem annehmen, dass $\bigcup_{i=1}^k U_i$ für alle k zusammenhängend ist. Dann existiert ein $1 \leq k < n$, sodass $\bigcup_{i=1}^k U_i$ diffeomorph zu \mathbb{R} ist, aber $\bigcup_{i=1}^{k+1} U_i$ nicht. Setze $U := \bigcup_{i=1}^k U_i$ und $V = U_{k+1}$. Seien $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ Diffeomorphismen.

Behauptung. Ist $M = U \cup V$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, U und V diffeomorph zu \mathbb{R} , dann ist M diffeomorph zu S^1 oder \mathbb{R} .

Beweis der Behauptung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $U \not\subseteq V$ und $V \not\subseteq U$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- $\varphi(U \cap V)$ und $\psi(U \cap V)$ sind offene Halbintervalle
- $\varphi(U \cap V)$ und $\psi(U \cap V)$ sind jeweils die disjunkte Vereinigung zweier offener Halbintervalle

Im ersten Fall ist M homeomorph zu \mathbb{R} :

Wir dürfen annehmen, dass $\varphi(U \cap V) = (-\infty, a)$ und $\psi(U \cap V) = (b, \infty)$, ansonsten ersetze φ mit ϕ bzw. ψ mit $-\psi$. Die Verkettung

$$(-\infty, a) = \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\psi} \psi(U \cap V) = (b, \infty)$$

Ist insbesondere injektiv, also auch monoton wachsend.

//

□

4. Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

4.1. CW-Komplexe

4.2. CW-Struktur von Mannigfaltigkeiten

4.3. Morse-Homologie ist zelluläre Homologie

4.4. Anwendungen

A. Anhang

Definition A.1 (Mannigfaltigkeit CITE[ludwig]). Es sei M ein topologischer Raum. Eine *Karte* von M ist ein Tupel (U, φ) , wobei $U \subseteq M$ offen und $\varphi: U \rightarrow U' \in \mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus ist.

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ist ein n -dimensionaler Atlas von M falls

1. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist eine Karte für jedes $\alpha \in I$
2. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Ein Atlas ist C^k für $k \in \{\mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}\}$, falls für alle $\alpha, \beta \in I$ der *Koordinatenwechsel*

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

C^k ist.

Eine Karte (U, φ) heißt C^k *kompatibel* mit einem C^k Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, falls für alle $\alpha \in I$ die Koordinatenwechsel $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ C^k sind.

Eine n -dimensionale C^k *Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M zusammen mit einem maximalen C^k Atlas \mathcal{A} , sodass M ein Hausdorff-Raum und zweitabzählbar ist. Maximal bedeutet hier, dass es keine mit \mathcal{A} C^k kompatiblen Karten gibt, die nicht in \mathcal{A} enthalten sind.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *glatt* falls $k = \infty$.

Für einen Punkt $p \in M$ und eine Karte (φ, U) mit $p \in U$ heißen $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ *lokale Koordinaten* um p .

Bemerkung. Wenn der Atlas einer Mannigfaltigkeit angegeben wird, dann nie als maximaler Atlas. Es reicht ein Atlas, alle anderen Karten sind dann schon impliziert.

Definition A.2 (Differenzierbarkeit). Sind M, N C^k Mannigfaltigkeiten,

$\mathcal{A} = (\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas von M , $\mathcal{B} = (\varphi_\beta, U_\beta)_{\beta \in J}$ ein Atlas von N , dann heißt eine Abbildung C^k oder k -mal *differenzierbar*, falls für alle $\alpha \in I$ und $\beta \in J$ die Abbildung

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

C^k ist.

Definition A.3 (Tangentialraum). Der Tangentialraum einer C^k Mannigfaltigkeit M an einem Punkt $p \in M$ ist

$$T_p M := \left\{ X_p : C^k \rightarrow \mathbb{R} : X_p \text{ ist eine Derivation von } M \text{ an dem Punkt } p \right\}$$

Wobei $X_p : C^k \rightarrow \mathbb{R}$ ein *Derivation* ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- X_p ist linear
- Für X_p gilt die Leibnitz-Regel, also

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g + f \cdot X_p(g)$$

Dann ist $T_p M$ ein Untervektorraum von $C^k(C^k(M))$.

Für eine C^k Abbildung $f : M \rightarrow N$ und einen Punkt $p \in M$ ist dann

$$\begin{aligned} df(p) : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ X_p &\mapsto f_* X_p \end{aligned}$$

wobei $f_* X_p$ definiert ist durch

$$f_* X_p(g) = X_p(g \circ f)$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned} T : \mathbf{Man}_* &\rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\ (M, p) &\mapsto T_p M \\ f &\mapsto df(p) \end{aligned}$$

Ist ein Funktor.

Bemerkung. Es sei M eine C^k Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, $p \in M$ und $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten um p . Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) : C^k(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x_i}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

Dann ist $(\partial/\partial x_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von $T_p M$.

Für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$, einem Punkt $p \in M$ und lokale Koordinaten

(x_1, \dots, x_n) um p und (y_1, \dots, y_m) um $f(p)$ bekommen wir in einer Umgebung von p wohldefinierte Abbildungen $f_i = y_i \circ f$. Dann ist das differential $df(p)$ von f gegeben durch die Matrix

$$D_p(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}.$$

Definition A.4. Es seien M, N C^k Mannigfaltigkeiten. Sei $f: M \rightarrow N$ C^k . Dann ist $p \in M$ ein kritischer Punkt von f , falls $df(p)$ nicht surjektiv ist. $f(p)$ heißt dann kritischer Wert von f .

Satz A.5 (Whitney's Einbettungssatz, CITE[hirsch]). *Es sei M eine n -dimensionale kompakte C^r Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine C^r Einbettung von M in \mathbb{R}^{2n+1} .*

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit sogar in den \mathbb{R}^{2n} eingebettet werden. Diese Version des Satzes heißt *starker Whitney's Einbettungssatz*.

Satz A.6 (Satz von Sard (siehe CITE[sard])). *Es seien M und N mindestens C^q -Mannigfaltigkeiten mit Dimension m und n respektive und $f: M \rightarrow N$ mindestens C^q . Dann gelten:*

- Falls $m \leq n$, dann hat die Menge der kritischen Werte von f Maß 0.
- Falls $m > n$, dann hat die Menge der kritischen Werte von f Maß 0, falls $q \geq m - n + 1$.