Der Morse-Komplex und die Morse-Homologie

Eine Bachelorarbeit

Betreuerin Prof. Ursula Ludwig

Jakob Dimigen

Inhaltsverzeichnis

In der Morse Theorie werden glatte Abbildungen $f\colon M \to \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind untersucht. Anhand einer solcher Abbildungen lassen sich Rückschlüsse auf topologische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M ziehen. In dieser Arbeit wird der *Morse-Komplex* definiert, und gezeigt, dass dieser isomorph zu einem zellulären Kettenkomplex ist. Dafür wird anfangs eine kurze Einführung in die Morse-Theorie gegeben und grundlegende Begriffe definiert. Im zweiten Kapitel werden Morse Funktionen und Pseudo-Gradienten untersucht. Im dritten Kapitel wird bewiesen, dass der Morse Komplex ein Kettenkomplex ist und im letzten Kapitel wird anhand der erarbeiteten Theorie eine zelluläre Struktur auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstruiert, deren zellulärer Kettenkomplex isomorph zum Morse-Komplex ist. Zu guter letzt werden einige bekannte Eigenschaften der zellulären Homologie anhand der Morse Homologie bewiesen.

1. Einführung

Anschauliche Beispiele, vielleicht die zu den Deformations-Lemmata? Dann müsste ich aber auch noch die Deformations-Lemmata machen.

1.1. Höhenfunktionen

1.2. Definitionen und Lemmata

Dieser Abschnitt folgt dem gleichnamigen Kapitel in CITE[milnor].

Definition 1.2.1 (Kritischer Punkt)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein *kritischer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$, sodass $\mathrm{d}f(p) = 0$.

Bemerkung. Allgemeiner lassen sich kritische Punkte von glatten Abbildungen $f\colon M \to N$ definieren, siehe im Anhang

Wir würden gerne eine Hessische Bilinearform für die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit definieren, allerdings ist dies ein nicht ganz einfaches Unterfangen. Wir werden am Ende einen Begriff erhalten, der mit dem der gewohnten Hessischen Bilinearform im $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt, allerdings nur für kritische Werte definiert ist.

Definition 1.2.2 (Lie-Klammer)**.** Es seien X und Y Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Die *Lie-Klammer* ist die Abbildung

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M)\\ (X,Y) &\mapsto [X,Y] := XY - YX\end{aligned}$$

Wobei

$$(XY - YX)(p)(f) = X(p)(Y(\cdot)(f)) - Y(p)(X(\cdot)(f))$$

Bemerkung. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Lie-Klammer tatsächlich eine Lie-Klammer ist, also dass sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear.
- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$

Proposition 1.2.3. *Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ glatt, p ein kritischer Punkt von f, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt:*

$$[X,Y](p)f = 0$$

Beweis. Es seien $(x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um p. Wir können ohne beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $X = g_X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = g_Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ für $g_X, g_Y \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left[g_X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, g_Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right](p)(f) =& g_X(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(g_Y \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - g_Y(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\left(g_X \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ =& g_X(p) \cdot \left(\frac{\partial g_Y}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + g_Y(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)\right) \\ &- g_Y(p) \cdot \left(\frac{\partial g_X}{\partial x_j}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + g_X(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \\ =& 0\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist Null wegen des Satzes von Schwarz und da p ein kritischer Punkt von f ist. □

Definition 1.2.4 (Hessische Bilinearform)**.** Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f. Es seien $x, y \in T_pM$. Wähle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X(p) = x$ und $Y(p) = y$. Definiere nun

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(p) = X(p)(Y(\cdot)f).$$

$\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ heißt *Hessische Bilinearform.*

Proposition 1.2.5. $\mathrm{d}^2 f(p)$ *hängt nicht von den gewählten Vektorfeldern X und Y ab und ist für alle kritischen Punkte eine symmetrische Bilinearform.*

Beweis. Bilinearität folgt direkt aus der Definition. Da p ein kritischer Punkt ist gilt

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(p) - \mathrm{d}^2 f(y,x)(p) = [X,Y](p)(f) = 0,$$

die Zuordnung ist also symmetrisch. Außerdem gilt

$$XYf(p) = X(p)(Y(\cdot)f) = x(Y(\cdot)f),$$

also hängt die Form nicht von X ab, und wegen der Symmetrie auch nicht von Y. □

Definition 1.2.6 (nicht-degeneriertheit, Index)**.** Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f. Wir nennen p *nicht degeneriert*, falls die Bilinearform $\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ nicht ausgeartet ist. Der *Index* eines nicht degenerierten kritischen Punktes ist die maximale Dimension eines Untervektorraumes, auf dem $\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ negativ definit ist.

Bemerkung. Nicht-Degeneriertheit und Index lassen sich auch über lokale Koordinaten definieren, aber nachzurechnen, dass diese Begriffe wohldefiniert sind ist recht aufwändig. Trotzdem wollen wir diese Sichtweise nicht vorenthaltern:
Es seien $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um den kritischen Punkt p. Dann ist $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ eine Basis des Vektorraums T_pM. Wir bekommen

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dann ist p nicht degeneriert genau dann wenn die Matrix

$$H_p^{\varphi}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

invertierbar ist. Der Index von p ist dann die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_p^{\varphi}(f)$. Der Index und die nicht-degeneriertheit hängen offensichtlich nicht von den gewählten Koordinaten ab, aber die Matrix $H_p^{\varphi}(f)$ schon.

Bemerkung. Die beiden Begriffe Index und nicht-Degeneriertheit sind zentral in der Morse-Theorie und werden uns über die gesamte Arbeit begleiten. Auch der nachfolgende Satz wird in fast jedem Beweis genutzt:

Satz 1.2.7 (Morse-Lemma)**.** *Es sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index k einer glatten Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Dann existieren lokale koordinaten $\varphi = (x_1, ..., x_n)$, sodass in einer Umgebung U von p gilt:*

$$f = f(p) - x_1^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2$$

und

$$\varphi(p) = 0.$$

Beweis. □

2. Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten zu definieren und ihre *allgegenwertigkeit* zu zeigen. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma*.

allgegenwertigkeit ist nicht so ein schönes Wort

3. Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

4. Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

A. Anhang

Definition A.0.1 (Mannigfaltigkeit CITE[ludwig])**.** Es sei M ein topologischer Raum. Eine *Karte* von M ist ein Tupel (U, φ), wobei $U \subseteq M$ offen und $\varphi\colon U \to U' \in \mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus ist.
$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ist ein *n-dimensionaler Atlas* von M falls

1. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist eine Karte für jedes $\alpha \in I$
2. $M = \bigcup_{\alpha \in I U_\alpha}$

Ein Atlas ist C^k für $k \in \{\mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}\}$, falls für alle $\alpha, \beta \in I$ der *Koordinatenwechsel*

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

C^k ist.
Eine Karte (U, φ) heißt C^k *kompatibel* mit einem C^k Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, falls für alle $\alpha \in I$ die Koordinatenwechsel $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ C^k sind.
Eine *n-dimensionale C^k Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M zusammen mit einem maximalen C^k Atlas $\mathcal{A}$, sodass M ein Hausdorff-Raum und zweitabzählbar ist. Maximal bedeutet hier, dass es keine mit $\mathcal{A}$ C^k kompatiblen Karten gibt, die nicht in $\mathcal{A}$ enthalten sind.
Eine Mannigfaltigkeit heißt *glatt* falls $k = \infty$.
Für einen Punkt $p \in M$ und eine Karte (φ, U) mit $p \in U$ heißen $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ *lokale Koordinaten* um p.

Bemerkung. Wenn der Atlas einer Mannigfaltigkeit angegeben wird, dann nie als maximaler Atlas. Es reicht ein Atlas, alle anderen Karten sind dann schon impliziert.

Definition A.0.2 (Differenzierbarkeit)**.** Sind M, N C^k Mannigfaltigkeiten, $\mathcal{A} = (\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas von M, $\mathcal{B} = (\varphi_\beta, U_\beta)_{\beta \in J}$ ein Atlas von N, dann heißt eine Abbildung C^k oder *k-mal differenzierbar*, falls für alle $\alpha \in I$ und $\beta \in J$ die Abbildung

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

C^k ist.

Definition A.0.3 (Tangentialraum)**.** Der Tangentialraum einer C^k Mannigfaltigkeit M an einem Punkt $p \in M$ ist

$$T_pM := \left\{X_p \colon C^k \to \mathbb{R} : X_p \text{ ist eine Derivation von } M \text{ an dem Punkt } p\right\}$$

Wobei $X_p : C^k \to \mathbb{R}$ ein *Derivation* ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- X_p ist linear
- Für X_p gilt die Leibnitz-Regel, also

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g + f \cdot X_p(g)$$

Dann ist T_pM ein Untervektorraum von $C^k(C^k(M))$.
Für eine C^k Abbildung $f \colon M \to N$ und einen Punkt $p \in M$ ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \colon T_pM &\to T_{f(p)}N \\ X_p &\mapsto f_*X_p \end{aligned}$$

wobei f_*X_p definiert ist durch

$$f_*X_p(g) = X_p(g \circ f)$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned} T\colon \mathbf{Man}_* &\to \mathbf{Vect}_\mathbb{R} \\ (M,p) &\mapsto T_pM \\ f &\mapsto \mathrm{d}f(p) \end{aligned}$$

Ist ein Funktor.

Bemerkung. Es sei M eine C^k Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, $p \in M$ und $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um p. Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) : C^k(M) \to \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x_i}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

Dann ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von T_pM.
Für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$, einem Punkt $p \in M$ und lokale Koordinaten $(x_1, ..., x_n)$ um p und $(y_1, ..., y_m)$ um $f(p)$ bekommen wir in einer Umgebung von p wohldefinierte Abbildungen $f_i = y_i \circ f$. Dann ist das differential $\mathrm{d}f(p)$ von f gegeben durch die Matrix

$$D_p(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}.$$

Definition A.0.4. Es seien M, N C^k Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ C^k. Dann ist $p \in M$ ein kritischer Punkt von f, falls $\mathrm{d}f(p)$ nicht surjektiv ist. $f(p)$ heißt dann kritischer Wert von f.