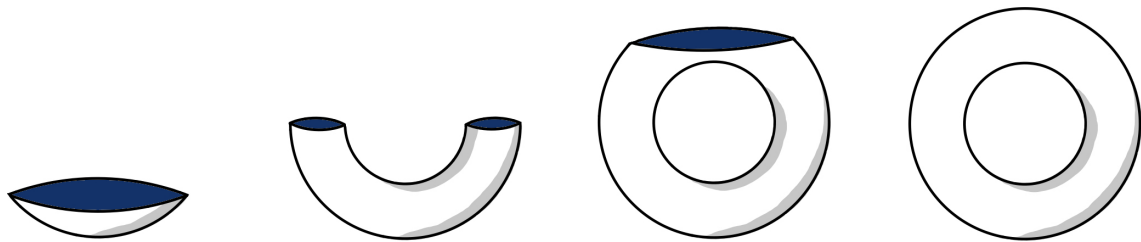


---

# Der Morse-Komplex und Morse-Homologie

---



*eingereicht von*  
Jakob Dimigen

*beaufsichtigt von*  
Prof. Ursula Ludwig

Universität Münster



## Vorwort

### Geschichte der Morse Theorie

Die Morse-Theorie ist Teil der Differential-Topologie. Sie lässt Aussagen zu, die von lokalen Eigenschaften auf globale Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten schließen lassen. Insbesondere schließt man von den Eigenschaften kritischer Punkte von bestimmten Funktionen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  auf topologische Eigenschaften von  $M$ . Die Theorie geht zurück auf den amerikanischen Mathematiker *Marston Morse*, der schon 1929 in [1] zu der Thematik veröffentlichte. Die *Morse-Homologie*, die in dieser Arbeit untersucht wird, wurde in verschiedenen Formen von *René Thom*, *Stephen Smale*, *John Milnor* in den 40er - 60er Jahren und *Edward Witten* Anfang der 80er Jahre eingeführt [11]. Wir werden uns in dieser Arbeit mit den Ideen der ersten Drei beschäftigen.

### Zielsetzung und Inhalt

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den *Morse-Komplex* zu definieren und zu zeigen, dass dieser isomorph zu einem zellulären Kettenkomplex ist. Damit ist die *Morse-Homologie*, die Homologie des *Morse-Komplexes*, isomorph zur *zellulären Homologie*, die nicht von der gewählten zellulären Struktur abhängt. Wir folgen dem ersten Teil des Buches *Morse Theory and Fleur Homology* [10].

Im ersten Kapitel wird ein grundlegender Einblick in die Morse-Theorie gegeben. Wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma*, das eine konkrete Vorstellung des Verhaltens von Morse-Funktionen in der Nähe kritischer Punkte liefert. Weitere wichtige Ergebnisse sind die beiden *Deformations-Lemmata* 1.20 und 1.21, die eine erste Verbindung zwischen den Eigenschaften kritischer Punkte und den topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit herstellen.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir erst die *stabile- und instabile Mannigfaltigkeit* und definieren den *Raum der Trajektorien*. Die Trajektorien sind Flüsse eines Pseudo-Gradientenfeldes. Diese starten und enden immer in kritischen Punkten. Das  $k$ -te Glied des Morse-Komplexes ist dann das  $\mathbb{F}_2$ -Modul, welches von den kritischen Punkten mit Index  $k$  erzeugt wird, und das Differenzial wird dann über die Anzahl der Trajektorien von kritischen Punkten mit Index  $k$  zu kritischen Punkten mit Index  $k - 1$  definiert. Wir zeigen, dass dieser Komplex wohldefiniert ist und dass es ein Kettenkomplex ist.

Im dritten Kapitel konstruieren wir anhand der erarbeiteten Theorie eine zelluläre Struktur auf kompakten Mannigfaltigkeiten und zeigen, dass der durch diese Struktur induzierte zelluläre Kettenkomplex isomorph zum Morse-Komplex ist. Wir geben außerdem ein Paar schöne Anwendungen der Morse-Homologie.

## Vorraussetzungen

Wir setzen voraus, dass die Leser<sup>in</sup> sich mit mehrdimensionaler Analysis auskennt und weiß, was Mannigfaltigkeiten und eine Untermannigfaltigkeiten ist und was Glattheit bedeutet. Außerdem sollte Mengentopologie einigermaßen vertraut sein. In Satz 1.20 und Satz 1.21, sowie im letzten Kapitel wird der Begriff *Deformationsretrakt* ohne Erklärung benutzt. Im Beweis von Satz 3.7 wird ein bisschen Wissen über *algebraische Topologie*, insbesondere relative Homologie und die lokale Grad Formel vorausgesetzt.

## Notation

Folgende Notationen werden benutzt:

- $\approx$  für eine Vektorraum-Isomorphie oder eine Homeomorphie,  $\cong$  für einen Diffeomorphismus und  $\simeq$  für eine Homotopie-Äquivalenz.
- Die Tangentialräume werden immer als die Menge der Derivationen betrachtet.
- Ein Vektorfeld ist eine glatte Abbildung  $X: M \rightarrow TM$  mit  $p \mapsto X(p) \in T_pM$  (anstatt  $X_p$ ).
- Ist  $f: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung, dann ist die Tangentialabbildung von  $f$  im Punkt  $p$  die Abbildung  $df(p): T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ .
- $B^k \subseteq \mathbb{R}^k$  ist die offene Kreisscheibe mit Radius 1, und  $D^k$  die abgeschlossene.
- Zelluläre und singuläre Homologie werden ausschließlich mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$  betrachtet.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten</b>	<b>1</b>
1.1	Nicht-Degeneriertheit und Index . . . . .	2
1.2	Morse-Funktionen . . . . .	6
1.3	Vektorfelder und Pseudo-Gradienten . . . . .	9
1.4	Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Der Morse-Komplex</b>	<b>14</b>
2.1	Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung . . . . .	15
2.2	Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Morse-Homologie und zelluläre Homologie</b>	<b>31</b>
3.1	CW-Komplexe . . . . .	31
3.2	Morse-Homologie ist zelluläre Homologie . . . . .	33
3.3	Anwendungen . . . . .	39

## 1 Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

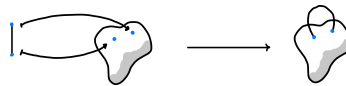
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns näher mit den Stars dieser Arbeit:

*Morse-Funktionen* und *Pseudo-Gradientenfeldern*. Außerdem werden wir das *Morse-Lemma 1.5* und die so genannten *Deformations-Lemmata 1.20* und *1.21* beweisen, die allein von den Eigenschaften kritischer Punkte einer Morse Funktion Rückschlüsse auf die topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit zulassen.

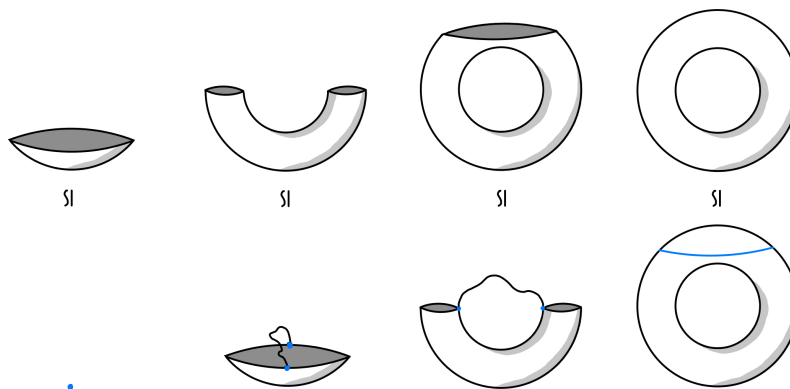
Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine  $k$ -Zelle  $e^k \subseteq X$  ist eine Teilmenge, sodass  $e^k \approx B^k$  und sodass eine stetige Abbildung  $\varphi: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\bar{e}^k, \partial\bar{e}^k)$  existiert, sodass  $\Phi: B^k \rightarrow e^k$  ein Homeomorphismus ist. Ein Raum  $Y$  entsteht aus einem Raum  $X$  durch anbringen einer  $k$ -Zelle  $e^k \subseteq Y$ , falls  $Y \approx X \amalg \bar{e}^k / \sim$ , wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  gegeben ist durch

$$\partial\bar{e}^k \ni x \sim y \in X \Leftrightarrow y = \iota(x).$$

$\iota: \bar{e}^k \rightarrow Y$  ist hier die Inklusion. Das anbringen einer 1-Zelle könnte zum Beispiel folgendermaßen aussehen:



Wir betrachten den Torus  $T$ , der aufrecht auf einer Ebene steht und die Abbildung  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ , der jedem Punkt seinen Abstand zur Ebene zuordnet. Die *Subniveaumengen* von  $f$  sind  $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ . Wir untersuchen  $M^a$ :



Es sei  $p$  das Minimum,  $q$  der untere Sattelpunkt,  $r$  der obere Sattelpunkt und  $s$  das Maximum.

- Für  $a < f(p)$  ist  $M^a = \emptyset$ .

- Für  $f(p) \leq a < f(p)$  ist  $M^a$  homotopieäquivalent zum Punkt, also dem leeren Raum mit einer 0-Zelle angebracht.
- Für  $f(p) \leq a < f(q)$  ist  $M^a$  homotopieäquivalent zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 1-Zelle angebracht wurde.
- Für  $f(q) \leq a < f(r)$  ist  $M^a$  homotopieäquivalent zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 1-Zelle angebracht wurde.
- Für  $f(s) \leq a$  ist  $M^a$  der Torus selbst, also homotopieäquivalent zur vorherigen Subniveaumenge, an der eine 2-Zelle angebracht wurde.

Wir bemerken:

- Gibt es im Intervall  $[a, b]$  keine kritischen Werte, so sind  $M^a$  und  $M^b$  diffeomorph.
- Gibt es in  $f^{-1}[a, b]$  genau einen kritischen Punkt, dann hat  $M^b$  den Homotopie-Typ von  $M^a$  mit einer  $k$ -Zelle angebracht, wobei  $k \in \mathbb{N}_0$

Diese beiden Aussagen können wir am Ende dieses Kapitels konkretisieren.

## 1.1 Nicht-Degeneriertheit und Index

Dieser Abschnitt folgt dem ersten Kapitel aus [5]. Wir werden Grundlegende Begriffe der Morse-Theorie erklären und das *Morse-Lemma* 1.5 beweisen.

**Definition 1.1** (Kritischer Punkt). Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung. Ein *kritischer Punkt* von  $f$  ist ein Punkt  $p \in M$ , sodass  $df(p)$  nicht surjektiv ist. Die Menge der kritischen Punkte von  $f$  heißt  $\text{Crit}(f)$ . Ist  $p$  ein kritischer Punkt, dann heißt  $f(p)$  kritischer Wert von  $f$ .

*Bemerkung.* Wir werden uns ausschließlich mit glatten Abbildungen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  beschäftigen. bei solchen Abbildungen ist  $p \in M$  ein kritischer Punkt genau dann, wenn  $df(p) = 0$ .

Wir würden gerne eine Hessesche Bilinearform für die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit definieren, allerdings ist dies ein nicht ganz einfaches Unterfangen. Wir werden am Ende einen Begriff erhalten, der mit dem der gewohnten Hesseschen Bilinearform im  $\mathbb{R}^n$  übereinstimmt, allerdings nur für kritische Werte definiert ist.

**Definition 1.2** (Hessesche Bilinearform). Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung,  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Es seien  $x, y \in T_p M$ . Wähle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , sodass  $X(p) = x$  und  $Y(p) = y$ . Definiere nun

$$d^2 f(x, y)(p) = X(p)(Y(\cdot)f).$$

$d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$  heißt *Hessesche Bilinearform*.

**Proposition 1.3.**  $d^2 f(\cdot, \cdot)(p)$  hängt nicht von den gewählten Vektorfeldern  $X$  und  $Y$  ab und ist für alle kritischen Punkte eine symmetrische Bilinearform.

*Beweis.* Wir betrachten die so genannte *Lie-Klammer* für Vektorfelder  $X$  und  $Y$ :

$$[X, Y] = XY - YX,$$

wobei

$$(XY - YX)(p)(f) = X(p)(Y(\cdot)(f)) - Y(p)(X(\cdot)(f)).$$

Man rechnet nach, dass die Lie-Klammer symmetrisch ist und das für jeden kritischen Punkt  $p$  von  $f$  gilt  $[X, Y](p)(f) = 0$ . Bilinearität folgt dann direkt aus der Definition. Da  $p$  ein kritischer Punkt ist gilt

$$d^2f(x, y)(p) - d^2f(y, x)(p) = [X, Y](p)(f) = 0,$$

die Zuordnung ist also symmetrisch. Außerdem gilt

$$XYf(p) = X(p)(Y(\cdot)f) = x(Y(\cdot)f),$$

also hängt die Form nicht von  $X$  ab, und wegen der Symmetrie auch nicht von  $Y$ .  $\square$

**Definition 1.4** (nicht-degeneriert, Index). Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung,  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Wir nennen  $p$  *nicht degeneriert*, falls die Bilinearform  $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$  nicht ausgeartet ist. Der *Index* eines nicht degenerierten kritischen Punktes  $p$  ist die maximale Dimension  $\text{ind}(p)$  der Untervektorräume, auf denen  $d^2f(\cdot, \cdot)(p)$  negativ definit ist. Die Menge der kritischen Punkte von  $f$  mit Index  $k$  heißt  $\text{Crit}_k(f)$ .

*Bemerkung.* Nicht-Degeneriertheit und Index lassen sich auch über lokale Koordinaten definieren. Tatsächlich stimmt die Sichtweise über lokale Koordinaten mit der Vorstellung der Hesseschen- Bilinearform, die wir für Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  haben überein:

Es seien  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  lokale Koordinaten um den kritischen Punkt  $p$ . Dann ist  $\mathcal{B} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$  eine Basis des Vektorraums  $T_pM$ . Wir bekommen

$$d^2f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dann ist  $p$  nicht degeneriert genau dann wenn die Matrix

$$H_p^\varphi(f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

invertierbar ist. Der Index von  $p$  ist dann die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $H_p^\varphi(f)$ . Der Index und die nicht-degeneriertheit hängen offensichtlich nicht von den gewählten Koordinaten ab, aber die Matrix  $H_p^\varphi(f)$  schon.

Die beiden Begriffe Index und nicht-Degeneriertheit sind zentral in der Morse-Theorie und

werden uns über die gesamte Arbeit begleiten. Auch der nachfolgende Satz wird in fast jedem Beweis genutzt:

**Satz 1.5** (Morse-Lemma). *Es sei  $p$  ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index  $k$  einer glatten Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann existieren lokale Koordinaten  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ , sodass in einer Umgebung  $U$  von  $p$  gilt:*

$$f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{und} \quad \varphi(p) = 0.$$

*$(U, \varphi)$  heißt Morse-Karte, und  $U$  Morse-Umgebung.*

Der hier geführte Beweis für das Morse-Lemma ist in [8] zu finden. Bevor wir das Morse Lemma beweisen, benötigen wir eine Aussage aus der Linearen Algebra:

**Lemma 1.6.** *Es sei  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  eine diagonale  $n \times n$  Matrix mit Diagonaleinträgen  $\pm 1$ . Dann gibt es eine Umgebung  $N$  von  $A$  im Vektorraum der symmetrischen  $n \times n$  Matrizen und eine glatte Abbildung  $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ , sodass  $P(A) = E_n$  und falls  $P(B) = Q$ , dann gilt  $Q^T B Q = A$ .*

*Beweis.* Die Aussage kann man Induktiv über  $n$  beweisen, siehe [8]. □

*Beweis von Satz 1.5.* Es sei  $U$  eine Karten Umgebung von  $p$ . Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = 0$  und  $f(0) = 0$ . Außerdem können wir mithilfe eines Koordinatenwechsels annehmen, dass  $A := H_0(f)$  eine Diagonalmatrix mit ausschließlich Diagonaleinträgen  $\pm 1$  ist, denn da  $p$  nicht degeneriert ist ist  $A$  invertierbar.

*Behauptung.* Es existiert eine glatte Abbildung  $x \mapsto B_x$  von  $M$  in die symmetrischen  $n \times n$  Matrizen, sodass für  $B_x = (b_{ij}(x))_{ij}$  gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j,$$

und sodass  $B_0 = A$ .

*Beweis der Behauptung.* Da  $f(0) = 0$  bekommen wir mit dem Fundamentalsatz der Differenzial - und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \right) x_i, \end{aligned}$$



Denn da  $p = 0$  ein kritischer Punkt ist, gilt  $\partial f / \partial x_i(0) = 0$  für alle  $i$ . Mit dem selben Argument sehen wir dann, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) ds \right) x_j.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n \left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) ds dt \right) x_i x_j.$$

Setze also

$$b_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) ds dt.$$

Dann gilt schon  $B_0 = A$ , und die Abbildungen  $b_{ij}$  sind glatt, also auch  $x \mapsto B_x$ . //

Wir dürfen nun das vorherige Lemma 1.6 anwenden:

Sei  $P: N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  eine Abbildung wie in 1.6. Setze  $Q_x := P(B_x)$ . Definiere nun eine glatte Abbildung  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\varphi(x) = Q_x^{-1}x$  in einer Umgebung von 0. Wir rechnen nach, dass  $d\varphi(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Identität ist:

Schreibe  $Q_x^{-1} = (q_{ij}(x))_{ij}$ . Dann

$$\varphi(x) = \left( \sum_{k=1}^n q_{1k}(x)x_k, \dots, \sum_{k=1}^n q_{nk}(x)x_k \right)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n q_{ik}(x)x_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_{ik}}{\partial x_j}(x)x_k + q_{ik}(x)\delta_{kj} \right), \end{aligned}$$

Wobei  $\delta_{ki}$  das Kronecker Delta ist. Setzen wir also 0 ein bekommen wir

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0) = q_{ij}(0).$$

Das Differential von  $\varphi$  in 0 ist also gegeben durch

$$Q_0^{-1} = P(B_0)^{-1} = P(A)^{-1} = E_n.$$

Das Differential an der Stelle 0 ist also invertierbar, und dann können wir mit dem Satz über die Umkehrfunktion annehmen, dass  $U$  klein genug ist, sodass  $\varphi$  eingeschränkt aufs Bild ein Diffeomorphismus ist. Dann ist  $\varphi$  eine Karte um 0. Setze  $(y_1, \dots, y_n) := \varphi$ , dann

gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T B_x x = (Q_x \varphi(x))^T B_x (Q_x \varphi(x)) \\ &= \varphi(x)^T (Q_x^T B_x Q_x) \varphi(x) = \varphi(x)^T A \varphi(x) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} y_i(x)^2. \end{aligned}$$

Das entspricht genau der gewünschten Form, denn  $a_{ii} \in \{\pm 1\}$ . □

**Corollar 1.7.** *Jeder nicht degenerierte kritische Punkt besitzt eine offene Umgebung, in der sich keine weiteren kritischen Punkte befinden.*

## 1.2 Morse-Funktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir *Morse-Funktionen*:

**Definition 1.8** (Morse-Funktion). Eine *Morse-Funktion* auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind.

Insbesondere zeigen wir, dass Morse Funktionen nichts besonderes sind. Dafür zeigen wir, dass für eine Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  die Abbildung  $x \mapsto \|x - p\|^2$  nur für  $p$ , die so genannten *Brennpunkte* sind, keine Morse Funktion ist, und dass die Menge der Brennpunkte eine Nullmenge ist. Dann werden wir sehen, dass jede glatte Funktion (auf gewisse Art und Weise) beliebig nah an einer Morse Funktion ist. Dieser Abschnitt folgt zu großen Teilen [5] und [10].

*Beispiel.* Ein Paar Beispiele:

1. Die Höhenfunktion auf dem Torus, die wir am Anfang dieses Kapitels untersucht haben, ist ein Beispiel für eine Morse-Funktion.
2. Ist  $T = [0, 1]^2 / \sim$  wie üblich der Torus, dann ist  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = -\cos(\pi \cdot x) - \cos(\pi \cdot y)$  eine Morse Funktion.

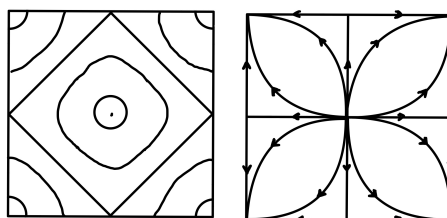


Abbildung 1.1: Höhenlinien (links) und der Gradient (rechts) von  $f$

**Definition 1.9** (Normalenbündel). Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Das Normalenbündel ist die Menge

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_x M\}.$$

Wir betrachten hier  $T_x M \subseteq T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$  via der Basis  $(\partial/\partial x_i)$ , wobei  $x_i$  die Achsen des  $\mathbb{R}^n$  sind.

**Proposition 1.10.** *Das Normalenbündel  $NM$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M \times \mathbb{R}^n$ .*

*Beweis.* Es sei  $x \in M$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$ , eine Umgebung  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  von 0 und eine Einbettung

$$\begin{aligned} h: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u_1, \dots, u_d) &\longmapsto x(u_1, \dots, u_d) \end{aligned}$$

die ein Diffeomorphismus  $h: \Omega \rightarrow U \cap M$  ist. Das orthogonale Komplement von  $T_x M$  in  $\mathbb{R}^n$  hat Dimension  $n - d$ . Es sei also  $(v_1(x), \dots, v_{n-d}(x))$  eine Basis von  $(T_x M)^\perp$ . Dann ist

$$(u_1, \dots, u_d, t_1, \dots, t_{n-d}) \longmapsto \left( x(u_1, \dots, u_d), \sum_{k=1}^{n-d} t_k \cdot v_k(u_1, \dots, u_d) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von  $NM$  als Untermannigfaltigkeit von  $M \times \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Definition 1.11** (Brennpunkt). Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Es sei  $E: NM \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $E(x, v) = x + v$ . Ein *Brennpunkt* von  $M$  ist ein kritischer Wert von  $E$ .

*Bemerkung.* Aus dem Satz von Sard (siehe [3]) folgt, dass die Menge der Brennpunkte eine Nullmenge ist. Intuitiv sind die Brennpunkte einer Untermannigfaltigkeit die Punkte im  $\mathbb{R}^n$ , an denen sich die Normalen von nahe aneinanderliegenden Punkten schneiden.

**Lemma 1.12.** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $NM$  parametrisiert wie im Beweis von Proposition 1.10. Dann ist  $p = x + v$  genau dann ein Brennpunkt von  $M$ , wenn die Matrix*

$$\left( \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right)_{ij}$$

*nicht invertierbar ist.*

*Beweis.* Den Beweis findet man zum Beispiel bei Milnor in Kapitel 6 von [5].  $\square$

**Proposition 1.13.** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Für fast jeden Punkt in  $\mathbb{R}^n$  ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f_p: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x - p\|^2 \end{aligned}$$

*eine Morse-Funktion.*

*Beweis.* Offensichtlich ist  $f_p$  glatt. Das Differential von  $f_p$  erweitert auf  $\mathbb{R}^n$  mit derselben Vorschrift ist

$$df_p(x) = 2(x - p).$$

Also gilt

$$df_p(x)(v) = \langle 2(x - p), v \rangle.$$

$x \in M$  ist folglich genau dann ein kritischer Punkt von  $f_p$ , wenn  $T_x M$  orthogonal zu  $(x - p)$  ist.

Bemerke, dass für eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ ,  $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und eine Derivation  $X_p$  gilt

$$X_p(f) = \langle X_p(\varphi_1), \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, X_p(\varphi_2) \rangle.$$

Sei nun  $x \in M$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x$ , eine Umgebung  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  von 0 und eine Einbettung

$$h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

mit  $h: \Omega \rightarrow U \cap M$ . Schreibe

$$h(u_1, \dots, u_n) = x(u_1, \dots, u_n).$$

Dann bekommen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \left\langle 2(x - p), \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle$$

und

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left( \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle x - p, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right).$$

Also hat nach Lemma 1.12  $f_p$  in einer Umgebung von  $x$  genau dann nicht-degenerierte kritische Punkte, wenn  $f_p$  ein Brennpunkt von  $M$  ist. Mit der Bemerkung nach der Definition von Brennpunkten 1.11 folgt dann direkt die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung.* Mit dem Einbettungssatz von Whitney (siehe [2]) folgt dann direkt, dass es auf jeder Mannigfaltigkeit  $M$  viele Morse-Funktionen gibt. Es gilt sogar noch eine stärkere

Aussage:

**Proposition 1.14.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann kann  $f$  in jeder kompakten Teilmenge  $K$  beliebig gut von einer Morse Funktion approximiert werden, also für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine Morse Funktion  $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass*

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

*Beweis.* Wir wählen eine für ein beliebiges  $n$ , das groß genug ist eine Einbettung  $h': M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist

$$h: M \longrightarrow \mathbb{R}^n; h(x) = (f(x), h'(x))$$

eine Einbettung von  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ . Seien  $c, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ , sodass für  $p = (c - \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  die Funktion  $f_p$  eine Morse Funktion ist. Setze nun

$$g(x) = \frac{f_p(x) - c^2}{2c}.$$

$g$  ist offensichtlich eine Morse-Funktion. Wir rechnen mit einem  $x \in M$ :

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= \frac{1}{2c} \left( (f(x) + c - \varepsilon_1)^2 + (h_1(x) - \varepsilon_2)^2 + \dots + (h_{n-1}(x) - \varepsilon_n)^2 - c^2 \right) \\ &= f(x) + \frac{f(x)^2 + \sum h_i(x)^2}{2c} - \frac{\varepsilon_1 f(x) + \sum \varepsilon_i h_{i-1}(x)}{c} + \sum \varepsilon_i^2 - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Man kann nun  $c$  beliebig groß und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  beliebig klein wählen, sodass  $g$  beliebig nah an  $f$  ist.  $\square$

Die meiste Zeit werden wir uns in dieser Arbeit kompakte Mannigfaltigkeiten untersuchen, auf solchen kann jede glatte Funktion sogar global mit einer Morse Funktion approximieren.

### 1.3 Vektorfelder und Pseudo-Gradienten

Wir untersuchen erst ein Paar Eigenschaften von Vektorfeldern.

**Definition 1.15** (Flusslinie). Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\gamma: I \rightarrow M$  ein glatter Weg. Dann definiere für  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) := d\gamma(t_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

wobei  $\partial/\partial t$  das von der Identität auf  $\mathbb{R}$  induzierte Element in  $T_t\mathbb{R}$  ist.

Es sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld auf  $M$ .  $\gamma$  heißt Flusslinie von  $X$  falls für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = X(\gamma(t_0)).$$

Das Bild einer Flusslinie von  $X$  heißt *Trajektorie*. Wir benutzen den Begriff Trajektorie recht frei. Manchmal ist damit auch die Flusslinie gemeint.

**Definition 1.16** (1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen). Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \varphi_t(p)\end{aligned}$$

sodass gelten:

- Für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$  und
- $\varphi_0 = \text{id}_M$ .

Für eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen  $\varphi$  schreiben wir

$$\varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow M; t \mapsto \varphi_t(p).$$

Es sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Eine 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen  $\varphi$  heißt *von  $X$  erzeugt*, falls für alle  $p \in M$  gilt:

$$X(p) = \frac{d\varphi_\bullet(p)}{dt}(0)$$

*Bemerkung.* Wie der Name suggeriert, ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Abbildung  $\varphi_t$  ein Diffeomorphismus: Das Inverse von  $\varphi_t$  ist  $\varphi_{-t}$ .

Ist außerdem  $\varphi$  eine von einem Vektorfeld  $X$  erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann rechnet man leicht nach, dass  $\varphi_\bullet(p)$  Flusslinien von  $X$  sind.

**Proposition 1.17.** *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit kompaktem Träger. Dann generiert  $X$  eine eindeutige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen.*

*Beweis.* Einen Beweis für diese Aussage findet man zum Beispiel auch in [5]. □

*Bemerkung.* Falls  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann generieren alle Vektorfelder eindeutige 1-Parametergruppen aus Diffeomorphismen.

**Definition 1.18** (Pseudo-Gradient). Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion.  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt *Pseudo-Gradient* oder *Pseudo-Gradientenfeld* von  $f$ , falls gelten:

- $df(p)(X(p)) \leq 0$  für alle  $p \in M$ , mit Gleichheit genau dann wenn  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist.
- Für jeden kritischen Punkt  $p$  von  $f$  existiert eine Morse-Umgebung  $(U_p, \varphi_p)$ , in der  $X(q) = -d(\varphi_p^{-1})(q) \cdot \nabla(f \circ \varphi_p^{-1})$ .

$\nabla$  ist hier der standard Gradient auf  $\mathbb{R}^n$ , der vom standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  induziert wird.

Die erste Eigenschaft haben auch Gradientenfelder. Tatsächlich ist dies die einzige Eigenschaft des Gradienten, die uns in diesem Kontext interessiert.

Die zweite Eigenschaft stellt sicher, dass sich Pseudo-Gradientenfelder in der Nähe von kritischen Punkten, also den Punkten, die wir in dieser Arbeit untersuchen, einfach verhält.

**Proposition 1.19.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Funktion. Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ .*

*Beweis.* Den Beweis findet man bei Audin und Damian [10]. □

## 1.4 Topologische Eigenschaften anhand kritischer Punkte

Wir wollen die beiden Deformations-Lemmata beweisen, die eine Verbindung zwischen den topologischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit und den kritischen Punkten einer Morse Funktion herstellt. Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung, dann ist die Subniveaumenge von  $f$  bezüglich einer reellen Zahl  $c$  die Menge  $M^c := f^{-1}(-\infty, c]$ . Sind  $a < b$  reelle Zahlen, dann stellen die Deformationslemmata die Topologien von  $M^a$  und  $M^b$  in Relation: Das erste beschreibt, was passiert *wenn kein* kritischer Wert überschritten wird, und das zweite beschreibt, was passiert *wenn ein* kritischer Wert überschritten wird. Die Beweise folgen Milnors Buch [1].

**Satz 1.20** (Erstes Deformationslemma). *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung. Hat  $f$  keine kritischen Werte im Intervall  $[a, b]$  und ist  $f^{-1}[a, b]$  kompakt, so existiert ein Diffeomorphismus  $M^b \rightarrow M^a$ , und  $M^a$  ist ein Deformationsretrakt von  $M^b$ .*

Die Idee des Beweises ist es,  $M^b$  entlang eines Pseudo-Gradientenfeldes von  $f$  mit einem Diffeomorphismus  $\varphi$  nach unten zu ziehen, bis  $\varphi(f^{-1}(b)) = f^{-1}(a)$ .

*Beweis.* Sei  $Y$  ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ . Es existiert eine kompakte Umgebung  $K \subset M$  von  $f^{-1}[a, b]$ , in der keine kritischen Punkte enthalten sind, das folgt zum Beispiel aus Whitneys Einbettungssatz (siehe [2]) und dem Satz von Heine-Borel. Sei  $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte, positive Funktion, sodass

$$\rho(p) = -\frac{1}{df(p)(Y(p))}$$

für alle  $p \in f^{-1}[a, b]$  und die außerhalb von  $K$  verschwindet und für die für alle  $p \in K$ , die keine kritischen Punkte sind, gilt:

$$0 \leq \rho(p) \leq -\frac{1}{df(p)(Y(p))}.$$

Bemerke dass  $\rho$  innerhalb von  $K$  wohldefiniert ist, da sich keine kritischen Punkte in  $K$  befinden. Definiere ein Vektorfeld  $X$  durch

$$X(p) = \rho(p) \cdot Y(p)$$

Dann hat  $X$  kompakten Träger, erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 1.17. Sei also  $\varphi$  die einzigartige 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, die von  $X$  generiert wird. Wir bekommen für jedes  $p \in M$  eine Abbildung  $f \circ \varphi_\bullet(p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Behauptung.* Für alle  $p \in M$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  und für  $q = \varphi_{t_0}(p)$  ist  $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_\bullet(p))(t_0) \in [-1, 0]$  und falls  $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$  gilt sogar  $\frac{d}{dt}f \circ \varphi_\bullet(q)(t_0) = -1$ .

*Beweis der Behauptung.* Für  $q = \varphi_{t_0}(p)$ :

$$\frac{d}{dt}f \circ \varphi_{t_0}(p) = df(\varphi_{t_0}(p)) \cdot d\varphi_\bullet(p)(t_0) \left( \frac{d}{dt} \right) = df(q)(X(q)) \in [-1, 0]$$

$f \circ \varphi_\bullet(p)$  ist also monoton wachsend für alle  $p \in M$ . Falls sogar  $f(\varphi_p(t_0)) \in [b, a]$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt}f \circ \varphi_p(t_0) = -1$$

//

Man zeigt dann leicht, dass für  $p \in f^{-1}(b)$ ,  $t_0 \in [0, b - a]$  gilt  $f(\varphi_{t_0}(p)) \in [a, b]$ .

Dann ist für  $p \in f^{-1}(b)$  die Abbildung  $f \circ \varphi_\bullet(p)$  im Intervall  $[0, b - a]$  linear mit Steigung  $-1$  und es gilt

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = f(\varphi_0(p)) - (b - a) = a$$

Genauso für  $q \in f^{-1}(a)$ :  $f(\varphi_{a-b}(q)) = b$ , also  $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$ .

Dann haben wir  $\varphi_{b-a}(M^b) = M^a$ , also ist  $\varphi_{b-a}|_{M^b}$  ein Diffeomorphismus zwischen  $M^a$  und  $M^b$ .

Betrachte nun  $r : M^b \times \mathbb{R} \rightarrow M^a$ ,

$$r(p, t) = \begin{cases} p & \text{falls } f(p) \leq a \\ \varphi_{t(f(p)-a)}(p) & \text{falls } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

$r$  ist stetig,  $r(\cdot, 0)$  ist die Identität auf  $M^b$ ,  $r(\cdot, 1)|_{M^a}$  ist die Identität auf  $M^a$  und  $r(1, M^b) \subseteq M^a$ , also ist  $M^a$  ein Deformationsretrakt von  $M^b$ . □



**Satz 1.21** (Zweites Deformations-Lemma). *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung und  $p$  ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index  $k$ . Sei  $c := f(p)$  und  $\varepsilon \geq 0$ , sd.  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und außer  $p$  keine weiteren kritischen Punkte von  $f$  beinhaltet. Dann hat  $M^{c-\varepsilon}$  denselben Homotopietypen wie  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ .*

*Beweis.* Die Idee für den Beweis ist, sich eine neue Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  zu definieren, die Außerhalb von einer kleinen Umgebung von  $p$   $f$  entspricht und in der Umgebung etwas kleiner ist. Dann bekommen wir die folgende Situation:

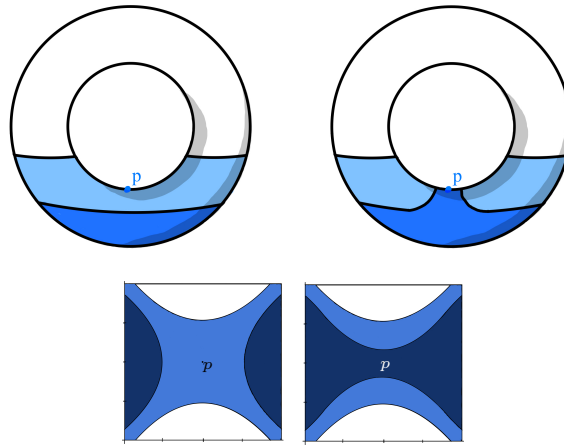


Abbildung 1.2: die Subniveaumengen von  $f$  (links) und  $F$  (rechts)

Wir wollen also, dass  $M^{c+\varepsilon} = F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$  gilt und  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  fast dasselbe ist wie  $M^{c-\varepsilon}$ , nur dass  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  einen „Henkel“ enthält der den kritischen Punkt  $p$  enthält.

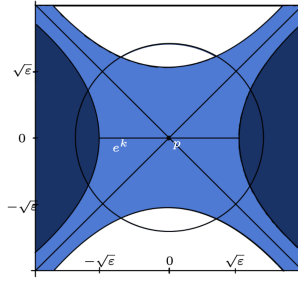
Wir benutzen das Morse-Lemma 1.5: Wir finden lokale Koordinaten  $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , sodass

$$f = c - u_1 - \dots - u_k + u_{k+1} + \dots + u_n \text{ und } u_1(p) = \dots = u_n(p) = 0.$$

Sei  $\varepsilon$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit klein genug, sodass  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und die Kreisscheibe  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 2\varepsilon\}$  im Bild von  $\varphi$  enthalten ist. Wähle nun die  $k$ -Zelle

$$e^k := \{q \in M : u_1^2(q) + \dots + u_k^2(q) \leq \varepsilon \text{ und } u_{k+1}(q) = \dots = u_n(q) = 0\}.$$

Wir bekommen folgende Situation:



$F$  wird nun so definiert, dass eine Umgebung der  $k$ -Zelle  $e^k$  ein wenig abgesenkt wird. Sei  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit den Eigenschaften

1.  $\mu(0) > \varepsilon$
2.  $\mu(r) = 0$  falls  $r \geq 2\varepsilon$
3.  $-1 < \mu'(r) \leq 0$  für alle  $r \in \mathbb{R}$ .

Sei dann  $F$  außerhalb von  $U$  gleich  $f$ , und innerhalb von  $U$  setze

$$F = f - \mu(u_1^2 + \cdots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + \cdots + 2u_n^2).$$

Man überprüft dann die drei Behauptungen

1.  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$ ,
2.  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  ist Deformationsretrakt von  $M^{c+\varepsilon}$ ,
3.  $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$  ist Deformationsretrakt von  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ .

Die zweite Behauptung folgt aus dem ersten Deformationslemma 1.20.

Den detaillierten Beweis findet man zum Beispiel bei Milnor [5]. □

Die beiden Deformationslemmata sind genau die beiden Aussagen, die wir am Anfang des Kapitels schon als Vermutung aufgestellt haben!

Mit den beiden Aussagen kommt man schon sehr weit. Die berühmten Morse-Ungleichungen (Satz 3.10) lassen sich mit ein bisschen linearer Algebra an exakten Sequenzen leicht daraus folgern. Man kann sogar zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit den Homotopietypen eines *CW-Komplexes* (siehe Def. 3.1) besitzt, wie es zum Beispiel Milnor in [5] tut. Die folgenden Kapitel geben eine etwas elegantere Sicht auf die Thematik, die in gewisser Hinsicht stärkere Aussagen liefert:

*Kompakte* Mannigfaltigkeiten haben nicht nur den selben Homotopie-Typen eines CW-Komplexes, sondern sie sind sogar CW-Komplexe, und wir können uns die zelluläre Homologie, die aus der CW-Struktur hervorgeht sogar auf eine einfache Art und Weise erklären (siehe 3.4).

## 2 Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

### 2.1 Die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit und die Smale-Bedingung

**Definition 2.1** (Stabile- und instabile Mannigfaltigkeit). Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Funktion,  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$  und  $X$  ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ . Die stabile Mannigfaltigkeit von  $p$  ist die Menge

$$W^s(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p \right\}$$

und die instabile Mannigfaltigkeit ist

$$W^u(p) = \left\{ q \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(q) = p \right\}.$$

(„s“ wie „stable“, „u“ wie „unstable“)

Bevor wir die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit eines kritischen Punktes weiter untersuchen, fixieren wir ein Paar Notationen zu Morse Umgebungen. Für den Rest dieser Arbeit ist diese Vorstellung von Morse-Umgebungen wichtig.

**Definition 2.2** (Notationen zu Morse Umgebungen). Zuerst untersuchen wir eine quadratische Form in  $\mathbb{R}^n$ , die die Form hat wie Funktionen in Morse Umgebungen, also  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Q(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

für ein  $1 \leq k \leq n$ . Mit  $x_- := (x_1, \dots, x_k)$  und  $x_+ := (x_{k+1}, \dots, x_n)$  gilt dann

$$Q = -\|x_-\|^2 + \|x_+\|^2.$$

Der Gradient von  $Q$  ist mit dem Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$

$$\nabla Q(x_-, x_+) = 2(x_-, x_+).$$

Es seien  $\varepsilon, \eta > 0$ . Dann definiere die Menge

$$U(\varepsilon, \eta) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \leq Q(x) \leq \varepsilon \text{ und } \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta) \right\} := U.$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned}\partial_{\pm}U &:= \left\{ x \in U : Q(x) = \pm\varepsilon \text{ und } \|x_{\mp}\|^2 \leq \eta \right\} \text{ und} \\ \partial_0U &:= \left\{ x \in \partial U : \|x_{-}\|^2 \|x_{+}\|^2 = \eta(\varepsilon + \eta) \right\}.\end{aligned}$$

Dann setzt sich der Rand von  $U$  aus diesen drei Teilen zusammen, also

$$\partial U = \partial_+U \cup \partial_-U \cup \partial_0U.$$

$\partial_0U$  ist parallel zu den Trajektorien des negativen Gradienten von  $Q$ .  $\partial_+U$  und  $\partial_-U$  sind orthogonal zu den Trajektorien des negativen Gradienten von  $Q$ , wobei die Trajektorien in  $\partial_+U$  in die Menge  $U$  eintreten und sie in  $\partial_-U$  wieder verlassen. Wir setzen nun  $V_- = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  und  $V_+ = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $V_+$  ist der größte Vektorraum, auf dem  $d^2Q(\cdot, \cdot)(0)$  positiv definit ist und  $V_-$  der größte Vektorraum, auf dem  $d^2Q(0)(\cdot, \cdot)(0)$  negativ definit ist. Es gilt

$$\partial U \cap V_{\pm} \subseteq \partial_{\pm}U.$$

0 ist der einzige kritische Punkt von  $Q$  und ist offensichtlich nicht degeneriert. Damit ist  $Q$  eine Morse Funktion und es gilt  $W^s(0) = V_+$  und  $W^u(0) = V_-$ .

Ist nun  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse Funktion,  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$  und  $(V, \psi)$  eine Morse Umgebung von  $p$ , dann gilt  $f \circ \psi^{-1} = Q + f(p)$ . Sind  $\varepsilon$  und  $\eta$  klein genug, dann ist  $U \subset \psi(V)$ . Wir nennen  $\Omega(p, \varepsilon, \eta) := \Omega(p) := \psi^{-1}(U)$ ,  $\partial_{\pm}\Omega(p) := \psi^{-1}(\partial_{\pm}U)$  und  $\partial_0\Omega(p) := \psi^{-1}(\partial_0U)$ . Dann ist

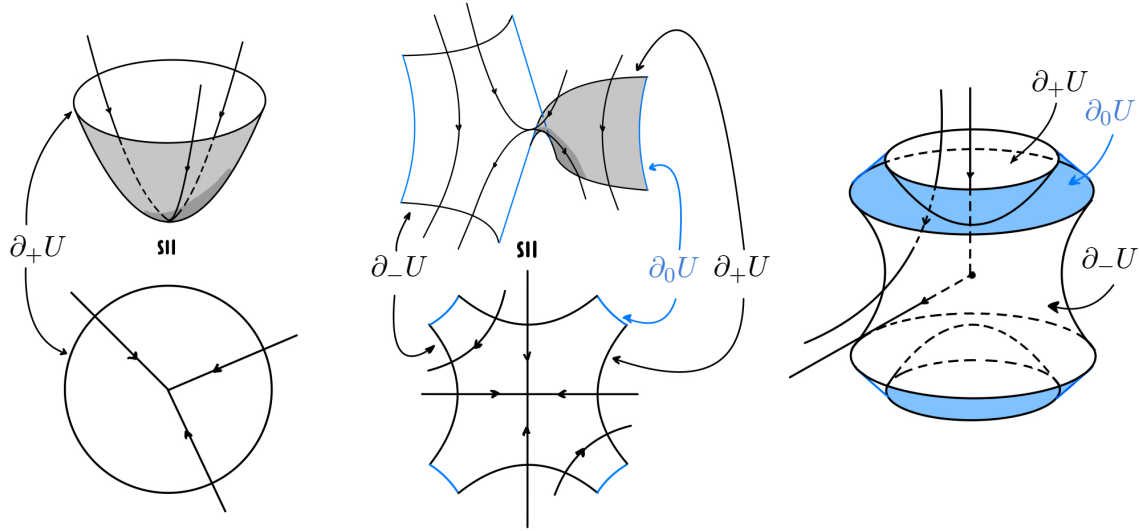
$$\psi(W^s(p) \cap \Omega(p)) = V^+ \cap U$$

und

$$\psi(W^u(p) \cap \Omega(p)) = V^- \cap U.$$

Wir können uns also mit dieser Notation die stabile- und instabile Mannigfaltigkeit (wenigstens in einer Umgebung von  $p$ ) sehr gut vorstellen.

Hier einige Beispiele für diese Morse Umgebungen:



Links eine Morse Umgebung um ein Minimum, also einen kritischen Punkt mit Index 0 einer Morse-Funktion aus einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit, in der Mitte eine Morse Umgebung eines Sattelpunktes, also eines kritischen Punktes mit Index 2, und rechts eine Morse-Umgebung eines kritischen Punktes mit Index 1 einer Morse Funktion aus einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Links ist die stabile Mannigfaltigkeit einfach eine Umgebung des Kreises, in der Mitte ist die stabile Mannigfaltigkeit die vertikale Achse und die instabile die horizontale, und rechts ist die stabile Mannigfaltigkeit die vertikale Achse und die instabile ist eine Umgebung eines Kreises auf der horizontalen Ebene.

$\varepsilon$  und  $\eta$  werden häufig in der Notation ausgelassen.

Mit dieser Vorstellungen von Morse-Funktionen können wir die folgende Aussage beweisen.

**Proposition 2.3.** *Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse Funktion und  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ , dann sind  $W^s(p)$  und  $W^u(p)$  Mannigfaltigkeiten mit*

$$\dim W^u(p) = n - \dim W^s(p) = \text{ind}(p)$$

*Beweis.* Es sei  $(\psi, V)$  eine Morse Karte um  $p$  und  $\Omega(p) \subseteq V$  in einer Form wie in 2.2. Es sei außerdem  $\varphi$  der Fluss eines Pseudo-Gradientenfeldes von  $f$ . Dann ist

$$\Phi: \partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p) \times \mathbb{R} \rightarrow M; \Phi(q, t) = \varphi_t(q)$$

eine Einbettung und es gilt

$$W^s(p) = \text{Im} \Phi \cup \psi^{-1}(U \cap V_+).$$

Tatsächlich ist

$$W^s(p) - \text{Im}\Phi = \{p\},$$

denn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q) = p$  für  $q \in \partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p)$ . Außerdem ist

$$\partial_+ U \cap V_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_+\|^2 = \varepsilon\} \cong S^{n-k-1},$$

denn für alle  $x \in V_+$  gilt sowieso schon  $x_- = 0$ . Also ist  $W^s(p)$  diffeomorph zum Raum  $S^{n-k-1} \times (-\infty, \infty] / \sim$ , in dem alle Punkte in  $\infty$  zusammengeklebt werden. Dieser Quotient ist wiederum diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension  $n - k$ . Genauso zeigt man, dass  $W^u(p)$  diffeomorph zur offenen Kreisscheibe mit Dimension  $k$  ist.  $\square$

**Proposition 2.4.** *Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Funktion und  $X$  ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ . Sei außerdem  $M$  kompakt. Ist dann  $\varphi$  der Fluss von  $X$ , dann existieren für jeden Punkt  $p \in M$  kritische Punkte  $q$  und  $r$  von  $f$ , sodass*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(p) = q \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$$

*Beweis.* Wir zeigen die erste Aussage. Seien für jeden kritischen Punkt  $p$   $(U_p, \psi_p)$  Morse Karten. Es ist  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p$ , genau dann wenn der Fluss  $\varphi_\bullet(q)$  den Punkt  $q$  irgendwann in die Umgebung  $\partial_+ \Omega(p) \cap W^s(p)$  transportiert. Angenommen  $\varphi_\bullet(q)$  transportiert  $q$  nie zu einem kritischen Punkt. Jedes mal wenn  $\varphi_\bullet(q)$  also ins Innere einer Morse-Umgebung  $U_q$  gerät, muss diese Umgebung auch wieder verlassen werden. Da  $f \circ \varphi_\bullet(q)$  monoton ist, kann nachdem  $\varphi_\bullet(q)$  die Morse-Umgebung  $\Omega(p)$  verlassen hat, nie wieder zu dieser zurückgekehrt werden. Sei also

$$\Omega = \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} \Omega(p)$$

und  $t_0$  der Zeitpunkt an dem  $\varphi_\bullet(q)$  die Umgebung  $\Omega$  das letzte mal verlässt. Da  $M - \Omega$  keine kritischen Punkte von  $f$  enthält existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$ , sodass für alle  $x \in M - U$  gilt

$$df(x)(X(x)) \leq -\varepsilon.$$

Wir rechnen also: Für jedes  $t \geq t_0$  gilt

$$\begin{aligned} f(\varphi_t(q)) - f(\varphi_{t_0}(q)) &= \int_{t_0}^t \frac{df \circ \varphi_\bullet(q)}{ds}(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t df(\varphi_s(q))(X(\varphi_s(q))) ds \\ &\leq -\varepsilon_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Also für  $t \rightarrow +\infty$  gilt  $f(\varphi_t(p)) \rightarrow -\infty$ . Das kann aber nicht sein, denn da  $M$  kompakt ist und  $\mathbb{R}$  Hausdorff, ist  $f$  eigentlich, also ist  $\text{Im}f$  kompakt. Also kann  $\varphi_\bullet(p)$  nicht alle  $U_q$

verlassen, aber dann ist

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) = p$$

für einen kritischen Punkt  $p$ . Genauso zeigt man, dass  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) = r$  für einen kritischen Punkt  $r$ .  $\square$

**Definition 2.5** (Smale-Bedingung). Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $U$  und  $V$  Untermannigfaltigkeiten von  $M$ . Wir sagen  $U$  und  $V$  sind *transversal* und schreiben  $U \pitchfork V$ , falls für alle Punkte  $p \in U \cap V$  gilt  $T_p U + T_p V = T_p M$ . Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt *transversal* zur Untermannigfaltigkeit  $U$ , falls für alle  $p$  in  $U$  gilt  $\langle X(p) \rangle + T_p U = T_p M$ . Sei nun  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse Funktion und  $X$  ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ . Dann sagen wir, dass  $X$  die *Smale-Bedingung* erfüllt, falls für alle kritischen Punkte  $p$  und  $q$  von  $f$  gilt

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q).$$

Ein Paar  $(f, X)$  aus einer Morse-Funktion  $f$  und einem Pseudo-Gradientenfeld  $X$ , das die Smale-Bedingung erfüllt, nennt man *Morse-Smale Paar*.

**Proposition 2.6.** Sind  $U_1$  und  $U_2$  Untermannigfaltigkeiten von einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit Dimensionen  $d_1$  und  $d_2$ , sodass

$$U_1 \pitchfork U_2,$$

dann ist  $U_1 \cap U_2$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit Dimension  $d_1 + d_2 - n$ .

*Beweis.* Es sei  $p \in U_1 \cap U_2$ . Da  $U_1$  und  $U_2$  Untermannigfaltigkeiten sind existieren Karten  $(\varphi_1, V_1)$  und  $(\varphi_2, V_2)$  von  $M$ , sodass

$$\varphi_1 = (\varphi'_1, \varphi''_1): V_1 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega'_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_1}$$

mit  $\varphi_1(V_1 \cap U_1) = \Omega_1 \times \{0\}$  und

$$\varphi_2 = (\varphi'_2, \varphi''_2): V_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega'_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{n-d_2}$$

mit  $\varphi_2(V_2 \cap U_2) = \Omega_2 \times \{0\}$ . Definiere

$$\varphi = (\varphi''_1, \varphi''_2): M \supseteq V_1 \cap V_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_2}.$$

Dann ist  $(\varphi)^{-1}(0) = (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) := V$ . Wir wollen nun den Satz über reguläre Werte anwenden, aber dafür müssen wir zeigen, dass  $d\varphi(p)$  surjektiv ist. Bemerke, dass  $d\varphi(p) = d(\varphi''_1, \varphi''_2)(p) = (d\varphi''_1(p), d\varphi''_2(p))$ . Es sei  $v \in T_p \mathbb{R}^{n-d_1}$  und  $w \in T_p \mathbb{R}^{n-d_2}$ . Da  $d\varphi''_1(p)$  und  $d\varphi''_2(p)$  surjektiv sind, und da  $U_1$  und  $U_2$  transversal

sind, existieren  $v'_1 + v'_2, w'_1 + w'_2 \in T_p U_1 + T_p U_2$ , sodass  $d\varphi''_1(p)(v_1 + v_2) = d\varphi''_1(p)(v_2) = v$  und  $d\varphi''_2(p)(w_1 + w_2) = d\varphi''_2(p)(w_1) = w$ . Die ersten Gleichheiten gelten, da  $T_p U_1$  der Kern von  $d\varphi''_1(p)$  und  $T_p U_2$  der Kern von  $d\varphi''_2(p)$  sind. Dann gilt

$$d\varphi(p)(w'_1 + v'_2) = (d\varphi''_1(p)(v'_2), d\varphi''_2(p)(w'_1)) = (v, w).$$

Wir können also den Satz über reguläre Werte anwenden, dann ist  $V$  eine Untermannigfaltigkeit mit Dimension  $n - ((n - d_1) + (n - d_2)) = d_1 + d_2 - n$ . Dann ist auch  $U_1 \cap U_2$  eine Untermannigfaltigkeit von Dimension  $d_1 + d_2 - n$ .  $\square$

Dann folgt direkt:

**Proposition 2.7.** *Es sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse Funktion und  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$  mit Index  $k_1$  und  $k_2$  respektive. Falls  $X$  die Smale-Bedingung erfüllt ist*

$$\mathcal{M}(p, q) := W^u(p) \cap W^s(q) = \left\{ r \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(p) \text{ und } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(q) \right\}$$

*ist eine Mannigfaltigkeit mit Dimension  $k_1 - k_2$ .*

Der Raum  $\mathcal{M}(p, q)$  beinhaltet alle Punkte, die auf Trajektorien zwischen den kritischen Punkten  $p$  und  $q$  liegen.

**Proposition 2.8.**  *$\mathbb{R}$  wirkt via  $(p, t) \mapsto \varphi_t(p)$  auf  $\mathcal{M}(p, q)$ . Sind  $p$  und  $q$  kritische Punkte mit  $p \neq q$  und Indizes  $k_1$  und  $k_2$ , dann ist*

$$\mathcal{L}(p, q) = \mathcal{M}(p, q) / \mathbb{R}$$

*eine  $k_1 - k_2 - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und es gilt*

$$\mathcal{L}(p, q) \cong \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$$

*für einen regulären Wert  $c$  zwischen  $f(p)$  und  $f(q)$  (Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $f(p) \neq f(q)$ ).*

*Beweis.* Die Gruppenwirkung ist frei, denn in  $\mathcal{M}(p, q)$  sind keine kritischen Punkte, da  $p \neq q$ . Es sei  $x$  in  $\mathcal{M}(p, q)$ . Ist nun  $t \neq 0$ , dann gilt da  $f \circ \varphi_\bullet(x)$  streng monoton ist  $f(\varphi_t(x)) \neq f(\varphi_0(x)) = f(x)$ , also  $\varphi_t(x) \neq x$ .

Es sei nun  $c$  ein regulärer Wert zwischen  $f(p)$  und  $f(q)$ .  $f^{-1}(c)$  ist eine  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, und für das Pseudo-Gradientenfeld  $X$  gilt  $X \pitchfork f^{-1}(c)$ , und da für jeden Punkt  $a$  gilt  $X(a) \in T_a \mathcal{M}(p, q)$  ist  $f^{-1}(c) \cap \mathcal{M}(p, q)$  eine  $k_1 - k_2 - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei

$$\iota: \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c) \rightarrow \mathcal{M}(p, q)$$



die Inklusion und

$$p: \mathcal{M}(p, q) \rightarrow \mathcal{L}(p, q)$$

die Quotientenabbildung.  $p \circ \iota$  ist bijektiv und stetig, und ist  $U \subseteq \mathcal{M}(p, q)$  offen, dann ist  $p \circ \iota(U)$  offen in  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ . Also ist  $p \circ \iota$  ein Homeomorphismus und  $\mathcal{L}(p, q)$  ist Hausdorff, also ist  $\mathcal{L}(p, q)$  eine Mannigfaltigkeit, und es gilt sogar

$$\mathcal{L}(p, q) \cong \mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$$

□

Der Raum  $\mathcal{L}(p, q)$  enthält für jede Trajektorie, die zwischen den kritischen Punkten  $p$  und  $q$  verläuft einen Repräsentanten. Später wird  $\mathcal{L}(p, q)$  benutzt, um den Morse-Komplex zu definieren. Die Smale-Bedingung ist also für unsere Zwecke wichtig.

*Beispiel.* Wir haben vorher schon zwei Beispiele für Morse Funktionen auf dem Torus gesehen. Die Höhenfunktion ist erfüllt die Smale-Bedingung nicht - tatsächlich führen die Trajektorien vom oberen Sattelpunkt direkt zum unteren Sattelpunkt.

Die Funktion mit  $f(x, y) = -\cos(x) - \cos(y)$  ist eine Morse Funktion und erfüllt auch die Smale-Bedingung.

Wir gewinnen auch eine wichtige Erkenntnis:

**Corollar 2.9.** *Der Index von kritischen Punkten verringert sich entlang von Trajektorien. Denn falls  $\text{ind}(p) \leq \text{ind}(q)$ , dann ist die Dimension von  $\mathcal{L}(p, q)$  kleiner 0, also ist dann  $\mathcal{L}(p, q) = \emptyset$ .*

Um den Morse Komplex für jede (kompakte) Mannigfaltigkeit definieren zu können, muss noch gezeigt werden, dass auf jeder Mannigfaltigkeit tatsächlich ein Morse-Smale Paar existiert. Sogar noch stärker ist die folgende Aussage:

**Satz 2.10** (Satz von Smale-Kupta). *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand und  $f$  eine Morse-Funktion. Es sei  $\Omega$  die Vereinigung von Morse-Umgebungen von allen kritischen Punkten. Sei  $X$  ein Pseudo-Gradientenfeld von  $f$ . Dann existiert ein Pseudo-Gradientenfeld  $X'$  von  $f$ , das die Smale-Bedingung erfüllt, das innerhalb von  $\Omega$  gleich  $X$  ist und für das gilt:*

*Für jedes  $\varepsilon > 0$ , jeden Atlas  $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$  von  $M$  und alle  $i \in I$  existiert für jede Kompakte Teilmenge  $K_i \subseteq U_i$  ein Vektorfeld  $X'$ , sodass*

$$\|d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X') - d\varphi_i^{-1}(\cdot)(X)\| < \varepsilon.$$

*Beweis.* Der Satz wurde von S. Smale in [4] bewiesen.

□

## 2.2 Der Morse-Komplex und der Raum der gebrochenen Trajektorien

Wir sind nun bereit, den Morse-Komplex mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$  (wenigstens) hinzuschreiben. Wir fixieren für den **gesamten Rest der Arbeit**:

- eine glatte **kompakte** Mannigfaltigkeit  $M$ .
- ein Morse-Smale Paar  $(f, X)$ .

Die Notation, die wir zu Morse-Umgebungen in 2.2 entwickelt haben wird weiterhin wichtig sein. Definiere  $C_k(M, (f, X))$  als das  $\mathbb{F}_2$ -Modul, das von den kritischen Punkten von  $f$  mit Index  $k$  erzeugt wird, also

$$C_k = \left\{ \sum_{p \in \text{Crit}_k(f)} a_p \cdot p : a_p \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

Außerdem sei  $n_X(p, q) = \#\mathcal{L}(p, q) \bmod 2$ . Dann definiere für einen kritischen Punkt  $p$  mit Index  $k + 1$ :

$$\partial_X(p) := \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, q)p.$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass der Komplex  $C_*(M, (f, X))$  wohldefiniert ist, also dass gilt  $n_X(p, q) < \infty$ , und dass es ein Kettenkomplex ist, also dass  $\partial_X \circ \partial_X = 0$ .

### Wohldefiniertheit

**Definition 2.11** (Der Raum der gebrochenen Trajektorien). Es seien  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$ . Der *Raum der gebrochenen Trajektorien* ist

$$\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{c_1, \dots, c_{k-1} \\ \in \text{Crit}(f)}} \mathcal{L}(p, c_1) \times \mathcal{L}(c_1, c_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-2}, c_{k-1}) \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \right).$$

Obwohl die Formulierung recht sperrig wirkt ist sie doch intuitiv:  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$  ist eine „Verbindung“ zwischen den kritischen Punkten  $p$  und  $q$  entlang des Pseudo-Gradientenfeldes  $X$ . Ein Element  $(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$  ist eine „Verbindung“ zwischen  $p$  und  $q$  entlang des Pseudo-Gradientenfeldes  $X$ , die noch bei den kritischen Punkten  $c_1, \dots, c_{k-1}$  „Halt“ macht.

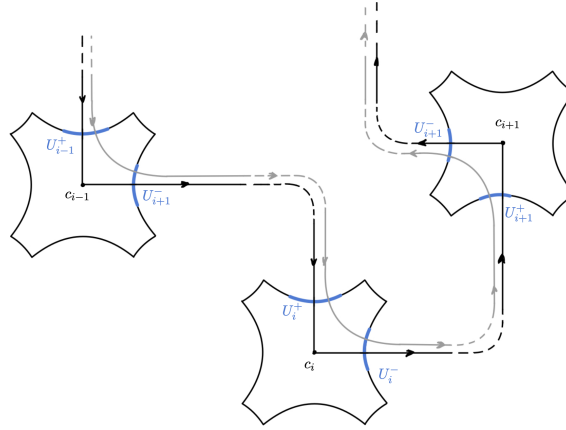


Abbildung 2.1: Eine gebrochene Trajektorie (schwarz) und eine nicht gebrochene Trajektorie in einer Umgebung (grau)

Offensichtlich gilt:

- Für jedes  $\ell \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q)$  gilt  $\text{ind}(p) < \text{ind}(c_1) < \cdots < \text{ind}(c_{k-1}) < \text{ind}(q)$ , denn falls dies nicht der Fall ist, ist mindestens einer der Faktoren leer.
- Ist  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$ , so ist  $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q)$ .
- Ist  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 2$ , so ist  $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q) \cup \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$ .

Tatsächlich sind die beiden letzten Fälle die, die wir am meisten untersuchen werden. Wir werden sehen, dass man, wie mit der Notation angedeutet,  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  mit einer Topologie ausstatten kann, sodass es die Kompaktifizierung von  $\mathcal{L}(p, q)$  ist. (In der Tat ist ja  $\mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ).

**Definition 2.12** (Topologie von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ ). Wir definieren eine Basis der Topologie von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ . Es seien  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$ . Wir erinnern uns an unsere Vorstellung von Morse-Umgebungen  $\Omega(p)$  wie in 2.2. Es sei

$$\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q).$$

Seien  $U_i = \Omega(c_i)$  (nicht unbedingt endgültig gewählte) Morse Umgebungen von  $c_i$  und  $U_0$  und  $U_k$  Morse Umgebungen von  $p$  und  $q$ .  $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$  ist der Punkt, an dem  $\lambda_i$  in  $U_i$  eintritt, und  $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$  der Punkt, an dem  $\lambda_{i+1}$  die Umgebung  $U_i$  verlässt. Es sei  $U_i^-$  eine Umgebung von  $\lambda_i \cap \partial_+ U_i$  in  $\partial_+ U$  und  $U_i^+$  eine Umgebung von  $\lambda_{i+1} \cap \partial_- U_i$  in  $\partial_- U_i$ . Seien dann  $U^- = \bigcup U_i^-$  und  $U^+ = \bigcup U_i^+$ . Dann definiere ein Element  $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$  aus der Basis wie folgt:

Wir sagen  $\ell' = (\mu_1, \dots, \mu_{k'}) \in \mathcal{L}(p, c_{i_1}) \times \cdots \times \mathcal{L}(c_{i_{k'}-1}, q)$  ist in  $\mathcal{U}(\ell, U^-, U^+)$  enthalten, falls  $\mu_j \cap U_j^+ \neq \emptyset$  und  $\mu_j \cap U_{j+1}^- \neq \emptyset$ .

Eine Menge  $\mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$  heißt dann *open*, falls  $\mathcal{V}$  die Vereinigung von Elementen aus der Basis ist.

*Bemerkung.* Die Topologie von  $\mathcal{L}(p, q)$  als Quotient stimmt mit der von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  überein.

Dies ist wieder ersichtlich, wenn wir uns  $\mathcal{L}(p, q)$  als Schnitt  $\mathcal{M}(p, q) \cap f^{-1}(c)$  vorstellen; Die  $U^-$  beziehungsweise  $U^+$  sind nur offene Umgebungen in den Niveaumengen.

**Proposition 2.13.** *Es seien  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$ . Dann ist  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  kompakt.*

Um diese Proposition zu beweisen benötigen wir noch ein Lemma:

**Lemma 2.14.** *Es sei  $x \in M$  kein kritischer Punkt von  $f$ . Sei außerdem  $(x_n)_n$  eine Folge in  $M$  die gegen  $x$  konvergiert und seien  $y_n$  und  $y$  Punkte, die auf den selben Trajektorien wie  $x_n$  und  $x$  liegen. Es gelte außerdem  $f(y_n) = f(y)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

*Beweis.* Der Beweis orientiert sich an dem des ersten Deformationslemmas 1.20 (Siehe [10]) □

*Beweis von Proposition 2.13.* Es sei  $(\ell_n)_n$  eine Folge in  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ . Um zu zeigen, dass  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  kompakt ist müssen wir zeigen, dass  $(\ell_n)_n$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wir nehmen zuerst an, dass  $(\ell_n)_n$  eine Folge in  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  ist. Es sei  $\ell_n^- \in M$  der Punkt, an dem  $\ell_n$  die Morse Umgebung  $\Omega(p)$  verlässt und  $\ell_n^+ \in M$  der Punkt, an dem  $\ell_n$  in die Morse Umgebung  $\Omega(q)$  eintritt.  $\ell_n^-$  und  $\ell_n^+$  sind im Schnitt von  $\partial\Omega(p)$  bzw.  $\partial\Omega(q)$  und der stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit. Diese Schnitte sind Kugeloberflächen, also kompakt. Die Folgen  $(\ell_n^-)_n$  und  $(\ell_n^+)_n$  haben also konvergente Teilfolgen, wir können demnach ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie konvergent sind. Setze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = p^- \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^+ = q^+.$$

Sei  $\varphi$  die von  $X$  erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen, dann ist  $\gamma = \varphi_\bullet(p^-)$  die Trajektorie von  $p^-$ . Sei  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_t(p^-)$ . Der Punkt  $c$  ist nach Proposition 2.4 ein kritischer Punkt, also ist  $\gamma \in \mathcal{L}(p, c)$ . Es sei  $d^+$  der Punkt, an dem  $\gamma$  in  $\Omega(c)$  eintritt. Da  $\varphi$  glatt ist, muss wegen der gewählten Topologie aus 2.12 für  $n$  groß genug auch  $\ell_n$  die Morse-Umgebung  $\Omega(c)$  kreuzen. Sei  $d_n^+ \in M$  der Punkt, an dem  $\ell_n$  in  $\Omega(c)$  eintritt. Dann gilt  $d_n^+, d^+ \in \partial_+ W$ , also gilt  $f(d_n^+) = f(d^+)$  für alle  $n$ . Da  $d_n^+$  auf der selben Trajektorie wie  $\ell_n^-$  liegt, und  $d^+$  auf der selben wie  $p^-$ , folgt da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = p^-$  mit dem letzten Lemma 2.14:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^+ = d^+.$$

Falls  $c = q$ , dann ist  $\lim \ell_n = \gamma \in \mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$ , also hat dann die Folge  $(\ell_n)_n$  eine konvergente Teilfolge. Es sei also  $c \neq q$ . Dann muss  $\ell_n$  die Morse Umgebung  $\Omega(c)$  wieder durch einen Punkt  $d_n^-$  verlassen. Wie oben können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge  $(d_n^-)_n$  konvergent ist, da sie zumindest eine konvergente Teilfolge

besitzt. Wir definieren dann  $d^- := \lim d_n^-$ .  $d^-$  liegt in der instabilen Mannigfaltigkeit von  $c$ , denn wäre dies nicht der Fall, dann führt das zu einem Widerspruch:

Angenommen  $d^- \notin W^u(c)$ . Dann wäre  $d^-$  auf der Trajektorie von einem Punkt  $d_*^+ \in \partial_+ \Omega(c)$ , der nicht in  $W^u(c)$  enthalten ist. Wieder wegen des vorherigen Lemmas 2.14 ist dann  $\lim d_n^+ = d_*^+$ , also gilt dann  $d^+ = d_*^+$ , aber es gilt  $d^+ \in W^u(c)$ .

Wir können nun wieder mit dem selben Argument zeigen, dass dann die Trajektorie von  $d^-$  im kritischen Punkt  $q$  endet, also liegt dann  $\lim \ell_n$  in  $\mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q)$ .

Jetzt fehlt uns noch der allgemeine Fall. Wir müssen also für eine Folge  $(\ell_n)_n$  in  $\bar{\mathcal{L}}(p, q)$  eine konvergente Teilfolge finden. Wegen der Glattheit von  $\varphi$  können wir annehmen, dass für  $n$  groß genug alle  $\ell_n$  die Form

$$\ell_n = (\ell_n^1, \dots, \ell_n^k) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_{k-1}, q)$$

haben. Wir finden mit der vorherigen Überlegung komponentenweise eine Teilfolge, sodass wir für den Grenzwert maximal noch  $k - 1$  kritische Punkte als „Zwischenstopp“ einfügen müssen.  $\square$

*Bemerkung.* Sind nun  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$  mit  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$ , dann ist  $\mathcal{L}(p, q)$  0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Außerdem ist  $\mathcal{L}(p, q)$  eine Abgeschlossene Teilmenge von  $\bar{\mathcal{L}}(p, q)$ , und wie wir in der letzten Proposition 2.13 gezeigt haben, ist  $\bar{\mathcal{L}}(p, q)$  kompakt, also auch  $\mathcal{L}(p, q)$ , also ist  $\mathcal{L}(p, q)$  endlich. Damit ist schon mal  $n_X(p, q) < \infty$ , also  $C_k(M(f, X))$  wohldefiniert.

## Der Morse Komplex ist ein Kettenkomplex

Wir wollen zeigen, dass der Morse-Komplex tatsächlich ein Kettenkomplex ist, also dass  $\partial_X \circ \partial_X = 0$ . Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \partial_X(\partial_X(p)) &= \partial_X\left(\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot c\right) \\ &= \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \left( \sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot n_X(c, q) \right) \cdot q \end{aligned}$$

und

$$\sum_{c \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, c) \cdot n_X(c, q) = \# \left( \bigcup_{c \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q) \right) \mod 2.$$

Es genügt also zu zeigen, dass für kritische Punkte  $p$  und  $q$  mit Index  $k + 1$  und  $k - 1$  gilt, dass  $\# \left( \bigcup_{c \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(p, c) \times \mathcal{L}(c, q) \right)$  gerade ist.

Wir benutzen die folgende Aussage, ohne sie zu beweisen:

**Satz 2.15** (Klassifizierung kompakter 1-Mannigfaltigkeiten). *Es sei  $M$  eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist*

- $M$  diffeomorph zu  $S^1$ , falls  $\partial M = \emptyset$
- $M$  diffeomorph zu  $[0, 1]$ , falls  $\partial M \neq \emptyset$

*Beweis.* Man kann diese Tatsache mithilfe von Morse-Theorie beweisen, wie es Audain und Damian in [10] tun, aber ein einfacherer Beweis ist bei Milnor in [6] zu finden.  $\square$

**Satz 2.16.** *Es seien  $p$  und  $q$  kritische Punkte von  $f$  mit  $\text{ind}(p) = k+1$  und  $\text{ind}(q) = k-1$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und das Innere von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  ist  $\mathcal{L}(p, q)$ .*

Mit dieser Proposition folgt dann mit der Klassifizierung von 1-Mannigfaltigkeiten mit Rand 2.15 schon, dass der Morse Komplex ein Kettenkomplex ist.

*Beweis.* Wir wissen schon, dass  $\mathcal{L}(p, q) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Um sagen zu können, dass  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und insbesondere, dass  $\mathcal{L}(p, q)$  das Innere von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  ist, reicht die folgende Aussage über  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ : Es sei  $c$  ein weiterer kritischer Punkt mit Index  $k$ . Sei  $\lambda_1 \in \mathcal{L}(p, c)$  und  $\lambda_2 \in \mathcal{L}(c, q)$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq \overline{\mathcal{L}}(p, q)$  von  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , ein  $\delta > 0$  und eine (topologische) Einbettung  $\psi: [0, \delta) \rightarrow U$ , sodass gelten:

1.  $\psi|_{(0, \delta)}$  ist glatt.
2.  $\psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2)$ .
3.  $\psi((0, \delta)) \subseteq \mathcal{L}(p, q)$ .
4. Für jede Folge  $(\ell_n)_n$  in  $\mathcal{L}(p, q)$  die gegen  $(\lambda_1, \lambda_2)$  konvergiert gilt  $\ell_n \in \text{Im}\psi$  für  $n$  groß genug.

Die letzte Bedingung stellt sicher, dass sich in  $(\lambda_1, \lambda_2)$  keine „Kreuzung“ befindet (wie zum Beispiel der Klebepunkt bei  $S^1 \wedge S^1$ ). Wir begeben uns also auf die (recht lange) Suche nach einer solchen Abbildung  $\psi$ .

Wir machen ein Paar Konstruktionen. Sei  $\alpha := f(c)$  und  $(V, \kappa)$  eine Morse Karte von  $c$ ,  $\Omega(c)$  wie in der Notation zu Morse Umgebungen 2.2. Dann sind  $f(\partial_+ \Omega) = \alpha + \varepsilon$  und  $f(\partial_- \Omega) = \alpha - \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Außerdem setze

$$\begin{aligned} S_+(c) &:= W^s(c) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cong S^{m-k-1} \\ S_-(c) &:= W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon) \cong S^{k-1}. \end{aligned}$$

Dass  $S_+(c)$  und  $S_-(c)$  diffeomorph zu Sphären sind hatten wir schon vorher gesehen. Es sei  $a_1 \in M$  der Punkt, an dem  $\lambda_1$  auf  $\Omega(c)$  trifft, also  $a_1 = S_+(c) \cap \lambda_1$ , und  $a_2$  der Punkt, an dem  $\lambda_2$  die Umgebung  $\Omega(c)$  wieder verlässt, also  $a_2 = S_-(c) \cap \lambda_2$ .  $\alpha + \varepsilon$  ist kein kritischer Wert von  $f$  und es gilt  $f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cap W^u(p)$ , also ist mit Proposition 2.6

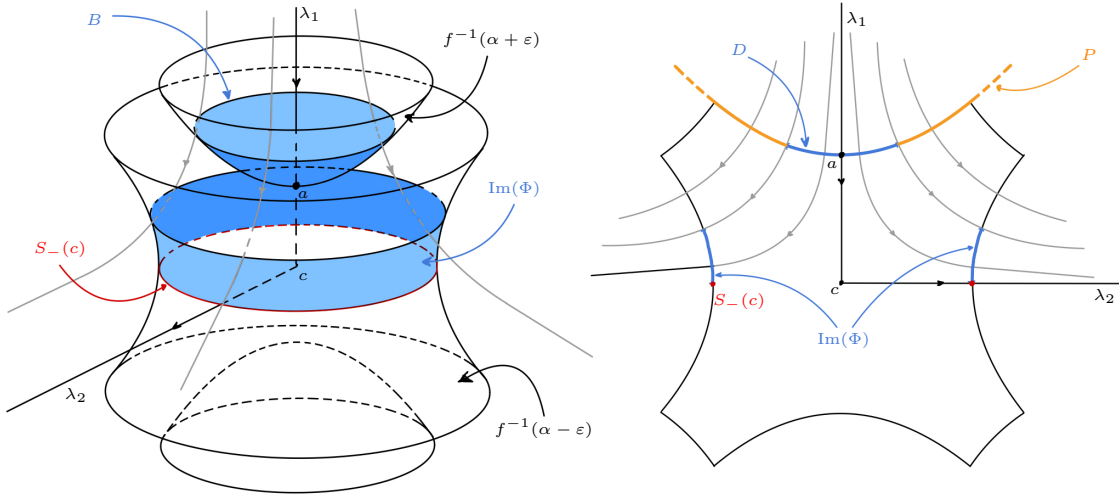


Abbildung 2.2: Anschauung von  $\Phi$ , falls  $\text{ind}(c) = 1$  und  $M$  3-dimensional (links) und 2-dimensional (rechts)

$P = f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cap W^u(p)$  eine Mannigfaltigkeit mit Dimension  $(n - 1) + (k + 1) - n = k$ . Da  $X$  die Smale-Eigenschaft erfüllt,  $P \subseteq W^u(p)$ ,  $S_+ \subseteq W^s(c)$ ,  $P, S_+(c) \subseteq f^{-1}(c + \varepsilon)$  und  $\dim P + \dim S_+(c) = n - 1$ , gilt  $P \pitchfork S_+(c)$ . Also ist  $P \cap S_+(c)$  mit Proposition 2.6 eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $k + (n - k - 1) - (n - 1) = 0$ . Offensichtlich gilt  $a_1 \in P \cap S_+(c)$ . Es sei  $B_\delta^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < \delta\}$ . Dann existiert eine Umgebung  $D$  von  $a_1$  in  $P$  und ein Diffeomorphismus  $\Psi : B \rightarrow B_\delta^k$  mit  $\Psi(a_1) = 0$ , sodass  $B \cap S_+(c) = a_1$  und  $B \subseteq \partial_+ \Omega(c)$ . Wir versuchen die Kernidee des Beweises zu verstehen:

Man betrachte die Abbildungen 2.2.

Wir versuchen, die Menge  $B - a_1$  entlang der Trajektorien von  $X$  auf  $\partial_- \Omega(c)$  via einer Abbildung  $\Phi$  einzubetten. Wir werden sehen, dass  $Q = \text{Im}(\Phi) \cup S_+(c)$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und dass dann  $Q \cap W^s(q)$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und  $a_2 \in \partial Q \cap W^u(q)$ . Wie in 2.8 ist  $Q \cap W^s(q) - a_2$  eine Teilmenge von  $\mathcal{L}(p, q)$ , und  $a_2 \in \mathcal{L}(c, q)$ , wenn wir also  $a_2 \in \lambda_2$  mit  $(\lambda_1, \lambda_2)$  identifizieren, dann bekommen wir unsere Parametrisierung  $\psi$  von  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$ . Also:

*Behauptung 1.* Es sei  $\varphi$  die von  $X$  erzeugte 1-Parameter Gruppe aus Diffeomorphismen. Für jedes  $x \in B - a_1$  existiert ein  $t_x \in \mathbb{R}$ , sodass  $\varphi_{t_x}(x) \in \partial_- \Omega(c)$  und  $x \mapsto t_x$  glatt ist.

*Beweis von Behauptung 1.* Via unserer anfangs gewählten Morse Karte  $(V, \kappa)$ , und da wir ohne Einschränkungen  $B$  klein genug wählen können, sodass  $B \subseteq \Omega(c)$ , können wir annehmen, dass sich alles im  $\mathbb{R}^n$  abspielt ; Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(x_-, x_+) = -\|x_-\| + \|x_+\|$ . Dann ist  $\varphi$  gegeben durch

$$\varphi_t(x_-, x_+) = (e^{2t}x_-, e^{-2t}x_+).$$

Falls  $(x_-, x_+) \in \partial_+ U$  und  $x_- \neq 0$ , dann gilt auch  $x_+ \neq 0$ . Setze

$$t_{(x_-, x_+)} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} \right).$$

Dann gilt

$$\varphi_{t_{(x_-, x_+)}}(x_-, x_+) = \left( \frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_-, \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right).$$

Die Zuordnung  $(x_-, x_+) \mapsto t_{(x_-, x_+)}$  ist glatt und

$$\begin{aligned} f(\varphi_{t_{(x_-, x_+)}})(x_-, x_+) &= - \left\| \frac{\|x_+\|}{\|x_-\|} x_- \right\| + \left\| \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|} x_+ \right\| \\ &= - \|x_+\| + \|x_-\| \\ &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt  $\varphi_{t_{(x_-, x_+)}}(x) \in \partial_- U$ . //

Wir haben nun also eine Einbettung  $\Phi$  von  $B - a_1$  entlang der Trajektorien von  $X$  gefunden. Wie am Anfang besprochen wollen wir jetzt zeigen:

*Behauptung 2.* Ist  $\delta$  klein genug, dann ist  $Q = \text{Im}(\Phi) \cup S_+(c)$  eine  $k$  dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und es gilt  $\partial Q = S_-(c)$ .

*Beweis von Behauptung 2.* Wieder spielt sich alles via  $\kappa$  im  $\mathbb{R}^n$  ab. Man betrachte die Projektion

$$\pi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}; \pi(x_-, x_+) = x_-.$$

und ihre Einschränkung  $\partial_+ U \rightarrow B_\eta^k$ . Da  $S_+ := \kappa(S_+(c)) = (\pi|_{\partial_+ U})^{-1}(0)$  und  $B \pitchfork S_+$ , ist 0 ein regulärer Wert von  $\pi|_{\partial_+ U}$ . Also ist  $d\pi|_{\partial_+ U}(0)$  surjektiv, und da  $\dim \partial_+ U = k = \dim B_\delta^k$  ist das Differential auch invertierbar. Jetzt können wir den Satz über die Umkehrfunktion anwenden bekommen lokal ein Inverses der Abbildung  $\pi|_{\partial_+ U}$ . Es existiert also ein  $\delta' \leq \eta$ , sodass das Inverse von  $\pi|_{\partial_+ U}$  auf  $B_{\delta'}^k$  definiert ist. Dann ist

$$\begin{aligned} (\pi|_{\partial_+ U})^{-1}: B_{\delta'}^k &\longrightarrow B \\ x_- &\longmapsto (x_-, x_+) =: (x_-, h(x_-)) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus. Da  $B \subseteq \partial_+ U \subseteq f^{-1}(\varepsilon)$ , gilt dann  $\|h(x_-)\|^2 = \|x_-\|^2 + \varepsilon$ . Ist dann

$g = \frac{h}{\|h\|}: B_{\delta'}^k \rightarrow S^{n-k-1}$ , dann gilt

$$B = \{(x_-, h(x_-)) : x_- \in B_{\delta'}^k\} = \{(x_-, \sqrt{\|x_-\|^2 + \varepsilon} \cdot g(x_-)) : x_- \in B_{\delta'}^k\}.$$



Dann bekommen wir mit der Einbettung aus Behauptung 1 und da  $\|g(x_-)\| = 1$ :

$$\Phi(B - a_1) = \left\{ \left( \frac{\sqrt{\|x_-\|^2 + \varepsilon}}{\|x_-\|} x_-, \|x_-\| g(x_-) \right) : x_- \in B_{\delta'}^k - 0 \right\}$$

Wir können nun auf  $B_{\delta'}^k - 0$  Polarkoordinaten anwenden. wir erhalten eine Einbettung

$$\begin{aligned} H &= \Phi^{-1} \circ \rho: (0, \delta') \times S^{k-1} \longrightarrow \partial_- U \\ (r, v) &\longmapsto (\sqrt{r^2 + \varepsilon} \cdot v, r \cdot g(\rho(r, v))). \end{aligned}$$

$g$  ist auf ganz  $B_{\delta'}^k$  definiert, und wenigstens in einer Umgebung von 0 beschränkt. Also können wir  $H$  stetig in 0 durch

$$H(0, v) = (\sqrt{\varepsilon} \cdot v, 0)$$

fortsetzen. Dann ist  $H$  auch weiterhin eine (topologische) Einbettung mit  $\text{Im}(H) = \text{Im}(\Phi) \cup S_-$ , und es gilt

$$H(0, S^{k-1}) = S_-.$$

//

Wir wissen, dass für  $f(q) < \alpha - \varepsilon < f(c)$  gilt  $\mathcal{L}(c, q) \cong (W^u(c) \cap W^s(q)) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ . Außerdem gilt  $W^s(q) \cap \text{Im}\Phi$  und  $W^s(q) \cap S_-(c)$  in  $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ , also ist mit Proposition 2.6  $W^s(q) \cap Q$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $(n - (k - 1)) + k - n = 1$ , und der Rand von  $W^s(q) \cap Q$  ist  $W^s(q) \cap S_-(c) \subseteq \mathcal{L}(c, q)$ , also ist  $a_2 \in \partial(W^s(q) \cap Q)$ . Wähle eine Parametrisierung von einer Umgebung von  $a_2$  in  $W^s(q) \cap Q$

$$\chi: [0, \delta) \rightarrow W^s(q) \cap Q.$$

Es gilt dann  $\chi(0) = a_2$ .

Damit erhalten wir die Abbildung

$$\Phi^{-1} \circ \chi: (0, \delta) \longrightarrow W^s(q) \cap (D - a_1) \subseteq \mathcal{L}(p, q).$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} \psi: [0, \delta) &\longrightarrow \overline{\mathcal{L}}(p, q) \\ t &\longmapsto \begin{cases} \Phi^{-1} \circ \chi(t) & \text{falls } t \neq 0 \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \text{falls } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass  $\psi$  die gewünschten Eigenschaften vom Anfang erfüllt.

Offensichtlich ist  $\psi$  bijektiv.  $\psi$  ist stetig, denn ist  $(x_n)_n$  eine Folge in  $(0, \delta)$ , die gegen 0

konvergiert, dann konvergiert die Folge  $(\chi(x_n))_n$  in  $W^s(q) \cap Q \subseteq \partial_- \Omega(c)$  gegen  $a_2$ . Dann folgt aus dem Lemma 2.14, dass die Folge  $(y_n)_n$  in  $W^s(q) \cap (D - a_1)$  mit  $y_n = \Phi^{-1}(\chi(x_n))$  gegen  $a_1$  konvergiert, also konvergiert  $\psi(x_n)$  gegen  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Genau dasselbe gilt für die Umkehrabbildung:

Ist  $(x_n)_n$  eine Folge in  $W^s(q) \cap D$ , die gegen  $a_1$  konvergiert, dann konvergiert  $\Phi(x_n)$  gegen  $a_2$ , also  $\chi^{-1}(\Phi(x_n))$  gegen 0. Also ist die Abbildung  $\psi$  ein Homeomorphismus, und die drei Bedingungen, die an  $\psi$  gestellt werden, sind offensichtlich aufgrund der Konstruktion erfüllt.

Wir müssen nur noch 4. zeigen.

Sei  $(\ell_n)_n$  eine Folge in  $\mathcal{L}(p, q)$ , die gegen  $(\lambda_1, \lambda_2)$  konvergiert. Für  $n$  groß genug können wir annehmen, dass die  $\ell_n$  die Morse Umgebung  $\Omega(c)$  betreten und verlassen. Seien wieder wie vorher die  $\ell_n^+ = \ell_n \cap \partial_+ \Omega(c)$  die Punkte, an denen  $\ell_n$  die Umgebung  $\Omega(c)$  verlässt und  $\ell_n^- = \ell_n \cap \partial_- \Omega(c)$  die Punkte, an denen  $\ell_n$  in die Umgebung  $\Omega(c)$  eintritt. Wegen der Topologie, die wir auf  $\overline{\mathcal{L}}(p, q)$  definiert haben gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- = a_1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^+ = a_2,$$

und da  $\Phi$  den Trajektorien von  $X$  folgt gilt  $\Phi(\ell_n^-) = \ell_n^+$ . Für  $n$  groß genug gilt also  $\ell_n^- \in D - a_1$ , also  $\ell_n^+ \in Q$ . Sowieso gilt schon, dass  $\ell_n^+ \in W^s(q)$ , also

$$\ell_n^- \in Q \cap W^s(q) = \text{Im} \chi.$$

Außerdem ist  $\Phi^{-1}(\ell_n^+) = \ell_n^-$ , also  $\ell_n \in \text{Im}(\psi)$ . □

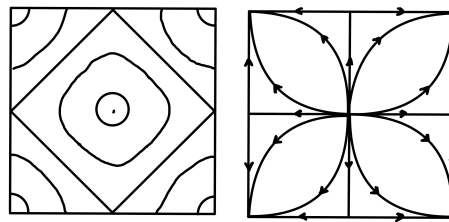
**Definition 2.17** (Morse-Homologie). Die *Morse-Homologie* ist die Homologie des Morse-Komplexes. Ist also

$$\partial_X^k := \partial_X : C_k(M, (f, X)) \longrightarrow C_{k-1}(M, (f, X)),$$

dann ist die Morse Homologie im  $k$ -ten Grad

$$HM_k(M, (f, X)) = \frac{\text{Ker } \partial_X^k}{\text{Im } \partial_X^{k+1}}$$

*Beispiel.* Wir können uns wieder unser Beispiel einer Morse-Funktion auf dem Torus, die die Smale-Bedingung erfüllt anschauen, also die mit Vorschrift  $f(x, y) = -\cos(\pi \cdot x) - \cos(\pi \cdot y)$ . Hier noch einmal die Höhenlinien und der Fluss des Gradientens:



Der Punkt  $p = (1/2, 1/2)$  ist ein Maximum, die beiden Punkte  $c_1 = (0, 1/2) = (1, 1/2)$  und  $c_2 = (1/2, 0) = (1/2, 1)$  sind Sattelpunkte und der Eckpunkt  $q$  ist ein Minimum. Von  $p$  gehen zwei Trajektorien jeweils zu  $c_1$  und  $c_2$  und von  $c_1$  und  $c_2$  gehen jeweils zwei Trajektorien zu  $q$ . Der Morse-Komplex ist also der folgende:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Grad:} & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 \\ & & & & & & & & & & \\ & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{F}_2^2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{F}^2 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

Dann ist

$$HM_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > 2 \text{ oder } k < 0 \\ \mathbb{F}_2 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 2 \\ \mathbb{F}_2^2 & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

Wir haben gezeigt, dass  $(C_*(M, (f, X)), \partial_X)$  ein Kettenkomplex ist, also ist die Morse-Homologie wohldefiniert.

### 3 Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser zellulären Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

#### 3.1 CW-Komplexe

Die folgenden Definitionen sind in [7] zu finden.

**Definition 3.1** (CW-Zerlegung und CW-Komplexe). Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung  $\mathcal{E}$  von  $X$  heißt *CW – Zerlegung*, wenn gelten:

1. Die Elemente in  $\mathcal{E}$  sind paarweise disjunkt.

2. Alle  $e \in \mathcal{E}$  sind homeomorph zu offenen Kreisscheiben.  
 $X^n$  ist die Vereinigung aller  $e \in \mathcal{E}$ , die Homeomorph zu einer  $k$ -dimensionalen offenen Kreisscheibe mit  $k \leq n$  sind.
3. Für jedes Element  $e \in \mathcal{E}$  existiert eine stetige Abbildung  $\Phi_e: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n \cup e, X^n)$ , sodass  $\Phi_e: B^n - S^n \rightarrow e$  ein Homeomorphismus ist.
4.  $\bar{e} \cap d = \emptyset$  für fast alle  $d \in \mathcal{E}$ .
5. Eine Teilmenge  $U$  ist offen in  $X$  genau dann, wenn für alle  $e \in \mathcal{E}$  die Menge  $U \cap \bar{e}$  offen in  $\bar{e}$  ist.

Ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer CW-Zerlegung  $\mathcal{E}$  heißt *CW-Komplex*. Wir nennen die  $k$ -dimensionalen  $e \in \mathcal{E}$   $k$ -Zellen, die Abbildung  $\Phi_e$  heißt charakteristische Abbildung von  $e$ , die Abbildung  $\varphi_e := \Phi_e|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  heißt Anheftungsabbildung.  $X^n$  heißt  $n$ -Skelett von  $X$ . Existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $X^n = X$ , dann heißt  $X$  *endlich dimensional*.

*Bemerkung.* Ist  $X$  kompakt mit einer CW-Zerlegung  $\mathcal{E}$ , dann ist  $\mathcal{E}$  endlich dimensional, und die Bedingungen 4. und 5. sind sowieso erfüllt.

**Definition 3.2** (Zellulärer Kettenkomplex). Bemerke, dass  $X^n/X^{n-1}$  das Wedge-Produkt vieler  $D^n/S^{n-1} = S^n$ 's ist. Wir bekommen durch die Anheftungsabbildung für jede  $k$ -Zelle  $e$  eine Abbildung in den Quotienten

$$\varphi_e: S^{k-1} \longrightarrow X^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}/X^{k-2}.$$

Ist  $d$  eine  $k-1$ -Zelle, dann bekommen wir außerdem eine Abbildung

$$\psi_d: X^{k-1}/X^{k-2} \longrightarrow S^{k-1},$$

die alle Sphären in dem Quotienten außer die, die aus  $\text{Im}(\Phi_d)$  entstanden ist auf den Klebepunkt des Wedge-Produktes abbildet.

Sei dann  $N(e, d)$  der Grad mod 2 der Abbildung

$$\psi_d \circ \varphi_e: S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}.$$

Dann ist das  $k$ -te Glied  $K_k$  des *zellulären Komplexes*  $(K_*, \partial)$  das  $\mathbb{F}_2$ -Modul, das von den  $k$ -Zellen in  $\mathcal{E}$  erzeugt wird, und das Differential ist für eine  $k$ -Zelle  $e$  gegeben durch

$$\partial(e) = \sum_{d \in K_{k-1}} N(e, d) \cdot d$$

*Bemerkung.* Man zeigt, dass  $\partial \circ \partial = 0$ , also dass  $(K_*, \partial)$  ein Kettenkomplex ist. Siehe [7]. Außerdem ist die Homologie des zellulären Kettenkomplexes isomorph zur singulären Homologie, und damit unabhängig von der gewählten CW-Zerlegung ([9]). Wie schon

vorher angedeutet, gibt es nicht für jeden topologischen Raum eine CW-Zerlegung, aber es ist tatsächlich gar nicht leicht einen topologischen Raum zu konstruieren, der kein CW-Komplex ist.

*Beispiel.* – Die Sphären  $S^n$  sind CW-Komplexe, denn mit  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , haben wir  $S^n \cap \mathbb{R}^n = S^{n-1}$  und  $S^n - \mathbb{R}^n$  ist die disjunkte Vereinigung zweier offener Kreisscheiben der Dimension  $k$ . So findet man induktiv eine CW-Zerlegung von  $S^n$  mit zwei  $k$ -Zellen für jedes  $k$  zwischen 0 und  $n$ .

– Auf dem Torus  $T = [0, 1]^2 / \sim$  finden wir eine CW-Struktur: Der Eckpunkt ist eine 0-Zelle, die Kanten sind zwei 1-Zellen und das Innere des Quadrats ist eine 2-Zelle.

**Definition 3.3** (zelluläre Homologie). Die zelluläre Homologie ist die Homologie des zellulären Kettenkomplexes  $(K_*, \partial)$ . Ist also

$$\partial^k := \partial: K_k \longrightarrow K_{k-1},$$

dann ist die zelluläre Homologie gegeben durch

$$HC_k = \frac{\text{Ker } \partial^k}{\text{Im } \partial^{k+1}}$$

### 3.2 Morse-Homologie ist zelluläre Homologie

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, mithilfe der im 2. Kapitel erarbeiteten Mitteln eine CW-Zerlegung von einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  zu finden.

Wir kennen schon eine disjunkte Zerlegung von  $M$  in offene Kreisscheiben, nämlich

$$\mathcal{E} = \{W^u(p) : p \in \text{Crit}(f)\}.$$

Tatsächlich ist jede instabile Mannigfaltigkeit eine offene Kreisscheibe und jeder Punkt in  $p \in M$  wird von  $\varphi_\bullet(p)$  für  $t \rightarrow -\infty$  genau auf einen kritischen Punkt transportiert (siehe Prop. 2.4).

**Proposition 3.4.** Die Zerlegung  $\mathcal{E} = \{W^u(p) : p \in \text{Crit}(f)\}$  ist eine CW-Zerlegung.

Bevor wir diese Proposition beweisen können, müssen wir noch ein wenig arbeiten. Wir definieren für einen kritischen Punkt  $p$ :

$$\overline{W}^u(p) = W^u(p) \cup \left( \bigcup_{q \in \text{Crit}(f)} \overline{\mathcal{L}}(p, q) \times W^u(q) \right).$$

$\overline{\mathcal{L}}(p, q) \times W^u(q)$  ist nur nicht leer, wenn  $\text{ind}(p) > \text{ind}(q)$ . Für alle  $x \in W^u(p) - \{p\}$  gibt es einen kritischen Punkt  $q$  und eine Trajektorie  $\lambda_x \in \mathcal{L}(p, q)$ , sodass  $x \in \lambda_x$ . wir können also

jedes  $x \in W^u(p) - \{p\}$  künstlich zu einem Tupel  $(\lambda_x, x)$  machen. Wir werden im Folgenden nicht zwischen  $x$  und  $(\lambda_x, x)$  in  $W^u(p)$  unterscheiden.

Wie im letzten Kapitel geben wir für  $\overline{W}^u(p)$  eine Topologie:

**Definition 3.5** (Topologie von  $\overline{W}^u(p)$ ). Wir definieren eine Basis der Topologie von  $\overline{W}^u(p)$ . Offene Mengen in  $W^u(p)$  sind auch in  $\overline{W}^u(p)$  offen. Für  $(\lambda, x) \in \mathcal{L}(p, c_1) \times \mathcal{L}(c_{k-1}, c)$ , eine Umgebung  $U^0$  von  $x$  in  $M$  und  $U^+$  und  $U^-$  wie vorher in 2.12 die Vereinigungen offener Umgebungen der Ein- bzw. Austrittspunkte der jeweiligen Trajektorien in  $\partial_+ \Omega(c_i)$  bzw.  $\partial_- \Omega(c_i)$  definieren wir die restlichen Elemente  $\mathcal{U}(\lambda, x, U^0, U^-, U^+)$  der Basis wie folgt: Falls  $(\mu, x') \in \overline{\mathcal{L}}(p, c_i) \times W^u(c_i)$  oder  $(\mu, x') \in W^u(p) \cap W^s(c)$ , dann ist

$$(\mu, x') \in \mathcal{U}(\lambda, x, U^0, U^-, U^+),$$

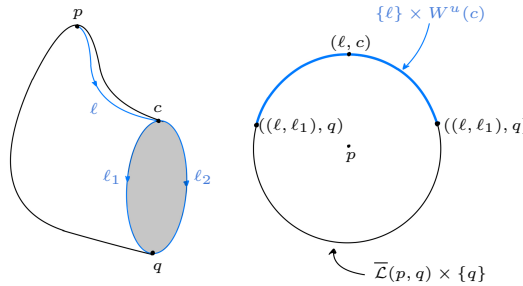
falls gelten:

1.  $x' \in U^0$ .
2. Die (einfache) Trajektorie, die  $c_i$  mit  $x'$  verbindet, tritt in  $\Omega(c_j)$  durch  $U_j^+$  für alle  $j > i$  und verlässt  $\Omega(c_j)$  durch  $U_j^-$  für alle  $j \geq i$ . Eine solche Trajektorie existiert, da  $x' \in W^u(c_i)$ .
3.  $\mu \in \mathcal{U}(\tilde{\lambda}, \tilde{U}^-, \tilde{U}^+)$ , wobei  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_i)$  und  $\tilde{U}^\pm = \bigcup_{j=1}^i U_j^\pm$

Für  $(\mu, x) \in W^u(p) \cap W^s(c)$  sind die zweite und die dritte Bedingung äquivalent. Die offenen Mengen in  $\overline{W}^u(p)$  sind dann die Mengen, die sich als Vereinigung der Elemente der Basis schreiben lassen.

*Beispiel.* – Die Höhenfunktion  $f$  von  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine Morse Funktion. Diese hat zwei kritische Punkte: den Nordpol  $n$  und den Südpol  $s$ . Es gilt  $W^u(n) = S^2 - \{s\}$  und  $W^u(s) = \{s\}$ .  $\overline{\mathcal{L}}(n, s) = \mathcal{L}(n, s) = S^1$ , und dann ist  $\overline{W}^u(n)$  die abgeschlossene Kreisscheibe mit Rand  $\mathcal{L}(n, s)$ .

– Wir betrachten den kritischen Punkt  $p$ :



**Proposition 3.6.** Ist  $p$  ein kritischer Punkt von  $f$ ,  $k = \text{ind}(p)$ , dann ist  $\overline{W}^u(p)$  homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe  $D^k$ , und  $W^u(p)$  ist das Innere von  $\overline{W}^u(p)$ .

*Bemerkung.* Mit dieser Proposition wird auch Proposition 3.4 bewiesen: Die ersten beiden Bedingungen für CW-Zerlegungen sind schon erfüllt. Da wir annehmen, dass  $M$  kompakt

ist, sind auch die letzten beiden Bedingungen erfüllt. Die dritte Bedingung folgt dann sofort aus der letzten Proposition 3.6.

*Beweis.* Wir geben nur eine grobe Beweisidee. Den detaillierten Beweis findet man in [10]. Für Elemente  $(\lambda, x) \in \overline{W}^u(p)$  gilt sowieso schon, dass  $f(x) \leq f(p)$ . Definiere

$$\overline{W}^u(p, \alpha) = \{(\lambda, x) \in \overline{W}^u(p) - \{p\} : f(x) \geq \alpha\} \cup \{p\}.$$

Für  $\alpha = f(c) - \varepsilon$  und  $\varepsilon$  klein genug gilt

$$\overline{W}^u(p, \alpha) = W^u(p) \cap \Omega(p, \varepsilon, \eta).$$

Für ein beliebiges  $\eta$ .  $\Omega(p, \varepsilon, \eta)$  ist wie in der Notation zu Morse-Umgebungen 2.2. Dies ist via einer Morse-Karte homeomorph zu  $V^- \cap U(\varepsilon, \eta)$ , also zur abgeschlossenen  $\text{ind}(p)$ -dimensionalen Kreisscheibe. Da  $M$  kompakt ist besitzt  $f$  ein Minimum, und falls gilt  $\alpha < \min(f)$ , dann gilt offenbar

$$\overline{W}^u(p, \alpha) = \overline{W}^u(p).$$

Wir wollen also zeigen, dass für  $\alpha' < \alpha$  gilt

$$\overline{W}^u(p, \alpha') \approx \overline{W}^u(p, \alpha).$$

Die Menge  $\overline{W}^u(p, \alpha)$  erinnert uns an die Subniveaumengen aus Abschnitt 1.4. Das erste Deformationslemma liefert eine ähnliche Aussage, und wir können die folgende Behauptung beweisen:

*Behauptung 1.* Wenn sich im Intervall  $[\alpha', \alpha]$  keine kritischen Werte von  $f$  befinden, dann sind  $\overline{W}^u(p, \alpha')$  und  $\overline{W}^u(p, \alpha)$  homeomorph.

*Beweis von Behauptung 1.* Unter Anwendung des ersten Deformationslemmas auf  $-f$  bekommen wir einen Homeomorphismus

$$\varphi: M^{\alpha'} \longrightarrow M^{\alpha}.$$

Die Subniveaumengen sind die Subniveaumengen von  $-f$ . Dann ist auch

$$\begin{aligned} \chi: \overline{W}^u(p, \alpha') &\longrightarrow \overline{W}^u(p, \alpha) \\ (\lambda, x) &\longmapsto (\lambda, \varphi(x)) \end{aligned}$$

ein Homeomorphismus. //

Sehr viel schwieriger ist es zu beweisen, dass sich  $\overline{W}^u(p, \alpha)$  selbst wenn  $\alpha$  einen kritischen

Wert überquert nicht verändert. Für den Fall  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$  und  $\text{ind}(q) \neq 0$  liefert die folgende Skizze eine Idee für den Beweis:

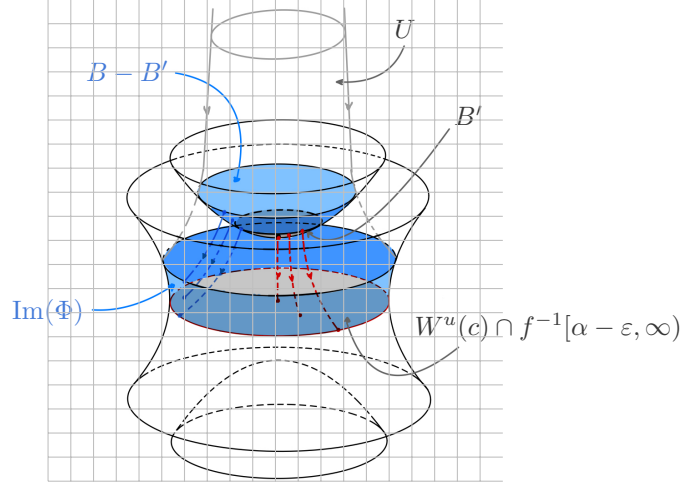


Abbildung 3.1: Definition von  $\chi$

Wir nehmen an, dass es für jeden kritischen Wert  $\alpha$  genau einen kritischen Punkt  $c$  gibt, sodass  $f(c) = \alpha$ . Es sei  $c$  ein weiterer kritischer Punkt mit  $f(c) = \alpha$ . Dann sei  $\varepsilon > 0$ , sodass sich im Intervall  $f^{-1}[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  keine kritischen Punkte außer  $c$  befinden. Wir bekommen in diesem Fall nur ein Problem, wenn wir einen Punkt  $x$  haben, der von seiner Trajektorie auf den kritischen Punkt  $c$  geschickt wird - ansonsten können wir wie im Beweis von Behauptung 1 den Punkt  $x$  entlang seiner Trajektorie entlang des (skalierten) Pseudo-Gradientenfeldes nach unten ziehen. Wir definieren also

$$P = \{(x, \lambda) \in \overline{W}^u(p, \alpha + \varepsilon) : x \in W^u(c)\}.$$

Außerhalb von einer Umgebung von  $P$  können wir

$$\chi: \overline{W}^u(p, \alpha + \varepsilon) \longrightarrow \overline{W}^u(p, \alpha - \varepsilon)$$

wie oben angedeutet definieren.

Wir zeigen dies nur für den einfachsten Fall:

*Behauptung 2.* Ist  $\alpha = f(p)$ ,  $q$  ein weiterer kritischer Punkt von  $f$  mit  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1 \neq 0$  und  $\varepsilon > 0$  klein genug, dann sind  $\overline{W}^u(p, \alpha + \varepsilon)$  und  $\overline{W}^u(p, \alpha - \varepsilon)$  homeomorph.

*Beweis von Behauptung 2.* In diesem Fall gilt

$$P \subseteq \mathcal{M}(p, c) \subseteq W^u(p) \subseteq \overline{W}^u(p)$$

Der Beweis erinnert an den Beweis von Satz 2.16. Man betrachte die Folgende Abbildung:



Da der Index sich nur um 1 unterscheidet ist  $\overline{\mathcal{L}}(p, c) = \mathcal{L}(p, c)$  eine endliche Ansammlung von Trajektorien. Für jede dieser Trajektorien  $\ell$  wähle eine Umgebung wie in Fig. 3.2 angedeutet:

Die Umgebung von  $P$  ist an den Seiten von den äußeren Trajektorien begrenzt und oben und unten von den Niveaumengen  $f^{-1}(\alpha + \varepsilon + \delta)$  und  $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ . Wir finden wie im Beweis von Satz 2.16 eine Kreisscheibe  $B \subseteq f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \cap W^u(p)$ , die transversal zu  $S_+(c)$  ist, vollständig in der gewählten Umgebung von  $P$  enthalten ist und eine Umgebung vom Schnittpunkt  $\ell \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$  ist. Die Existenz solcher Umgebungen transversal zu  $S_+(c)$  folgt aus der Smale-Bedingung. Außerdem wählen wir eine weitere kleinere Kreisscheibe  $B'$ , die die selben Eigenschaften wie  $B$  und sodass gilt  $B' \subsetneq B$ .

Die Scheibe in der Mitte vom Bild ist  $W^u(c) \cap f^{-1}[\alpha - \varepsilon, \infty)$ . Wir identifizieren diese Kreisscheibe mit

$$\{\ell\} \times W^u(c) \cap f^{-1}[\alpha - \varepsilon, \infty) \subseteq \overline{W}^u(c, \alpha - \varepsilon).$$

Wenn wir unsere Umgebung nun entlang der angedeuteten Pfeile ähnlich wie im Beweis von 1.20 „nach unten ziehen“, sodass  $B - B'$  auf den gefärbten Zylinderabschnitt  $\text{Im}(\Phi)$  und  $B'$  auf die mittlere Kreisscheibe abgebildet wird. Es ist möglich diese Abbildung so zu wählen, dass sie am Rand der Umgebung der oben gewählten Abbildung einspricht und dass es ein Homeomorphismus ist. //

Für einen beliebigen kritischen Punkt  $c$  funktioniert der Beweis ähnlich.  $\square$

**Satz 3.7** (Morse-Homologie ist zelluläre Homologie). *Es existiert eine Isomorphie von Kettenkomplexen zwischen dem zellulären Kettenkomplex  $(K_*, \partial)$ , der durch die CW-Zerlegung in instabilen Mannigfaltigkeiten durch Proposition 3.4 gegeben ist, und dem Morse-Komplex  $(C_*(M, (f, X)), \partial_X)$ .*

*Beweis.* Es sei  $F: C_k(M, (f, X)) \rightarrow K_k$  die lineare Abbildung, die den kritischen Punkt  $p$  auf die Zelle  $W^u(p)$  schickt. Dann bildet  $F$  Erzeuger auf Erzeuger ab, ist also offensichtlich ein linearer Isomorphismus. Wir wollen zeigen, dass  $F \circ \partial_X = \partial \circ F$ . Wir zeigen sogar, dass für kritische Punkte  $p$  und  $q$  mit Index  $k$  und  $k - 1$  die Zahl  $N(W^u(p), W^u(q))$ , also der Grad der Abbildung  $\psi_{W^u(q)} \circ \varphi_{W^u(p)}$  modulo 2 gleich der Zahl  $n_X(p, q)$ , also der Anzahl der Trajektorien von  $p$  nach  $q$  modulo 2 ist.

Da  $\mathcal{L}(p, q)$  0-dimensional ist, gilt  $\overline{\mathcal{L}}(p, q) = \mathcal{L}(p, q)$  und dann befinden sich im Rand von  $\overline{W}^u(p)$ , also

$$\bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \overline{\mathcal{L}}(p, c) \times W^u(c) \approx S^{k-1},$$

genau  $\#\mathcal{L}(p, q)$  disjunkte Kopien von  $W^u(q) \approx B^{k-1}$ . Jede dieser Kopien wird mit der Anbringungsabbildung  $\varphi_{W^u(p)}$  via der Inklusion auf die Zelle  $W^u(q)$  geschickt. Wenn

wir nun  $M$  mit der Abbildung  $\psi_{W^u(q)}$  kollabieren, dann ist  $\psi_{W^u(q)}(M)$  die 1-Punkt-Kompaktifizierung von  $W^u(q)$  und

$$\varphi_{W^u(p)} \circ \psi_{W^u(q)}|_{\{\lambda\} \times W^u(q)}$$

Ist die Inklusion von  $W^u(q)$  in ihre 1-Punkt-Kompaktifizierung. Wir wissen, dass  $W^u(q) \approx B^{k-1}$ , und dass die Kopien  $\{\ell\} \times W^u(q)$  in  $\partial \bar{W}^u(p)$  disjunkt sind, wir haben also die folgende Situation: Eine stetige Abbildung  $\Phi: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ , endlich viele disjunkte Kopien  $(\ell, B^{k-1}) \subseteq S^{k-1}$ , sodass ein Punkt  $*$  in  $S^{k-1}$  existiert, sodass

$$\Phi: (\ell, B^{k-1}) \rightarrow S^{k-1} - \{*\}$$

für jedes  $\ell$  ein Homeomorphismus ist und sodass

$$\Phi \left( S^{k-1} - \bigcup_{\ell} (\ell, B^{k-1}) \right) = \{*\}.$$

Es sei  $m$  die Anzahl der kopien von  $B^{k-1}$  in  $S^{k-1}$ . Wir benutzen die lokale Grad Formel (siehe zum Beispiel [9]):

Wähle einen von  $*$  verschiedenen Punkt  $y$  in  $S^{k-1}$ . Dann ist  $\Phi^{-1}(y) = \{x_{\ell}\}_{\ell}$  mit  $x_{\ell} \in (\ell, B^k)$ .  $\Phi: (\ell, B^k) \rightarrow S^{k-1} - \{*\}$  ist ein Homeomorphismus, also ist

$$\Phi_*: H_{k-1}((\ell, B^{k-1}), (\ell, B^{k-1}) - x_{\ell}) \rightarrow H_{k-1}(S^{k-1} - \{*\}, S^{k-1} - \{*, y\})$$

ein Isomorphismus, dann sind alle lokalen Grade 1 oder  $-1$ . Dann ist

$$\deg \Phi = \sum_{\ell} (\pm 1) = m \mod 2$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Zum Beispiel bei Hatcher [9] kann man nachlesen, wie für einen topologischen Raum die singuläre Homologie  $H_*(X)$  definiert wird. Insbesondere hängt diese nur vom topologischen  $X$  Raum ab. Hatcher zeigt auch:

**Satz 3.8.** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$H_k(X) \approx HC_k(X, \mathcal{E}).$$

Die zelluläre Homologie ist also nicht von der gewählten CW-Zerlegung abhängig und wir können schreiben

$$HC_*(X) := HC_*(X, \mathcal{E})$$

Da aber für eine kompakte Mannigfaltigkeit  $M$  und ein Morse-Smale Paar  $(f, X)$  gilt

$$HM_k(M, (f, X)) \approx HC_k(X),$$

folgt direkt:

**Satz 3.9.** *Die Morse-Homologie ist nicht vom gewählten Morse-Smale Paar abhängig, und wir können schreiben*

$$HM_*(M) := HM_*(M, (f, X))$$

### 3.3 Anwendungen

Die berühmten Morse Ungleichungen lassen sich, wie am Ende des ersten Kapitels erwähnt, sehr leicht aus den Eigenschaften der Morse-Homologie folgern. Außerdem sind einige bekannten Eigenschaften singulärer Homologie sofort ersichtlich.

**Satz 3.10** (Die Morse-Ungleichungen). *Es sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit und  $f$  ein Morse-Funktion auf  $M$ . Wir definieren:*

- $b_k(M) := \dim HM_k(M)$  ist die  $k$ -te Betti-Zahl.
- $\chi(M) := \sum_k (-1)^k \cdot b_k(M)$  ist die Euler-Charakteristik.
- $C_k$  ist die Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  mit Index  $k$ .

*Dann gelten die folgenden Ungleichungen:*

1.  $b_k(M) - b_{k-1}(M) + \cdots \pm b_0(M) \leq C_k - C_{k-1} + \cdots \pm C_0$
2.  $\chi(M) = \sum_k (-1)^k \cdot C_k$
3.  $b_k(M) \leq C_k$

*3. ist die so genannte schwache Morse-Unungleichung, denn sie folgt direkt aus 1.*

*Beweis.* Es sei  $X$  ein Pseudogradientenfeld welches die Smale Bedingung erfüllt.

2. Ist ein bekanntes Ergebnis über Kettenkomplexe, denn  $C_k = \dim(C_k(M, (f, X)))$ ,

1. Folgt sofort,

3. folgt aus 1.:

Subtrahiere die Ungleichung 1., bei der wir für  $k$  die Zahl  $k - 1$  einsetzen von der Ungleichung 1. □

**Satz 3.11** (Poincaré-Dualität). *Es sei  $M$  eine kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt für alle  $k \in \{0, \dots, n\}$ :*

$$HM_k(M) \approx HM_{n-k}(M)$$

*Beweis.* Es sei  $(f, X)$  ein Morse-Smale Paar. Die kritischen Punkte von  $f$  mit Index  $k$  sind kritische Punkte von  $-f$  mit Index  $n - k$ , und  $-X$  ist ein Pseudo-Gradientenfeld von

$-f$ . Die kritischen Punkte  $p$  mit Index  $k$  bilden eine Basis von  $C_k(M, (f, X))$  und auch von  $C_{n-k}(M, (-f, -X))$ . Es sei  $a^*$  das duale Element von  $a$ , dann können wir auch  $a^*$  als Basis von  $C_{n-k}(M, (-f, -X))$  wählen. Dann gilt  $C_{n-k}(M, (-f, -X)) = (C_k(M, (f, X)))^*$ , und per Definition ist dann das Differential im Kettenkomplex von  $-f$  ist gegeben durch die duale Abbildung

$$\partial_X^*: C_{n-k}(M, (-f, -X)) \longrightarrow C_{n-k-1}(M, (-f, -X)).$$

Es folgt die Behauptung. □

## Nachwort

Die Morse-Theorie bietet eine Fülle an Methoden, und sie benutzt auch Methoden aus vielen Ecken der Mathematik. Alleine in dieser Arbeit haben wir Methoden der Algebraischen Topologie, Homologische Algebra, endlich dimensionale Differentialgeometrie, der Analysis und der Analysis von Differentialgleichungen genutzt.

Morse-Theorie ist einer der Grundpfeiler der *Critical Point Theory*, die sich grob gesagt darauf spezialisiert topologische Invarianten, die von kritischen Punkten abhängen zu finden und anzunähern [12]. Wie in dieser Arbeit gesehen haben wir genau das getan:

Die Homologie, Betti-Zahlen und Euler-Charakteristik sind topologische Invarianten, die wir anhand der Indizes der kritischen Punkte berechnen oder annähern können.

## Literatur

- [1] Marston Morse. „The critical points of a function of  $n$  variables“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 33.1 (1931), S. 72–91. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: [10.2307/1989459](https://doi.org/10.2307/1989459). URL: <https://doi.org/10.2307/1989459>.
- [2] Hassler Whitney. „Differentiable manifolds“. In: *Ann. of Math. (2)* 37.3 (1936), S. 645–680. ISSN: 0003-486X,1939-8980. DOI: [10.2307/1968482](https://doi.org/10.2307/1968482). URL: <https://doi.org/10.2307/1968482>.
- [3] Arthur Sard. „The measure of the critical values of differentiable maps“. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 48 (1942), S. 883–890. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1942-07811-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1942-07811-6). URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1942-07811-6>.
- [4] Stephen Smale. „On Gradient Dynamical Systems“. In: *Annals of Mathematics* 74.1 (1961), S. 199–206. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1970311> (besucht am 02.09.2023).
- [5] John W. Milnor. *Morse theory*. Bd. No. 51. Annals of Mathematics Studies. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963, S. vi+153.
- [6] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by David W. Weaver. University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965, S. ix+65.
- [7] A. Dold. *Lectures on algebraic topology*. Bd. Band 200. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972, S. xi+377.
- [8] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Bd. No. 33. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, S. x+221.
- [9] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, S. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- [10] Michèle Audin und Mihai Damian. „Morse theory and Floer homology“. In: Universitext. Translated from the 2010 French original by Reinie Ern . Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2014. Kap. 1 - 4, S. xiv+596. ISBN: 978-1-4471-5495-2; 978-1-4471-5496-9; 978-2-7598-0704-8. DOI: [10.1007/978-1-4471-5496-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5496-9). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5496-9>.
- [11] Yanfeng Chen. *A brief History of Morse Homology*. <https://math.berkeley.edu/~alanw/240papers03/chen.pdf>. letzter Zugriff: 06.09.2023.
- [12] Francesco Mercuri, Paolo Piccione und Daniel Victor Tausk. *Classical and Modern Morse Theory with Applications*. <https://www.ime.usp.br/~piccione/Downloads/notascoloquio.pdf>. letzter Zugriff: 07.09.2023.

## Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über „*Morse-Theorie und Morse-Homologie*“ selbstständig von mir und ohne fremde Hilfe verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht wurden sind. Mir ist bekannt, dass es sich bei einem Plagiat um eine Täuschung handelt, die gemäß der Prüfungsordnung sanktioniert werden kann.

---

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit oder Teile daraus nicht anderweitig als Prüfungsarbeit eingereicht habe.

---

(Datum, Unterschrift)