Der Morse-Komplex und die Morse-Homologie

Eine Bachelorarbeit

Betreuerin Prof. Ursula Ludwig

Jakob Dimigen

Inhaltsverzeichnis

In der Morse Theorie werden glatte Abbildungen $f\colon M \to \mathbb{R}$, deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind untersucht. Anhand einer solcher Abbildungen lassen sich Rückschlüsse auf topologische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M ziehen. In dieser Arbeit wird der *Morse-Komplex* definiert, und gezeigt, dass dieser isomorph zu einem zellulären Kettenkomplex ist. Dafür wird anfangs eine kurze Einführung in die Morse-Theorie gegeben und grundlegende Begriffe definiert. Im zweiten Kapitel werden Morse Funktionen und Pseudo-Gradienten untersucht. Im dritten Kapitel wird bewiesen, dass der Morse Komplex ein Kettenkomplex ist und im letzten Kapitel wird anhand der erarbeiteten Theorie eine zelluläre Struktur auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstruiert, deren zellulärer Kettenkomplex isomorph zum Morse-Komplex ist. Zu guter letzt werden einige bekannte Eigenschaften der zellulären Homologie anhand der Morse Homologie bewiesen.

1. Einführung

Anschauliche Beispiele, vielleicht die zu den Deformations-Lemmata? Dann müsste ich aber auch noch die Deformations-Lemmata machen.

1.1. Höhenfunktionen

1.2. Nicht-Degeneriertheit und Index

Dieser Abschnitt folgt dem gleichnamigen Kapitel in CITE[milnor].

Definition 1.2.1 (Kritischer Punkt)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein *kritischer Punkt* von f ist ein Punkt $p \in M$, sodass $\mathrm{d}f(p) = 0$.

Bemerkung. Allgemeiner lassen sich kritische Punkte von glatten Abbildungen $f\colon M \to N$ definieren, siehe im Anhang Definition **??**.

Wir würden gerne eine Hessische Bilinearform für die Tangentialräume der Mannigfaltigkeit definieren, allerdings ist dies ein nicht ganz einfaches Unterfangen. Wir werden am Ende einen Begriff erhalten, der mit dem der gewohnten Hessischen Bilinearform im $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt, allerdings nur für kritische Werte definiert ist.

Definition 1.2.2 (Lie-Klammer)**.** Es seien X und Y Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Die *Lie-Klammer* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\mapsto [X,Y] := XY - YX \end{aligned}$$

Wobei

$$(XY - YX)(p)(f) = X(p)(Y(\cdot)(f)) - Y(p)(X(\cdot)(f))$$

Bemerkung. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Lie-Klammer tatsächlich eine Lie-Klammer ist, also dass sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $[\cdot,\cdot]$ ist $\mathbb{R}$-bilinear.
- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$

Proposition 1.2.3. *Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ glatt, p ein kritischer Punkt von f, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt:*

$$[X,Y](p)f = 0$$

Beweis. Es seien $(x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um p. Wir können ohne beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $X = g_X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = g_Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ für $g_X, g_Y \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left[g_X \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, g_Y \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right](p)(f) =& g_X(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(g_Y \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - g_Y(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\left(g_X \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
=& g_X(p) \cdot \left(\frac{\partial g_Y}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + g_Y(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)\right) \\
&- g_Y(p) \cdot \left(\frac{\partial g_X}{\partial x_j}(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + g_X(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \\
=& 0
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist Null wegen des Satzes von Schwarz und da p ein kritischer Punkt von f ist, also gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. □

Definition 1.2.4 (Hessische Bilinearform)**.** Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f. Es seien $x, y \in T_pM$. Wähle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X(p) = x$ und $Y(p) = y$. Definiere nun

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(p) = X(p)(Y(\cdot)f).$$

$\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ heißt *Hessische Bilinearform.*

Proposition 1.2.5. $\mathrm{d}^2 f(p)$ *hängt nicht von den gewählten Vektorfeldern X und Y ab und ist für alle kritischen Punkte eine symmetrische Bilinearform.*

Beweis. Bilinearität folgt direkt aus der Definition. Da p ein kritischer Punkt ist gilt

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(p) - \mathrm{d}^2 f(y,x)(p) = [X,Y](p)(f) = 0,$$

die Zuordnung ist also symmetrisch. Außerdem gilt

$$XYf(p) = X(p)(Y(\cdot)f) = x(Y(\cdot)f),$$

also hängt die Form nicht von X ab, und wegen der Symmetrie auch nicht von Y. □

Definition 1.2.6 (nicht-degeneriertheit, Index)**.** Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, p ein kritischer Punkt von f. Wir nennen p *nicht degeneriert*, falls die Bilinearform $\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ nicht ausgeartet ist. Der *Index* eines nicht degenerierten kritischen Punktes ist die maximale Dimension eines Untervektorraumes, auf dem $\mathrm{d}^2 f(\cdot,\cdot)(p)$ negativ definit ist.

Bemerkung. Nicht-Degeneriertheit und Index lassen sich auch über lokale Koordinaten definieren, aber nachzurechnen, dass diese Begriffe wohldefiniert sind ist recht aufwändig. Trotzdem wollen wir diese Sichtweise nicht vorenthaltern:
Es seien $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um den kritischen Punkt p. Dann ist $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ eine Basis des Vektorraums T_pM. Wir bekommen

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dann ist p nicht degeneriert genau dann wenn die Matrix

$$H_p^{\varphi}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

invertierbar ist. Der Index von p ist dann die Anzahl der negativen Eigenwerte von $H_p^{\varphi}(f)$. Der Index und die nicht-degeneriertheit hängen offensichtlich nicht von den gewählten Koordinaten ab, aber die Matrix $H_p^{\varphi}(f)$ schon.

Die Hessische Bilinearform lässt sich auch mithilfe von *Zusammenhängen* für alle Punkte von M definieren.

Bemerkung. Die beiden Begriffe Index und nicht-Degeneriertheit sind zentral in der Morse-Theorie und werden uns über die gesamte Arbeit begleiten. Auch der nachfolgende Satz wird in fast jedem Beweis genutzt:

Satz 1.2.7 (Morse-Lemma)**.** *Es sei p ein nicht degenerierter kritischer Punkt mit Index k einer glatten Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Dann existieren lokale koordinaten $\varphi = (x_1, ..., x_n)$, sodass in einer Umgebung U von p gilt:*

$$f = f(p) - x_1^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2$$

und

$$\varphi(p) = 0.$$

Der hier geführte Beweis für das Morse-Lemma ist in CITE[hirsch] zu finden. Bevor wir das Morse Lemma beweisen, benötigen wir eine Aussage aus der Linearen Algebra:

Lemma 1.2.8. *Es sei $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$ eine diagonale $n \times n$ Matrix mit Diagonaleinträgen ± 1. Dann gibt es eine Umgebung N von A im Vektorraum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen und eine glatte Abbildung $P\colon N \to GL_n(\mathbb{R})$, sodass $P(A) = E_n$ und falls $P(B) = Q$, dann gilt $Q^T BQ = A$.*

Beweis. Betrachte zuerst den Fall $n = 1$:
Dann ist $A = (\pm 1)$. Wähle $N = (0, 2)$ oder $N = (-2, 0)$, $P(B) := 1/\sqrt{|B|}$

Nun $n-1 \rightsquigarrow n$:
Es sei B eine symmetrische $n \times n$ Matrix, die nah genug an A ist, sodass $b_{11} \neq 0$ und das selbe Vorzeichen hat wie a_1. Betrachte die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{13}}{b_{11}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \cdot \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass

$$T^T BT = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(a_2, ..., a_n)$ ist invertierbar, und da die Determinante stetig ist, ist falls B nah genug an A ist die symmetrische Matrix B_1 auch invertierbar. Bemerke dass sowohl T als auch B_1 glatte Abbildungen definieren. Laut Induiktionsannahme existiert eine Matrix $Q_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ die glatt von B_1 abhängt, sodass $Q_1^T B_1 Q_1 = A_1$. Definiere nun $P(B) = Q$ durch $Q = TS$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Q^T BQ = S^T(T^T BT)S = A$. ☐

Beweis von Satz 1.2.7. Es sei U eine Karten Umgebung von p. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p = 0$ und $f(0) = 0$. Außerdem können wir mithilfe eines Korrdinatenwechsels annehmen, dass

$$A = H_0(f)$$

eine Diagonalmatrix mit ausschließlich Diagonaleinträgen ± 1 hat, denn da p nicht degeneriert ist ist A invertierbar.

Behauptung. Es existiert eine glatte Abbildung $x \mapsto B_x$ von M in die symmetrischen $n \times n$

Matrizen, sodass für $B_x = (b_{ij}(x))_{ij}$ gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) x_i x_j,$$

und sodass $B_0 = A$.

Beweis der Behauptung. Da $f(0) = 0$ bekommen wir mit dem Fundamentalsatz der Differenzial - und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x) - f(0) \\ =& \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(tx)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \\ =& \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i \mathrm{d}t \\ =& \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \mathrm{d}t \right) x_i \end{aligned}$$

Da $p = 0$ ein kritischer Punkt ist, gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ für alle i. Mit dem selben Argument sehen wir dann, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(stx) \mathrm{d}s \right) x_j.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}s \mathrm{d}t \right) x_i x_j.$$

Setze also

$$b_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}s \mathrm{d}t.$$

Dann gilt schon $B_0 = A$, und die Abbilfungen b_{ij} sind glatt, also auch $x \mapsto B_x$. //

Wir dürfen nun das vorherige Lemma 1.2.8 anwenden:
Sei $P \colon N \to GL_n(\mathbb{R})$ eine Abbildung wie in 1.2.8. Setze $P(B_x) := Q_x$ Definiere nun eine glatte Abbildung $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ durch $\varphi(x) = Q_x^{-1} x$ in einer Umgebung von 0. Wir rechnen nach, dass $\mathrm{d}\varphi(0) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Identität ist:
Schreibe $Q_x^{-1} = (q_{ij}(x))_{ij}$. Dann

$$\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} q_{1k}(x) x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} q_{nk}(x) x_k \right)$$

Also

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) =& \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}(x) x_k\right) \\
=& \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{ik}}{\partial x_j}(x) x_k + q_{ik}(x)\delta_{ki}\right),
\end{aligned}
$$

Wobei δ_{ki} das Kronecker Delta ist. Setzen wir also 0 in φ ein bekommen wir

$$
\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0) = q_{ij}(0).
$$

Das Differential von φ in 0 ist also gegeben durch

$$
Q_0^{-1} = P(B_0)^{-1} = P(A)^{-1} = E_n.
$$

Das differential an der Stelle 0 ist also invertierbar, und dann können wir mit dem Satz über die Umkehrfunktion annehmen, dass U klein genug ist, sodass φ eingeschräkt aufs Bild ein Diffeomorphismus ist. Dann ist φ eine Karte um 0. Setze $(y_1, ..., y_n) := \varphi$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x^T B_x x \\
=& (Q_x \varphi(x))^T B_x (Q_x \varphi(x)) \\
=& \varphi(x)^T (Q_x^T B_x Q_x) \varphi(x) \\
=& \varphi(x)^T A \varphi(x) \\
=& \sum_{i=1}^{n} a_{ii} y_i(x)^2.
\end{aligned}
$$

Das entspricht genau der gewünschten Form. □

Corrolar 1.2.9. *Nicht-degenerierte kritische Punkte sind isoliert.*

1.3. Klassische Morse Theorie on die Deformations-Lemmata

2. Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Morse-Funktionen und Pseudo-Gradienten zu definieren und ihre *allgegenwertigkeit* zu zeigen. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist das *Morse-Lemma*.

allgegenwertigkeit ist nicht so ein schönes Wort

2.1. Morse-Funktionen

Definition 2.1.1 (Morse-Funktion)**.** Eine Morse-Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind.

Proposition 2.1.2. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltikgeit. Für fast jeden Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f_p\colon M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ||x-p||^2 \end{aligned}$$

eine Morse-Funktion.

Beweis. Offensichtlich ist f_p glatt. $x \in M$ ist genau dann ein kritischer Punkt von f_p, wenn $T_xM \perp (x-p)$, denn das differential von f_p erweitert auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{d}f_p(x) = 2(x-p).$$

Also gilt

$$\mathrm{d}f_p(x)(v) = \langle 2(x-p), v\rangle.$$

$x \in M$ ist folglich genau dann ein kritischer Punkt von f_p, wenn T_xM orthogonal zu $(x-p)$ ist.

Bemerke, dass für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$, $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine Derivation X_p gilt

$$X_p(f) = \langle X_p(\varphi_1), \varphi_2\rangle + \langle \varphi_1, X_p(\varphi_2)\rangle.$$

Sei nun $x \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x, eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ von 0 und eine Immersion

$$h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die ein Diffeomorphismus $h\colon \Omega \to U \cap M$ ist. Schreibe

$$h(u_1, ..., u_n) = x(u_1, ..., u_n).$$

Dann bekommen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \langle 2(x-p), \frac{\partial x}{\partial u_i} \rangle$$

und

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle x-p, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right).$$

Betrachte nun das Normalrmalenbündel

$$NM = \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_x M\}$$

von M. (Wir haben $T_x M \subseteq T_x \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ via der Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \right)_i$.)

Behauptung. Der Punkt $p = x + v \in \mathbb{R}^n$ ist kritischer Wert von der Abbildung

$$E \colon NM \longrightarrow \mathbb{R}^n ; (x,v) \longmapsto x+v$$

genau dann, wenn die Matrix

$$H^{h^{-1}}_{(x,v)}(f_p) = \left(\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{ij} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \right)_{ij}$$

nicht invertierbar ist.

Bemerke: Mit dem *Satz von Sard* gilt dann, dass die Menge der kritischen Werte von E eine Nullmenge ist. Aber die Menge der kritischen Werte von E sind schon alle möglichen Punkte p, für die f_p nicht degenerierte kritische Punkte besitzt. Also folgt mit der Behauptung schon die Aussage des Satzes.

Beweis der Behauptung. Das orthogonale Komplement von $T_x M$ in $\mathbb{R}^n$ hat Dimension $n-d$. Es sei also $(v_1(x), ..., v_{n-d}(x))$ eine Basis von $(T_x M)^\perp$. Dann ist

$$(u_1, ..., u_d, t_1, ..., t_{n-d}) \longmapsto \left(x(u_1, ..., u_n), \sum_{k=1}^{n-d} t_k \cdot v_k(u_1, ..., u_d) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von NM als Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n$. Dann bekommen wir in lokalen Koordinaten:

$$E(u_1, ..., u_d, t_1, ..., t_{n-d}) = x(u_1, ..., x_d) + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \cdot v_k(u_1, ..., u_d),$$

also haben wir partielle Ableitungen

$$\frac{\partial e}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial t_j} = v_j$$

Nun ein kleines Ergebnis aus der Linearen Algebra:
sind $v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$ und $u_1, ..., u_n$ linear unabhängig, dann ist

$$(v_1 \, ... \, v_n)^T \cdot (u_1 \, ... \, u_n) = (\langle v_i, u_j \rangle)_{ij},$$

Also

$$\operatorname{rank}(v_1 ... v_n) = \operatorname{rank}(\langle v_i, u_j \rangle)_{ij}.$$

Die Vektoren $\frac{\partial x}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial x}{\partial u_d}, v_1, ..., v_{n-d}$ sind linear unabhängig. Außerdem ist $\frac{\partial x}{\partial u_l}$ orthogonal zu v_k, also hat die Matrix mit Einträgen die Skalarprodukte dieser linear unabhängigen Vektoren mit den obigen partiellen Ableitungen vob E die Form

$$\begin{pmatrix} \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle\right)_{ij} & \left(\sum_{k=1}^{n-d} \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, v_j \right\rangle\right)_{ij} \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang $< n$ genau dann, wenn

$$\operatorname{rank}\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle\right)_{ij} < d,$$

Aber da v_k und $\frac{\partial x}{\partial u_j}$ orthogonal aufeinander stehen gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle v_k, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle + \left\langle v_k, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$$

Also

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - \sum_{k=1}^{n-d} t_k \left\langle v_k, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle - \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. //

□

2.2. Topologische Eigenschaften anhand von Morse-Funktionen

2.3. Pseudo-Gradienten

3. Der Morse-Komplex

In diesem Kapitel wird der Morse Komplex definiert und gezeigt, dass der Morse-Komplex ein Kettenkomplex ist.

4. Morse-Homologie und zelluläre Homologie

In diesem Kapitel wird aus einem Morse-Smale Paar auf einer Mannigfaltigkeit eine zelluläre Struktur dieser Mannigfaltigkeit konstruiert. Dann werden wir sehen, dass der Kettenkomplex, der von dieser Struktur induziert wird schon mit dem Morse-Komplex übereinstimmt. Somit stimmt die Morse-Homologie mit der zellulären Homologie überein, also auch mit der singulären Homologie.

A. Anhang

Definition A.0.1 (Mannigfaltigkeit CITE[ludwig]). Es sei M ein topologischer Raum.
Eine *Karte* von M ist ein Tupel (U, φ), wobei $U \subseteq M$ offen und $\varphi\colon U \to U' \in \mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus ist.
$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ist ein *n-dimensionaler Atlas* von M falls

1. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist eine Karte für jedes $\alpha \in I$

2. $M = \bigcup_{\alpha \in I U_\alpha}$

Ein Atlas ist C^k für $k \in \{\mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}\}$, falls für alle $\alpha, \beta \in I$ der *Koordinatenwechsel*

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

C^k ist.
Eine Karte (U, φ) heißt C^k *kompatibel* mit einem C^k Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, falls für alle $\alpha \in I$ die Koordinatenwechsel $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ C^k sind.
Eine *n-dimensionale C^k Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M zusammen mit einem maximalen C^k Atlas $\mathcal{A}$, sodass M ein Hausdorff-Raum und zweitabzählbar ist. Maximal bedeutet hier, dass es keine mit $\mathcal{A}$ C^k kompatiblen Karten gibt, die nicht in $\mathcal{A}$ enthalten sind.
Eine Mannigfaltigkeit heißt *glatt* falls $k = \infty$.
Für einen Punkt $p \in M$ und eine Karte (φ, U) mit $p \in U$ heißen $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ *lokale Koordinaten* um p.

Bemerkung. Wenn der Atlas einer Mannigfaltigkeit angegeben wird, dann nie als maximaler Atlas. Es reicht ein Atlas, alle anderen Karten sind dann schon impliziert.

Definition A.0.2 (Differenzierbarkeit)**.** Sind M, N C^k Mannigfaltigkeiten, $\mathcal{A} = (\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas von M, $\mathcal{B} = (\varphi_\beta, U_\beta)_{\beta \in J}$ ein Atlas von N, dann heißt eine Abbildung C^k oder *k-mal differenzierbar*, falls für alle $\alpha \in I$ und $\beta \in J$ die Abbildung

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

C^k ist.

Definition A.0.3 (Tangentialraum)**.** Der Tangentialraum einer C^k Mannigfaltigkeit M an einem Punkt $p \in M$ ist

$$T_pM := \left\{ X_p \colon C^k \to \mathbb{R} : X_p \text{ ist eine Derivation von } M \text{ an dem Punkt } p \right\}$$

Wobei $X_p : C^k \to \mathbb{R}$ ein *Derivation* ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- X_p ist linear
- Für X_p gilt die Leibnitz-Regel, also

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g + f \cdot X_p(g)$$

Dann ist T_pM ein Untervektorraum von $C^k(C^k(M))$.

Für eine C^k Abbildung $f\colon M \to N$ und einen Punkt $p \in M$ ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p)\colon T_pM &\to T_{f(p)}N \\ X_p &\mapsto f_*X_p \end{aligned}$$

wobei f_*X_p definiert ist durch

$$f_*X_p(g) = X_p(g \circ f)$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned} T\colon \mathbf{Man}_* &\to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\ (M,p) &\mapsto T_pM \\ f &\mapsto \mathrm{d}f(p) \end{aligned}$$

Ist ein Funktor.

Bemerkung. Es sei M eine C^k Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, $p \in M$ und $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um p. Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(p) : C^k(M) &\to \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x_i}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

Dann ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von T_pM.
Für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$, einem Punkt $p \in M$ und lokale Koordinaten $(x_1, ..., x_n)$ um p und $(y_1, ..., y_m)$ um $f(p)$ bekommen wir in einer Umgebung von p wohldefinierte Abbildungen $f_i = y_i \circ f$. Dann ist das differential $\mathrm{d}f(p)$ von f gegeben durch die Matrix

$$D_p(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}.$$

Definition A.0.4. Es seien M, N C^k Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ C^k. Dann ist $p \in M$ ein kritischer Punkt von f, falls $\mathrm{d}f(p)$ nicht surjektiv ist. $f(p)$ heißt dann kritischer Wert von f.

Satz A.0.5 (Whitney's Einbettungssatz, CITE[hirsch])**.** *Es sei M eine n-dimensionale kompakte C^r Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine C^r Einbettung von M in $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Finde eine Quelle ohne Kompaktheit

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit sigar in den $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet werden. Diese Version des Satzes heißt *starker Whitney's Einbettungssatz.*