繰り返しゲーム

２０１９年１２月９日

ゲーム理論入門　第9回講義

荒木一法

繰り返しゲーム

- これまでに扱ったゲームの事例（値下げ競争ゲームなど）が繰り返しプレイされる状況全体を一つのゲームとして扱う。このとき繰り返される元のゲームは全体ゲームと区別して、ステージ・ゲーム(stage game)と呼ばれる。
  - 有限回繰り返しの場合：部分ゲーム完全均衡は一つに絞られるが、実際に観察される現象と一致しない。
  - 無限回繰り返しの場合：部分ゲーム完全均衡は数多く存在（フォーク定理） ⇒ 絞込みの失敗！

第7章　繰り返しゲーム

1. 繰り返し囚人のジレンマ
2. フォーク定理
3. 利己的行動と利他的行動
4. 不完全情報とシグナル

２　フォーク定理

- 両者が「トリガー」を取り続ける限りCの選択が続くき、基準化された利得ベクトル(7,7)がナッシュ均衡で実現する。
- 他のパターン（例えばCとDを交互にえらぶパターン）からの逸脱にたいして「トリガー」をとる戦略を考えれば、やはり十分に大きなδについて（トリガー, トリガー）がナッシュ均衡になる。このとき基準化された利得は(3, 3)　となる。
- 同様に様々なパターンからの逸脱に対するトリガーを想定し、δを十分に大きく（１に十分に近く）とれば、次の図の赤の斜線部分（個人合理的な利得）に「ほぼ」対応する基準化された利得の組み合わせが均衡として支持される　⇒　**「フォーク定理」**

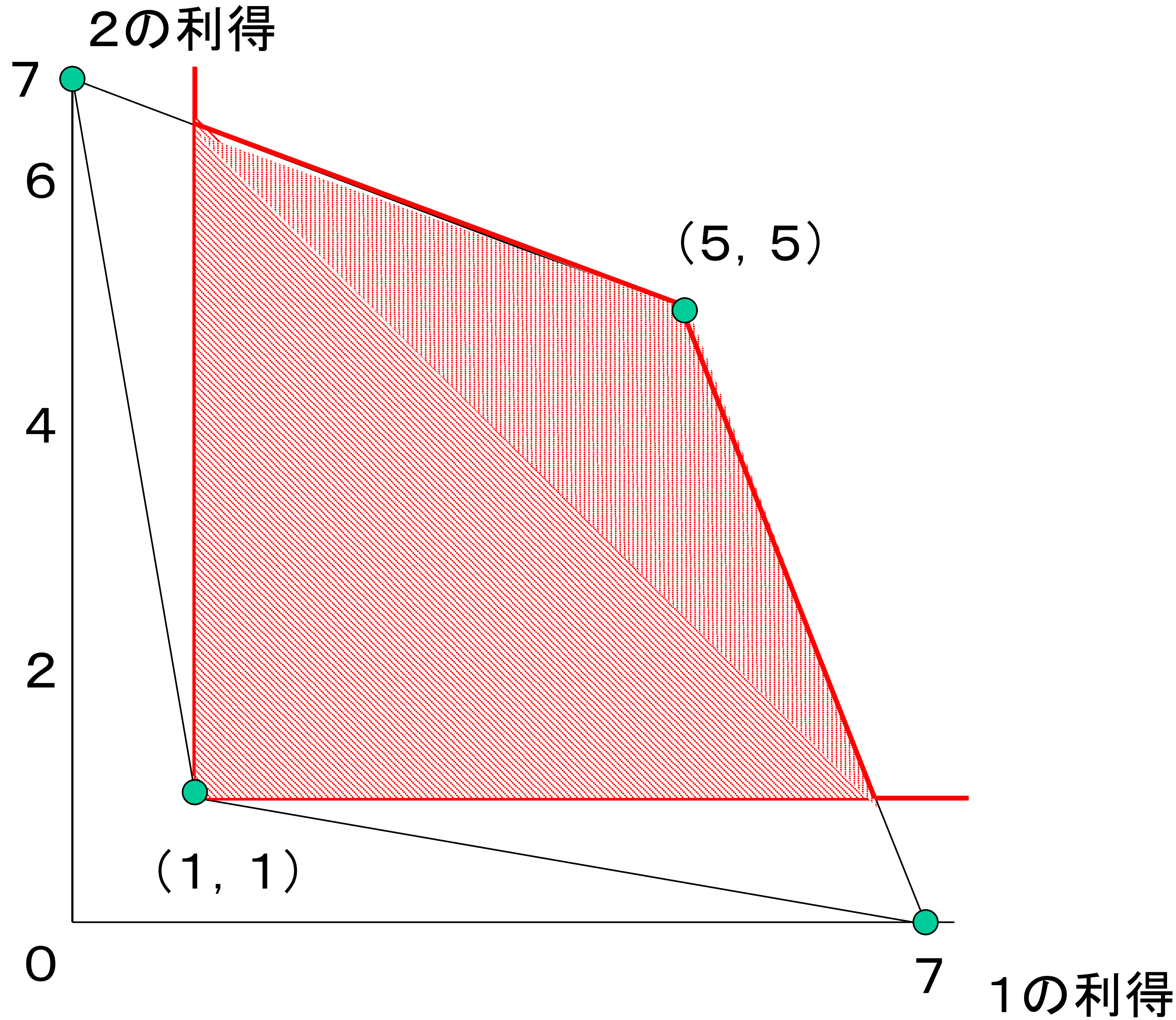
個人合理的な利得

- 相手の「裏切り」に対する最大のペナルティーは、相手の利得を最小化する行動
- 一方、ペナルティを受ける側は相手のどのような行動に対しても自らの利得を最大化するよう試みるはず

以上から、ペナルティを与える側にとっては、ミニ・マックス戦略（第３回講義で解説）が最も有効な相手の裏切りに対する処罰となる。逆にペナルティを受ける側はミニ・マックス値よりも低い利得に甘んじることは非合理的であるから、ミニ・マックス値以上の利得が個人合理的利得を呼ばれる。

囚人のジレンマ

1 \ 2	協力（C）	裏切り（D）
協力（C）	5, 5	0, 7
裏切り（D）	7, 0	1, 1


2の利得
7
6
(5, 5)
4
2
(1, 1)
0
7
1の利得

フォーク定理の直観的理解

（フォーク定理）各プレーヤーの利得を基準化（割引現在価値に$1-\delta$を乗じる）して評価した場合、全ての個人合理的な利得ベクトル（赤の斜線部）は割引率が1に十分に近いときナッシュ均衡となる。

（定理が成立する直観的理由）

つぎのような（トリガー、トリガー）は、個人合理的な利得ベクトルが実現するナッシュ均衡となる。

トリガー：任意の個人合理的利得ベクトルを実現する行動選択が行われているかぎりは、それを継続、逸脱した場合は以後Dを選び続ける。

暗黙の協調

第4回講義で解説したクールノーモデルのナッシュ均衡は

$x_1{}^* = x_2{}^* = \frac{A-c}{3B}$ 均衡価格は $p = \frac{A+2c}{3}$ 利潤は

$$\pi_1{}^* = \pi_2{}^* = \frac{(A-c)^2}{9B}$$

一方、二つの企業が利潤の合計を最大化するように独占利潤を最大化する生産量の半分づつを生産・販売した場合の生産量、価格、利潤はそれぞれ

$x_1{}^* = x_2{}^* = \frac{A-c}{4B}$ $p = \frac{A+c}{2}$ $\pi_1{}^* = \pi_2{}^* = \frac{(A-c)^2}{8B}$

フォーク定理は、繰り返しゲームにおいてはナッシュ均衡のおける基準化された利潤を上回る利潤（上記の独占利潤の半分も含む）がナッシュ均衡において実現することを意味する。

完全フォーク定理

フォーク定理は「繰り返しゲームでは個人合理的な利得が実現するナッシュ均衡が存在する」ことを主張する。一方、個人合理的な利得が実現する部分ゲーム完全均衡が存在するかどうかは自明ではない。

　その理由は、ペナルティを与えるという行為が、ペナルティを受ける側だけでなく与える側にとってもコストを伴うことにある。しかし、一定の追加条件のもとでは、個人合理的な利得に“ほぼ”等しい利得が部分ゲーム完全均衡として支持されることが証明できる。 ⇒ 完全フォーク定理

３　利己的行動と利他的行動

利他的行動を利己的動機で説明できるか？

「情けは人のためならず」を繰り返しゲームで考える

ステージゲームは次の「贈り物ゲーム」

- ２人のプレーヤー1と2が互いに贈り物をする、しないを決める
- ２人のプレーヤーの利得（効用）関数は$u_i = x_1 \cdot x_2$（x_1は財1、x_2は財2の保有量)
- プレーヤー1の財1、2の初期保有量は(5, 1)、プレーヤー2の初期保有量は(1, 5)
- 各プレーヤーは、多く保有している財を1単位、他のプレーヤーに「贈る(C)」か「贈らない(D)」を決める

贈り物ゲーム

2 / 1	贈る（C）	贈らない（D）
贈る（C）	8, 8	4, 10
贈らない（D）	10, 4	5, 5

互恵的利他主義

- 贈り物ゲームは、"囚人のジレンマ"と同じ構造をしているので、１回限りであれば、ナッシュ均衡はただ一つ(D,D)、有限回の繰り返しゲームでも部分ゲーム完全均衡はただ一つ毎回(D,D)
- 各回の利得の割引現在価値を利得とする無限回繰り返しゲームでは、（しっぺ返し、しっぺ返し）戦略の組がナッシュ均衡となるので、毎回(C,C)が続く、「利他的」行動が均衡として支持される。このとき「利他的」行動は互恵(reciprocity)関係によって「合理的」行動となっている。

４　不完全情報とシグナル

ここまでの議論は完全情報ゲーム（プレーヤーが過去のゲームの展開を完全に把握しているゲーム）を対象としていた。しかし、特に長い繰り返しゲームにおいて、過去の展開を完全に把握しているという仮定は、必ずしも現実的ではない。

　これに対し、不完全情報ゲームでは、相手の「裏切り」行為を確実には観測できない、あるいは記録できないと仮定し、相手の行動選択に関する不完全なシグナルに依拠して意思決定を行うプレーヤーを仮定する。このとき、シグナルは相手の行動を正確には示さないのでノイズを含むシグナルと呼ばれる。

ベルトラン（価格競争）モデル

- ２つの企業がともに費用0で完全に同質な財を生産
- 各企業は価格を戦略変数として、価格を同時に決定
- 低い価格の企業の需要は$D(p) = 1 - p$、利潤は$p(1 - p)$ 、一方、高い価格の企業の需要、利潤は0となり、両企業が同じ価格を設定すると各企業の需要は総需要の1/2となる。

このゲームのナッシュ均衡は$p_1 = p_2 = 0$

独占価格は$p = \frac{1}{2}$、独占利潤は$\frac{1}{4}$

両企業が共謀すれば、それぞれ独占利潤の半分を得ることができる。

不完全情報ゲームの例

このベルトランゲームに次の仮定を加える。

- 相手の価格は観察できないが、自らの製品に対する需要は観察できる。
- 各社に対する需要は、好景気の場合（確率$1-r$）は前のスライドと同じ$1-p$であるが、不景気の場合（確率r）で価格にかかわらず0となる。需要量は観察できるが、企業は好景気か不景気かは判別できない。

これらの仮定のもとでは、自企業の製品に対する需要が0となった場合、それが不景気によるものか、あるいは相手の裏切りによるものかを判別できない。このモデルでは需要量がノイズをともなうシグナルとなっている。

この例の均衡は？