統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

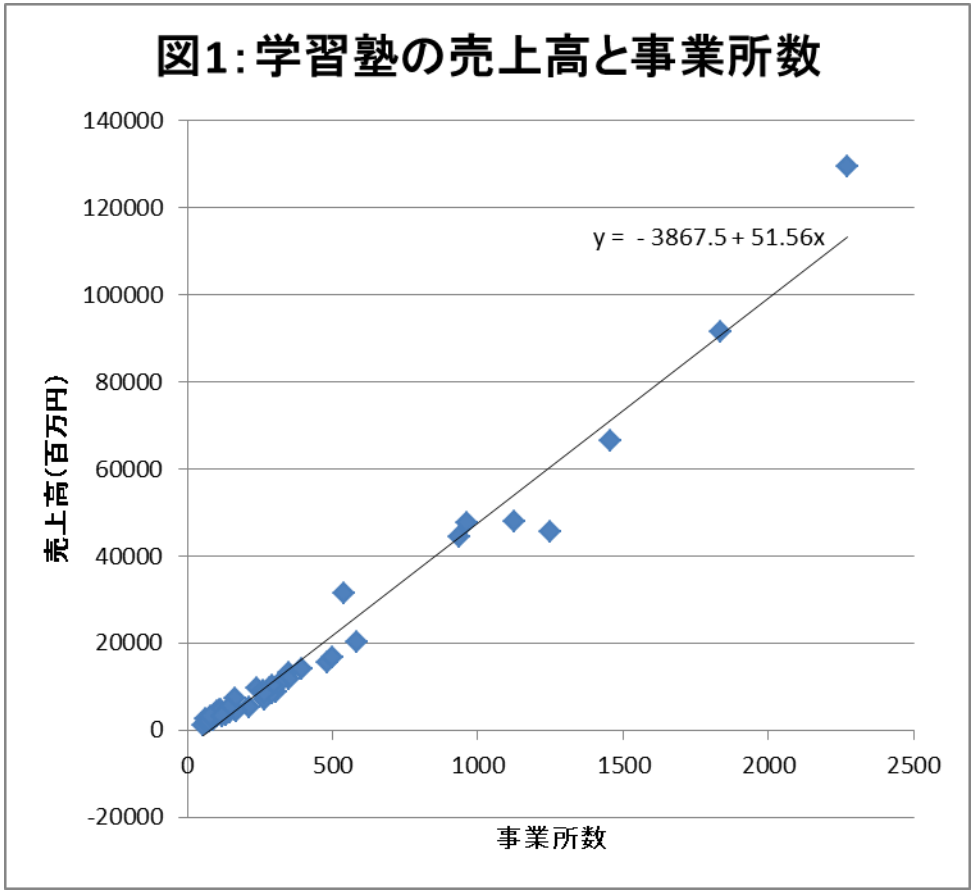
本日の目標

- 回帰分析の発展
  - 変数変換の利用
    - 対数変換
  - 複数（2つ）の説明変数
    - 平面の当てはめ
- PC実習

曲線的な関係(1)

- 都道府県別学習塾数と売上高
  - y = (都道府県別学習塾売上高 100万円）（平成28年）
  - x = (都道府県別学習塾事業所数)（平成28年）
  - 秋田県・鳥取県の売上高：X と書いてある。
    - 県内に事業所が少ない。→ 秘匿処置
  - これらの県のおおよその売上高を推定する。

曲線的な関係(2)



資料:総務省・経済産業省「平成28年 経済センサス-活動調査」

曲線的な関係(3)

- 散布図からの所見
  - 正の相関がある。
    - x が小さいところに観察点が集中している。
    - x が大きくなるにつれて y 軸方向のばらつきも拡大する傾向がある。
  - 最小二乗法による回帰式
    - $y = -3867.5 + 51.6\,x,\ R^2 = 0.97$
      - 秋田県 $x = 52 \rightarrow \hat{y} = -1186$（負の売上高？）
      - 鳥取県 $x = 81 \rightarrow \hat{y} = 309$（$x$が同じ宮崎県の3149より小さい）

曲線的な関係(4)

- 直線を当てはめるに無理がある。
  - 曲線的な傾向がある。
  - そのまま最小二乗法を適用するのは危険である。

変数変換の利用(1)

- もともとの関係が、直線ではない（曲線である）可能性がある。
  - 直線による近似に無理がある。
- 曲線的な関係をどのようにあつかうか。
  - 変数変換によって直線化する。
    - 常用対数変換: $y' = \log_{10} y$
    - 逆数変換: $y' = 1/y$
    - ベキ乗変換: $y' = y^p$

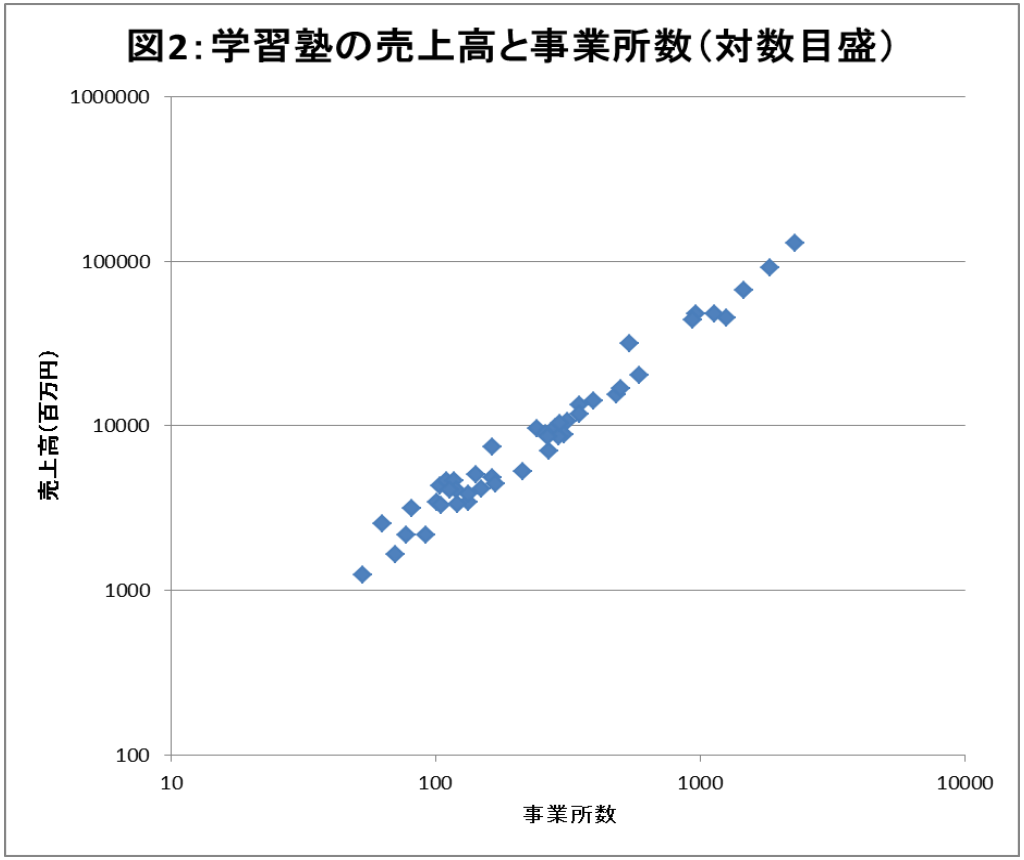
変数変換の利用(2)

- なかでも、対数変換がよく使われる。
  - 理由：解釈がしやすい。
  - 説明：
    - x が1%増加すると、y がb%変化する。
      - 乗法モデル $y = a\,x^b$
        - » b は弾力性とよばれる。
      - 通常のモデルは加法のモデルと呼ばれる。
        $y = a + bx$（xが1単位増加すると y がb単位変化）

変数変換の利用(3)

- 対数の性質をもちいると、
  - $y = ax^b$
    $\Leftrightarrow \log_{10} y = \log_{10} a + b \log_{10} x$
  - $y' = \log_{10} y$, $x' = \log_{10} x$, $a' = \log_{10} a$ とすれば、$y' = a' + bx'$
    - 「対数変換してほぼ直線関係で近似できれば、変化率の間の関係が安定的である」ことを意味する。

変数変換の利用(4)



資料：総務省・経済産業省「平成28年 経済センサス-活動調査」

変数変換の利用(5)

- 対数変換したデータに最小二乗法を適用
  - 推定結果
    - $\log_{10} \hat{y} = 1.21 + 1.14 \log_{10} x \qquad R^2 = 0.97$
  - 推定結果を以下のように書き換える。
    - $\hat{y} = 10^{1.21} x^{1.14}$
  - 秋田県と鳥取県の売上高の推定値
    - 秋田県 $\hat{y} = 10^{1.21} \times 52^{1.14} \approx 1449$
    - 鳥取県 $\hat{y} = 10^{1.21} \times 81^{1.14} \approx 2402$

変数変換の利用(6)

- 弾力性=1.14 > 1
  - y の変化率（増加率）> x の変化率（増加率）
    → 散布図が尻上がり形状
  - 「y が x に対して弾力的である」という。
- 弾力性=(y の変化率)/(x の変化率)
  - 弾力性 > 1: 弾力的（尻上がり）
  - 弾力性 = 1: 比例関係
  - 0 < 弾力性 < 1: 非弾力的（頭打ち）

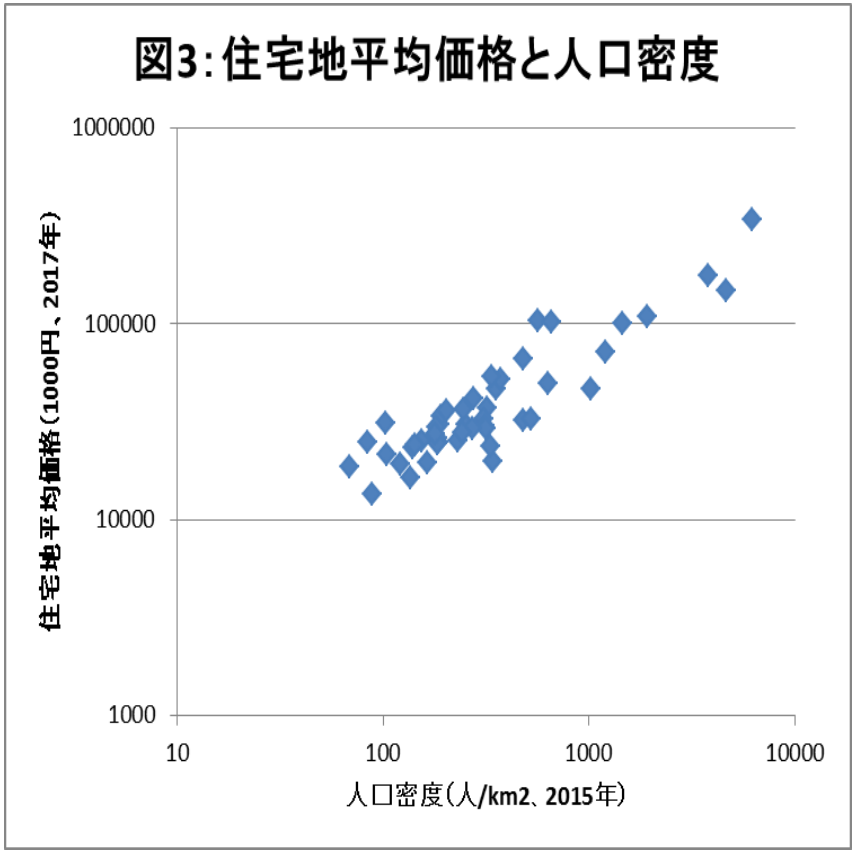
変数変換の利用(7)

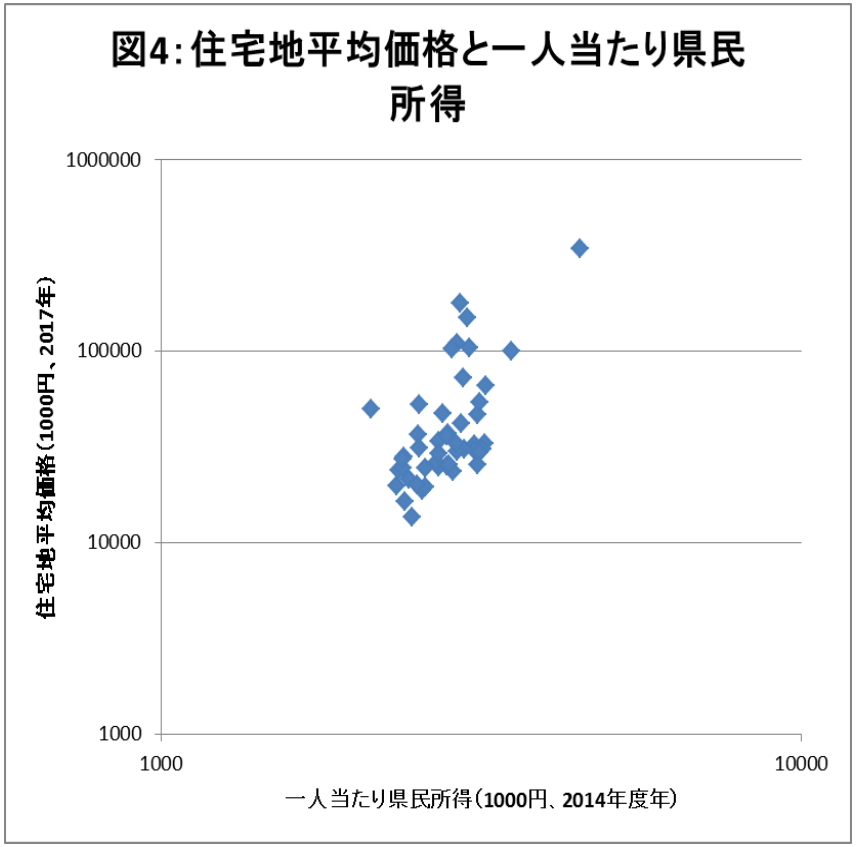
- 加法モデルと乗法モデル
  - どちらを用いるかは経験的に（実際に当てはめて）判断する場合が多い。
- 対数以外の変数変換も利用される。
  - 対数変換は係数の解釈（弾力性と解される）がしやすいので多用される。

2つ説明変数 (1)

- 都道府県別の住宅地の価格
  - 決定要因
    - 宅地を求める人の数 → 人口密度
    - 所得水準 → 一人当たり県民所得
  - 両者は異なる側面を捉えている。
    - 2つの変数が異なる影響をもつので、同時に説明要因に取り入れたい。

2つ説明変数 (2)





資料:総務省(2018)『第68回日本統計年鑑』表20-11、表2-3、表3-10

2つ説明変数 (3)

- 2つの説明要因をもつ回帰式
  - $\log y_i = a + b \log x_i + c \log z_i$
    - y: 住宅地平均価格
      （2017年7月1日、円/m^2）
    - x: 人口密度
      （2015年10月1日, 人/km^2）
    - z: 一人当たり県民所得
      （2014年度, 1000円/人）
  - どのように回帰係数 a, b, c を求めるか。

最小二乗法(1)

- 回帰係数 a, b, c をどう決めるか？
  ⇔回帰平面の位置をどう決めるか？
  - 当てはまりがもっともよくなるように。
    ⇔
    説明変数で説明できない部分（残差）が全体としてもっとも小さくなるように。
    ⇔
    最小二乗法の考え方が使える。

最小二乗法(2)

以下の説明では、$\log y_i$ などをあらためて y_iなどと表記している。

最小二乗法

$$\min \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a - b\, x_i - c\, z_i \right)^2$$

この最小化問題の解 ⇔ 下の正規方程式の解

$$\begin{cases} N\,a + \left(\sum_i x_i\right) b + \left(\sum_i z_i\right) c = \left(\sum_i y_i\right) \\ \left(\sum_i x_i\right) a + \left(\sum_i x_i^2\right) b + \left(\sum_i x_i z_i\right) c = \left(\sum_i x_i y_i\right) \\ \left(\sum_i z_i\right) a + \left(\sum_i z_i x_i\right) b + \left(\sum_i z_i^2\right) c = \left(\sum_i z_i y_i\right) \end{cases}$$

最小二乗法(3)

– 平方和の分解も成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{N}d_i^2$$

$$SS_T \qquad SS_R \qquad SS_E$$

ただし、$\hat{y}_i=a+bx_i+cz_i$

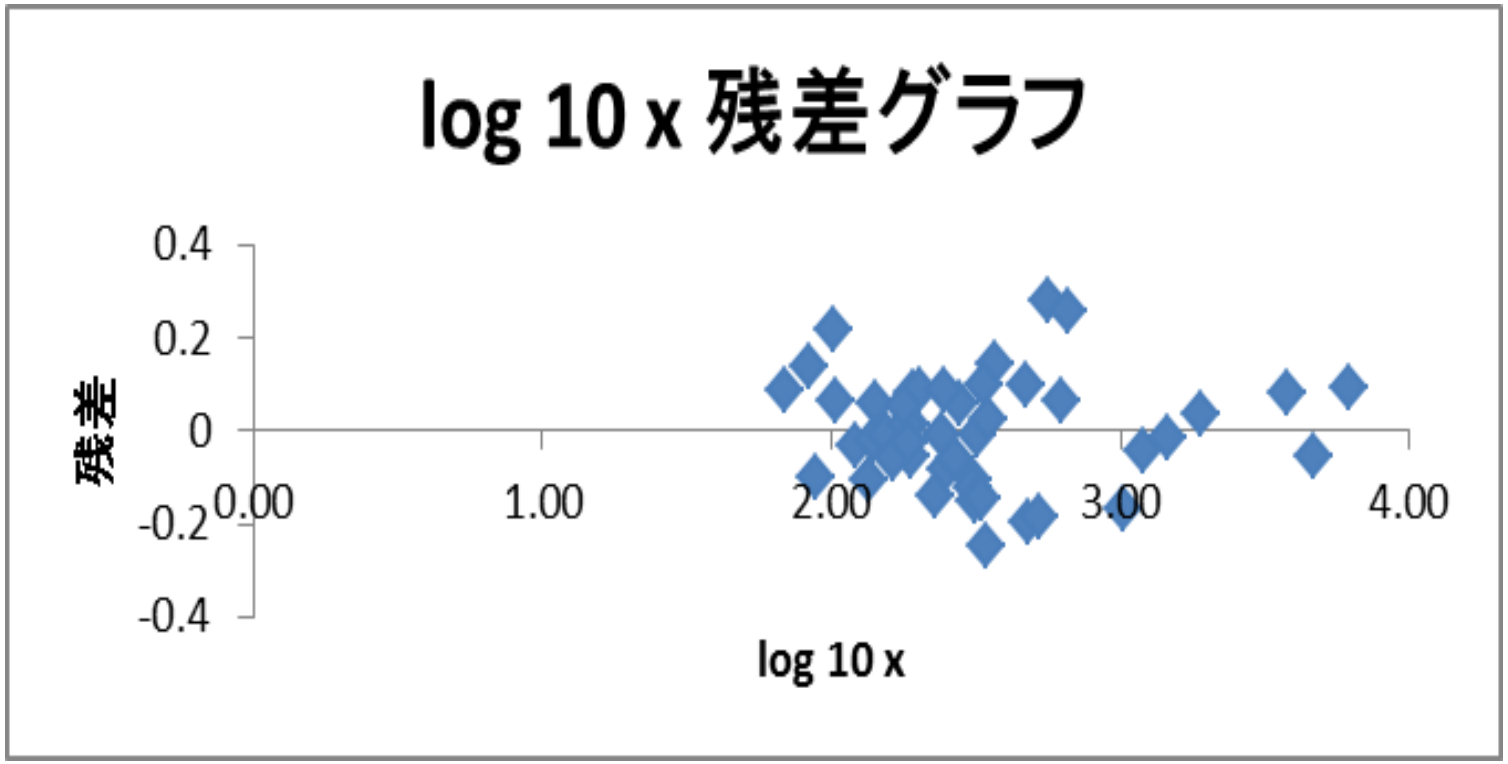
– したがって、$R^2=SS_R/SS_T$ も計算でき、意味も以前と同じである。

回帰平面の推定(1)

- 平面の当てはめの結果
  - $\log \hat{y}_i = 0.22 + 0.53 \log x_i + 0.88 \log z_i \;\; R^2 = 0.84$
  - 係数の符号は常識に合う結果である。
    - x(人口密度)の係数 > 0
      - 人口密度が高い⇒住宅地価格は高い。
    - z(一人当たり県民所得)の係数 > 0
      - 所得水準が高い⇒住宅地価格は高い。

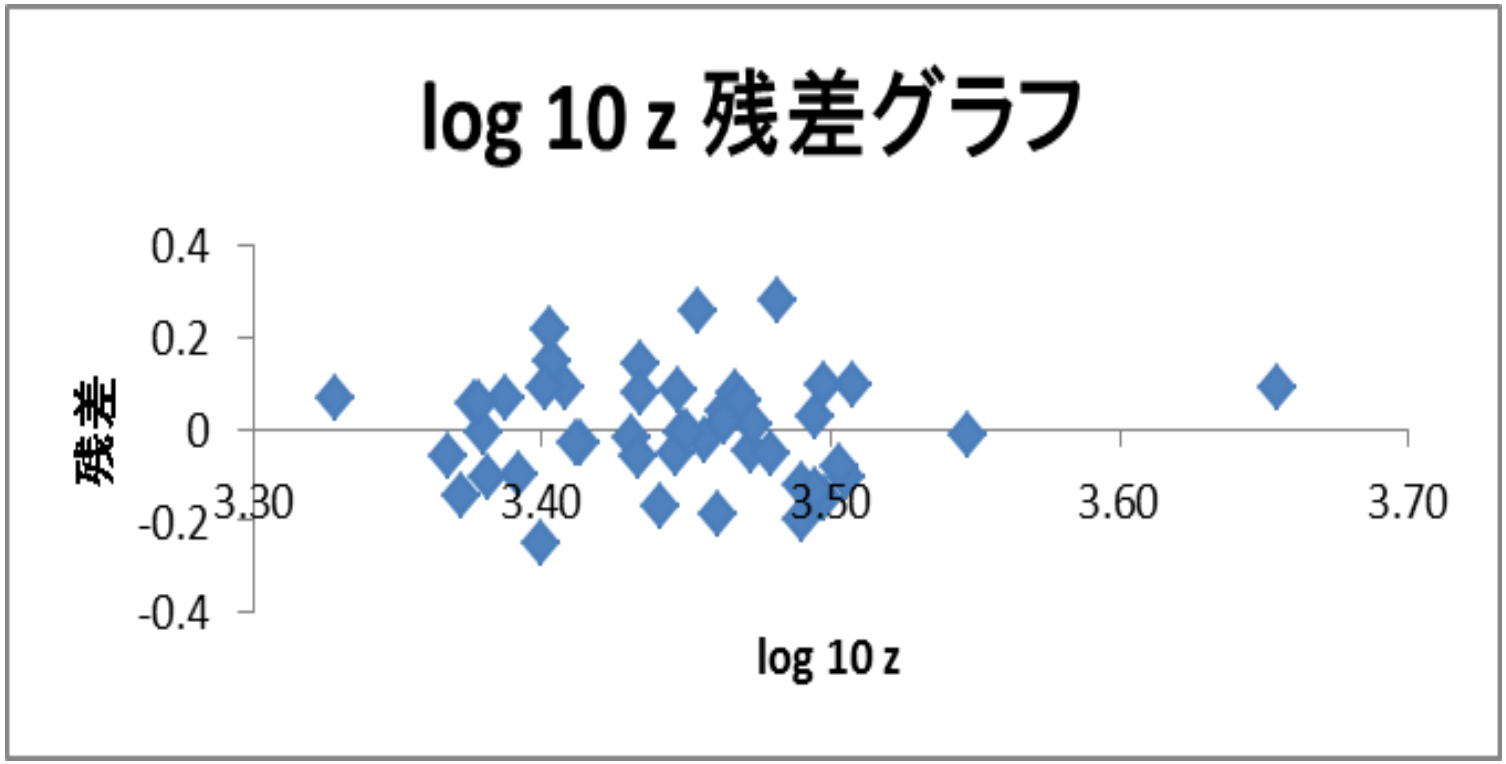
回帰平面の推定(2)

図5：人口密度（対数変換）の残差プロット



回帰平面の推定(3)

図6：一人当たり県民所得（対数変換）の残差プロット



回帰平面の推定(4)

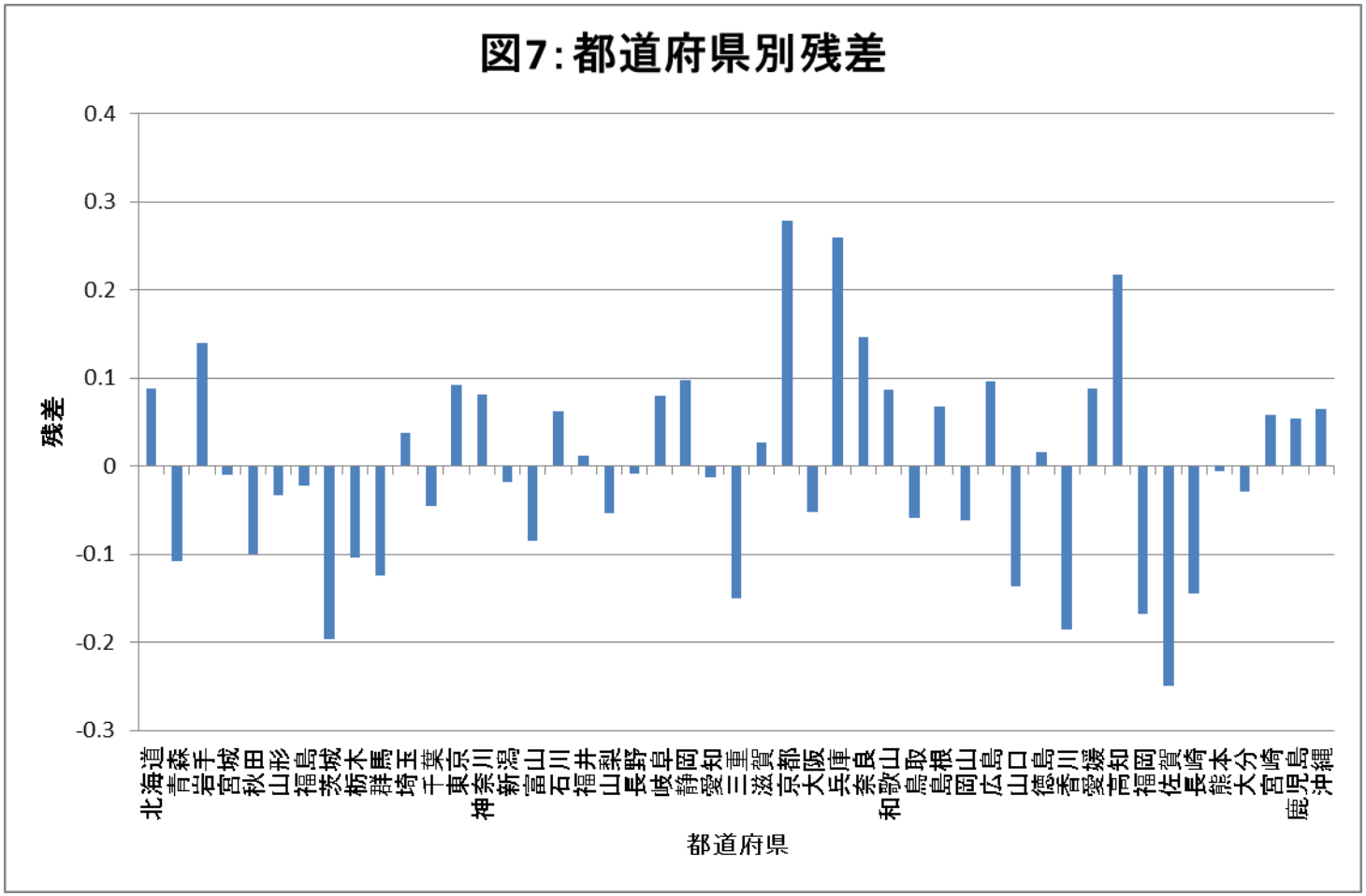


図7：都道府県別残差
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
残差
北海道
青森
岩手
宮城
秋田
山形
福島
茨城
栃木
群馬
埼玉
千葉
東京
神奈川
新潟
富山
石川
福井
山梨
長野
岐阜
静岡
愛知
三重
滋賀
京都
大阪
兵庫
奈良
和歌山
鳥取
島根
岡山
広島
山口
徳島
香川
愛媛
高知
福岡
佐賀
長崎
熊本
大分
宮崎
鹿児島
沖縄
都道府県

PC実習

- 変数変換
  - 散布図における対数変換
  - 変数変換を利用した回帰分析
- 分析ツールを利用した回帰式の推定
  - 散布図の描画（省略）
  - 回帰係数の推定
  - 残差プロットの描画（省略）