ゲーム理論入門第 2 回課題　解答見本（兼、試験対策用プリント）

注 1）丸写しは避けてください！

注 2）答えの後に、簡単な解説も付けています。試験勉強に必要な方は、ご利用ください。

注 3）本プリントは Waseda Vision Student Competition に参加しています、チーム Wasevestment のサポートによって成立しています。本プリントを利用された方は、Waseda Vision Student Competition の特設ページから、Wasevestment に「いいね！」をお願いします。投票法については、「答え」と「解説」の間のページをご参照ください。

【1】答え

・A の戦略集合＝｛1 回目 U に B の返答が U なら 2 回目 U/ 1 回目 U に B の返答が U なら 2 回目 D/ 1 回目 U に B の返答が D なら 2 回目 U/ 1 回目 U に B の返答が D なら 2 回目 D/ 1 回目 D に B の返答が U なら 2 回目 U/ 1 回目 D に B の返答が U なら 2 回目 D/ 1 回目 D に B の返答が D なら 2 回目 U/ 1 回目 D に B の返答が D なら 2 回目 D｝（…波線，下線，二重線を引いたペアについては、2 回目の A の反応は利得に影響しない）

・B の戦略集合＝｛A=U なら U、A=D なら U/ A=U なら U。A=D なら D/ A=U なら D。A=D なら U/ A=U なら D。A=D なら D/｝

・利得表は

			B	
	1st	2nd	U	D
A	U	U	5	4
			3	2
		D	5	4
			3	2
	D	U	3	4
			3	5
		D	3	3
			3	6

※1：戦略形に変換するという指示が不明のため戦略集合は答えました（詳しくは解説を参照）。もしかしたら書くことを期待されていないかもしれません。集合の中を区切る際は/(スラッシュ)は用いないのが基本です。見やすさのために使っています。

※2：A の戦略には B の返答次第で 2 回目が展開形に記されていない場合がありますが、利得表を書くのであれば全て書いてしまった方が分かりやすいと思います。参照例は荒木先生の第 5 回スライド 11,12

【2】答え

本問においては、簡便のため両プレイヤーが取りうる戦略を次の 4 つに限定する。

(st1) 常に C を選び続ける, (st2) 常に D を選び続ける, (st3) しっぺ返し戦略, (st4) トリガー戦略

このとき両プレイヤーが取りうる戦略 4 通り×4 通り＝16 通りの利得表をまとめると、以下のようになる。ただし、1 マスの利得は無限回繰り返した「総利得（詳しくは解説を参照）」をあらわす。

		B							
		(st.1)		(st.2)		(st.3)		(st.4)	
A	(st.1)		3/(1-δ)		4/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.2)		4/(1-δ)		2/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)
		1/(1-δ)		2/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)	
	(st.3)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.4)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	

B の戦略を固定し A の戦略を変化させ、最も利得が多くなる場合を考えると B が(st.2)のとき

$1+2/(1-\delta) < 2/(1-\delta) \leftrightarrow (1-\delta)+2<2 \leftrightarrow (1+\delta)<1$

と変形できるため、$2/(1-\delta)$ の方が大きい。また、B が(st.3)もしくは(st.4)のとき

$4+2\delta/(1-\delta) > 3/(1-\delta) \leftrightarrow 4(1-\delta)+2\delta>3 \leftrightarrow 4-2\delta>3 \leftrightarrow 1>2\delta$

と変形できる。よって、$1/2>\delta$ のとき、$4+2\delta/(1-\delta) > 3/(1-\delta)$、$1/2<\delta$ のとき、$4+2\delta/(1-\delta) < 3/(1-\delta)$となる。つまり、ナッシュ均衡は $\delta>1/2$, $\delta=1/2$, $\delta<1/2$ の 3 通りの場合分けが考えられ、次のような表になる。以上の表より、(st.4)：トリガー戦略同士がナッシュ均衡になるのは $\delta\geq 1/2$ の時であり、最小値は 1/2。

δ >1/2

δ>1/2		B							
		(st.1)		(st.2)		(st.3)		(st.4)	
A	(st.1)		3/(1-δ)		4/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.2)		1/(1-δ)		2/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)
		4/(1-δ)		2/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)	
	(st.3)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.4)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	

δ =1/2

δ=1/2		B							
		(st.1)		(st.2)		(st.3)		(st.4)	
A	(st.1)		3/(1-δ)		4/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.2)		1/(1-δ)		2/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)
		4/(1-δ)		2/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)	
	(st.3)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	
	(st.4)		3/(1-δ)		4+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)
		3/(1-δ)		1+2δ/(1-δ)		3/(1-δ)		3/(1-δ)	

δ <1/2

δ<1/2		B							
		(st.1)		(st.2)		(st.3)		(st.4)	
A	(st.1)		3/(1−δ)		4/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)
		3/(1−δ)		1/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)	
	(st.2)		1/(1−δ)		2/(1−δ)		1+2δ/(1−δ)		1+2δ/(1−δ)
		4/(1−δ)		2/(1−δ)		4+2δ/(1−δ)		4+2δ/(1−δ)	
	(st.3)		3/(1−δ)		4+2δ/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)
		3/(1−δ)		1+2δ/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)	
	(st.4)		3/(1−δ)		4+2δ/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)
		3/(1−δ)		1+2δ/(1−δ)		3/(1−δ)		3/(1−δ)	

【3】答え

部分完全ゲーム均衡

後ろ向き帰納法によって考えると、プレイヤー2 はプレイヤー1 が L,M のどちらを選択したか区別がつかずとも、自分の利得を最大化するのは L'の方であるので L'を選択する。よって、プレイヤー1 は仮に L と M のどちらかの戦略を決定する場合、プレイヤー2 の選択は必ず L'なので、利得が最大になる L を選択する。よって、プレイヤー1 が L, M, R の 3 つのうち 1 つを選択する時、A の利得が最大になるのは L である。よって、1 は L を選択する、2 は 状態 2 に来た時に L を選択する、というのが部分ゲーム完全均衡となる。

完全ベイジアン均衡（これだけ自信がありません、というか問題の意図があんまり分かりません）

完全ベイジアン均衡において考えた場合、（C1）プレイヤーの信念は他のプレイヤーの行動戦略と整合的である必要があり、（2）プレイヤーの行動戦略は自らの信念のもとで他のプレイヤーの行動戦略に対して最適反応戦略となっている必要がある。

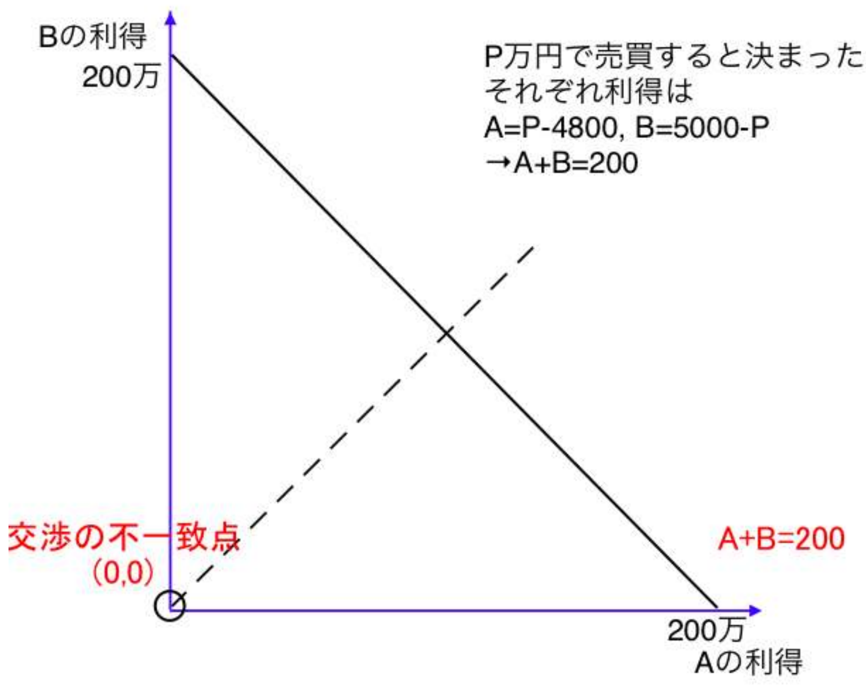
まず、プレイヤー1（以下 P1）は「プレイヤー2（以下 P2）が合理的である」という信念をもつ、つまり、「P2 は（P1 が L,M のどちらを選んでも、状態 2 から L’をとる方が R’をとるよりも P2 の利益が大きいと考えて）必ず L’を選択する」とみなして L、M、R の 3 つから行動戦略をとる。このとき、それぞれの利得は 2,0,1 であるため P1 は L を選択する。P1 の「P2 は合理的」という信念は、P2 が状態 2 に至った際に L’を選択するので整合的である（C1 をみたす）。かつ、P1 の L を選択するという行動戦略は、「P2 は合理的」という信念のもとで P2 がとる L’という行動戦略に対し、最適反応である（C2 をみたす）

他方、P2 の P1 への信念は、状態 1 のときと、状態 2 に至った場合の両方を考える必要がある。状態 1 において、P2 は「P1 は合理的である」という信念に基づき、P1 が M をとった場合 P1 の利得は 0 になるため P1 が M をとることはなく、残りの R と L のうち P1 が L をとれば P2 が L’を選択することから、P2 は「P1

はLをとる」と予想し、L’を選択するという戦略を立てる。「P1が合理的」という信念は、P1の行動戦略と整合的である（C1を満たす）。かつ、P1がLかMを選択した際に、P1が合理的であるという信念に基づいてP2はL’という行動戦略をとることは最適反応戦略となっている（C2をみたす）。次に、状態2に至った場合のアップデートを考える。P1がLかMを選択した際に、P2はP1がどちらを選択したかは区別できないが、状態1において「P1がLをとる」という信念をもち、実際にそれが起こったので信念のアップデートは行われず、L’をとる。このとき状態1における戦略と変更はないので、（C1）と（C2）どちらも満たす。以上よりP1がL、 P2は状態2に来た際にL’を選ぶ、が完全ベイジアン均衡。

【4】の答え

まずAとBの利得を設定する。Aの売価とBの買価が一致する必要があり、これをP万円とおく。Aは4800万円以上で売る、Bは5000万円以下で買うを希望しているので、Pとそれぞれの差額が利得となる。よってAの利得はXa=P−4800, Bの利得はXb=5000−Pと書ける。XaとXbを足せばPが消え、Xa+Xb=200となる。つまり200の利得合計を分配するという問題を考えれば良い。つまり、図に示すような利得となる。



交渉の不一致点は（利得が 0 未満になれば決裂するので）原点となり、三角形の範囲内が交渉範囲 S となる。

（解法 1）ナッシュの定理を用いる

S の範囲において $f=(Xa-da)*(Xb-db)=Xa*Xb$ が最大になる点を求める。

$Xa+Xb=200 \rightarrow Xb=200-Xa$ となるため、$f=Xa*(200-Xa)=-Xa^2+200Xa=-(Xa-100)^2+10000$

となるので、Xa=100 のとき、最大。よって(Xa, Xb) =(100,100) つまり 4900 万円で売却される。

（解法 2）ナッシュの公理

・パレート最適ゆえに、S のうち Xa+Xb=200 の直線上になり、

・対称性から Xa=Xb の直線上になる必要がある。→よって、(Xa, Xb) =(100,100)となる。

また、他の公理 2 つ（1）正アフィン変換しても結果は同じであり、

（2）交渉の不一致点と妥結点を除く実現可能 集合の要素が除かれても結果は同じ。

お疲れ様でした。

チーム Wasevestment の決勝進出に、ご協力をお願いいたします。

スマホからの投票法

PC からの投票法

解説プリント部分

【1】の補足

◯用語の説明

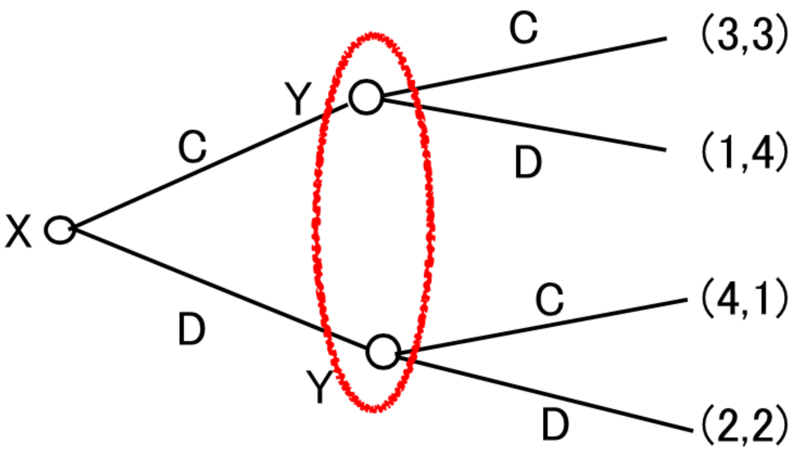
　戦略形とか展開形とか、ゲームの木とか利得表・利得行列とか言葉がわかりにくいですよね。そこらへんを簡単に整理しておきましょう。まず「戦略形と展開形」「利得表（利得行列）とゲームの木」が対をなすと考えてください。「戦略形と展開形」とはゲーム全て（過程・結果・ルール）の表現法、「利得表とゲームの木」は、それぞれ戦略形・展開形の紙媒体への書き下し方、くらいに思っておけばいいと思います。以下詳細：

（1）戦略形…プレイヤーのとる戦略を全て（戦略集合）を書き出し、全ての戦略の組合せについて各プレイヤーの利得を利得表にあらわす、ゲームの表現方法

（2）展開形…起こりうる全てのゲームの展開（枝分かれ）と、それに対応する結果を全て書きつくす（書き尽くしたものをゲームの木とよぶ）ことによって、ゲームを表現する方法

（注 1）戦略形で書けと言われ時に利得表だけ書く、ということはないように。指示が明確でなかったら、戦略集合を全部書いてしまった方が安全かも。

（注 2）戦略形と展開形の、表現の行き来は可能です。展開形から戦略形はやったので、逆もやってみましょう。【2】の囚人のジレンマゲーム利得表（1 回きり）を展開形に直してみましょう。



【2】の補足

繰り返しゲームは1回のゲームは利得表に従い、それを何回も繰り返すというゲームです。仮に無限に繰り返すと【2】においてX, Yが(C,C)を取り続けた時、Xの利得は「3+3+3+…=∞」。他方、X, Yが(D,D)の時、Xの利得は「2+2+…=∞」となってしまい比べられません。そこで、「1年後に100円もらえる」方が「今、100円もらえる」よりも同じ100円でも価値が下がると考え、それを割引率"δ"を用いて表現します。これにより、(C,C)ならXの利得は「$3 + 3\delta + 3\delta^2 + \ldots = 3/(1\text{-}\delta)$」、(D,D)ならXの利得は「$2 + 2\delta + 2\delta^2 + \ldots = 2/(1\text{-}\delta)$」となり(C,C)のほうがXにとって優れた戦略であると区別ができます。

【2】のゲームが1回限りであれば"囚人のジレンマゲーム"であることから分かるように、ゲームの状況によっては裏切るインセンティブがあることがあります。囚人のジレンマゲームの繰り返しの場合、（非常に感覚的に表現すれば）割引率"δ"が低い場合、つまり将来に利益が保存されない場合は目の前の利益を最大化する戦略＝裏切り、が合理的になります。他方で、割引率"δ"が低い場合、つまり将来に利益が保存される場合は相手と協力する戦略の方が合理的です。

しかし、協力を選ぶ可能性が高い相手であれば相手プレイヤーを裏切り続けた方が得ですので、繰り返しゲームの場合には様々な戦略があり、実際に戦略同士を戦わせる大会もあるほど検討が繰り返されました。その中で代表的な繰り返し戦略が、(S1)しっぺ返し戦略（S2）トリガー戦略の二つです。（S1）は、事前の相手の戦略に追従します。1回目は協力で入り、相手がn回目に裏切ってきたらn+1回目に裏切り、というように行います。(S2)は、1回目は協力で入り、n回目に相手が裏切ればn+1回目以降ずっと裏切りを取り続ける、という戦略です。ただし、どちらも協力が基本の戦略なので【2】のような問題を見た場合、「あー"δ"がいくら以上なら、トリガー戦略同士がナッシュ均衡になるな」と考える問題になります。ただし、気をつけて欲しいのが「裏切り」戦略同士は必ずナッシュ均衡になってしまいます。

最後に利得の「平均化」という考え方について触れておきます。教科書でもプリントにおいても、実は「答え」のような総利得ではなく、1回あたりの平均利得を用いて表しています。「平均化」をする方法は簡単です。答えにあった利得表の利得全てに「1-δ」をかけたものです。これが平均化を表す理由は、1回あたりの利得がTとすると総利得は$T + T\delta + T\delta^2 + \ldots = T/(1\text{-}\delta)$となります。逆に、総利得に「1-δ」をかければ1回あたりの利得Tが求まります。つまり、総利得を「平均化」、「1回あたり平均いくらの利得か？」と考えるには「1-δ」をかければ良いということになります。講義ではこちらで書かれていたのでレポートはこちらの方が、評価がいいかもしれません（個人的には総利得の方が最初は理解しやすいかと思い、答えは総利得を用いて書きました）。また、なぜ平均化をするのでしょうか。理由は2つ挙げられます。1つは綺麗！もう一つは（想像ですが）現実には「無限回続く」というゲームは存在せず「いつ終わるかわからない」という仮定が適切なので、無限回の総利得よりも平均の方が都合が良いということかと考えています。

【3】の補足

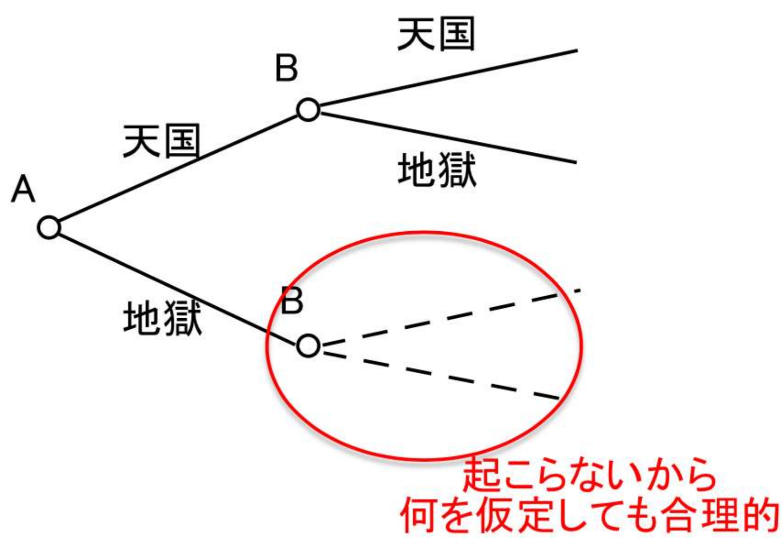
（1）部分完全ゲーム均衡について

面倒な人は解き方だけ覚えましょう。これは、ゲームの木の最後から、最も合理的な経路に丸をつけていくだけです（Backward Induction）。今回であればプレイヤー2 の選択肢から考え、どちらにきてもプレイヤー2 は L'を選択した方がいいので L'を戦略とします。それを理解したプレイヤー1 は、L と M のどちらかであれば（2 は L'を選ぶゆえに）L を選ぶことが合理的です。R も加えて判断すると、プレイヤー1 の選択は L が最も合理的な選択となり、部分完全ゲーム均衡が決まります。

きちんと意味から分かりたい人は次を読んでください。最初に、部分ゲームという概念を理解しておきましょう。部分ゲームとは、ざっくり表現すれば「一つの点を起点(X)とし、X 以降の展開において他と混ざる（情報集合を共有する）点がないようなゲーム」のことです。定義は、試験に出ないと信じてイメージだけ覚えましょう。荒木先生のクラスのレジュメの第 7 回 p7-8 がわかりやすいです。そして、部分ゲーム完全均衡とは、この部分ゲーム全てにおけるナッシュ均衡となる戦略の組合せを指します。ざっくり言えば「どこもかしこもナッシュ均衡」となるような戦略の組合せです（普通のナッシュ均衡では、非合理ゆえに起こらないとされる経路においては、戦略の組合せについては条件を仮定しませんが、部分ゲーム完全均衡はここも仮定するということです）。ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡の違いが、これでもピンと来ない人は次の例を考えてみてください。

例）ファラオ–しもべ ゲーム

rule）ファラオ（A）が天国に行くか地獄に行くことを選択し、その選択をみて“しもべ（B）”は天国に行くか、地獄に行くことを選択する。このとき、ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡はどう異なるか？



答）まず、A と B の戦略を書き出しましょう。A の戦略は（s1）天国に行く or（s2）地獄に行くの 2 通りです。対して B の戦略は 4 通り考えられます。こういった手番ゲームにおいては、ゲームが始まる前に起こりうる全ての状況を考え対応を決めておくことが約束でした。

（例 1…将棋であれば相手が 7 六歩なら 3 四歩、相手が 2 六歩なら 8 四歩のように、全て決めておく）

（例 2…野球の打者であれば、投手がアウトローに直球なら振るが、他は振らない）

つまり B の考えうる戦略は

（S1）A が天国の時に天国、A が地獄の時に天国,　（S2）A が天国の時に天国、A が地獄の時に地獄

（S3）A が天国の時に地獄、A が地獄の時に天国,　（S4）A が天国の時に地獄、A が地獄の時に地獄

という 4 つになります。分かりにくい人は（S1）が何が何でも天国、（S2）が A の必ず後を追う、（S3）が A の必ず逆を行く、（S4）が何が何でも地獄、と考えると分かりやすいかもしれません。このとき、ナッシュ均衡は「A が（s1）で B が（S1）」、もしくは「A が（s1）で B が（S2）」の二つです。ん？と感じた方がいるかもしれませんがナッシュ均衡は<u>戦略の組み合わせ</u>です。そして､B は常に天国に行くという戦略(S1)が「合理的」で（S2）は「非合理的」に見えるのですが、実際に A が合理的であれば（s2）という選択はしないので（s1）と（S2）もナッシュ均衡になります。対して、部分ゲーム完全均衡では（s1）と（S2）は非合理的と排除されます。実際起こらない、A の（s2）という選択についても B は合理的な選択を迫られることになります。

ここまで読んで「でも結局実現するのは A も B も天国に行くってだけで、ナッシュ均衡も部分ゲーム完全均衡も一緒じゃん」と言いたくなりませんでしたか。そうです。結果だけ見ると、どちらの均衡も「二人とも天国」なのですが、均衡が<u>戦略の組み合わせ</u>ですので、こうなるわけです。もう少し突っ込むのであれば、部分ゲーム完全均衡を考えた動機は「ナッシュ均衡（戦略の組）が余りにも多すぎることがあるために絞りたい」ということであり、それを絞り込むための「強い合理性」の仮定が部分ゲーム完全均衡でした。

<u>（2）完全ベイジアン均衡</u>

おそらく試験範囲で一番難しいので飛ばすのも手です。これは部分ゲーム完全均衡のように解法だけ覚えるということができません。完全ベイジアン均衡とは、まずベイジアンゲームから考える必要があります。ベイジアンゲームとは、簡単に言うと不完備情報ゲーム（相手が何を利得にしているか不明等）を完備情報ゲームにするために「タイプ」と「信念」という概念を入れ、分からない時にはタイプが確率的に決まると考えて行動戦略を決めるゲームのことです。

このとき、すべてのプレイヤーのすべてのタイプについて、他のプレイヤーの戦略に対する最適応答戦略をとっているとき、その戦略の組みをベイジアン均衡と呼びました。そして、完全ベイジアン均衡とは、すべてのプレイヤーの行動戦略と信念の組みについて、（C1）プレイヤーの信念は他のプレイヤーの行動戦略と整

合的、（C2）プレイヤーの行動戦略は自らの信念のもとで他のプレイヤーの行動戦略に対して最適反応戦略である、という 2 つの条件を満たすことを指します（荒木先生のゲーム理論スライド第 10 回 17 です）。たとえば、男女の争いで女性に野球好きの女性とバレエ好きの女性がいたとして、女性が野球を選べば（女性の行動戦略）女性が「野球好きの女性である」と男性が考える（男性の信念）として、行動戦略と信念が整合するか？とかです。

ぶっちゃけ、言いますが今回の課題で完全ベイジアン均衡の問題だけは分かりませんでした。なぜなら、タイプがない！からです。そこで、信念と行動戦略のところを考えながら解答するのかなと想像し答案を作りました。間違っていたら申し訳ありません。

【4】の補足

ありません。今回の問題は、それぞれの利得を定式化できるかどうか？が勝負でした。

ナッシュ交渉解の問題については、成績上位を狙いたい方は、ナッシュ公理からの解法とナッシュの定理の解法の両方をできるようにしておいた方がいいと思います。