接平面の方程式

1. 平面上の直線の方程式

$$\ell x+my+r=0\ (\ell,m,r\in\mathbf{R},\text{定数})$$
$$m\neq 0\Longrightarrow y=-\tfrac{\ell}{m}x-\tfrac{r}{m}$$
$$a=-\tfrac{\ell}{m},\ b=-\tfrac{r}{m}\ \text{とおくと},$$
$$y=ax+b$$
$$\text{また, 点}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\text{を通る傾き } a \text{ の直線の方程式は}$$
$$y-\beta=a(x-\alpha)$$
$$\text{あるいは}$$
$$y=ax+(\beta-a\alpha)$$
$$\text{である.}$$

2. $y=f(x)$ の接線の方程式

$$f\in C'\Rightarrow y=f(x)\text{ の点}\begin{pmatrix}\alpha\\ f(\alpha)\end{pmatrix}$$
$$\text{における傾きは } f'(\alpha) \text{ であるから}$$
$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$
$$\text{すなわち}$$
$$y=f'(\alpha)x+(f(\alpha)-f'(\alpha)\alpha)$$

3. 空間内の平面の方程式

$$\ell x+my+nz+r=0\ (\ell,m,n,r\in\mathbf{R},\text{定数})$$
$$n\neq 0\Longrightarrow z=-\tfrac{\ell}{n}x-\tfrac{m}{n}y-\tfrac{r}{n}$$
$$a=-\tfrac{\ell}{n},\ b=-\tfrac{m}{n},\ c=-\tfrac{r}{n}\text{とおくと},$$
$$z=ax+by+c$$
$$\text{また, 点}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\text{を通る}\left\{\begin{matrix}x\text{ 方向の傾き } a\\ y\text{ 方向の傾き } b\end{matrix}\right\}\text{の平面の方程式は}$$
$$z-\gamma=a(x-\alpha)+b(y-\beta)$$
$$\text{あるいは}$$
$$z=ax+by+(\gamma-a\alpha-b\beta)$$
$$\text{である.}$$

4. $z=f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ の接平面の方程式

$$f:\text{全微分可能とする.}\Rightarrow z=f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\text{の点}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ f\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$
$$\text{における}\left\{\begin{matrix}x\text{ 方向の傾きは } f_x\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\\ y\text{ 方向の傾きは } f_y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\text{であるから}$$
$$z-f\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=f_x\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}(x-\alpha)+f_y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}(y-\beta)$$
$$\text{すなわち}$$
$$z=f_x\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}x+f_y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}y+(f\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}-f_x\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\alpha-f_y\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\beta)$$

<u>例題</u> 与えられた点における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ の形で表すとき, 定数 a, b, c の値を求めよ.

$$z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \log(1 + x^2y^2)\ ,\ \text{点} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

(解)

$$z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \log(1 + x^2y^2)\ \text{のとき},$$

$$f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \log(1+1) = \log 2$$

$$f_x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{1+1} = 1$$

$$f_y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{-2}{1+1} = -1$$

$$z - \log 2 = 1 \cdot (x - 1) + (-1)(y - (-1))$$

$$\Rightarrow z = x + (-1)y - 1 - 1 + \log 2$$

$$a = 1, b = -1, c = -2 + \log 2$$