2016 年度春学期 経済数学 I（解析学基礎）（月 2）

【第 13 回: 条件付き極値問題】(担当: 瀧澤 武信) 提出期限: 7 月 18 日 (月) 17:00 (出題日：7 月 11 日 (月))

問題

Lagrange の未定乗数法を用いて条件付極値を求めよ．十分条件も吟味せよ．　(2*2 点)

1. $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y + 1 = 0$ のもとで
   $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 1$ の極値を求めよ.

2. $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ のもとで
   $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - y$ の極値を求めよ.

解答例

1. $f\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$: 極小値.

2. $f\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2 + \sqrt{2}$: 極大値,
   $f\begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 2 - \sqrt{2}$: 極小値.

解説

1. $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y + 1 = 0$ のもとで
   $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 1$ の極値を求める.$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   $= (x^2 + y^2 - 1) - \lambda(x + y + 1)$ とおく.
   $$\begin{cases} L_x = 2x - \lambda = 0 & (1) \\ L_y = 2y - \lambda = 0 & (2) \\ L_\lambda = -(x + y + 1) = 0 & (3) \end{cases}$$
   (1) より $x = \frac{\lambda}{2}$, (2) より $y = \frac{\lambda}{2}$
   (3) に代入して解くと,$\lambda = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}\ , y = -\frac{1}{2}$
   極値の候補は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

十分条件を吟味する．$g_x = 1, g_y = 1$

$L_{xx} = 2, L_{xy} = 0, L_{yx} = 0, L_{yy} = 2$

より, 縁つき Hesse 行列式 $|B|$ は

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 - 2 - 0 = -4 < 0$$

よって, $f\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$: 極小値.

2. $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ のもとで

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - y$ の極値を求める.

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$= (x - y) - \lambda(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1)$ とおく.

$$\begin{cases} L_x = 1 - 2\lambda x + 2\lambda = 0 & (1) \\ L_y = -1 - 2\lambda y - 2\lambda = 0 & (2) \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1) = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) より $x = \frac{2\lambda+1}{2\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$, (2) より $y = \frac{-2\lambda-1}{2\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$

(3) に代入して解くと, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\neq 0)$

極値の候補は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

十分条件を吟味する．$g_x = 2x - 2, g_y = 2y + 2$

$L_{xx} = -2\lambda, L_{xy} = 0, L_{yx} = 0, L_{yy} = -2\lambda$

より, 縁つき Hesse 行列式 $|B|$ は

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x-2 & 2y+2 \\ 2x-2 & -2\lambda & 0 \\ 2y+2 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = (2y+2)^2 \cdot 2\lambda + (2x-2)^2 \cdot 2\lambda$$

$= 2\lambda[(2x-2)^2 + (2y+2)^2]$

よって, $2\lambda > 0 \Longleftrightarrow |B| > 0,\ 2\lambda < 0 \Longleftrightarrow |B| < 0$

$$\left|B\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right| > 0, \left|B\begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right| < 0$$

よって, $f\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + \sqrt{2}$: 極大値,

$f\begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - \sqrt{2}$: 極小値.