(I) 次の関数について, 下の各問に答えよ.

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & (x < 1) \\ 2x^2 - 3x + 1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

1. $x < 1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
2. $x > 1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
3. 関数 f は $x = 1$ で連続か.
4. $f'(1)$ は存在するか．存在する場合はその値を求めよ．また，関数 f' は $x = 1$ で連続か.
5. $f''(1), f'''(1), f^{(4)}(1)$ は存在するか．存在する場合はそれぞれ値を求めよ．また，関数 $f'', f''', f^{(4)}$ は $x = 1$ で連続か.
6. $y = f(x)$ の増減凹凸表を書き, 極値を求めよ.
7. $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + 1 & (x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ -2x^2 + 3x & (x > 1) \end{cases}$$

問

1. $x < 1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
2. $x > 1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
3. 定義に従って $f'(1)$, $f''(1)$ を求めよ.
4. $y = f(x)$ の増減表を書き, 極値を求めよ.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 & (x < -1) \\ 5 & (x = -1) \\ -3x^2 - 18x - 10 & (x > -1) \end{cases}$$

問

1. $x < -1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

2. $x > -1$ のとき，$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

3. 定義に従って, $f'(-1)$, $f''(-1)$ を求めよ.

4. $y = f(x)$ の増減表を書き, 極値を求めよ.

(II) 関数の極限 (Limit) を求めよ.

(lim-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{-x} + x - 1}$

(lim-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2\log(1+x)}$

(lim-3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$

(lim-4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1-x) - e^{-x} + 1}$

(III) 関数の極値 (Extremum) を求めよ.

(extr-1) $f(x) = \sqrt{x} - \log x \ \ (x > 0)$

(extr-2) $f(x) = e^{1+x^2}$

(extr-3) $f(x) = \log x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ \ (x > 0)$

(extr-4) $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$

(IV) 下の各問に答えよ.

労働投入量 $\ell(> 0)$ だけの関数 $y = f(\ell)$ を生産関数とする. y は財の産出量である. いま, 労働力 1 単位あたりの賃金を w, 資本投入にかかる固定費用を C とする. また, 財は販売価格 p ですべて売れるものとする.

(eco-1) $f(\ell) = \ell^{\frac{2}{3}}, p = 4, w = 2, C = 10$ のとき, 利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ. また, 最適労働投入量 ℓ^* とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-2) $f(\ell) = \ell^{\frac{4}{5}}, p = 25, w = 3, C = 10$ のとき, 利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ. また, 最適労働投入量 ℓ^* とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-3) $f(\ell) = \ell^{\frac{1}{4}}, p = 2, w = 4, C = 10$ のとき, 利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ. また, 最適労働投入量 ℓ^* とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-4) $f(\ell) = \ell^{\frac{2}{3}}, w = 2, C = 10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).

(eco-5) $f(\ell) = \ell^{\frac{4}{5}}, w = 3, C = 10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).

(eco-6) $f(\ell) = \ell^{\frac{1}{4}}, w = 4, C = 10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).