統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

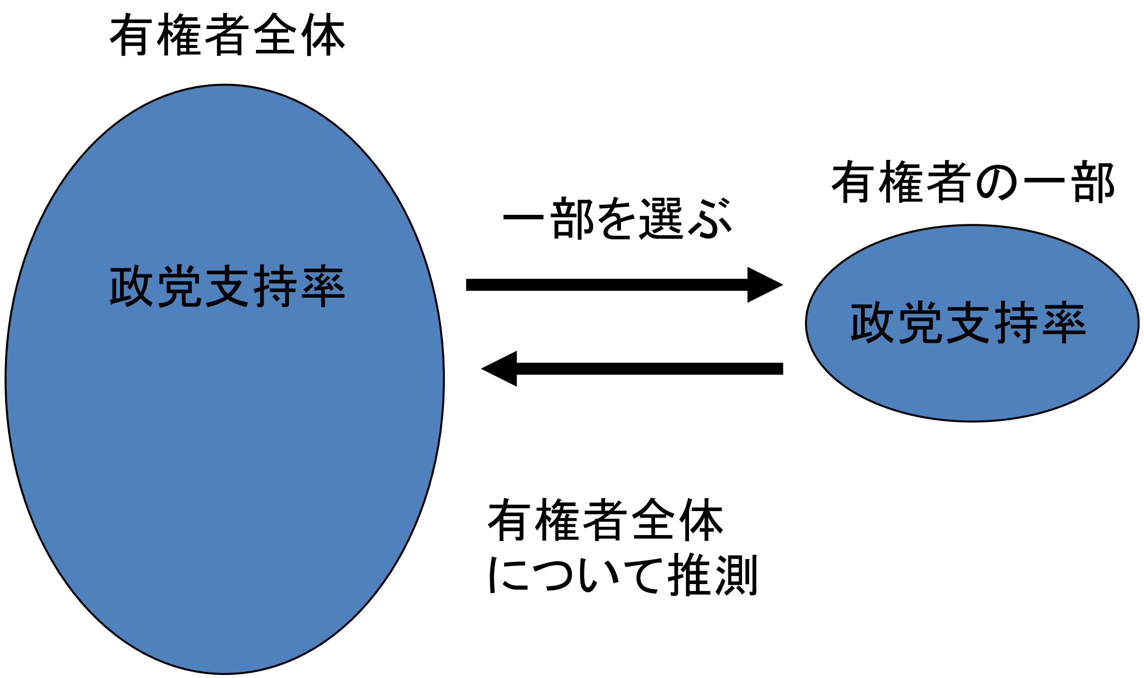
- 記述統計学と推測統計学
- 確率
- 加法定理

推測統計学とは(1)

- 記述統計学と推測統計学
  - 記述統計学
    - データの特徴の要約
      - 「統計学入門」のこれまでの学習内容
  - 推測統計学
    - データの発生の仕組みの解明
      - 一部の情報（抽出された標本からえられる情報）
　↓推測
全体の情報（母集団に関する情報）

推測統計学とは(2)

- 例：世論調査

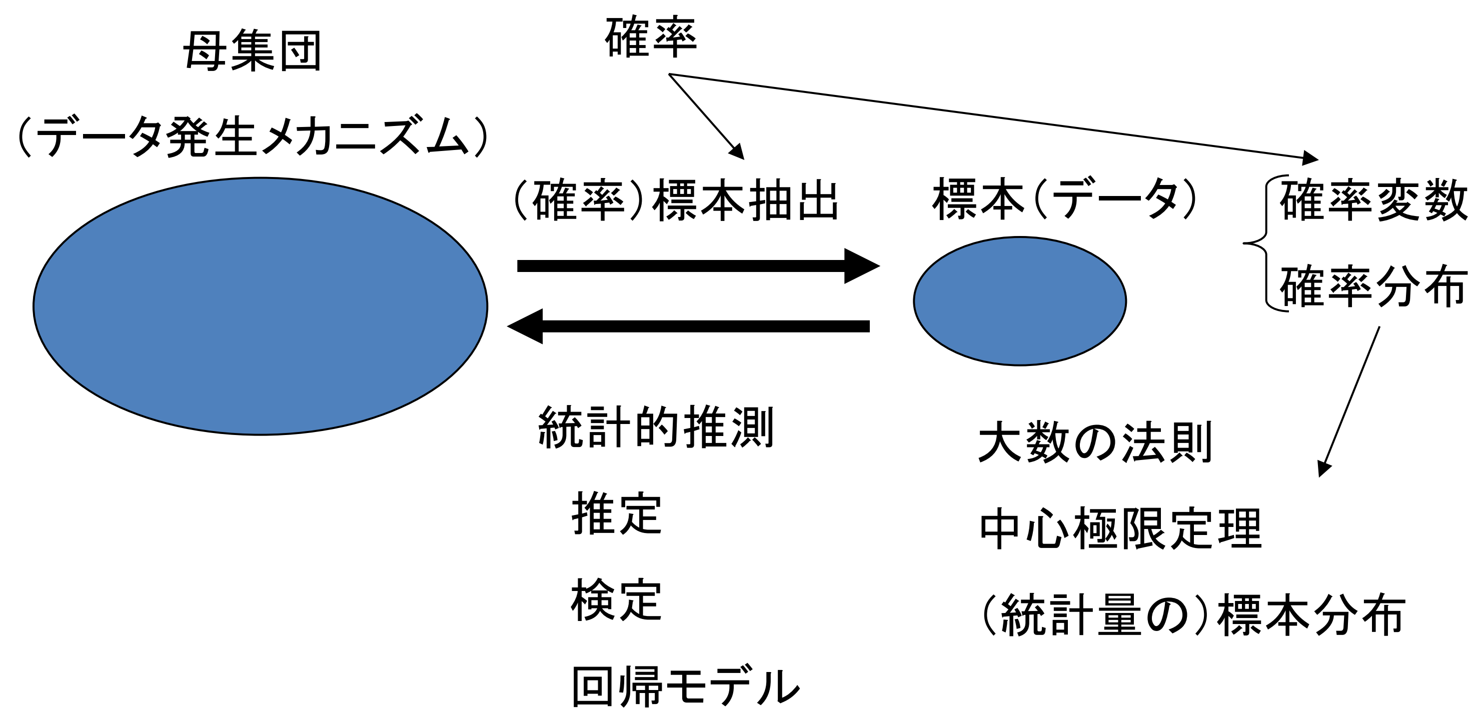


推測統計学とは(3)

- 一部の有権者から全有権者の情報を知る。
  - どのような方法で？
    - 確率標本の導入
      - くじ引きを使うことで、おのおのの有権者がどのくらいの確率で標本に含まれるかを制御する。
        ↓
        一部の有権者の政党支持率と全体の有権者の支持率との（確率的な）関係が明らかにできる。

推測統計学とは(4)

- 推測統計学の全体像



確率

- 偶然性（ランダムネス）
  - 偶然をともなう試行
    - コイン･トス
    - 同一人物の 100m 走 のタイム
    - 同一物の測定
  - いつも同じ結果が生じるとは限らない。
    ⇒ 偶然性を理論的にあつかう手法？
    - 偶然性の中に法則性を見出す。それを利用する。

確率の定義(1)

- 結論からいうと…
  - 確率を「内容」によって定義することは困難。
  - 形式的（数学的）な条件を満たすものはすべて確率としてとりあつかう、という立場が主流である。
    - コルモゴロフによる、測度論にもとづく確率論

確率の定義(2)

- 「内容」からみた確率の定義
  - ラプラスの定義：
    - 同様に確からしい根元事象が全部でN個あり、事象Aに有利な根元事象がR個あったとするとき、$P(A) = R/N$
      - 「どの根元事象も同様に確からしい」ことが前提。
  - （経験的な）頻度による定義：
    - n回の試行のうち事象Aがn_A回生じたとする。$P(A) = (n_A/n$の極限値)
      - 「同じ条件で繰り返し実験（観察）できる」ことが前提。

確率の定義(3)

- 主観による定義：
  - 人間の選好に一定の合理性を仮定すれば、主観的な確信の度合いが論理的整合性を持つ確率とみなせる。
    - 1回限りの現象にも、確率を考えることができる。
    - 偶然現象とみなせないようなことにも、確率を考えることができる。
      - 例：「試験の山が当たる確率は…」

確率の定義(4)

- 公理主義的な定義（形式的な定義）
  - Ω の部分集合に対して、以下の3条件を満たす関数を確率とみなす。
    - すべての集合Aに対して $0 \leq P(A) \leq 1$
    - $P(\Omega) = 1$
    - 排反な系列 $A_1, A_2, \ldots$ に対して、$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

標本空間と事象(1)

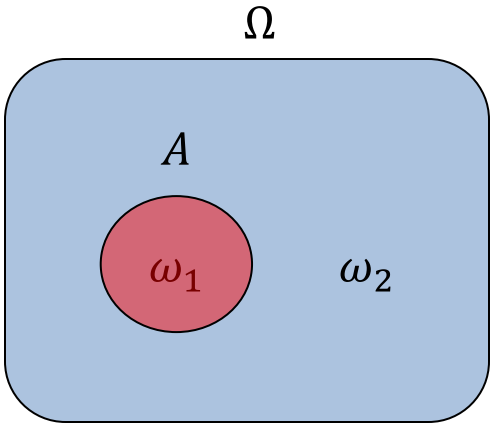
- 確率論
  - 測度論によって厳密に記述される。
    - 集合に関連する概念によって、確率の概念が整備されている。
      - 集合に関連する用語が使用される。
  - 集合演算が活用できる。

標本空間と事象(2)

- 標本点と標本空間、事象
  - 標本点 ω:
    - 偶然をともなう試行の結果のひとつ
  - 標本空間 Ω:
    - 標本点全体の集合
  - 事象 A:
    - 標本空間の部分集合(標本点の集合)

標本空間と事象(3)

- 例:
  - 試行:1枚のコインを投げる。
    - 標本点:$\omega_1 = H$(表), $\omega_2 = T$(裏)
    - 標本空間:$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{H, T\}$
    - 事象:
      - $A = \{\omega_1\} = \{H\}$
        - » 表になる事象ともよぶ。
      - $B = \{\omega_2\} = \{T\}$
      - $C = \{\omega_1, \omega_2\} = \{H, T\} = \Omega$
      - $D = \{\,\} = \emptyset$



標本空間と事象(4)

- 事象の分類
  - 根元事象:
    - ただひとつの標本点から成る。
  - 複合事象:
    - 複数の標本点をふくむ。
    - 根元事象への分解が可能である。

標本空間と事象(5)

- 和事象、積事象、補事象、排反な事象
  - 和(結合):
    - $A \cup B = \{\omega\colon \omega \in A\ or\ \omega \in B\}$
  - 積(共通部分):
    - $A \cap B = \{\omega\colon \omega \in A\ and\ \omega \in B\}$
  - 補事象(余事象):
    - $A^c = \{\omega\colon \omega \notin A\}$($A$でない事象)
  - 排反な事象:
    - $A \cap B = \emptyset$(同時には発生しない事象)

標本空間と事象(6)

- 例：試行：サイコロを1つ投げる。
  - 標本点：$\omega_i = \{i$の目が出る$\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$
  - 標本空間：$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
  - 事象：
    - $A = \{2$の倍数の目が出る$\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$
    - $B = \{3$の倍数の目が出る$\} = \{\omega_3, \omega_6\}$
    - $C = \{$奇数の目が出る$\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$
    - $A \cap B = \{\omega_6\}$; $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$;
      $A \cap C = \emptyset$; $B^c = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$

標本空間と事象(7)

- 集合に関連する公式
  - 分配法則
    - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  - ド･モルガンの法則
    - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
    - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  - その他
    - $(A^c)^c = A$

加法定理(1)

- 排反な事象 A, B について
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    - 例 : サイコロをひとつ投げる試行において、
      - $A = \{2$以下の目が出る$\}$; $B = \{5$以上の目が出る$\}$
      - $P(A \cup B)$
        $= P(\{2$以下の目が出る または 5以上の目が出る$\})$
        $= P(\{1, 2, 5, 6$ のいずれかが出る$\}) = \frac{4}{6}$
      - 他方
        - » $P(A) = P(\{1, 2$ のいずれかが出る$\}) = \frac{2}{6}$
        - » $P(B) = P(\{5, 6$ のいずれかが出る$\}) = \frac{2}{6}$

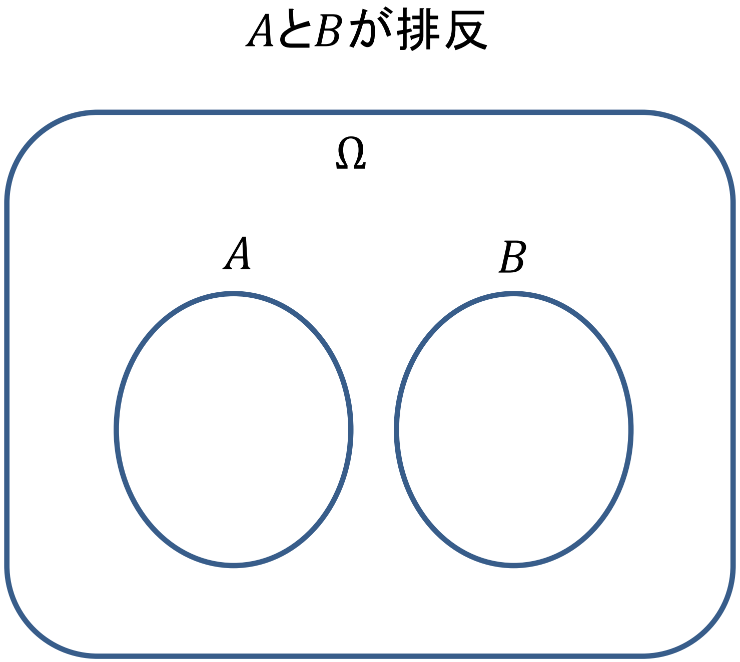
加法定理(2)

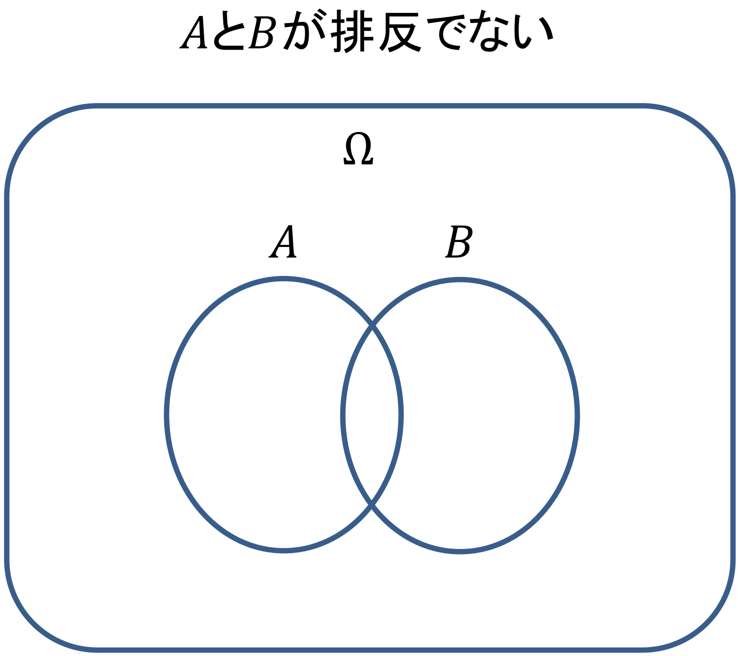
- 排反性
  - » $A \cap B = \{2以下と5以上の目が同時に出る\} = \emptyset$
  - » 結果的に $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ が成り立つ。
- 排反でない事象
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - 例 : サイコロを1つ投げる。
      - C:2の倍数が出る。
      - D:3の倍数が出る。
      - $P(C \cup D)$

        $= P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

加法定理(3)

図1 : 排反な2事象と排反でない2事象





加法定理(4)

- ジョーカーなしの52枚のトランプをよく切って1枚抜き取る。
  - 問1
    - 抜き取るカードがハートかスペードである確率
  - 問2
    - 抜き取るカードがハートかキングである確率

加法定理(5)

- 解答:
  - 問1
    - A : ハートを抜き取る ; B : スペードを抜き取る
      - AとBとは排反
    - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{2}$

加法定理(6)

– 問2

- A : ハートを抜き取る; C : キングを抜き取る
- $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$