統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

- 不均等度の測定
  - 必要性
  - ローレンツ曲線
  - ローレンツ曲線の応用
  - ジニ係数
  - 付録:ジニ係数の数理

（不）均等度の測定の必要性

- 均等性
  - 社会の要求
    - 法の下での平等
      - 一票の格差（不均等）
    - 機会の均等
      - 出発点は同一条件であるべき。
      - 結果の均等との関連
- 均等の測定
  - 不均等である＝バラツキが大きい
    - 均等であることに焦点をあてた特別の測定方法がある。

ローレンツ曲線(1)

- ローレンツ曲線作成の手順
  1. データを昇順に並べ替える。
     - $x_1, x_2, \ldots, x_N \underset{sort}{\Longrightarrow} x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(N)}$
  2. 個体数・変数それぞれについて、下位からの累積和を計算。
     - 個体数:$n_{(j)} = 1 + 1 + \cdots + 1$
     - 変数:$t_{(j)} = x_{(1)} + x_{(2)} + \cdots + x_{(j)}$
       - ともにj番目までの個体について。

ローレンツ曲線(2)

3. 累積和を総和で除して相対化する。
   - 個体数：$F_{(j)} = n_{(j)}/n_{(N)} = j/N$
   - 変数：$T_{(j)} = t_{(j)}/t_{(N)} = \sum_{i=1}^{j} x_{(i)}/\sum_{i=1}^{N} x_i$
     - ただし、$j = 1, 2, \dots, n.$
   - $F_{(0)} = 0, T_{(0)} = 0.$
4. 以下の要領で2次元平面に線を描く。
   - 点$\left(F_{(j-1)}, T_{(j-1)}\right)$と点$\left(F_{(j)}, T_{(j)}\right)$を直線で結ぶ。
     - ただし、$j = 1, 2, \dots, n.$
   - 点$(0, 0)$と点$(1, 1)$を直線で結ぶ

ローレンツ曲線(3)

表1：ローレンツ曲線作成のための計算表

昇順	個体数	累積和（累積度数）$n_{(j)}$	相対累積和（累積相対度数）$F_{(j)}$	変数	累積和 $t_{(j)}$	相対累積和 $T_{(j)}$
(0)	0	0	$0/N$	0	0	$0/t_{(N)}$
(1)	1	1	$1/N$	$x_{(1)}$	$x_{(1)}$	$t_{(1)}/t_{(N)}$
(2)	1	2	$2/N$	$x_{(2)}$	$x_{(1)}+x_{(2)}$	$t_{(2)}/t_{(N)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(N)	1	N	N/N	$x_{(N)}$	$\sum_{i=1}^{N} x_{(i)}$	$t_{(N)}/t_{(N)}$
合計	N			$\sum_{i=1}^{N} x_i$		

ローレンツ曲線(4)

- 数値例
  - ケースA（完全均等）
    - x_1=2, x_2=2, x_3=2, x_4=2, x_5=2
  - ケースB（不均等）
    - x_1=0, x_2=2, x_3=4, x_4=2, x_5=2
  - ケースC（独占）
    - x_1=0, x_2=10, x_3=0, x_4=0, x_5=0

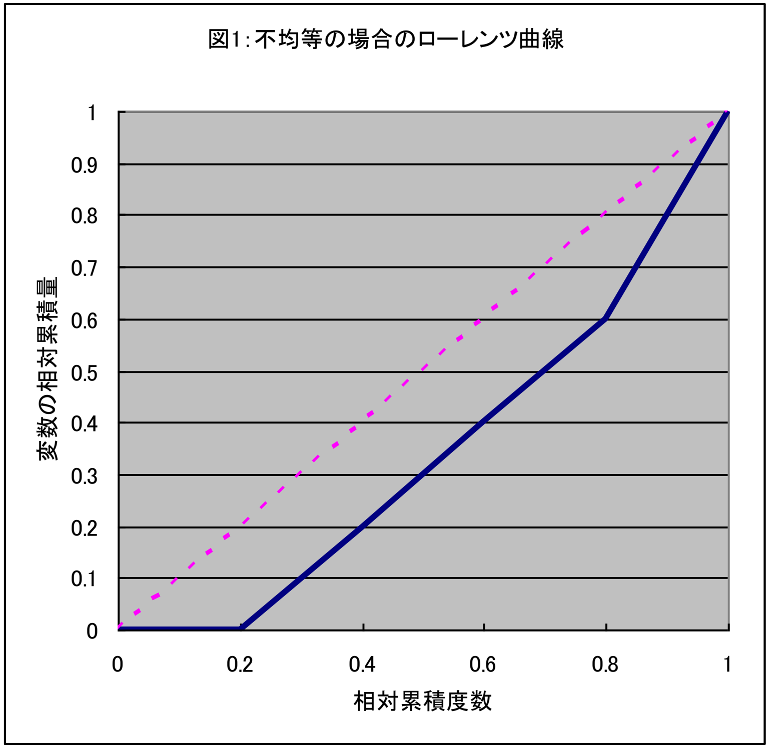
ローレンツ曲線(5)

表2：ケースBについてのローレンツ曲線作成のための計算表

昇順	個体数	累積和（累積度数） $n_{(j)}$	相対累積和（累積相対度数） $F_{(j)}$	変数	累積和 $t_{(j)}$	相対累積和 $T_{(j)}$
(0)	0	0	0/5	0	0	0/10
(1)	1	1	1/5	0	0	0/10
(2)	1	2	2/5	2	2	2/10
(3)	1	3	3/5	2	4	4/10
(4)	1	4	4/5	2	6	6/10
(5)	1	5	5/5	4	10	10/10
合計	5			10		

ローレンツ曲線(6)

- 線の名称
  - 青い線：ローレンツ曲線
  - ピンクの点線：均等線



ローレンツ曲線(7)

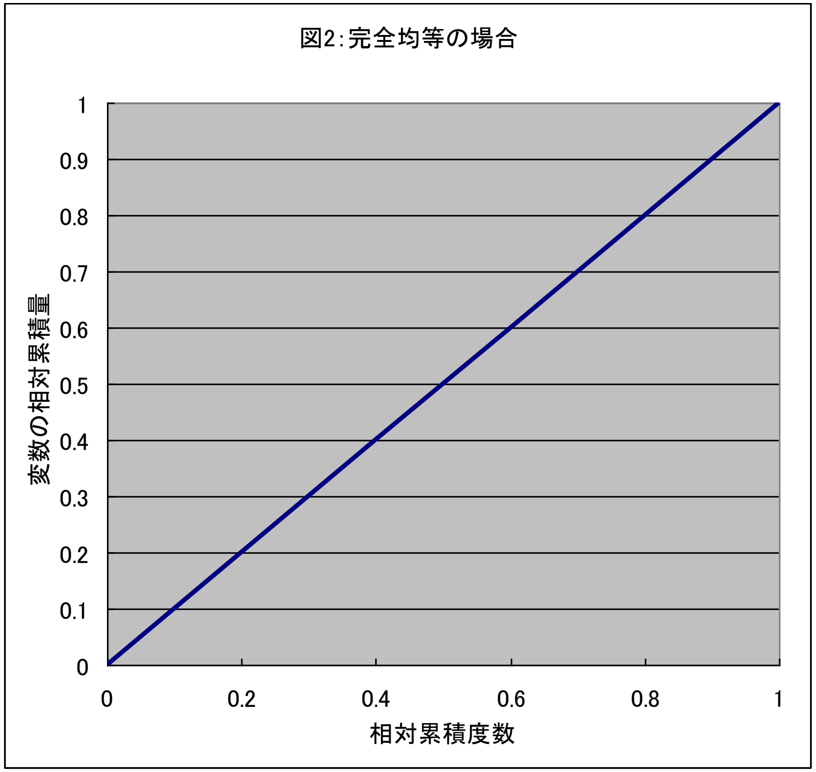


図2:完全均等の場合
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
変数の相対累積量
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
相対累積度数

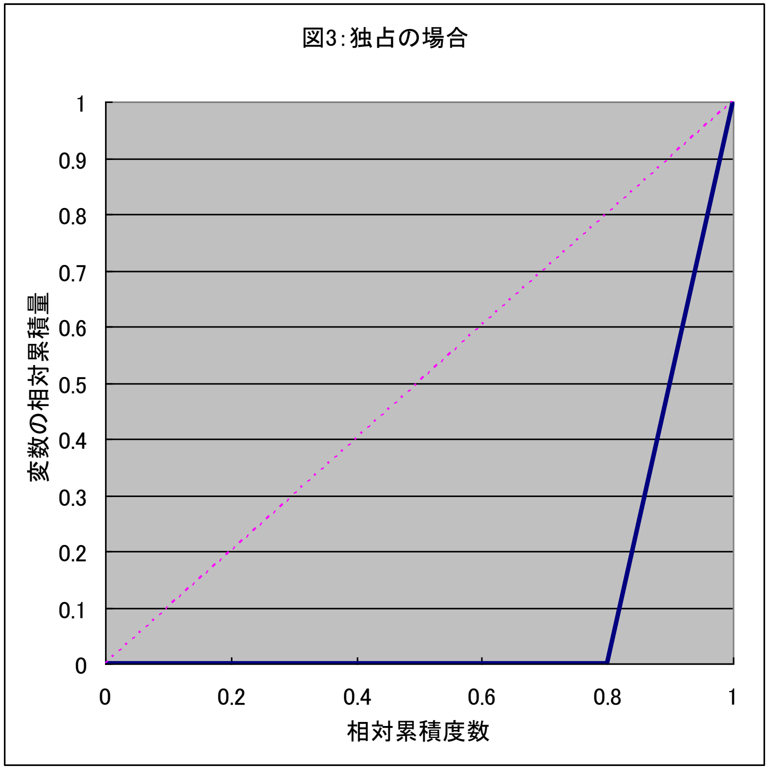


図3:独占の場合
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
変数の相対累積量
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
相対累積度数

ローレンツ曲線(8)

– 数値例からの観察
  - ローレンツ曲線の位置は、均等線よりも下になる。
  - 変数 x の状態: 均等 ⟷ 不均等
    ローレンツ曲線: 上 ⟷ 下
  - したがって、ローレンツ曲線が下位にある分布ほど不均等の程度が大きい。
    – 不均等の程度が大きい⇔散らばりが大きい

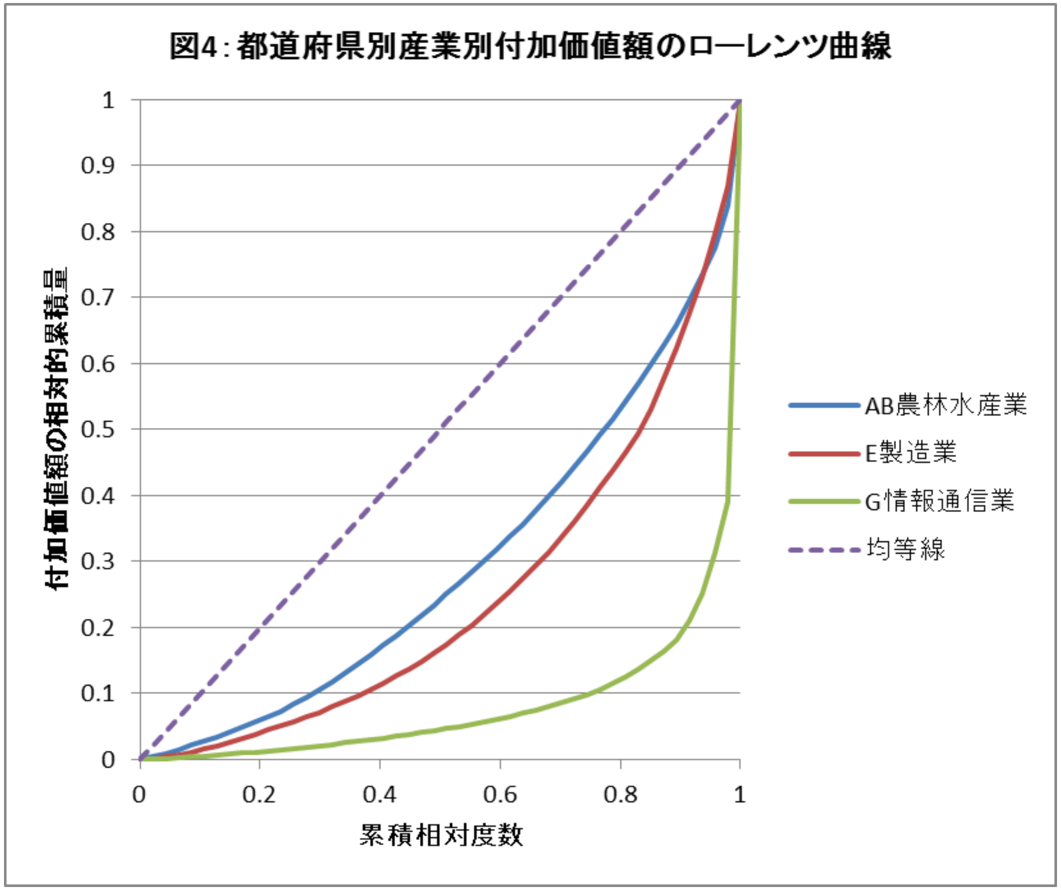
ローレンツ曲線(9)

- 使い方
  - 異なる集団間の均等度の比較
  - 同一集団内の異なる変数（異なる時点間を含む）の均等度の比較

ローレンツ曲線の応用(1)

- 都道府県別付加価値額（2016年）
  - AB農林水産業
  - E製造業
  - G情報通信業
    - 都道府県の間の不均等の程度は、どの産業においてもっとも顕著であるか。

ローレンツ曲線の応用(2)



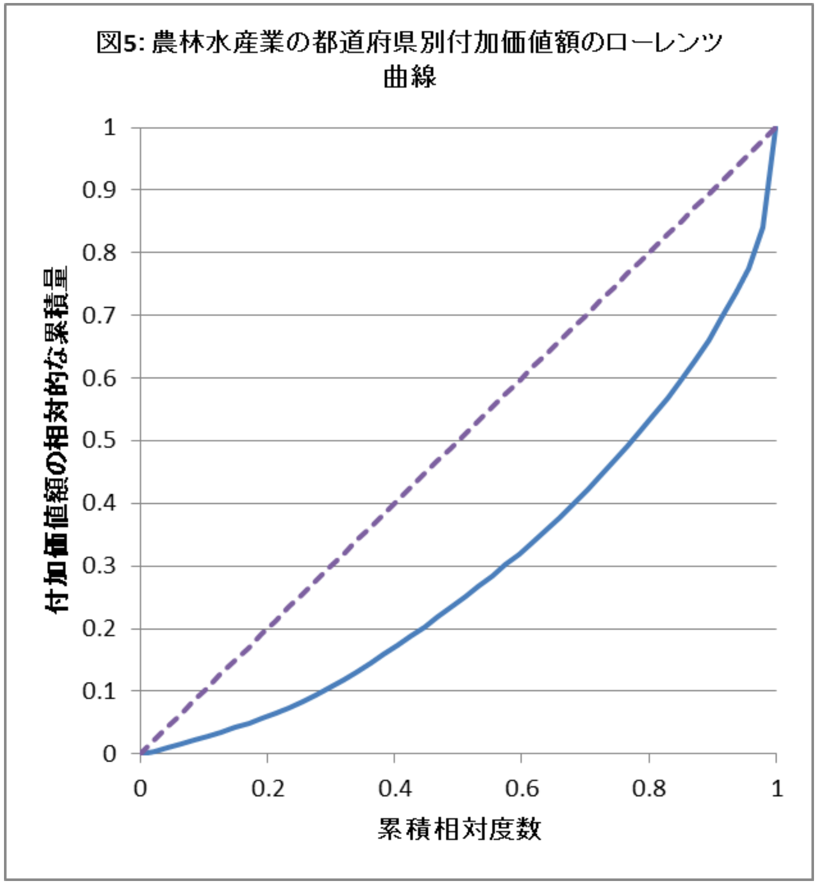
資料：総務省・経済産業省「平成28年経済センサス-活動調査」

不均等度の尺度:ジニ係数(1)

- ジニ係数 *GI*
  - ２×（ローレンツ曲線と均等線の間の弓型面積）
  - 均等　　　　不均等

    0 ⟵ *GI* ⟶ 1
  - 所得分布などでは、0.5より大きいと不均等度が大きいとみなされる。
    - おおよその目安にすぎない。

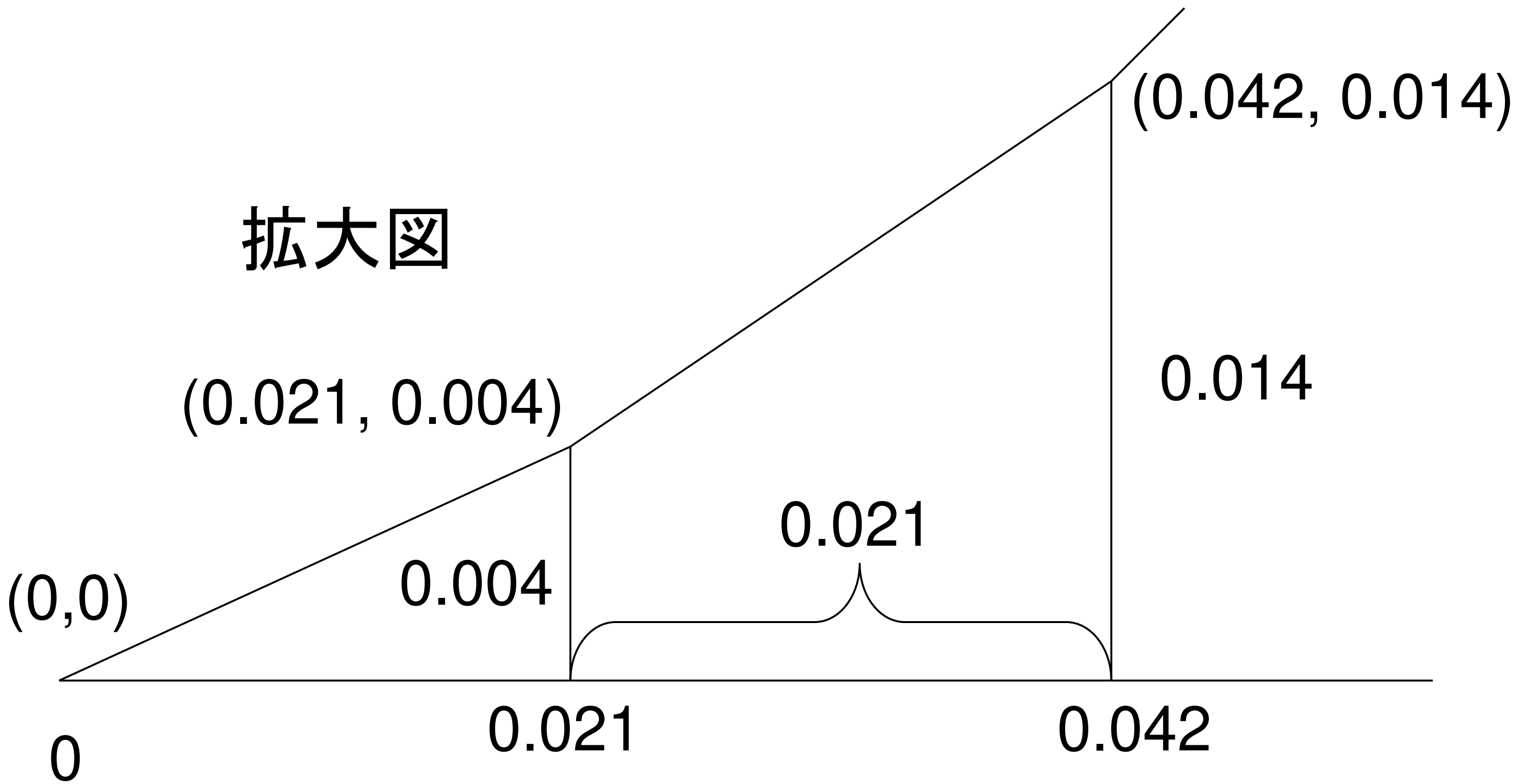
不均等度の尺度：ジニ係数(2)



資料：総務省・経済産業省「平成28年経済センサス-活動調査」

不均等度の尺度：ジニ係数(3)

図6：ローレンツ曲線の下側の面積 の計算



不均等度の尺度：ジニ係数(4)

- 産業別の*GI*
  - 第1次産業：0.40；第2次産業：0.50；第3次産業：0.83
- 補足
  - *GI* は以下のようにも計算できる。

$$GI=\frac{1}{2\bar{x}}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i-x_j\right|\right)$$

個体の変数間の差の絶対値の平均値

GI の数理(1)

$$y_{(i)} \equiv \frac{x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{N} x_{(i)}} = \frac{x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{x_{(i)}}{N\,\bar{x}}$$

とすれば、

$$a_{(j)} = j/N$$

$$b_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \Big/ \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$$

*GI*の数理(1)

- 以下の通り変数を定義する。
  - $y_{(j)} = \frac{x_{(j)}}{\sum_{i=1}^{N} x_{(i)}} = \frac{x_{(j)}}{N\bar{x}}\ (j = 1, 2, \dots, N)$
- これを使って以下を得る。
  - $F_{(j)} = j/N$
  - $T_{(j)} = \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} / \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$
- 以下の通り定義する。
  - $y_{(0)} = 0$

GI の数理(2)

- ローレンツ曲線の下側の面積をUとする。
  - $U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(T_{(j)}+T_{(j-1)}\right)\left(F_{(j)}-F_{(j-1)}\right)$

$$
=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(T_{(j)}+T_{(j-1)}\right)
$$

$$
=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=0}^{j}y_{(i)}+\sum_{i=0}^{j-1}y_{(i)}\right)
$$

GI の数理(3)

$$= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \left(2 \sum_{i=1}^{j} y_{(i)} - y_{(j)} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{j} y_{(i)} - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} y_{(j)}$$

GI の数理(4)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j} y_{(i)} \\
&= \quad y_{(1)} \\
&\quad + y_{(1)} + y_{(2)} \\
&\quad + y_{(1)} + y_{(2)} + y_{(3)} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + y_{(1)} + y_{(2)} + y_{(3)} + \cdots + y_{(N)} \\
&= N\, y_{(1)} + \left(N-1\right) y_{(2)} + \cdots 2 y_{(N-1)} + y_{(N)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(N - j + 1\right) y_{(j)}
\end{aligned}
$$

GI の数理(5)

$$U=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j}y_{(i)}-\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}y_{(j)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(N-j+1\right)y_{(j)}-\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}y_{(j)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(N+\frac{1}{2}-j\right)y_{(j)}$$

GI の数理(6)

$$
\begin{aligned}
GI &= 1 - 2U \\
&= 1 - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(N + \frac{1}{2} - j\right) y_{(j)} \\
&= 1 - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(N + \frac{1}{2} - j\right) \frac{x_{(j)}}{N\,\bar{x}} \\
&= \frac{1}{N\,\bar{x}}\left\{ N\,\bar{x} - \sum_{j=1}^{N} \frac{2N + 1 - 2j}{N}\, x_{(j)} \right\}
\end{aligned}
$$

GI の数理(7)

$$= \frac{1}{N\bar{x}}\left\{\sum_{j=1}^{N} x_{(j)} - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{2N+1-2j}{N}\right)x_{(j)}\right\}$$

$$= \frac{1}{N\bar{x}}\sum_{j=1}^{N}\left\{1-\left(\frac{2N+1-2j}{N}\right)\right\}x_{(j)}$$

$$= \frac{1}{N\bar{x}}\sum_{j=1}^{N}\frac{2j-N-1}{N}x_{(j)}$$

$$= \frac{1}{N^2\bar{x}}\sum_{j=1}^{N}(2j-N-1)x_{(j)}$$

GI の数理(8)

ところで、

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right| = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_{(i)} - x_{(j)}\right|$$

$$= \left|x_{(1)} - x_{(1)}\right| + \left|x_{(1)} - x_{(2)}\right| + \left|x_{(1)} - x_{(3)}\right| + \cdots + \left|x_{(1)} - x_{(N)}\right|$$

$$+ \left|x_{(2)} - x_{(1)}\right| + \left|x_{(2)} - x_{(2)}\right| + \left|x_{(2)} - x_{(3)}\right| + \cdots + \left|x_{(2)} - x_{(N)}\right|$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left|x_{(N)} - x_{(1)}\right| + \left|x_{(N)} - x_{(2)}\right| + \left|x_{(N)} - x_{(3)}\right| + \cdots + \left|x_{(N)} - x_{(N)}\right|$$

GI の数理(9)

$$
\begin{aligned}
= \quad & 0 \quad -\left(x_{(1)}-x_{(2)}\right)-\left(x_{(1)}-x_{(3)}\right)-\cdots-\left(x_{(1)}-x_{(N)}\right) \\
& +\left(x_{(2)}-x_{(1)}\right)+ \quad 0 \quad -\left(x_{(2)}-x_{(3)}\right)-\cdots-\left(x_{(2)}-x_{(N)}\right) \\
& +\cdots \\
& +\left(x_{(N)}-x_{(1)}\right)+\left(x_{(N)}-x_{(2)}\right)+\left(x_{(N)}-x_{(3)}\right)+\cdots+ \quad 0 \\
&= 2\left(1-N\right)x_{(1)}+2\left(3-N\right)x_{(2)}+2\left(5-N\right)x_{(i)}+\cdots+2\left(N-1\right)x_{(N)} \\
&= 2\sum_{j=1}^{N}\left(2j-N-1\right)x_{(j)}
\end{aligned}
$$

GI の数理(10)

したがって、

$$GI = \frac{1}{2N^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right|$$

$$= \frac{1}{2\bar{x}}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right|\right)$$