一様分布に関する補論

一様分布（uniform distribution）とは確率分布の一種である。確率分布とは，起こりうる結果（事象）すべてに対して，その起こりやすさを記述したものである．例えば，一枚のコインを投げて表が出る確率と裏が出る確率はともに 1/2 である．この「表が出る」と「裏が出る」という 2 つの結果に確率を対応させたものが確率分布となる．（離散）一様分布は，この確率分布の一種であり，すべての結果が生じる確率は等しいとする分布である．上記のコインを投げる例では，表裏ともに確率 1/2 と等しい確率で生じるため一様分布である．また，サイコロを投げて，それぞれの目が出る確率は 1/6 のため，これも一様分布になる．

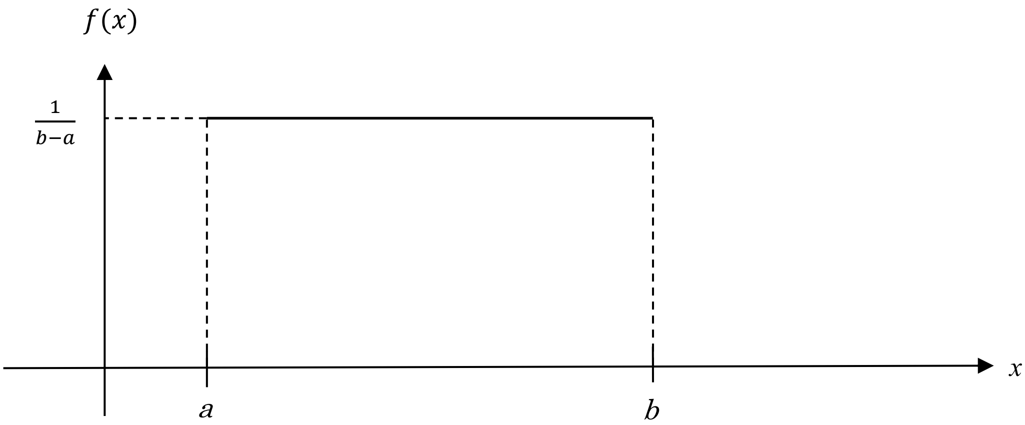

図 1：一様分布

もし起こりうる結果が有限個であれば，各結果に等しい確率を与えた分布が一様分布であるが，起こりうる結果が無限個である場合は連続確率分布を用いなければならない．ある変数 x を考えよう．この x は，a と b の間のいずれかの値をとるとする．値は a と b の連続区間の中であればどのような値でもよいので，とりうる値の数は無限に存在することになる．このような連続確率分布における（連続）一様分布を示したものが図 1 となる．

図に示されている$f(x)$という関数は確率密度関数（frequency function）と呼ばれる関数であり，図を見てわかるように a と b の間で同じ値をとっている．これは，すべての一定区間内の値は同じ確率で生じうることを示している．すべての一定区間内の値は同確率で生じるため，確率 1（100%）を，その区間の長さ$b-a$で割ったものが確率密度関数の値になる．つまり，$b \geq x \geq a$の区間において$f(x) = 1/(b-a)$であり，それ以外の区間の値がとられる確率はゼロ（$f(x) = 0$）となる．一様分布において，xの期待値（平均）は$(a+b)/2$となる．

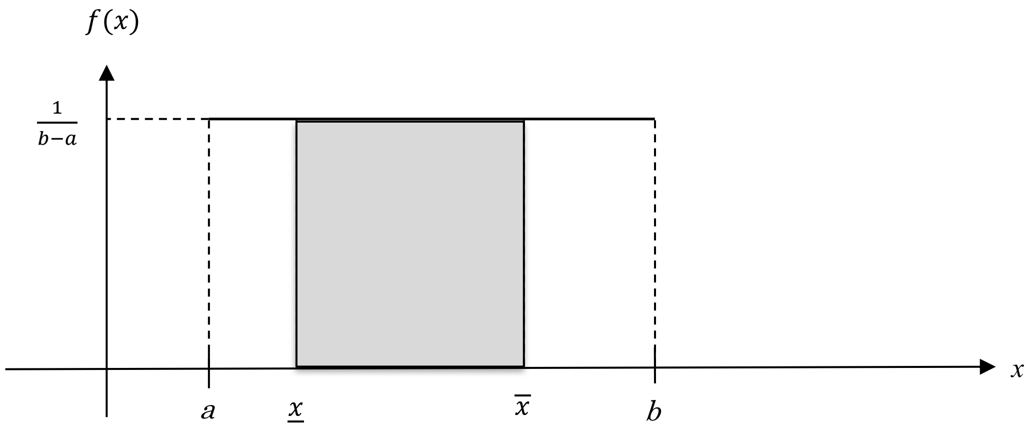

図２：ある区間の値をとる確率

この一様分布から，ある区間の値が生じる確率がもとめられる．変数 x が$\overline{x}$と$\underline{x}$の間の値をとる確率を考えてみよう．ただし，$a \leq \underline{x} < \overline{x} \leq b$とする．ここでは$\overline{x}$と$\underline{x}$の間の値がとられる確率を知りたいため，図２の灰色の長方形の面積をもとめればよい．よって，$1/(b-a)$に$\overline{x} - \underline{x}$をかけた値$(\overline{x} - \underline{x})/(b-a)$が，その確率となる．ここで，$\overline{x} = b$かつ$\underline{x} = a$の場合は，$(\overline{x} - \underline{x})/(b-a) = (b-a)/(b-a) = 1$となり，設定した通り x は 100%の確率で a と b の間の数字になる．

一例として，$a = 0$かつ$b = 2$としてみよう．この時，確率密度関数は$f(x) = 1/(b-a) = 1/2$となる．ここで，x が 0 から 0.1 の間の値をとる確率は，$(0.1-0)/(2-0) = 0.05$である．また，x が 0.95 から 1.05 の間の値をとる確率も，$(1.05-0.95)/(2-0) = 0.05$となる．

よって前述したように，一様分布では変数が一定区間（ここでは 0.1）内の値をとる確率は同一（ここでは 0.05）となる．

一様分布を確率分布の一種として解説したが，これを割合の分布としても解釈できる．つまり，変数 x を政策として選択する変数（例えば消費税率）であると解釈し，政策として a と b の間の値を選択する（例えば 0%から 30%の間）と考える．そして，多数存在する投票者の最も好ましい政策が，a と b の間に一様分布していると考える．つまり，それぞれの（一定区間内の）政策を支持する投票者の数は等しいということになる．このとき，$\overline{x}$ と$\underline{x}$の間に最も好ましい政策を有する投票者の全体に占める割合は，$(\overline{x}-\underline{x})/(b-a)$となる．また，ホテリング・ダウンズモデルの中位政策の位置は，a と b の間の中間点となるため，$(a+b)/2$であり，x の平均と等しくなる．

ここでは一様分布の基本的性質のみを解説した．他にも重要な確率分布はいくつも存在する．より深い理解のためには，確率論あるいは統計学の教科書を参照されたい．