統計学II

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

- 回帰係数の最小二乗推定量の性質
  - 主に傾きの推定量$\hat{\beta}_1$ の性質について。
- 回帰係数に関する推測
  - 推定
  - 検定

誤差項と$\hat{\beta}_1$との関係(1)

- 傾きの最小2乗推定量
  - $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$
    - $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$
      $= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\bar{Y}$
      $= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i - \bar{Y}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$
      $= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i$
  - $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$を上式の最右辺の分子に代入する。

誤差項と$\hat{\beta}_1$との関係(2)

– $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$

– 以下の式に注意する。

- $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_0 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i$
- $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_0 = \beta_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
- $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\beta_1 x_i = \beta_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i = \beta_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

– $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})u_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2} = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$

誤差項と$\hat{\beta}_1$との関係(3)

- $w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$ の性質
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x}) = 1$
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$
    - これらの性質は、$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$ を使って導かれる。
  - 上記の式変形は Johnston (1972) から引用した。

傾きの推定量$\hat{\beta}_1$の性質(1)

1. 期待値がβ_1に等しい。
   – $E(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i) = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i E(u_i) = \beta_1$
     • $E(u_i) = 0$ および、「x (w)とuが無関係」を利用した。
   – つまり、$\hat{\beta}_1$はβ_1の不偏推定量である。
     • 確率的に変動する$\hat{\beta}_1$は、β_1よりも大きいこともあれば小さいこともある。しかし、大きい方ばかり(または小さい方ばかり)に偏ることはない。平均的には母数であるβ_1に等しい。

傾きの推定量$\hat{\beta}_1$の性質(2)

2. 分散が$\sigma^2/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$に等しい。
   - $V(\hat{\beta}_1)=V(\beta_1+\sum_{i=1}^{n}w_iu_i)=V(\sum_{i=1}^{n}w_iu_i)=E[(\sum_{i=1}^{n}w_iu_i)^2]=E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_ju_iu_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_jE(u_iu_j)=\sum_{i=1}^{n}w_i^2E(u_i^2)=\sum_{i=1}^{n}w_i^2V(u_i)=\sum_{i=1}^{n}w_i^2\sigma^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$
     - $E(u_i)=0$、$V(u_i)=E(u_i^2)=\sigma^2$、$E(u_iu_j)=0$ for $i\neq j$、および「x（w）とuが無関係」を利用した。

傾きの推定量$\hat{\beta}_1$の性質(3)

– つまり、$\hat{\beta}_1$の分散は
  - 誤差項の分散σ^2（縦軸方向の散らばり）が小さいほど、
  - 説明変数の散らばり$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$（横軸方向の散らばり）が大きいほど、
  - 小さくなる。
    – 分散が小さい⇔推定精度が高い。

傾きの推定量$\hat{\beta}_1$の性質(4)

3. 回帰係数の推定量$\hat{\beta}_1$が正規分布に従う。
   - $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$ であり、u_iが正規分布に従うから。
     - 「 u_iが正規分布に従う」と「x（w）とuが無関係」を使った。
   - 1番目と2番目の性質と合わせると、以下が成り立つ。
     - $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}} \sim N(0, 1)$

傾きの推定量$\hat{\beta}_1$の性質(5)

4. 誤差の分散の推定量を使うと以下の性質が成り立つ。

   – $\dfrac{\widehat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}} \sim t(n-2)$

     • ただし、$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$

       – この結果は、誤差項に課された5つの条件のもとで、$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$が、(1)$\chi^2(n-2)$ に従い、(2) $\hat{\beta}_1$と独立になる、という事実による。

回帰係数に関する推測(1): 推定

- 回帰係数に関する区間推定
  - 信頼係数0.95のβ_1の信頼区間
    - $\left[\hat{\beta}_1 - t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}, \hat{\beta}_1 + t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right]$
  - 例: Karl Pearson の親子の身長データ
    - $\left[0.51 - 1.96\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}, 0.51 + 1.96\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}\right] = [0.46, 0.57]$

回帰係数に関する推測(2):検定

- 帰無仮説と対立仮説
  - $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$
    - つまり、x が Y に影響を及ぼしていないのか、いるのか。
      - H_0 が正しい:$Y_i = \beta_0 + u_i$（x が Y に影響を及ぼしていない）
      - H_1 が正しい:$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$（$x$ が Y に影響を及ぼしていない）
  - 検定統計量
    - $|T| = \dfrac{|\hat{\beta}_1|}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}}$
  - 検定手続き（有意水準0.05）
    - もし、$|T| > t_{0.025}(n-2)$ であれば、H_0 を棄却する。
      - p value = $P(|T| > |T|_{obs} | H_0)$

回帰係数に関する推測(3):検定

  - 例:Karl Pearson の親子の身長データ
    - $|T|_{obs} = \frac{|0.51|}{\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}} = 19.0 > 1.96$
    - H_0: $\beta_1 = 0$ が棄却される。
      - $\hat{\beta}_1$ は0と有意に異なる。
      - 結果は有意である。
      - β_1 は0と有意に異なる。
      - 結果は5%有意である。
- 0以外が参照値となることもある。
  - 例:Karl Pearson の親子の身長データ
    - $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 1 \\ H_1: \beta_1 \neq 1 \end{cases}$
      - 父親の身長が1インチ高くなったとき、息子の身長の平均値も1インチ高くなる。

回帰係数に関する推測(4):検定

- 検定統計量
  - $|T| = \frac{|\hat{\beta}_1 - 1|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}}$
- 検定手続き（有意水準0.05）
  - もし、$|T| > t_{0.025}(n-2)$ であれば、H_0 を棄却する。
    - » *p* value = $P(|T| > |T|_{obs} | H_0)$
- $|T|_{obs} = \frac{|0.51 - 1|}{\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}} = 18.1 > 1.96$
- H_0: $\beta_1 = 1$ が棄却される。