第２回：ナッシュ交渉問題（続き）

河崎　亮

工学院　経営工学系

６月１６日（木）

ナッシュ交渉解の公式（復習）

交渉問題の二要素：

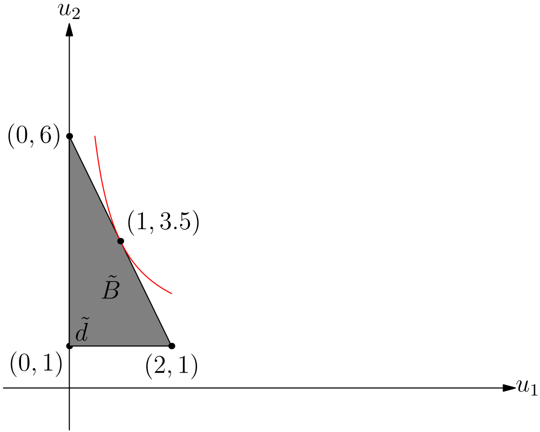
- B: 実現可能集合
- $d = (d_1, d_2)$: 交渉の基準点

ナッシュ交渉解：以下の最大化問題の解

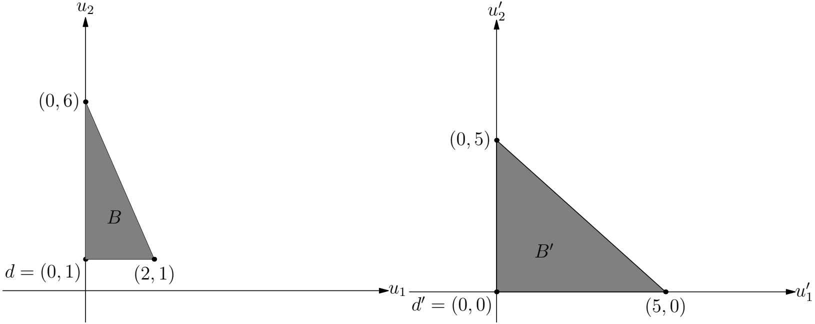
$$\boxed{\max_{(u_1,u_2)\in B, u_1\geq d_1, u_2\geq d_2} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)}$$

例 2

以下の交渉問題を考える．（定義式を使う解法は黒板で説明する．）



例２（左）は例１（右）を変換したもの



プレイヤー１の利得は $\frac{2}{5}$ 倍に縮小
プレイヤー２の利得は $+1$.

例２：別解

例１のナッシュ交渉解に同じ変換を施す.

- $u_1^* = 2.5 \longrightarrow \frac{2}{5}u_1^* = \frac{2}{5} \times 2.5 = 1$
- $u_2^* = 2.5 \longrightarrow u_2^* + 1 = 2.5 + 1 = 3.5$

黒板で導出した解と一致する.
この性質：正アフィン変換からの独立性

ナッシュの定理

定理 1 (Nash).

以下の四つの公理を満たす交渉解は，ナッシュ交渉解ただ一つである.

1. パレート最適性
2. 対称性
3. 正アフィン変換からの独立性
4. 無関係な結果からの独立性

パレート最適性

定義 1 ((パレート最適)).

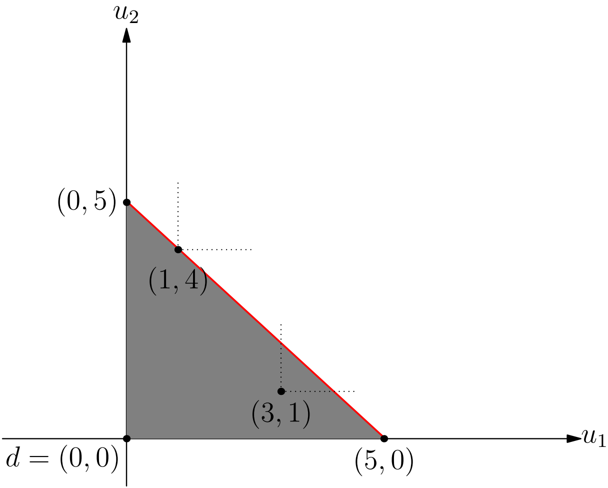
実現可能な利得の組 (u_1, u_2) がパレート最適であるとは

$$\begin{aligned} v_1 &\geq u_1 \\ v_2 &\geq u_2 \end{aligned}$$

の二つの不等式を満たし，少なくとも一つの不等式が $>$ で成立する実現可能な組 (v_1, v_2) が 存在しない ことである.

公理 1 （パレート最適性）すべての交渉問題に対し妥結点はパレート最適.

例



$(1,4)$ はパレート最適，$(3,1)$ はパレート最適ではない．
赤線：パレート最適な領域全体

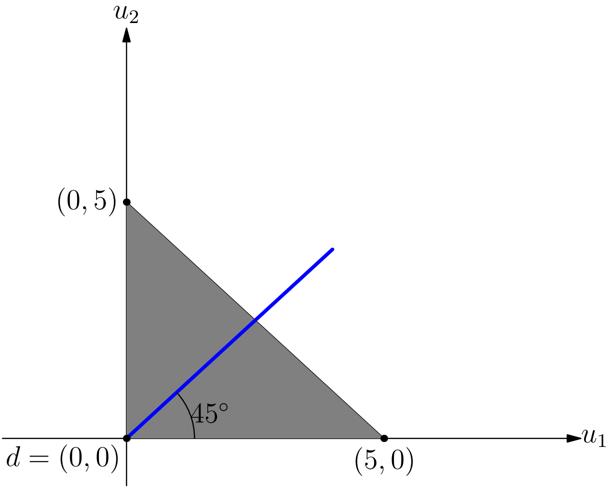
対称性

定義 2 ((対称な交渉問題)).
交渉問題が対称であるとは以下の条件を満たすことである.

1. (u_1, u_2) が実現可能 $\Leftrightarrow$ (u_2, u_1) も実現可能
2. $d_1 = d_2$

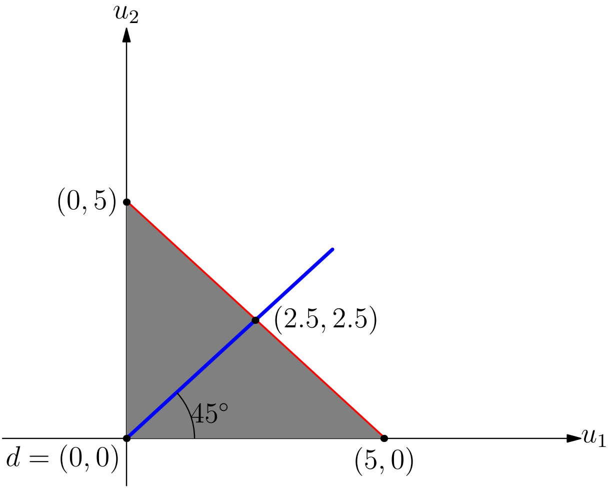
公理２（対称性): 対称な交渉問題点 においては妥結点 (u_1^*, u_2^*) は $u_1^* = u_2^*$ を満たす.

例



対称性：妥結点は青い線上にある.

例



この例ではパレート最適性と対称性で妥結点が決まる.

正アフィン変換からの独立性（1）

- アフィン: $\alpha x + \beta$
- 正アフィン：アフィンかつ $\alpha > 0$

実現可能集合内の全ての点 (u_1, u_2) に対して，正アフィン変換 (u_1', u_2') を施す.

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 \\
u_2' &= \alpha_2 u_2 + \beta_2
\end{aligned}
$$

$(u_1, u_2) \in B$ に対し変換された (u_1', u_2') を集めたものを B' とする.

正アフィン変換からの独立性（2）

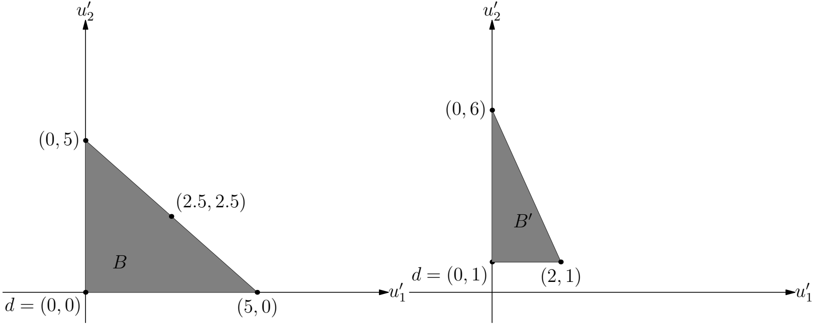
同じく交渉の基準点 (d_1, d_2) も以下のように変換する．

$$\begin{aligned} d_1' &= \alpha_1 d_1 + \beta_1 \\ d_2' &= \alpha_2 d_2 + \beta_2 \end{aligned}$$

変換された問題を (B', d') とおく．

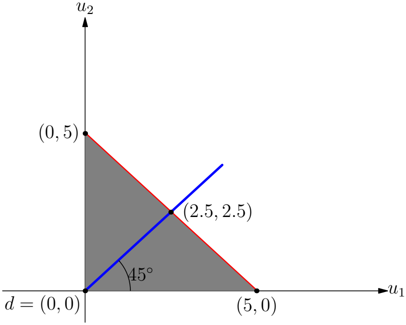
<u>公理３（正アフィン変換からの独立性）</u>：(B, d) の妥結点が (u_1^*, u_2^*) であるならば，変換された問題 (B', d') の妥結点は $(\alpha_1 u_1^* + \beta_1, \alpha_2 u_2^* + \beta_2)$ で与えられる．

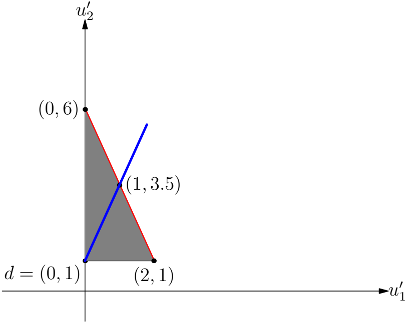
正アフィン変換からの独立性（3）



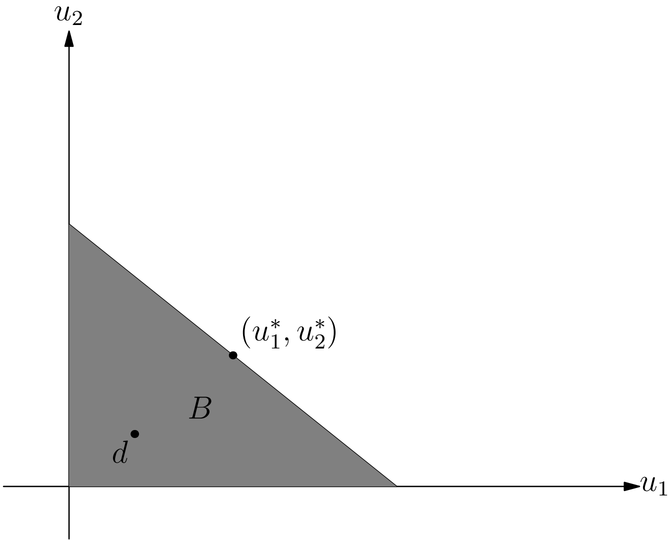
B' は B に対して正アフィン変換 $u_1' = \frac{2}{5}u_1$, $u_2' = u_2 + 1$ を施したものである.

正アフィン変換からの独立性（4）



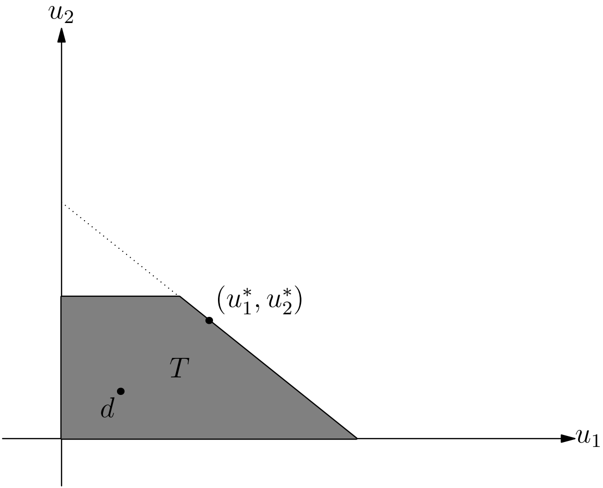


無関係な結果からの独立性（1）



(u_1^*, u_2^*) を (B, d) の交渉の妥結点とする.

無関係な結果からの独立性（２）



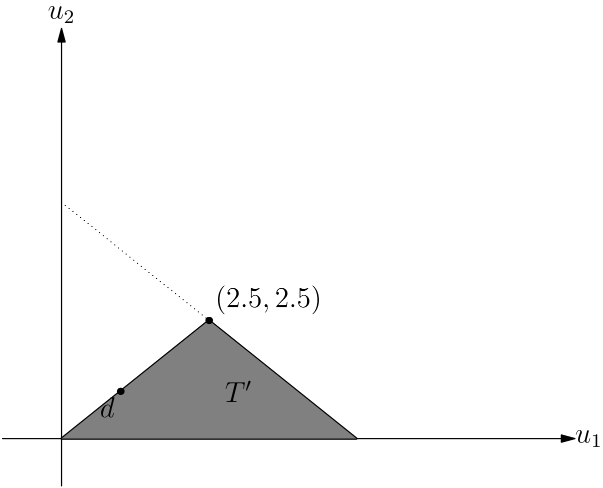
B から一部の領域を切り取る．ただし，(u_1^*, u_2^*) と d は残す．
残った領域を T と置く．

無関係な結果からの独立性（３）

ある交渉問題 (B, d) の妥結点を (u_1^*, u_2^*) とする．
ここで $T \subset B$ を考える．ただし，$(u_1^*, u_2^*) \in T$ かつ $d \in T$ とする．

公理４（無関係な結果からの独立性）：上記を満たす T を実現可能集合とする交渉問題 (T, d) の妥結点は，(B, d) の妥結点 (u_1^*, u_2^*) と一致する．

無関係な結果からの独立性（４）



無関係な結果からの独立性より，T' を実現可能集合とした交渉問題の妥結点も (u_1^*, u_2^*) となる.

ナッシュの定理

定理 1 (Nash).

以下の四つの公理を満たす交渉解は，ナッシュ交渉解ただ一つである.

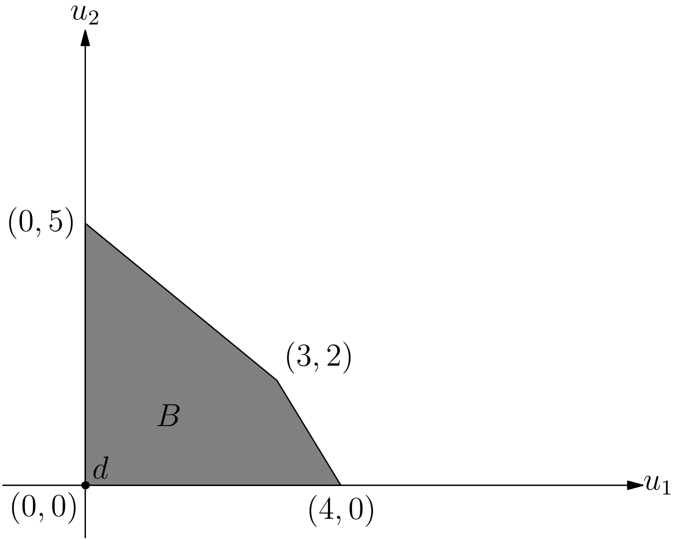
1. パレート最適性
2. 対称性
3. 正アフィン変換からの独立性
4. 無関係な結果からの独立性

(公理から求めた交渉解)=(公式から求めた交渉解)

公理による特徴付け

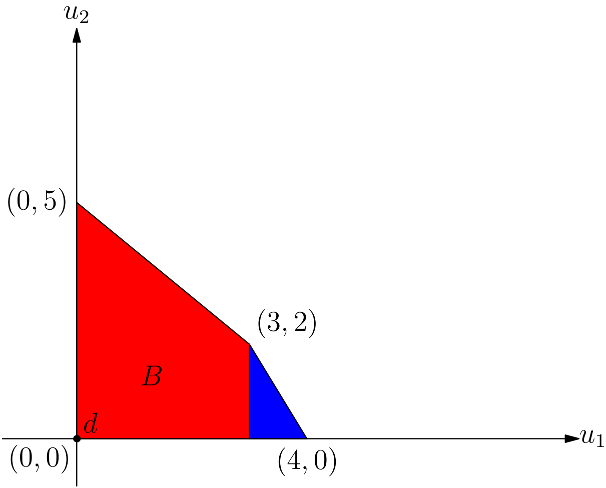
- 複数の解の中，なぜナッシュ交渉解が望ましいか．
- 望ましい性質を満たしているだけでなく，４つの公理を満たす別の交渉解が存在しないことも示している．
- 「無関係な結果からの独立性」を別の公理に置き換えて，新たな交渉解を定義している研究もある．(例：Kalai-Smorodinsky 交渉解)

例 3



例３の解法（１）

二つの領域（赤と青）に分割し，それぞれの問題を解く．



例３の解法（２）

赤い領域上の最大化問題:

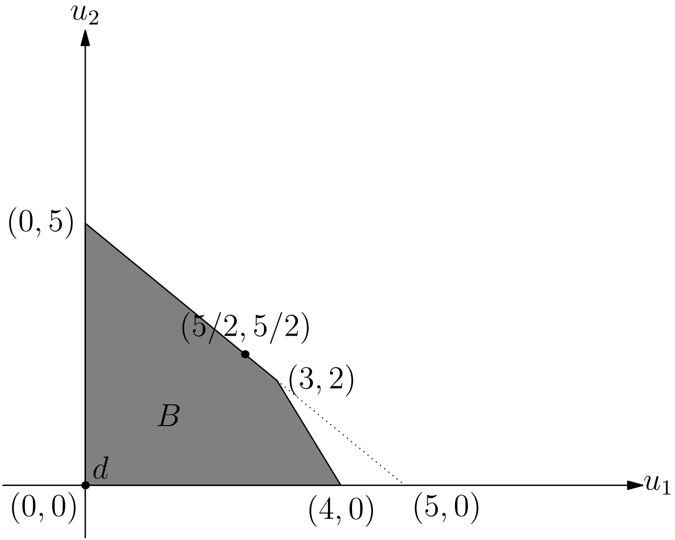
$$\max_{(u_1,u_2):0\le u_1\le 3, u_2\ge 0, u_1+u_2\le 5} u_1 u_2$$

例１と同じ計算 $\to (5/2, 5/2)$. このときの $u_1 u_2$ の値は $25/4$.
青い領域上の最大化問題:

$$\max_{(u_1,u_2):3\le u_1\le 4, u_2\ge 0, 2u_1+u_2\le 8} u_1 u_2$$

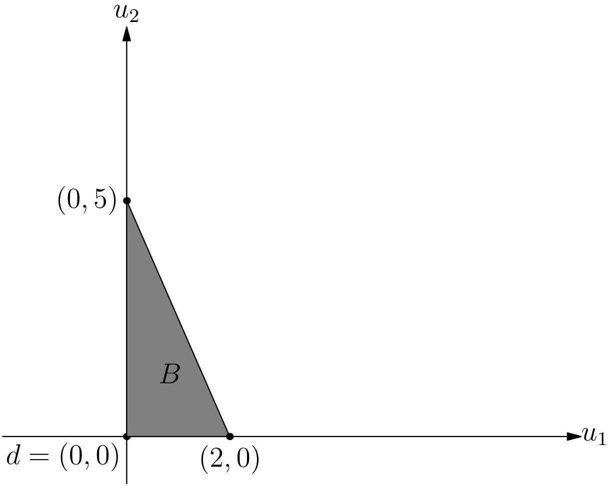
例１と同じ方法で解くと，制約条件 $3 \le u_1 \le 4$ より，最大解は $u_1 = 3$, $u_2 = 2$ となる．しかし，$u_1 u_2 = 6 < 25/4$ のため，
赤い領域上の最大解の方がより高い値を実現しているため，
もとの問題のナッシュ解 は，$u_1^* = u_2^* = 5/2$.（例１と同じ）

例 1 と例 3 の比較



譲渡可能な効用（１）

以下の問題を考える.

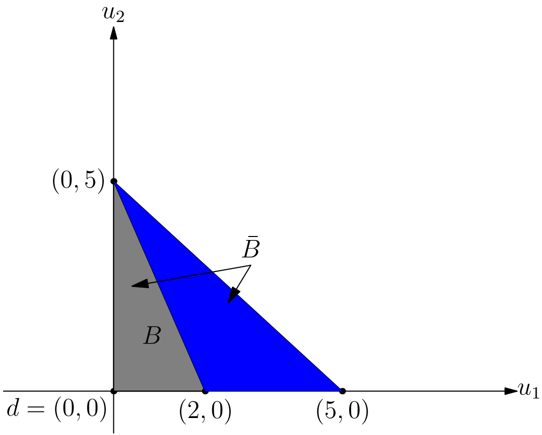


譲渡可能な効用（２）

- プレイヤー間の金銭のやりとり（サイド・ペイメント）が可能な場合を考える $\rightarrow$ 譲渡可能 (Transferable Utility (TU)) な効用
- この例で二人分の合計を最大化しているところは $(0, 5)$ である．
- まずこの点を実現し，その後それぞれの取り分を考える．

譲渡可能な効用（３）

新しい実現可能集合 $\bar{B}$ を考えることになる.



協力ゲームと非協力ゲームの関連性：ナッシュ・プログラム

公理により正当化されたナッシュ交渉解をある非協力ゲームのナッシュ均衡により特徴づけた.

協力ゲームの解概念をある非協力ゲームの均衡（ナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡）を用いて説明することを目的とする研究 $\rightarrow$ ナッシュ・プログラム

おまけ：非協力ゲームからのアプローチ (Rubinstein)（１）

Rubinstein (1982) による正当化 – アイスクリームを分ける交渉ゲーム
ラウンド１：

- プレイヤー１が最初に $(r_1, 1 - r_1)$ を提案．r_1 はプレイヤー１が得られるアイスクリームの割合で $0 \leq r_1 \leq 1$ を満たす．
- プレイヤー２はその提案を承諾するか，拒否するかの二つの選択肢がある．承諾すれば，$(r_1, 1 - r_1)$ の通りに利得が決まる．拒否すれば次のラウンドに進む．

非協力ゲームからのアプローチ (Rubinstein)（２）

ラウンド２：アイスクリームが大きさが δ $(0 < \delta < 1)$.

- プレイヤー２が最初に $(1 - r_2, r_2)$ を提案．r_2 はプレイヤー２が得られるアイスクリームの割合で $0 \le r_2 \le 1$ を満たす.
- プレイヤー１はその提案を承諾するか，拒否するかの二つの選択肢がある．承諾すれば，$(\delta(1 - r_2), \delta r_2)$ が利得になる．拒否すれば次のラウンドに進む.

ラウンド３は再びプレイヤー１が提案し，ラウンド１と同じ構造．ただし，アイスクリームの大きさが δ^2.

非協力ゲームからのアプローチ (Rubinstein)（３）

- δ：割引因子，δ が大きいほど将来の利得を重視する．
- $\delta \to 1$，部分ゲーム完全均衡（ナッシュ均衡の精緻化された均衡概念の一つ）の利得 $\to$ ナッシュ交渉解

宿題第１回

課題:

1. 練習問題１の 1(a),(b),(c)

提出期限：6 月 20 日（月）13:20
必ずホームワーク表紙を使い（OCW-i からダウンロード），ホチキスで左上の１箇所でとめること．Ａ４用紙を使用すること．