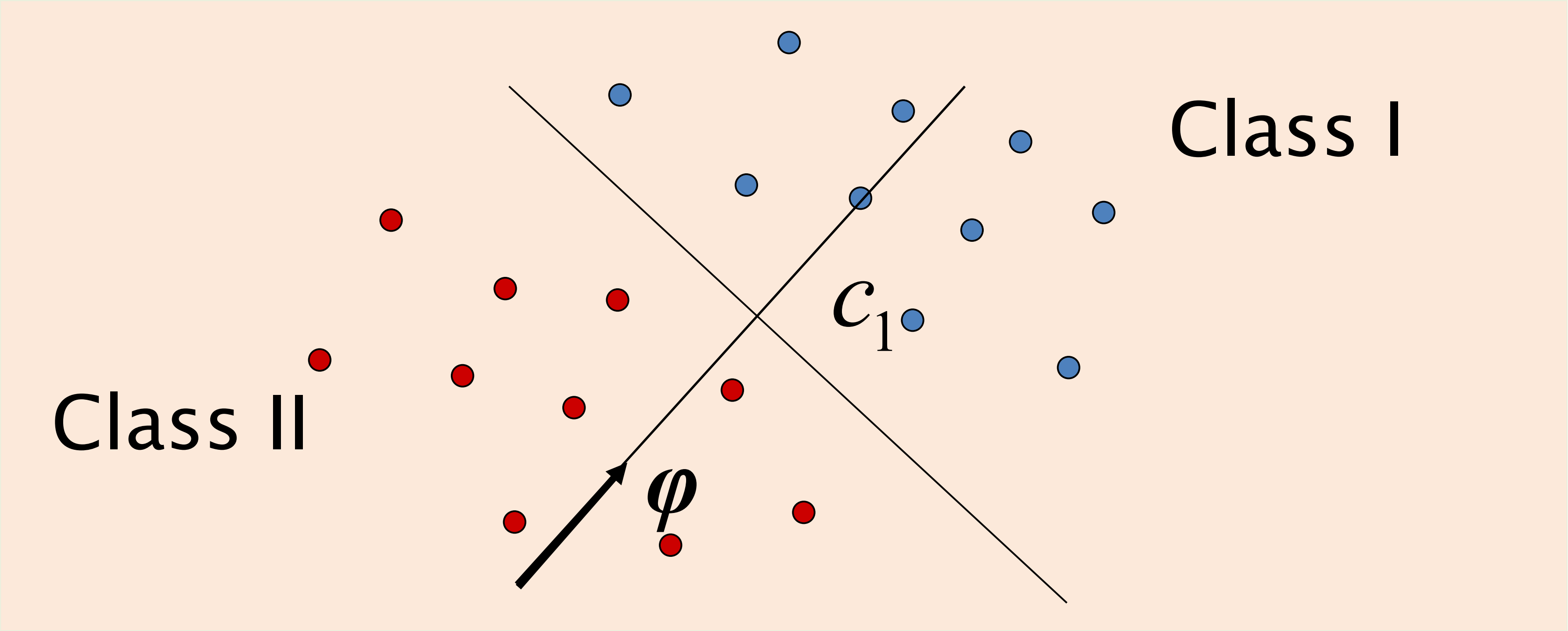
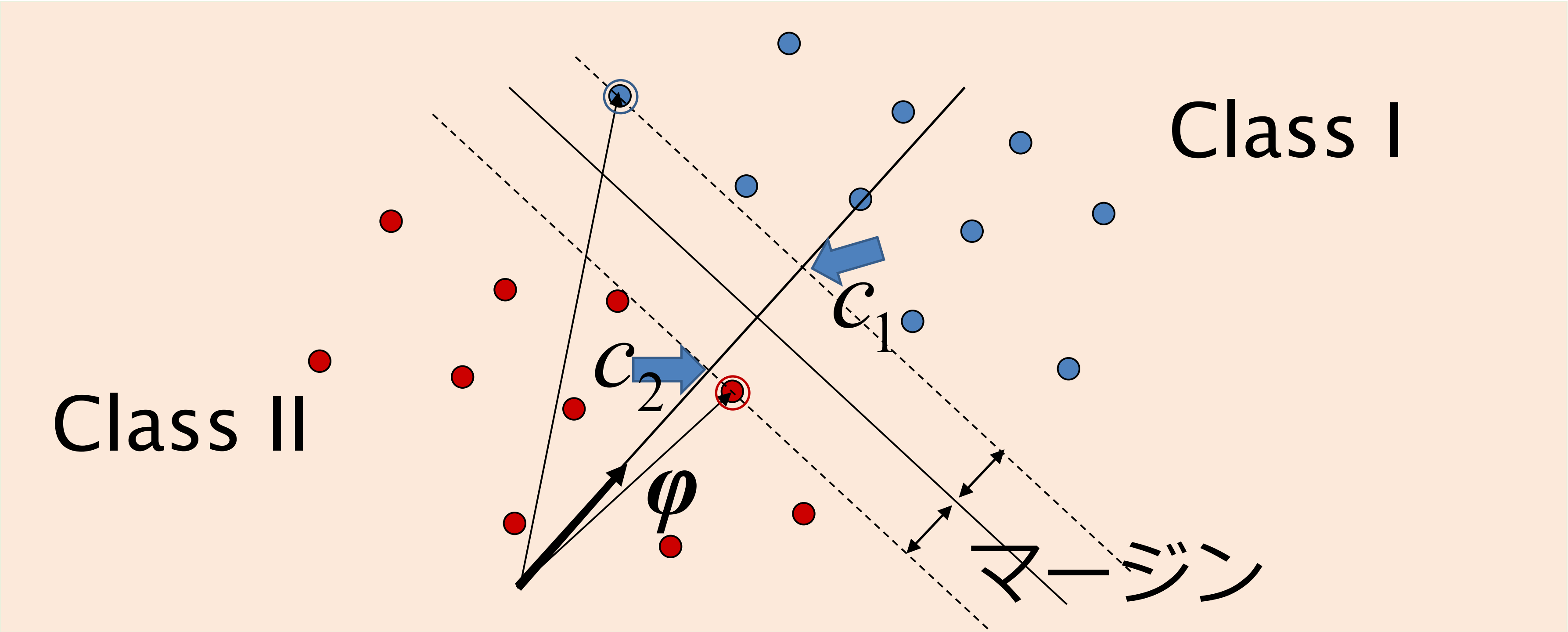
SVMと不等式制約の最適化

線形識別器



マージン

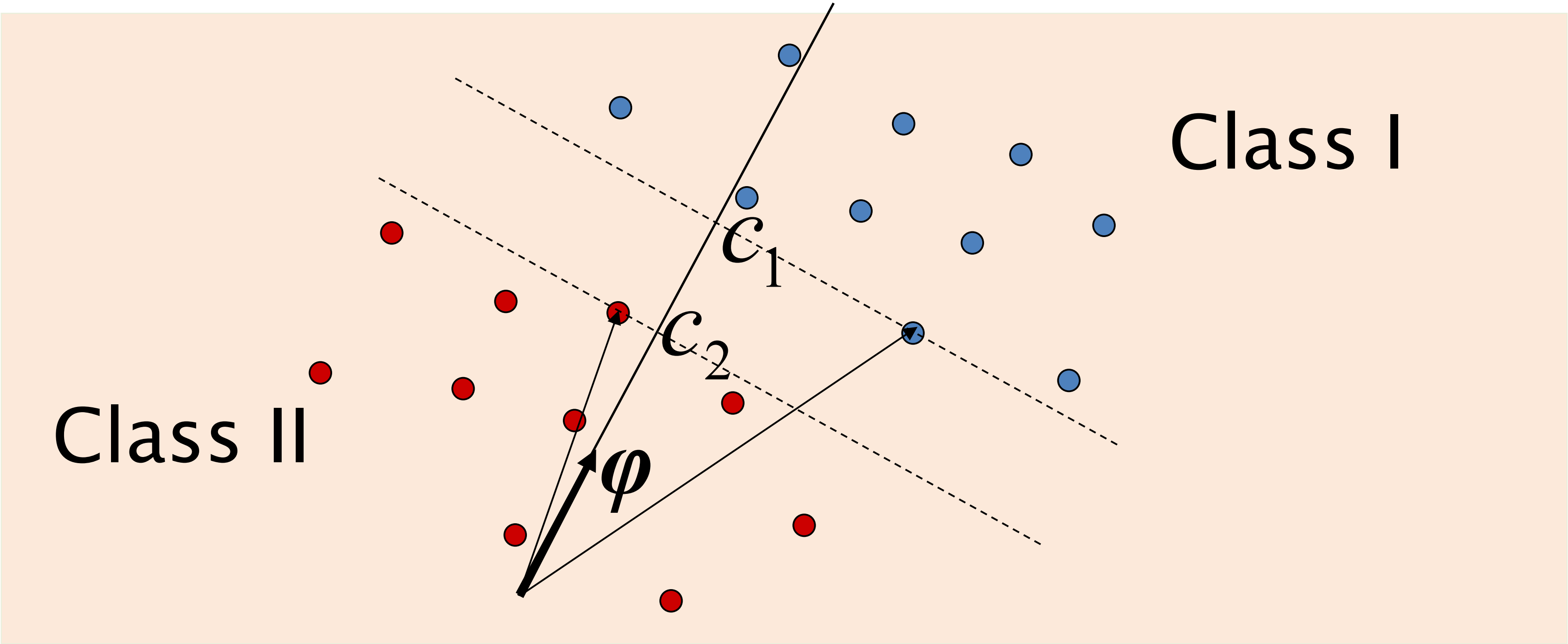


線形分離可能な２クラスについて，「マージン」を以下のように定義する。

$$\rho = (c_1 - c_2)/2$$

$$c_1(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\boldsymbol{x}_i \in I} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i\,, \quad c_2(\boldsymbol{\varphi}) = \max_{\boldsymbol{x}_i \in II} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i\,.$$

マージン最大化

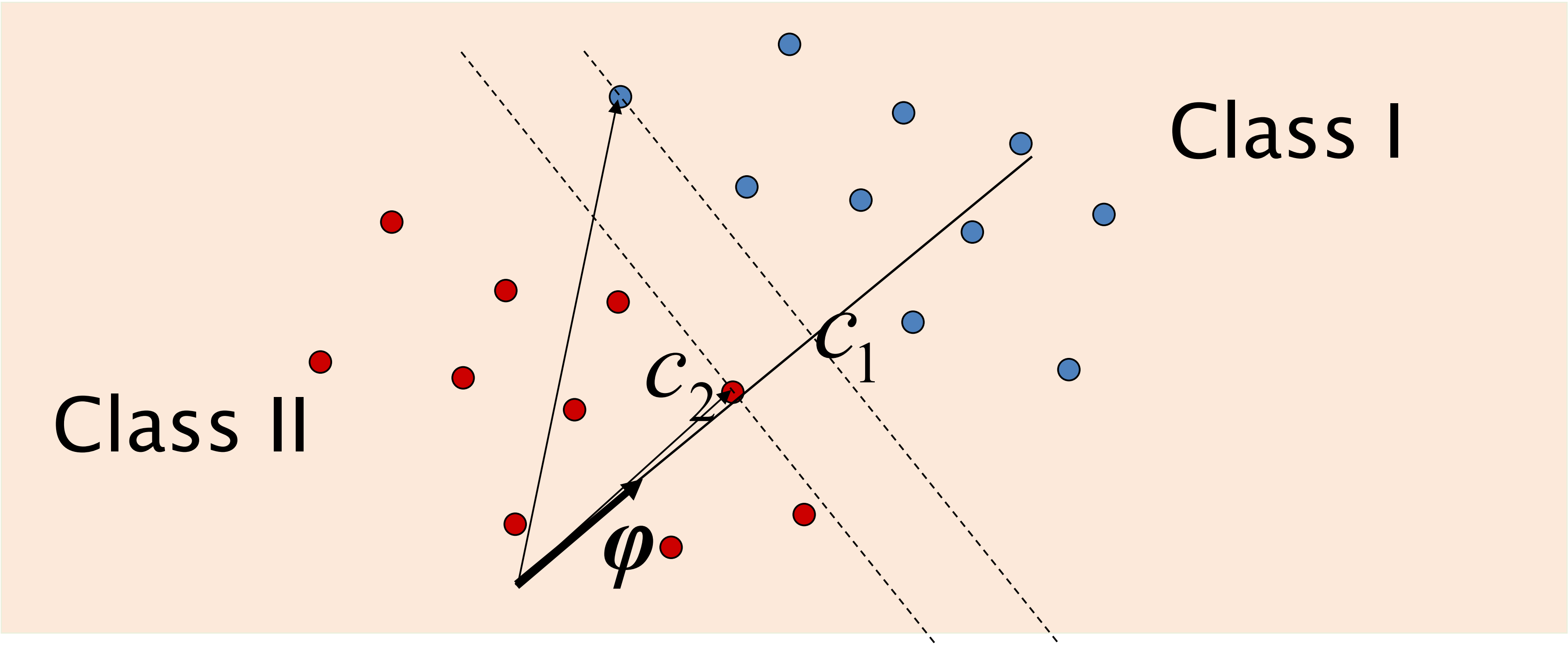


異なる $\boldsymbol{\varphi}$ に対し，異なる c_1 , c_2が定まる。

$$c_1(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\boldsymbol{x}_i \in I} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i$$

$$c_2(\boldsymbol{\varphi}) = \max_{\boldsymbol{x}_i \in II} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i$$

マージン最大化

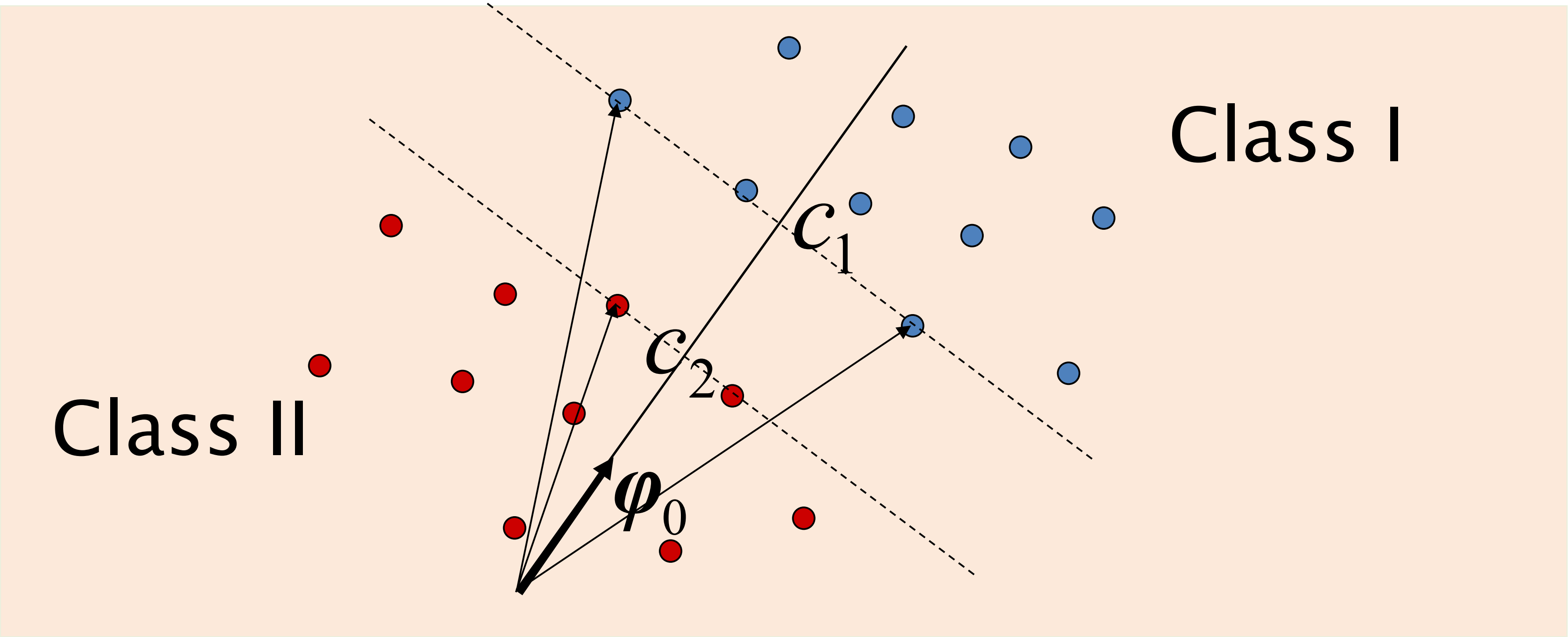


異なる $\boldsymbol{\varphi}$ に対し，異なる c_1 , c_2が定まる。

$$c_1(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\boldsymbol{x}_i \in I} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i$$

$$c_2(\boldsymbol{\varphi}) = \max_{\boldsymbol{x}_i \in II} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i$$

マージン最大化



マージンを最大化する φ_0 を考える。

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}}\, \rho(\boldsymbol{\varphi}) = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \frac{c_1(\boldsymbol{\varphi}) - c_2(\boldsymbol{\varphi})}{2}$$

このとき， $\boldsymbol{\varphi}_0$ が作る境界は，最も危険の少ない識別境界となる．

SVMの問題

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}}\, \rho(\boldsymbol{\varphi}) = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \frac{c_1(\boldsymbol{\varphi}) - c_2(\boldsymbol{\varphi})}{2}. \qquad (1)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i &\geq c + \rho, \quad && if\ \ y_i = 1 \\ \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i &\leq c + -\rho, && if\ \ y_i = -1 \end{aligned} \qquad (2)$$

ここで,

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\varphi}\| = 1, \\ &c_1(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\boldsymbol{x}_i \in I} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i, \quad c_2(\boldsymbol{\varphi}) = \max_{\boldsymbol{x}_i \in II} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i\,, \qquad (3) \\ &c = \frac{c_1(\boldsymbol{\varphi}) + c_2(\boldsymbol{\varphi})}{2} \end{aligned}$$

SVMの問題

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}}\, \rho(\boldsymbol{\varphi}) = \underset{\boldsymbol{\varphi}}{\operatorname{argmax}} \frac{c_1(\boldsymbol{\varphi}) - c_2(\boldsymbol{\varphi})}{2}. \quad (1)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i &\geq c + \rho, & if\ \ y_i &= 1 \\ \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i &\leq c + -\rho, & if\ \ y_i &= -1 \end{aligned} \quad (2)$$

不等式の制約を持つ最適化問題

ここで,

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = 1,$$

$$c_1(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\boldsymbol{x}_i \in I} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i, \quad c_2(\boldsymbol{\varphi}) = \max_{\boldsymbol{x}_i \in II} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{x}_i\,, \quad (3)$$

$$c = \frac{c_1(\boldsymbol{\varphi}) + c_2(\boldsymbol{\varphi})}{2}$$