統計学II

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の講義の目標

- （線形）回帰モデル
  - 回帰モデルの仕組み

回帰モデルの仕組み(1)

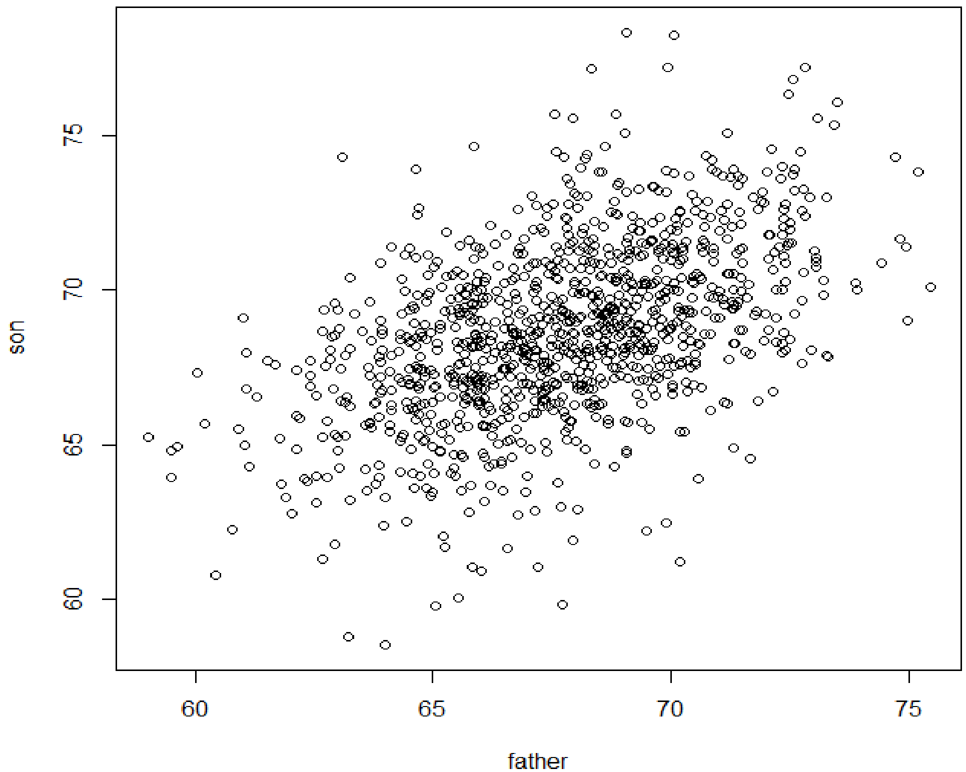


図1：父親の身長と息子の身長の散布図

野口・西郷(2014)『基本 統計学』p. 196

回帰モデルの仕組み(2)

- 図1から読み取れる特徴（2つ）
  - 一般的な傾向
    - おおよそ右上がり
      - 父親の身長(x)が高ければ、息子の身長(Y)も高いという傾向がある。
        - 原因：遺伝の影響、その他
  - 個々の観察点にみられる現象
    - 縦軸方向のバラつき
      - 父親の身長(x)が同じでも、息子の身長(Y)が同じであるとはかぎらない。
        - 原因：父親の身長以外の要因
- これら2つの特徴を同時に表現できる、データ発生の仕組み（統計モデル）
  - 回帰モデル

回帰モデルの仕組み(3)

- （一般の）回帰モデル
  - $Y_i = f(x_i) + u_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n)$
    - Y_i : 被説明変数（従属変数、応答変数、結果変数、…）
    - x_i : 説明変数（独立変数、回帰子、原因変数、…）
    - u_i : 誤差項（攪乱項、撹乱項、[残差項]、…）

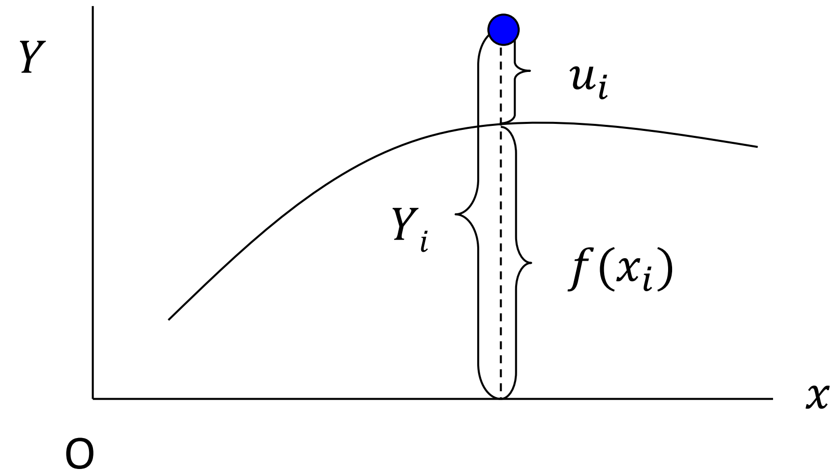


図2 : 回帰モデル

回帰モデルの仕組み(4)

- 誤差項の必要性
  - 被説明変数 Y_i に影響を及ぼす要因
    - 多数ある。
      - » 例：母親の身長、栄養状態、…
    - すべてを取り入れて測定することは不可能である。
    - 主要なものは説明要因に取り入れる。
    - それ以外の種々雑多な説明要因を誤差項に一括する。
      - » 上記はひとつの説明である。他の説明もある。実際問題として、被説明変数を説明変数の関数（説明変数の値が定まれば、被説明変数の値がひとつに定まる）では表現できない。

回帰モデルの仕組み(5)

- （線形）回帰モデル
  - 回帰関数 $f(x_i)$ の選択
    - $E(Y_i|x_i) = f(x_i)$
      - ただし、$E(u_i|x_i) = 0$ を仮定している。
      - 回帰関数 は、x の値を条件としたときに、Yの条件付き期待値と解釈できる。
  - どんな関数形を想定すべきか
    - 近似的な関係式をあらかじめ指定する。
      - 1次式：$f(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
      - 2次式、指数関数、対数関数、その他。
      - ある程度単純で、かつ、データの全体的な傾向を捉える
        - » 父親の身長と息子の身長データについては、1次式で十分であるように見える。
    - 近似的な関係式をデータから探す。
      - この講義ではあつかわない。

回帰モデルの仕組み(6)

- 線形回帰モデル
  - $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$
    - 回帰係数
      - 定数項：β_0、傾き：β_1

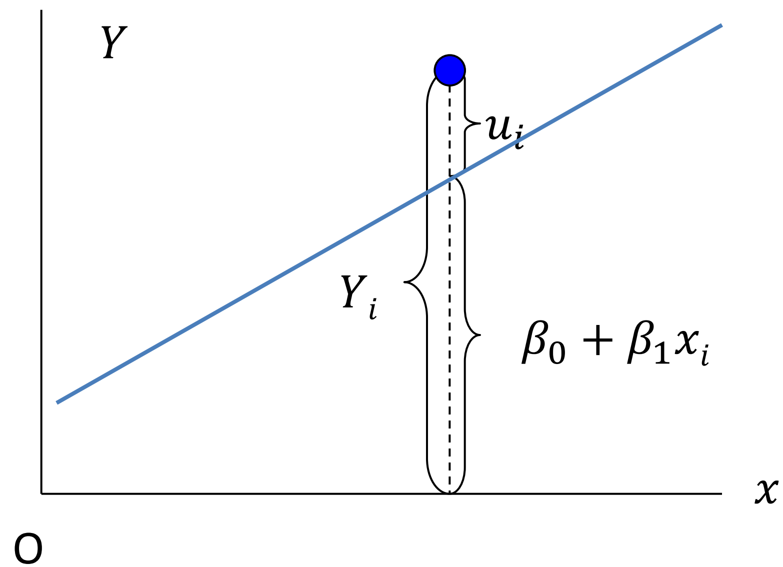


図3：線形回帰モデル

最小2乗法（復習）(1)

- 最小2乗法
  - $\sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i\right)\right\}^2$ が最小になるような $\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ を回帰係数の最小2乗推定量と呼ぶ。
  - 解
    - $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i\right)\right\}=0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\left\{Y_i-\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i\right)\right\}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \\ \hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{x} \end{cases}$$

最小2乗法（復習）(2)

- 例：
  - Pearson の親子の身長のデータ
    - 回帰係数の推定値
      - $\hat{\beta}_1 = 0.51, \hat{\beta}_0 = 33.9$
    - 決定係数
      - $R^2 = 0.25$
    - 記述統計学（統計学Iの学習範囲）では、回帰係数の推定値と決定係数を計算して終わり。
      - 推測統計学（統計学IIの学習範囲）では、その先を考える。

最小2乗法（復習）(3)

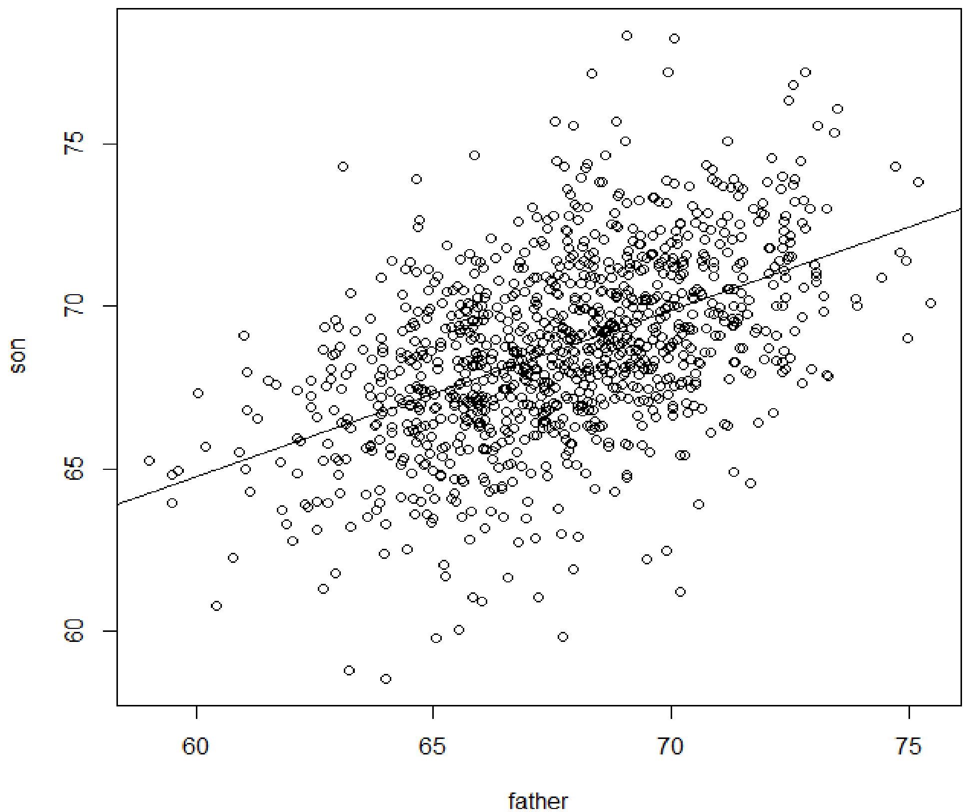


図4：推定された回帰直線

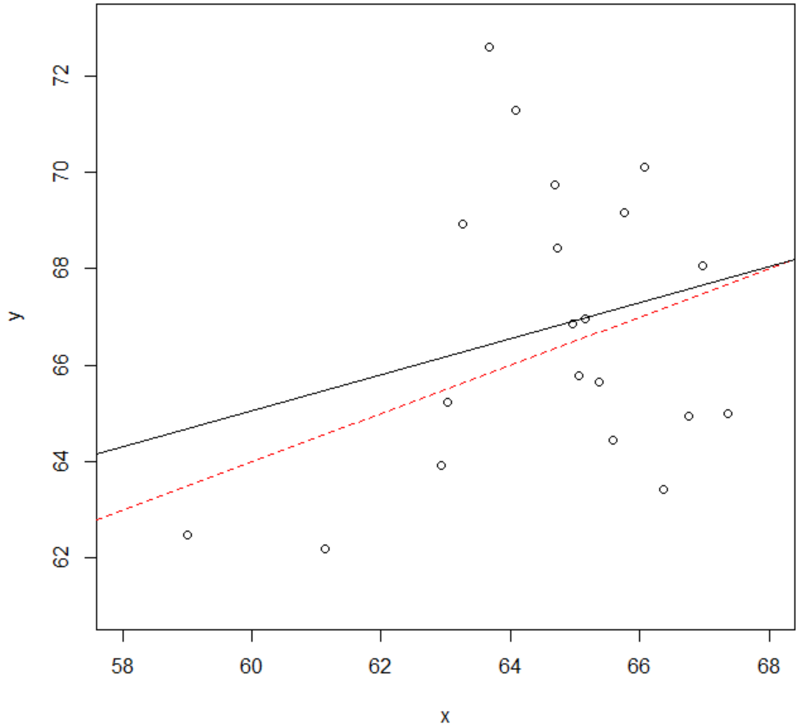
野口・西郷(2014)『基本 統計学』p. 196

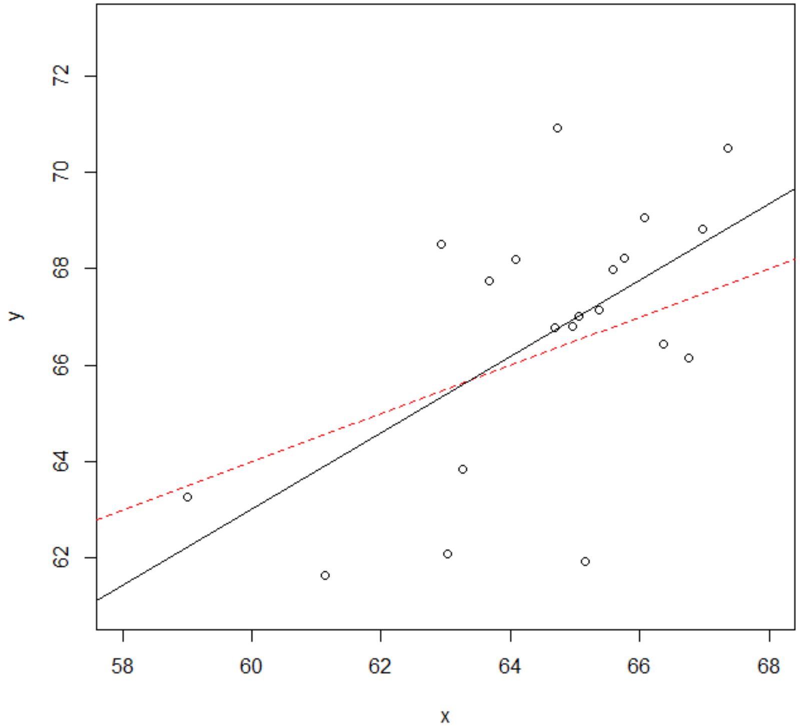
回帰係数とその推定量の関係(1)

- （母）回帰直線
  - $y = \beta_0 + \beta_1 x$
    - 確定（偶然的な変動をふくまない）。
      - しかし、観察不可能（未知母数をふくむ）。
- 最小2乗法で推定された回帰直線
  - $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
    - 観察可能。
      - しかし、不確定（偶然的な変動をふくむ）。
- 両者の関係は？

回帰係数とその推定量の関係(2)

図5：（母）回帰直線と推定された回帰直線
（赤：母回帰直線　黒：推定回帰直線）





回帰係数とその推定量の関係(3)

- 誤差の出方
  - 推定された回帰直線の位置に影響
    - つまり、最小2乗推定量 $\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ に影響
      - 誤差項の確率的な性質によって、最小2乗推定量 $\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ の性質が決まる。
- 誤差項の性質（それに課される条件）を明示する必要あり。

誤差項に課される条件(1)

1. 期待値が0である:$E(u_i) = 0$
2. 分散が均一である:$V(u_i) = \sigma^2$
3. 相互に相関をもたない:$Cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j) = 0$
4. 正規分布にしたがう。
5. 説明変数 x と無関係である。

誤差項に課される条件(2)

1. 期待値が0である:
   - $E(u_i) = 0$
   - $E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)$
     $= E(\beta_0 + \beta_1 x_i) + E(u_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
     - 所与の x のもとで、回帰直線が観察値の平均的な値をあらわす。
       - つまり、「回帰直線によって、被説明変数 Y と説明変数 x との関係が適切に捉えられている」ということを

誤差項に課される条件(3)

図6 : $E(u_i) = 0$ の場合

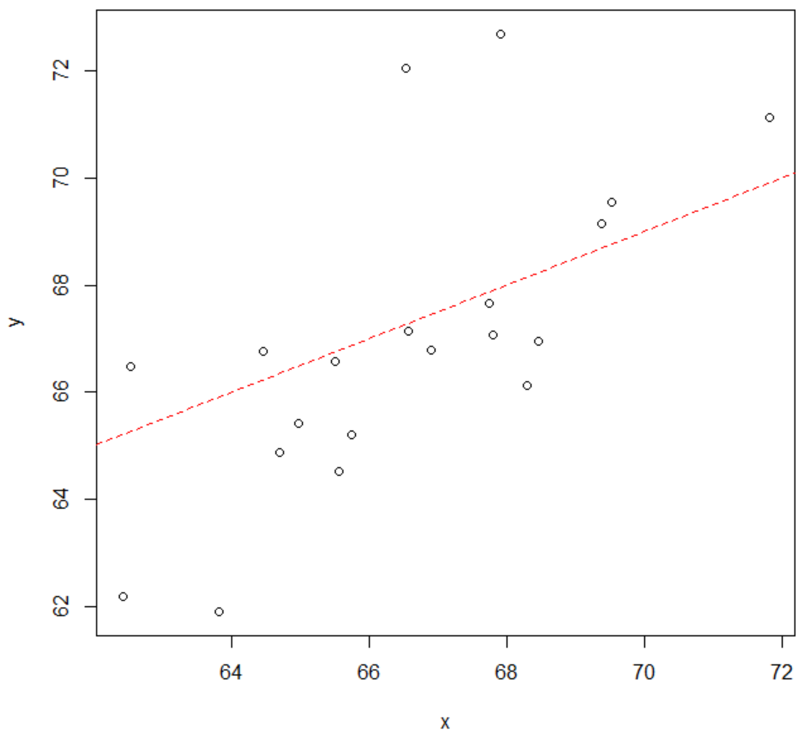
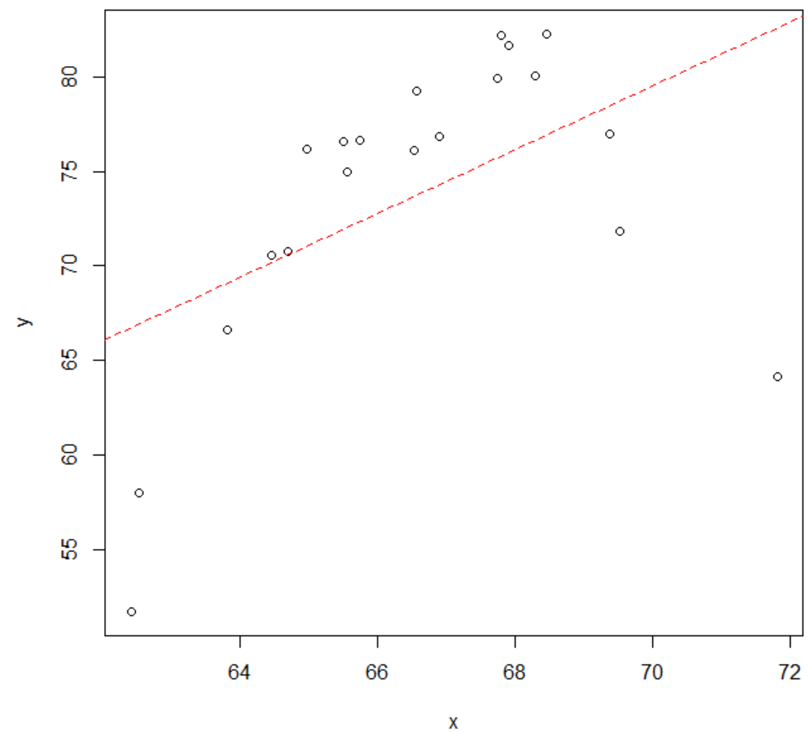


図7 : $E(u_i) \neq 0$ の場合



誤差項に課される条件(4)

2. 分散が均一である:
   - $V(u_i) = \sigma^2$
   - $V(Y_i) = V(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i) = V(u_i) = \sigma^2$
     - 説明変数 x の値によらず、縦軸方向の散らばりが一定である。
       - どの誤差も、回帰直線からの乖離の度合いとして、直接的に大小を比較できる。
         - » 不均一分散の場合を参照

誤差項に課される条件(5)

図8：均一分散の場合

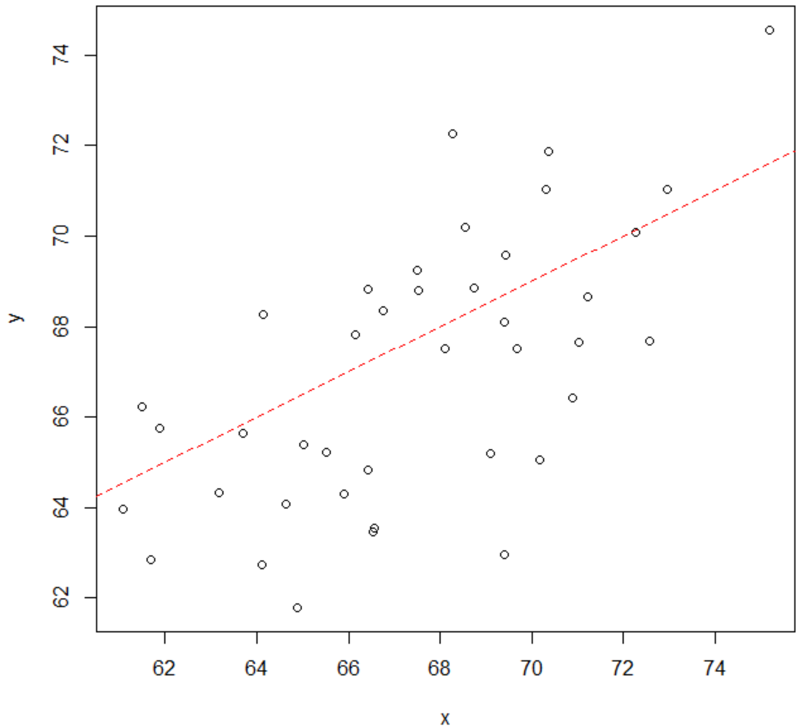
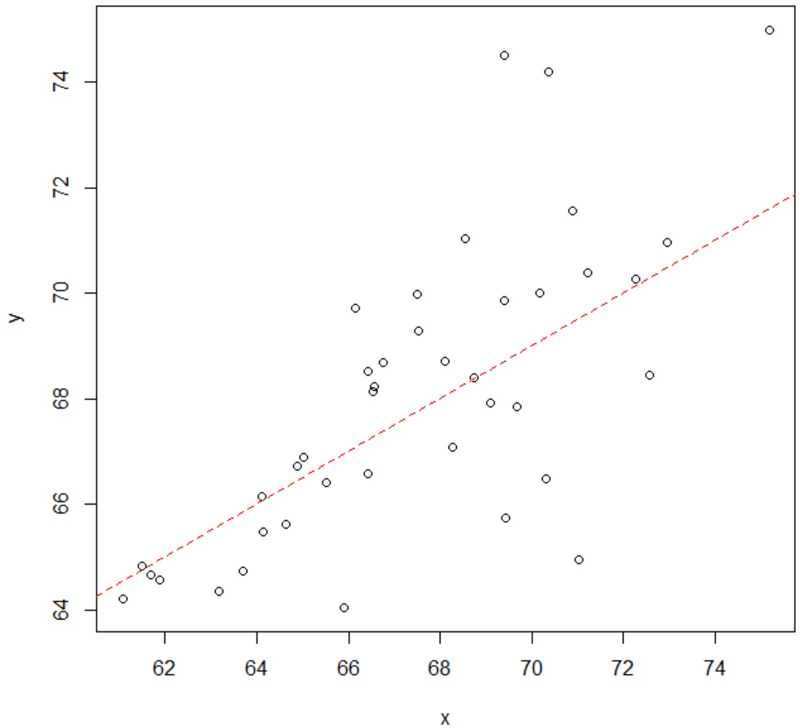


図9：不均一分散の場合



誤差項に課される条件(6)

3. 相互に相関をもたない：
   - $Cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j) = 0$
     - i番目の観察値の誤差がプラスだろうとマイナスだろうと、j番目の観察値の誤差はそれと無関係に符号・値が定まる。
   - $Cov(Y_i, Y_j)$
     $= Cov(\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \beta_0 + \beta_1 x_j + u_j)$
     $= Cov(u_i, u_j) = 0$

誤差項に課される条件(7)

図10：相互に無相関の場合

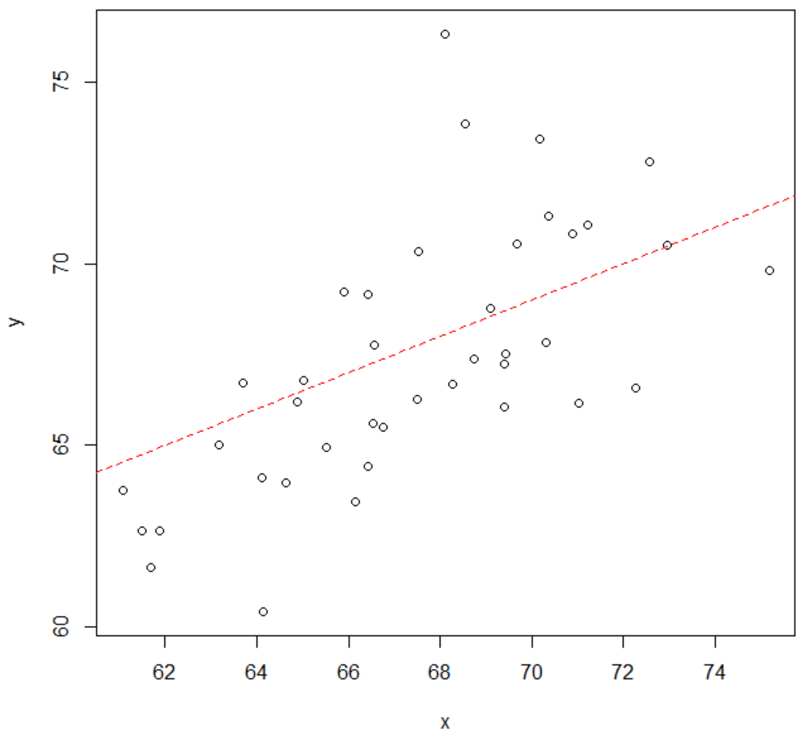
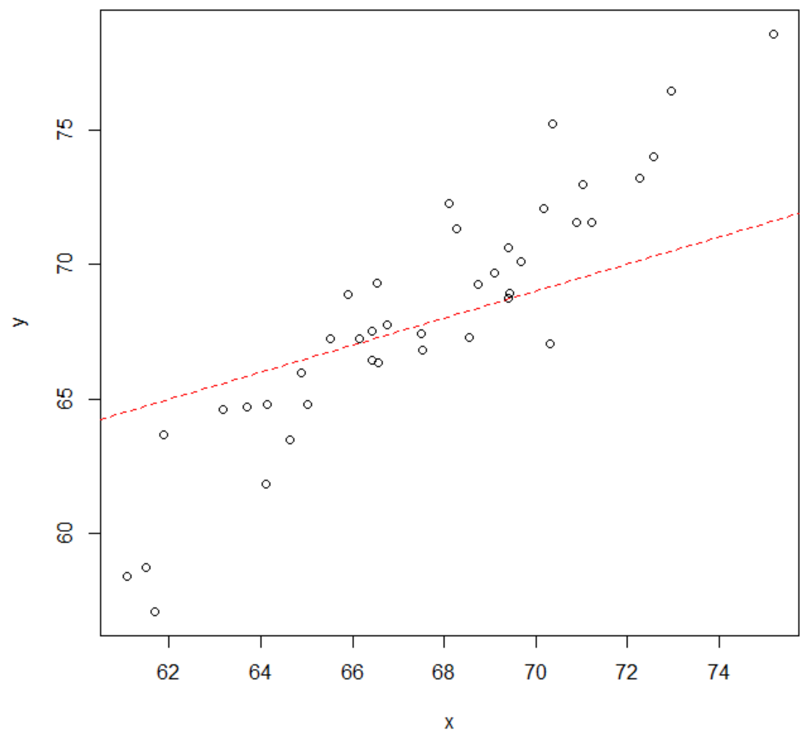


図11：相関のある場合

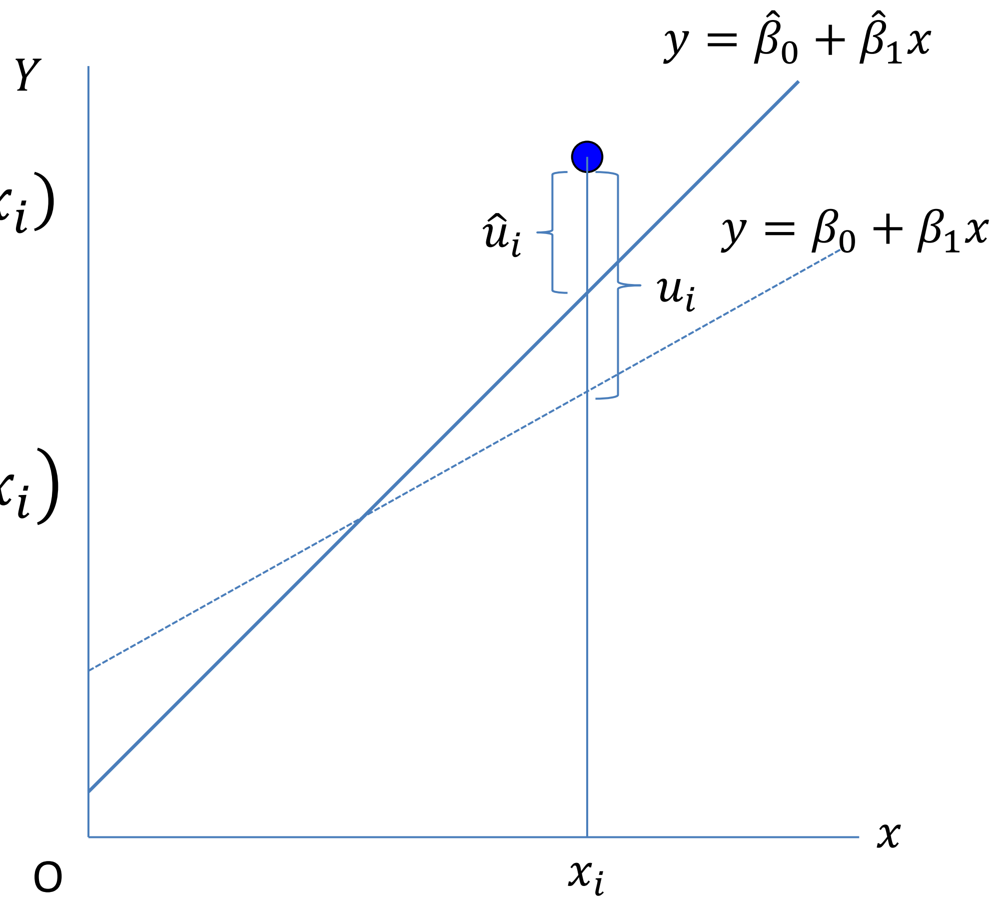


誤差項に課される条件(8)

4. 正規分布にしたがう。
   – 「主要な説明要因以外の種々雑多の説明要因を一括したものが誤差」であるなら、誤差の分布は正規分布で近似できると想定される。
5. 説明変数 x と無関係である。
   – 説明変数 x が大きくても小さくても、誤差の分布は同じである。

誤差項の分散の推定(1)

- 誤差項と残差
  - 誤差項
    - $u_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$
      - 観察不可能
  - 残差
    - $\hat{u}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)$
      - 観察可能
    - 残差の性質
      - $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0$
      - $\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i = 0$



誤差項の分散の推定(2)

- 誤差項の分散の推定量
  - $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$
- 誤差項の分散の推定量の性質
  - 誤差項の分散の不偏推定量:$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$
    - もし、誤差u_iそのものが観察できれば、以下のように不偏推定量が求められる。
      - $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$
    - しかし、誤差u_i は観察不可能である。その代わりに残差$\hat{u}_i$を利用する。ただし、その際は、$n-2$ を分母に使う。

誤差項の分散の推定(3)

- 例
  - Pearson の親子の身長データ
    - $\hat{\sigma}_{obs}^2 = 5.94$