# 統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷浩

# 本日の目標

- 多次元の確率分布
  - 条件つき確率分布、同時確率分布、周辺確率分布
- 確率変数の独立性
- 多次元の確率変数の期待値
- 条件つき期待値と条件付き分散
- 確率変数の和の期待値と分散
  - 共分散

# 条件つき確率分布

- 実験A
  - サイコロを1つ投げる。
  - その結果に応じて、2回目に投げるサイコロを変える。
    - 結果が奇数 → [1,1, 3, 3, 5, 5]
    - 結果が偶数 → [2, 2, 4, 4, 6, 6]
  - 2つの確率変数
    - $X$ = 最初のサイコロの出目
    - $Y$ = 2回目のサイコロの出目
  - $X = 1$ のときの$Y$の条件つき確率分布:
    - $P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{3}$; $P(Y = 2|X = 1) = 0$; $P(Y = 3|X = 1) = \frac{1}{3}$; $P(Y = 4|X = 1) = 0$; $P(Y = 5|X = 1) = \frac{1}{3}$; $P(Y = 6|X = 1) = 0$.
  - $X$ を条件とした $Y$ の条件つき確率関数:
    - $p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x)$

# 同時確率分布(1)

- 同時確率
  - $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y|X=x)$
    - 例：実験Aにおいて、$P(X=1, Y=1)$ を求める
      - $P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1|X=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
- 同時確率関数
  - $p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
    $= P(X=x)P(Y=y|X=x) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$

# 同時確率分布(2)

表1：実験Aに関する*X*と*Y*の同時分布

| x(左); y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/6 |
| 2 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 1/6 |
| 3 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/6 |
| 4 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 1/6 |
| 5 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/6 |
| 6 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 0 | 1/18 | 1/6 |
| 合計 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |

# 周辺確率分布

- 周辺確率
  - $P(Y = y) = P(X = 1, Y = y) + P(X = 2, Y = y) + \cdots + P(X = 6, Y = y)$.
    - 例：実験Aにおける $Y = 1$ の周辺確率
      - $P(Y = 1) = \frac{1}{18} + 0 + \frac{1}{18} + 0 + \frac{1}{18} + 0 = \frac{1}{6}$.
    - $P(X = x)$ を周辺確率とみることもできる。
      - $P(X = x) = P(X = x, Y = 1) + P(X = x, Y = 2) + \cdots + P(X = x, Y = 6)$.

- 表1の周辺部分の分布が$Y$（または$X$）の周辺確率分布

- 周辺確率関数：
  - $p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$.
  - $p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$.

# 同時確率分布と条件つき確率分布(1)

- $X$ を条件としたときの $Y$ の条件つき確率
  - $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$
- $X$ を条件としたときの $Y$ の条件つき確率関数
  - $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$
  - $x$ の値を固定して $y$ の値を変化させると、$Y$ の条件つき確率をあたえる。
    - 例:つぎのスライド

# 同時確率分布と条件つき確率分布(2)

表2：実験Aに関する $X$ を条件としたときの$Y$の条件つき分布

| x(左)；y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1(1/6) |
| 2 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1(1/6) |
| 3 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1(1/6) |
| 4 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1(1/6) |
| 5 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1(1/6) |
| 6 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1(1/6) |
| 合計 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |

注：( ) 内は同時確率を示す。

# 同時確率分布と条件つき確率分布(3)

- $Y$ を条件としたときの $X$ の条件つき分布
  - $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
    - $y$ の値を固定して $x$ の値を変化させると、$X$ の条件つき確率をあたえる。

# 同時確率分布と条件つき確率分布(4)

表3：実験Aに関する *Y* を条件としたときの*X*の条件つき分布

| x(左)；y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/6 |
| 2 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1/6 |
| 3 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/6 |
| 4 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1/6 |
| 5 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/6 |
| 6 | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 0 | 1/3(1/18) | 1/6 |
| 合計 | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1 |

注：( ) 内は同時確率を示す。

# 確率変数の独立性(1)

- 実験B
  - サイコロを1つ投げる。
  - その結果が何であれ、2回目に普通のサイコロを投げる。
  - 同時確率分布
    - 次のスライド
  - 条件つき確率分布
    - その次の2つのスライド

# 確率変数の独立性(2)

表4: 実験Bに関する $X$ と $Y$ の同時分布

| x(左); y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 2 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 3 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 4 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 5 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 6 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/6 |
| 合計 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |

# 確率変数の独立性(3)

表5：実験Bに関する $X$ を条件とした $Y$ の条件つき分布

| x（左）; y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 2 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 3 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 4 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 5 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 6 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1(1/6) |
| 合計 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |

注：( ) 内は同時確率を示す。

# 確率変数の独立性(4)

表6: 実験Bに関する $Y$ を条件とした $X$ の条件つき分布

| x(左); y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 2 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 3 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 4 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 5 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 6 | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6(1/36) | 1/6 |
| 合計 | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1(1/6) | 1 |

注: ( ) 内は同時確率を示す。

# 確率変数の独立性(5)

- 実験Bの特徴
  - すべての $x, y$ について $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$
    - 表4参照
    - 同時確率分布が、周辺確率分布の積で求められる。
  - すべての $x, y$ について $p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)$
    - 表5参照
    - $X$ の実現値は $Y$ の出方(確率分布)に影響を及ぼさない。
  - すべての $x, y$ について $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$
    - 表6参照
    - $Y$ の実現値は $X$ の出方(確率分布)に影響を及ぼさない。
  - 上の3つの条件のうち1つが成り立てば、他の2つは自動的に成り立つ。
- 3つの条件のうち1つが成り立てば、「$X$ と $Y$ とが独立である」という。

# 確率変数の独立性(6)

- 実験Aの特徴
  - 独立性の条件が成り立たない。
    - 例:$p_{Y|X}(1|1) = \frac{1}{3}, p_{Y|X}(1|2) = 0$
      - $X$ の実現値に応じて $Y$ の出方が変わる。
  - 独立性の条件が成り立たないとき、「$X$ と $Y$ とが独立でない(従属している)」という。
- 独立性の直観的な意味
  - $X$ と $Y$ とが独立である。
    ⇔ $X$ の発生と $Y$ の発生とが無関係である。
    ⇔ $X$ の値がわかっても、$Y$ についての情報にならない。
  - $X$ と $Y$ とが独立でない。
    ⇔ $X$ の発生と $Y$ の発生とが関係ある。
    ⇔ $X$ の値がわかると、$Y$ についての情報になる。

# 多次元の確率変数の期待値(1)

- 表7: $(X,Y)$ の同時確率分布

| x(表側)y | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/12 | 2/12 | 1/12 |
| 2 | 2/12 | 1/12 | 1/12 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 2/12 |

- $Z = XY$ の期待値を計算する。
  - $Z$ の確率分布にもとづく計算方法
    - $E(Z) = \sum_z z p_Z(z) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{4}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{2}{12} + 6 \times \frac{1}{12} + 8 \times \frac{1}{12} + 12 \times \frac{2}{12} = \frac{58}{12}$
  - $(X,Y)$ の同時分布にもとづく計算方法
    - $E(XY) = \sum_x \sum_y xy p_{X,Y}(x,y) = 1 \times 1 \times \frac{1}{12} + 1 \times 2 \times \frac{2}{12} + 1 \times 4 \times \frac{1}{12} + 2 \times 1 \times \frac{2}{12} + 2 \times 2 \times \frac{1}{12} + 2 \times 4 \times \frac{1}{12} + 3 \times 1 \times \frac{1}{12} + 3 \times 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times 4 \times \frac{2}{12} = \frac{58}{12}$

# 多次元の確率変数の期待値(2)

- 多次元の確率変数の関数の期待値
  - $E\big(g(X,Y)\big) = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$

# 条件つき期待値(1)

- 表8: $X$を条件としたときの$Y$の条件つき確率分布

| x(表側)y | 1 | 2 | 4 | 合計 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) |
| 2 | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) |
| 3 | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1(4/12) |

- 条件つき期待値
  - $X$=1 のときの $Y$ の条件つき期待値
    - $E_{Y|X}(Y|1) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{9}{4}$
  - $X$の他の値に対応するの$Y$ の条件つき期待値
    - $E_{Y|X}(Y|2) = \frac{2}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{8}{4}$
    - $E_{Y|X}(Y|3) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{4} \times 4 = \frac{11}{4}$

# 条件つき期待値(2)

- 条件とした確率変数の変化
  - $X = 1$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき期待値：9/4
  - $X = 2$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき期待値：8/4
  - $X = 3$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき期待値：11/4
- 条件つき期待値そのものが、条件とした変数の変化に応じて変化する確率変数とみなせる。
  - $E_{Y|X}(Y|X)$ と記して、「$Y$ の条件つき期待値が $X$ の値に応じて変化する確率変数である」とみなす。
  - このとき、以下の式が成立する。
    - $E(Y) = E_X\{E_{Y|X}(Y|X)\}$

# 条件つき分散(1)

- 表9：$X$を条件としたときの$Y$の条件つき確率分布と期待値

| x（表側）y | 1 | 2 | 4 | 合計 | $E_{Y\|X}(Y\|x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 9/4 |
| 2 | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 8/4 |
| 3 | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1(4/12) | 11/4 |

- 条件つき分散
  - $X=1$ のときの $Y$ の条件つき分散
    - $V_{Y|X}(Y|1)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{2}{4}\times\left(2-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(4-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$
  - $X$の他の値に対応する$Y$ の条件つき分散
    - $V_{Y|X}(Y|2)=\frac{2}{4}\times\left(1-\frac{8}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(2-\frac{8}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(4-\frac{8}{4}\right)^2=\frac{24}{16}$
    - $V_{Y|X}(Y|3)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(2-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{2}{4}\times\left(4-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{27}{16}$

# 条件つき分散(2)

- 条件とした確率変数の変化
  - $X = 1$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき分散: 19/16
  - $X = 2$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき分散: 24/16
  - $X = 3$ (確率 4/12 で発生)のときの $Y$ の条件つき分散: 27/16

- 条件つき分散そのものが、条件とした変数の変化に応じて変化する確率変数とみなせる。
  - $V_{Y|X}(Y|X)$ と記して、「$Y$ の条件つき分散が $X$ の値に応じて変化する確率変数である」とみなす。
  - このとき、以下の式が成立する。
    - $V(Y) = E_X\{V_{Y|X}(Y|X)\} + V_X\{E_{Y|X}(Y|X)\}$

# 条件つき期待値・分散の性質(1)

- 表10: 条件つき期待値・分散と通常の期待値・分散

| x（表側）y | 1 | 2 | 4 | 合計 | $E_{Y\|X}(Y\|x)$ | $V_{Y\|X}(Y\|x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 9/4 | 19/16 |
| 2 | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 8/4 | 6/4 |
| 3 | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1(4/12) | 11/4 | 27/16 |
| 合計 | (1/3) | (1/3) | (1/3) | (1) | - | - |

- $E(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$
- $E_X\{E_{Y|X}(Y|X)\} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{11}{4} \times \frac{4}{12} = \frac{7}{3}$

# 条件つき期待値・分散の性質(2)

- 表11: 条件つき期待値・分散と通常の期待値・分散

| x(表側)y | 1 | 2 | 4 | 合計 | $E_{Y\|X}(Y\|x)$ | $V_{Y\|X}(Y\|x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 9/4 | 19/16 |
| 2 | 2/4(2/12) | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 1(4/12) | 8/4 | 6/4 |
| 3 | 1/4(1/12) | 1/4(1/12) | 2/4(2/12) | 1(4/12) | 11/4 | 27/16 |
| 合計 | (1/3) | (1/3) | (1/3) | (1) | - | - |

  - $V(Y) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(4 - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$
  - $V_X\{E_{Y|X}(Y|X)\} = \frac{4}{12} \times \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{4}{12} \times \left(\frac{8}{4} - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{4}{12} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{72}$
  - $E_X\{V_{Y|X}(Y|X)\} = \frac{4}{12} \times \frac{19}{16} + \frac{4}{12} \times \frac{24}{16} + \frac{4}{12} \times \frac{27}{16} = \frac{35}{24}$

# 確率変数の和の期待値と分散(1)

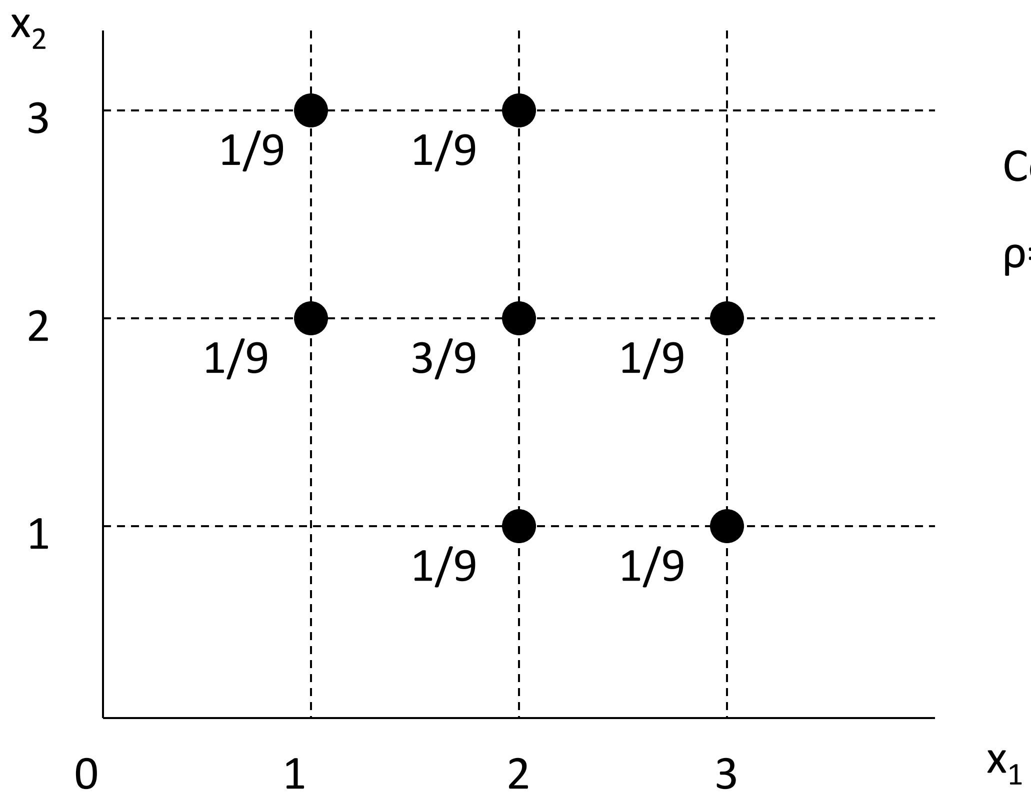
- 確率変数の和の期待値
  - $E(X+Y) = E_X(X) + E_Y(Y) = \mu_X + \mu_Y$
- 確率変数の和の分散
  - $V(X+Y) = V_X(X) + V_Y(Y) + 2Cov(X,Y)$
    - 共分散（$X$ と $Y$ との関係の指標）
      - $Cov(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)p_{X,Y}(x,y)$
    - 相関係数（$X$ と $Y$ との関係の指標）
      - $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V_X(X) \times V_Y(Y)}}$
  - $X$ と $Y$ とが独立であるとき:
    - $Cov(X,Y) = 0$
    - $V(X+Y) = V_X(X) + V_Y(Y)$
    - $\rho_{X,Y} = 0$

# 確率変数の和の期待値と分散(2)

- 応用
  - 2項分布の期待値と分散を求める。
    - $X \sim Binomial(n, p)$
    - $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, ただし、$X_i \sim_{iid} Bernoulli(p)$
    - $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$
    - $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = np(1 - p)$

# 共分散の符号(1)

図1：ケース1（負の相関）

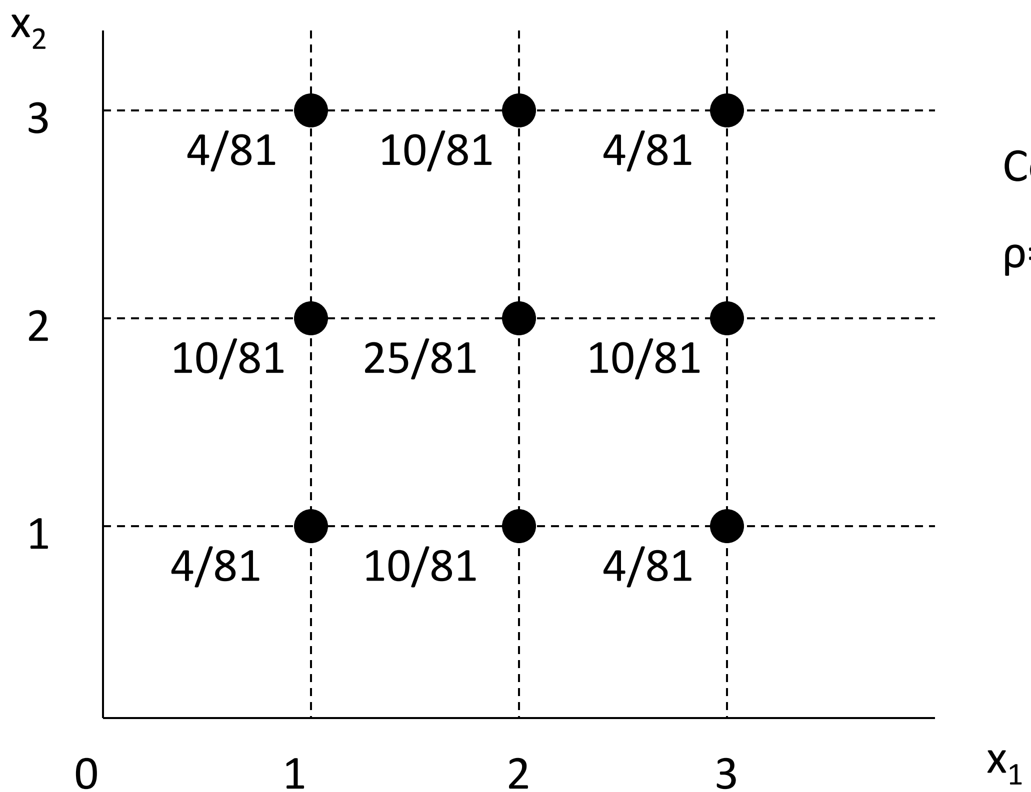



$Cov(X_1, X_2) = -2/9$

$\rho=-0.5$

# 共分散の符号(2)

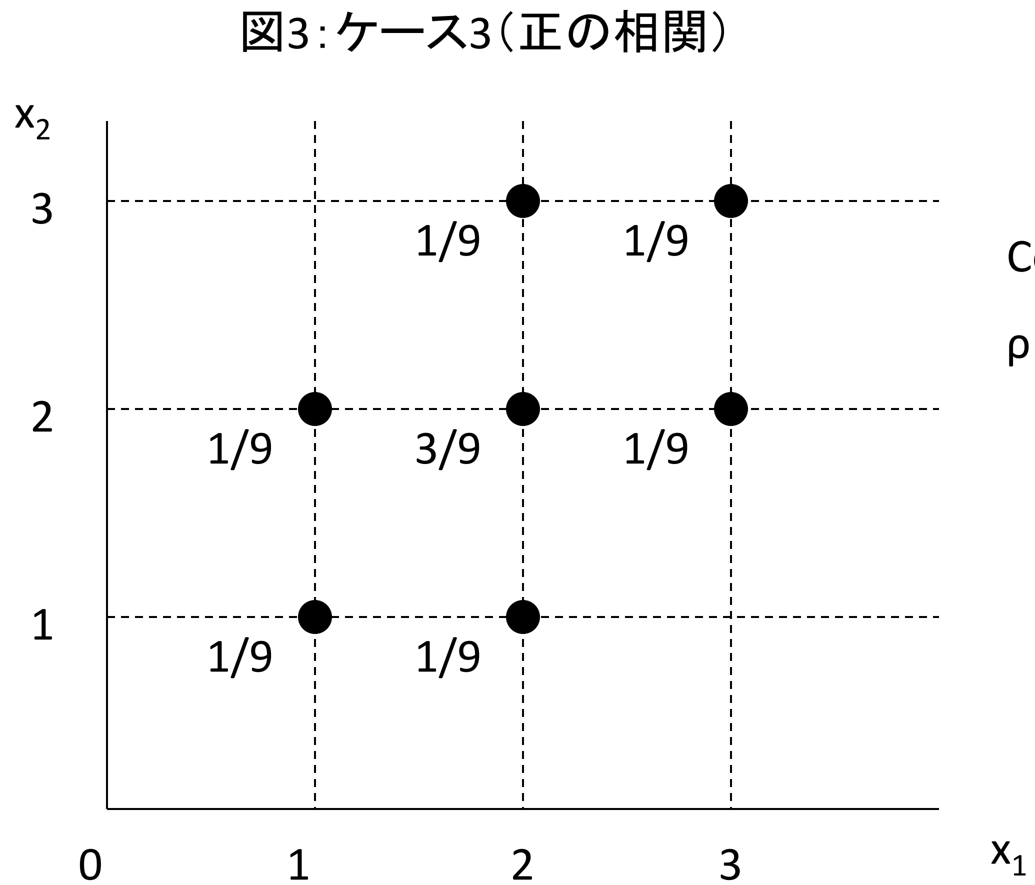
図2：ケース2（独立）




$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$

$\rho=0$

# 共分散の符号(3)

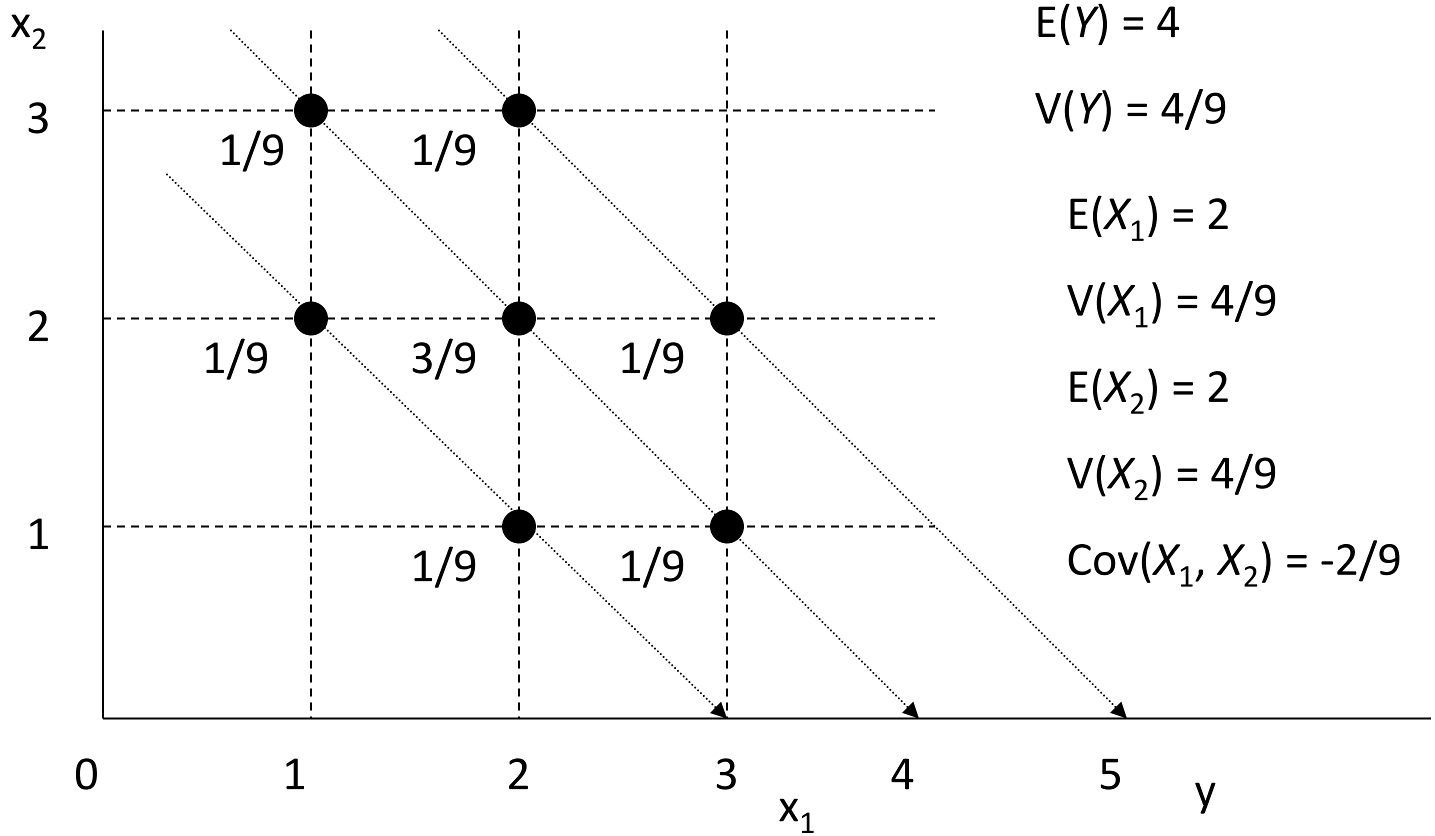



$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 2/9$

$\rho = 0.5$

# 和の分散(1)

図1：ケース1（負の相関）




$Y = X_1 + X_2$

$E(Y) = 4$

$V(Y) = 4/9$

$E(X_1) = 2$

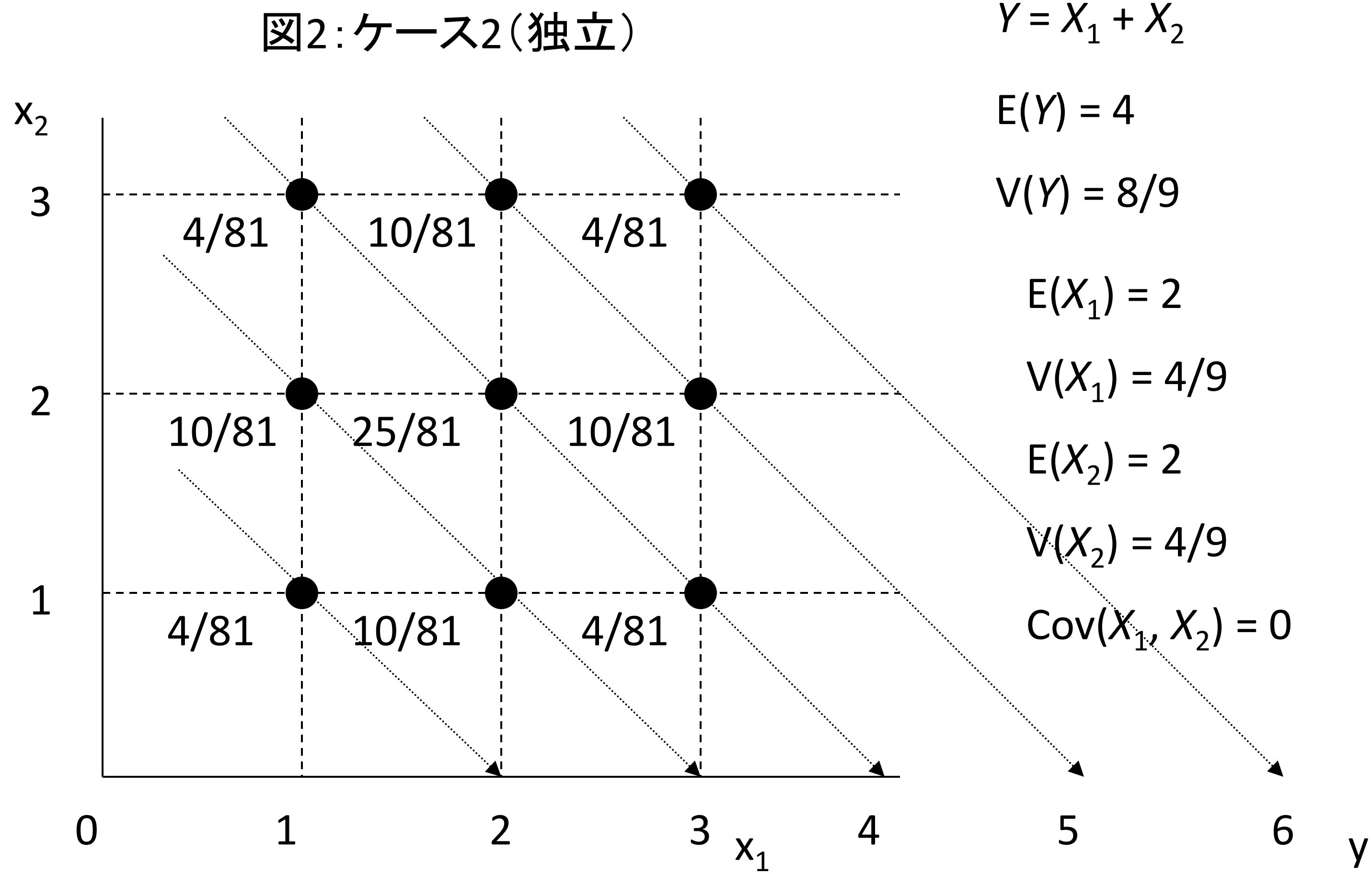
$V(X_1) = 4/9$

$E(X_2) = 2$

$V(X_2) = 4/9$

$Cov(X_1, X_2) = -2/9$

# 和の分散(2)




$Y = X_1 + X_2$

$E(Y) = 4$

$V(Y) = 8/9$

$E(X_1) = 2$

$V(X_1) = 4/9$

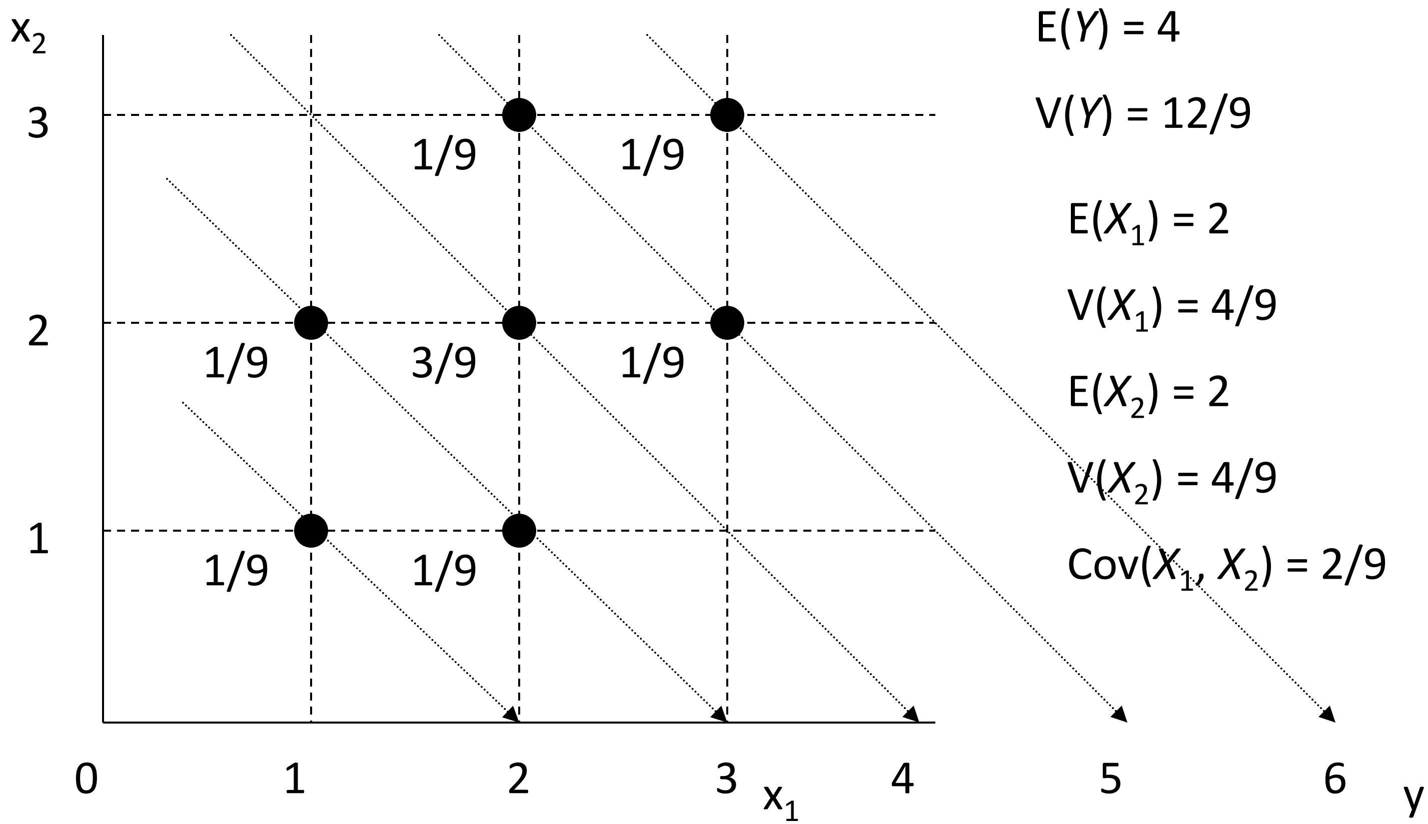
$E(X_2) = 2$

$V(X_2) = 4/9$

$Cov(X_1, X_2) = 0$

# 和の分散(3)

図3：ケース3（正の相関）




$Y = X_1 + X_2$

$E(Y) = 4$

$V(Y) = 12/9$

$E(X_1) = 2$

$V(X_1) = 4/9$

$E(X_2) = 2$

$V(X_2) = 4/9$

$Cov(X_1, X_2) = 2/9$