統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

- 代表値
  - 算術平均、中央値、最頻値
  - 代表値と分布の歪みとの関係
- 散らばりの尺度
  - 範囲、四分位偏差
  - 分散、標準偏差、変動係数
  - 変数の標準化、変換
- 幹葉表示と箱ひげ図

代表値

- 代表値
  - 分布の中心の位置
    - 「代表」＝「集団全体の相場に対応する値」
    - 対称分布について
      - 中心の意味は明白
        - » これから紹介する3つの代表値もほとんど等しくなる。
    - 非対称分布について
      - 中心を決めることが難しい
        - » 分布の歪みと関連させて3つの代表値の位置関係を覚えておく。

算術平均

- 算術平均（mean）

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad ただし、\quad \sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

  - 代表値としての意味:
    - 集団全員分の x を集めて、均等配分したときの構成員一人当たりの取り分。
    - 分布の重心と解釈することもできる。
  - 例:東京都市区町村別世帯数の算術平均:
    - 126,012.4（世帯）

中央値(1)

- 中央値（または中位数）Me（median）
  - 集団の構成員をxの昇順に並べ替える。
    - $x_1, x_2, \ldots, x_N \longrightarrow x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(N)}$
  - Me = 2つの「真ん中」の候補の平均
    - 昇順の順位が初めて $N/2$ 以上になるx の値
    - 降順の順位が初めて $N/2$ 以上になるx の値
      - N: 奇数 → 昇順で $(N+1)/2$ 番目
      - N: 偶数 → 昇順で $N/2$ 番目と$(N/2)+1$ 番目の平均

中央値(2)

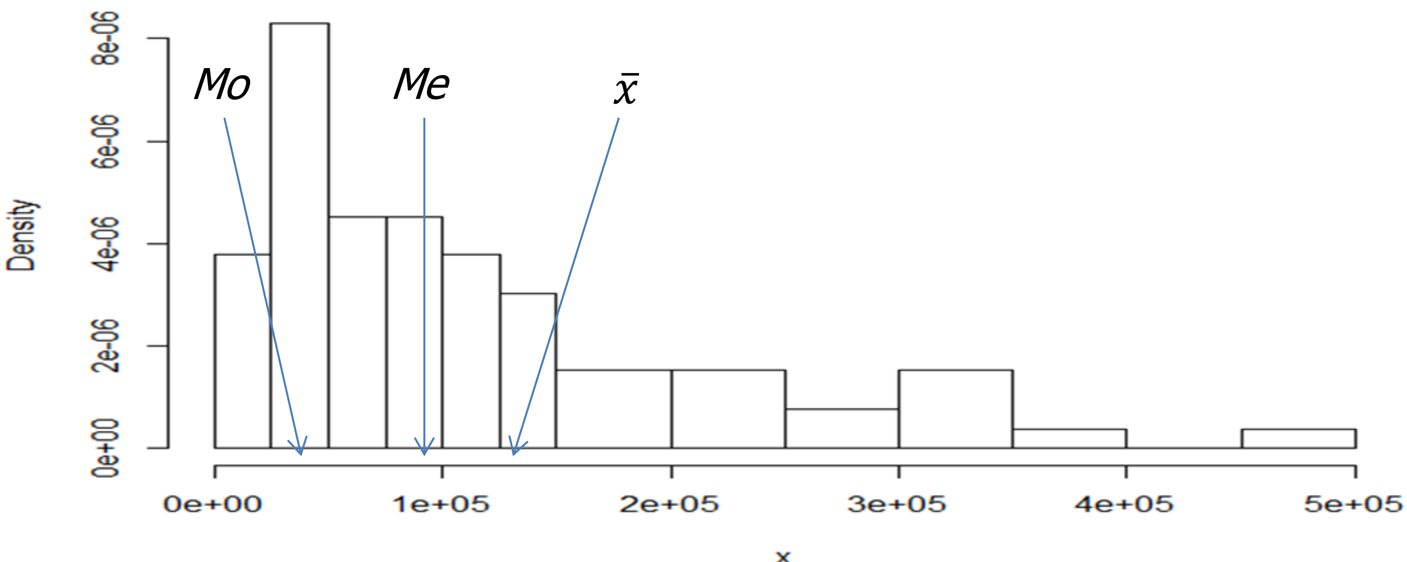
- 代表値としての意味：
  - Me 以下の値をもつ構成員が半分、Me 以上の値を持つ構成員が半分。
    - ヒストグラムの柱の面積が、左右でちょうど等しくなる位置に相当する。
    - 累積分布関数で、縦軸の0.5に対応する横軸の値。
- 例：東京都市区町村別世帯数の中央値：
  - 昇順で27番目の値＝ 89,676（世帯）
    - 西東京市の世帯数

最頻値

- 最頻値 Mo（mode）
  - ヒストグラムの峰に対応する階級値
    - つまり、ヒストグラムの頂点に対応する横軸の値
  - 代表値としての意味:
    - 「その近辺の値をもつ構成員がもっとも多い」という意味で人並みの値
  - 例: 東京都市区町村別世帯数の最頻値
    - 37,500（世帯）
      - 階級幅 25,000 の度数分布表を使用した場合）

分布の歪みと3つの代表値の位置関係(1)

図1：代表値の位置



例：1e+05 = 1 × 10^5

資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

分布の歪みと3つの代表値の位置関係(2)

- 対称分布の場合

$$Mo \approx Me \approx \bar{x}$$

- 右に歪んだ分布（裾が右に長い）

$$Mo < Me < \bar{x}$$

  – 算術平均よりも小さい値をもつ市区町村：33
    - 算術平均は外れ値の影響を受けやすい。
    - 外れ値：極端に大きい or 極端に小さい値

散らばりの重要性(1)

- 例
  - ２つのクラスA, B
    - クラスAの平均点：50点
    - クラスBの平均点：60点
  - ２つのクラスの平均点の差は意味があるか（クラスBの方が優秀か）？
    - 得点分布の散らばりによって答が異なる。

散らばりの重要性(2)

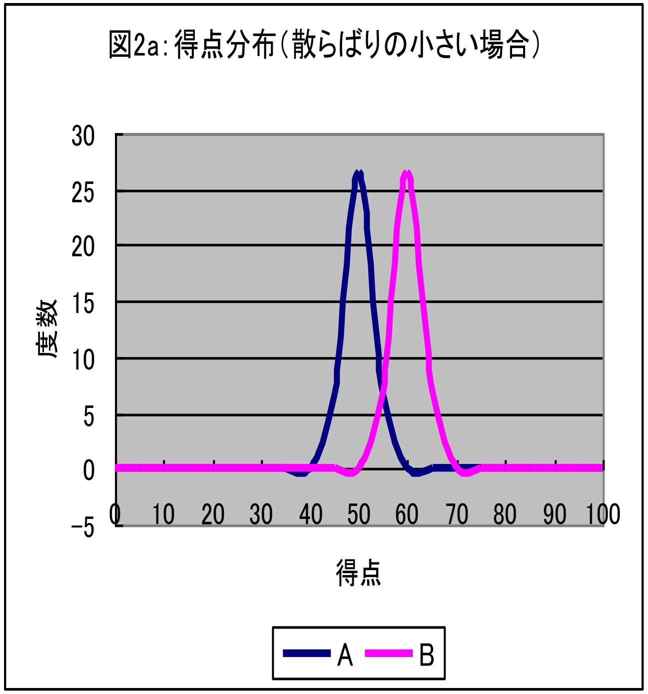


図2a：得点分布（散らばりの小さい場合）
度数
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
得点
A
B

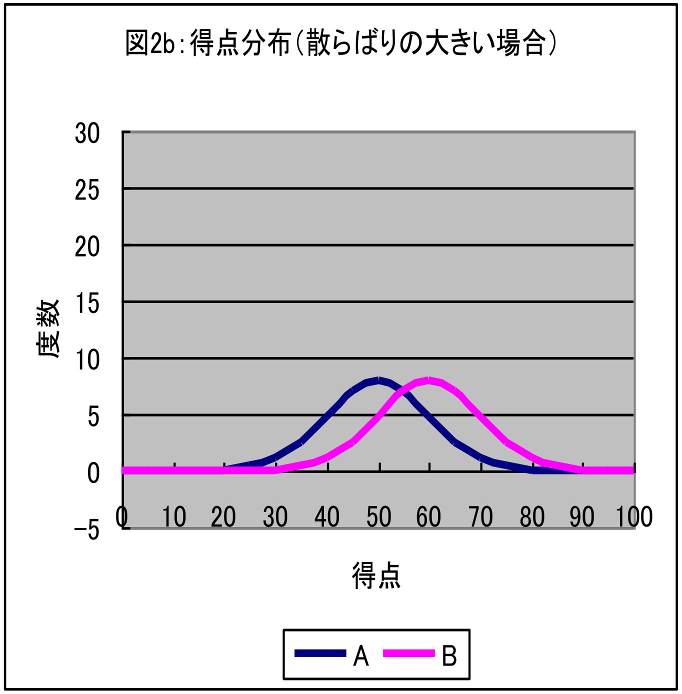


図2b：得点分布（散らばりの大きい場合）
度数
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
得点
A
B

散らばりの尺度：観点

- 観点
  - 度数分布の幅を捉える：
    - 範囲
    - 四分位範囲、四分位偏差
  - 中心からの乖離（偏差）の程度
    - 分散、標準偏差
    - 変動係数

散らばりの尺度：範囲

- 範囲（レンジ）R
  - $R = x_{max} - x_{min} = x_{(N)} - x_{(1)}$
    - 例：東京都市区町村別世帯数
      - R = 462,335 − 837 = 461,498（世帯）
  - 散らばりとしての意味
    - 全部の x が存在する範囲
  - 長短：
    - 長所：わかりやすい。
    - 短所：極端な値（分布の端）だけで決まる。

散らばりの尺度：四分位範囲(1)

- 四分位範囲 IQR
  - 四分位点：Q_1, Q_2, Q_3
    - $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \leq x_{(N)}$

      Q_1 Q_2 Q_3
    - 第1四分位点
      - 以下の2つの値の平均
        - » 昇順の順位が初めて$N/4$以上になるxの値
        - » 降順の順位が初めて$3N/4$以上になるxの値

散らばりの尺度：四分位範囲(2)

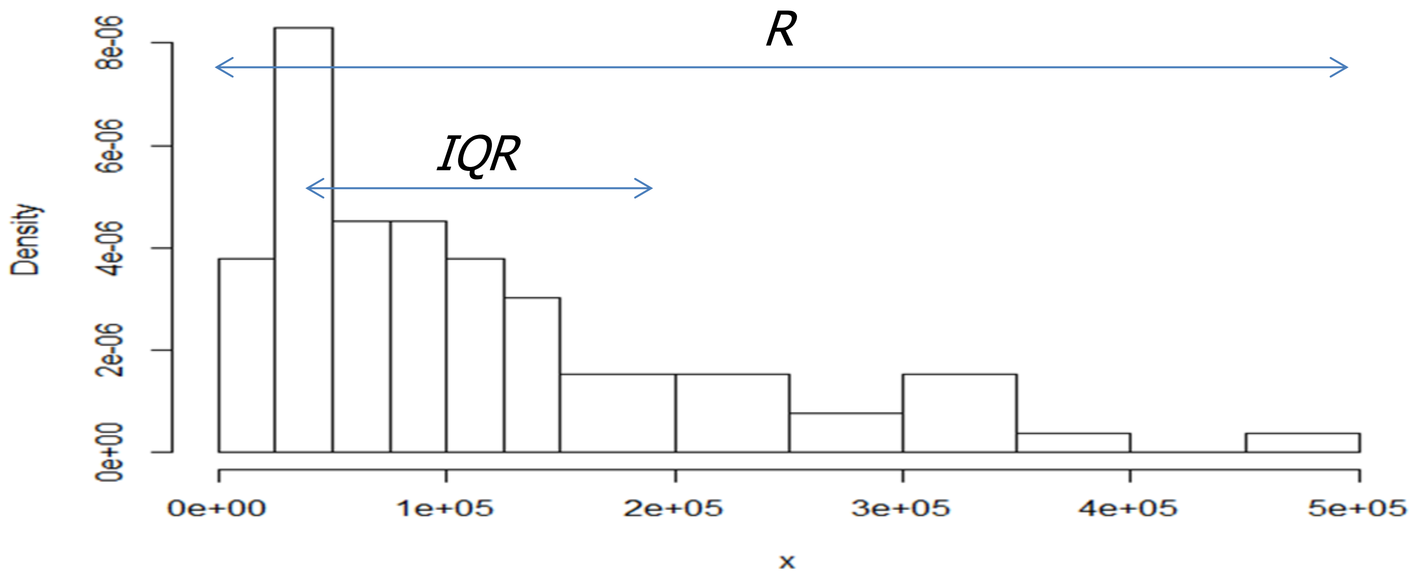
- 四分位範囲 IQR = $Q_3 - Q_1$
  - 例：東京都市区町村別世帯数
    - IQR = 186,376 – 39,520 = 146,856（世帯）
      - » 53×1/4 = 13.25 → $Q_1 = x_{(14)}$ = 39,520
      - » 53×3/4 = 39.75 → $Q_3 = x_{(40)}$ = 186,376
- 散らばりとしての意味：
  - 昇順で中央部 1/2 の存在範囲

散らばりの尺度：四分位範囲(3)

- 参考
  - 四分位偏差：$Q = \{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)\}/2$
    - » 中央値（$Me = Q_2$）から上下1/4の存在範囲の平均
- 長短：
  - 長所：極端な値の影響を排除している。
  - 短所：使用頻度が低い。
    - 後に解説する分散・標準偏差の方が使用頻度が高い。

散らばりの尺度：範囲と四分位範囲

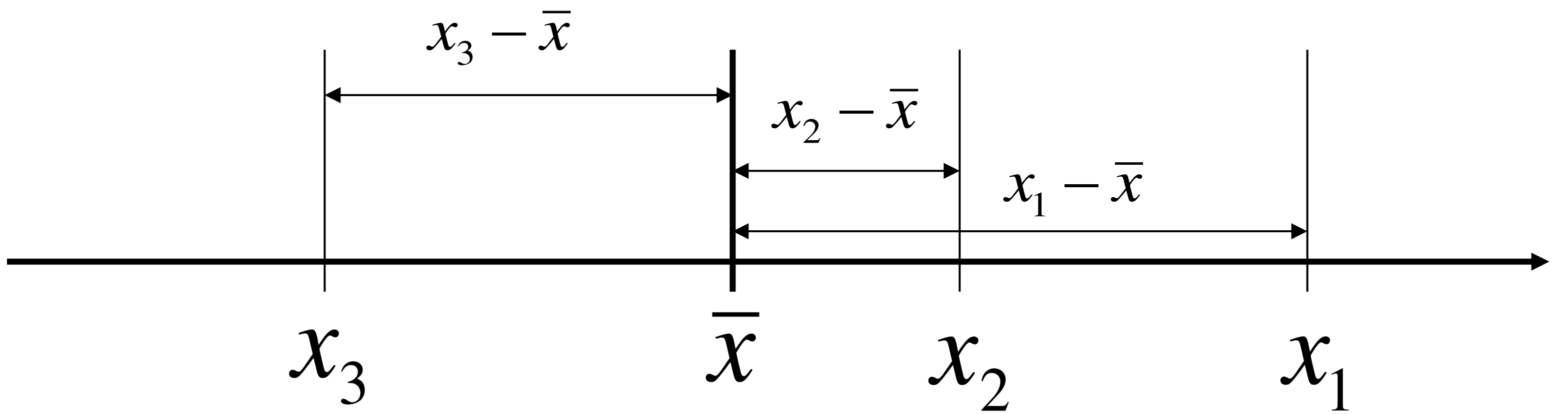
図2：範囲と四分位範囲



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

散らばりの尺度：平均からの偏差

- 偏差： $x_i - \bar{x}$
  - 各 x_i の中心（算術平均）からのズレ



散らばりの尺度：平均からの偏差

– 散らばりとの関連:
  - 平均からの偏差 $x_i - \bar{x}$
    – 偏差が０に近いものが多い。
    →全体的なズレが小さい。
    →散らばりが小さい。

– 性質：
  - $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 0$

散らばりの尺度：分散(1)

- 分散 s^2
  - 分散：$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
    - 例：東京都市区町村別世帯数
      - s 2 = 11,423,734,102（世帯²）
  - 散らばりとしての意味
    - 「平均からの偏差の二乗（ズレ）」の平均

散らばりの尺度：分散(2)

- 長短
  - 長所：理論的な性質が導きやすい。
    - 多用されるひとつの理由。
  - 短所：
    - 元の測定単位の2乗の単位をもつ。
    - 外れ値の影響が大きい。

散らばりの尺度：標準偏差(1)

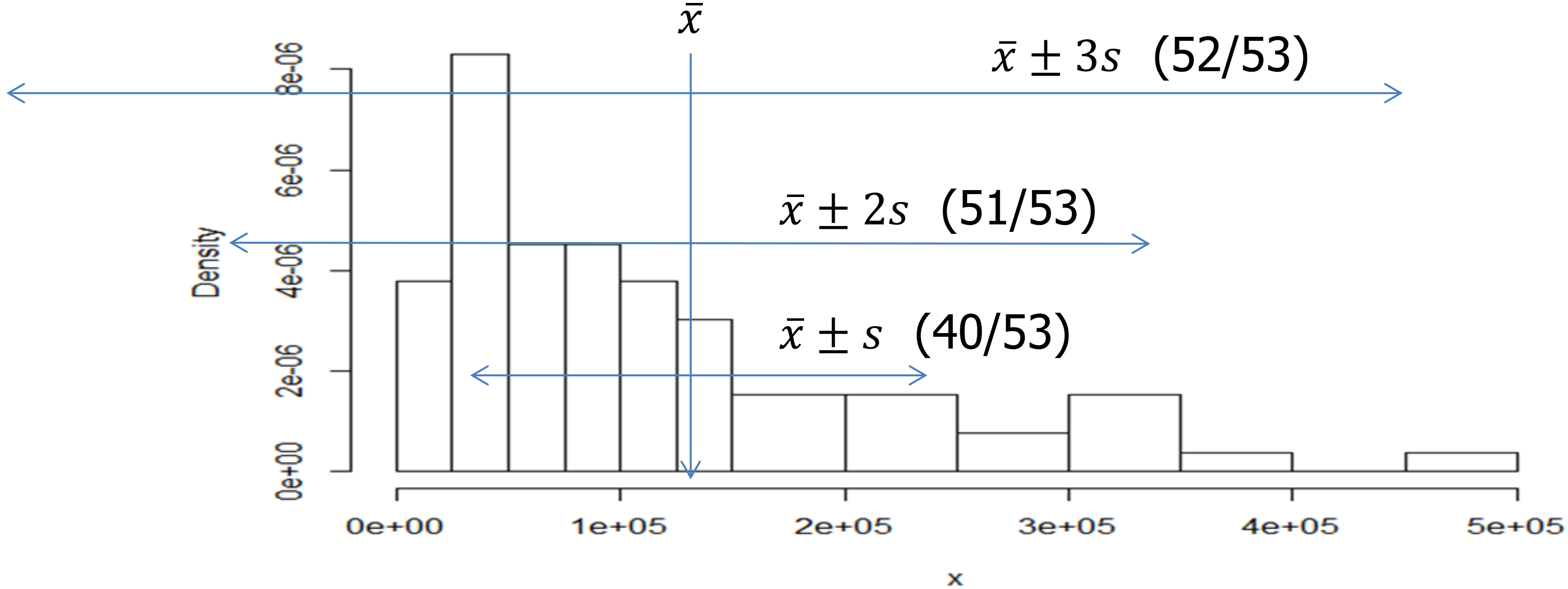
- 標準偏差 s
  - 標準偏差：$s = \sqrt{s^2}$
    - 例：東京都市区町村別世帯数
      - $s = 106{,}881.9$（世帯）
  - 散らばりとしての意味：
    - 分散の平方根
      - 分散とともに多用される。

散らばりの尺度：標準偏差(2)

- 長短
  - 長所：
    - 元と同じ測定単位　　　　分布の型
    - 便利な性質　　　　対称単峰　一般
      - » $\bar{x} \pm s$ に含まれる個体の割合　約2/3
      - » $\bar{x} \pm 2s$ に含まれる個体の割合　約95%　3/4以上
      - » $\bar{x} \pm 3s$ に含まれる個体の割合　約99%　8/9以上
  - 短所：
    - 外れ値の影響を受けやすい。

散らばりの尺度：標準偏差(3)

図2：範囲と四分位範囲



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

散らばりの尺度：変動係数(1)

- 変動係数 $CV = s/\bar{x}$
  - 例：東京都市区町村別世帯数
    - CV = 0.85
  - 散らばりとしての意味：
    - 平均を1単位とした標準偏差の大きさ
  - 長短：
    - 長所：無名数（異なる単位をもつものの比較が可能）
    - 短所：外れ値の影響を受けやすい。

散らばりの尺度：変動係数(2)

- 相対化する理由
  - 「平均が大きくなると、散らばりが平均に比例して大きくなる」ということが多い。
    - 例：
      - 年齢別にみた身長や体重

平均･標準偏差･分散の調整(1)

- 変数の標準化

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

  - z の算術平均=0
  - z の分散 = 1
  - z の標準偏差 = 1.

平均･標準偏差･分散の調整(2)

- さらに新しい変数 t:

$$t_i = a + bz_i = a + b\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)$$

  - t の
    - 算術平均= a
    - 分散= b^2
    - 標準偏差= $|b|$

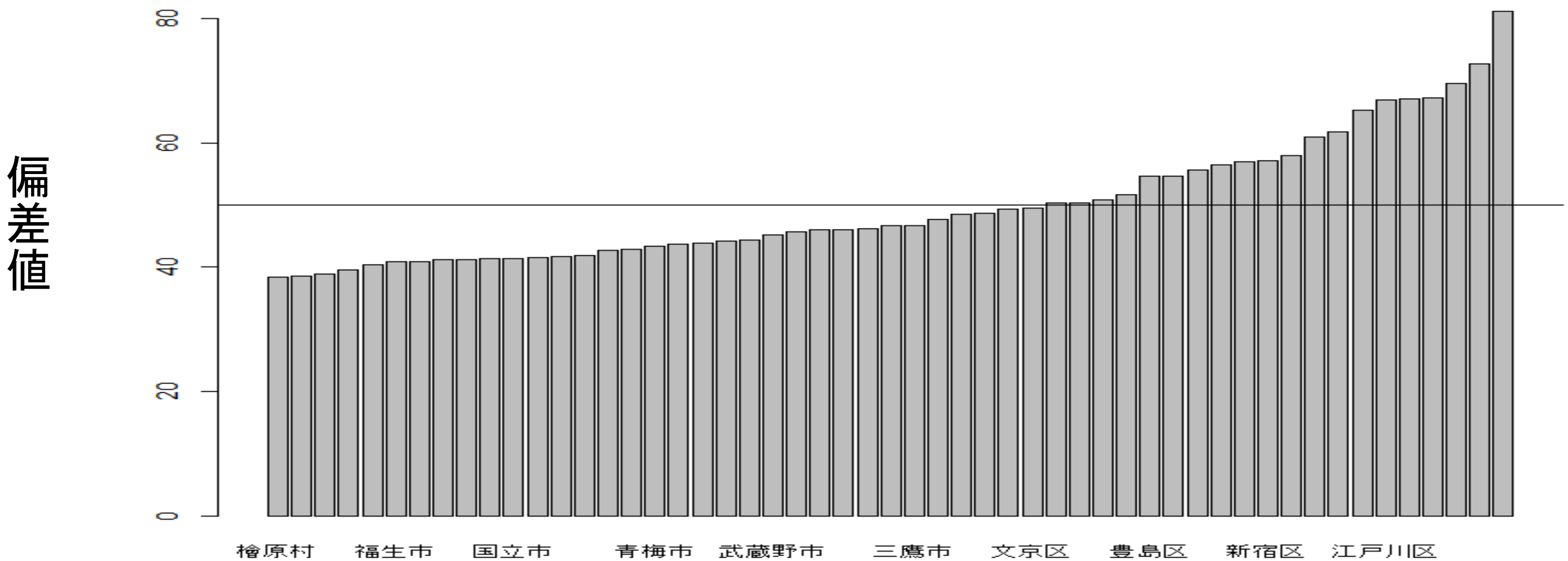
偏差値(1)

– とくに、$a = 50, b = 10$: 偏差値

- 元の点の平均点 → 偏差値 50点
- 元の点の平均点+ s → 偏差値 60点
- 元の点の平均点$+2s$ → 偏差値 70点
- 元の点の平均点$+2.5s$ → 偏差値 75点
- 100点満点のイメージに合うように $a = 50, b = 10$ という数字を選んだ。

偏差値(2)

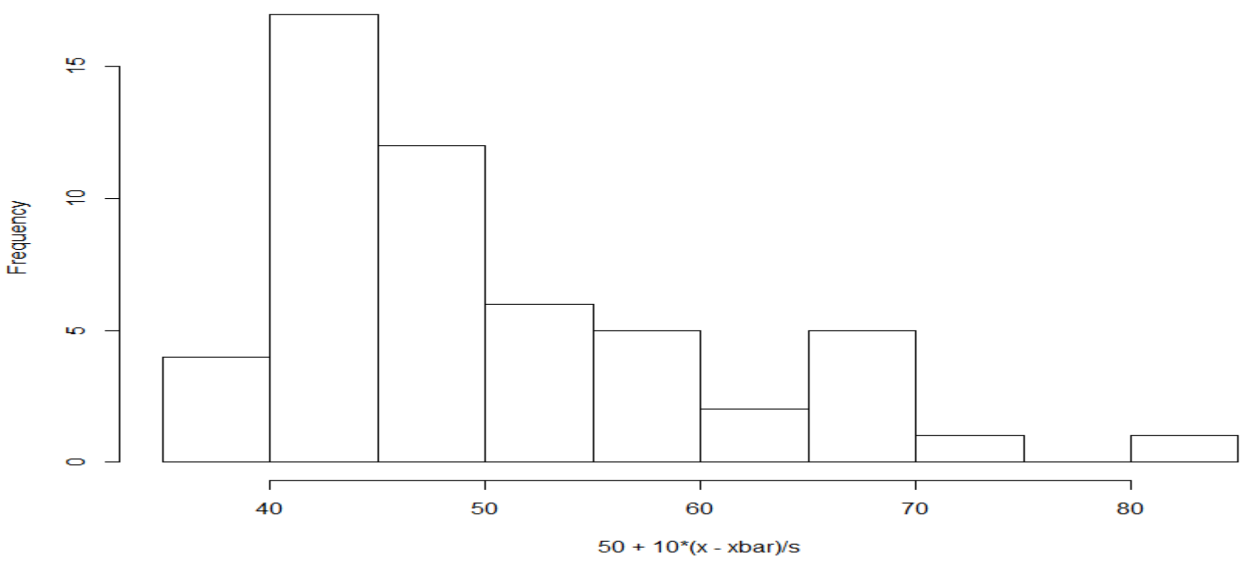
図5：東京都市区町村別世帯数の偏差値



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

偏差値(3)

図6：偏差値のヒストグラム



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

幹葉表示(1)

- 幹葉表示
  - ヒストグラムの改善
    - 視覚的な分布のイメージ
    - 元のデータの情報の保存
  - 数値で表したヒストグラム
    - 例：東京都市区町村別世帯数
      - 説明の簡単のため、1万世帯単位に変換する。
        - » 3 8 13 20 12 11 13 24 21 14 37 46 14 20 31 18 18 10 29 34 31 20 31 25 8 7 9 5 12 5 11 19 6 8 8 6 6 3 3 4 4 3 5 3 7 4 2 3 9 1 1 0 0

幹葉表示(2)

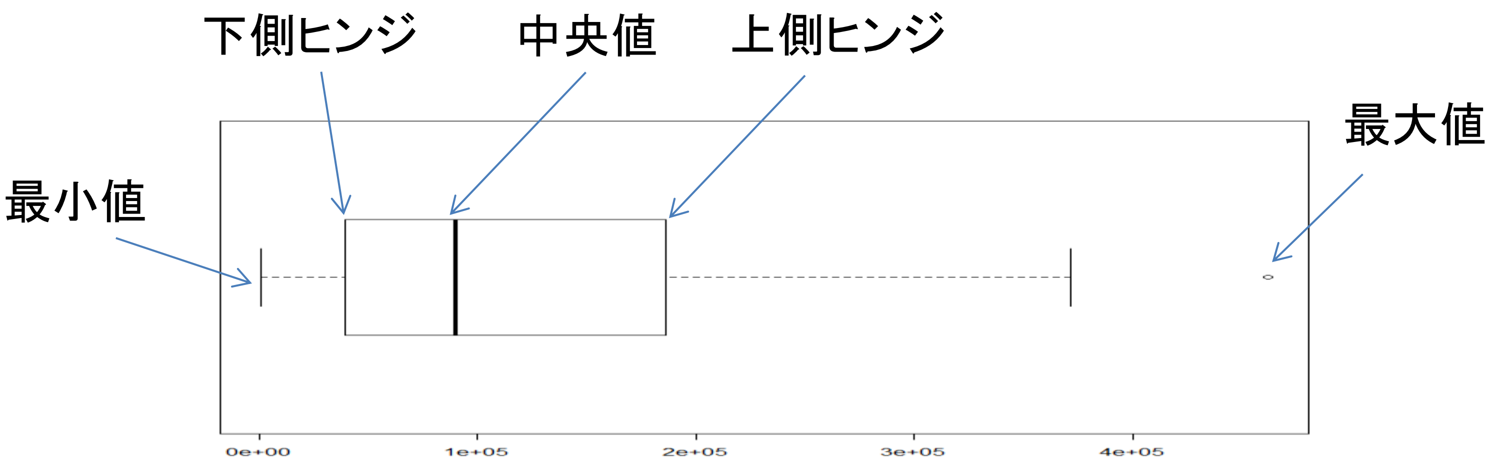
図7：東京都市区町村別世帯数の幹葉表示

```
0 | 00112333333444
0 | 55566677888899
1 | 011223344
1 | 889
2 | 00014
2 | 59
3 | 1114
3 | 7
4 |
4 | 6
```

資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

箱ひげ図(1)

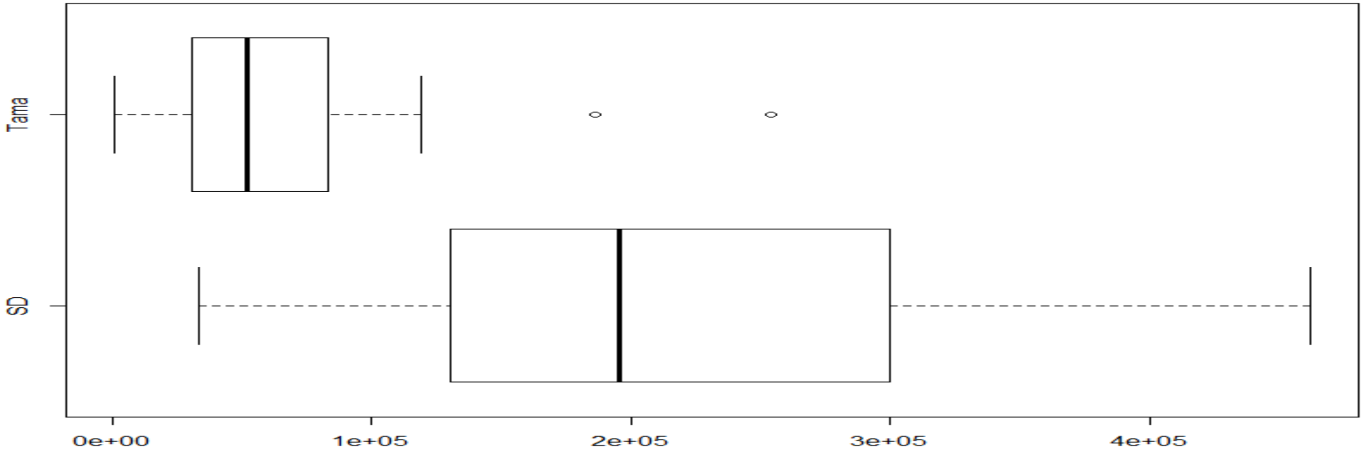
図8：東京都市区町村別世帯数の箱ひげ図



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果

箱ひげ図(2)

図9：東京都市区町村別世帯数（特別区・多摩地域別）



資料：総務省「平成27年国勢調査」人口速報集計結果