2016 年度春学期 経済数学 I（解析学基礎）（月 2）

【第 11 回: 接平面の方程式】(担当: 瀧澤 武信) 提出期限: 7 月 4 日 (月) 17:00 (出題日：6 月 27 日 (月))

$\boxed{\text{問題}}$

与えられた点における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ の形で表すとき, 定数 a, b, c の値を求めよ.

(1+1*3 点)

1. $z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$, 点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

2. $z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos y + \sin x - \cos\left(\dfrac{y}{2}\right)$, 点 $\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ f\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

3. $z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \log(1 + x^2y^2)$, 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{解答例}}$

1. $z - 2 = 1 \cdot (x - 2) + \frac{-1}{2}(y - 1) \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$
2. $z - (-1) = (-1)(x - \pi) + \frac{1}{2}(y - \pi) \Rightarrow z = -x + \frac{1}{2}y + (\frac{\pi}{2} - 1) \Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{2} - 1$
3. $z - \log 2 = 1 \cdot (x - 1) + (-1)(y - (-1)) \Rightarrow z = x + (-1)y + (-2 + \log 2)$

   $\Rightarrow a = 1, b = -1, c = -2 + \log 2$

$\boxed{\text{解説}}$

1.

$$z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{1 + x^2 - y^2}\text{のとき,}$$

$$f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (1 + x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = -(1 + x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y$$

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\sqrt{1+4-1}=2\ ,\ f_x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{2}=1\ ,\ f_y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\Longrightarrow z-2=1\cdot(x-2)+\frac{-1}{2}(y-1)$$

$$\Longrightarrow z=x-\frac{1}{2}y+(2-2+\frac{1}{2})=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow a=1,b=-\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$$

2.

$$z=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sin(\frac{x}{2})\cos y+\sin x-\cos(\frac{y}{2})\text{ のとき，}$$

$$f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})\cos y+\cos x$$

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\sin(\frac{x}{2})\sin y+\frac{1}{2}\sin(\frac{y}{2})$$

$$f\begin{pmatrix}\pi\\\pi\end{pmatrix}=\sin(\frac{\pi}{2})\cos\pi+\sin\pi-\cos(\frac{\pi}{2})=1\cdot(-1)+0-0=-1$$

$$f_x\begin{pmatrix}\pi\\\pi\end{pmatrix}=0+(-1)=-1\ ,\ f_y\begin{pmatrix}\pi\\\pi\end{pmatrix}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow z-(-1)=(-1)(x-\pi)+\frac{1}{2}(y-\pi)$$

$$\Longrightarrow z=-x+\frac{1}{2}y+(-1+\pi-\frac{\pi}{2})=-x+\frac{1}{2}y+(\frac{\pi}{2}-1)$$

$$\Longrightarrow a=-1,b=\frac{1}{2},c=\frac{\pi}{2}-1$$

3.

$$z=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\log(1+x^2y^2)\text{ のとき，}$$

$$f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\log(1+1)=\log 2\ ,\ f_x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{2}{1+1}=1\ ,\ f_y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

$$\Longrightarrow z-\log 2=1\cdot(x-1)+(-1)(y-(-1))$$

$$\Longrightarrow z=x+(-1)y-1-1+\log 2$$

$$\Longrightarrow a=1,b=-1,c=-2+\log 2$$