2019 年 10 月 22 日

「統計学 II」第 3 回講義補足ノート

作成：西郷 浩

この補足ノートは、「統計学 II」第 3 回講義の小テストに解答する際に役立つように作成しています。小テストの問題の範囲は、講義本体の内容で捕捉されています。しかし、これまでの受講者から、講義の内容と小テストの問題との関係が分からないという感想が多かったことに配慮して、このノートを作成することにしました。

1. （講義の復習）母集団を正規分布とする。すなわち、観察される変数が正規分布 $N(\mu\,\sigma^2)$ に従うとする。このことを記号では $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ と記す。標本の大きさを n とする。すなわち、標本における観察値を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ と記す。標本平均を $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$、標本不偏分散を $S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ と記す。このとき、つぎの性質が成り立つ。

   (a) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ すなわち、標本平均は、期待値 μ、分散 σ^2/n である正規分布に従う。

   (b) $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$ すなわち、左の式で定義される T は、自由度 $n-1$ の t 分布に従う。$\sqrt{S^2/n}$ を標準誤差と呼ぶ。

   (c) $U = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ すなわち、左の式で定義される U は、 自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。

   小テストではこれらの性質を用いる。

2. （例 1）期待値が 50 である正規分布から大きさ 9 の標本を得たとする。このとき、標本平均と母平均 50 の差が標準誤差 $\sqrt{S^2/9}$ の 1.5 倍を超える確率を求める。すなわち、

$$P(\bar{X} - 50 > 1.5\sqrt{S^2/9}) = P\left(\frac{\bar{X} - 50}{\sqrt{S^2/9}} > 1.5\right)$$

   を求める。等号の右辺における、カッコ内の不等式の左辺が自由度 $9-1=8$ の t 分布に従うことを利用する。教科書の数値表（表示されている数値が限定されているので、大まかな区分でのみ求められる）または MS Excel などのソフトウェアで確率を求める。

3. 期待値が 50、分散が 100 であるような正規分布から、大きさ $n = 11$ の標本を得たとする。このとき、標本不偏分散が 2 以下になる確率を求める。すなわち、

$$P(S^2 < 2) = P\left(\frac{(11-1)S^2}{100} < \frac{(11-1)\times 2}{100}\right)$$

   を求める。等号の右辺における、カッコ内の不等式の左辺が自由度 $11-1=10$ の χ^2 分布に従うことを利用する。教科書の数値表（表示されている数値が限定されているので、大まかな区分でのみ求められる）または MS Excel などのソフトウェアで確率を求める。

4. まったく別の解法として、講義の最後で紹介したシミュレーションによって求めることもできる。たとえば、上記の例 1 を解くには、期待値が 50、分散任意（たとえば 25 とする）の正規乱数を $9 \times 100{,}000$ 個発生して、$100{,}000$ 個の $T = (\bar{X}-50)/\sqrt{S^2/9}$ を計算する。100,000 個の T 実現値のうち、1.5 より大きいものの割合を計算する。