2014 年後期　経済数学　講義ノート

加茂　知幸

2014 年 10 月 1 日版

目次

1　高校数学の復習

1.1　指数・対数関数

■指数関数　a を 1 と異なる正の定数として，a を x 乗した値 a^x は x の関数である．この関数 $f(x) = a^x$ を**指数関数**という．指数関数 a^x は, $a > 1$ のとき増加関数，$0 < a < 1$ のときは減少関数である．

例 1.1. 利子率を r とする．1 万円を預金したとき，n 年後の元利合計は $(1+r)^n$ 万円である．つまり，現在の 1 円の n 年後の将来価値は $(1+r)^n$ 円である．逆に，n 年後の 1 円の現在価値は $\frac{1}{(1+r)^n}$ 円である．$\frac{1}{1+r}$ のことを**割引因子**（*discount factor*）という．　□

■指数法則　実数 m, n について次の関係が成り立つ．

(1) $a^0 = 1$
(2) $a^1 = a$
(3) $a^m a^n = a^{m+n}$
(4) $a^m / a^n = a^{m-n}$
(5) $(a^m)^n = a^{mn}$

■対数とは　指数関数 $y = a^x$ は単調な関数なので，どんな正の値 M に対しても $M = a^x$ となるような x の値を一意に定めることができる．この値を a を底とする M の**対数**といい，$\log_a M$ とあらわす．

例 1.2. (1) $2^3 = 8$ より，$\log_2 8 = 3$ である．
(2) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ より，$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ である．　□

■対数関数　a を 1 とは異なる正の数として，$f(x) = \log_a x$ は x の関数である．これを a を底とする**対数関数**という．

■対数法則　$M, N > 0$ かつ p は実数とすると，次の関係が成り立つ．

(1) $\log_a 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$
(3) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
(4) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
(5) $\log_a M^p = p \log_a M$

例 1.3. $z = x^\alpha y^\beta$ の両辺の対数をとると

$$\log_a z = \alpha \log_a x + \beta \log y$$

となる．$X = \log_a x, Y = \log_a y, Z = \log_a z$ とおくと，上式は

$$Z = \alpha X + \beta Y$$

のように 1 次式になる．　□

■自然対数　数列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の $n \to \infty$ のときの極限値を e と定義する．

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

e は次のような無理数である（ネイピア数という）．

$$e = 2.71828182845\cdots$$

e を底とする対数を**自然対数**といい，その底を省略して

$$\log x \quad または \quad \ln x$$

のように書く．

1.2　関数

■関数とは　2 つの変数 x, y について，x の値を定めると，それに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の**関数**（*function*）という．y が x の関数であるとき，$y = f(x)$ のように表記する．関数 $y = f(x)$ において，x を**説明変数**，y を**被説明変数**ということもある．$f(x)$ は x の式として具体的に書ける場合もあるが，言葉によって定義されるようなものもある．例えば，ある生産者の供給関数は，価格が x であるときに，利潤を最大にする生産量 y との関係として定義される．

■定義域・値域　関数 $y = f(x)$ において，x のとりうる値の範囲を，関数 $f(x)$ の**定義域**（*domain*）という．x の値が定義域全体を動くとき，y のとる値の範囲を，この関数の**値域**（*range*）という．

例 1.4.　(1) 指数関数 a^x はすべての実数に対して定義される．値域は正の実数全体である．

(2) 対数関数 $\log_a x$ の定義域は正の実数全体である．値域は実数全体である．

(3) 無理関数 $\sqrt{x}$ の定義域および値域はどちらも非負の実数全体である．

(4) 分数関数 $\frac{1}{x}$ は 0 とは異なる実数に対して定義される．値域は実数全体である．　□

経済学では多くの変数が正あるいは非負の値をとるので，関数の定義域および値域も正あるいは非負の実数全体とすることが多い．

■逆関数　関数 $y = f(x)$ において，y の値を一つ定めたとき，$y = f(x)$ をみたす x がただ一つ定まるとき，その関係を $x = g(y)$ とする．x と y とを入れ替えて $y = g(x)$ としたものを，もとの関数 $f(x)$ の**逆関数**（*inverse function*）といい，$f^{-1}(x)$ と表記する．

例 1.5.　(1) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ の逆関数は $f^{-1}(x) = 2x - 6$ である．

y=1/2x+3
x=2y - 6
y=2x - 6

(2) 指数関数 $f(x) = a^x$（ただし $a > 0, a \neq 1$）の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_a x$ である．

(3) 無理関数 $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数は $f^{-1}(x) = x^2$ $(x \geqq 0)$ である．

(4) 2 次関数 $f(x) = x^2$ の逆関数は存在しない．というのも，任意の正の数 a に対して，$x^2 = a$ をみたす x の値は $\pm\sqrt{a}$ であり，ただ一つに定まらない．

(5) 価格と需要量との関係を表す関数のことを**需要関数**（*demand function*）という．価格の上昇は需要量の減少させると考えられる．これを**需要の法則**（*law of demand*）という．需要の法則とは，需要関数が単調減少であることを意味している．需要の法則を前提とすると，需要関数の逆関数が存在する．これを**逆需要関数**（*inverse demand function*）という．　□

■合成関数　2つの関数 $f(x), g(x)$ があるとき，$y = f(x)$，$z = g(y)$ とおいて，$g(y)$ に $y = f(x)$ を代入すると，新しい関数 $z = g(f(x))$ が得られる．この関数を f と g の**合成関数**（*composite function*）といい，$(g \circ f)(x)$ と表記する．

例 1.6.　(1) $f(x) = x^2 - 1$，$g(x) = 2x + 1$ のとき，

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1, \qquad (f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x$$

である．ここで，$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ であることに注意．

(2) 効用は財の消費量の関数である（効用関数）．消費量は財価格と所得の関数である（需要関数）．したがって，消費者の効用は財価格と所得の関数とみることができる．この関係を**間接効用関数**（*indirect utility function*）という．間接効用関数は，効用関数と需要関数の合成関数である．　□

1.3　連続関数

■関数の極限　関数 $f(x)$ において，変数 x がある数 a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，その近づき方によらず，$f(x)$ の値がある一定値 α に限りなく近づく場合，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と書き，この値 α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限**という．また，このとき $f(x)$ は α に**収束**するという．変数 x または関数 $f(x)$ の値が限りなく大きくなることを，それぞれ $x \to \infty, f(x) \to \infty$ で表す．また，x または $f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなることを，それぞれ $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$ で表す．

例 1.7. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ である．$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ は存在しない（なぜか？）．　□

■連続関数　関数 $f(x)$ において，定義域上のある数 a について

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立するとき，$f(x)$ は $x = a$ において**連続**であるという．$f(x)$ が定義域のすべての点において連続であるとき，$f(x)$ は**連続関数**であるという．

例 1.8. 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ において連続でない．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqq 0 \end{cases}$$

□

■連続関数の性質　経済学に現れる関数のほとんどは連続関数である．連続関数は次の2つ定理が成立するという意味で重要である．

定理 1.1 (ワイエルシュトラスの定理)**.** 閉区間で連続な関数は，その閉区間で最大値と最小値をとる．

定理 1.1 は 1 変数関数の 最適化問題の解の存在を保証する という意味で重要である．多変数関数の場合，閉区間の概念を一般化した「コンパクト集合」を考えることにより，この定理を拡張することが可能である．すなわち，「(多変数) 連続関数はコンパクト集合上で最大値と最小値をもつ」．

定理 1.2 (中間値の定理)**.** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意を値 k に対して，

$$f(c) = k$$

をみたす c が必ず存在する．(ただし，$a \leqq c \leqq b$)

例 1.9 (市場均衡の存在)**.** ある財市場の総需要関数を $D(p)$，総供給関数を $S(p)$ として，その差 $f(p) = D(p) - S(p)$ を考える（ここで p は財価格をあらわす）．$f(p)$ をこの市場の**総超過需要関数**という．いま，(i) ある十分低い価格 p' において $f(p') > 0$ であり，かつ (ii) ある十分高い価格 p'' において $f(p'') < 0$ であるとしよう．$f(p)$ が連続関数であるなら，中間値の定理より $f(p^*) = 0$ となる価格 p^* が存在する．ここで，$f(p^*) = 0$ は $D(p^*) = S(p^*)$ であるから，p^* は市場均衡価格である． □

1.4 微分法

■微分法 U を開区間（開集合）とし，U 上で定義された関数 $f(x)$ を考える．U 内のある数 a において，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

がただ一つ存在する場合，f は a において**微分可能** であるという．この極限を a における f の**微分係数**といい，$f'(a)$ と表記する．f が定義域 U 内のすべての数において微分可能である場合，**f は微分可能**であるという．f が微分可能であるとき，U 内の任意の数 x に対して一つの値 $f'(x)$ が対応するから，f' はひとつの関数である．この関数 $f'(x)$ を **f の導関数**という．

例 1.10. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能 でない．$x \neq 0$ では微分可能である． □

定理 1.3 (微分公式)**.**

(1) **積の微分：** $\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(2) **逆関数の微分：** $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(x)}$
(3) **合成関数の微分：** $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
(4) **商の微分：** $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
(5) **分数関数の微分：** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

定理 1.4 (いろいろな関数の微分)**.**

(1) $f(x) = e^x$ のとき，$f'(x) = e^x$ である．
(2) $f(x) = \log x$ のとき，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ である．
(3) $f(x) = a^x$ のとき，$f'(x) = a^x \cdot \log a$ である．

1.5 練習問題

問題 1.1. 定理 1.1（ワイエルシュトラスの定理）と定理 1.2（中間値の定理）をそれぞれ図を描いて確認せよ．

問題 1.2. 次の関数を微分せよ．

(1) $f(x) = \sqrt{x}$　(2) $f(x) = (x^2 - 4x)(3x - 1)$　(3) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

(4) $f(x) = (x^2 + 1)^3$　(5) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}}$　(6) $f(x) = x \cdot \log_2 x$

問題 1.3. 次のことが成り立つことを示せ．

(1) $(\log f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

問題 1.4. 自然対数の底 e は

$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

と定義される．この式を用いて，次の等式を導け．

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

2 微分法の応用

2.1 平均値の定理

定理 2.1 (平均値の定理)**.** $f(x)$ は微分可能とする．このとき，任意の実数 $a, b\ \ (a < b)$ に対して，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立するような a と b の間の点 c が存在する．

平均値の定理において，$b = x$ とおくと

$$f(x) = f(a) + f'(c) \cdot (x - a)$$

と書き換えることができる．a を固定して x を任意に動かすことを考えると，この式は $f(x)$ の値を（x の）1 次式 で表現したものとして見ることができる．さらに，1 次の係数 $f'(c)$ は $f(x)$ の微分係数で表現されている．ただし，関数 $f(x)$ 全体が 1 次式であらわされているのではないことに注意しよう．$f'(c)$ の値は x の値に応じて変化するからである．

2.2 高階微分法

■2 **階微分**　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を f の **2 階の導関数**または **2 次導関数**といい，$f''(x)$ と表記する．

例 2.1.　(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき，$f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$ である．

(2) $f(x) = e^x$ のとき，$f'(x) = f''(x) = e^x$ である．

(3) $f(x) = \log x$ のとき，$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ である．　□

■C^r **級関数**　$r > 2$ のとき，f の r 階の導関数も同様に定義され，$f^{(r)}(x)$ と表記する．r 階までの導関数が存在し，それが連続であるとき，f は r **回連続微分可能**，または f は C^r **級**であるという．

2.3 テイラーの定理

定理 2.2. $f(x)$ は C^2 級であるとする．a を定数として，任意の実数 x $(x \neq a)$ に対して，x と a の間の点 c が存在して，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(c)(x - a)^2$$

が成立する．

この定理は $f(x)$ の値を（x の）2 次式 によって表現したものと考えることができる．さらに，k 次項の係数は k 階微分係数を用いて表現されている（$k = 1, 2$）．ただし，この定理は関数 $f(x)$ 全体が 2 次式であることを意味しない（$f''(c)$ は x に応じて変化する）．

例 2.2. $f(x) = e^x$ について，$a = 0$ として定理を適用すると

$$f(x) = 1 + x + \frac{e^c}{2} x^2$$

である． □

2.4　最適化法：1 変数

■最大化・最小化　ある関数 $f(x)$ の値を最大にする x を求める問題を**最大化問題**という．$f(x)$ の値を最小にする x を求める問題を**最小化問題**という．最大化問題と最小化問題をまとめて**最適化問題**という．最適化の対象である $f(x)$ のことを**目的関数**という．$f(x)$ の値を最小にすることは $-f(x)$ の値を最大にすることと同じなので，最大化問題と最小化問題との本質的な差はない．以下では，特に断らない限り，目的関数 $f(x)$ は実数全体あるいは開区間（例えば正の実数全体）で定義されるものとする．すなわち，端点（境界）のある問題は考えない．

■1 階条件　関数 $f(x)$ が x^* で最大値をとるなら，$f'(x^*)=0$ でなければならない．なぜなら，もし $f'(x^*)>0$ ならば $f(x)$ は x^* のまわりで増加関数であるから，x の値を x^* よりもすこし大きくすれば $f(x)$ の値をより大きくすることができる．$f'(x^*)<0$ のときは，x の値を x^* よりもすこし小さくすることで $f(x)$ の値をより大きくすることができる．$f(x^*)$ が最小値である場合も同様に考えることができる．以上より，次の定理が成り立つ．

定理 2.3 (1 階条件)**.**

(1) $f(x)$ が x^* で最大値をとるなら，$f'(x^*)=0$ である．
(2) $f(x)$ が x^* で最小値をとるなら，$f'(x^*)=0$ である．

1 階導関数に関する条件 $f'(x^*)=0$ のことを **1 階条件**（*first-order condition*）という．1 階条件は最適解の 必要条件 であることに注意せよ．$f(x^*)$ が最大値であるなら，$f'(x^*)=0$ が成立するが，逆に $f'(x^*)=0$ であっても $f(x^*)$ が最大値であるとは限らない．

■凹関数・凸関数　関数 $y=f(x)$ のグラフが上に凸であるとき，$f(x)$ は**凹関数**であるという．逆に，下に凸の場合は**凸関数**であるという．

定義 2.1 (凹関数・凸関数)**.** [*1]

(1) $f(x)$ が**凹関数**（*concave function*）であるとは，（定義域に含まれる）どんな実数 a,b であっても，$0\leqq t\leqq 1$ であるすべての実数 t について

$$tf(a)+(1-t)f(b)\leqq f(ta+(1-t)b)$$

が成り立つ場合をいう．

(2) $f(x)$ が**凸関数**（*convex function*）であるとは，（定義域に含まれる）どんな実数 a,b であっても，$0\leqq t\leqq 1$ であるすべての実数 t について

$$tf(a)+(1-t)f(b)\geqq f(ta+(1-t)b)$$

が成り立つ場合をいう．

例 2.3. $-x^2$, $\log x$ は凹関数である．x^2, e^x は凸関数である．1 次関数 ax は凹関数でもあり凸関数でもある．$-x^3+3x$ は凹関数でも凸関数でもないが，定義域を正の実数の制限すれば凹関数であり，負の実数に制限すれば凸関数である． □

[*1] 厳密には，関数 $f(x)$ の定義域は凸集合であることを仮定する．

定理 2.4 (凹関数・凸関数の判定条件)**.** $f(x)$ は C^2 級であるとする．

(1) $f(x)$ が凹関数であるための必要十分条件は，すべての x について $f''(x) \leqq 0$ が成り立つことである．
(2) $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件は，すべての x について $f''(x) \geqq 0$ が成り立つことである．

$f(x)$ は凹関数であるとして，x^* が 1 階条件 $f'(x^*) = 0$ を満たすとする．定理 2.2 より，どんな x についても

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x^*)^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x^*)^2 \end{aligned}$$

と書くことができる．$f(x)$ は凹関数であるから，（c の値にかかわらず）$f''(c) \leqq 0$，すなわち，$\frac{1}{2}f''(c)(x - x^*)^2 \leqq 0$ である．したがって，どんな x に対しても

$$f(x) \leqq f(x^*)$$

が成り立つ．これは $f(x^*)$ が最大値であることに他ならない．よって，次の定理を得る．

定理 2.5 (凹計画法・凸計画法)**.**

(1) $f(x)$ は凹関数であるとする．$f(x)$ が x^* において最大値をとるための 必要十分条件 は $f'(x^*) = 0$ が成り立つことである．
(2) $f(x)$ は凸関数であるとする．$f(x)$ が x^* において最小値をとるための 必要十分条件 は $f'(x^*) = 0$ が成り立つことである．

定理 2.5 より，$f(x)$ が凹関数であれば，最大化問題を解くことは方程式 $f'(x) = 0$ を解くことに帰着する．したがって，次の手順によって最大化問題を解くことができる．

(1) 定理 2.4 を用いて目的関数 $f(x)$ が凹関数であるかどうかを判定する．
(2) 方程式 $f'(x) = 0$ を解く．

例 2.4 (利潤最大化)**.** 財の生産量を y，労働投入量を x であらわす．ある生産者の生産関数が $y = \sqrt{x}$ であるとする．財の価格が p，賃金が w であるとき，この生産者の利潤を $f(x)$ とすると

$$f(x) = p\sqrt{x} - wx$$

である．ここで

$$f'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - w, \quad f''(x) = -\frac{p\sqrt{x}}{4x^2}$$

である．$p > 0$ であるから，どんな $x \geqq 0$ であっても $f''(x) \leqq 0$ である．したがって $f(x)$ は凹関数である．定理 2.5 より，利潤 $f(x)$ を最大する x は方程式

$$f'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - w = 0$$

の解である．これを解くと

$$x = \frac{p^2}{4w^2}$$

である．利潤を最大にする要素投入量は p, w の関数である．この関数のことを**要素需要関数**（*factor demand function*）という．要素需要関数を生産関数に代入すると

$$y = \sqrt{\frac{p^2}{4w^2}} = \frac{p}{2w}$$

を得る．すなわち，利潤を最大にする生産量は p, w の関数である．この関数のことを**供給関数**（*supply function*）という． □

2.5 練習問題

問題 2.1. 平均値の定理を図を描いて確認せよ．

問題 2.2. 次の関数の 2 階の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = x^2 + 2x + 1$　(2) $f(x) = -x^3 + 3x$　(3) $f(x) = \sqrt{x}$
(4) $f(x) = -e^{-3x}$　(5) $f(x) = \log(x+1)$　(6) $f(x) = 2\log x - x^2$

問題 2.3. $f'(x^*) = 0$ であっても，$f(x^*)$ が最大値でも最小値でもない例を与えよ．

問題 2.4. 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$（$a \neq 0$）が凹関数であるための必要十分条件は $a < 0$ であることを示せ．

問題 2.5. 定理 2.4 を用いて，次の関数が凹関数もしくは凸関数であるかを判定せよ．

(1) $f(x) = \log x$　(2) $f(x) = e^x$　(3) $f(x) = x^4$

問題 2.6. 関数 $f(x) = e^x - ex$ の最小値を求めよ．

問題 2.7. ある生産者の生産関数が $y = \log(x+1)$ であるとする（y：生産量，x：要素投入量）．生産物価格を p，生産要素価格を w とする．ただし，$p > w > 0$ であるとする．利潤を最大にする要素投入量を p と w の式であらわせ．

問題 2.8. ある市場の需要曲線が $p = 20 - 2\sqrt{x}$（p は価格、x は需要量）であるとする．この市場は独占市場で，独占企業の費用関数を $c = 5y$（c は総費用、y は生産量）とする．独占企業が需要される量だけ生産するとき，その利潤は

$$f(x) = px - 5x = (20 - 2\sqrt{x})x - 5x$$

である．

(1) $f(x)$ は凹関数であることを示せ．
(2) $f(x)$ の値を最大にする x の値を求めよ．

3　ベクトル空間

3.1　ベクトル

■ベクトルとは　2 つ実数 x_1, x_2 を並べたもの (x_1, x_2) を **2 次元ベクトル**という．2 次元ベクトルは座標平面上の点と同一視できる．すべての 2 次元ベクトルの集合を $\mathbb{R}^2$ と表記する．$\mathbb{R}^2$ は座標平面全体と考えてよい．ベクトルを表すときは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のような書体を用いる．

■ベクトルの演算　2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その**和** $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

とする．実数 α に対して**スカラー積** $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ を

$$\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**ノルム** $\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

と定義する．ノルムとは，座標平面における点 $\boldsymbol{x}$ と原点との（ユークリッド）距離である．２つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その差のノルム $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ は，2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の距離をあらわす．

■内積　2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との**内積** $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

と定義する．

例 3.1. 2 種類の財があり（第 1 財と第 2 財），各財の価格をそれぞれ p_1, p_2 であらわす．各財の消費量（購入量）をそれぞれ x_1, x_2 であるとき，支出額は

$$p_1 x_1 + p_2 x_2$$

である．これは価格ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ と消費ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ との内積 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}$ である．　□

内積について次のことが成り立つ．

定理 3.1. ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos\theta$$

が成り立つ．

定理 3.1 より，$\|x\|, \|y\| \neq 0$ であるとき，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ であることと $\cos\theta = 0$ とは同値である．$\cos\theta = 0$ であるとは，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とのなす角が直角であることを意味する．

■直線の方程式　座標平面 $\mathbb{R}^2$ における原点を通る直線の方程式は

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

である（a_1, a_2 は定数）．ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ とすると，上式は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

と書ける．すなわち，この直線はベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の集合である．

一般に，座標平面 $\mathbb{R}^2$ における直線 ℓ の方程式は

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$$

である．ℓ は $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ を平行移動して得られる．すなわち、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と ℓ とのなす角は直角である．$\boldsymbol{a}$ を ℓ の**法線ベクトル**（*normal vector*）という．

例 3.2. 財価格が p_1, p_2, 消費者の所得が m であるときの予算制約

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

を満たす (x_1, x_2) の集合は座標平面上の直線である．この直線を**予算線**（*budget line*）という．予算線と価格ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ とのなす角は直角である． □

3.2 ベクトル空間

■n 次元ベクトル空間　実数を n 個並べたもの $(x_1, \cdots, x_n)$ を n **次元ベクトル**という．すべての成分が 0 であるベクトルをゼロベクトルといい，$\mathbf{0}$ という記号で表す．任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対して，和・差 $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}$ およびスカラー積 $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ が自然に定義される．

$$\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_1 \pm y_1, \cdots, x_n \pm y_n), \quad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n).$$

すべての n 次元ベクトルの集合を n **次元ベクトル空間**といい，$\mathbb{R}^n$ と表記する．2 次元ベクトルと同様に，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

と定義すると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta$$

が成立する．また $\mathbb{R}^n$ において

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

を**超平面**（*hyperplane*）の方程式といい，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ をこの超平面の**法線ベクトル**（*normal vector*）という．

例 3.3. 財が 3 種類あるとき，各財の価格が p_1, p_2, p_3, 消費者の所得が m であるときの予算制約

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = m$$

を満たす (x_1, x_2, x_3) の集合は座標空間上の平面である．一般に，財が n 種類あるとき，各財の価格が $p_1, \cdots, p_n$, 消費者の所得が m であるときの予算制約

$$p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = m$$

を満たす $(x_1, \cdots, x_n)$ の集合は n 次元空間の超平面である．この超平面と価格ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ とのなす角は直角である． □

■**抽象ベクトル空間**　一般に，(i) ゼロベクトル $\mathbf{0}$，(ii) 和・差 $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}$，(iii) スカラー積 $\alpha \boldsymbol{x}$，の 3 つのことがきちんと定義されているような集合のことを**ベクトル空間**という．

例 3.4 (関数空間)**.** $[0,1]$ 区間で定義される連続関数全体の集合を $C[0,1]$ とすると，$C[0,1]$ はベクトル空間となる．実際，つねに 0 の値をとる関数を $\mathbf{0}(x)$ とすると，$\mathbf{0}(x)$ は連続関数である．$C[0,1]$ の任意の要素 f, g と，任意の実数 α に対して，和 $f+g$ およびスカラー積 αf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

と定義すると，$f+g, \alpha f$ は $[0,1]$ 区間上の連続関数である．すなわち，$f+g$ および αf は $C[0,1]$ の要素である． □

■1 **次結合**　m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ の *1* **次結合**または**線形結合**（*linear combination*）とは，ある m 個の実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ を用いたスカラー積とベクトル和で表現される

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)}$$

のような形式のことをいう．特に，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$ かつ $\alpha_i \geqq 0$（$i = 1, \ldots, m$）を満たすときは**凸結合**（*convex combination*）という．

■1 **次独立**　m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ が *1* **次独立**または**線形独立**（*linearly independent*）であるとは，m 個の実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)} = \mathbf{0}$$

をみたすならば

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

のときしかない場合をいう．1 次独立 <u>でない</u> ときは *1* **次従属**または**線形従属**（*linearly dependent*）であるという．$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ が 1 次従属であるなら

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)} = \mathbf{0}$$

であるとき，ある α_i は 0 でないから，

$$\boldsymbol{x}^{(i)} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\boldsymbol{x}^{(1)} - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\boldsymbol{x}^{(i-1)} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\boldsymbol{x}^{(i+1)} - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i}\boldsymbol{x}^{(m)}$$

と表すことができる．すなわち，$\boldsymbol{x}^{(i)}$ は残りの $m-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(i-1)}, \boldsymbol{x}^{(i+1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ の 1 次結合として表現できる．

例 3.5. $\mathbb{R}^2$ において，$\boldsymbol{e}_1 = (1,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ は 1 次独立である．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を $\mathbf{0}$ でない任意の 2 次元ベクトルとすると，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}$ は 1 次独立ではない．実際,

$$x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

が成立する． □

■ベクトル空間の次元　ベクトル空間の**次元**（*dimension*）とは，その空間内で取れる 1 次独立なベクトルの最大個数のことをいう．次の定理が示すように，$\mathbb{R}^n$ の次元は n である．

定理 3.2. m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ が 1 次独立ならば，$m \leqq n$ である．すなわち，$\mathbb{R}^n$ において，1 次独立な n 次元ベクトルの最大個数は n である．

例 3.6. $\mathbb{R}^n$ において，n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

は 1 次独立である (練習問題 3.1)．さらに，どんな n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ も，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

としてただ一通りに表現される．つまり，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ にどんなベクトルを付け加えても 1 次独立とすることはできない． □

例 3.4 の関数空間 $C[0, 1]$ は無限次元のベクトル空間である．実際，$f_{(n)}(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とすると，$\{f_{(1)}(x), f_{(2)}(x), \ldots\}$ は 1 次独立である．

■基底　$\mathbb{R}^n$ のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}\}$ で次の 2 つの性質を満たすもののことを $\mathbb{R}^n$ の**基底**（*basis*）という．

(B1) $\{\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}\}$ は 1 次独立である．
(B2) すべての n 次元ベクトルは $\{\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}\}$ の 1 次結合として（一意に）表現できる．

例 3.5 で見たように，$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底をなす．これを**標準基底**（*standard basis*）という．$\mathbb{R}^n$ の基底は標準基底以外にも数多く存在する．例えば，$\mathbb{R}^2$ において $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は標準基底であるが，$\{(1, 1), (-1, 1)\}$ も基底となる．一般に，1 次独立な n 個のベクトルは $\mathbb{R}^n$ の基底となる．状況に応じて基底を取り替えることにより議論を簡単にすることができる．

3.3　線形写像

■写像とは　$\mathbb{R}^n$ の各点（ベクトル）に対して，$\mathbb{R}^m$ の点（ベクトル）を対応させるルールのことを $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への**写像**（*mapping*）といい，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と表記する．

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は n 変数関数が $f_1, \cdots, f_m$ と m 個並んだものと考えればよい．すなわち，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

と表現できる．ここで各 f_i は m 次元ベクトルの第 i 座標を決める関数で，座標関数 (coordinate function) とよばれる．このことから，写像 f のことを**ベクトル値関数** *(vector-valued function)* ということもある．

例 3.7 (総超過需要)**.** n 種類の財があるとき，各財の**総超過需要関数**（*aggregate execess demand functions*）を並べると，$\mathbb{R}^n_{++}$ から $\mathbb{R}^n$ への写像が得られる．すなわち，価格ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して，

$\boldsymbol{p}$ における総超過需要ベクトル $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ が定まる．

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} z_1(p_1, \cdots, p_n) \\ \vdots \\ z_n(p_1, \cdots, p_n) \end{pmatrix}.$$

ここで，$\mathbb{R}^n_{++}$ とはすべての座標が正であるような n 次元ベクトルの集合のことである．

$$\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

競争均衡価格とは，総超過需要写像の値が $\mathbf{0}$ となるような価格のことである． □

■線形写像　写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**線形**（*linear*）であるとは，任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対して

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \quad f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

が成立する場合をいう．特に，$m = n$ のとき，線形写像のことを ***1* 次変換**（*linear transformation*）という．ここで，f が線形ならば $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ であることに注意しておく．

例 3.8. 座標平面上の点 (x_1, x_2) に対して，以下の対応はいずれも 1 次変換である．

(1) x_1 軸に対称な点 $(x_1, -x_2)$ を対応させる．（線対称移動）
(2) 原点に対称な点 $(-x_1, -x_2)$ を対応させる．（点対称移動）
(3) 原点を中心に θ だけ回転させた点を対応させる．（回転移動） □

3.4　練習問題

問題 3.1. $\mathbb{R}^n$ において、n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

は 1 次独立であることを示せ．

問題 3.2. xy-平面上で原点を中心とした半径 1 の円を考える．この円周上の点で，2 変数関数 $f(x, y) = ax + by$ の値を最大にするものを求めよ．ただし $\|(a, b)\| = 1$ とする．

問題 3.3. 例 3.8 の変換はいずれも 1 次変換であることを示せ．

4　行列と行列式

4.1　行列

■行列とは　実数を縦に m 個，横に n 個並べたものを m **行** n **列行列**，あるいは $m \times n$ **行列**（*matrix*）といい，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように表記する．ここで a_{ij} とは行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 行の第 j 列番目の要素を表している．特に，$m = n$ の場合，$\boldsymbol{A}$ を n **次正方行列**という．

$m \times n$ 行列とは，行に着目すれば n 次元ベクトルを m 個並べたもので，列に着目すれば m 次元ベクトルを n 個並べたものとして見ることができる．

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の行と列を取りかえて得られる $n \times m$ 行列を $\boldsymbol{A}$ の**転置行列**（*transposed matrix*）といい，$\boldsymbol{A}^\top$ と表記する．

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

例 4.1. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ は 2×3 行列であり，$\boldsymbol{A}^\top = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ である．　□

■行列の和・差　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ とは，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の各成分の和をその成分とする $m \times n$ 行列のことである．

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

行列の差 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ も同様に定義される．

■行列の積　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と $n \times \ell$ 行列 $\boldsymbol{B}$ との積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ は $m \times \ell$ 行列となり，それを

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k\ell} \end{pmatrix}$$

と定義する．積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ の第 i 行第 j 列の要素は，$\boldsymbol{A}$ の第 i 行ベクトルと $\boldsymbol{B}$ の第 j 列ベクトルとの内積である．また，n 次元ベクトルの内積は $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列との積として見ることもできる．

次の例が示すように，行列のかけ算は数のかけ算とは異なる性質をもつ．

例 4.2 (非可換性)**.** $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{B} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ であるとき，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

すなわち $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ である．

また，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．すなわち，$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるが，$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である． □

例 4.3 (連立 1 次方程式)**.** 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} & ax + by = p \\ & cx + dy = q \\ & (a, b, c, d, p, q \text{ は定数}) \end{aligned}$$

は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表すことができる．このように，連立 1 次式は行列を用いると簡明に表現できる． □

4.2 行列式

■逆行列　2×2 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = E$ となる 2×2 行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ のことを $\boldsymbol{A}$ の**逆行列**という．ただし，$\boldsymbol{E_2}$ は 2 次単位行列

$$\boldsymbol{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

例 4.4. 行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ である．実際

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立する． □

■行列式　2×2 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の**行列式** $\det \boldsymbol{A}$ とは

$$\det \boldsymbol{A} = ad - bc$$

である．

定理 4.1. 2×2 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det \boldsymbol{A}$ について，次の性質が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{A}$ のある行ベクトルを α 倍すると，その行列式は $\det \boldsymbol{A}$ の α 倍となる．
(2) $\boldsymbol{A}$ のある行ベクトルに他の行ベクトルを足しても引いても，その行列式の値は変わらない．
(3) $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを入れ替えた場合，その行列式の値は $-\det \boldsymbol{A}$ である（符号が逆転する）．

定理 4.1 において，「行ベクトル」の代わりに「列ベクトル」を用いてもよい．

定理 4.2. 2×2 行列 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が逆行列をもつための必要十分条件は $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ であり，その逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

である．

例 4.5. 例 4.4 の行列 $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ に定理 4.2 を適用すると，$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ が得られる． □

■クラメールの公式　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad (a,b,c,d,p,q \text{ は定数})$$

を行列 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を用いて表すと

$$\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

である．もし行列 $\boldsymbol{A}$ に逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するなら，上式の両辺に $\boldsymbol{A}^{-1}$ を乗じると

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

となり，この連立方程式の一意解を得ることができる．

ここで，行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 列および第 2 列を $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right)$ で置き換えた行列をそれぞれ $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ とすると

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix},$$

連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\det \boldsymbol{B}_1}{\det \boldsymbol{A}} \\ \frac{\det \boldsymbol{B}_2}{\det \boldsymbol{A}} \end{pmatrix}$$

と表すことができる．これを**クラメールの公式**という．

もし逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在しなければ，この連立方程式の解は存在しないか無数に存在するかのいずれかである（練習問題）．

■逆行列　n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$ となる n 次正方行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ のことを $\boldsymbol{A}$ の**逆行列**という．ただし，$\boldsymbol{E}_n$ は n 次単位行列

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である．

■行列の階数　$m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ において，その列ベクトル（または行ベクトル）で 1 次独立であるものの最大個数のことを $\boldsymbol{A}$ の**階数**といい，$rank\ \boldsymbol{A}$ と表記する．

定理 4.3. n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ について以下は同値である．

(i) $\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつ.

(ii) $rank\ \boldsymbol{A} = n$.

(iii) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

定理 4.3 の意味を理解するために，$\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ として，連立方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \tag{4.1}$$

を考えよう．$\boldsymbol{A}$ が逆行列をもつなら，(4.1) の両辺に $\boldsymbol{A}^{-1}$ を乗じることにより，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．すなわち，(4.1) の解は $x_1 = x_2 = 0$ だけである．よって，(i) ならば (iii) が成り立つ．次に，(4.1) を次のように書き換えてみる．

$$x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これを満たすような x_1, x_2 が，$x_1 = x_2 = 0$ しかないならば，ベクトル (a, c) と (b, d) が 1 次独立である（1 次独立の定義を確認せよ）．すなわち，$rank\ \boldsymbol{A} = 2$ である．よって，(iii) ならば (ii) が成り立つ．最後に，$rank\ \boldsymbol{A} = 2$ ならば $\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつことについては，補論を参照せよ．

■一般の行列式　n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，その第 i 行と第 j 列を取り除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列を $\boldsymbol{A}_{ij}$ とする．このとき，行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det \boldsymbol{A}$ は，第 i 行を用いると，

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det \boldsymbol{A}_{i1} + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot \det \boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + (-1)^{i+1} \cdot a_{in} \cdot \det \boldsymbol{A}_{in}$$

で与えられる．あるいは，第 j 列を用いて

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det \boldsymbol{A}_{1j} + (-1)^{2+j} \cdot a_{2j} \cdot \det \boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det \boldsymbol{A}_{nj}$$

が成り立つ．このように，行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を，行列 $\boldsymbol{A}$ の小行列式 $\det \boldsymbol{A}_{ij}$ から構成する方法のことを**余因子展開**という．

例 4.6. 3×3 行列 $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ の行列式は，第 1 行を用いると，

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= a_{11} \cdot \det \boldsymbol{A}_{11} - a_{12} \cdot \det \boldsymbol{A}_{12} + a_{11} \cdot \det \boldsymbol{A}_{13} \\ &= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

である．第 2 列を用いれば，

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= -a_{12} \cdot \det \boldsymbol{A}_{12} + a_{22} \cdot \det \boldsymbol{A}_{22} - a_{32} \cdot \det \boldsymbol{A}_{32} \\ &= -a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \end{aligned}$$

である．□

■一般の逆行列　3 次以上の逆行列は次の定理により求めることができる．

定理 4.4. $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ について，$\det \boldsymbol{A} \neq 0$ のとき，その逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は次の式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} \frac{\det \boldsymbol{A}_{11}}{\det \boldsymbol{A}} & -\frac{\det \boldsymbol{A}_{21}}{\det \boldsymbol{A}} & \cdots & (-1)^{n+1} \frac{\det \boldsymbol{A}_{n1}}{\det \boldsymbol{A}} \\ -\frac{\det \boldsymbol{A}_{12}}{\det \boldsymbol{A}} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \frac{\det \boldsymbol{A}_{1n}}{\det \boldsymbol{A}} & \cdots & \cdots & (-1)^{2n} \frac{\det \boldsymbol{A}_{nn}}{\det \boldsymbol{A}} \end{pmatrix}$$

すなわち，逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ の第 i 行第 j 列の要素は（存在するなら）

$$(-1)^{j+i}\frac{\det \boldsymbol{A}_{ji}}{\det \boldsymbol{A}}$$

である．

例 4.7. 定理 4.3 を用いて，3×3 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求める．

まず

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{11} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{A}_{21} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{A}_{31} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&\det \boldsymbol{A}_{11} = \det \boldsymbol{A}_{22} = \det \boldsymbol{A}_{33} = 3, \\
&\det \boldsymbol{A}_{12} = \det \boldsymbol{A}_{21} = \det \boldsymbol{A}_{23} = \det \boldsymbol{A}_{32} = 1, \\
&\det \boldsymbol{A}_{13} = \det \boldsymbol{A}_{31} = -1
\end{aligned}$$

である．

第 1 行に余因子展開を適用すると

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= 2\times \det \boldsymbol{A}_{11} - 1\times \det \boldsymbol{A}_{12} + 1\times \det \boldsymbol{A}_{13} \\
&= 2\times 3 - 1\times 1 + 1\times(-1) = 4
\end{aligned}$$

である．定理 4.3 より

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\det \boldsymbol{A}_{11}}{\det \boldsymbol{A}} & -\frac{\det \boldsymbol{A}_{21}}{\det \boldsymbol{A}} & \frac{\det \boldsymbol{A}_{31}}{\det \boldsymbol{A}} \\ -\frac{\det \boldsymbol{A}_{12}}{\det \boldsymbol{A}} & \frac{\det \boldsymbol{A}_{22}}{\det \boldsymbol{A}} & -\frac{\det \boldsymbol{A}_{32}}{\det \boldsymbol{A}} \\ \frac{\det \boldsymbol{A}_{13}}{\det \boldsymbol{A}} & -\frac{\det \boldsymbol{A}_{23}}{\det \boldsymbol{A}} & \frac{\det \boldsymbol{A}_{33}}{\det \boldsymbol{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

である． □

4.3 行列と線形写像

■線形写像としての行列 2 つの 1 次式によって表される写像

$$\begin{aligned}
y_1 &= ax_1 + bx_2 \\
y_2 &= cx_1 + dx_2
\end{aligned}$$

は，2 次元ベクトル (x_1, x_2) を別の 2 次元ベクトル (y_1, y_2) に変換する線形写像である（練習問題 4.5）．この写像は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

■表現定理　行列で表される写像は線形であるが，実は逆も正しい．すなわち，どんな線形写像も行列によって表される．$m \times n$ 行列は，n 次元ベクトル空間から m 次元ベクトル空間への線形写像と同一視できる．

定理 4.5. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形であるための必要十分条件は，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ となるような $m \times n$ 行列 A が存在することである．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

定理 4.4 において，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ をみたす行列 $\boldsymbol{A}$ は次のようにして求めることができる．標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

として

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とすればよい．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の第 j 列を $f(\boldsymbol{e}_j)$（縦ベクトル）になるようにとればよい．実際，例 4.3 より任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合として表すことができるから，f の線形性より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が成り立つ．

上述の構成の仕方より次のことがわかる．まず，線形写像においては，基底がどのように変換されるかだけが分かればその全体が分かる．さらに，線形写像を表現する行列 $\boldsymbol{A}$ の各列ベクトルは，標準基底がそれぞれどのように変換されるのかを表している．

4.4　練習問題

問題 4.1. 次の行列の演算を計算せよ

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $(1 \ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $(x_1 \ \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

問題 4.2. 次の行列の行列式を値を計算し、(存在するなら) 逆行列を導出せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 4.3. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (a, b, c, d, p, q \text{ は定数})$$

がただ 1 つの解をもつための必要十分条件は、行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が逆行列をもつことであることを示せ.

問題 4.4. 次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 4.5. 行列によって表される写像

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は線形であることを示せ.

問題 4.6. 座標平面上の点 $x = (x_1, x_2)$ に対して、それを原点を中心として θ だけ回転させた点 $y = (y_1, y_2)$ を対応させる写像を f とする (ただし θ は定数). この写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形であることを示せ.

4.5 補論：線形代数学の基本定理

■部分空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 L が次の性質を満たすとき, **部分空間** (*subspace*) という.

(i) $\mathbf{0} \in L$.

(ii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ ならば, $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} \in L$.

(iii) $\boldsymbol{x} \in L$ ならば, 任意の実数 α に対して $\alpha\boldsymbol{x} \in L$.

部分空間とはベクトル和およびスカラー積に関して閉じているような部分集合のことである. したがって, 部分空間それ自体もベクトル空間である.

部分空間 L の中で取りうる 1 次独立なベクトルの最大個数を L の**次元** (*dimension*) といい, $\mathrm{dim}L$ と表記する. L は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるので, $\mathrm{dim}L \leqq n$ である.

例 4.8. (1) $\mathbb{R}^2$ において, $x_1 = x_2$ をみたすベクトルの集合を L とすると, L は部分空間をなす. $\{(1,1)\}$ は L の基底であるから, $\dim L = 1$ である.

(2) $\mathbb{R}^3$ において, $x_3 = 0$ をみたすベクトルの集合を L とすると, L は部分空間をなす. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は L の基底であるから, $\dim L = 2$ である. □

■像・核 f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし, f を表す $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}$ とする. f のとりうる値 (m 次元ベクトル) の集合を f の**像** (*image*) といい, $\mathrm{Im}f$ と表記する.

$$\mathrm{Im}f = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}.$$

例 4.9. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f(x) = (x, x)$ の像は，$\mathbb{R}^2$ における 45 度線である．

$$\mathrm{Im} f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}.$$

$\mathrm{Im} f$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であり，$\{(1, 1)\}$ はその基底である． □

f の値が $\mathbf{0}$ なるような n 次元ベクトルの集合を f の**核**（*kernel*）といい，$\ker f$ と表記する．

$$\ker f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

$\ker f$ とは，連立方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の集合のことである．

例 4.10. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = a_1x_1 + a_2x_2$（ただし $a_2 \neq 0$）の核は，$\mathbb{R}^2$ における，原点を通る傾きが $-\frac{a_1}{a_2}$ の直線である．

$$\ker f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

$\ker f$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であり，$\{(a_2, -a_1)\}$ はその基底である． □

例 4.8, 4.9 で見たように，$\mathrm{Im} f$, $\ker f$ はそれ自体ベクトル空間（部分空間）となる．このことは一般に成立する．

まず，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ とすると

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')$$

より，$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in \mathrm{Im} f$ である．また，任意の実数 α に対して

$$\alpha\boldsymbol{y} = \alpha f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha\boldsymbol{x})$$

であるから，$\alpha\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im} f$ である．よって，$\mathrm{Im} f$ は部分空間である．

次に，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$ とすると

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$$

であるから，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in \ker f$ である．また，任意の実数 α に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

より，$\alpha\boldsymbol{x} \in \ker f$ である．よって，$\ker f$ は部分空間である．

以上の結果を定理としてまとめておこう．

定理 4.6. f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とする．

(i) $\mathrm{Im} f$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である．
(ii) $\ker f$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

■像と核との関係　線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\mathrm{Im} f$ と核 $\ker f$ は，それぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の部分空間である．これら部分空間の次元について以下の関係が成立する．

定理 4.7 (線形代数学の基本定理)**.** f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であるとき，次の等式が成り立つ．

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = n. \tag{4.2}$$

ここで，f を表現する行列を $\boldsymbol{A}$ とすると，$\dim \mathrm{Im} f = rank \boldsymbol{A}$ であることに注意しよう．なぜなら

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書くことができる．すなわち，$\mathrm{Im} f$ は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルによって生成される部分空間である．つまり，$\mathrm{Im} f$ の次元は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルで 1 次独立なものの個数と一致する．したがって，(4.2) は次のように書き換えることができる．

$$rank\ \boldsymbol{A} = n - \dim \ker f. \tag{4.3}$$

■逆変換と逆行列　f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像，すなわち $\mathbb{R}^n$ における変換とする．どんな $\boldsymbol{y}$ に対しても，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{x}$ がただ一つに定まるとき，その関係を f の**逆変換**（*inverse transformation*）といい，f^{-1} と表記する．逆変換とは，関数における逆関数と同様の概念である．ここで，f と f^{-1} について，どんな $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対しても

$$f^{-1}(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}, \quad f\left(f^{-1}(\boldsymbol{y})\right) = \boldsymbol{y} \tag{4.4}$$

が成り立つことに注意しよう．

f が 1 次変換であるとき，f^{-1} も 1 次変換である．実際，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}')$ であるとき，f の線形性より

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}')$$

であることから

$$f^{-1}(\boldsymbol{y}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = f^{-1}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}')$$

が成り立つ．また，任意の実数 α について, f の線形性より

$$\alpha \boldsymbol{y} = \alpha f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha \boldsymbol{x})$$

であるから

$$\alpha f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{x} = f^{-1}(\alpha \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ に対して，その逆変換 f^{-1} も 1 次変換であるから，定理 4.5 より，$f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ となる行列 $\boldsymbol{B}$ が存在する．(4.4) より，すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$$

が成り立つ．すなわち

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$$

である．これは $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ であることを意味する．つまり，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ とは，$\boldsymbol{A}$ が表現する 1 次変換の逆変換を表す行列である．

■逆行列の存在　n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するための条件を，1 次変換の観点から考察してみよう．1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が逆変換 $f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ をもつための必要十分条件は次の 2 つである．

(a) すべての $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(b) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}')$ である．

f が (a) を満たすとき**全射**（*surjection*）といい，(b) を満たすとき**単射**（*injection*）という．(a) と (b) の両方を満たすとき，**全単射**（*bijection*）という．

条件 (a) は $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^n$ と同じことである．条件 (b) は $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ と同じである．なぜなら，f が単射であるなら，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ なので $\ker f$ の要素は $\mathbf{0}$ しかない．逆に $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ ならば $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \neq \mathbf{0}$ なので，$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \neq \mathbf{0}$，すなわち $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}')$ である．

ここで，$\dim \mathrm{Im} f = rank\ \boldsymbol{A}$ であることに注意すると，逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するための必要十分条件は，$rank\ \boldsymbol{A} = n$ かつ $\dim \ker f = 0$ である．ここで，(4.3) より，$rank\ \boldsymbol{A} = n$ と $\dim \ker f = 0$ とは同値である．したがって，(i) $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在すること，(ii) $rank\ \boldsymbol{A} = n$，(iii) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{0}$ のみであること，はすべて同値である．これが定理 4.3 の意味である．

5　固有値と2次形式

5.1　固有値

■固有値と固有ベクトル　正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，ある数 α と $\underline{\boldsymbol{0}\text{ でない}}$ ベクトル $\boldsymbol{x}$ について

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

が成り立つとき，α を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**（*eigen value*），$\boldsymbol{x}$ を固有値 α に対する A の**固有ベクトル**（*eigen vector*）という．一つの固有値に対して固有ベクトルは一つではない．(5.1) から明らかなように，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が同じ固有値に対する固有ベクトルであるとき，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, k\boldsymbol{x}$ も同じ固有値に対する固有ベクトルである（k は任意の数）．

例 5.1. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ のとき，固有値は $\alpha = 2, 5$ である．$\alpha = 2$ に対する固有ベクトルの一つは $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ である．実際，

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1 + 2\times(-1) \\ 1\times 1 + 3\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 5$ に対する固有ベクトルの一つは $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．実際，

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 2\times 1 \\ 1\times 2 + 3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

例 5.1 において，固有ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は1次独立である．このことは一般に成立する．2次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の異なる固有値を α, β とし，その固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が1次独立でないなら，ある0でない実数 k を用いて $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$ と表すことができる．このとき

$$\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}k\boldsymbol{y} = k\beta\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x}$$

となり，$\alpha \neq \beta$ であることに反する．よって，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は1次独立でなければならない．3次以上の正方行列についても同様に議論できる．以上より，次の定理を得る．

定理 5.1. 異なる固有値に対する固有ベクトルは1次独立である．

2次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の異なる固有値が α, β であり，その固有ベクトルがそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ であるとき，固有ベクトルを並べて得られる行列を $\boldsymbol{P}$ とする．

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}.$$

定理 7.1 より，固有ベクトルは1次独立であるから，，定理 4.3 より，$\det \boldsymbol{P} \neq 0$，すなわち $\boldsymbol{P}$ は逆行列をもつことが判る．

■固有値・固有ベクトルの意味　1次変換 f が正方行列 $\boldsymbol{A}$ で表現されるとき，f の性質は $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルによって特徴づけられる．

2次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が α, β で，その固有ベクトルがそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする．定理 5.1 より，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は1次独立であるから，どのような2次元ベクトル $\boldsymbol{z}$ であっても，ある実数 a, b を用いて $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表すことができる．このとき

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = a\alpha\boldsymbol{x} + b\beta\boldsymbol{y}$$

と書くことができる．すなわち，A はベクトル x を α 倍，ベクトル y を β 倍するように作用する．つまり，1 次変換 f は，**固有ベクトルを固有値倍するような変換**なのである．

例 5.2. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ とする．任意の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ について

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

である．つまり $\boldsymbol{Ax}$ は第 1 座標を 2 倍し，第 2 座標を 3 倍するような 1 次変換である．

一方，$\boldsymbol{A}$ の固有値は 2 と 3 であり，$\boldsymbol{e^1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e^2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ は固有ベクトルである（各自で確認せよ）．$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e^1} + x_2\boldsymbol{e^2}$ と表せるから

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{Ax} = 2x_1\boldsymbol{e^1} + 3x_2\boldsymbol{e^2}$ が成り立つ． □

■固有方程式　$\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ のとき，(7.3) 式は次のように書くことができる．

$$\begin{pmatrix} \alpha - a & -b \\ -c & \alpha - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり，α が $\boldsymbol{A}$ の固有値であることは，連立方程式

$$\begin{aligned} (\alpha - a)x_1 - bx_2 = 0 \\ -cx_1 + (\alpha - d)x_2 = 0 \end{aligned}$$

が $x_1 = x_2 = 0$ <u>以外</u> の解をもつことと同じである．このことは

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - a & -b \\ -c & \alpha - d \end{pmatrix} = 0$$

であることと同じである．ここで，

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - a & -b \\ -c & \alpha - d \end{pmatrix} = \alpha^2 - (a+d)\alpha + ad - bc$$

である．この式のことを**特性多項式**（*characteristic polynomial*）または**固有多項式**という．α が $\boldsymbol{A}$ の固有値であることは，α が次の方程式の解であることと同じである．

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + ad - bc = 0 \tag{5.2}$$

(5.2) 式を A の**特性方程式**（*characteristic equation*）または**固有方程式**といい，この方程式の解を**特性根**（*characteristic root*）という．すなわち，固有値と特性根は一致する．

例 5.3. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ のとき，特性多項式は $\det\left(\begin{smallmatrix} \alpha-4 & -2 \\ -1 & \alpha-3 \end{smallmatrix}\right) = \alpha^2 - 7\alpha + 10$ である．特性方程式は

$$\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

である．特性根は $\alpha = 2, 5$ である． □

一般に $\boldsymbol{A}$ を n 次正方行列とする．(5.1) 式を次のように変形する．

$$(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E_n})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

ここで，$\boldsymbol{E_n}$ は n 次単位行列，すなわち対角要素は 1 で非対角要素は 0 であるような行列である．$\boldsymbol{A}$ の特性多項式は $f_{\boldsymbol{A}}(\alpha) = \det(\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{E}_n)$ であり，これは α の n 次多項式である．特性方程式は

$$\det(\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{E_n}) = 0$$

である．この方程式の特性根が $\boldsymbol{A}$ の固有値である．特性方程式は n 次方程式なので，重複度（重解）も含めて n 個の根（解）をもつ．つまり固有値は高々 n 個である．

■対称行列の固有値　2 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が対称行列であるとき（つまり $b = c$ のとき），特性方程式は

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + ad - b^2 = 0$$

である．この方程式の判別式は

$$(a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geqq 0$$

であるから，必ず実数解をもつ．つまり，$\boldsymbol{A}$ の固有値はすべて実数であることがわかる．この性質は 2 次以上の対称行列に対しても成立する．

定理 5.2. n 次対称行列の固有値はすべて実数である．

例 5.4. 対称行列 $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の特性方程式は

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

であるから，固有値は $\alpha = 1, 3$ である．

ここで，$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対する固有ベクトルである．一方，$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する固有ベクトルである（各自で確認せよ）． □

■行列の対角化　$\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ が異なる固有値 α, β をもち，その固有ベクトルがそれぞれ $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{y} = \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ であるとする．このとき，$\boldsymbol{Ax} = \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ay} = \beta\boldsymbol{y}$ が成立している．これら 2 つをまとめて書くと，次のようになる（各自で確認せよ）．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{P} = \left(\begin{smallmatrix} p & r \\ q & s \end{smallmatrix}\right)$ とおくと，$\boldsymbol{P}$ は逆行列をもつので（なぜか？），上式は次のように書き換えることができる．

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

このような過程を行列の対角化という．

例 5.5. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値 $2, 5$ の固有ベクトルは，それぞれ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．$\boldsymbol{P} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすると，$\det P = 3 \neq 0$ であるから，$\boldsymbol{P}$ は逆行列をもつ．実際 $\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．このとき

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

が成立する． □

$\boldsymbol{A}$ が対称行列の場合，$\boldsymbol{P}$ は特別な性質をもつように選ぶことができる．これを次の例で確認しよう．

例 5.6. 対称行列 $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値 $1, 3$ に対して，それぞれ $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである．$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ である．このとき，

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である． □

この例において，$\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列 $\boldsymbol{P}^{\top}$ である．この性質は一般に成立する．すなわち，$\boldsymbol{A}$ が対称行列であるなら，$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\top}$ となるように定めることができる．以上を定理としてまとめておこう．

定理 5.3. n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる n 個の実固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をもつとき，ある n 次行列 $\boldsymbol{P}$ が存在して，

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

とすることができる．ここで，$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを各列におくことで得られる行列である．さらに，$\boldsymbol{A}$ が対称行列であるなら，$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\top}$ となるように $\boldsymbol{P}$ を定めることができる．

固有値が重根を含む場合，定理 5.3 は必ずしも成り立たない．$\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ がただ一つの固有値 α をもつとき，ある行列 $\boldsymbol{P}$ によって対角化できたとすると

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \alpha\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{A}$ が対角化可能となるのは，$\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ の場合に限られる．

5.2　2 次形式

■2 次形式　2 次の項だけからなる多項式を **2 次形式**（*quadratic form*）という．1 変数の 2 次形式は ax^2 である（ただし $a \neq 0$）．2 変数の 2 次形式は $a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$ という形である．$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{smallmatrix}\right)$ とすると，2 次形式 $a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$ は $\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表すことができる．

$$\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$$

逆に，どのような対称行列 $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ についても，$\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ は 2 次形式になる．すなわち，2 変数の 2 次形式は 2 次対称行列と一対一に対応する．

一般に，n 変数の 2 次形式は次のようなものである．

$$\sum_{i \leqq j} a_{ij}x_ix_j$$

n 変数の 2 次形式は n 次対称行列によって表現できる．

■正値・負値定符号　1 変数の 2 次形式 ax^2 は，$a > 0$ ならば，0 でないどのような x に対しても ax^2 は正の値をとる．逆に $a < 0$ ならば，0 でないどのような x に対しても ax^2 は負の値をとる．つまり，2 次形式の値の符号（正負）は a の値の正負によって完全に定まる．

このような性質を 2 変数以上のケースに拡張することを考える．すなわち，2 次形式の係数と取る値の符号との関係について考察する．

定義 5.1. 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ について，

(1) $\mathbf{0}$ でないどのような $\boldsymbol{x}$ でも，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ となる場合，$\boldsymbol{A}$ は**正値定符号**（*positive definite*）であるという.

(2) $\mathbf{0}$ でないどのような $\boldsymbol{x}$ でも，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$ となる場合，$\boldsymbol{A}$ は**負値定符号**（*negative definite*）であるという.

(3) どのような $\boldsymbol{x}$ でも，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq 0$ となる場合，$\boldsymbol{A}$ は**半正値定符号**（*positive semidefinite*）であるという.

(4) どのような $\boldsymbol{x}$ でも，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq 0$ となる場合，$\boldsymbol{A}$ は**半負値定符号**（*negative semidefinite*）であるという.

(5) (i)-(iv) のいずれでもない場合は**不定** （*indefinite*）という.

例 5.7. 上の定義を例で確認しておこう.

(1) $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ は正値定符号である.

(2) $f(x_1, x_2) = -{x_1}^2 - {x_2}^2 = -({x_1}^2 + {x_2}^2)$ は負値定符号である.

(3) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ は半正値定符号であるが，正値定符号ではない．なぜなら，$x_1 = x_2$ をみたす (x_1, x_2) について $f(x_1, x_2) = 0$ となるからである.

(4) $f(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2)^2$ は半負値定符号であるが，負値定符号ではない. □

2 変数 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2$ の定符号性の判定方法を考えよう.

まず，$a = 0$ ならば，$\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ となるので，正値定符号にも負値定符号にもなり得ないことに注意しよう.

$a \neq 0$ として，上式を次のように書き換える.

$$
\begin{aligned}
&a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2 \\
&= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}{x_2}^2
\end{aligned}
$$

式の形から，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が正値定符号であることと，$a > 0, ac - b^2 > 0$ であることは同じであることが判る．同様に，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が負値定符号であることと，$a < 0, ac - b^2 > 0$ であることは同じである．また，$a > 0, ac - b^2 \geqq 0$ ならば半正値定符号であり，$a < 0, ac - b^2 \geq 0$ ならば半負値定符号である．ここで $ac - b^2$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式である.

以上の議論より，次の判定条件を得る（半正値定符号・半負値定符号の判定については，各自で証明を試みられたい).

定理 5.4. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ として，2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ $(= a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2)$ について，

(1) $\boldsymbol{A}$ が正値定符号であるための必要十分条件は，$a > 0$ かつ $\det \boldsymbol{A} = ac - b^2 > 0$ が成立することである.

(2) $\boldsymbol{A}$ が負値定符号であるための必要十分条件は，$a < 0$ かつ $\det \boldsymbol{A} = ac - b^2 > 0$ が成立することである.

(3) $\boldsymbol{A}$ が半正値定符号であるための必要十分条件は，$a \geqq 0,\ c \geqq 0,\ \det \boldsymbol{A} = ac - b^2 \geqq 0$ が成立することである.

(4) $\boldsymbol{A}$ が半負値定符号であるための必要十分条件は，$a \leqq 0,\ c \leqq 0,\ \det \boldsymbol{A} = ac - b^2 \geqq 0$ が成立することである.

例 5.8. 定理 5.4 を例で確認しよう．

(1) ${x_1}^2 + {x_2}^2 = \boldsymbol{x}^\top \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{x}$ に対して，$1 > 0, 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 > 0$ である．

(2) $-{x_1}^2 - {x_2}^2 = \boldsymbol{x}^\top \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{x}$ に対して，$-1 < 0, (-1) \times (-1) - 0 \times 0 = 1 > 0$ である．

(3) $(x_1 - x_2)^2 = {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 = \boldsymbol{x}^\top \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{x}$ に対して，$1 > 0, 1 \times 1 - (-1) \times (-1) = 0$ である．

(4) $-(x_1 - x_2)^2 = -{x_1}^2 + 2x_1x_2 - {x_2}^2 = \boldsymbol{x}^\top \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{x}$ に対して，$-1 < 0, (-1) \times (-1) - 1 \times 1 = 0$ である． □

■固有値と定符号性　2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ において，$\boldsymbol{A}$ は対称行列であるから，その固有値はすべて実数である．それらがすべて異なるとき，ある行列 $\boldsymbol{P}$ に対して $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$ は対角行列で，その対角要素は $\boldsymbol{A}$ の固有値とすることができる（定理 5.3）．この対角行列を $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ とすると，$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ の定符号性と $\boldsymbol{x}^\top \widetilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x}$ のそれは一致する（なぜか？）．これより，次のことがわかる．

定理 5.5. n 次対称行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる n 個の実固有値をもつとする．

(1) 2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が正値定符号であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{A}$ のすべての固有値が正となることである．

(2) $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が負値定符号であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{A}$ のすべての固有値が負となることである．

(3) $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が半正値定符号であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{A}$ のすべての固有値が非負となることである．

(4) $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が半負値定符号であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{A}$ のすべての固有値が非正となることである．

5.3 練習問題

問題 5.1. 次の行列の固有値を求めなさい．

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問題 5.2. 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

の固有値は a と c であることを示しなさい．

問題 5.3. α を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値とし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を α に対する固有ベクトルとする．このとき，$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ も α に対する固有ベクトルであることを示せ（ただし，a, b は実数）．

問題 5.4. 次の 2 次形式の定符号性を判定しなさい．

(1) $2{x_1}^2 + 3x_2^2$　　(2) ${x_1}^2 - {x_2}^2$　　(3) ${x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4{x_2}^2$　　(4) $(x_1 + x_2)^2$

問題 5.5. $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ として，2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ を考える．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{A}$ を対角化した行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ を求めなさい．

(3) $\boldsymbol{A}$ と $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ との定符号性は一致することを示しなさい.

6 多変数関数の微分法

6.1 偏微分

■偏微分とは 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ を考える．ある点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ において，極限

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2}$$

がただ一つ存在する場合，この極限を $\boldsymbol{a}$ における f の**偏微分係数**という．

一般に，n 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，あるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

がただ一つ存在する場合，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{a}$ において x_i に関して偏微分可能であるといい，その極限 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{a}$ における x_i に関する偏微分係数という．

$f(\boldsymbol{x})$ が偏微分可能であるとき，$\boldsymbol{x}$ に対して，それぞれ一つの値 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ が対応するから，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ はそれぞれひとつの関数である．これらの関数を $f(\boldsymbol{x})$ の x_i に関する**偏導関数**という．

例 6.1. $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$ であるとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1^3 x_2$$

である．$\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$ はともに x_1, x_2 の 2 変数関数である（偏導関数）． □

■2 次偏導関数 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ が x_j に関して偏微分可能であるとき，その偏導関数

$$\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

を f の *2* **階の偏導関数**あるいは *2* **次の偏導関数**といい

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

と表記する．特に，$i = j$ の場合

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(\boldsymbol{x})$$

と表記する．

例 6.2. $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$ であるとき，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{x}) = 6x_1 x_2^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 6x_1^2 x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3$$

である． □

例 5.2 において

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x})$$

が成立している．これは，「$f(\boldsymbol{x})$ を x_i で偏微分してから x_j で偏微分しても，x_j で偏微分してから x_i で偏微分しても結果は同じである」という意味であるが，このことは一般に成り立つ．すなわち，関数に複数回の偏微分を施す場合，偏微分の順序は問わない．

定理 6.1 (ヤングの定理)**.** $f(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

■C^r **級関数**　一般に，$f(\boldsymbol{x})$ の r 次の偏導関数が存在して，それらがすべて連続関数であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は C^r **級**であるという．特に，何回でも偏微分できるときは C^∞ **級**あるいは**滑らか**（*smooth*）であるという．学部レベルの経済学で現れる関数はほぼ C^∞ 級であるので，これらの事項を意識する必要はほとんどないであろう．

6.2　全微分

■**勾配ベクトル**　$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ における偏微分係数を並べたものを**勾配ベクトル** (*gradient vector*) といい，$\nabla f(\boldsymbol{x})$ と表記する．

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

例 6.3. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 x_2^2$ であるとき，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(3x_1^2 x_2^2,\ 2x_1^3 x_2\right)$$

である．□

■**ヘッセ行列**　$\boldsymbol{x}$ における 2 階の偏微分係数を並べた行列を**ヘッセ行列** (*Hessian matrix*) といい，$\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x})$ と表記する．

$$\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

例 6.4. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 x_2^2$ であるとき

$$\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 x_2^2 & 6x_1^2 x_2 \\ 6x_1^2 x_2 & 2x_1^3 \end{pmatrix}$$

である．□

■**全微分**　1 変数関数 $f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

と表された．上式の左辺 $y - f(a)$ は $f(x)$ の値の増分を表しており，$df(a)$ と書くことにしよう．右辺の $x - a$ は x の増分であり，dx と書くとする．これら記号を用いると，接線の方程式は

$$df(a) = f'(a)dx$$

と書き換えることができる．この表現は，「$f(x)$ の a の近傍における挙動を 1 次式（＝直線）で近似したもの」とみればよい．その 1 次の係数が微分係数 $f'(a)$ である．

これと同様の議論を 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ に対して考えたい．すなわち，ある点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ の近傍での f の様子を 1 次式

$$df(\boldsymbol{a}) = v_1 dx_1 + v_2 dx_2$$

で近似することがあろうか．できるとすれば，v_1, v_2 はいかなるものとなるであろうか．幾何学的にいえば，f のグラフ（曲線）を $\boldsymbol{a}$ における接平面で近似することである．これを厳密に定式化したものが，以下で与える全微分というものである．

ある点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ において，

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

となるベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ が存在するとき，f は $\boldsymbol{a}$ において**微分可能**であるという．$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存して決まるので，それを明示して $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}))$ と表記する．一般に，偏微分可能であっても，微分可能であるとは限らないことが知られている（詳細は解析学の入門書を参照せよ）．

定理 6.2. $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ が微分可能であるとき，f は偏微分可能で，

$$v_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \quad v_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$$

が成立する．このとき，f の**全微分**を

$$df(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_2$$

と表記する．

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ における全微分 $df(\boldsymbol{a})$ とは $\boldsymbol{a}$ の近傍における $f(\boldsymbol{x})$ の値を 1 次式

$$f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_2 - a_2)$$

で近似したものである．すなわち，各変数をそれぞれ dx_1, dx_2 だけ微小に変化させたとき，$f(\boldsymbol{x})$ の変化分 $df(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{dx}) - f(\boldsymbol{a})$ は dx_1, dx_2 の 1 次式

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})dx_2$$

と近似的に等しい．この 1 次関数のグラフ（平面）が $f(\boldsymbol{x})$ のグラフ（曲面）の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ における**接平面**であり，その法線ベクトルが勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ なのである．

■勾配ベクトルの意味　$f(\boldsymbol{x})$ が微分可能であるとき，$\boldsymbol{a}$ の近傍での $f(\boldsymbol{x})$ の値の変化は，全微分によって近似的に表現される．

$$df(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{dx}.$$

この式は，勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a})$ と変化の方向をあらわすベクトル $\boldsymbol{dx}$ との内積である．練習問題 3.2 で示したように，$\boldsymbol{dx}$ と $\nabla f(\boldsymbol{a})$ が同じ向きを向いているとき，この値は最大になる．つまり，勾配ベクトルとは $f(\boldsymbol{x})$ の値がもっとも増加する方向をあらわしている．図形的には，$f(\boldsymbol{x})$ のグラフが $\boldsymbol{a}$ にもっとも急勾配になっている方向が $\nabla f(\boldsymbol{a})$ ということである．

■合成関数の微分法

定理 6.3 (連鎖律)**.** $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ は（全）微分可能であり，$g_1(t), g_2(t)$ は微分可能であるとする．このとき，合成関数 $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ は微分可能で

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})g_2'(t)$$

が成立する．ここで $\boldsymbol{x} = (g_1(t), g_2(t))$ である．

例 6.5. $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$, $g_1(t) = \sqrt{t}$, $g_2(t) = \frac{1}{t}$ であるとすると（$t > 0$），

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 3x_1^2 x_2^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2x_1^3 x_2,\quad g_1'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},\quad g_2'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

である．合成関数 $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ を微分すると

$$F'(t) = 3(\sqrt{t})^2\Big(\frac{1}{t}\Big)^2\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2(\sqrt{t})^3\frac{1}{t}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) = -\frac{\sqrt{t}}{2t^2}$$

となる． □

6.3 テイラーの定理

1 変数関数のテイラーの定理を用いて，2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ のテイラーの定理を導こう．2 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ を任意に固定する．実数 t に対して，1 変数関数 $g(t)$ を次のように定義する．

$$g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2).$$

$g(t)$ に対して，$t = 0$ の周りでテイラーの定理を適用すると

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\theta) \tag{6.1}$$

が成り立つ．ただし，θ は 0 と 1 の間のある実数である．ここで，定理 5.3 を用いて $g'(0)$, $g''(\theta)$ を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})h_2 \\
g''(\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}){h_1}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h})h_1 h_2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h})h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}){h_2}^2
\end{aligned}$$

ここで，$g''(\theta)$ に注目すると，2 変数 h_1, h_2 に関する <u>2 次形式</u> で，その係数は f の 2 次の偏微分係数となっている．よって

$$\begin{aligned}
g''(\theta) &= (h_1\ h_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}
\end{aligned}$$

と表現できる．以上より，(1) 式は次のように書き直すことができる．

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$$

これが 2 変数関数のテイラー公式である．一般の n 変数関数についても同様に議論できる．

定理 6.4 (テイラーの定理：多変数)**.** $f(\boldsymbol{x})$ は C^2 級であるとする．任意の $\boldsymbol{h}$ に対して，ある 0 と 1 の間の数 θ が存在して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}$$

が成り立つ．

上式において，$\nabla f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$ を 1 次の項といい，$\frac{1}{2}\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$ を 2 次の項という．1 変数関数であれば，2 次の項の正負は 2 次微分係数の符号だけで完全に定めることができた．一般の n 変数関数の場合，（$\boldsymbol{h}$ の値によらず）2 次の項の正負を定めるには，ヘッセ行列に関するさらなる知識が必要となる．

6.4 練習問題

問題 6.1. 次の関数の，点 $(1,1)$ における勾配ベクトルおよびヘッセ行列を求めよ．

(1) $f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2$　(2) $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1x_2}$　(3) $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$　(4) $f(\boldsymbol{x}) = -(x_1+x_2)^2$

問題 6.2. 次の関数について，点 $(0,0)$ においてテーラーの定理を適用し，h_1, h_2 の 2 次式として表せ．ただし，θ を用いてよい．

(1) $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$　(2) $f(\boldsymbol{x}) = e^{x_1+x_2}$　(3) $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{3}\log(x_1+1) + \dfrac{1}{3}\log(x_2+1)$

問題 6.3. $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，$g_1(t) = 2t$，$g_2(t) = \log t$ であるとき（ただし $t > 0$），合成関数 $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ を微分せよ

問題 6.4. 消費者の効用関数を $u(x_1,x_2)$ とし，各財の需要関数を $x_1(p_1,p_2,m)$, $x_2(p_1,p_2,m)$ とする．ただし，p_1, p_2 は財価格，m は消費者の所得を表している．需要関数を効用関数に代入して得られる関数を**間接効用関数**（*indirect utility function*）といい，$v(p_1,p_2,m)$ と表記する．

$$v(p_1,p_2,m) = u\left(x_1(p_1,p_2,m), x_2(p_1,p_2,m)\right).$$

定理 6.3 を用いて

$$\frac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial x_1}{\partial w}(p_1,p_2,m) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial x_2}{\partial m}(p_1,p_2,m)$$

が成り立つことを確認せよ．

7　制約なし最適化

7.1　1 階条件

■問題の定式化　1 変数関数の最適化法を，一般の n 変数関数の理論に拡張しよう．この節では，目的関数が n 変数関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ で，操作変数 $x_1, \cdots, x_n$ に制約のないときの最適化問題を考える．ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を n 次元ベクトルと考えると，この節で考える問題は

「$f(\boldsymbol{x})$ の値を最大・最小にする n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める」

というものである．

■1 階条件　$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^*$ において最大となるとしよう．このとき，$f(\boldsymbol{x})$ のすべての変数に関する偏微分係数は 0 でなければならない．なぜなら，もしある変数 x_i について $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) > 0$ であるなら，x_i の値を x_i^* から増加させることより $f(\boldsymbol{x})$ の値を増加させることができる．$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) < 0$ であるなら，x_i の値を x_i^* より減少させることより $f(\boldsymbol{x})$ の値を増加させることができる．いずれにしても，$f(\boldsymbol{x}^*)$ が最大値であることに反する．よって，定理 2.3 は次のように一般化できる．

定理 7.1 (1 階条件)**.** 関数 $f(\boldsymbol{x})$ は C^1 級であるとする．$f(\boldsymbol{x}^*)$ が最大値（最小値）であるなら，

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{7.1}$$

が成り立つ．(7.1) を ***1* 階条件**（*first-order conditions*）という．

(7.1) をベクトル表記すると

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

である（右辺はゼロベクトルであることに注意）．すなわち，最大化点および最小化点における勾配ベクトルはゼロベクトルである．

定理 2.3 と同様，(7.1) は最適解の必要条件ではあるが，十分条件ではない．すなわち，(7.1) を満たす $\boldsymbol{x}^*$ は最適解であるとは限らない．

例 7.1. 2 次形式 $f(x_1, x_2) = -{x_1}^2 - {x_2}^2$ は原点 $(0, 0)$ で最大値 0 をとる．$\nabla f(x_1, x_2) = (-2x_1, -2x_2)$ より $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ が成立している．一方，$f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$ のとき，$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2)$ より $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ が成立するが，$f(0, 0) = 0$ は最大値でも最小値でもない． □

■2 階条件　定理 7.1 は「最大値（最小値）」を「極値」に置き換えても正しい．ここで，多変数関数の 極値 のための 2 階条件を導出しよう．$\nabla f(\boldsymbol{a})$ かつ $\boldsymbol{D^2} f(\boldsymbol{a})$ は負値定符号であるとする．$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{a}$ のまわりでテイラー展開すると

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}\boldsymbol{D^2} f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$$

が成り立つ．$f(\boldsymbol{x})$ が C^2 級であるなら，$\|\boldsymbol{h}\|$ が十分小さい $\boldsymbol{h}$ に対して $\boldsymbol{D^2} f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h})$ は負値定符号のままである．すなわち，$\boldsymbol{h}\boldsymbol{D^2} f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h} < 0$ が成り立つ．これは，$f(\boldsymbol{a})$ が極大値であることを意味する．これを極大値であるための **2 階の十分条件**という．

定理 7.2 (2 階条件)**.** $f(\boldsymbol{x})$ は C^2 級であるとする．

(1) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{a})$ は負値定符号であれば，$f(\boldsymbol{a})$ は極大値である．
(2) $\nabla f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{b})$ は正値定符号であれば，$f(\boldsymbol{b})$ は極小値である．

定理 7.2 は，極大値・極小値であるための十分条件であって，最大値・最小値であるための十分条件 <u>ではない</u> ことに注意してほしい．

例 7.2. $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 + 6x_1x_2$ のとき，$\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 + 6x_2, -2x_2 + 6x_1)$ より，$\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ が成り立つのは $(x_1, x_2) = (0, 0), (-6, -18)$ である．ここで，$\boldsymbol{D}^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{D}^2 f(-6, -18)$ は負値定符号であるので，$f(x_1, x_2)$ は $(-6, -18)$ で極大値 108 をとることがわかる（ただし 108 は最大値ではないことに注意）．一方，$\boldsymbol{D}^2 f(0, 0)$ は不定であり，$f(0, 0)$ は極大値でも極小値でもない． □

7.2 凹関数・凸関数

■凹関数・凸関数とは 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ が凹関数であるとは，そのグラフが上に凸の曲面となるようなものである．$f(x_1, x_2)$ が凸関数とは，そのグラフが下に凸の曲面となるようなものである．一般に，n 変数の凹関数および凸関数は次のように定義される．

定義 7.1 (凹関数・凸関数). n 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ を考える．

(i) $f(\boldsymbol{x})$ が**凹関数**（*concave function*）であるとは，どんな n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ であっても，$0 \leqq t \leqq 1$ であるすべての t について
$$tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}) \leqq f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b})$$
が成り立つ場合をいう．

(ii) $f(\boldsymbol{x})$ が**凸関数**（*convex function*）であるとは，どんな n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ であっても，$0 \leqq t \leqq 1$ であるすべての t について
$$tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}) \geqq f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b})$$
が成り立つ場合をいう．

勾配ベクトル（1 次の偏微分係数）を用いた凹関数・凸関数の特徴づけを与える．

定理 7.3. 関数 $f(\boldsymbol{x})$ は C^1 級であるとする．

(1) $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるための必要十分条件は，どんな $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ についても
$$f(\boldsymbol{b}) \leqq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$
が成り立つことである．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であるための必要十分条件は，どんな $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ についても
$$f(\boldsymbol{b}) \geqq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$
が成り立つことである．

この定理の意味するところは次のようなものである．$f(x_1, x_2)$ は C^1 級であるとし，$y = f(x_1, x_2)$ のグラフを S とする．S の点 (a_1, a_2) における接平面の方程式は
$$y = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$$

である．S が上に凸の曲面であるとは，S 全体が S 上のすべて点における接平面の「下側」に位置することに他ならない．すなわち，S が上に凸の曲面であるとは，どんな (a_1, a_2), (b_1, b_2) に対しても

$$f(b_1, b_2) \leqq f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(b_2 - a_2)$$

が成り立つということである．これをベクトル表記すると

$$f(\boldsymbol{b}) \leqq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

となる．同様に，S が下に凸の曲面であるとは，どんな $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ にであっても

$$f(\boldsymbol{b}) \geqq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

が成り立つことである．

定理 2.4 をヘッセ行列（2 次の偏微分係数）を用いて多変数関数へ拡張したものが次の定理である．

定理 7.4. 関数 $f(\boldsymbol{x})$ は C^2 級であるとする．

(1) $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるための必要十分条件は，すべての $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{D^2}f(\boldsymbol{x})$ が半負値定符号となることである．
(2) $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であるための必要十分条件は，すべての $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{D^2}f(\boldsymbol{x})$ が半正値定符号となることである．

この定理の成り立ちについて簡単に説明しておく．$f(\boldsymbol{x})$ にテイラーの定理を適用して得られる展開式

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^2 f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$$

に着目する．定理 7.3 より，$f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるとは，どんな $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}$ であっても

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) \leqq f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}$$

が成り立つことと同じである．これは上のテイラー展開式において，どんな $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{h}$ であっても

$$\boldsymbol{h}\boldsymbol{D^2}f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h} \leqq 0$$

であることと同じである．これは，どんな $\boldsymbol{x}$ であっても $\boldsymbol{D^2}f(\boldsymbol{x})$ が半負値定符号であることを意味する．

例 7.3. 2 次形式 $f(x_1, x_2) = -{x_1}^2 - {x_2}^2$ に対して，そのヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2}f(x) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ は負値定符号である．よって $f(x_1, x_2)$ は凹関数である． □

7.3 凹計画法・凸計画法

■凹計画・凸計画　目的関数が凹関数である最大化問題を**凹計画**（*concave programming*）という．目的関数が凸関数である最小化問題を**凸計画**（*convex programming*）という．凹計画および凸計画においては，定理 6.2 の逆が成立する．$f(\boldsymbol{x})$ が凹関数で，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ であるとする．定理 7.3 より，どんな $\boldsymbol{x}$ についても

$$f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^*) + \nabla f(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

が成り立つ．$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ より，$f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^*)$ であるから，$f(\boldsymbol{x}^*)$ が最大値である．凸計画においても同様の議論が成り立つ．よって，以下の定理が得られる．

定理 7.5. $f(\boldsymbol{x})$ は C^1 級であるとする．

(1) $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^*$ において最大値をとるための必要十分条件は $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ である．
(2) $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^*$ において最小値をとるための必要十分条件は $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ である．

定理 7.5 より，凹計画・凸計画において最適解を求めることは，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0$$

を解くことに完全に帰着される．

例 7.4. 関数 $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$ は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ のとき最大値をとることは明らかである．ヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2} f(x) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ は負値定符号であるから，$f(x_1, x_2)$ は凹関数である．定理 6.6 より，$f(x_1, x_2)$ の値を最大にする (x_1, x_2) は連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 - 2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2 - 4 = 0$$

の解と一致する．これを解くと $(x_1, x_2) = (1, 2)$ である． □

7.4 経済学への応用

■利潤最大化：完全競争市場 ある生産者の生産関数を $y = f(x_1, x_2)$ とする（y は生産量，x_1, x_2 は要素投入量）．生産物の価格を p，要素価格を w_1, w_2 とする．この生産者の利潤は

$$\pi(x_1, x_2) = py - (w_1 x_1 + w_2 x_2) = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

である．市場が完全競争であるとき，利潤最大化のための 必要条件 は

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \frac{w_1}{p}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \frac{w_2}{p} \tag{7.2}$$

である．(7.2) 式の意味は

「利潤が最大化されているとき，各生産要素の限界生産性は実質要素価格に等しくなる」

ということである．これを**限界生産力原理**という．

$\boldsymbol{D^2}\pi(x_1, x_2) = p\boldsymbol{D^2} f(x_1, x_2)$ であるから，$f(x_1, x_2)$ が凹関数であるとき，$\pi(x_1, x_2)$ も凹関数となる．つまり，生産関数が凹関数であるとき，限界生産力原理は利潤最大化の必要十分条件となる．

利潤最大化問題の解 (x_1^*, x_2^*) は p, w_1, w_2 の関数である．これらを**要素需要関数**（*factor demand function*）といい，それぞれ $x_1(p, w_1, w_2), x_2(p, w_1, w_2)$ と表記する．要素需要関数を生産関数に

代入して得られる関数を**供給関数**（*supply function*）といい，$y(p, w_1, w_2)$ と表記する．

$$y(p, w_1, w_2) = f\left(x_1(p, w_1, w_2), x_2(p, w_1, w_2)\right).$$

供給関数は，価格 p, w_1, w_2 と，その下で利潤を最大にする生産量 y との関係を表す．

例 7.5. 生産関数が $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ であるとき，利潤 $\pi(x_1, x_2)$ は次のように表される．

$$\pi(x_1, x_2) = p\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) - (w_1 x_1 + w_2 x_2).$$

利潤最大化の 1 階条件は次の 2 式である．

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{p}{2\sqrt{x_1}} - w_1 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{p}{2\sqrt{x_2}} - w_2 = 0$$

これを解いて

$$x_1 = \frac{p^2}{4{w_1}^2},\ x_2 = \frac{p^2}{4{w_2}^2} \tag{7.3}$$

を得る．

ここで生産関数のヘッセ行列を求めると

$$\boldsymbol{D^2} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{x_1}}{4{x_1}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{x_2}}{4{x_2}^2} \end{pmatrix}$$

であるが，これは負値定符号行列である．よって，$f(x_1, x_2)$ は凹関数である．したがって，(7.3) は利潤最大化問題の解，すなわち要素需要関数である．

(7.3) を生産関数に代入すると

$$y = \sqrt{\frac{p^2}{4{w_1}^2}} + \sqrt{\frac{p^2}{4{w_2}^2}} = \frac{w_1 + w_2}{2w_1 w_2} p$$

が得られる．これが供給関数である． □

7.5 練習問題

問題 7.1. 以下の関数が凹関数か凸関数か（あるいはいずれでもないか）を判定せよ．

(1) $f(x) = \sqrt{x_1 x_2}$　(2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$　(3) $f(x) = -e^{x_1} + \log x_2$　(4) $f(x) = x_1 x_2$

問題 7.2. 以下のこと示せ．

(1) $f(x), g(x)$ がともに凹関数であるとき、$f(x) + g(x)$ も凹関数である．
(2) 1 次形式 $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ ($a_1, \ldots, a_n$ は定数) は凹関数でもあり、凸関数でもある．

問題 7.3. 次の 2 変数関数を考える．

$$f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2x_1 x_2 + 3{x_2}^2 - 2x_1 + 2x_2 + 3$$

(1) $f(x_1, x_2)$ は凸関数であることを示せ．
(2) $f(x_1, x_2)$ の最小値を求めよ．

問題 7.4. ある生産者の利潤最大化問題を考える．この生産者は、2 種類の生産要素を用いてある財を生産する．生産者の生産関数は $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (x_1, x_2：要素投入量) であるとする．生産物価格を p、要素価格を w_1, w_2 であらわす．生産物市場および生産要素市場はいずれも完全競争であるとする．$x_1, x_2, p, w_1, w_2 > 0$ であるとして以下の問いに答えよ．

(1) $f(x_1, x_2)$ は凹関数であることを示せ．
(2) 利潤 $\pi(x_1, x_2) = pf(x_1, x_2) - (w_1x_1 + w_2x_2)$ は凹関数であることを示せ．
(3) $\pi(x_1, x_2)$ を最大にする要素投入量を p, w_1, w_2 の式であらわせ．
(4) $w_1 = w_2 = 1$ であるとき、この生産者の供給曲線を図示せよ．

7.6 補論：1 次同次生産関数

■同次関数 ある工場において，すべての従業員の労働時間を t 倍したとき，生産量は何倍になるであろうか．元々の総労働時間によらず，一定倍になるとき，この工場の生産関数は同次関数であるという．一般に，n 変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が k **次同次関数**（*positively homogeneous of degree k*）であるとは，どんな $x_1, \ldots, x_n$ であっても，任意の実数 $t > 0$ に対して

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n) \tag{7.4}$$

が成り立つ場合をいう．

例 7.6. (1) 1 変数関数で k 次同次関数は $f(x) = ax^k$（$a \neq 0$）の形しかない．

(2) 線形（1 次形式）の生産関数 $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ は 1 次同次関数である．2 次形式の生産関数 $f(x_1, x_2) = a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$ は 2 次同次関数である．

(3) コブ・ダグラス型関数 $f(x_1, x_2) = {x_1}^\alpha {x_2}^\beta$ は $\alpha + \beta$ 次同次関数である．実際

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^\alpha (tx_2)^\beta = t^{\alpha+\beta}{x_1}^\alpha {x_2}^\beta = t^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2)$$

が成立する．

(4) レオンチェフ型関数 $f(x_1.x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ は 1 次同次関数である．実際

$$f(tx_1.x_2) = \min\{atx_1, btx_2\} = t\min\{ax_1, bx_2\} = tf(x_1, x_2)$$

が成り立つ．

(5) CES 型関数 $f(x_1, x_2) = (ax_1^\rho + bx_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ は 1 次同次関数である． □

(7.4) 式の両辺を t について微分して $t = 1$ で評価すると，以下の定理が得られる．

定理 7.6 (オイラーの定理)**.** $f(x_1, \ldots, x_n)$ が k 次同次関数であるとき

$$\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_n}x_n = kf(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つ．

■規模の経済性 生産規模を拡大したときに，生産量がどれほど増加するかを表す概念を**規模の経済性**（*economies of scale*）という．すべての要素投入量を t 倍したとき（ただし $t > 1$)，生産量が t 倍より小さくなるとき，規模に関して**収穫逓減**（*decreasing returns to scale*）であるという．ちょうど t 倍になるとき，規模に関して**収穫一定**（*constant returns to scale*）であるという．t 倍

より大きくなるとき，規模に関して**収穫逓増**（*increasing returns to scale*）であるという．生産関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が k 次同次関数であるなら

- $k < 1$ ならば，規模に関して収穫逓減
- $k = 1$ ならば，規模に関して収穫一定
- $k > 1$ ならば，規模に関して収穫逓増

である．

例 7.7. 2 生産要素（$n = 2$）の生産関数 $f(x_1, x_2)$ を考える．

(1) コブ・ダグラス型生産関数 $f(x_1, x_2) = {x_1}^{\alpha}{x_2}^{\beta}$ において，$\alpha + \beta < 1$ ならば収穫逓減，$\alpha + \beta = 1$ ならば収穫一定，$\alpha + \beta > 1$ ならば収穫逓増である．

(2) レオンチェフ型生産関数 $f(x_1 . x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ は収穫一定である．

(3) CES 型関数 $f(x_1, x_2) = (ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$ は収穫一定である． □

■マクロ生産関数　一国全体の生産技術を表す関数のことを**マクロ生産関数**あるいは**総生産関数**という．マクロ生産関数は，国内総生産 Y と，総資本ストック K および労働人口 L との関係

$$Y = F(K, L)$$

として定式化される．$F(K, L)$ が 1 次同次関数であると仮定すると，K, L を $1/L$ 倍すれば Y も $1/L$ 倍になる．すなわち

$$\frac{Y}{L} = \frac{1}{L} F\left(K, L\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

が成り立つ．ここで，$y = Y/L,\ k = K/L$ とおくと，上式は

$$y = F(k, 1)$$

と表される．さらに $f(k) = F(k, 1)$ とおくと

$$y = f(k)$$

の関係が得られる．この式の左辺は一人当たりの国内総生産である．右辺の k は一人当たりの資本ストックであり，$f(k)$ は労働人口を 1 に基準化したときの一人当たり生産関数である．このように，1 次同次の生産関数では，変数をすべて労働者一人当たりに直すことにより，分析を簡単にすることができる．

■利潤最大化と分配　生産関数が 1 次同次であるとき，利潤最大化問題に解が存在しないことがある．このことを次の簡単な例で確認しておく．

例 7.8. 生産要素が労働のみの 1 次同次生産関数 $Y = F(L) = aL$ を考える（ただし $a > 0$）．生産財の価格を p，賃金を w とすると利潤 $\pi(L)$ は

$$\pi(L) = pF(L) - wL = paL - L = (pa - w)L$$

と表される．

(i) $pa - w > 0$ すなわち $a > \frac{w}{p}$ であるとき，労働投入量 L を限りなく大きくすれば，利潤 $\pi(L)$ は限りなく大きくなる．つまり，労働の限界生産性が実質賃金を上回るとき，利潤最大化問題の解は存在しない．

(ii) $a < \frac{w}{p}$ であるとき，$L = 0$ が最適である．この場合，財は全く生産されない．

(iii) $a = \frac{w}{p}$ のとき，任意の L の値が利潤最大化の解となる．このとき，生産者の利潤はゼロである．

以上より，利潤最大化の帰結として財の生産が行われるのは，$a = \frac{w}{p}$ すなわち労働の限界生産性が実質賃金に等しい場合のみで，そのときの生産者の利潤はゼロである． □

一般に，生産関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が 1 次同次であるとき，利潤最大化によって生産者行動が適切に記述できるのは，**各生産要素の実質要素価格が限界生産性に等しい場合に限られる**．

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{w_i}{p}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

このとき，オイラーの定理（定理 6.7）より

$$\begin{aligned}
&pf(x_1, \cdots, x_n) - (w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) \\
&= p\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}x_n\right] - (w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) \\
&= (w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) - (w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，**生産者の利潤はゼロである**．

マクロ生産関数 $F(K, L)$ が 1 次同次であるとき，オイラーの定理（定理 7.6）より

$$Y = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}K + \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}L \tag{7.5}$$

が成り立つ．1 階条件（限界生産力原理）より，利潤が最大化されているとき

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = r, \quad \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w$$

が成立している．ここで，r は実質資本価格（資本レンタル），w は実質賃金である．この関係を (7.5) 式に代入すると

$$Y = rK + wL \tag{7.6}$$

を得る．この式は，「国民所得 Y は資本所得 rK と労働所得 wL とに分配される」ことを表している．一般には，

（国民所得）＝（資本所得）＋（労働所得）＋（利潤）

であるが，生産関数が 1 次同次の場合，利潤はゼロとなるため，(7.6) 式のようになる訳である．

8　等式制約つき最適化

8.1　制約式が 1 本のケース

■問題の定式化　本節より，制約条件がついた最適化問題およびその解法について考える．この節では制約条件が等式で表される問題を取り扱う．できるだけ説明を簡単にするため，制約条件式は 1 つであるような最大化問題を主として議論する．すなわち，取り扱う問題は，目的関数を $f(x_1, \cdots, x_n)$ とし，制約条件を表す関数を $g(x_1, \cdots, x_n)$ とすると

> 「$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ を満たす $(x_1, \cdots, x_n)$ の中で，$f(x_1, \cdots, x_n)$ の値を最大にするものを求めよ」

のように定式化される．この問題を **MPE** とよぶことにする．**MPE** は次のような数式で表現される．

$$(\mathrm{MPE}): \quad \max f(\boldsymbol{x}) \;\; \text{sub.to } g(\boldsymbol{x}) = 0$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ は n 次元ベクトルを表す．

■効用最大化　経済学において代表的な等式制約つき最適化問題である効用最大化問題から議論を始める．財は 2 種類（第 1 財と第 2 財）あり，各財の消費量を x_1, x_2，各財の価格を p_1, p_2 とする（ただし $p_1, p_2 > 0$ である）．消費者の効用関数を $u(x_1, x_2)$，所得を m とする（ただし $m > 0$ である）．この消費者は各財の購入に所得を使い切るものとしよう．消費者の問題は，「予算制約式 $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ をみたす (x_1, x_2) のうち，効用 $u(x_1, x_2)$ が最も高いものを選ぶ」ことである．この効用最大化問題の解がみたすべき条件（必要条件）を考えてみよう．

まず予算制約式を次のように書き換える．

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}. \tag{8.1}$$

これを効用関数に代入すると，次のような 1 変数関数 $U(x_1)$ が得られる．

$$U(x_1) = u\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}\right).$$

例えば，効用関数が $u = x_1x_2$ のとき，

$$U(x_1) = x_1\left(-\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}\right) = -\frac{p_1}{p_2}x_1^2 + \frac{m}{p_2}x_1$$

となり，$U(x_1)$ は 2 次関数である．

もし (x_1^*, x_2^*) が効用最大化問題の解であるなら，$U(x_1)$ は $x_1 = x_1^*$ のとき最大となるので，定理 2.3 より

$$U'(x_1^*) = 0$$

が成立する．ここで $U'(x_1)$ に合成関数の微分の公式（定理 5.3）を適用すると

$$U'(x_1^*) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\frac{p_1}{p_2} = 0$$

となる．これより，次の関係式を得る．

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)\frac{1}{p_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\frac{1}{p_2}$$

ここで $\lambda^* = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^*) \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x^*) \cdot \frac{1}{p_2}$ とおくと，上式は次のように書き換えることができる．

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_2$$

つまり，(x_1^*, x_2^*) が効用最大化問題の解であるなら，ある数 λ^* の下で

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_1 \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* p_2 \tag{8.3}$$

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m \tag{8.4}$$

が成立することがわかる．ここで，(8.2) 式および (8.3) 式の左辺は各財の限界効用であり，右辺は財価格を定数倍したものである．すなわち，「効用が最大化されているとき，各財の限界効用はそれぞれの価格の定数倍に等しくなっている」ということを意味している．

(8.2)-(8.4) 式をベクトル表示すると，次のようになる．

$$\nabla u(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^* \boldsymbol{p} \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* = m \tag{8.6}$$

(8.5) 式より，「効用が最大化されているとき，効用関数の勾配ベクトルは価格ベクトルの定数倍と一致する」ということがわかる．

■1 階条件　上述の効用最大化で議論した最適解の必要条件を導出する方法は，一般の **MPE** に対しても有効である．このことを 2 変数のケースで確認しておく．(x_1^*, x_2^*) が **MPE** の解であるとする．問題は，(8.1) 式のように，

> 「制約条件 $g(x_1, x_2) = 0$ みたす (x_1, x_2) の集合に関数関係を見いだす（$x_2 = \cdots$ の形に直す）ことができるか」

という点にある．実は，$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$ であれば，陰関数定理により（後に解説する），(x_1^*, x_2^*) の近傍では，$g(x_1, x_2) = 0$ をみたす (x_1, x_2) は，ある関数 $x_2 = h(x_1)$ によって表すことができる．この関数関係を目的関数に代入すると，1 変数関数 $F(x_1)$ が得られる．

$$F(x_1) = f\left(x_1, h(x_1)\right).$$

(x_1^*, x_2^*) が **MPE** の解であるから，$F(x_1)$ の最大値は $F(x_1^*)$ である．1 階条件より，

$$F'(x_1^*) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) h'(x_1^*) = 0$$

が成り立つ．さらに陰関数定理より

$$h'(x_1^*) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

が成り立つので，これを上式に代入して整理すると

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

を得る．この値を λ^* とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*), \quad i = 1, 2$$

が得られる．

以上の議論は一般の n 変数の場合でも同様に展開できる．よって，次の定理が成り立つ．

定理 8.1 (1 階条件)．$\boldsymbol{x}^*$ が **MPE** の解であり，

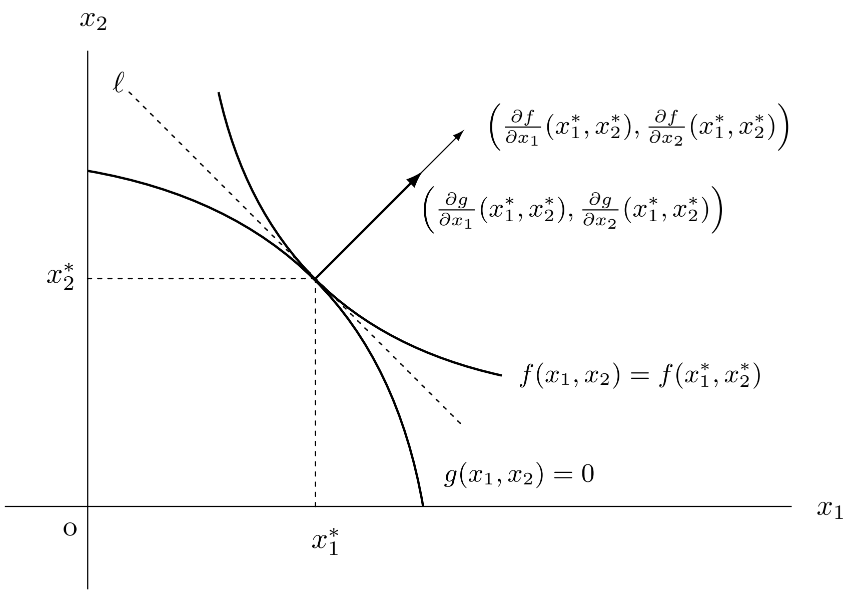
$$\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0} \tag{\textbf{R}}$$

が成立しているとする．このとき，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^* \nabla g(\boldsymbol{x}^*) \tag{8.7}$$
$$g(\boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{8.8}$$

となるような，ある実数 λ^* が存在する．

定理 8.1 において，条件 **R** は方程式 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ に陰関数定理を適用するために必要な条件である．(8.7) 式は，最適解においては，目的関数 f と制約条件 g との勾配ベクトルは本質的に同じ向きを向いている，ということを意味している．



8.2 ラグランジュ乗数法

■ラグランジュ乗数法とは 定理 7.1 を応用した **MPE** の 解の候補 を見つける方法を紹介しよう．これは，制約つき最適化問題を，ある関数の制約のない最適化問題に変換するもので，**ラグランジュ乗数法**とよばれている．

Step 1: **MPE** に対して，次のような $n+1$ 変数関数 $\mathcal{L}$ を作る．

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})$$

この関数 $\mathcal{L}$ を**ラグランジュ関数**（*Lagrangean*）といい，追加された変数 λ のことを**ラグランジュ乗数**（*Lagrange multiplier*）という．

Step 2: ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ の極値問題を考えて，1 階条件（定理 7.1）を導出する．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0.$$

これは次のような連立方程式体系を表す．

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \tag{8.9}$$

Step 3:　連立方程式 (8.9) の解 $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = (x_1^*, \cdots, x_n^*, \lambda^*)$ を求める．定理 8.1 より，$\nabla g(\boldsymbol{x}^*) \neq \mathbf{0}$ ならば，$\boldsymbol{x}^*$ は **MPE** の解の 必要条件 をみたす．

例 8.1. 効用最大化問題において，ラグランジュ関数 $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)$ を次のように設定する．

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

いま $\mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ が関数 $\mathcal{L}$ の極値であるとすると，定理 7.1 より

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0$$

が成立する．これは (8.2), (8.3), (8.4) 式と同一である．　□

■ラグランジュ乗数の意味　定理 8.1 およびラグランジュ乗数法に現れるラグランジュ乗数とは，どのような意味をもつのだろうか？それを考えるために，**MP** の特殊ケースとして，次のような問題を考える

$$\max f(x_1, x_2) \ \ \text{sub.to}\ g(x_1, x_2) = t.$$

ここで t はパラメーターである．$t = t^*$ のときの上記の問題の解を $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ とすると，$\boldsymbol{x}^*$ の値は t の値に依存して決まる．この関数関係を明示して $x_1^* = x_1(t^*)$, $x_2^* = x_2(t^*)$ と表す．これらを f と g に代入して，次のような 1 変数関数 F と G を考える．

$$F(t) = f\left(x_1(t), x_2(t)\right),\ \ G(t) = g\left(x_1(t), x_2(t)\right) - t.$$

$F(t)$ は t と最大値との関係を表している．一方，最適解は制約条件を満たしていることから，$G(t)$ の値はつねに 0 である（定値関数）．

合成関数の微分の公式を適用して $F(t)$ と $G(t)$ を微分すると，

$$F'(t^*) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_2}{dt}(t^*) \tag{8.10}$$

$$G'(t^*) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_2}{dt}(t^*) - 1. \tag{8.11}$$

1 階条件（定理 8.1）より，$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)$ であるから，(8.11) 式は

$$F'(t^*) = \lambda^* \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_2}{dt}(t^*)\right]$$

となる．一方，$G(t)$ は定値関数であることから，$G'(t) = 0$ であることに注意すると，(8.12) 式より

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) = 1$$

が成立する．したがって，最大値関数 $F(t)$ の微分について，次の関係が成立する．

$$F'(t^*) = \lambda^* \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_1}{dt}(t^*) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*)\frac{dx_2}{dt}(t^*)\right] = \lambda^*$$

以上より，ラグランジュ乗数とは

「制約条件のパラメータ t の微小な変化が最大値 $F(t)$ に与える限界的な効果」

を表していることがわかる．

8.3　経済学への応用

■効用最大化：再論　すでに見たように，効用最大化問題の 1 階条件は (8.2), (8.3), (8.4) 式である．(8.2) 式と (8.3) 式の比をとると

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

この式の左辺は各財の限界効用の比であるが，これは第 1 財の第 2 財に対する**限界代替率**を表している．一方，右辺は各財の価格の比であり，第 1 財の第 2 財に対する**相対価格**である．すなわち，1 階条件より

「効用が最大化されているとき，限界代替率と相対価格は等しい」

という経済学において非常に有名な命題が導かれる．また，効用最大化問題におけるラグランジュ乗数とは**所得の限界効用**を表している．

例 8.2. 効用関数が $u(x_1, x_2) = {x_1}^2 x_2$ であるとして，効用最大化問題

$$\max {x_1}^2 x_2 \quad \text{sub.to}, \; p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

を考える．ただし，$x_1, x_2 \geqq 0$ であり，p_1, p_2, m はいずれも正の定数である．この問題のラグランジュ関数を次のように設定する．

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = {x_1}^2 x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

1 階条件は次の 3 式で表される．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - \lambda p_1 = 0 \tag{8.12}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = {x_1}^2 - \lambda p_2 = 0 \tag{8.13}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 + m = 0 \tag{8.14}$$

(8.12) と (8.13) の比をとって整理すると

$$\frac{2x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

となる．左辺は (x_1, x_2) における限界代替率であり，右辺は相対価格である．(8.12)-(8.14) を連立して解くと

$$x_1 = \frac{2m}{3p_1} \tag{8.15}$$
$$x_2 = \frac{m}{3p_2} \tag{8.16}$$
$$\lambda = \frac{4m^2}{9{p_1}^2 p_2} \tag{8.17}$$

が得られる．(8.15) と (8.16) は最適解の必要条件をみたす．実際，これらは最適解であることを示すことができる（練習問題 8.3 参照）．需要関数 (8.15) および (8.16) を効用関数に代入すると，**間接効用関数**$v(p_1, p_2, m)$ が得られる．

$$v(p_1, p_2, m) = \left(\frac{2m}{3p_1}\right)^2 \frac{m}{3p_2} = \frac{4m^3}{27{p_1}^2 p_2}$$

ここで

$$\frac{\partial v}{\partial m}(p_1, p_2, m) = \frac{4m^2}{9{p_1}^2 p_2} = \lambda$$

が成り立つ．すなわち，ラグランジュ乗数は所得の限界効用であることがわかる． □

■費用最小化　経済学における等式制約つき最適化問題のもう一つ例として費用最小化問題を考える．ある生産者の生産関数を $f(x_1, x_2)$ とする．各生産要素の価格をそれぞれ w_1, w_2 とする．ある生産量 y を所与として，次のような最小化問題を考える．

$$\min w_1 x_1 + w_2 x_2 \ \ \text{sub.to.}\ f(x_1, x_2) = y.$$

この問題の解を (x_1^*, x_2^*) とすると，定理 7.1 より

$$w_1 = \lambda^* \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \tag{8.18}$$

$$w_2 = \lambda^* \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \tag{8.19}$$

$$f(x_1^*, x_2^*) = y \tag{8.20}$$

が成り立つような λ^* が存在する．である．(8.18) 式と (8.19) 式の比をとると，次の関係式が得られる．

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = \frac{w_1}{w_2}$$

この式の左辺は各生産要素の限界生産性の比であり，**技術的限界代替率**を表している．技術的限界代替率は，等量曲線の接線の傾きの大きさ（絶対値）のことである．一方，右辺は要素価格比である．すなわち，1 階条件から

「費用が最小化されているとき，技術的限界代替率と要素価格比は等しい」

ということがわかる．また，費用最小化問題において，ラグランジュ乗数とは，「生産量 y が微小に増加したときの最小費用の増加分」すなわち**限界費用**を表している．

例 8.3. ある生産者の生産関数が $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ であるとして，費用最小化問題

$$\min w_1 x_1 + w_2 x_2 \ \ \text{sub.to.}\ \ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = y$$

を考える．ただし，$x_1, x_2 \geqq 0$ であり, w_1, w_2, y は正の定数である．この問題のラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を次のように設定する．

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = -(w_1 x_1 + w_2 x_2) - \lambda(y - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}).$$

1 階条件は次の 3 式で表される．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -w_1 + \lambda \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 0 \tag{8.21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -w_2 + \lambda \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = 0 \tag{8.22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -y + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 0. \tag{8.23}$$

(8.21) と (8.22) の比をとって整理すると

$$\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{w_1}{w_2}$$

を得る．この式の左辺は技術的限界代替率であり，右辺は要素価格比である．(8.21)-(8.23) を連立して解くと

$$x_1 = \left(\frac{w_2 y}{w_1 + w_2}\right)^2 \tag{8.24}$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1 y}{w_1 + w_2}\right)^2 \tag{8.25}$$

$$\lambda = \frac{2w_1 w_2 y}{w_1 + w_2} \tag{8.26}$$

が得られる．(8.24) と (8.25) は最適解の**必要条件**をみたす．実際，これらは最適解である（練習問題 8.4 参照）．

要素価格 w_1, w_2 および生産量 y と，その下での最小費用との関係を表す関数を**費用関数**といい，$c(w_1, w_2, y)$ と表記する．$c(w_1, w_2, y)$ は，(8.24) および (8.25) を目的関数 $w_1 x_1 + w_2 x_2$ に代入することによって得られる．

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1 \left(\frac{w_2 y}{w_1 + w_2}\right)^2 + w_2 \left(\frac{w_1 y}{w_1 + w_2}\right)^2 \\ &= \frac{w_1 w_2 y^2}{w_1 + w_2}. \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\partial c}{\partial y}(w_1, w_2, y) = \frac{2w_1 w_2 y}{w_1 + w_2} = \lambda$$

が成り立つ．すなわち，ラグランジュ乗数は限界費用と一致していることがわかる． □

8.4　一般のケース

一般に制約条件式が複数あるような問題であっても，ラグランジュ乗数法を適用して解の候補を見つけることが可能である．最後にこれについて簡単に触れておこう．

一般に m 本の制約条件式

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \cdots, g_m(\boldsymbol{x}) = 0$$

をみたす $\boldsymbol{x}$ の中から，$f(\boldsymbol{x})$ の値を最大にすることを考える．ただし，制約条件の数 m は変数の数 n よりも小さい，すなわち $m < n$ を仮定する．もし $m > n$ ならば，変数の数よりも方程式の数のほうが多いことになり，制約条件を満たすベクトルが存在しないというようなことが起こりうる．このような解の存在しない問題は予め排除しておく．

上述の問題に対してラグランジュ乗数法を適用すると，次のようになる．

Step 1:　ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を次のように作る.

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x})$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ は m 次元ベクトルである.

Step 2:　ラグランジュ関数について，極値のための 1 階条件を導出する.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = 0$$

これより以下の連立方程式体系が導かれる

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \qquad\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \qquad\vdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \tag{8.27}$$

Step 3:　連立方程式 (8.27) の解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ を求める. $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*), \cdots, \nabla g_m(\boldsymbol{x}^*)$ が 1 次独立であるなら，$\boldsymbol{x}^*$ は最適化問題の解の**必要条件**をみたす.

8.5　練習問題

問題 8.1. 消費財は 2 種類あるとする. 各財の消費量を x_1, x_2，各財の価格を p_1, p_2 で表す. この消費者の効用関数は $u = \sqrt{x_1 x_2} = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$，所得は m であるとして，次のような効用最大化問題を考える.

$$\max \sqrt{x_1 x_2} \ \text{ sub.to. } \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

（ただし x_1, x_2, p_1, p_2, m はすべて正とする.）

(1) 効用最大化の 1 階条件（定理 7.1）を導出せよ.
(2) 1 階条件の解 x_1^*, x_2^* をそれぞれ p_1, p_2, m を用いてあらわせ.
(3) 一般に，効用関数が $u = x_1^a x_2^b$ のとき（ただし $a, b > 0$），効用最大化の 1 階条件の解 x_1^*, x_2^* をそれぞれ p_1, p_2, m を用いてあらわせ.

問題 8.2. ある生産者の生産関数が $y = \sqrt{x_1 x_2}$ であるとする（y：生産量，x_1, x_2：要素投入量）. 各要素価格は w_1, w_2 で表すとして，次のような費用最小化問題を考える.

$$\min w_1 x_1 + w_2 x_2 \ \text{ sub.to. } \ y = \sqrt{x_1 x_2}$$

（ただし w_1, w_2, y はすべて正とする.）

(1) 費用最小化の 1 階条件（定理 7.1）を導出せよ.
(2) 1 階条件の解 x_1^*, x_2^* をそれぞれ w_1, w_2, y を用いてあらわせ.
(3) (2) の解を目的関数 $w_1 x_1 + w_2 x_2$ に代入して，費用関数 $c(w_1, w_2, y)$ を導出せよ.
(4) (3) で求めた $c(w_1, w_2, y)$ を y で偏微分せよ.

問題 8.3. 例 8.2 の効用最大化問題を考える.

(1) 予算制約から導かれる関係式 $x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}$ を効用関数に代入して得られる 1 変数関数 $U(x_1)$ を求めよ．

(2) $U(x_1)$ を最大にする x_1 を求めよ．ただし，$x_1 \geqq 0$ であるとする．

問題 8.4. 例 8.3 の費用最小化問題を考える．

(1) 制約条件 $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ を x_2 について解きなさい（$x_2 = \cdots$ の形にしなさい）．

(2) (1) で求めた式を目的関数 $w_1x_1 + w_2x_2$ に代入して得られる関数を $C(x_1)$ とする．$C(x_1)$ は凸関数であることを示しなさい．

(3) $C(x_1)$ を最小にする x_1 を求めなさい（ただし，$x_1 \geqq 0$）．

問題 8.5. 消費財は 2 種類あるとして，ある消費者の効用最大化問題を考える．各財の価格，および消費者の所得はすべて 1 として，等式の予算制約 $x_1 + x_2 = 1$ を考える．

(1) この消費者の効用関数は $u = 2x_1 + x_2$ であるとして，定理 7.1 の 1 階条件をみたす x_1, x_2 は存在するか？

(2) この消費者の効用関数は $u = x_1^2 + x_2^2$ であるとして，定理 7.2 の 1 階条件をみたす x_1, x_2 を求めよ．これは効用を最大にしているか？

9　不等式制約つき最適化

9.1　問題の定式化

経済学で現れる制約条件は不等式で表現されるものが多い．例えば，消費量や要素投入量は通常非負の数であると考えられるので，$x_i \geqq 0$（$i = 1, \cdots, n$）のように不等式の制約条件として表される．あるいは，効用最大化において，予算制約は等式ではなく

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqq m$$

のように不等式で表すほうが自然である．

この節では不等式制約のある最大化問題を考える．本節で取り扱う問題は次のようなものである．

「制約条件

$$g_1(x_1, \cdots, x_n) \leqq 0, \cdots, g_\ell(x_1, \cdots, x_n) \leqq 0$$

をみたす $(x_1, \cdots, x_n)$ の中から，$f(x_1, \cdots, x_n)$ の値を最大するものを求めよ．」

この最大化問題を **MPI** とする．**MPI** を数式で表現すると，次のようになる．

$$\textbf{(MPI)} \quad \max f(\boldsymbol{x}) \text{ sub.to } g_j(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \ell).$$

9.2　凹計画法

■凹計画　一般の **MPI** を解くことは非常に困難である．しかし，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であり，制約条件を表す関数 $g_j(\boldsymbol{x})$ がすべて凸関数であれば，比較的扱いやすい問題であることが知られている．このような問題を**凹計画**（*concave programming*）という．制約条件を $-g_j(\boldsymbol{x}) \geqq 0$（$j = 1. \cdots, \ell$）と書き換えれば，問題に現れる関数 $f(\boldsymbol{x})$, $-g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, -g_\ell(\boldsymbol{x})$ はすべて凹関数となるので，このように呼称される．

■最適の十分条件　**MPI** が凹計画であるとき，ある連立方程式を解くことにより **MPI** の解を求めることができる．このことを次の簡単な例で確認しておこう．

例 9.1. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 1$, $g_2(x_1, x_2) = x_2 - 1$ とすると（$n = \ell = 2$），**MPI** は次のようになる．

$$\max x_1 + x_2 \text{ sub.to. } x_1 \leqq 1, x_2 \leqq 1.$$

ここで，次のような 4 変数 $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ の連立方程式を考える．

$$1 - \lambda_1 = 0 \tag{9.1}$$
$$1 - \lambda_2 = 0 \tag{9.2}$$
$$\lambda_1(x_1 - 1) = 0 \tag{9.3}$$
$$\lambda_2(x_2 - 1) = 0 \tag{9.4}$$

この連立方程式の解は $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1, 1, 1, 1)$ である．そのうち $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ は **MPI** の解である．すなわち，上記の連立方程式を解くことで **MPI** の解を求めることができる．ここで，$g_1(x_1^*, x_2^*) = g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$, $\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$ であることを注意しておく．　□

(9.1) 式および (9.2) 式は次の関係式から得られたものである．

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) - \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) - \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0$$

これを整理してベクトル表示すると

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\boldsymbol{x})$$

となる．すなわち，解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ においては

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)$$

が成立する．実は，これは $\boldsymbol{x}^*$ が **MPI** の解であることを意味してる．これを説明しよう．$f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x}^*)$ となる $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^*$ とおく．$f(\boldsymbol{x})$ は凹関数であるので，定理 6.4 より $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} > 0$ が成り立つ．よって，上記の関係式と合わせて

$$\begin{aligned}\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} &= \left[\lambda_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + \lambda_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)\right]\boldsymbol{h} \\ &= \lambda_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} + \lambda_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} > 0\end{aligned}$$

でなければならないが，$\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$ であるので，$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} > 0$ か $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} > 0$ かのいずれかでなければならない．ところが，$g_1(\boldsymbol{x})$, $g_2(\boldsymbol{x})$ はいずれも凸関数であるから，定理 7.4 より，$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h} > 0$ ならば

$$g_j(\boldsymbol{a}) = g_j(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{h}) > g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

が成り立つため，$\boldsymbol{a}$ は制約条件を満たさないのである．これは $\boldsymbol{x}^*$ が **MPI** の解であることを意味する．

上述の議論は変数の数 n や制約条件の数 m が増えても同様に展開することができる．以上より，次の定理が得られる．

定理 9.1 (凹計画法：十分条件)**.** $f(\boldsymbol{x})$ は凹関数，$g_j(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ はすべて凸関数であるとする．ある $\boldsymbol{x}^*$ に対して

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) \tag{9.5}$$
$$\lambda_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (j = 1, \cdots, \ell) \tag{9.6}$$
$$g_j(\boldsymbol{x}^*) \leqq 0 \quad (j = 1, \cdots, \ell) \tag{9.7}$$
$$\lambda_j^* \geqq 0 \quad (j = 1, \cdots, \ell) \tag{9.8}$$

が成立するような $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_\ell^*)$ が存在するなら，$\boldsymbol{x}^*$ は **MPI** の解である．上の条件を**カルーシュ・クーン・タッカー条件**（*Karush-Kuhn-Tucker conditions*）といい，**KKT 条件**と略記する．

(9.5) 式は *1* **階条件**（*first-order conditions*）という．等式制約つき最適化の場合と同様にして，ラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ を次のように設定する．

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x}).$$

(9.5) 式は $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ を x_i で偏微分して $= 0$ とおくことにより得られる．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n).$$

(9.6) 式は**相補スラック条件**（*complementary slackness conditions*）といい，$g_j(\boldsymbol{x}^*) < 0$ なら $\lambda_j^* = 0$ であることを意味する．これより，(5) 式の右辺は，実質，制約条件が等号でみたされているものだけの 1 次結合であることがわかる．(9.7) 式は $\boldsymbol{x}^*$ が制約条件を満たしていること意味する．(9.8) 式はラグランジュ乗数が非負であることを要求するものである．等式制約の場合，ラグランジュ乗数の正負に関する制約はなかったことを注意しておく．

■最適の必要条件　**MPI** が凹計画問題であっても，最適解が KKT 条件をみたすとは限らない．このことは次の例で確認することができる．

例 9.2. 次のような最大化問題を考える．

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = x_1 \\ \text{sub.to. } & g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leqq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 1 \leqq 0. \end{aligned}$$

1 つめの制約条件は，「点 $(0,1)$ を中心とする半径 1 の円の周および内部」を表す．2 つめの制約条件は，「点 $(0,-1)$ を中心とする半径 1 の円の周および内部」を表す．2 つの制約条件をともにみたすのは原点 $(0,0)$ のみであるから，この問題の解は $(0,0)$ である．ところが，

$$\nabla f(0,0) = (1,0),\ \nabla g_1(0,0) = (0,-1),\ \nabla g_2(0,0) = (0,1)$$

であるから，1 階条件 $\nabla f(0,0) = \lambda_1 \nabla g_1(0,0) + \lambda_2 \nabla g_2(0,0)$ を成立させるような λ_1, λ_2 は存在しない． □

例 9.2 では，連立方程式として KKT 条件を解くことにより，最適解 $(0,0)$ を求めることはできない．このようなケースでは，**MPI** を解くことが，KKT 条件を解くことに帰着されない．

どのようなときに KKT 条件が最適の必要条件となるであろうか．KKT 条件の必要性を保証するには，制約条件がある性質を満たせばよいことが知られている．それが以下の定理で示されていることである．

定理 9.2 (凹計画法：必要条件)**.** $\boldsymbol{x}^*$ を **MPI** の解であるとし，次の条件が成立すると仮定する．

(i) $g_j(\boldsymbol{x})$ は凸関数 $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$
(ii) $g_j(\widehat{\boldsymbol{x}}) < 0$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ となる $\widehat{\boldsymbol{x}}$ が存在する．

このとき，KKT 条件が成立するような $\boldsymbol{\lambda}^*$ が存在する．

KKT 条件が最適解の必要条件となるように制約条件に課される条件を**制約想定**（*constraint qualification*）という．定理 9.2 の条件 (i), (ii) は，**スレーター条件**（*Slater condition*）として知られている．例 9.2 では，条件 (ii) が満たされていない．

■KKT 条件を用いた解法　定理 9.1 および 9.2 より，

- $f(\boldsymbol{x})$ が凹関数
- $g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})$ がすべて凸関数
- $g_1(\widehat{\boldsymbol{x}}) < 0, \ldots, g_m(\widehat{\boldsymbol{x}}) < 0$ をみたす $\widehat{\boldsymbol{x}}$ が存在する（制約集合に内点が存在する）

ならば，**MPI** の解と連立方程式体系としての KKT 条件の解とが一致する．このことに基づいた **MPI** の解法の手順をまとめておこう．

Step 1:　$f(\boldsymbol{x})$ が凹関数，$g_1(\boldsymbol{x}),\ldots,g_m(\boldsymbol{x})$ が凸関数であることを確認する．

Step 2:　$g_1(\widehat{\boldsymbol{x}})<0,\ldots,g_m(\widehat{\boldsymbol{x}})<0$ をみたす $\widehat{\boldsymbol{x}}$ が存在することを確認する．

Step 3:　1 階条件 (5) 式, 相補スラック条件 (6) 式よりなる $n+\ell$ 本の連立方程式を解く．

Step 4:　Step 3 で求めた解のうち，制約条件 (7) 式 および非負条件 (8) 式 をみたすものを選ぶ．

定理 8.1 より，この方法で求められた解を $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ とすると，$\boldsymbol{x}^*$ は **MPI** の解である．さらに，定理 8.2 より，**MPI** の解はすべてこの方法で求められる．

9.3　経済学への応用

■効用最大化　ある消費者の効用関数を $u(x_1,x_2)$，所得が m であるとする．各財の価格がそれぞれ p_1,p_2 として，次のような効用最大化問題を考える．

$$\begin{aligned}&\max u(x_1,x_2)\\&\text{sub.to.}\ \ p_1x_1+p_2x_2\leqq m,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\end{aligned}$$

ここで，次の条件を仮定する．

U1: $u(x_1,x_2)$ は C^2 級の凹関数

U2: $p_1>0,p_2>0,m>0$

制約条件式はすべて 1 次式（線形）であるから凸関数である．**U2** より，$\hat{x}_1=\frac{m}{4p_1}$, $\hat{x}_2=\frac{m}{4p_2}$ とすれば，$\hat{x}_1>0$, $\hat{x}_2>0$ であり

$$p_1\hat{x}_1+p_2\hat{x}_2=\frac{m}{2}<w$$

が成り立つ．よって，**U1** と **U2** の下で，定理 9.1, 9.2 の前提条件はすべて満たされる．

この問題の KKT 条件は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\lambda_1p_1-\lambda_2\\&\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\lambda_1p_2-\lambda_3\\&\lambda_1(p_1x_1+p_2x_2-w)=0,\quad \lambda_2x_1=0,\quad \lambda_3x_2=0\\&p_1x_1+p_2x_2\leqq m,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\end{aligned}$$

定理 9.1. 9.2 より，「$(x_1^*,x_2^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*)$ が KKT 条件をみたす」ことと「(x_1^*,x_2^*) が効用最大化問題の解である」 ことは同値となる．

例 9.3 (コブ・ダグラス型効用)**.** ある消費者の効用関数を $u=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$，所得が m であるとする．各財の価格がそれぞれ p_1,p_2 として，以下の効用最大化問題を解いてみよう．ただし，$p_1>0,p_2>0,m>0$ とする．

$$\begin{aligned}&\max x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\\&\text{sub.to.}\ \ p_1x_1+p_2x_2\leqq m,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\end{aligned}$$

この問題の KKT 条件は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}=\lambda_0p_1-\lambda_1\\&(1-\alpha)x_1^{a}x_2^{-\alpha}=\lambda_0p_2-\lambda_2\\&\lambda_0(p_1x_1+p_2x_2-m)=0,\quad \lambda_1x_1=0,\quad \lambda_2x_2=0\\&p_1x_1+p_2x_2\leqq m,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\\&\lambda_0\geqq 0,\lambda_1\geqq 0,\lambda_2\geqq 0\end{aligned}$$

この条件の解は，

$$x_1 = \frac{\alpha m}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}, \quad \lambda_0 = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^a \cdot \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

である．

ここで効用関数のヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2}u$ は

$$\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} & \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha-1} \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{1-\alpha} \leqq 0, \quad \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha-1} \leqq 0, \quad \det \boldsymbol{D^2}u = 0$$

より，$\boldsymbol{D^2}u$ は半負値定符号であるから，効用関数 u は凹関数である（定理 6.1, 6.5 参照）．また，$p_1 > 0, p_2 > 0, m > 0$ より，$p_1x_1 + p_2x_2 < m,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$ をみたす (x_1, x_2) が存在する．

以上より，効用最大化問題の解は

$$x_1 = \frac{\alpha m}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$$

である． □

例 9.4 (線形効用)．消費者の効用関数が $u = x_1 + x_2$ として，以下の効用最大化問題を考える．ただし，$0 < p_1 < p_2,\ m > 0$ とする．

$$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ &\text{sub.to.}\ \ p_1x_1 + p_2x_2 \leqq m,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

この問題の KKT 条件は

$$\begin{aligned} &1 = \lambda_0 p_1 - \lambda_1 \\ &1 = \lambda_0 p_2 - \lambda_2 \\ &\lambda_0(p_1x_1 + p_2x_2 - m) = 0, \quad \lambda_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 x_2 = 0 \\ &p_1x_1 + p_2x_2 \leqq m,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \\ &\lambda_0 \geqq 0, \lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

この条件の解は

$$x_1 = \frac{m}{p_1}, \quad x_2 = 0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{p_1}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

効用関数は 1 次関数であるから凹関数であり，$p_1 > 0, p_2 > 0, m > 0$ より，$p_1x_1 + p_2x_2 < m,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$ をみたす (x_1, x_2) が存在する．以上より，効用最大化問題の解は

$$x_1 = \frac{m}{p_1}, \quad x_2 = 0$$

である． □

■費用最小化　ある生産者の生産関数を $f(x_1, x_2)$ とする．各投入財の価格をそれぞれ w_1, w_2 とする．ある生産量 $\bar{y}$ を所与として，次のような費用最小化問題を考える．

$$\begin{aligned} &\min w_1x_1 + w_2x_2 \\ &\text{sub.to.}\ \ f(x_1, x_2) \geqq \bar{y},\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

ただし，次の条件を仮定する．

C1: $f(x_1, x_2)$ は C^2 級の凹関数
C2: $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) > \bar{y}$ をみたす $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ が存在する．

$w_1x_1 + w_2x_2$ は 1 次式（線形）なので凸関数であるから，$-(w_1x_1 + w_2x_2)$ は凹関数であるから，**C1** と **C2** の下で定理 9.1, 9.2 の前提条件はすべて満たされる．**C2** は標準的な設定では自然に満たされる条件である．例えば，$f(x_1, x_2)$ が単調増加関数であり，$\bar{y}$ が生産可能，すなわち $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ となる $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ が存在すればよい．

この問題の KKT 条件は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&w_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda_2 \\
&w_2 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \lambda_3 \\
&\lambda_1(\bar{y} - f(x_1, x_2)) = 0, \quad \lambda_2 x_1 = 0, \quad \lambda_3 x_2 = 0 \\
&f(x_1, x_2) \geqq y,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \\
&\lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \lambda_3 \geqq 0
\end{aligned}$$

定理 9.1, 9.2 より，「$(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ が KKT 条件をみたす」ことと「(x_1^*, x_2^*) は費用最小化問題の解である」こととは同値である．

例 9.5 (コブ・ダグラス型生産技術)．ある生産者の生産関数を $y = \sqrt{x_1x_2}$ とする．各投入財の価格をそれぞれ w_1, w_2 とする．ただし，$w_1 > 0, w_2 > 0$ とする．ある生産量 $\bar{y} > 0$ を所与として，次の費用最小化問題を考える．

$$\begin{aligned}
&\min w_1x_1 + w_2x_2 \\
&\text{sub.to.}\ \ \sqrt{x_1x_2} \geqq \bar{y},\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

この問題の KKT 条件は

$$\begin{aligned}
&w_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{x_2}{4x_1}} + \lambda_1 \\
&w_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} + \lambda_2 \\
&\lambda_0(\bar{y} - \sqrt{x_1x_2}) = 0, \quad \lambda_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 x_2 = 0 \\
&\sqrt{x_1x_2} \geqq \bar{y},\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \\
&\lambda_0 \geqq 0, \lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

この条件の解は

$$x_1 = \bar{y}\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad x_2 = \bar{y}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}, \quad \lambda_0 = 2\sqrt{w_1w_2}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

生産関数 f のヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2}f$ は半負値定符号であるから（確認せよ），f は凹関数である．また，$\sqrt{x_1x_2} > \bar{y},\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$ をみたす (x_1, x_2) が存在する．よって，この費用最小化問題の解は

$$x_1 = \bar{y}\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \quad x_2 = \bar{y}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

である． □

9.4 練習問題

問題 9.1. 例 9.4 において，(i) $p_1 > p_2 > 0$ のケース，(ii) $p_1 = p_2 > 0$ のケース，それぞれの場合の効用最大化の解を求めよ．

問題 9.2. 例 9.5 の費用最小化問題の解から，費用関数（生産量 $\bar{y}$ と最小費用との関係）を導出せよ．

問題 9.3. 財は 2 種類（第 1 財と第 2 財）とする．各財の価格をそれぞれ p_1, p_2 であらわす．ある消費者の各財の消費量を x_1, x_2，所得を m であらわす．この消費者の効用関数が

$$u = \sqrt{x_1 + 1} + \sqrt{x_2 + 1} \quad (u：効用水準)$$

であるとして，以下の問に答えよ．

(1) $p_1 = p_2 = 1, m = 4$ のとき，KKT 条件を用いて，効用を最大にする各財の消費量（需要量）を求めよ．

(2) $p_1 = 1, m = 3$ のとき，効用を最大にする第 2 財の消費量が 0 となるような p_2 の範囲を求めよ．

問題 9.4. 2 種類の生産要素（第 1 要素と第 2 要素）を用いて，ある消費財を生産する生産者を考える．この生産者の生産関数は $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$（$y$：生産量，$x_1, x_2$：各要素投入量）であるとする．消費財の価格を p，各要素価格をそれぞれ w_1, w_2 であらわす．

(1) p を正の定数，$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{6}$ であるときの利潤最大化問題を考える．

$$\max \ p \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) - \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2\right)$$

この問題で最大利潤を達成する生産量 y を価格 p の式であらわせ．

(2) y を正の定数，$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{6}$ であるとき，次の費用最小化問題における最小値（最小費用）を y の式で表せ．．

$$\begin{aligned} &\min \ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \\ &\text{sub.to} \ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geqq y \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた生産量と最小費用との関係を $C(y)$ であらわす．$C(y)$ が凸関数であるかどうかを判定せよ．

(4) p は正の定数として，次の利潤最大化問題の解 y を価格 p を用いてあらわせ．

$$\max p \cdot y - C(y)$$

9.5 補論：準凹関数

■凸集合 「凹みのない」ような図形（点の集合）のことを凸集合という．厳密には，次のように定義される．

定義 9.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 C が**凸集合**(*convex set*) であるとは，C 上の任意の 2 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，それらを結んだ線分が C に完全に含まれる場合，すなわち，凸結合 $\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b}$ が C に含まれる場合をいう．

例 9.6. (1) 座標平面 $\mathbb{R}^2$ は凸集合である．$\mathbb{R}^2$ において，第 1 象限

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqq 0 \text{ かつ } x_2 \geqq 0\}$$

は凸集合である．その補集合

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0 \text{ または } x_2 < 0\}$$

は凸集合ではない．

(2) 座標平面において，原点を中心とする半径 1 の円の内部を D，その周を ∂D とすると，D および $D \cup \partial D$ は凸集合であるが，∂D は凸集合でない．

(3) 効用関数が $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ であるとき（$x_1, x_2 \geqq 0$），$u(x_1, x_2) \geqq u(1, 1)$ を満たす点 (x_1, x_2) の集合は凸集合である．このとき，$(1, 1)$ を通る無差別曲線は原点に対して凸となっている． □

■準凹関数 凹関数・凸関数を一般化した概念として，準凹関数・準凸関数がある．

定義 9.2. $f(\boldsymbol{x})$ が**準凹関数**(*quasi-concave function*) であるとは，

$$f(\boldsymbol{a}) \leqq f(\boldsymbol{b}) \Longrightarrow f(\boldsymbol{a}) \leqq f(\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b})$$

が成立する場合をいう．$f(\boldsymbol{x})$ が**準凸関数**(*quasi-convex function*) であるとは，$-f(\boldsymbol{x})$ が準凹関数である場合をいう．

次の定理が示すように，効用関数 $u(x_1, x_2)$ が準凹であるとは，無差別曲線は原点に対して凸となるような関数のことである．

定理 9.3. $f(\boldsymbol{x})$ が準凹関数であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{a})$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合が凸集合となることである．

凹関数は準凹関数でもあるが，逆は成立しない．準凹関数は凹関数であるとは限らない．例 9.6(3) において，$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$（$x_1, x_2 \geqq 0$）は準凹関数であるが凹関数ではない．

定理 9.4. $f(\boldsymbol{x})$ が C^1 級であるとする．$f(\boldsymbol{x})$ が準凹関数であるための必要十分条件は，

$$f(\boldsymbol{a}) \leqq f(\boldsymbol{b}) \Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \geqq 0$$

である．

定理 9.5. $f(x)$ は C^1 級とし，ある $\boldsymbol{a}$ において $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$ とする．このとき $f(\boldsymbol{x})$ が準凹関数であるなら

$$f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{b}) \Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) > 0 \tag{9.9}$$

が成立する．

どのような $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ においても (9.9) 式が成り立つような関数のことを**擬凹関数**（*pseudo concave function*）という．

定理 9.6. $f(\boldsymbol{x})$ は C^2 級であるとし，$\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ とする．$f(\boldsymbol{x})$ が準凹関数であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\nabla f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{h}\boldsymbol{D^2}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} \leqq 0$$

となることである．

■準凹計画法　目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ が擬凹関数で，制約条件を表す関数 $g_j(\boldsymbol{x})$ がすべて準凸関数であれば，定理 8.1 および 8.2 と同様の命題が成立することが知られている．詳細はより上級の本（例えば，マンガサリアン著『非線形計画法』(培風館)）を参照されたい．

10　陰関数定理と比較静学

10.1　陰関数定理

■直線の方程式　方程式 $ax + by + c = 0$ の解 (x, y) の集合は座標平面上の直線である．$b \neq 0$ であるなら，$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ と書き換えることができる．これより，方程式の解である直線は 1 次関数のグラフとして表すことができることがわかる．すなわち，方程式の解について $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ の関数関係が成立する．ここで「関数関係」とは

「任意の x に対して，(x, y) が方程式の解となるような y が $\underline{\text{ただ一つ}}$ に定まる」

ということである．$b = 0$ であっても，$a \neq 0$ であれば $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ と書くことができる．いずれにしても，方程式の解の集合全体（＝直線）に対して，何らかの関数関係を見いだすことができる．

■陰関数定理とは　一般に，方程式 $f(x, y) = 0$ の解の集合は座標平面上のある図形（曲線）を表すと考えられる．直線の方程式の場合と同様に，その解の集合全体に対して何らかの関数関係を見いだすことは可能であろうか？これが不可能であることは，次の簡単な例で確認することができる．

例 10.1. 方程式 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ を考える．この方程式の解の集合は，原点を中心とする半径 1 の円である（単位円）．この円全体を一つの関数のグラフとして表すことはできない．なぜなら，$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ に対して，$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ とすれば方程式を満たすが，$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ としても方程式は満たされる．すなわち，$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ に対して，(x, y) が方程式の解となるような y はただ一つに定まらない．　$\square$

例 10.1 において，円全体を一つの関数で表すことはできないが，その一部に制限すれば可能である．例えば，$y > 0$ となる領域に制限した半円であれば

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

という関数関係を見いだすことができる．$x > 0$ の領域に制限した場合，y を x の関数で表すことはできないが，

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

のように，x を y の関数によって表現することができる．

このことは一般に成り立つ．すなわち，方程式 $f(x, y) = 0$ の解の集合に対して，局所的にはある関数関係を見いだすことができる．これを**陰関数定理**（*implicit function theorem*）という．

定理 10.1 (陰関数定理：2 変数のケース)**.** $f(x, y)$ を 2 変数関数として，方程式

$$f(x, y) = 0 \tag{10.1}$$

を考える．いま (x^*, y^*) が方程式 (10.1) の解であるとする．

(1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$ ならば，x^* のある近傍 U_1 で定義された 1 変数関数 $g(x)$ が存在して，U_1 内の任意の点 x に対して

$$f(x, g(x)) = 0$$

が成り立つ．さらに，$g(x)$ の x^* における微分係数は

$$g'(x^*) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)}$$

である．

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \neq 0$ ならば，y^* のある近傍 U_2 で定義された 1 変数関数 $h(y)$ が存在して，U_2 内の任意の点 y に対して

$$f(h(y), y) = 0$$

が成り立つ．さらに，$h(y)$ の y^* における微分係数は

$$h'(y^*) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)}$$

である．

例 10.2. (1) $f(x, y) = ax + by + c$ であるとき，$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b \neq 0$ ならば

$$g(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

とおくと，任意の x に対して

$$f(x, g(x)) = ax + b\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + c = 0$$

である．このとき

$$g'(x) = -\frac{a}{b} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

が成り立つ．

(2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ であるとき，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は方程式 $f(x, y) = 0$ の解である．ここで

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

とおくと，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ の近傍では，解の集合と $y = g(x)$ のグラフとが一致する．さらに，$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから

$$g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

が成り立つ． □

■限界代替率 消費者の効用関数を $u(x_1, x_2)$ とする．ある消費ベクトル (x_1^*, x_2^*) において，$u(x_1^*, x_2^*) = a$（a は定数）とする．点 (x_1^*, x_2^*) を通る無差別曲線は $u(x_1, x_2) = a$ をみたす点の集合である．これは，方程式

$$u(x_1, x_2) - a = 0$$

の解の集合である．ここで，

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$$

ならば，定理 10.1 より，ある関数 g が存在して

$$u(x_1, g(x_1)) = a$$

が成り立つ*2．すなわち，点 (x_1^*, x_2^*) を通る無差別曲線の方程式は $x_2 = g(x_1)$ である．点 (x_1^*, x_2^*) における無差別曲線の接線の傾きの大きさ（絶対値）のことを，（(x_1^*, x_2^*) における）**限界代替率**（*marginal rate of substitution*）という．定理 9.1 より，

$$g'(x_1^*) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

である．この式の左辺は無差別曲線の接線の傾きであり，右辺は限界効用の比にマイナスを乗じたものである．つまり，

$$\text{（限界代替率）} = \frac{\text{（第 1 財の限界効用）}}{\text{（第 2 財の限界効用）}}$$

であることがわかる．

例 10.3. 効用関数が $u(x_1, x_2) = {x_1}^2 x_2$ であるとき

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1x_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = {x_1}^2$$

である．$(x_1, x_2) = (1, 1)$ における限界代替率は

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(1,1)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(1,1)} = \frac{2}{1} = 2$$

である．一般に $(x_1, x_2) = (a, b)$ における限界代替率は

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(a,b)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(a,b)} = \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a}$$

である． □

■陰関数定理：一般のケース　一般の連立方程式に対しても，（変数の数）＞（方程式の数）であれば陰関数定理は成立する．

定理 10.2 (陰関数定理：一般のケース). $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ を $n + m$ 変数関数として，連立方程式

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned} \tag{10.2}$$

を考える．いま $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ が (10.2) の解であり，

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つとする*3．

　このとき，$\boldsymbol{y}^*$ の近傍 U で定義された n 個の m 変数関数 $g_1(\boldsymbol{y}), \cdots, g_n(\boldsymbol{y})$ が存在して，

---

*2 正しくは「x_1^* のある近傍において」という表現を付け加える必要がある

*3 このように，1 階の偏微分係数よりなる行列のことを**ヤコビ行列** *(Jacobian matrix)* といい，その行列式のことを**ヤコビ行列式**または**ヤコビアン** *(Jacobian)* という．

(1) U 内の任意の点 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ について

$$\begin{gathered} f_1(g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_n(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_n(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = 0 \end{gathered}$$

が成り立つ．

(2) $g_1, \cdots, g_n$ の $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ における偏微分係数は次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}^*) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \end{pmatrix} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

10.2　比較静学

■比較静学とは　「需要＝供給」に代表されるように，経済学では連立方程式の解として経済状態を表すことがしばしばである．連立方程式において所与として取り扱われるパラメーターのことを外生変数といい，方程式によってその値が決定される変数のことを内生変数という．税率などの外生変数の変化が，価格などの内生変数に及ぼす影響を分析することを**比較静学**（*comparative statics*）という．

■1 変数のケース　ある財市場を考える．この市場の超過需要関数を $f(p, t)$ であらわす．ここで p は財価格，t は税率である．税率が t^* のとき，均衡価格が p^* であるとすると，

$$f(p^*, t^*) = 0$$

が成り立つ．すなわち，(p^*, t^*) は方程式 $f(p, t) = 0$ の解である．いま，税率を t^* から引き上げたとすると，均衡価格はどのように変化するだろうか．定理 9.1 より，$\frac{\partial f}{\partial p}(p^*, t^*) \neq 0$ ならば，税率と均衡価格との関係を表す関数 $p = g(t)$ が存在することがわかる．さらに，税率の変化に伴う均衡価格の変化は

$$g'(t^*) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(p^*, t^*)}{\frac{\partial f}{\partial p}(p^*, t^*)}$$

と計算できる．

■2 変数のケース　2 種類の財の超過需要関数が次の式で与えられているとする．

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2, a) &= -2p_1 + p_2 + a \\ f_2(p_1, p_2, a) &= 3p_1 - 2p_2 - a \end{aligned}$$

ただし，p_1, p_2 は各財の価格，a は需要あるいは供給に関するパラメーター（例えば税率，景気の状況など）であるとする．$a = 1$ のとき，市場均衡価格は $p_1^* = p_2^* = 1$ である．ここで,[*4]

$$\boldsymbol{Df_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{pmatrix}$$

とおくと，市場均衡において

$$\boldsymbol{Df_p} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

[*4] 以下において，偏微分係数はすべて $(p_1, p_2, a) = (1, 1, 1)$ で評価する．

である．$\det \boldsymbol{Df_p} = 1 \neq 0$ であるから，逆行列が存在して，

$$\boldsymbol{Df_p}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

である．

いま，a の値が上昇したとき，均衡価格 p_1^*, p_2^* がいかに変化するかを調べる．定理 9.2 より，均衡価格とパラメーターとの関係を表す関数 $p_1 = g_1(a), p_2 = g_2(a)$ が存在し，その微分係数は

$$\begin{pmatrix} g_1'(1) \\ g_2'(1) \end{pmatrix} = -\boldsymbol{Df_p}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$g_1'(1) = 1 > 0$, $g_2'(1) = 1 > 0$ であるから，均衡価格は 2 財とも上昇することがわかる．

10.3 練習問題

問題 10.1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ として，方程式

$$f(x, y) = 7 \tag{10.3}$$

を考える．

(1) $(x, y) = (4, 3)$ は (10.3) の解であることを確認せよ．
(2) 方程式 (10.3) に陰関数定理を適用して，$g'(4), h'(3)$ の値を求めよ．

問題 10.2. 効用関数が $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ のとき，点 $(2, 1)$ における限界代替率を求めよ．一般に，$x = (x_1, x_2)$ における限界代替率を，x_1, x_2 を用いて表せ．

問題 10.3. a は定数として，次のような連立方程式を考える．

$$x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \tag{10.4}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - a^2 + 3 = 0 \tag{10.5}$$

(1) $a = 2$ のとき，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ は (10.4),(10.5) の解であることを確認せよ．
(2) a の値が 2 から微小に増加したとき，解 $(0, 1)$ はどのように変化するか．（x_1 は 0 から増加 or 減少するか，x_2 は 1 から増加 or 減少するか．）

11 経済動学

11.1 1 階差分方程式

1 変数関数 $f(x)$ に対して

$$y_{t+1} = f(y_t), \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{11.1}$$

のように定義される方程式を **1 階差分方程式**（*first-order difference equation*）という．y_0 を所与として，(11.1) を満たす数列

$$y_0, y_1, \cdots, y_t, \cdots$$

を差分方程式の解といい，その解を求めることを差分方程式を解くという．$y^* = f(y^*)$ をみたす点 y^* を**定常点**（*stationary point*）という．明らかに，定数列 $y_t = y^*$ は (11.1) の解である．これを**定常解**（stationary solution）という．

もっとも基本的なケースとして，線形の差分方程式を考える．

$$y_{t+1} = ay_t + b \qquad (a, b \text{ は定数}) \tag{11.2}$$

$b = 0$ のときは**同次**（homogeneous）であるといい，$b \neq 0$ のときは**非同次**（nonhomogeneous）であるという．$a \neq 1$ のとき，定常点は $y^* = \frac{b}{1-a}$ である．

差分方程式 (11.2) の解は，初期条件 y_0 を所与として，逐次代入することによって得ることができる．

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 + b \\ y_2 &= ay_1 + b = a^2 y_0 + b + ab \\ y_3 &= ay_2 + b = a^3 y_0 + b + ab + a^2 b \\ &\vdots \end{aligned}$$

これより，解の一般項は

$$y_t = a^t y_0 + b + ab + a^2 b + \cdots + a^{t-1} b$$

と表されることがわかる．右辺第 2 項以降は初項が b で公比が a の等比数列の和である．以上を定理としてまとめておく．

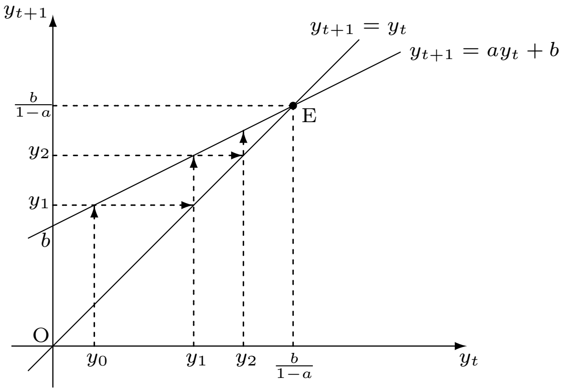
定理 11.1. 初期値 y_0 を所与として，差分方程式 (11.2) の解の一般項は

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + \frac{(1-a^t)b}{1-a} & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ y_0 + bt & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{11.3}$$

で与えられる．

下図には，$0 < a < 1, b > 0$ のときの (7.6) の解の挙動が描かれている．初期値 y_0 が与えられると，図のように 45 度線（$y_{t+1} = y_t$）を経由して，$y_1, y_2, \cdots$ が逐次決定されてゆく．図において，解 $y_0, y_1, y_2, \cdots$ は定常点 $y^* = \frac{b}{1-a}$ に収束する．実際，(11.3) 式より, $|a| < 1$ ならば，$t \to \infty$ のとき解 y_t は $\frac{b}{1-a}$ に収束することがわかる．

定理 11.2. $|a| < 1$ のとき，差分方程式 (11.2) の解は，初期値によらず，定常点 $y^* = \frac{b}{1-a}$ に収束する．



例 11.1. (1) 差分方程式 $y_{t+1} = \frac{1}{2}y_t + 1$ の定常点は $y^* = \frac{1}{2}y^* + 1$ より $y^* = 2$ である．この方程式の解の一般項は

$$y_t = \frac{1}{2^t}(y_0 - 2) + 2$$

である．$t \to \infty$ のとき，y_0 によらず，y_t は定常点 2 に収束する．
(2) 差分方程式 $y_{t+1} = 2y_t - 1$ の定常点は $y^* = 2y^* - 1$ より $y^* = 1$ である．この方程式の解の一般項は

$$y_t = 2^t(y_0 - 1) + 1$$

である．解の挙動は初期値 y_0 に依存する．

(i) $y_0 = 1$ ならば, $y_t = 1$ が定常解となる．
(ii) $y_0 \neq 1$ ならば, $t \to \infty$ のとき，y_t は $\pm\infty$ に発散する．

(3) 差分方程式 $y_{t+1} = -y_t + 2$ の定常点は $y^* = -y^* + 2$ より $y^* = 1$ である．この方程式の解の一般項は

$$y_t = (-1)^t(y_0 - 1) + 1$$

である．解の挙動は初期値 y_0 に依存する．

(i) $y_0 = 1$ のとき, $y_t = 1$ が定常解となる．
(ii) $y_0 \neq 1$ のとき

$$y_t = \begin{cases} y_0 & (t：偶数) \\ -y_0 + 2 & (t：奇数). \end{cases}$$

すなわち，y_t は定常点のまわりを振動する．□

11.2 連立 1 階差分方程式

次のような連立の 1 階線形差分方程式を考える．

$$\begin{cases} y_{t+1} = a_{11}y_t + a_{12}z_t + b_1 \\ z_{t+1} = a_{21}y_t + a_{22}z_t + b_2 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2, \cdots.$$

ただし，$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ はいずれも定数である．ここで

$$\boldsymbol{x_t} = \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とおくと，上式は次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{x_{t+1}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_t} + \boldsymbol{b}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots . \tag{11.4}$$

方程式 (11.4) に対して

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b}$$

をみたす $\boldsymbol{x^*} = \binom{y^*}{z^*}$ のことを**定常点** (*stationary point*) という．明らかに，$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{x^*}\ (t = 0, 1, \cdots)$ は (7.8) の解である．この解のことを**定常解**という．(11.4) は，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときは**同次**，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のときは**非同次**であるという．

まず，同次のケース（$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$）における (11.4) の解を求める．初期条件 $\boldsymbol{x_0} = \binom{y_0}{z_0}$ が与えられると，逐次代入することにより (7.8) の解を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_0} \\
\boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x_0} \\
\boldsymbol{x_3} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x_0} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

すなわち，(11.4) の解の一般項は

$$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{A^t}\boldsymbol{x_0} \tag{11.5}$$

と表される．

ここで，行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる 2 つの実固有値 α, β を持つならば，定理 7.3 より

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \boldsymbol{P^{-1}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

すなわち

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}$$

が成り立つような行列 $\boldsymbol{P}$ が存在する．これより

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}} \\
\boldsymbol{A}^3 &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}
\end{aligned}$$

これを繰り返すことにより

$$\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha^t & 0 \\ 0 & \beta^t \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}$$

を得る．これを (11.5) 式に代入すると，(11.4) の解の一般項を得ることができる．さらに，$|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ であれば，$t \to \infty$ のとき，α^t, β^t はともに 0 に収束するので，解 $\boldsymbol{x_t}$ は $\boldsymbol{0}$ に収束することが判る．

定理 11.3. 連立差分方程式 (11.4) において，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるとする．$\boldsymbol{A}$ は異なる実固有値 α, β をもつとする．このとき，初期条件 $\boldsymbol{x_0}$ を所与として，(7.8) の解は

$$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \alpha^t & 0 \\ 0 & \beta^t \end{pmatrix} \boldsymbol{P^{-1}x_0} \quad (t = 1, 2, \cdots)$$

と表される．さらに，$|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ ならば，初期点によらず，解 $\boldsymbol{x_t}$ は，$t \to \infty$ のとき，$\boldsymbol{0}$ に収束する．

次に，非同次（$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$）のケースを考える．議論を簡単にするために，定常点 $\boldsymbol{x}^*$ が存在することを仮定する．まず

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{x_t} - \boldsymbol{x^*} = \begin{pmatrix} y_t - y^* \\ z_t - z^* \end{pmatrix}$$

とおいて，次のような連立同次差分方程式を考える．

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}} = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{11.6}$$

このとき，$\boldsymbol{x}_t$ $(t = 0, 1, \cdots)$ が (7.8) をみたすことと (7.10) をみたすことは同じである．なぜなら

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}} &= \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{x_{t+1}} - \boldsymbol{x^*} &= \boldsymbol{A(x_t - x^*)} \\ \boldsymbol{x_{t+1}} - \boldsymbol{x^*} &= \boldsymbol{Ax_t} - \boldsymbol{Ax^*} \\ \boldsymbol{x_{t+1}} &= \boldsymbol{Ax_t} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

が成り立つからである．すなわち，非同次連立差分方程式 (7.8) を解くことは，同次連立差分方程式 (7.10) を解くことに帰着する．したがって，定理 11.3 を (11.6) に適用することにより，次の結果が得られる．

定理 11.4. 連立差分方程式 (7.8) において，定常点 $\boldsymbol{x}^*$ が存在し，$\boldsymbol{A}$ は異なる実固有値 α, β をもつとする．このとき，初期条件 $\boldsymbol{x_0}$ を所与として，(7.8) の解は

$$\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \alpha^t & 0 \\ 0 & \beta^t \end{pmatrix} \boldsymbol{P^{-1}(x_0 - x^*)} + \boldsymbol{x}^* \quad (t = 1, 2, \cdots)$$

と表される．さらに，$|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ ならば，初期点によらず，解 $\boldsymbol{x_t}$ は，$t \to \infty$ のとき，定常点 $\boldsymbol{x}^*$ に収束する．

一般には，定常点は存在しないこともあり，行列 $\boldsymbol{A}$ は異なる実固有値をもつとは限らない．このようなケースの取り扱いについてはより上級の書物を参照されたい．

11.3　2 階差分方程式

2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ に対して

$$y_{t+2} = f(y_{t+1}, y_t), \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{11.7}$$

のように定義される方程式を **2 階差分方程式**（second-order difference equation）という．2 階差分方程式においては，初期条件として y_0 と y_1 を与えないと解が定まらないことに注意しよう．

(11.7) の特殊ケースとして，線形差分方程式

$$y_{t+2} = ay_{t+1} + by_t + c, \quad t = 0, 1, \cdots \tag{11.8}$$

を考える（a, b, c は定数）．$c = 0$ のときは**同次**，$c \neq 0$ のときは**非同次**であるという．

$$y^* = ay^* + by^* + c$$

をみたす y^* を**定常点**（*stationary point*）という．明らかに，$y_t = y^*$（$t = 0, 1, \cdots$）は (11.8) の解である．この解のことを**定常解**という．以下では，$a + b \neq 1$ を仮定する．この条件は (11.8) が定常解をもつことを保証する．

まず $c = 0$ として，次のような連立差分方程式を考える．

$$\begin{cases} y_{t+2} = ay_{t+1} + by_t \\ y_{t+1} = y_{t+1} \end{cases}$$

ここで

$$\boldsymbol{y_t} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，上の連立式は次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{y_{t+1}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y_t} \tag{11.9}$$

ここで行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる 2 つの実固有値 α, β を持つとする．定理 11.3 より，初期条件 $\boldsymbol{y_0} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ を所与とすると，(11.9) の解は

$$\boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \alpha^t & 0 \\ 0 & \beta^t \end{pmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}\boldsymbol{y_0} \tag{11.10}$$

と表すことができる．ここで

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

と置くと

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{ps - rq}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}$$

であるから，(11.10) に代入して計算すると

$$y_{t+1} = -\frac{p(ry_0 - sy_1)}{ps - rq}\alpha^t + \frac{r(py_0 - qy_1)}{ps - rq}\beta^t$$

を得る．よって，$c = 0$ のとき，(7.12) の解は，ある 2 つの定数 M, N を用いて

$$y_t = M\alpha^{t-1} + N\beta^{t-1} \tag{11.11}$$

という形で表されることがわかる．

(11.11) を用いて，$c \neq 0$ のケースを解くことができる．まず

$$\widetilde{y}_t = y_t - y^*$$

と置いて，次のような同次差分方程式を考える．

$$\widetilde{y}_{t+2} = a\widetilde{y}_{t+1} + b\widetilde{y}_t \tag{11.12}$$

このとき，y_t（$t = 0, 1, \cdots$）が (11.8) の解であることと，(11.12) の解であることとは同じである．実際

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_{t+2} &= a\widetilde{y}_{t+1} + b\widetilde{y}_t \\ y_{t+2} - y^* &= a(y_{t+1} - y^*) + b(y_t - y^*) \\ y_{t+2} &= ay_{t+1} + by_t + c \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，(11.8) を解くことは (11.12) を解くことに帰着する．(11.11) より，(11.12) の解は

$$\widetilde{y}_t = M\alpha^{t-1} + N\beta^{t-1}$$

と書ける．よって，(11.8) の解の一般項は

$$y_t = M\alpha^{t-1} + N\beta^{t-1} + y^* \tag{11.13}$$

と表すことができる．

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値がただ一つである場合や複素数である場合については，より上級の文献を参照されたい．

11.4 練習問題

問題 11.1. 1 階線形差分方程式

$$y_{t+1} = -\frac{1}{3}y_t + 4$$

を考える．

(1) 定常点を求めなさい．
(2) この方程式の解の一般項を初期点 y_0 の式として表しなさい．
(3) この方程式の解は，$t \to \infty$ のとき定常点に収束することを確認しなさい．

問題 11.2. 連立 1 階線形差分方程式系

$$\begin{cases} y_{t+1} = \frac{5}{4}y_t - \frac{3}{4}z_t \\ z_{t+1} = -\frac{3}{4}y_t + \frac{5}{4}z_t \end{cases} \quad t = 0, 1, 2, \cdots .$$

を考える．

(1) 定常点を求めなさい．
(2) 係数行列
$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
の固有値を求めなさい．
(3) 初期条件が $y_0 = z_0$ をみたすとき，この方程式の解は，$t \to \infty$ のとき定常点に収束することを確認しなさい．

問題 11.3. 2 階線形差分方程式

$$y_{t+2} = \frac{5}{6}y_{t+1} - \frac{1}{6}y_t + 1$$

を考える．

(1) 定常点を求めなさい．
(2) 行列 $\left(\begin{smallmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値を求めなさい．
(3) この方程式の解の一般項を初期条件 y_0, y_1 の式として表しなさい．