「経済数学入門」（期末試験）共通問題演習例

問題１． (1) 曲面 $z=f(x,y)=e^{4x^2y-xy^3}$ 上の点 $(1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ の形で書き表すとき，定数 a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)=\sqrt{3+2x^2-2y^4}$ 上の点 $(2,1,f(2,1))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ の形で書き表すとき，定数 a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

(3) 曲面 $z=f(x,y)=(2x-y)\log_e(1+3x^2+2y)$ 上の点 $(2,-3,f(2,-3))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ の形で書き表すとき，定数 a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

解答例１． (1) $f_x(x,y)=(8xy-y^3)e^{4x^2y-xy^3}$, $f_y(x,y)=(4x^2-3xy^2)e^{4x^2y-xy^3}$ より $f_x(1,2)=8$, $f_y(1,2)=-8$ であり，$f(x,y)=e^{4x^2y-xy^3}$ より，$f(1,2)=1$ である．これらを接平面の方程式

$$z-f(1,2)=f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)$$

に代入して整理すると

$$z=1+8(x-1)-8(y-2)=8x-8y+9$$

となる．よって $a=8$, $b=-8$, $c=9$ である．

(2)
$$f_x(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{3+2x^2-2y^4}},\quad f_y(x,y)=\frac{-4y^3}{\sqrt{3+2x^2-2y^4}}$$

より $f_x(2,1)=\frac{4}{3}$, $f_y(2,1)=-\frac{4}{3}$ であり，$f(x,y)=\sqrt{3+2x^2-2y^4}$ より，$f(2,1)=3$ である．これらを接平面の方程式

$$z-f(2,1)=f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$$

に代入して整理すると

$$z=3+\frac{4}{3}(x-2)-\frac{4}{3}(y-1)=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{5}{3}$$

となる．よって $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$, $c=\frac{5}{3}$ である．

(3)
$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2\log_e(1+3x^2+2y)+(2x-y)\cdot\frac{6x}{1+3x^2+2y},\\ f_y(x,y)&=-\log_e(1+3x^2+2y)+(2x-y)\cdot\frac{2}{1+3x^2+2y}\end{aligned}$$

より $f_x(2,-3)=2\log_e 7+12$, $f_y(2,-3)=-\log_e 7+2$ で，$f(x,y)=(2x-y)\log_e(1+3x^2+2y)$ より，$f(2,-3)=7\log_e 7$ である．これらを接平面の方程式

$$z-f(2,-3)=f_x(2,-3)(x-2)+f_y(2,-3)(y+3)$$

に代入して整理すると

$$z=7\log_e 7+(12+2\log_e 7)(x-2)+(2-\log_e 7)(y+3)=(12+2\log_e 7)x+(2-\log_e 7)y-18$$

となる．よって $a=12+2\log_e 7$, $b=2-\log_e 7$, $c=-18$ である．

問題２． 次の関数の極値を求めよ．十分条件も吟味せよ．

$$f(x,y)=x^3+y^2-xy-y+1$$

解答例２． まず $f_x(x,y)=3x^2-y$, $f_y(x,y)=2y-x-1$ より，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす x, y を求めるには，$3x^2-y=0$, $2y-x-1=0$ を連立して解けばよい．
$3x^2-y=0$ より $y=3x^2$ なので，これを $2y-x-1=0$ に代入すると，$6x^2-x-1=(3x+1)(2x-1)=0$ である．よって $x=-1/3$, $1/2$ であり，このときそれぞれ $y=1/3$, $3/4$ である．

以上により，臨界点（極値をとる点の候補）は $(-1/3,1/3)$, $(1/2,3/4)$ である．

次に十分条件を吟味する．ヘッセ行列式

$$|H_f(x,y)|=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2\end{vmatrix}=12x-1$$

に基づいて極値の判定を以下で行う．

(i) 点 $(-1/3,1/3)$ の場合

$$\left|H_f(-1/3,1/3)\right|=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2\end{vmatrix}=-4-1=-5<0$$

であるから，$f(-1/3,1/3)$ は極値ではない．

(ii) 点 $(1/2,3/4)$ の場合

$$\left|H_f(1/2,3/4)\right|=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5>0$$

であり，なおかつ $f_{xx}(1/2,3/4)=3>0$ であるから $f(1/2,3/4)=9/16$ は極小値である．

(i)(ii) より，極小値 $9/16$ $\Big((x,y)=(1/2,3/4)\Big)$．

問題３．制約条件 $g(x,y)=2x+3y=-2$ のもとで，$f(x,y)=x^2-3xy-\dfrac{9}{2}y^2$ の極値を，ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ．十分条件も吟味せよ．

解答例３．$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\{-2-g(x,y)\}=x^2-3xy-\dfrac{9}{2}y^2+\lambda(-2-2x-3y)$ とおく．

$L_x=L_y=L_\lambda=0$ を満たす点 (x,y,λ) が臨界点（極値を取る点の候補）である．

そこで連立方程式 $\begin{cases} L_x=2x-3y-2\lambda=0 \\ L_y=-3x-9y-3\lambda=0 \\ L_\lambda=-2-2x-3y=0 \end{cases}$ を解くと，$(x,y,\lambda)=(1,-4/3,3)$ である．

次に十分条件を吟味する．縁付きヘッセ行列式

$$\left|\overline{H}_L(x,y,\lambda)\right|=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

に基づいて極値の判定を行う．

$$\left|\overline{H}_L(1,-4/3,3)\right|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix}=(0-18-18)-(0-36+18)=-18<0$$

であるので，$f(1,-4/3)=-3$ は極小値である．$\therefore$ 極小値 -3 $\Big((x,y)=(1,-4/3)\Big)$

問題４. 資本と労働を投入して単一財を生産する競争的企業を考える．資本投入量を K，労働投入量を L，資本のレンタル価格 $r = 2$，賃金率 $w = 1$，生産物価格 $p = 8$ とする．
また，生産量 y に対して，生産関数は以下のように与えられる．

$$y = f(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 利潤 Π を資本投入量 K と労働投入量 L の関数として表せ．

(2) 利潤最大化の 1 階の条件を示せ．

(3) 1 階の条件を満たす K，L の値を求めよ．

(4) 利潤が最大になる場合の利潤 Π を求めよ．利潤が最大になる根拠も示すこと．

解答例４.

(1) $\Pi = py - wL - rK = 8K^{1/2}L^{1/4} - L - 2K$

(2) $\Pi_K = 4K^{-1/2}L^{1/4} - 2 = 0$，$\Pi_L = 2K^{1/2}L^{-3/4} - 1 = 0$

(3) $K = L = 16$
（色々な解き方があるが，たとえば）$4K^{-1/2}L^{1/4} = 2$，$2K^{1/2}L^{-3/4} = 1$ の右辺と左辺の比をとれば，$K = L$ が得られる．この結果をどちらかの式に代入して整理することで，$K = L = 16$ であることが分かる[1]．

(4) $\Pi_{KK} = -2K^{-3/2}L^{1/4} < 0$ である．また，利潤関数 Π のヘッセ行列式の値を求めると次のようになる．

$$\begin{aligned} |\, H_{\Pi}(K, L)\,| \;&=\; \begin{vmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{KL} & \Pi_{LL} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2K^{-3/2}L^{1/4} & K^{-1/2}L^{-3/4} \\ K^{-1/2}L^{-3/4} & \dfrac{-3}{2}K^{1/2}L^{-7/4} \end{vmatrix} \\ &=\; 3K^{-1}L^{-3/2} - K^{-1}L^{-3/2} \;=\; 2K^{-1}L^{-3/2} \;>\; 0 \end{aligned}$$

よって，Π は K, L に関して強い凹関数である．

次に，Π の最大値を求める．Π は K, L に関して強い凹関数であるから，一階の条件を満たす $(K, L) = (16, 16)$ で Π は最大値 $\Pi(16, 16) = 8 \times 16^{1/2} \times 16^{1/4} - 16 - 32 = 16$ をとる．

$\therefore$ 最大値 16 ($(K, L) = (16, 16)$)

[1] 一文字消去の方法で解いてもよい．たとえば，$4K^{-1/2}L^{1/4} = 2$ から $K^{1/2} = 2L^{1/4}$ とし，この式を $2K^{1/2}L^{-3/4} = 1$ に代入してまず $L = 16$ を導き，続いて $K = 16$ を導いてもよい．

問題５． 財 X の消費量 x と財 Y の消費量 y に対して，効用関数 $u = g(x, y)$ は以下のように与えられる．

$$u = g(x, y) = x^3 y$$

ただし，$x > 0$，$y > 0$ であるとする．また，財 X の価格が $P_x = 20$，財 Y の価格が $P_y = 10$ であり，所得は $I = 400$ とする．個人は予算制約の下で効用を極大にするように財 X と財 Y の消費量を決定する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 予算制約式を求めよ．

(2) 効用極大化のためのラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ を作れ．

(3) 効用極大化の１階の条件を示せ．

(4) １階の条件を満たす (x, y) の値を求めよ．

(5) (4) で求めた解が効用極大化の２階の条件を満たしていることを示せ

解答例５．

(1) $20x + 10y = 400$

(2) $\mathcal{L} = x^3 y + \lambda(400 - 20x - 10y)$

(3) $\mathcal{L}_x = 3x^2 y - 20\lambda = 0$，$\mathcal{L}_y = x^3 - 10\lambda = 0$，$\mathcal{L}_\lambda = 400 - 20x - 10y = 0$

(4) １階の条件から λ を消去して，$2x = 3y$．予算制約式に代入・整理して，$x = 15$，$y = 10$．よって，１階の条件を満たす点は $(x, y) = (15, 10)$ である．

(5) ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ の縁付きヘッセ行列式は $\begin{vmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 20 & 6xy & 3x^2 \\ 10 & 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 600x(2x - y)$ である．

この式に $(x, y) = (15, 10)$ を代入すると，$600 \times 15(30 - 10) = 180000 > 0$ である．
よって，与えられた予算制約のもとで $(x, y) = (15, 10)$ は効用関数を極大化する．

満たさない when 効用関数 is concave

「経済数学入門」（期末試験）個別問題演習例 (瀧澤武信 2019 秋学期)

問題

関数の極限 (Limit) を求めよ.

(lim-1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

(lim-2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{6\log x - 2x^3 + 9x^2 - 18x + 11}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$

(lim-3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{e^x - 1}$

(lim-4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt{1-x}-1}-1}{\log(1-x)}$

Maclaurin 展開: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ とするとき, 2 次の項までの係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(Macl-1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(Macl-2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(Macl-3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(Macl-4) $f(x) = \log(1+2x)$

解答例

関数の極限 (Limit) を求めよ.

(lim-1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{2x} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)}{1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(lim-2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{6\log x - 2x^3 + 9x^2 - 18x + 11}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{6\frac{1}{x} - 6x^2 + 18x - 18}{4x^3 - 12x^2 + 12x - 4} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{6 \cdot (-1)x^{-2} - 12x + 18}{12x^2 - 24x + 12} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{12x^{-3} - 12}{24x - 24} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-36x^{-4}}{24} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \frac{-36}{24} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(lim-3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{e^x-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x)'}{e^x} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{e^x}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}}{e^0}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}\cdot 1}{1}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(lim-4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-x}-1}-1}{\log(1-x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sqrt{1-x}-1}-1)'}{(\log(1-x))'} \leftarrow \text{L}'\text{Hospital}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-x}-1}\cdot\left(\sqrt{1-x}-1\right)'}{\frac{(1-x)'}{(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-x}-1}\cdot\left(\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot(1-x)'}{\frac{(-1)}{(1-x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1-x}-1}\cdot\left(\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot(-1)}{\frac{(-1)}{(1-x)}}\\
&= \frac{e^{\sqrt{1}-1}\cdot\left(\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot(-1)}{\frac{(-1)}{1}}\\
&= \frac{1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)}{(-1)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Maclaurin 展開: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ とするとき, 2 次の項までの係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(Macl-1)

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{のとき}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-\frac{x^2}{2})' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left[(x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + x\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}'\right] \\ &= -\left[1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1 \\ \Longrightarrow f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 + x \cdot 0 + \frac{x^2}{2} \cdot (-1) + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots \\ a_0 &= 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Macl-2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \text{のとき} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \Longrightarrow f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots = 1 + x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{3}{4} + \cdots \\ a_0 &= 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(Macl-3)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \text{のとき} \\
f'(x) &= (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x \\
f''(x) &= [(-1)(1+x^2)^{-2}]' \cdot 2x + (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot [2x]' \\
&= [(-1)(-2)(1+x^2)^{-3} \cdot 2x] \cdot 2x + (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 + (-1) \cdot 2 = -2 \\
\Longrightarrow f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots = 1 + x \cdot 0 + \frac{x^2}{2} \cdot (-2) + \cdots \\
a_0 &= 1, a_1 = 0, a_2 = -1
\end{aligned}$$

(Macl-4)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+2x) \text{ のとき} \\
f'(x) &= \frac{(1+2x)'}{1+2x} = \frac{2}{1+2x} = 2(1+2x)^{-1} \\
f''(x) &= 2 \cdot (-1)(1+2x)^{-2} \cdot 2 = (-1) \cdot 2^2 (1+2x)^{-2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, f'(0) = 2, f''(0) = -4 \\
\Longrightarrow f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots = 0 + x \cdot 2 + \frac{x^2}{2} \cdot (-4) + \cdots \\
a_0 &= 0, a_1 = 2, a_2 = -2
\end{aligned}$$