１　戦略形ゲーム②

２０１９年１０月１４日

ゲーム理論入門　第３回講義

荒木一法

本日と来週の講義では教科書の次の２章を解説します！

第3章　戦略ゲーム

1. ゲームの例
2. 確率的な戦略
3. クールノー寡占市場
4. 公共財の供給
5. オークション

第4章　ナッシュ均衡

1. 最適応答
2. ナッシュ均衡点とは？
3. 均衡点の2つの考え方
4. 均衡点の計算方法
5. 支配戦略とマックスミニ戦略

今考えていることは？

各プレーヤーが同時に意思決定をおこなうゲーム的状況を、戦略形でモデル化しナッシュ均衡を使って

1. 実際に起こることを説明
2. これからおきることを予想
3. どう戦略を選ぶべきかの指針を与える。

理解のポイント：
ナッシュ均衡とその意味

合理的なプレーヤーはナッシュ均衡（戦略）をえらぶ！

- １個の場合：どのようなプロセスで実現するか
- ２個以上の場合
  - ひとつが選ばれる理由は？
  - どれが実現するか？
- ０個の場合　→　混合戦略均衡の存在

４．２　ナッシュ均衡（点）とは？

ナッシュ均衡（点）：すべてのプレーヤーが相手の行動に対する最適反応戦略を選択している状態における「最適反応戦略の組」

⇒　どのプレーヤーも自分の行動（戦略）を変えるインセンティブをもたない。

ナッシュ均衡は
（値下げ、値下げ）

A \ B	価格維持	値下げ
価格維持	5 / 5	3 / 7
値下げ	7 / 3	5 / 5 ナッシュ均衡

ナッシュ均衡は（左側、左側）と（右側、右側）

自分 ＼ 相手	左側	右側
左側	2, 2 ナッシュ均衡	0, 0
右側	0, 0	2, 2 ナッシュ均衡

第3のナッシュ均衡の存在

協調ゲームには、二つの“純粋”戦略均衡に加えて、次の“混合”戦略均衡が存在する。

次の混合戦略がナッシュ均衡になっていることを確認してみよう！

自分: 確率1/2で左側、確率1/2で右側

相手: 確率1/2で左側、確率1/2で右側

ナッシュ均衡は
（野球、野球）と（バレエ、バレエ）

女性 男性	野球	バレエ
野球	1 2 ナッシュ均衡	0 0
バレエ	0 0	2 1 ナッシュ均衡

ナッシュ均衡は
（タカ、ハト）と（ハト、タカ）

相手 自分	ハト	タカ
ハト	2 2	3 1 ナッシュ均衡
タカ	1 3 ナッシュ均衡	0 0

ナッシュ均衡の定義とナッシュの定理

- ナッシュ均衡の一般的定義

  n人のプレーヤーからなる戦略形ゲームの$\langle N, S, f \rangle$の戦略の組　$s^* = (s_1{}^*, s_2{}^*, \ldots, s_n{}^*)$

  は、次の性質を満たすときナッシュ均衡である。

  全てのプレーヤーのすべての戦略$s_i \in S_i$に対して

  $$f_i(s^*) \geq f_i(s^*/s_i)$$

- ナッシュの定理

  有限個の純粋戦略をもつ戦略形n人ゲームは、混合戦略均衡までふくめれば少なくとも一つのナッシュ均衡を持つ。

４．３　均衡点の2つの考え方

均衡点に関して「合理的均衡」と「集団的均衡」の二つの考え方がある。

合理的均衡：ゲームの構造を正確に理解したプレーヤーが合理的（自らの利得を最大化するよう）に行動を選択するときに実現する状態。

集団均衡：大規模な母集団からランダムに選ばれたプレーヤーがゲームを繰り返しプレイする結果、集団の中での行動分布が安定する状態。

４．４　均衡（点）の計算方法

混合戦略均衡においては、正の確率で選択される純粋戦略は、すべて同じ期待利得（利得の期待値）をもたらす。なぜなら、もし期待利得が異なるならば、最も高い利得をもたらす純粋戦略を確率１で選ぶはず。したがって、混合戦略が均衡であるためには、正の確率で選択される純粋戦略は、同じ期待利得を持つことが必要。

「男性と女性の争い」の混合戦略均衡の計算

- 男性が「野球」を選択する確率をp、女性が「野球」を選択する確率をqとおく。
- それぞれが「バレエ」を選択する確率は、1-p, 1-qとなる。
- このとき男性が、「野球」、「バレエ」を選択するときの期待利得はそれぞれ　$2q$　$(1-q)$
- <u>均衡では期待利得が等しくなるので</u>

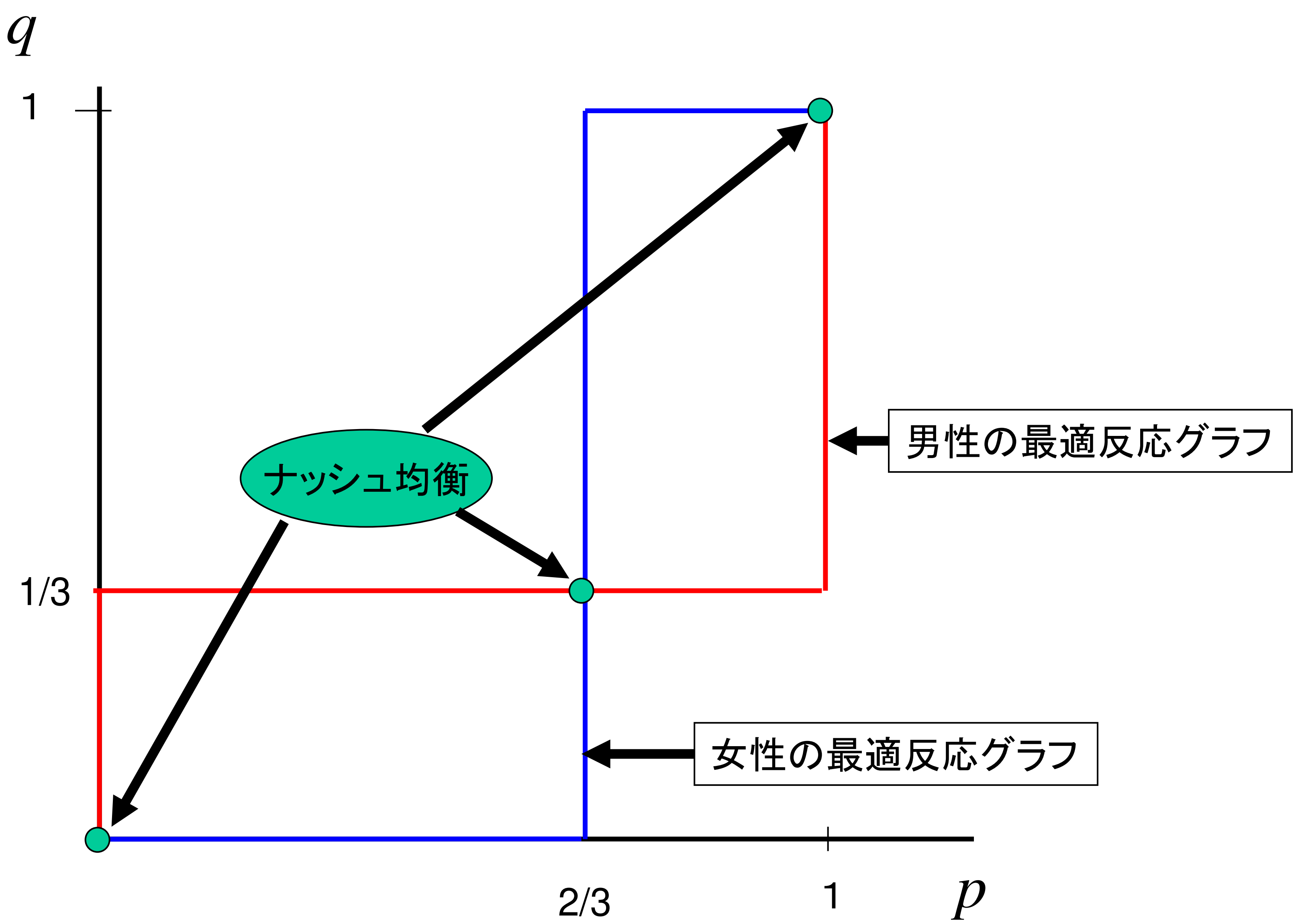
$$2q = 1 - q \qquad q = \frac{1}{3}$$

- 女性が、「野球」、「バレエ」を選択するときの期待利得はそれぞれ p 　 $2(1-p)$
- 均衡では期待利得が等しくなるので

$$p = 2(1-p) \qquad p = \frac{2}{3}$$

- したがって混合戦略均衡は

「男性は、確率2/3で野球、確率1/3でバレエ、女性は確率1/3で野球、確率2/3でバレエ」


q
1
1/3
ナッシュ均衡
男性の最適反応グラフ
女性の最適反応グラフ
2/3
1
p

演習問題

- 次の利得表はサッカーのPKにおけるキッカーとキーパー（ゴーリー）のゲームを表したものである。
  - 利得はキッカーの利得は、ゴールをきめたとき1、はずしたとき－1、ゴーリーの利得はその逆である。
  - このゴーリーは、左サイドのキックにたいして、正しく予想すれば確実にとめることができる。
  - しかし、右サイドに少し弱く、右サイドのキックに対しては1/4の確率でゴールを許すと仮定する。したがって、キッカーが右にけり、ゴーリーが右を予測したときの利得はそれぞれ、－０．５、０．５となっている。
- このゲームのナッシュ均衡を求めなさい。（次回解説）

右に（少し）弱いゴーリー

ゴーリー ＼ キッカー	右	左
右	０．５ －０．５	－１ １
左	－１ １	１ －１

クールノー･モデルのナッシュ均衡

- 二つの企業、企業1と企業2が完全に同質な財を生産･販売（生産量はx_1とx_2 ）
- 市場の（逆）需要曲線

$$p = A - B(x_1 + x_2) \qquad （A, Bは正の定数）$$

- 財1単位あたりの生産に必要な費用は両企業とも*c*で、その値は生産量に関わらず一定
- 両企業はライバルの出方を伺いながらそれぞれの利潤を最大化するように生産量を決定

両企業の利潤関数:

$$\pi_i = p \cdot x_i - c \cdot x_i$$
$$= \{A - B(x_1 + x_2)\}x_i - c \cdot x_i \qquad i = 1,2$$

利潤最大化条件 $\frac{d\pi_i}{dx_i} = 0$ から

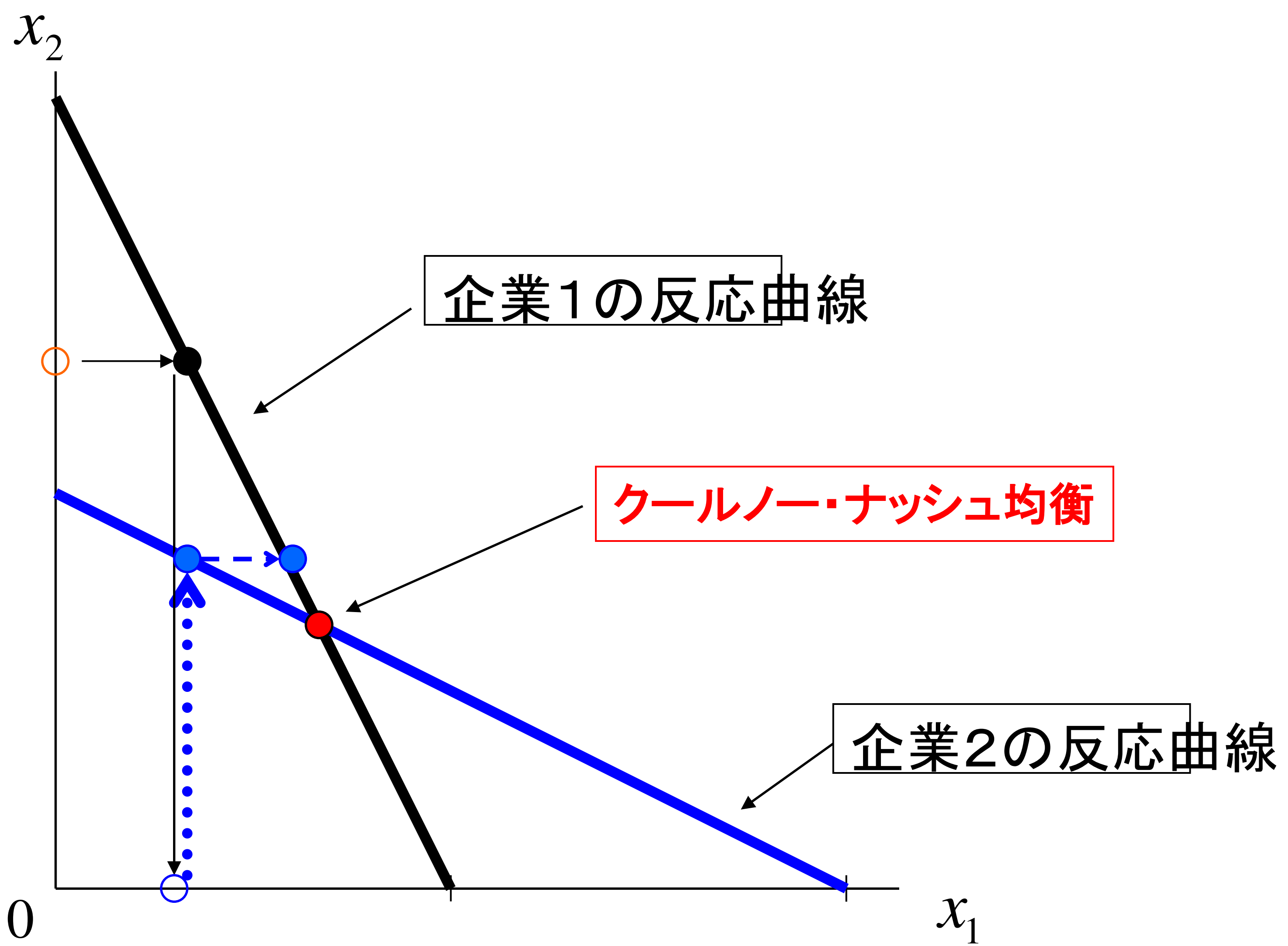
戦略的相互依存関係

最適生産量 $x_1{}^*, x_2{}^*$は

$$x_1{}^* = \frac{(A - C)}{2B} - \frac{x_2}{2}, \qquad x_2{}^* = \frac{(A - C)}{2B} - \frac{x_1}{2}$$

企業1の反応曲線　　企業2の反応曲線

連立方程式として解くと　$x_1{}^* = x_2{}^* = \frac{A-C}{3B}$


x_2
企業1の反応曲線
クールノー・ナッシュ均衡
企業2の反応曲線
0
x_1

公共財ゲームの例

公共財ゲームの具体的な例を戦略形で表記

- プレイヤー集合：100人 $(i = 1,2, \ldots, 100)$
- 戦略集合：各プレーヤーの寄付額 g_i（上限10）
- 利得関数：

$$f_i(g_1, g_2, \ldots, g_{100}) = 10 - g_i + a\sum_{i=1}^{100} g_i \quad a > 0$$

プレーヤー i の利得は、金融資産$(10 - g_i)$と公共財からえる利得$a\sum_{i=1}^{100} g_i$の和

公共財ゲームの均衡を求める

各プレーヤーが自らの利得(f_i)を最大化するには、寄付額(g_i)増加による負担増を考慮した利得の増加分（限界便益）がプラスの時には、寄付額を増やし、マイナスならば減らす必要がある。限界便益は

$\frac{\partial f_i}{\partial g_i} = a - 1$ となるので、最適寄付額は、

$a - 1 > 0$のとき上限の10、$a - 1 < 0$のとき下限の0、$a - 1 = 0$のとき、0以上10以下の任意の値となる。

４．５　支配戦略とマックスミニ戦略

戦略の支配

- 相手の行動にかかわらず、戦略Ａが戦略Ｂよりもよい結果をもたらすときＡはＢを強支配する。
- 相手の行動にかかわらず、戦略Ａが戦略Ｂとくらべ同等以上の結果をもたらすときＡはＢを弱支配する。
- ピザ店の顧客獲得競争ゲームでは、何れのプレーヤーにとっても「値下げ」が「価格維持」を支配している。

ピザ店の顧客獲得競争

A ＼ B	価格維持	値下げ
価格維持	５ (B) ５ (A)	７ (B) ３ (A)
値下げ	３ (B) ７ (A)	５ (B) ５ (A)

Second Price Sealed Bid Auction のナッシュ均衡

SPSB （第2価格封印入札方式）:最高入札者が落札し、（自らの入札額ではなく）２番目に高い入札額を支払うという「ルール」のオークション

このオークションにおける入札者の支配戦略（入札額）は？

「自らの最大支払い意欲額を入札する」

なぜ？

大きい額を入札すると？

小さい額を入札すると？

戦略の支配とナッシュ均衡の関係

- ２人戦略形ゲームにおいて、２人のプレーヤーそれぞれに支配戦略があるならば、その支配戦略の組は唯一のナッシュ均衡である。
- 弱支配戦略を含むナッシュ均衡は必ずしも唯一のものでもなければ、狭義でもない。
- <u>弱支配される戦略がナッシュ均衡になることもある。</u>

「他店より高ければ…」のナッシュ均衡（確認）

Y \ B	高価格	低価格	合わせる
高価格	4 4	6 1	4 4
低価格	1 6	2 2	2 2
合わせる	4 4	2 2	4 4

弱支配される戦略の消去（1回目）

B ＼ Y	~~高価格~~	低価格	合わせる
~~高価格~~	4 4	6 1	4 4
低価格	1 6	2 2	2 2
合わせる	4 4	2 2	4 4

縮約ゲーム

Y \ B	低価格	合わせる
低価格	2, 2	2, 2
合わせる	2, 2	4, 4

弱支配される戦略の消去
（２回目）

Y ＼ B	~~低価格~~	合わせる
~~低価格~~	Y: ２, B: ２	Y: ２, B: ２
合わせる	Y: ２, B: ２	Y: ４, B: ４

被弱支配戦略の繰り返し消去

- 上記のプロセスは、単に「合理的なプレーヤーは、被弱支配戦略を選ばない」よりも強い次の仮定を前提としている。

- 仮定：　Aは、Bが被弱支配戦略を選ぶことはない、と判断していることをBは知っており、そのようなBの「知識」をAも把握している。（AとBを入れ替えた関係も成立）

- 被弱支配戦略の繰り返し消去の結果残される戦略は、双方にとって「合わせる」のみ。
- この分析は、最低価格保証戦略が（主に寡占市場で）しばしば採用されるという観察結果（現実世界のゲーム的状況で起こっている事象）に対応している。
- この簡単なモデル分析は最低価格保証が採用されるという「事実」の「よい説明」といえるだろうか？

マックスミニ戦略

- マックスミニ戦略：自分（A）がとりうる各戦略にたいして、相手（B）が常に自分（A）の利得を最小化する戦略をとると想定し、各戦略がもたらす最小化された利得の中で最大値を実現する戦略。（自分が持つ選択肢についてそれぞれ最悪の結果を想定し、それが一番マシな戦略）
- マックスミニ値：マックスミニ戦略を計算する際に想定した利得の値
- マックスミニ戦略＝ナッシュ均衡の戦略？

マックス
ミニ戦略

マックス
ミニ値

ピザ店のマックスミニ戦略

A \ B	価格維持	値下げ
価格維持	5 5	7 3
値下げ	3 7	5 5

ミニマックス戦略

- ミニマックス戦略：相手が自分の各戦略に対して相手の利得を最大にする戦略をとる場合に、相手の最大利得を最小とする自分の戦略。
- ミニマックス値：ミニマックス戦略を計算する際に想定した自分の利得の値

ミニマックス戦略

ミニマックス値

ピザ店のミニマックス戦略

A＼B	価格維持	値下げ
価格維持	5 5	7 3
値下げ	3 7	5 5

ミニマックス定理

- ミニマックス定理：２人のプレイヤーがそれぞれ有限個の純粋戦略をもつ2人ゼロ和ゲームにおいては混合戦略まで考えればマックスミニ値とミニマックス値は一致する。
- 二人ゼロ和ゲームでは混合戦略まで含めたマックス・ミニ戦略の組はナッシュ均衡となっている。