統計学II

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

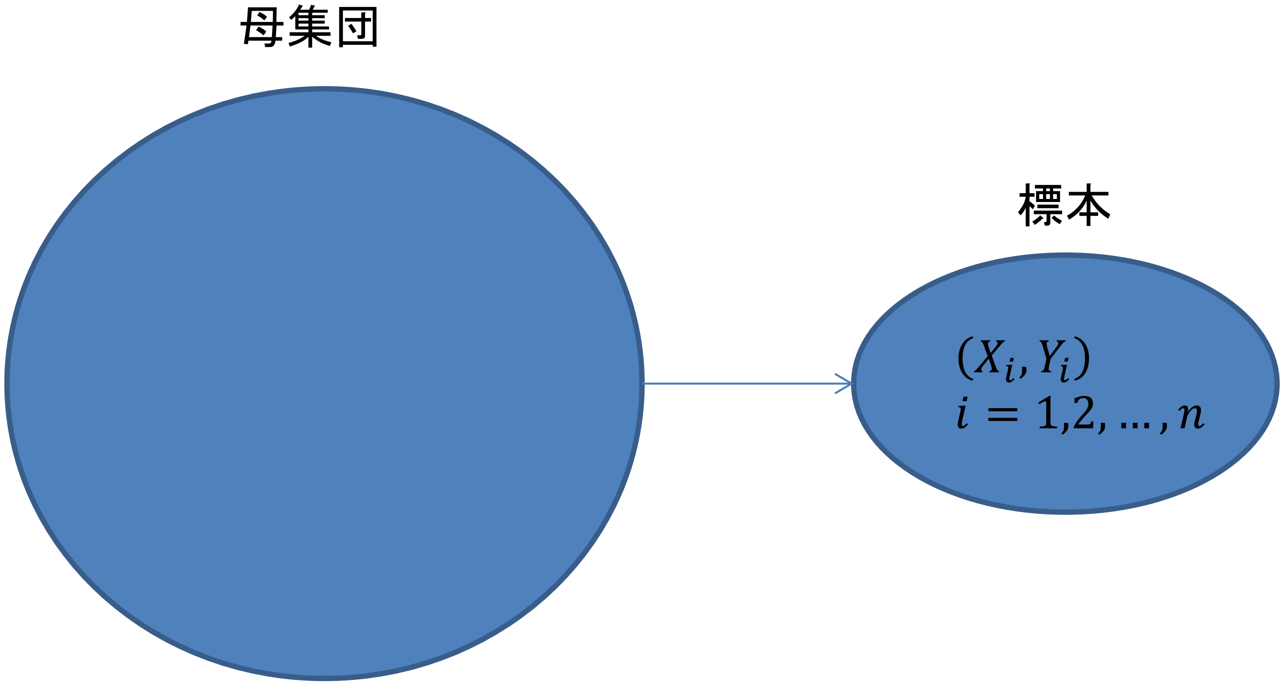
- 対標本における母平均の差の検定
- 母分散に関する検定
  – 母分散の値に関する検定
  – 母分散の比に関する検定

対標本における検定(1)

- 問題
  - Pearson の親子の身長のデータから、20組の親子の身長を無作為抽出する。
    - (67, 71), (70, 73), (69, 71), (71, 72), (68, 67), (67, 67), (66, 71), (70, 65), (65, 64), (66, 71), (66, 70), (68, 71), (66, 69), (69, 71), (65, 62), (70, 68), (66, 67), (67, 70), (64, 67), (68, 67).
      - 教科書の数値例と異なることに注意する。
  - 父親の平均身長と息子の平均身長とに有意な差があるか？

対標本における検定(2)

図1：対標本の例

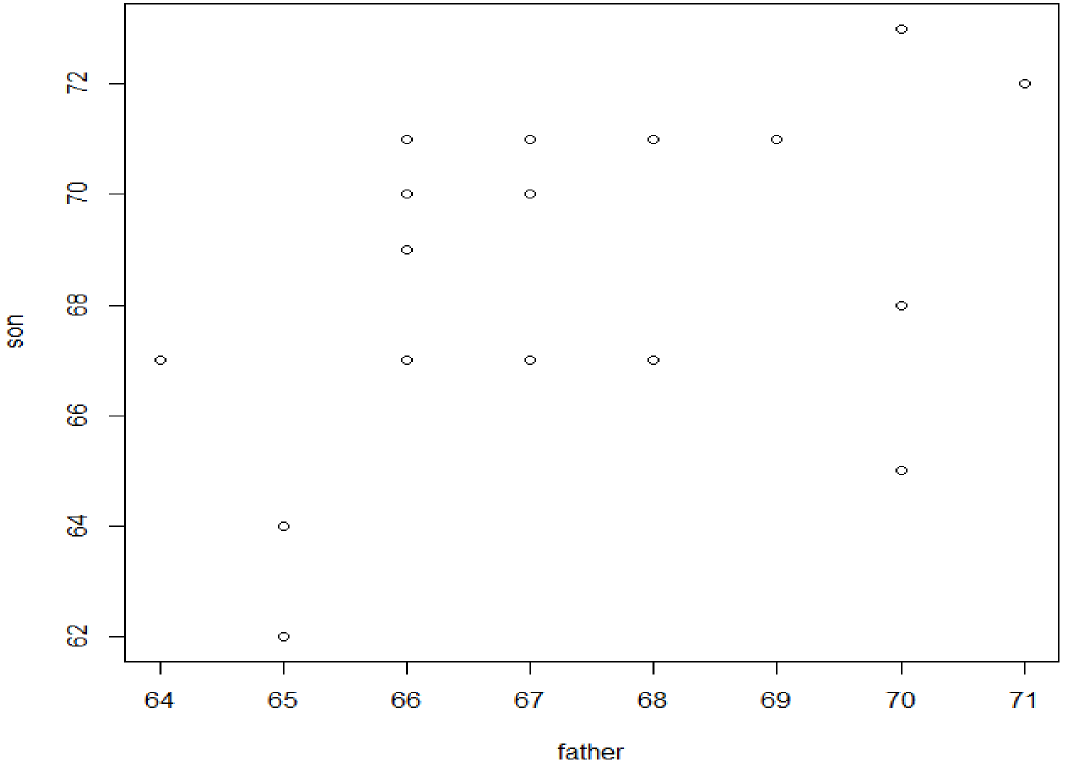


対標本における検定(3)

- 標本平均
  - $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- 標本平均の差の性質
  - $E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$
  - $V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) - 2Cov(\bar{X}, \bar{Y})$
    - X_i と Y_i が独立でない。
      - 父親が長身だと、息子も長身になりやすい。
      - したがって、$Cov(\bar{X}, \bar{Y}) > 0.$
        - » 注: X_i と Y_i が独立である。→ $Cov(\bar{X}, \bar{Y}) = 0.$

対標本における検定(4)

図2：父親の身長と息子の身長の散布図（対標本の場合）



対標本における検定(5)

- 対標本の検定方法（その1）
  - 標本
    - $(X_i, Y_i) \sim_{iid} \{(\mu_X, \mu_Y), (\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY})\}$
  - 仮説
    - $\begin{cases} H_0: \mu_X - \mu_Y = 0 \\ H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0 \end{cases}$
  - 検定統計量
    - $|T| = \dfrac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{n} - 2\frac{S_{XY}}{n}}}$

対標本における検定(6)

– ただし、

» $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

» $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$

» $S_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

– 両側検定（有意水準0.05）

- $|T| > 1.96$ であれば、H_0 を棄却する。
  – 正規母集団を想定できるのであれば、1.96の代わりに $t_{0.025}(n-1)$ を用いる。

対標本における検定(7)

- 対標本の検定方法（その2）
  - 結果はその1と全く同じになる。
  - 各々の観察値における、X_i と Y_i との差
    - $D_i = X_i - Y_i$
  - D_i の標本平均
    - $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \bar{X} - \bar{Y}$
  - $\overline{D}$ の性質
    - $\mu_D = E(\overline{D}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$
    - $V(\overline{D}) = \frac{\sigma_D^2}{n}$, ただし、$\sigma_D^2 = V(D_i) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$

対標本における検定(8)

- 仮説
  - $\begin{cases} H_0:\ \mu_X - \mu_Y = 0 \\ H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_D = 0 \\ H_1: \mu_D \neq 0 \end{cases}$
- 検定統計量
  - $|T| = \dfrac{\overline{D}}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$
    - $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2 = S_X^2 + S_Y^2 - 2S_{XY}$
- 両側検定
  - $|T| > 1.96$ のとき、帰無仮説H_0を棄却する。
    - 正規母集団を仮定できるときは、1.96 を $t_{0.025}(n-1)$ に代える。

対標本における検定(9)

– Pearson の親子の身長のデータ（続き）
  - $\overline{D}_{obs} = -1.3, S_{D\,obs}^2 = 7.59$
  - $|T|_{obs} = 2.11$
  - 正規母集団を仮定すると、自由度19のt分布の上側0.025点は2.09
  - H_0 は棄却される。
    – 父親の平均身長と息子の平均身長には差がある。

母分散の検定(1)

- 正規母集団
  - $X_i \sim_{iid} N(\mu, \sigma^2) \quad\quad i = 1,2,\ldots,n.$
  - 標本分散
    - $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
  - 標本分散の性質
    - $E(S^2) = \sigma^2$
    - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

母分散の検定(2)

- 母分散の値に関する検定
  - 仮説
    - $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$ ただし、σ_0^2 は具体的な正の値。
  - 検定統計量
    - $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
  - 両側検定（有意水準0.05）
    - $U < \chi^2_{0.025}(n-1)$ または $U > \chi^2_{0.975}(n-1)$ ならH$_0$を棄却する。

母分散の検定(3)

- 例:
  - Pearson データから、父親の身長に関する大きさ10の無作為標本を得る。
    - 65, 67, 70, 64, 68, 66, 67, 66, 62, 64
      - » 教科書の数値例と異なることに注意する。
  - 仮説
    - $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 7.5 \\ H_1: \sigma^2 \neq 7.5 \end{cases}$
  - 臨界点
    - $\chi^2_{0.025}(10-1) = 2.7004, \chi^2_{0.975}(10-1) = 19.0228$

母分散の検定(4)

- 検定統計量の観察値
  - $U_{obs} = \frac{(10-1)\times 5.21}{7.5} = 6.25$
- 両側検定（有意水準0.05）
  - H_0は棄却されない。

母分散の検定(5)

- 分散比の検定
  - 2標本問題
    - 標本A $X_i \sim_{iid} N(\mu_A, \sigma_A^2) \quad i = 1, 2, \dots, n.$
    - 標本B $Y_j \sim_{iid} N(\mu_B, \sigma_B^2) \quad j = 1, 2, \dots, m.$
      - 2つの標本は独立とする。
  - 2つの標本分散の性質
    - $\frac{(n-1)S_A^2}{\sigma_A^2} \sim \chi^2(n-1)$ ただし、$S_A^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
    - $\frac{(m-1)S_B^2}{\sigma_B^2} \sim \chi^2(m-1)$ ただし、$S_B^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

母分散の検定(6)

- 2つの標本が独立なので
  - $F = \frac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2} \sim F(n-1, m-1)$
- 仮説
- $\begin{cases} H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: {}^{\sigma_A^2}/_{\sigma_B^2} = 1 \\ H_1: {}^{\sigma_A^2}/_{\sigma_B^2} \neq 1 \end{cases}$
- 検定統計量
  - $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$

母分散の検定(7)

- 両側検定（有意水準0.05）
  - $F < F_{0.025}(n-1, m-1)$ または
    $F > F_{0.975}(n-1, m-1)$ のときH_0を棄却する。

母分散の検定(7)

– 例:
  - Pearson データから
    – 父親の身長の無作為標本（大きさ20）
      » 64, 65, 69, 68, 69, 60, 71, 67, 72, 69, 70, 66, 69, 68, 71, 66, 73, 67, 68, 72.
    – 息子の身長の無作為標本（大きさ20）
      » 68, 69, 73, 70, 70, 66, 69, 72, 71, 65, 70, 72, 73, 68, 70, 68, 69, 70, 63, 72.
    – 両者は独立に標本抽出されている。
      » 教科書の数値例と異なることに注意。
    – 臨界点
      » $F < 0.40$ または $F > 2.53$.

母分散の検定(7)

- 検定統計量
  - $F_{obs} = \frac{S^2_{A_{obs}}}{S^2_{B_{obs}}} = \frac{9.54}{6.78} = 1.41$
- 両側検定（有意水準0.05）
  - H_0 は棄却されない。