ゲーム理論入門

with 不確実性と情報，不完全競争&略解

同志社大学経済学部教授

田中 靖人

まえがき

これは「中級ミクロ経済学」のテキストからゲーム理論と，その準備に必要な不確実性と情報の経済学および不完全競争に関する部分を抜粋して作ったものである.

ゲーム理論の参考書としては以下のものが代表的である[*1]。

1. 岡田章『ゲーム理論』（有斐閣）
2. 岡田章『ゲーム理論・入門』（有斐閣アルマ）
3. 神戸伸輔『入門 ゲーム理論と情報の経済学』（日本評論社）
4. R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）
5. 坂井，藤中，若山『メカニズムデザイン』（ミネルヴァ書房）
6. 佐々木宏夫『入門 ゲーム理論―戦略的思考の科学』（日本評論社）
7. 中山幹夫『はじめてのゲーム理論』（有斐閣）
8. 中山，武藤，船木『協力ゲーム理論』（勁草書房）
9. 船木由喜彦『演習 ゲーム理論』（新世社）
10. 武藤滋夫『ゲーム理論入門』（日経文庫）
11. 武藤滋夫『ゲーム理論』（オーム社）
12. 渡辺隆裕『ゼミナール ゲーム理論入門』（日本経済新聞出版社）
13. 柳川範之『契約と組織の経済学』（東洋経済新報社）
14. 青木/奥野（編著）『経済システムの比較制度分析』（東京大学出版会）
15. J. W. ヴェイブル（大和瀬達二監訳）『進化ゲームの理論』（文化書房博文社）
16. J. メイナード-スミス（寺本英他訳）『進化とゲーム理論』（産業図書）

演習問題の内冒頭に (new) と書かれているものは解答が含まれていない（作成中）問題である.

大学の学部レベルで取りあげるべき新たな問題があればご教示いただきたい.

2013 年 12 月 25 日

田中靖人

[*1] 少々古い情報も含まれているので以下で示す文献の中には，何度も改訂されたり，すでに出版されていなかったり訳者や書名が変ったりしたものもあるかもしれないが，その際はご容赦願いたい。また，より新しい文献があればご紹介いただきたい.

目次

第1章

不確実性と情報の非対称性

1.1　不確実性と期待効用

この節では不確実性下の人々の行動に関する経済学的理論のごく基礎的な部分を紹介する。不確実性とは将来どうなるかわからないということであるが，まったくわからないのではなく，どのようになる可能性があるかはわかっており，またそれらが起きる確率について何らかの推測を人々が抱いているものとする。そうでなければ意思決定はできない。

■確率と期待値　確率とはある事柄（事象）が起きるか起きないかがはっきりしないときにどの程度起きやすいかを表す数である。起きる可能性のあるすべての事柄の確率を合わせて1になっていなければいけない。確率には客観的な確率と主観的な確率がある。客観的な確率とはその事象のメカニズムや過去のデータなどから多くの人々が同意している確率であるが，主観的な確率は個人的に知っている事実などにもとづいて決まる。いずれにしても人々が持っている情報にもとづいて確率は決められる。たとえばサイコロを1つころがして1から6まで各々の目が出る確率は，そのサイコロが正しく作られていれば1/6である。一方2つのサイコロをころがして出た目の和が4になる確率は，全体で36通りあるそれぞれの場合が起きる確率が等しい（「同様に確からしい」と言う）という前提で考えると，和が4になるのは3通り（1と3，2と2，3と1）であるからその確率は1/12になる。これらは客観的な確率である。

「期待値 (expected value)」とは平均値とよく似た意味であるが，平均値が過去に起きた事柄について計算されるのに対して，期待値はこれから起きる事柄についてそれらが起きる確率にもとづいて計算される。2つのサイコロをころがして出る目の和の期待値は次のようにして求められる。

$$\frac{2+3\times 2+4\times 3+5\times 4+6\times 5+7\times 6+8\times 5+9\times 4+10\times 3+11\times 2+12}{36}=7$$

次のような籤（くじ）あるいは証券を考える。

翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 2000 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 0 円になる

このくじが 800 円で売られているとして買うだろうか？ このくじの平均的な収益は 1000 円であるが，2000 円になることがある一方で 0 円になってしまうこともある。このような場合リスク（危険）があると言う。これをどのような価格で買うか買わないかはその人がリスクに対してどのように考えるかにより，900 円では買わないが 800 円なら買う人，1000 円で買う（1000 円を越えると買わない）人，中には 1200 円でも買う人がいるかもしれない。最初のタイプの人を「危険回避的」，2 番目の人を「危険中立的」，最後のタイプの人を「危険愛好的」と言う。危険中立的とは平均の収益だけで判断しリスクを気にしないことを意味する。危険回避的，危険愛好的はそれぞれリスクを嫌うこと，リスクを好むことを意味する。一般的に人々は危険回避的であると考えられるがその程度は人によって異なるであろう。すなわち上記のくじを 800 円以下なら買う人もいれば，500 円以下でなければ買わない人もいるだろう。このような不確実性のもとでの人々の行動を効用関数を使って分析することを考える。人々のくじに対する選好が次の条件を満たすものとする。

(1).『(連続性)　3 つのくじ L_1，L_2，L_3 があり，ある個人が L_3 より L_1 を，L_2 より L_3 を好むとき，L_1 と L_2 をある比（1 より小さい正の数）で組み合わせたくじで L_3 と無差別になるようなものがある。』
ここで 2 つのくじを組み合わせるとは以下のようなことを意味する。
　L_1: 翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 2000 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 0 円になる
　L_2: 翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 1500 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 300 円が受け取れる
が 2 つのくじであるとしてこれらを $p : 1-p(0 \leqq p \leqq 1)$ の比で組み合わせると次のようなくじになる。
　$pL_1 + (1-p)L_2$: 翌日確率 $\frac{1}{2}p$ で 2000 円が，確率 $\frac{1}{2}(1-p)$ で 1500 円が，確率 $\frac{1}{2}(1-p)$ で 300 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}p$ で 0 円になる
この条件は好きなくじと嫌いなくじ，およびその中間的なくじがあったとき，好きなくじと嫌いなくじを適当に組み合わせたもので中間的なものと無差別（効用が等しい）になるものがあるということである。p を大きくすれば組み合わせたくじは L_1 に近づき，小さくすれば L_2 に近づくので妥当な条件だと思われる。

(2).『(独立性)　上記の条件における L_1 と L_2 を組み合わせたくじと L_3 はそれらについて無差別な個人にとっては同等のものであると見なし，さらに別のくじとの組み合わせにおいてこれらを置き換えても個人の選好に変化はない。』
この条件はいくつかのくじを組み合わせたくじにおいてその中の 1 つ（それ自体が複数のくじを組み合わせたものである場合も含めて）をそれと無差別な別のくじと置き換えたものはもとの組み合わせと無差別であることを求めるものであり，くじに関する人々の選好の合理性を要求する条件である。

これらの条件のもとで人々の効用を比較的簡単な形で表すことができる。なお以前に説

明した推移性はここでも仮定する（すでに第 1 の条件において L_1，L_2，L_3 に関する選好の部分で推移性を用いている）。

定理 1.1.1 (期待効用定理)**.** 上の条件のもとで

　　L: 確率 p で x 円，確率 $1-p$ で y 円受け取れる

というくじ L に対するある個人の効用は，$u(x)$，$u(y)$ をそれぞれ確実に x，y が得られるときの効用の適当な表現として，それらの期待値

$$u(L) = pu(x) + (1-p)u(y)$$

で表される。

　このとき効用関数 u を $u' = au + b$（$a(>0)$，b は定数）で置き換えると

$$u'(L) = pu'(x) + (1-p)u'(y) = pau(x) + pb + (1-p)au(y) + (1-p)b = au(L) + b$$

となり，2 つのくじ L_1 と L_2 について $u(L_1) \geqq u(L_2)$ のときには $u'(L_1) \geqq u'(L_2)$ が成り立つので u と u' とは同一の選好を表す。

証明. $x > y$ と仮定する。実現可能な最大の収益，最小の収益をそれぞれ h，l で表す。条件 1（連続性）によりある確率 r_x で h，$1-r_x$ で l が実現するというくじと，確実に x が得られるというくじ（くじではないが一応これもくじに含める）とが無差別になるような $r_x (0 < r_x < 1)$ が存在する。ただし $x = h$ のときは $r_x = 1$，$x = l$ のときは $r_x = 0$ である。同様にある確率 r_y で h，$1-r_y$ で l が実現するというくじと，確実に y が得られるというくじとが無差別になるような r_y が存在する。そこで x，y の効用を $u(x) = r_x$，$u(y) = r_y$ で表すことにする。したがって $u(h) = 1$，$u(l) = 0$ である。a，b を定数として $u(x) = ar_x + b$，$u(y) = ar_y + b$ と表してもよい。

　x，y をそれぞれ上記のくじと同等のものと見なせば，条件 2（独立性）によりくじ L は

　　確率 $pr_x + (1-p)r_y$ で h 円，確率 $p(1-r_x) + (1-p)(1-r_y)$ で l 円受け取れる

というくじと同等のもであると見なすことができる。したがってくじ L の効用は $pr_x + (1-p)r_y$ で表されるが，これは $pu(x) + (1-p)u(y)$ に等しい。x，y の効用を $u(x) = ar_x + b$，$u(y) = ar_y + b$ と表す場合には L の効用は $a[pr_x + (1-p)r_y] + b = p(ar_x + b) + (1-p)(ar_y + b)$ と表され，やはり $pu(x) + (1-p)u(y)$ に等しい。 □

　この定理は，あるくじに対する人々の効用はそのくじに含まれるそれぞれの場合の効用の期待値に等しくなるように表すことができるということを意味する。このようにして表現された効用は期待効用 (expected utility) と呼ばれ，L の期待効用を $E(L)$ と表すこともある（E は Expected value の E)。1 つ例を考えてみよう。くじの結果得られる収益を

x として 2 人の人，個人 1 および 2 の効用関数が次のようであるとする。

$$u_1(x) = 6800x - x^2$$

$$u_2(x) = 8200x - 2x^2$$

上記のくじ L_1 から得られる期待効用はそれぞれ $E_1(L_1) = \frac{1}{2}(6800 \times 2000 - 2000^2 + 0) = 4800000$，$E_2(L_1) = \frac{1}{2}(8200 \times 2000 - 2 \times 2000^2 + 0) = 4200000$ となるが，個人 1 はこのくじと確実に 800 円が得られるくじについて無差別となるのに対して，個人 2 はこのくじと確実に 600 円が得られるくじについて無差別であるから，個人 2 の方がより危険回避的であると言える。a，b を定数として u_1 を

$$u_1' = a(6800x - x^2) + b$$

のように書き直しても今の計算には変化がない（u_2 についても同様)。序数的な効用の場合にはある効用関数 u に対して $u' = au + b$ とするだけではなく $u' = u^2$ や $u' = u^3$ としても同じ選好すなわち同じ無差別曲線を表すことになるが，期待効用の場合は $u' = au+b$ のときだけ同一の効用関数と見なされ，$u' = u^2$ や $u' = u^3$ の場合は u と u' は異なる効用関数と考えなければならない。

この期待効用理論にもとづいて保険や金融など不確実性に直面する人々の様々な行動が分析される。また，後の章で解説するゲーム理論では人々（プレイヤーと呼ぶ）の効用はこの期待効用の意味で表されている。「期待効用定理」の条件を満たす効用関数を，最初にその研究をした人々の名をとってフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン (von Neumann-Morgenstern) 型効用関数と呼ぶ。

われわれが保険会社の人件費その他の経費支払いや株主への利益分配に回される保険料を支払ってでも火災保険や地震保険，自動車の任意保険などに入るのは，災害に会ったり事故を起こしたりして大きな負担を背負うリスクがあるからであり，株式投資においていくつかの企業の株に分散投資するのもやはりリスクに対応するためである。また犯罪に対する刑罰を重くするのは，罪を犯して逮捕されたときのリスクを高めることによって（合理的判断にもとづく）犯罪を犯す誘因（インセンティブ）を小さくしようとするものであると考えることができる[*1]。

■保険の例　利益や損失など金額で表される結果についてのある人の効用関数が次のようであるとする。

$$u(x) = 300 + 140x - x^2$$

[*1] しかし同じわれわれが（筆者は買わないが）宝くじを買ったり，馬券を買うのはなぜであろうか（競馬はスポーツでもあるが)。これについては，危険回避的な人も生活に響かない程度のちょっとしたリスクに対しては正の効用を感じると考えるべきであろう。中にはギャンブルや株式投資にはまって身を持ち崩す人もいる。そのような人は危険愛好的になっていると考えられるが，危険愛好的というのは人間として正常ではなく病的な状態であると思われる。詳しくは心理学が対象とすべき問題である。

x は金額を表す。地震保険に入るかどうかを考える。地震が起きないときの経済的な利益を $x=30$（たとえば 100 万円を 1 単位とすると 3000 万円），地震が起きたときは $x=0$ であるとする（地震の損害は 30 である）。この地震が起きたときにその損害を完全に埋め合わせてくれる保険があるとしていくらまでなら保険料を支払ってもよいだろうか。ある期間に地震が起きる確率は $\frac{1}{10}$ であるとする（保険料もその期間の保険料である）。期待効用は次のように計算される。

$$E(u)=3600\times\frac{9}{10}+300\times\frac{1}{10}=3270$$

保険料を払えば地震が起きても損害を被らないので不確実性はなくこの人の効用は保険料を y とすれば

$$u(30-y)=300+140(30-y)-(30-y)^2=3600-80y-y^2$$

と表される。$3600-80y-y^2=3270$ より $y^2+80y-330=0$ が得られ

$$y=-40+\sqrt{1930}\approx 3.9$$

が求まる。地震による損害そのものの期待値は -3 であるから危険中立的ならば 3 の保険料しか払わないはずであるが危険回避的な行動により 3.9 までの保険料を支払う可能性がある。

■危険回避度一定の効用関数について

(1). 絶対的危険回避度一定の効用関数

X 万円の資産を持つ人がその一部 Y 万円をリスクのある資産に投資する。投資は確率 p で $2Y$ になって返って来るが確率 $1-p$ で 1 円も返って来ない。したがって資産は確率 $p(>\frac{1}{2})$ で $X+Y$ に，確率 $1-p$ で $X-Y$ になる。資産を x として効用関数を

$$u=-e^{-\rho x}$$

とする。$\rho(>0)$ は定数で絶対的危険回避度を表す，すなわち $-\frac{u''}{u'}=\rho$ である。e は自然対数の底であり，この効用関数は指数関数である。期待効用は

$$E=-pe^{-\rho(X+Y)}-(1-p)e^{-\rho(X-Y)}$$

と表される。これを Y で微分してゼロとおくと

$$\frac{dE}{dY}=p\rho e^{-\rho(X+Y)}-(1-p)\rho e^{-\rho(X-Y)}=0$$

となる。これを整理して $pe^{-\rho Y}-(1-p)e^{\rho Y}=0$ より $e^{2\rho Y}=\frac{p}{1-p}$ となり，さらに

$$2\rho Y=\ln\frac{p}{1-p}$$

から次の式が得られる。

$$Y = \frac{1}{2\rho}\ln\frac{p}{1-p}$$

$p > \frac{1}{2}$ であるから $Y > 0$ である。ρ が大きいほど Y は小さくなり，Y の値は X の大きさに依存しない。

(2). 相対的危険回避度一定の効用関数

まったく同じ問題を考える。効用関数を

$$u = \frac{1}{1-\rho}x^{1-\rho}$$

とする。$\rho(>0)$ は定数で相対的危険回避度を表す。すなわち $-\frac{xu''}{u'} = \rho$ である。期待効用は

$$E = \frac{p}{1-\rho}(X+Y)^{1-\rho} + \frac{1-p}{1-\rho}(X-Y)^{1-\rho}$$

と表される。これを Y で微分してゼロとおくと

$$\frac{dE}{dY} = p(X+Y)^{-\rho} - (1-p)(X-Y)^{-\rho} = 0$$

となる。これより $(X+Y)^{\rho} = \frac{p}{1-p}(X-Y)^{\rho}$ となり

$$X + Y = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(X-Y)$$

を得る。両辺を X で割ると

$$1 + \frac{Y}{X} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(1 - \frac{Y}{X})$$

となるから

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}} - 1}{1 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

が得られる。$\rho > 0$ で $p > \frac{1}{2}(\frac{p}{1-p} > 1)$ であるから $0 < \frac{Y}{X} < 1$ である。ρ が大きいほど $\frac{Y}{X}$ は小さくなり，その値は X の大きさに依存しない。

■アレのパラドックス　ノーベル賞受賞者アレによる期待効用理論に対する反例。期待効用理論はたいへん便利であるが実際の人間の行動と合わない面もある。次のようなくじを考える。

(1). 1 回目

オプション A：確実に 1000 円がもらえる。

オプション B：10% の確率で 2500 円がもらえて，89% で 1000 円，そして 1% は賞金なし。

(2). 2 回目

オプション A：11% の確率で 1000 円がもらえて，89% は賞金なし。

オプション B：10% で 2500 円もらえて，90% は賞金なし。

それぞれのくじでどちらのオプションを選択するかをアンケートしてみるとほとんどの人は 1 回目は A を，2 回目は B を選ぶ。しかし，期待効用理論に基づいて 1000 円，2500 円の効用を u_1，u_2 とすると（0 の効用は 0）1 回目は

$$u_1 > 0.1u_2 + 0.89u_1$$

より

$$0.11u_1 > 0.1u_2$$

を意味するのに対して，2 回目は

$$0.11u_1 < 0.1u_2$$

を意味するので矛盾する。1 回目は 10% で 2500 円もらえるということより 1% で何もなしという方を重視するから A を選び，2 回目は 1000 円と 2500 円の確率の差がわずか（とは言え 1 回目の B で何も得られない確率と同じであるが）なので 2500 円もらえる可能性のある B を選ぶと考えられる。このような矛盾点もあるが期待効用理論は非常に扱いやすいのでゲーム理論を含め経済学で広く用いられている。一方で心理面も考慮に入れて人間の経済行動を研究する行動経済学も発展してきている。

1.2　情報の非対称性の問題 - 中古車の売買，保険

詳しくは次の章で説明するが，市場経済を分析する際に通常は財の売り手と買い手は十分に情報を持っている，あるいは情報を手に入れるのに費用はかからないものと仮定する。しかし現実の経済においてはそうではないかもしれない。ここでは売り手と買い手が異なる情報を持っているときに市場がうまく機能しなくなる可能性があるという問題について簡単に触れてみたい。

中古車を持っていて売りたいと思っている人（売り手）が何人か，買いたいと思っている人（買い手）が何人かいるとする。売り手には 2 種類ありそれらを A，B とする。A の車は品質のよいものでこれを 200 万円で売りたいと思っている。一方 B の車は品質がよくなく 100 万円で売りたいと思っているとする。一方すべての買い手はよい車ならば 240 万円，よくない車ならば 120 万で買う用意があるものとする。車の品質が買い手にわかっ

ているのならば何の問題もない。よい車は 200 万～240 万円，よくない車は 100 万円～120 万円で売れるであろう。しかし，買い手はそれぞれの車の品質がわからず推測するしかないものとする。これが情報の非対称性である（お互いが持っている情報が異なる)。もしある車が等しい確率（つまり $\frac{1}{2}$ の確率）でよい車，またはよくない車であるとすれば，買い手は（危険中立的であれば）

$$\frac{1}{2} \times 120 \text{ 万円} + \frac{1}{2} \times 240 \text{ 万円} = 180 \text{ 万円}$$

支払ってもよいと思うであろう。危険回避的な行動を考えれば 120 万円以上ではあるが 180 万円より小さい値になる。売り手の方はどうであろうか？ よい車を持っている人は 200 万円以上でなければ売らないのでよくない車だけが売りに出ることになる。しかし買い手もそのことがわかるであろうから，180 万円ではなく 120 万円以下でなければ買わない。結局よくない車は取り引きされるがよい車の取引は行われないことになるのである。

上の不確実性を扱ったところで紹介した保険の市場においても，情報の非対称性がもたらす問題がある。けがをしたときにもらえる傷害保険を考えてみる。注意深い人と不注意な人がいて本人は自分がどちらであるかを知っているが，保険会社にはわからないものとする。保険会社が平均的なけがの確率にもとづいて保険料を決めるとすると，不注意な人は自分がけがをしやすいと思っているので割安な保険料となるからその保険に入ろうとする。一方注意深い人は，自分はけがをしにくいと思っているであろうから割高な保険料になってしまうのでその保険には加入しようとしないかもしれない。結果として保険会社にとっては望ましくないけがをしやすい不注意な人が多く加入し，本来なら入って欲しい注意深い人はあまり入ってくれないということになって，そのままの保険料では赤字になる可能性が出てくる。このような現象は**逆選択 (adverse selection)** と言われる。より良いものが選択されて残るのではなく，良いものがいなくなって悪いものが残ってしまうという意味である。逆淘汰とも言う。逆選択がもたらす影響を小さくするためには保険会社がより綿密に加入者を調べることが必要になると考えられるが，以下で述べるスクリーニングは非対称情報のもとでこれに対応する 1 つの方法である。

もう 1 つ保険に伴う問題がある。自転車の盗難保険を考えてみよう。保険に入ると盗まれても買い換えるお金がもらえるとなると保険に入っていない，あるいは保険がない場合と比べて人々は盗難に対してより不注意になってしまうかもしれない。保険に入った人々がどの程度の注意を払っているかを保険会社が調べることは難しいのでこれも情報が非対称となる問題の例である。保険を提供する結果としてより盗難が起きやすくなれば保険会社はそのことも考慮して保険料などを決めなければならず，場合によっては採算がとれなくなって保険が提供されなくなる可能性もある。これに対処する方法としては，盗難にあった自転車を買い換える費用の全額を保険でカバーせずに半額や 3 分の 2 程度の額にしてある程度本人に負担させる方法や，自動車の任意保険にあるように一度盗難にあった（自動車の場合は事故を起こした）人が次に保険に入るときの保険料を高くすることなど

が考えられるであろう。このように保険に加入することが人々の行動に悪い方に影響するというような問題は**モラル・ハザード (moral hazard)** と呼ばれる。

■逆選択に対する対応 - スクリーニング　前節の保険の例を使って逆選択に対応する方法を考えてみよう。タイプ 1，タイプ 2 の人々がいて，ある事故を起こす可能性がある。事故が起きないときの経済的利益は 30，事故が起きたときの利益は 0 である（事故による損害は 30）とし，各タイプが事故を起こす確率と効用関数が次のようであるとする。

(1). タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1(x) = 300 + 140x - x^2$
(2). タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{5}$，効用関数は $u_2(x) = 600 + 160x - 2x^2$

（保険なしに）事故が起きたときは $x = 0$，起きないときは $x = 30$ である。この事故に関する保険を販売する保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいることとそれぞれが事故を起こす確率，さらに効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからないので区別して保険加入を認めたり断ったりはできない。タイプ 1 の人々が保険に入らないときの期待効用は上の例で計算したように 3270 であり，一方タイプ 2 の人々の期待効用は

$$3600 \times \frac{4}{5} + 600 \times \frac{1}{5} = 3000$$

である。損害がすべて保障されるような保険があるとして効用が 3000 になる保険料を y とすると

$$600 + 160(30 - y) - 2(30 - y)^2 = 3600 - 40y - 2y^2 = 3000$$

より $y = 10$ となるからタイプ 2 の人々は 10 までの保険料を支払うことが可能である。保険会社が 1 種類の商品だけを用意し，損害を全額保障するとするとタイプ 1 の人々は上で見たように 3.9 までの保険料しか払わない。その保険料で保険を販売するとタイプ 2 の人々も購入する。タイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとすると $\frac{3}{20}$ の確率で事故が起こるから損害額の期待値は 4.5 となり 3.9 の保険料では採算がとれない。採算がとれるような保険料にするとタイプ 1 の人が買ってくれない。これが逆選択であった。全額保障しないとしても 1 種類の保険しか販売しないならば同じことが言える。そこで保険会社が次に示す 2 つの商品を用意すると考えてみよう。

(1). 保険 1：損害保障額は 20 で保険料は 5。したがって事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-15，起きなかったときは -5。
(2). 保険 2：損害保障額は 8 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-23，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

(1). タイプ 1：保険 1 から得られる期待効用は

$$3175 \times \frac{9}{10} + 2175 \times \frac{1}{10} = 3075$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$3519 \times \frac{9}{10} + 1231 \times \frac{1}{10} \approx 3290 > 3270$$

であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。

(2). タイプ 2：保険 1 から得られる期待効用は

$$3350 \times \frac{4}{5} + 2550 \times \frac{1}{5} = 3190 > 3000$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$3558 \times \frac{4}{5} + 1622 \times \frac{1}{5} \approx 3171$$

であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

以上のような保険を販売すれば保険会社が個々人のタイプを見抜けなくても本人の行動によってそのタイプが明らかになるように仕向けることができる。このように情報が非対称な状況において情報を持っていない側（この例では保険会社）が保険商品などの仕組みを工夫してその情報が間接的に表されるようにする行動をスクリーニング (screening) と呼ぶ[*2]。この保険ではそれぞれのタイプの人々が事故を起こす確率を考えると保険会社の採算に問題はない。この例ではタイプ 1 とタイプ 2 の人々が異なる効用関数を持っていると仮定した。つまりタイプ 2 の方がリスクが大きく，かつより危険回避的であると仮定していた。しかし両タイプが同じ効用関数を持っていてもリスクが異なればスクリーニングが可能となる場合もある。演習問題 2 を参照されたい。

情報の非対称性に関する重要な問題として「シグナリング」があるが，これはゲーム理論の所で解説する。シグナリングはスクリーニングとは逆に情報を持っている側が間接的にその情報を明らかにするような行動をとることを意味している。

1.3　危険回避的，危険中立的，危険愛好的な効用関数について

不確実性を含む問題と通常の消費問題との違い　不確実性を含まない通常の消費の場合，財の種類（余暇も含めて）が 1 種類であれば持っている予算をすべて使ってその財を買うしかない。したがって少なくとも 2 つ以上の財がなければ消費の選択が問題にはならない。一方不確実性を含む場合は財の種類が 1 種類であっても「くじ」（不確実性を含む資産）の選択が意味のある問題になる。以下そのような設定で考える。

[*2] スクリーニング (screening) とはふるい分けをすることを意味する。

基数的効用と序数的効用 通常の消費の場合，無差別曲線（財の種類が 2 つの場合）が同じであれば効用関数の形が異なっていても消費者の行動は同じである[*3]。したがって効用関数全体に定数を加えたり，定数倍したりするだけではなく，2 乗したり 3 乗したり，指数関数にしたり対数をとったり，あるいはそれ以外の操作を行っても，効用の大きさの順序に変化がなければ消費者の行動は変わらず同一の効用関数と見なされる。しかし不確実性を含む問題の場合（「期待効用定理」のもとで）くじを構成するそれぞれの場合の効用の期待値をとってくじを比較するので，効用の値に定数を加えるのと，定数倍する以外の操作（2 乗，3 乗するなど）を行うとくじの選択が変わってきてしまうからそのようにして作った効用関数は異なる効用関数と見なさなければならない。期待効用定理を満たす効用関数がフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数であり，このタイプの効用関数については定数を加えることと定数倍する操作だけが許される。

危険回避的，危険中立的または危険愛好的な効用関数についてごく簡単な例を紹介する。あるリスクのある資産（危険資産）への投資を行って得られる収益を x とし，それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x = 100$，$x = 0$ であるとする。また他にリスクのない安全な資産があり，確実に $y = 50$ の収益が得られるものとする。すなわち平均の収益は等しい。投資家が次の 3 つの効用関数を持つ場合をそれぞれ考えてみよう。

(1). $u = x$（あるいは $a > 0$，b を定数として $u = ax + b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)] = \frac{100+0}{2} = 50$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用も $E[u(y)] = 50$ であるから，この投資家はどちらへの投資からも同じ期待効用を得る。このような投資家は危険中立的 (risk neutral) であると言われ，リスクを気にせず平均の収益だけで投資先を選ぶ。

(2). $u = x^2$（あるいは $u = ax^2 + b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)] = \frac{100^2+0^2}{2} = 5000$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用は $E[u(y)] = 50^2 = 2500$ であるから，この投資家は危険資産への投資の方を選ぶ。このような投資家は危険愛好的 (risk loving) であると言われ，平均の収益が等しければリスクが大きい方の投資先を選ぶ。正常な人間であれば危険愛好的にはならない。

(3). $u = \sqrt{x}$（あるいは $u = a\sqrt{x} + b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)] = \frac{\sqrt{100}+0}{2} = 5$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用は $E[u(y)] = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.1$ であるから，この投資家は安全資産への投資の方を選ぶ。このような投資家は危険回避的 (risk

[*3] 財の種類が 3 つ以上の場合は無差別曲線ではなく無差別曲面（4 次元以上の場合も曲面と呼ぶがイメージはできない）になるが基本的な論理は同じである。効用が一定となるような各財の消費量の組を表す点の集合が無差別曲面であり，適当な条件が成り立てば予算制約式のもとで効用を最大化する消費量の組が求まる。

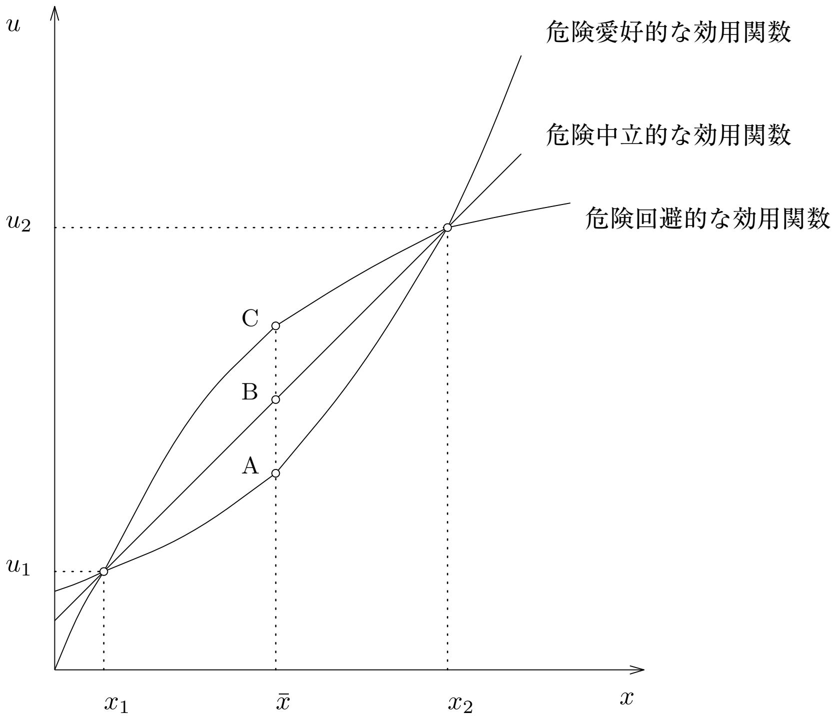


図 1.1　危険中立的・回避的・愛好的な効用関数のグラフ

averse) であると言われ，平均の収益が等しければリスクが小さい方の投資先を選ぶ。正常な人間であれば危険回避的である。

危険中立的な人もいないと考えられるが，負に相関するものも含め様々な投資先があって充分にリスクを分散させられるならば，危険回避的な人も危険中立的な人と同じような行動をとるかもしれない。

以上の効用関数を簡単に図解してみよう。図 1.1 のように，危険回避的な効用関数は下に凹 (concave)（上に凸），危険愛好的な効用関数は下に凸 (convex)，危険中立的な効用関数は線形 (linear) のグラフで描かれる。$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$ である。x_1 と x_2 において 3 つの効用関数の値が等しいと仮定すると，その中間の $\bar{x}$ に対する危険中立的な人の効用の値は点 B における $\bar{u}=\frac{u_1+u_2}{2}$ に等しいが，危険回避的な人の効用は（点 A）$\bar{u}$ より小さく，危険愛好的な人の効用（点 C）は $\bar{u}$ より大きい。確率 $\frac{1}{2}$ ずつで x_1，x_2 を手にするくじの期待効用はすべての人にとって $\bar{u}$ に等しいので，危険回避的な人はそのようなくじよりも確実に $\bar{x}$ が得られる場合を好み，逆に危険愛好的な人はくじの方を好む。また危険中立的な人にとってはどちらも等しい効用を与える（無差別）。

■保険の例 2　x を所得として 3 人の人の効用関数が次のようであるとする。

$$u_1 = 20x - x^2,\ u_2 = 20x,\ u_3 = 20x + x^2$$

確率的に起きる事故によって -4 の損害を被る可能性に備えて保険に加入する。事故が起きたときは $x = 0$，起きないときは $x = 4$ であり，事故が起きる確率は $\frac{1}{2}$ であるとする。保険によって損害は全額が保障される。すると保険料を y とすれば，保険に加入したときには事故が起きても起きなくても $x = 4 - y$ である。このとき効用関数 u_1 の人は約 2.25 までの保険料を払う。

$$20(4-y) - (4-y)^2 = 32$$

より

$$y^2 + 12y - 32 = 0$$

となり，$y = -6 + 2\sqrt{17} \approx 2.25$ を得る。

同様にして効用関数 u_2 の人は 2 までの，効用関数 u_3 の人は約 1.83 までの保険料を払う。

$$20(4-y) + (4-y)^2 = 48$$

より

$$y^2 - 28y + 48 = 0$$

となり，$y = 14 - 2\sqrt{37} \approx 1.83$ を得る。

効用関数 u_1 の人は危険回避的，効用関数 u_2 の人は危険中立的，効用関数 u_3 の人は危険愛好的である。

■危険回避度一定の効用関数について

(1). 絶対的危険回避度一定の効用関数

X 万円の資産を持つ人がその一部 Y 万円をリスクのある資産に投資する。投資は確率 p で $2Y$ になって返って来るが確率 $1-p$ で 1 円も返って来ない。したがって資産は確率 $p(> \frac{1}{2})$ で $X+Y$ に，確率 $1-p$ で $X-Y$ になる。資産を x として効用関数を

$$u = -e^{-\rho x}$$

とする。$\rho(>0)$ は定数で絶対的危険回避度を表す，すなわち $-\frac{u''}{u'} = \rho$ である。e は自然対数の底であり，この効用関数は指数関数である。期待効用は

$$E = -pe^{-\rho(X+Y)} - (1-p)e^{-\rho(X-Y)}$$

と表される。これを Y で微分してゼロとおくと

$$\frac{dE}{dY} = p\rho e^{-\rho(X+Y)} - (1-p)\rho e^{-\rho(X-Y)} = 0$$

となる。これを整理して $pe^{-\rho Y} - (1-p)e^{\rho Y} = 0$ より $e^{2\rho Y} = \frac{p}{1-p}$ となり，さらに

$$2\rho Y = \ln\frac{p}{1-p}$$

から次の式が得られる。

$$Y = \frac{1}{2\rho}\ln\frac{p}{1-p}$$

$p > \frac{1}{2}$ であるから $Y > 0$ である。ρ が大きいほど Y は小さくなり，Y の値は X の大きさに依存しない。

(2). 相対的危険回避度一定の効用関数

まったく同じ問題を考える。効用関数を

$$u = \frac{1}{1-\rho}x^{1-\rho}$$

とする。$\rho(>0)$ は定数で相対的危険回避度を表す。すなわち $-\frac{xu''}{u'} = \rho$ である。期待効用は

$$E = \frac{p}{1-\rho}(X+Y)^{1-\rho} + \frac{1-p}{1-\rho}(X-Y)^{1-\rho}$$

と表される。これを Y で微分してゼロとおくと

$$\frac{dE}{dY} = p(X+Y)^{-\rho} - (1-p)(X-Y)^{-\rho} = 0$$

となる。これより $(X+Y)^{\rho} = \frac{p}{1-p}(X-Y)^{\rho}$ となり

$$X+Y = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(X-Y)$$

を得る。両辺を X で割ると

$$1+\frac{Y}{X} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(1-\frac{Y}{X})$$

となるから

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}} - 1}{1+\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

が得られる。$\rho > 0$ で $p > \frac{1}{2}(\frac{p}{1-p} > 1)$ であるから $0 < \frac{Y}{X} < 1$ である。ρ が大きいほど $\frac{Y}{X}$ は小さくなり，その値は X の大きさに依存しない。

1.4 ポートフォリオ分離定理

1000 万円の資金を企業 A の株式に投資して得られる収益が（過去のデータや現在の経営方針，経済情勢などをもとにした予測において）確率 $\frac{1}{2}$ で 200 万円，確率 $\frac{1}{2}$ で 0 であるとする。平均の収益は

$$\mu_A = \frac{200+0}{2} = 100$$

標準偏差は

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{100^2 + (-100)^2}{2}} = \sqrt{10000} = 100$$

となる。また企業 B の株式に投資して得られる収益が確率 $\frac{1}{2}$ で 60 万円，確率 $\frac{1}{2}$ で 40 万円とすると平均の収益は

$$\mu_B = \frac{60+40}{2} = 50$$

標準偏差は

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{10^2 + (-10)^2}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

となる。企業 A の方が平均の収益は大きいが標準偏差で表されるリスクも大きい。とりあえず A と B の収益に相関はないものとする。この 2 つの企業の株に 500 万円ずつ投資すると起こりうる結果は 4 つある。それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で収益が 130 万円，120 万円，30 万円，20 万円となるから平均は

$$\mu = \frac{130+120+30+20}{4} = 75$$

標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{\frac{55^2 + 45^2 + 45^2 + 55^2}{4}} = \sqrt{2525} \approx 50.2$$

となる。この計算は 2 つの企業の株式を 1 対 1 で組み合わせた場合であるが異なる比率で組み合わせることも考えられ，そのときは比率の大きい企業の収益の結果に近いものが得られる。相関がある場合には標準偏差が異なる。正の相関（一方が上がれば他方も上がる）があれば標準偏差は大きくなり，負の相関（一方が上がれば他方は下がる）があれば小さくなる。A，B 以外にもさまざまな企業があり，またそれらの株式を適当な比率で組み合わせたセット，さらにそれらセット同士を組み合わせたセットを考えると投資家はいろいろな収益の平均と標準偏差をもった証券の組（ポートフォリオ）を構成することができる。それらの中で一定の標準偏差のもとで最も高い平均の収益を得られる組み合わせ（あるいは一定の平均収益のもとで最も小さい標準偏差となる組み合わせ）が図の曲線 RR のように表されるものとする。

ここでリスクを伴う株式（などの危険資産）の他に確実に一定の収益が得られる安全資産（短期の国債など）があり，それに1000万円投資したときの収益は μ_0 であるとする。図の点Nがそれを表している。この資産の標準偏差は0である。

安全資産の収益 μ_0 は収益率（% で表されるもの）ではなく，ここでは1000万円投資したときの収益の額を表す。例として安全資産の収益を50万円，危険資産（のセットM）の平均収益を75万円，標準偏差を50万と仮定しよう。1000万円を安全資産とMに1:1の割合で（500万円ずつ）投資すると平均収益は62.5万円，標準偏差は25万（Mに対する投資規模が500万円になるので標準偏差も25万）である。安全資産とMに1:3の割合で（250万円と750万円）投資すると平均収益は68.75万円，標準偏差は37.5万である。一方安全資産の収益率と同じ利子率（この仮定では5%）で500万円借金をしてMに1500万円投資したとするとMの平均収益は112.5万円，標準偏差は75万（それぞれ1000万円のときの1.5倍）になるが，借金の利子を25万円返さなければならないので実際には平均収益は87.5万円である。1000万円借金をしてMに2000万円投資したとするとMの平均収益は150万円，標準偏差は100万（それぞれ1000万円のときの2倍）になるが，借金の利子を50万円返さなければならないので実際には平均収益は100万円である。直線NM（を延長したもの）に沿っては平均収益が1万円増えると標準偏差が2万大きくなる（傾きは $\frac{1}{2}$）。

投資家はポートフォリオの中で自分の効用を最大にするものを選ぶ。投資家の効用は平均の収益と標準偏差によって決まるものとする。リスク中立的な人は平均が高ければ標準偏差を気にしないが，一般に人間はリスク回避的であり平均が高くても標準偏差があまり大きいものは嫌う。その投資家の効用は無差別曲線で表されるが，ここで問題となるのは投資家が選ぶことのできるポートフォリオの制約条件である（消費者の予算制約のようなもの)。安全資産がなければRRがその制約となり無差別曲線とRRが接する点が投資家が選ぶポートフォリオとなるが，安全資産が存在する場合にはRRが制約にはならない。安全資産と株式（あるいは株式の適当なセット）を組み合わせると図のNMで表された平均の収益と標準偏差を持ったポートフォリオを作ることができる。安全資産を増やせばNに近く，危険資産（Mのポートフォリオ）を増やせばMに近い結果が得られる。1対1ならNMの中点になる。Mより右側は（安全資産の収益率と同じ利子率で）借金をしたときに可能となる状況を示しており。1000万円以上をMのポートフォリオに投資することを意味する。借金の利子率が安全資産の収益率より高ければMより右側の傾きは小さくなる[*4]

[*4] 正確に言えばMからしばらくRRをたどり，その後傾きが小さい直線になる。その直線とRRの接点が借金をする際の危険資産のポートフォリオである。これを M' としよう（図には書いていない)。このときは安全資産を買う場合，買わない場合，借金をする場合の3つの状況が生じる可能性があり，それぞれM，Mと M' の間のRR上の点，M' が示す危険資産

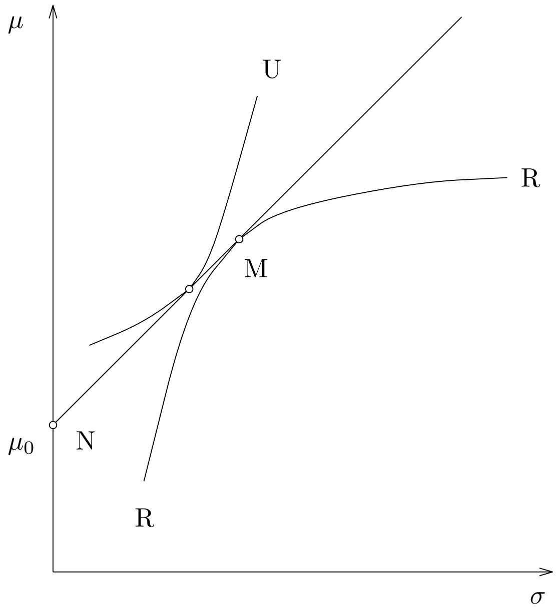


図 1.2　ポートフォリオ分離定理

投資家はこの NM 上で効用を最大にする点が示すポートフォリオを選ぶ。よりリスク回避的な人は N に近い点を，あまりリスク回避的でない人は M に近い点を選ぶ。U が無差別曲線の例である。人々は収益が大きいことを好み，標準偏差が大きいことを嫌うので無差別曲線は右上がりになる。このとき **M を構成する危険資産の組が，人々の選好（無差別曲線の形）に関係なく危険資産の平均収益と標準偏差，安全資産の収益だけで決まるというのがポートフォリオ分離定理が意味する事柄**である。安全資産がなければ無差別曲線と RR の接点が投資家が選ぶポートフォリオになるので，選好によって選ばれる危険資産の組は異なる。

■2 つの証券を組み合わせた場合の平均と標準偏差　証券 A，B の収益を x_A，x_B，平均，標準偏差をそれぞれ $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$，σ_A，σ_B とする。A，B を t 対 $1-t$ で組み合わせた証券の収益を y とすると

$$y = tx_A + (1-t)x_B$$

のポートフォリオが選ばれる。したがってポートフォリオ分離定理は厳密には成り立たない。

であり，平均は

$$\bar{y} = E(tx_A + (1-t)x_B) = tE(x_A) + (1-t)E(x_B) = t\bar{x}_A + (1-t)\bar{x}_B$$

となる。E は期待値（平均値）を表す記号である。分散（標準偏差の 2 乗）は

$$\begin{aligned}
\sigma(y)^2 &= E[(tx_A + (1-t)x_B - t\bar{x}_A - (1-t)\bar{x}_B)^2] \\
&= E[t^2(x_A - \bar{x}_A)^2 + (1-t)^2(x_B - \bar{x}_B)^2 + 2t(1-t)(x_A - \bar{x}_A)(x_B - \bar{x}_B)] \\
&= t^2E[(x_A - \bar{x}_A)^2] + (1-t)^2E[(x_B - \bar{x}_B)^2] + 2t(1-t)E[(x_A - \bar{x}_A)(x_B - \bar{x}_B)] \\
&= t^2\sigma(x_A)^2 + (1-t)^2\sigma(x_B)^2 + 2t(1-t)\sigma(x_A, x_B)
\end{aligned}$$

と計算される。$\sigma(x_A, x_B)$ は x_A と x_B の共分散である。相関係数 $r(-1 \leqq r \leqq 1)$ の定義

$$r = \frac{\sigma(x_A, x_B)}{\sigma(x_A)\sigma(x_B)}$$

により

$$\sigma(y)^2 = t^2\sigma(x_A)^2 + (1-t)^2\sigma(x_B)^2 + 2t(1-t)\sigma(x_A)\sigma(x_B)r$$

が得られる。x_A と x_B が独立 $(r = 0)$ のときは

$$\sigma(y) = \sqrt{t^2\sigma(x_A)^2 + (1-t)^2\sigma(x_B)^2}$$

となる。上の例で $\sigma(x_A) = 100,\ \sigma(x_B) = 10$ ならば

$$\sigma(y) = \sqrt{10000t^2 + 100(1-t)^2}$$

であり，$t = \frac{1}{2}$ とすると $\sigma(y) = \sqrt{2525} \approx 50.2$ となる。これは 10 と 100 の平均 55 よりも小さい。したがって A と B を組み合わせた証券の平均収益と標準偏差はそれぞれの平均収益と標準偏差を表す点を結ぶ直線よりも左（標準偏差が小さい方）に位置する。このとき共分散は $\sigma(x_A, x_B) = \frac{100\times10+100\times(-10)+0\times(-10)+0\times10}{4} = 0$ であるから相関係数も 0 である。

一方相関係数が 1 ならば（x_A と x_B が完全に相関する）

$$\sigma(y)^2 = [t\sigma(x_A) + (1-t)\sigma(x_B)]^2$$

より

$$\sigma(y) = t\sigma(x_A) + (1-t)\sigma(x_B)$$

となり，A と B を組み合わせた証券の平均収益と標準偏差はそれぞれの平均収益と標準偏差を表す点を結ぶ直線上に位置する。上の例で A の収益が 200 のときは B の収益は必

ず 60，A の収益が 0 のときは B の収益は必ず 40 であるとすると，A と B をそれぞれ $\frac{1}{2}$ の比で組み合わせた証券の収益は確率 $\frac{1}{2}$ で 130，20 であるから平均は 75，標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{\frac{55^2 + 55^2}{2}} = 55$$

となり，A と B の標準偏差の平均であることがわかる。これは A と B を $\frac{1}{2}$ ずつの比で組み合わせたからであり，異なる比であればそれに応じて（平均も標準偏差も）変わる。このとき共分散は $\sigma(x_A, x_B) = \frac{100\times10+100\times10}{2} = 1000$ であるから，相関係数は

$$r = \frac{\sigma(x_A, x_B)}{\sigma(x_A)\sigma(x_B)} = \frac{1000}{100\times10} = 1$$

となる。

逆に相関係数が -1 ならば（x_A と x_B が完全に逆相関する）[*5]

$$\sigma(y)^2 = [t\sigma(x_A) - (1-t)\sigma(x_B)]^2$$

より

$$\sigma(y) = t\sigma(x_A) - (1-t)\sigma(x_B)$$

となる。このとき A と B を $\sigma(x_B) : \sigma(x_A)$ の比で組み合わせればリスクがなくなり，A と B を組み合わせた証券の平均収益と標準偏差は縦軸上に位置する。上の例で A の収益が 200 のときは B の収益は必ず 40，A の収益が 0 のときは B の収益は必ず 60 であるとすると，A と B をそれぞれ $\frac{1}{2}$ の比で組み合わせた証券の収益は確率 $\frac{1}{2}$ で 120，30 であるから平均は 75，標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{\frac{45^2 + 45^2}{2}} = 45$$

となる。しかし A と B を 1 対 10 の比で組み合わせてみると収益は A が 200 で B が 40 のときも，A が 0 で B が 60 のときもともに $\frac{200+40\times10}{11} = \frac{0+60\times10}{11} = \frac{600}{11} \approx 54.5$ で一定となり，標準偏差は 0 になる。したがってこの比で 2 つの証券を組み合わせるとリスクを消すことができる。このとき共分散は $\sigma(x_A, x_B) = \frac{100\times(-10)+(-100)\times10}{2} = -1000$ であるから，相関係数は

$$r = \frac{\sigma(x_A, x_B)}{\sigma(x_A)\sigma(x_B)} = \frac{-1000}{100\times10} = -1$$

となる。

現実には完全に逆相関する証券を見つけることは難しいのでポートフォリオの平均収益と標準偏差を表す曲線は各証券の平均収益と標準偏差を表す点を通り左側に曲がった曲

[*5] 「完全に逆相関する」とは一方の価格が上がれば必ずもう一方の価格が下がるというような関係になっていることを意味する。

線になると考えられる（図の RR 線）。なお，一方（例えば B）が安全資産である場合は $\sigma(x_B)=0$ なので

$$\sigma(y)=\sqrt{t^2\sigma(x_A)^2}=t\sigma(x_A)$$

となるから，完全に相関する場合と同様に A と B を組み合わせた証券の平均収益と標準偏差はそれぞれの平均収益と標準偏差を表す点を結ぶ直線上に位置する（図の NM 線，安全資産の平均収益と標準偏差を表す点は縦軸上にある）。

1.5　企業金融の問題 - モディリアーニ・ミラーの定理

この小節では企業金融に関する基本的な結果であるモディリアーニ・ミラーの定理（「MM 定理」とも呼ばれる）を紹介したい[*6]。これは企業が株式発行によって資本を調達しても債券を発行して，つまり借金（銀行借入も含む）をして資本を調達してもその企業の市場価値に違いはないということを主張するものである。単純化して 2 期間のモデルを考える。2 つの企業 1，2 があり，それぞれ第 1 期に一定の資本を調達して投資を行い，次の期にある財を生産・販売して収益を得る。そして元金（債券，株式ともに），利子，配当などを清算する。各企業の（資本に関わる報酬を支払う前の）収益 X_1，X_2 は確率的な変数であって互いに等しい（確率分布もまったく同じ，常に $X_1=X_2$）ものとする。$X_i(i=1,2)$ の値は企業の営業状態などを示す確率変数 θ の値によって決まるが，X_i の値は 0 以上であると仮定する。企業 1 は資本をすべて株式発行によって調達し，企業 2 はその一部を債券の発行によって調達している。安全な資産（政府保証のある債券など）に投資して得られる利子率（に 1 を加えた値，これを利子率と呼ぶことにする。以下同じ）を r とし，企業 2 が発行する債券の利子率を $\bar{r}_2$ とする。まず企業 2 について考える。債券の元金と支払うべき利子を合わせた額が収益 X_2 を越えれば企業 2 は破綻する。そのとき X_2 は債券を購入した人たちに購入額に応じて分配され，株式購入者は何も得られない。発行する債券の額を B_2，株式の時価総額を E_2 とすると破綻するのは $\bar{r}_2B_2>X_2$ の場合である。債券 1 単位（1 円）当たりから得られる投資家の（元金を含めた）利益 $r_B^2(\theta)$ は次のように表される。

(1). $\bar{r}_2B_2\leqq X_2$ のとき：$r_B^2(\theta)=\bar{r}_2$
(2). $\bar{r}_2B_2>X_2$ のとき：$r_B^2(\theta)=\frac{X_2(\theta)}{B_2}$

一方株主の（株式時価総額 1 円当たりの，償還される株式の価値を含めた）利益は次のようである。

(1). $\bar{r}_2B_2\leqq X_2$ のとき：$r_E^2=\frac{X_2(\theta)-\bar{r}_2B_2}{E_2}$
(2). $\bar{r}_2B>X_2$ のとき：$r_E^2=0$

[*6] この話題は金融論で取り上げられるかもしれない。

θ によって X_2 は変るので r_B^2，r_E^2 も θ によって変る。企業の価値 V_2 は債券額と株式の時価総額の和に等しいので

$$V_2 = E_2 + B_2$$

となる。企業 1 は債券を発行していないので株主利益は次のようになる。

$$r_E^1 = \frac{X_1(\theta)}{E_1}$$

また企業 1 の価値は

$$V_1 = E_1$$

と表される。

まず破綻の可能性がないときに企業 1 と企業 2 の価値が等しいことを示す。投資家（個人）は何人もいる（投資家は債券を購入するか株式を購入する，銀行でもよい)。個人 j が保有する企業 i の株式の額を E_i^j，企業 2 の債券の保有額を B_2^j とする。j が持つ資産の合計を w^j とすると

$$w^j = E_1^j + E_2^j + B_2^j \tag{1.1}$$

である。$\alpha_i^j = \frac{E_i^j}{E_i}$ で，企業 i が発行した株式の内 j が持つ割合を表すことにすると (1.1) は次のように書き直される。

$$w^j = \alpha_1^j E_1 + \alpha_2^j E_2 + B_2^j = \alpha_1^j V_1 + \alpha_2^j (V_2 - B_2) + B_2^j$$

破綻の可能性がないので債券は安全資産でありその利子率は r に等しい。状態 θ における個人 j の利益を $Y^j(\theta)$ とすると

$$\begin{aligned} Y^j(\theta) =& \alpha_1^j X_1 + \alpha_2^j (X_2 - rB_2) + r\left[w^j - \alpha_1^j V_1 - \alpha_2^j (V_2 - B_2)\right] \\ =& \alpha_1^j X_1 + \alpha_2^j X_2 + r\left(w^j - \alpha_1^j V_1 - \alpha_2^j V_2\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

が得られる。各個人はこの $Y^j(\theta)$ を最大化するように α_1^j，α_2^j を決める[*7]。すべての θ について $X_1 = X_2$ であるから $V_1 > V_2$ ならば α_2^j を大きくして，α_1^j を小さくすれば投資家の利益が大きくなる（$V_1 < V_2$ の場合は逆である)。そのとき企業 1 の株式の需要は減少し，企業 2 の株式の需要は増大する。そのままでは市場は均衡しない。$V_1 = V_2$ となれば，α_1^j，α_2^j それぞれの値に関わらずその和 $\alpha_1^j + \alpha_2^j$ によって利益が決まる。したがって均衡においては両企業の価値は等しくなければならない。これが最も単純な形のモディリアーニ・ミラーの定理である。B_2 が変っても V_1，V_2 が不変ならばこの式は何も変らず α_1^j，α_2^j も変らない。そのとき E_2 は B_2 が変化した分だけ逆に変化するので各個人が保有する株式の額は変る。

[*7] 正確には $Y^j(\theta)$ による消費を含めた個人の効用を最大化するように α_1^j，α_2^j を決める。

企業 2 が破綻する可能性があってもこの結論が成り立つことを確認してみよう。X_2 が小さいときに破綻する可能性が大きくなるので X_2 を決める θ の値を考慮に入れなければならない。ある状態 θ が起きたときに 1 円を払う（それ以外の状態のときには 1 円も払わない）という証券があり，その価格が $p(\theta)$ であるとする[*8]。そうすると均衡において企業 2 の株式の価値は次のように表される。

$$E_2 = \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} (X_2(\theta) - \bar{r}_2 B_2) p(\theta) \tag{1.3}$$

この場合株式は，状態 θ が起きたときに $X_2(\theta) - \bar{r}_2 B_2$ 円支払うという証券を破綻しない場合の θ の数だけ組み合わせたものと見なされる。同様に債券は破綻しないときには（1 円当りで）$\bar{r}_2$ 円，破綻した場合は $\frac{X_2(\theta)}{B_2}$ 円支払うという証券を，それぞれの場合の θ の数だけ組み合わせたものである。その価値は次のように表される。

$$B_2 = \bar{r}_2 B_2 \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta) + B_2 \sum_{\{\theta | X_2(\theta) < \bar{r}_2 B_2\}} \frac{X_2(\theta)}{B_2} p(\theta)$$

この式から

$$\bar{r}_2 = \frac{1 - \sum_{\{\theta | X_2(\theta) < \bar{r}_2 B_2\}} \frac{X_2(\theta)}{B_2} p(\theta)}{\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta)} \tag{1.4}$$

が求まる。この利子率は B_2 がその収益に応じて正しく評価されたときの利子率であり，この債券が市場で売買されるときの均衡利子率を表すものと見なされる。$\bar{r}_2$ は B_2 によって変る可能性があるが θ に関わらず一定である。これを (1.3) に代入すると

$$\begin{aligned}
E_2 =& \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} \left(X_2(\theta) - \frac{1 - \sum_{\{\theta | X_2(\theta) < \bar{r}_2 B_2\}} \frac{X_2(\theta)}{B_2} p(\theta)}{\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta)} B_2 \right) p(\theta) \\
=& \frac{1}{\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta)} \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} \left[X_2(\theta) \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta) \right. \\
& \left. + \sum_{\{\theta | X_2(\theta) < \bar{r}_2 B_2\}} X_2(\theta) p(\theta) - B_2 \right] p(\theta) \\
=& \frac{\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta)}{\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} p(\theta)} \left[\sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} X_2(\theta) p(\theta) + \sum_{\{\theta | X_2(\theta) < \bar{r}_2 B_2\}} X_2(\theta) p(\theta) - B_2 \right] \\
=& \sum_{\theta} X_2(\theta) p(\theta) - B_2
\end{aligned}$$

[*8] θ はさまざまな値をとる可能性があるが，そのそれぞれについて証券が存在するものとする。θ が 10 通りあってそれぞれ $p(\theta) = \frac{1}{10}$ ならば全体として 1 円が 1 円となる。

となる。$\sum_\theta$ は θ の全体にわたって合計することを意味する。したがって

$$V_2 = E_2 + B_2 = \sum_\theta X_2(\theta)p(\theta)$$

が得られる。企業 1 については次の式が得られる（企業 1 は債券を発行しないのでいつも $X_1(\theta)$ 円の利益を支払う）。

$$V_1 = E_1 = \sum_\theta X_1(\theta)p(\theta) = V_2 \text{（}X_1(\theta) = X_2(\theta) \text{ より）}$$

よって破綻の可能性があるときにも, 上で仮定したような証券があり，$\bar{r}_2$ が (1.4) のように決まれば，企業 1 と企業 2 の価値は等しく，資本調達方法の違いが企業価値に影響することはない。確実な債券の利子率を r とすると，これはすべての θ において r 円支払うという証券を組み合わせたものと考えられ，その価格の和は 1 である（1 円が r 円になる）。したがって

$$r\sum_\theta p(\theta) = 1$$

を得る。これと (1.4) の $\bar{r}_2$ とを比べると

$$\bar{r}_2 - r = \frac{\sum_{\{\theta|X_2(\theta)<\bar{r}_2B_2\}}\left(r - \frac{X_2(\theta)}{B_2}\right)p(\theta)}{\sum_{\{\theta|X_2(\theta)\geqq\bar{r}_2B_2\}}p(\theta)}$$

が得られる。

以上の議論においては債券と株式に対する税制（法人税）の問題などは無視していたし，株式購入者が企業への支配力を高めるために株式を買うというようなことも考慮していなかった。債券に支払う利子は企業の費用として認められて法人税課税の対象とならないのに対し，株式配当は課税された後の利益から支払われるというような場合には債券で資本を調達する企業の方が価値が大きくなることが示される。破綻のない場合を考えてみよう。同じように 2 つの企業 1，2 があり企業 1 は資本のすべてを株式で調達し（$B_1 = 0$)，2 は一部を債券で調達する（$B_2 > 0$)。法人税は X_1 および $X_2 - rB_2$ に対して課される。法人税率を τ とすると (1.2) に表されている投資家の利益は次のようになる。

$$\begin{aligned} Y^j(\theta) =& (1-\tau)\alpha_1^j X_1 + (1-\tau)\alpha_2^j(X_2 - rB_2) + r\left[w^j - \alpha_1^j V_1 - \alpha_2^j(V_2 - B_2)\right] \\ =& (1-\tau)(\alpha_1^j X_1 + \alpha_2^j X_2) + rw^j - (1-\tau)r\alpha_2^j B_2 - r\left[\alpha_1^j V_1 + \alpha_2^j(V_2 - B_2)\right] \\ =& (1-\tau)(\alpha_1^j X_1 + \alpha_2^j X_2) + rw^j - r\alpha_2^j(V_2 - \tau B_2) - r\alpha_1^j V_1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$X_1 = X_2$ とすると，もし $V_1 = V_2$ ならば $B_2 > 0$ のとき α_2^j を大きくして α_1^j を小さくした方が投資家の利益は大きくなる。そのとき企業 2 の株式の需要は高まり，企業 1 の株式

の需要は減少する。均衡においては α_2^j，α_1^j を変えても（その和が一定ならば）利益が変らないことが求められるので

$$V_2 - \tau B_2 = V_1$$

すなわち

$$V_2 = V_1 + \tau B_2$$

が成り立たなければならない。B_2 が大きくなると V_2 がそのままならば企業 2 の株式への需要が高まり，その結果 V_2 も大きくなる。法人税があるときには株式よりも債券で資本を調達する企業（企業 2）の方が（収益は同じでも）企業価値が大きくなるのである。企業価値が大きくなるということは債券と株式を含めて企業 2 の方がより多くの資本を調達することができるということを意味する。逆に言えば一定の資本を調達するために投資家に保証しなければならない収益は企業 2 の方が低い。つまり企業 2 の方が資本を調達するために要するコストが低いということが言える[*9]。

破綻の可能性がある場合は (1.3) が

$$E_2 = \sum_{\{\theta | X_2(\theta) \geqq \bar{r}_2 B_2\}} (1-\tau)(X_2(\theta) - \bar{r}_2 B_2) p(\theta)$$

となり，同じ債券の利子率 $\bar{r}_2$（(1.4) に表されている）のもとで

$$E_2 = (1-\tau)\left[\sum_{\theta} X_2(\theta)p(\theta) - B_2\right]$$

より

$$V_2 = (1-\tau)\sum_{\theta} X_2(\theta)p(\theta) + \tau B_2$$

が得られる。一方

$$V_1 = (1-\tau)\sum_{\theta} X_1(\theta)p(\theta)$$

であるから $X_1 = X_2$ より

$$V_2 = V_1 + \tau B_2$$

となって，破綻がない場合と同じ結果を得る。

[*9] (1.5) で $V_1 = V_2$ とすると，$B_2 > 0$ のときに α_1^j と α_2^j がともに正であるためには X_1 が X_2 より大きくなければならない。

1.6　情報の非対称性と金融 - 信用割当

1.6.1　信用割当 1 - 2 種類の企業

情報の非対称性が企業や銀行の行動にもたらす問題として信用割当の議論を紹介する[*10]。各々投資プロジェクトを持つ 2 種類の企業家が何人かずついて，それぞれタイプ 1 とタイプ 2 とする。その企業家のプロジェクトが生み出す収益（投資によって得られる収入から投資そのものに関わる費用以外の費用を引いた値）を R で表す。投資の成功度に応じて R の値が変る。R は確率的に決まる値（確率変数）であるが計算を簡単にするために以下のように仮定する。

$$\text{タイプ 1 の企業家の収益 } (R) \text{ は確率}\frac{1}{2}\text{で } 0,\text{ 確率}\frac{1}{2}\text{で } 20 \text{ (2000 万円程度と考えればよい)}$$

$$\text{タイプ 2 の企業家の収益 } (R) \text{ は確率}\frac{1}{2}\text{で } 10,\text{ 確率}\frac{1}{4}\text{で } 0,\text{ 確率}\frac{1}{4}\text{で } 20$$

両タイプの企業家とも平均の収益は 10 で共通であるが，タイプ 1 の企業家の方がリスクが大きい。投資に当たって企業家は銀行から r の利子率で B（すべての企業家に共通）の借り入れをし，また C（これも共通）の担保を用意しなければならない。利子率は銀行が決める。各企業家のリスクは企業家本人は知っているが銀行にはわからない。正確に言えば銀行は全体としてどのようなリスクの企業家がどのくらいいるかは知っているが，個々の企業家がどうであるかはわからない。したがって企業によって異なる利子率をつけるということはできない。ここに情報の非対称性が存在する。借り入れをした企業家の収益 R が $R-(1+r)B \geqq 0$ を満たさなくても $R-(1+r)B+C \geqq 0$ を満たせば担保を含めて借り入れの返済を行うことができる。しかし $R-(1+r)B+C<0$ となる場合には債務超過に陥り全額を返済できない。すなわち企業家は破綻（あるいはその企業が倒産）する。そのときは C の担保を取り上げられるだけでそれ以上の返済を求められることはない。$0<(1+r)B-C<10$ とすると R に関する仮定から

$$\text{タイプ 1 の企業家が破綻する確率は}\frac{1}{2},\text{ タイプ 2 の企業家が破綻する確率は}\frac{1}{4}$$

であることがわかる。同様に

$$\text{タイプ 1 の企業家が破綻しない確率は}\frac{1}{2},\text{ タイプ 2 の企業家が破綻しない確率は}\frac{3}{4}$$

である。破綻しない場合のタイプ 1 の企業家の利益（投資の収益から投資に関わる費用，借り入れの返済や利子を引いた値）は $20-(1+r)B$ であり，タイプ 2 の企業家の利益は $20-(1+r)B$ または $10-(1+r)B$ である（それぞれ確率は $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{2}$）。破綻する場合の利

[*10] この話題もマクロ経済学や金融論で取り上げられるかもしれない。

益は常に $-C$ である。以上のことからタイプ 1，タイプ 2 の企業家の平均の利益（期待利益）をそれぞれ π_1，π_2 とすると

$$\pi_1 = \frac{20-(1+r)B-C}{2} \tag{1.6}$$

$$\pi_2 = \frac{20-(1+r)B+2[10-(1+r)B]-C}{4} = \frac{40-3(1+r)B-C}{4} \tag{1.7}$$

が得られる。期待利益が負でなければ企業家は借り入れを行おうとする（申し込む）。(1.6) からタイプ 1 の企業家が借り入れを申し込むのは

$$(1+r)B \leqq 20-C \tag{1.8}$$

が成り立つときであり，(1.7) からタイプ 2 の企業家が借り入れを申し込むのは

$$(1+r)B \leqq \frac{40-C}{3} \tag{1.9}$$

のときである。$C<10$ ならば $20-C>\frac{40-C}{3}$ であるから (1.9) よりも (1.8) の方が成り立ちやすい。すなわちタイプ 2 の企業家よりもタイプ 1 の企業家の方が借り入れを申し込む条件が満たされやすく，利子率が高くなると (1.8) よりも (1.9) の方が先に成り立たなくなる。これは次のことを意味する。

(1). 利子率が高くなるとリスクが小さい企業家が借り入れを申し込まなくなり，借り入れを申し込む企業家はリスクが大きい企業家ばかりになる。

(2). 銀行からの借り入れに対する需要は借り入れを申し込む企業家の数に 1 人当たりの借入額 B をかけた値であるから，利子率の上昇によって借り入れに対する需要は減少する。すなわち利子率を借り入れの価格と見れば右下がりの需要曲線が得られる。（ただし，企業家のタイプが 2 種類しかなければ階段状の需要曲線になる。様々な企業家が存在すれば通常の右下がり需要曲線が得られるであろう。また投資を行うためには資金の借り入れ以外に企業家自身が仕事に打ち込むなどの人的資源も必要となるので，期待利益が下がればその人的資源を他に回すという形で投資が減り資金需要も減るかもしれない。その場合は 2 種類の企業家しかいなくても右下がりの需要曲線が得られるが，ここではそのような問題は考えない。）

また $\frac{d\pi_1}{dr}<0$，$\frac{d\pi_2}{dr}<0$ であることもわかる。(1.6)，(1.7) に $-(1+r)B$ の形で r が含まれているだけなので，r が大きくなれば π_1，π_2 は小さくなる。つまり各タイプの企業家にとって利子率の上昇は期待利益を引き下げる。

次に銀行の期待利益を考えてみよう。各企業家が破綻しないときの銀行の利益は $(1+r)B$ であり（ここで言う利益には元金も含む），破綻するときの利益は $R+C$（担保

価値 C と企業家の収益 R の和）であるが，両タイプの企業家とも破綻するのは $R=0$ の場合であるから破綻するときの利益は C に等しい。以上によってタイプ 1，タイプ 2 の企業家に対する融資から得られる銀行の期待利益をそれぞれ π_1^b，π_2^b とすると次の式が得られる。

$$\pi_1^b = \frac{(1+r)B+C}{2} = 10 - \pi_1 \tag{1.10}$$

$$\pi_2^b = \frac{3(1+r)B+C}{4} = 10 - \pi_2 \tag{1.11}$$

$C<(1+r)B$ ならば $\pi_1^b<\pi_2^b$ である。すなわち企業家のリスクが大きい方がその企業家に対する銀行の融資の期待利益は低い。これはリスクの大きい企業家ほど破綻する確率が高く，破綻したときには担保分だけしか回収できないからである。タイプ 1 の企業家とタイプ 2 の企業家の割合を $\lambda:1-\lambda$ とすると銀行の平均の利益 $\bar{\pi}^b$ は

$$\bar{\pi}^b = \lambda\pi_1^b + (1-\lambda)\pi_2^b$$

と表せる[*11]。また $\frac{d\pi_1^b}{dr}>0$，$\frac{d\pi_2^b}{dr}>0$ もわかる。つまり各企業家について利子率が上昇すれば銀行の期待利益は大きくなる。しかし上で見たように，利子率が上昇するとリスクが小さい企業家が融資を申し込まなくなり，リスクが大きい企業家ばかりが融資を申し込むようになる。そのために全体として銀行の平均利益が増えるとは言えないかもしれない。そこが信用割当の議論の核心である。これは保険に関する説明で言及した逆選択と同じ現象に他ならない。リスクの小さい企業家が融資を申し込まなくなる利子率を r^* とすると，r^* に至るまでは利子率の上昇によって銀行の平均利益は増えて行く。しかし利子率が r^* を少しでも超えると（r^* のときにはリスクの小さい企業家も借り入れを申し込むものと仮定する）リスクが小さい企業家が借り入れを申し込むのをやめることによって銀行の平均利益は（不連続的に）減少する（$\pi_1^b<\pi_2^b$ であるから）。その後利子率の上昇によって再び平均利益は増えて行く（リスクの大きい企業家が融資を申し込む限り）。銀行による資金の供給は平均利益が大きくなれば大きくなると考えられる。理由は以下のとおり。

> 銀行には企業家に資金を融資する他に国債を購入するなどの選択肢がある。国債の利子率を一定とすれば企業への融資から得られる平均利益が大きくなると国債購入よりも企業への融資の方が相対的に有利となって資金の供給が増える。逆に企業への融資から得られる平均利益が小さくなると国債購入よりも企業への融資の方が相対的に不利となって資金の供給が減る。

[*11] $\bar{\pi}^b$ は各企業家への融資から得られる期待利益について，さらに 2 種類の企業家の割合に応じて期待値を求めたものである。つまり期待利益の期待値であるが，これを平均の利益（あるいは平均利益）と呼ぶことにする。

したがって次の結論が得られる。

> 銀行による資金の供給はある利子率（上記の r^*）の所で最大となり，その前後では小さい。すなわち銀行の供給曲線は単純な右上がりではなく途中で折れ曲がる。また銀行は平均利益が下がるので r^* より高い利子率で資金を貸そうとはしない（r^* より高い利子率においてリスクの大きい企業家への融資から得られる期待利益が r^* における平均の利益を上回らないとすれば)。

最後の点が重要である。この r^* において企業家の需要も不連続的に減少する。

資金の需要，供給がわかったのだが，では市場の均衡はどうなるのであろうか？ r^* またはそれより低い利子率で企業家の需要曲線が銀行の供給曲線と交わるならばそこが均衡となる。しかし r^* より高い利子率で需要曲線と供給曲線とが交わっているときはその利子率では均衡が実現しないい。なぜならば銀行は r^* より高い利子率を課すとリスクの大きい企業家ばかりが融資を受けるようになり平均利益が低下することを知っているので r^* より高い利子率をつけようとはしないからである。そのとき均衡利子率は r^* となるが銀行の供給分の融資が行われるだけで企業家の需要はすべて満たされない。このように銀行から見て区別のできない企業家について（銀行は個別の企業家のリスクはわからない)，ある企業家には融資を行い，別の企業家には融資を行わないというような行動をとることを**信用割当 (credit rationing)** と言う。

図 1.3 にその様子の例が描かれている。D が需要曲線，（太い線で描かれている）S が供給曲線である。企業家が期待利益に応じて資金の需要を変えなければ需要曲線は階段状の水平な直線になる。銀行の資金供給は平均の利益によって変る（国債などとの選択で）と考えられるので傾きを持った曲線（図では直線であるが）になる。r^* が均衡利子率で，その利子率においては D が S より上にあるから超過需要のまま放置される。D と S が交わるのはもっと高い利子率の所であるが，銀行はそのような利子率をつけようとはしないのでその状況は均衡にはならない。

1.6.2　信用割当 2 - 2 種類のプロジェクト

前小節では 2 種類の企業家の場合について信用割当の問題を考えたが，ここでは同じタイプの企業家が 2 種類の投資プロジェクトを持っている場合を考える。この方がモデルが簡単である。同じタイプの企業家が何人かいて次の 2 つの投資プロジェクトがある。

$$\text{プロジェクト 1：確率}\frac{1}{4}\text{で成功し，その場合の収益は 20，確率}\frac{3}{4}\text{で失敗し収益は 0。}$$

$$\text{プロジェクト 2：確率}\frac{1}{2}\text{で成功し，その場合の収益は 14，確率}\frac{1}{2}\text{で失敗し収益は 0。}$$

平均の収益は異なる。プロジェクト 2 の方が平均の収益が大きく，プロジェクト 1 の方がリスクが大きい。うまく行けばプロジェクト 1 の方が儲かる。投資に当たって各企業は r

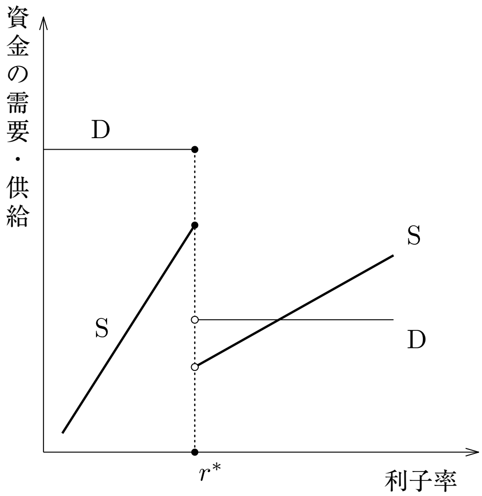


図 1.3 信用割当 1

の利子率で B の借り入れをしなければならない。担保はない。投資が失敗した場合は企業は破綻するが担保がないので負担はない。したがって常に融資を申し込むが 2 つのプロジェクトの内の 1 つしか実施できないものとする。もちろん企業家は自分がどちらのプロジェクトを選んだかがわかるが，銀行にはわからない。したがってプロジェクトごとに銀行が利子率を決めることはできない。プロジェクト 1，2 の期待利益を π_1，π_2 とすると

$$\pi_1 = \frac{20-(1+r)B}{4}$$

$$\pi_2 = \frac{14-(1+r)B}{2}$$

となる。どちらの方が期待利益が大きいかは利子率による。

$$\pi_1 - \pi_2 = \frac{(1+r)B-8}{4}$$

であるから

$$(1+r)B > 8 \tag{1.12}$$

が成り立つときにはタイプ 1 のプロジェクトの方が期待利益が大きく企業家はリスクの大きいプロジェクトを選ぶ。逆の場合にはリスクの小さいプロジェクト 2 を選ぶ。つまり利子率が高くなるとリスクの大きいプロジェクトが選ばれることになるのである。そうなるのはリスクの小さいプロジェクトの方が成功する確率が高い一方で，成功したときの収益が小さいから利子率の上昇による影響を大きく受けるからである。この現象は逆選択ではなくモラル・ハザードの一種である。ここでは前小節で指摘したように投資には人的資

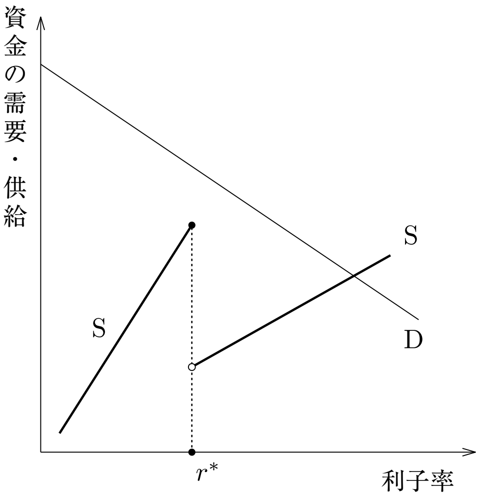


図 1.4　信用割当 2

源なども必要となるために期待利益が下がれば企業家の資金需要が減ると仮定する。したがって企業家がどのようなプロジェクトを選ぶにせよ資金の需要曲線は右下がりである。

次に銀行の利益を考える。(1.12) を等式で満たす（$(1+r)B=8$）利子率を r^* とする。企業家が破綻すると銀行はまったく資金を回収できない（企業の収益は 0 で担保もない）からリスクの小さいプロジェクトの方が当然期待利益が大きい。企業家がリスクの小さいプロジェクトを選んでいる限り利子率が高くなれば期待利益は増える。しかし利子率が r^* を超えると企業家が選ぶプロジェクトがリスクが大きいものに変るのでそこで不連続的に期待利益が下がる。その後再び利子率の上昇とともに期待利益が大きくなっていく。以上によって前小節と同様に折れ曲がる銀行の供給曲線が得られるとともに銀行は r^* より高い利子率をつけないということが言える。その r^* において企業家の資金需要が銀行の供給を上回っていれば信用割当が生じる。この場合の例が図 1.4 に描かれている。

■景気変動と信用割当　この小節のモデルを用いて景気の変動と信用割当の関係を考えてみよう。通常は景気が後退すれば企業の資金需要が減り，一方銀行の資金供給が増えて（国債の利子率が下がりなどすれば）利子率が下がると考えられている。しかし信用割当がある場合にはそうはならない可能性がある。景気が後退して投資プロジェクトの収益が減り次のようになったとする。

プロジェクト 1：確率$\dfrac{1}{4}$で成功し，その場合の収益は 17，確率$\dfrac{3}{4}$で失敗し収益は 0。

プロジェクト 2：確率$\dfrac{1}{2}$で成功し，その場合の収益は 13，確率$\dfrac{1}{2}$で失敗し収益は 0。

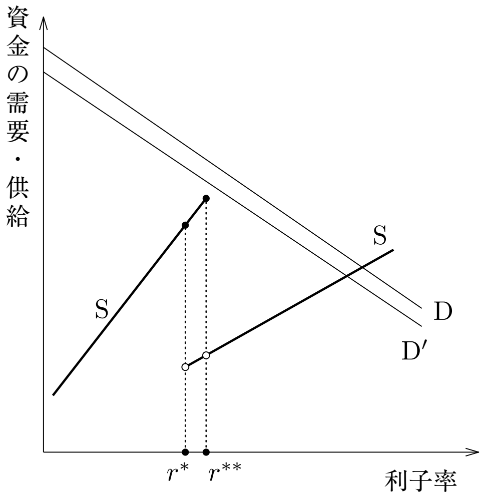


図 1.5　信用割当 - 景気変動の影響

このケースでもプロジェクト 2 の方が平均の収益は大きく，またリスクが大きいプロジェクト 1 の方が景気後退の影響を強く受けている。プロジェクト 1，2 の期待利益を π_1，π_2 とすると

$$\pi_1 = \frac{17-(1+r)B}{4}$$

$$\pi_2 = \frac{13-(1+r)B}{2}$$

が得られるが，両プロジェクトの期待利益が一致する利子率 r^* は

$$\frac{17-(1+r)B}{4} = \frac{13-(1+r)B}{2}$$

より

$$(1+r^*)B = 9 \tag{1.13}$$

を満たす。(1.12) と比べれば (1.13) から得られる r^* の方が大きい。そのとき信用割当が生じているならば景気の後退によって均衡利子率が上昇する。ただしそうなるとは限らない。

プロジェクト 1：確率$\dfrac{1}{4}$で成功し，その場合の収益は 18，確率$\dfrac{3}{4}$で失敗し収益は 0。

プロジェクト 2：確率$\dfrac{1}{2}$で成功し，その場合の収益は 12，確率$\dfrac{1}{2}$で失敗し収益は 0。

の場合（このケースでもプロジェクト 2 の方が平均の収益は大きいが，リスクが小さいプロジェクト 2 の方が景気後退の影響を強く受けている）は (1.13) が

$$(1+r^*)B = 6$$

と変るので信用割当が生じている場合の均衡利子率は下がる。

図 1.5 に景気後退で資金需要が減少したにも関わらず均衡利子率が上昇する例を描いてある。ただし（図が複雑になるので）ここでは銀行の資金供給は変らない（r^* の変化を除いて）ものと仮定している。r^{**} が景気後退後の均衡利子率である。D' は景気が後退した後の企業の資金需要を表す。

1.7　プリンシパル-エージェント理論の簡単な例

企業と労働者の関係を考える。労働者が努力したとき 80% の確率でよい結果が得られるが 20% の確率で悪い結果になる。努力しなければよい結果は得られない。企業には労働者が努力したかどうかはわからず結果によって判断するしかない。

(1). 企業が労働者に固定賃金 w を提示した場合の企業と労働者の利得は以下のようになる。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w$，労働者の利得は $w - 200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   $w - 200 < w$ であるから固定賃金がいくらであれ努力しないのが労働者にとって最適である。その前提で労働者が求人に応じる条件は $w \geqq 500$ である。したがって企業にとっては $w = 500$ を提示して $2000 - 500 = 1500$ の利得を得るのが最適である。

(2). 企業が固定賃金 w に加えてよい結果が得られた場合にボーナス b を支払うインセンティブ契約を提示したとする。このときの経営者と労働者の利得は以下のようになる。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w - b$，労働者の利得は $w + b - 200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   労働者が求人に応じて努力したときの労働者の期待利得 E_1 は

$$E_1 = 0.8 \times (w + b - 200) + 0.2 \times (w - 200) = w + 0.8b - 200$$

である。ただし，労働者に努力させるためにはこれが努力しなかったときの利得以上である必要がある（インセンティブ両立条件）。これは

$$w + 0.8b - 200 \geqq w$$

より

$$b \geqq 250$$

と表される。さらに努力することを前提とした場合，労働者が求人に応じるには上記の期待利得が外部の機会で得られる利得以上である必要がある（参加条件）。これは

$$w + 0.8b - 200 \geqq 500$$

より

$$b \geqq -1.25w + 875$$

と表現される。企業の期待利得 E_2 は

$$E_2 = 0.8 \times (5000 - w - b) + 0.2 \times (2000 - w) = 4400 - w - 0.8b$$

である。$b = -1.25w + 875$ をこれに代入すると

$$E_2 = 3700$$

となるから，企業は $b = -1.25w + 875$ かつ $b \geqq 250$ を満たすように w と b を決めれば期待利得 3700 を得ることができるのである。例えば $(w, b) = (0, 875)$ あるいは $(w, b) = (500, 250)$ と決めればよい。

どちらの契約でも労働者の利得は同じ（外部機会の利得に等しい）であるが企業の利得はインセンティブ契約の方が大きい。

以上の議論では企業も労働者も危険中立的であると仮定していた。企業の株主は様々な投資先を持つことによって危険（リスク）を分散させられるので危険中立的であるという仮定は非現実的ではないが，労働者は危険回避的であると考えるのが適当かもしれない。そうすると $b = -1.25w + 875$ を満たす報酬では満足しない。その場合は少し余分に賃金またはボーナスを支払う必要があり，企業は 3700 の利得を得ることはできない。

もし企業が労働者の努力を観察できるとすると結果ではなく努力したかどうかで報酬を決めることができる。そのときインセンティブ両立条件と参加条件はそれぞれ $b \geqq 200$, $b \geqq -w + 700$ となるから $(w, b) = (500, 200)$ や $(w, b) = (0, 700)$ などが企業の利得を最大にする賃金とボーナス（努力に対するボーナスなので労働者にとってリスクはない）であり，そのとき企業は 3700 の利得を得る。労働者の努力についての情報を企業が持っていればこの状態を実現できるが，努力したかどうかが直接には観察できず，不確実な結果で判断するしかないという情報の不完備性（非対称性）によって，労働者が危険回避的な場合には最適な状態が実現できなくなるのである。

1.8　不完備契約とホールドアップ問題

ある（例えば自動車・コンピュータなど）メーカーとそのメーカーが生産する製品のために部品を納める部品会社があり，その 2 社間の契約問題を考える。それぞれが人的資本に投資をした上で生産を行う。次のような 2 期間のプロセスで生産活動が行われる[12]。

(1). 第 1 期に部品会社は $e>0$ の投資（生産現場の従業員の教育・訓練など）を行い，その大きさは第 2 期目での部品生産の費用に影響する。メーカーは $h>0$ の投資を行い，その大きさは第 2 期目でのメーカーの販売利益（様々な費用を引いた後の値）に影響する（メーカーの投資としては営業マンの訓練などを考えればよい)。

(2). 第 2 期に部品会社は部品を生産してメーカーに納入し，メーカーはその部品を用いて製品を作り販売する。その結果得られる販売利益はすべてメーカーのものとなるわけではなく，その配分は第 2 期目における両社間の交渉によって決まる。

メーカーの販売利益を $v(h)$ (h の増加関数，$v'(h)>0$)，部品の生産費用を $c(e)$ (e の減少関数，$c'(e)<0$）で表す。$v'(h)$（$v(h)$ の微分）は h が大きくなると小さくなり，$c'(e)$ ($c(e)$ の微分）は e が大きくなると大きくなる（絶対値は小さくなる）とする（$v'(h)$ は h の減少関数，$c'(e)$ は e の増加関数)。いずれも h，e 増加の効果がそれぞれの増加に伴って小さくなるとの仮定である。話を簡単にするために部品の量は 1 単位であるとし，またこの製品の生産には何らかの資産が必要であると仮定する。その資産をメーカーが保有する場合，部品会社が保有する場合，共同保有する場合がある。それぞれのケースについて各企業がどのような投資を行うかを分析する。

1.8.1　ファーストベスト（最善）の解

まずメーカーと部品会社全体にとって最適な状態を考えよう。互いに協力したときの状態，あるいはメーカーが部品会社を合併したときの状態と見ることができる。両者合わせた利益の合計はメーカーの販売利益から部品の生産費用および各企業の投資にかかる費用を引いたものに等しいから，

$$v(h)-c(e)-h-e$$

と表される。これを最大化するように h, e を決めるためにそれぞれで微分すると ($v(h)-h$ と $-c(e)-e$ に分けて微分すればよい)

$$v'(h)=1,\ -c'(e)=1$$

[12] 以下の内容は，柳川範之『契約と組織の経済学』（東洋経済新報社）を参考にした。

が得られる。これらがファーストベストの条件である。両式から求まる h，e の値を h^*，e^* で表す。事前にメーカーが $c(e^*)+e^*$ の価格で必ず部品を購入するという契約を結んでおけばこの状態を達成することができる。これは次のようにして確認できる。実際の投資を e とすると部品会社の利益は

$$c(e^*)+e^*-c(e)-e$$

となるが，これを最大化するには $e=e^*$ とすればよい（そのとき部品会社の利益はゼロである)。一方メーカーの実際の投資を h とするとその利益は

$$v(h)-c(e)-h-e$$

であるが $e=e^*$ ならば（そうでなくても）$h=h^*$ となる。

しかしそのような契約は容易ではないかもしれない。ここのモデルは単純であるが現実にはいろいろな製品，部品がありそれぞれについて事前にどのような条件で買うかを決めることは困難であろう。十分に詳細な契約を完備な契約と言うが，そうでない契約を**不完備**な契約と言う。ここでは資産の所有権についてのみ契約が可能であるとする。

1.8.2　共同保有の場合

まず資産を両社が共同保有する場合を考える。このとき第 2 期での利益配分の交渉が決裂すれば生産ができずどちらの利益もゼロになる。配分すべき両社の第 2 期における利益の合計は $v(h)-c(e)$（すでに投資は行われている）であるからこれを 2 等分して各企業の利益は $\frac{v(h)-c(e)}{2}$ である。すると投資を含めた部品会社の利益は

$$\frac{v(h)-c(e)}{2}-e$$

メーカーの利益は

$$\frac{v(h)-c(e)}{2}-h$$

であり，それぞれの最大化条件は

$$-\frac{c'(e)}{2}=1,\ \frac{v'(h)}{2}=1$$

となる。上記のファーストベストの解と比べると $v'(h)$ は h の減少関数，$c'(e)$ は e の増加関数（$-c'(e)>0$ は e の減少関数）であることから h，e ともに小さくなる。すなわち各企業の投資はファーストベストの場合よりも少なくなってしまう。

1.8.3　メーカーが保有する場合

次にメーカーが資産の所有権を保有する場合を考える。このとき交渉が決裂してもメーカーは他の部品会社に頼んで作ってもらうことができるが，そのときの生産費用は元来の

部品会社の費用とは異なり $\bar{c} > c(e)$ であるとする。交渉が決裂したときのメーカーの利益は $v(h) - \bar{c} - h$ であり，元来の部品会社の利益は $-e$ であるから，それらを基準とすると交渉によって得られる追加的利益の合計は

$$v(h) - c(e) - h - e - (v(h) - \bar{c} - h - e) = \bar{c} - c(e)$$

である。これを 2 等分するとするとメーカーの利益は

$$v(h) - \bar{c} - h + \frac{\bar{c} - c(e)}{2}$$

部品会社の利益は

$$\frac{\bar{c} - c(e)}{2} - e$$

である。前者を h で，後者を e で微分してゼロとおくと

$$v'(h) = 1$$

$$-\frac{c'(e)}{2} = 1$$

が得られる。前者はファーストベストの解と同じであるが後者は共同保有の場合と同じであり，ファーストベストの場合よりも部品会社の投資は小さくなる。

1.8.4　部品会社が保有する場合

最後に部品会社が資産の所有権を保有する場合を考える。このとき交渉が決裂しても部品会社は他のメーカーに部品を納入することができるが，そのとき他のメーカーに部品を売って得られる売り上げは $\bar{v}$，生産費用を引いた利益は $\bar{v} - c(e)$ であるとする。交渉が決裂したときの部品会社の利益は $\bar{v} - c(e) - e$ であり，メーカーの利益は $-h$ であるから，それらを基準とすると交渉によって得られる追加的利益の合計は

$$v(h) - c(e) - h - e - (\bar{v} - c(e) - e - h) = v(h) - \bar{v}$$

である。これを 2 等分するとするとメーカーの利益は

$$\frac{v(h) - \bar{v}}{2} - h$$

部品会社の利益は

$$\bar{v} - c(e) - e + \frac{v(h) - \bar{v}}{2}$$

である。前者を h で，後者を e で微分してゼロとおくと

$$\frac{v'(h)}{2} = 1$$

$$-c'(e) = 1$$

が得られる。後者はファーストベストの解と同じであるが前者は共同保有の場合と同じであり，ファーストベストの場合よりもメーカーの投資は小さくなる。

以上によって資産の所有権を持つ企業がファーストベストの解と同じ投資を行い，所有権を持たない企業はファーストベストの解よりも少ない投資を行うことがわかる。これらの問題を**ホールドアップ問題**と言う。

第 2 章

ゲーム理論

2.1　ゲームおよびゲーム理論

1994 度のノーベル経済学賞をジョン・ナッシュ，ラインハート・ゼルテン，ジョン・ハルサーニの 3 人のゲーム理論家が受賞した（その後もオーマン，シェリングが受賞している）。ゲーム理論は経済学の一分野として，また各分野における経済学研究の重要な分析手法としてその地位を確立したように思われる。

ゲーム理論でいうゲームとは，トランプ・将棋・麻雀などの遊び（仕事でしている人達もいるが）のゲーム，あるいは野球・サッカーなどスポーツのゲームばかりではなく，それらも含めて複数の個人あるいは組織が自分の行動だけでなく相手の行動が自分の利益に（プラスまたはマイナスに）影響する状況において，それぞれが自分の利益をなるべく大きくしようとして行動を選択するというように設定された枠組みを意味する。ゲームに登場する個人または組織を**プレイヤー (player)** と呼ぶ。

政治や経済にはゲームに当てはまる状況が多い。経済に例をとって一つのゲームを考えてみよう。

ゲーム 1　ある産業に属する 2 つの企業（それらを企業 A，B とする）が生産・販売する財の価格を決める問題を考えてみよう。両方の企業が価格を低くすると販売量は増えるが利潤は小さくなり，両企業が価格を高くすると販売量は減るが互いの利潤は低い価格のときよりも大きくなる。しかし企業 A（あるいは B）が高い価格をつけているときに企業 B（あるいは A）が価格を下げると，相手の顧客を奪って一層大きな利潤を稼ぐことができると仮定する。

これは寡占（の中でも企業数が 2 つの最も簡単な複占のケース）の一例であるが，一方の企業が選ぶ行動が他方の企業の利潤にも影響を与えるゲームになっている。このとき各企業は実際にどのような行動を選択するか，すなわち価格を選ぶであろうか。ゲー

企業Aの戦略		企業Bの戦略 高価格	企業Bの戦略 低価格
	高価格	5, 5	1, 7
	低価格	7, 1	2, 2

表 2.1 ゲーム 1–寡占のゲーム

ム理論では，それぞれの状況において選ばれる行動を**戦略** (strategy) と呼ぶ[*1]。また各企業がそれぞれ自分の利潤の最大化を図って実際に選ぶであろう戦略の組合せを**均衡** (equilibrium) と呼ぶ。どのようなゲームでどのような均衡が実現すると考えられるか。それを分析するのがゲーム理論である。以下主にプレイヤーが 2 人（企業ならば 2 社）の場合を中心に解説して行くが，一般的には 3 人以上のプレイヤーの存在も考える。

2.2 静学的なゲームとナッシュ均衡

2.2.1 静学的なゲーム・標準型ゲームと最適反応

上で見た寡占ゲームの例（ゲーム 1）をもう少し詳しく考えてみよう。企業 A，B が生産する財は同種の財ではあるが差別化されたものであるとする。両企業が作る財が完全に同じ財（同質財，消費者から見て区別できないもの）の場合には，一方が他方より少しでも安い価格をつければ（情報を入手するのが簡単で，買い物に行くための費用などもかからないとすると）すべての消費者は価格が安い方の財を買い，高い価格をつけている企業の財はまったく売れなくなる。しかし差別化された財の場合は消費者によって好みの違いがあるため価格に差があってもすべての消費者が一方の財に集中してしまうことはなく，価格の変化に伴って需要は徐々に変化するであろう。企業 A の財の価格が上がると，その財に対する好みがあまり強くない消費者は企業 B の財に移っていくかもしれないが，好みの強い消費者は企業 A の財を買い続けるであろうから，企業 A はすべての需要を失うわけではない。このような製品差別化された寡占ゲームの例を表 2.1 に示した。表の各桝目の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。各プレイヤーがそれぞれ選択した戦略を実行した結果として得るものをゲーム理論では**利得** (payoff) と呼ぶ[*2]。企業間のゲームでは利潤が利得になっているが，何が利得であるかはそのゲームによって異なる[*3]。各企業はこのゲームの構造を知っていて，自分の利潤が最大となる

[*1] 次節で取り扱う静学的なゲームでは，純粋戦略を考えている限り行動と戦略は同じものであるが，後の節で考える動学的なゲームでは行動と戦略の意味は異なる。

[*2] 通常ゲーム理論では利得は「期待効用定理」の条件を満たすフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されるものと仮定する。

[*3] 選挙での勝利をめざす 2 つの政党間の，有権者に示す政策提案を戦略とするゲームを考えれば，選挙で獲得する得票数ないしは議席数が利得になる。

ように行動するが，相手と協力すべく相談したりはできないものと仮定する。したがって**相手の行動は与えられたものと考えて**自らの行動を選択しなければならない。このようにゲームのプレイヤーが互いに協力できない状況でそれぞれの戦略を選択するようなゲームを**非協力ゲーム** (noncooperative game) と呼ぶ。またこのゲームでは 2 つの企業が同時に戦略を選択するゲームになっているので同時決定ゲームと呼ぶことができるが，時間的に同時であるがどうかが問題ではなく，各企業は相手がどの戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないということを意味する。このようなゲームにおいては，ゲームの中で時間の流れを考えていないので**静学的なゲーム** (static game) と呼ばれる。また表 2.1 のようにゲームの構造を行列で表すような表し方を**標準型ゲーム** (normal form game) と言う[*4]。

各プレイヤーは相手が選ぶ戦略に対応して自分にとって最適な，すなわち自分の利得が最も大きくなる戦略を選ぼうとする。あるプレイヤーにとって，**相手のプレイヤーが選ぶ戦略を与えられたものとして**自分にとって最適な戦略を**最適反応** (best response) と呼ぶ。表 2.1 のゲームでは最適反応は具体的に次のようになる。

(1). 企業 A の最適反応
- (i) 企業 B が高価格を選んだ場合 $\rightarrow$ 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
- (ii) 企業 B が低価格を選んだ場合 $\rightarrow$ 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。

(2). 企業 B の最適反応
- (i) 企業 A が高価格を選んだ場合 $\rightarrow$ 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
- (ii) 企業 A が低価格を選んだ場合 $\rightarrow$ 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。

相手のある戦略に対して，自分がある戦略を選んでも別の戦略を選んでも利得が等しいということもありうる。その場合は両方とも最適反応になるので一般に最適反応は一つとは限らない。

2.2.2　ナッシュ均衡

ゲーム 1 の均衡を考える。ゲームの均衡というのは，実際にこのゲームが行われたときにプレイヤーが選択するであろうと思われる戦略の組み合わせである。ゲームの均衡について最も基本となる考え方は次のナッシュ均衡である。

[*4] **戦略型ゲーム** (strategic form game) とも言う。一般的に標準型ゲームとはプレイヤーの選択可能な戦略の組とそれに対応した利得の組とでゲームを表現するものであり，行列を使うとは限らない。

ナッシュ均衡　各プレイヤーが選んでいる戦略が，それぞれ相手の戦略に対する最適反応になっている場合，そのような戦略の組み合わせを**ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)** と呼ぶ。ナッシュ均衡においては相手が戦略を変えなければ自分だけが一方的に戦略を変えても利得を増やすことはできない（利得が減るとは限らない)。

ゲーム 1 のナッシュ均衡を考えてみよう。このゲームでは企業 A にとっては企業 B がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。同様に企業 B にとっても企業 A がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。したがってこのゲームのナッシュ均衡は企業 A，企業 B の戦略がともに低価格となる組合せであり，そのとき各プレイヤーが得る利得（利潤）は表 2.1 の右下の枠に示されている (2,2) である。

このゲームでは 2 つの企業がカルテルを結んでともに高価格をつけるように協力すれば左上に示されている利潤 (5,5) を実現することができる。しかし，拘束力のある協力関係を結べない非協力ゲームでは相手が高価格をつけると想定すると自分が低価格をつけた方が利潤が大きくなる（それが最適反応）ので両企業ともに低価格をつけ，結果的に低い利潤になってしまう。

支配戦略　このゲームでの低価格戦略のように，あるプレイヤーにとって相手がどのような戦略を選ぼうとも自分にとって最適な戦略がただ一つに決まっている場合，その戦略を**支配戦略 (dominant strategy)** と呼ぶ。ここで支配というのは，低価格という戦略が高価格という戦略を支配しているという意味であり，どちらかのプレイヤーが相手を支配しているということではない。

この例のようなゲームは**囚人のジレンマ (prisoner's dilemma)** と呼ばれる。表 2.1 を表 2.2 のように作り変えてみる。この表の利得は表 2.1 の利得からすべて 7 を引いた数字である。期待効用と同様にこのようにしてもゲームの構造は変わらず，最適反応，ナッシュ均衡も変わらない。「高価格」「低価格」という戦略はそれぞれ「黙秘」「自白」と名前が変わっている。ある犯罪を共同で犯した 2 人の容疑者（取調べ段階で留置場などに入っている囚人）A，B がいて別々に取り調べられている。検察官は「自白すれば罪を軽くしてやる」と言う。自分だけが自白すれば無罪放免（利得は 0)，自分だけが黙秘すると懲役 6 年（利得は -6)，ともに自白すれば懲役 5 年，そしてともに黙秘を貫けば証拠不十分で懲役 2 年になることがわかっているものとする。このゲームでは「自白」が支配戦略であり，ともに自白することがナッシュ均衡である。相手の自白を心配して自白するのではなく，相手がどうであれ自分にとって自白した方が有利なので自白してしまうのである。

ゲーム 1 のように両方のプレイヤーに支配戦略があれば互いにその支配戦略を選ぶという組合せがナッシュ均衡になるが，支配戦略のあるゲームばかりではない。次の例を考えてみよう。

囚人Bの戦略

囚人Aの戦略		黙秘	自白
	黙秘	-2, -2	-6, 0
	自白	0, -6	-5, -5

表 2.2 囚人のジレンマ

企業Bの戦略

企業Aの戦略		規格 X	規格 Y
	規格 X	8, 6	4, 4
	規格 Y	3, 3	6, 8

表 2.3 ゲーム 2–互換性のゲーム

ゲーム 2 企業 A と B がある製品の規格を決める問題を考える。規格に X と Y の 2 種類があり，両方の企業が同じ規格を選ぶと製品の互換性が高くなり消費者にとって便利になるので市場が大きくなって企業は大きな利潤を得られるが，各企業が異なった規格を選ぶと消費者には不便になって市場が小さくなり利潤も少なくなる。また企業 A は規格 X に，企業 B は規格 Y にすぐれた技術を持っていると仮定する。

この状況を表にすると表 2.3 のようになる。先ほどの例と同じく，表の各桝目の中の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を考えると

(1). 企業 A の最適反応
- (i) 企業 B が規格 X を選んだ場合 $\rightarrow$ 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3。
- (ii) 企業 B が規格 Y を選んだ場合 $\rightarrow$ 規格 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6。

(2). 企業 B の最適反応
- (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 $\rightarrow$ 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 6，Y を選ぶと利潤は 4。
- (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 $\rightarrow$ 規格 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 3，Y を選ぶと利潤は 8。

すなわち，各企業とも相手と同じ規格を選ぶのが最適反応になっている。各プレイヤーにとって相手の戦略によって自分の最適な戦略が異なっているので支配戦略はないが，ナッシュ均衡はある。しかもこのゲームの場合ナッシュ均衡は 2 つある。具体的には次のよう

		女性の戦略	
男性の戦略		サッカー	音 楽
	サッカー	5, 3	1, 1
	音 楽	0, 0	3, 5

表 2.4　両性の闘い

になる。

(1). **ナッシュ均衡 1**–企業 A，企業 B ともに規格 X を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 X であり，企業 B が規格 X を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(2). **ナッシュ均衡 2**–企業 A，企業 B ともに規格 Y を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 Y であり，企業 B が規格 Y を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。

この 2 つの均衡のうち，ともに規格 X を選ぶ均衡の方が企業 A にとって有利であり，ともに規格 Y を選ぶ均衡の方が企業 B にとって有利であるが，どちらの方が実現しやすい均衡であるかはわからない。このようにゲームの均衡は一つとは限らない。

このゲームは**両性の闘い**と呼ばれるゲームの一例になっている。表 2.3 を表 2.4 のように作り変える。この表の利得は表 2.3 の利得からすべて 3 を引いたものになっている。互いに連絡を取れない状況におかれた（なぜかは問わない）男女がある日のある時刻にサッカー（のある特定の試合）を見に行くかある音楽コンサートに行くかを決めなければならない。男性はサッカーを，女性は音楽を好むが，何よりも会えなければいけない。利得はそれぞれの状況での 2 人の効用（満足感）を表すものと考えられる。このゲームにはナッシュ均衡が 2 つある。1 つはともにサッカーを見に行くことであり，もう 1 つはともに音楽を聞きに行くことである。

2.2.3　混合戦略

次のゲームを考えてみよう。

ゲーム 3　企業 A と企業 B がある製品を作っているが，企業 A は独自の技術を使って特徴ある製品を作るのが得意であり企業 B とは異なったタイプの製品を作ろうとしている。一方，企業 B は類似品を作るのが得意で企業 A の製品とよく似た製品を作りたいと思っていると仮定する。製品のタイプを X，Y で表す。

		企業Bの戦略	
		製品 X	製品 Y
企業Aの戦略	製品 X	5, 5	8, 2
	製品 Y	8, 2	5, 5

表 2.5　ゲーム 3–類似品のゲーム

このゲームは表 2.5 のように表現される。やはり左側の数字が企業 A の利潤，右側の数字が企業 B の利潤を表す。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を求めると

(1). 企業 A の最適反応
- (i) 企業 B が製品 X を選んだ場合 → 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 8
- (ii) 企業 B が製品 Y を選んだ場合 → 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 5

(2). 企業 B の最適反応
- (i) 企業 A が製品 X を選んだ場合 → 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 2
- (ii) 企業 A が製品 Y を選んだ場合 → 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 2，Y を選ぶと利潤は 5

となる。企業 A は相手とは違うタイプの製品を選ぼうとし，一方企業 B は相手と同じタイプの製品を選ぼうとする。このゲームにはお互いに相手の戦略に対して最適反応になっているような戦略の組み合わせがないのでナッシュ均衡はない。しかし，戦略について異なった考え方をするとナッシュ均衡が存在するようになる。その戦略についての考え方とは以下に述べる混合戦略である。

混合戦略　ゲームのプレイヤーが自分の選択可能な戦略を確率的に選択するとき，各プレイヤーが各戦略に対して割り当てる確率の組合せを**混合戦略 (mixed strategy)** と呼ぶ。

上のゲーム 3 であれば，企業 A が確率 1/3 で製品 X を選び，確率 2/3 で製品 Y を選ぶというような戦略を考えることになる。サイコロをころがして 1 から 4 までの目が出れば製品 X，5 または 6 の目が出れば製品 Y というように選べばそのような確率になる。このような混合戦略に対してこれまで考えてきたように行動をはっきり一つに決めて選ぶような戦略を**純粋戦略 (pure strategy)** と呼ぶ。混合戦略は純粋戦略を確率的に組み合わせたものであるが，純粋戦略も混合戦略の一種（X を選ぶ確率が 1 あるいは 0 の）と見ることができる。

自分あるいは相手が混合戦略を選んでいる場合は，自分がある戦略（純粋戦略でも）を選んだときに得られる利得は確実なものではなく確率的なものになる。

混合戦略を考えたときでも純粋戦略の場合と同じように，最適反応およびナッシュ均衡が定義される。すなわち，それぞれのプレイヤーが相手の戦略に対して自分にとって最も有利な戦略（最適反応）を選んでいるときの戦略の組合せがナッシュ均衡である。表 2.5 のゲームで混合戦略によるナッシュ均衡を考えてみよう。企業 A が確率 p で製品 X を，確率 $1-p$ で製品 Y を選び，企業 B が確率 q で製品 X を，確率 $1-q$ で製品 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると[*5]

$$\begin{aligned}\pi_A =& 5pq + 8(1-p)q + 8p(1-q) + 5(1-p)(1-q)\\ =& 5 + (3-6q)p + 3q\end{aligned} \tag{2.1}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_B =& 5pq + 2(1-p)q + 2p(1-q) + 5(1-p)(1-q)\\ =& 5 + (6p-3)q - 3p\end{aligned} \tag{2.2}$$

が得られる。企業 A は式 (2.1) が最大となるように p を決め，企業 B は式 (2.2) が最大となるように q を決めるのであるが，(2.1) の $3-6q$ がゼロでなければ，$p=1$（$3-6q>0$ の場合），または $p=0$（$3-6q<0$ の場合）とすることによって企業 A の利潤が最大となるから純粋戦略になる。純粋戦略では均衡がないことを確認済みなので混合戦略の均衡を考えるには $3-6q=0$ となっていなければならない。すると $q=1/2$ を得る。一方 (2.2) の $6p-3$ がゼロでなければ，$q=1$（$6p-3>0$ の場合），または $q=0$（$6p-3<0$ の場合）とすることによって企業 B の利潤が最大となり，純粋戦略となる。混合戦略の均衡を考えるには $6p-3=0$ となっていなければならない。したがって $p=1/2$ を得る。以上のことからゲーム 3 のナッシュ均衡は次のように表現される。

ゲーム 3 のナッシュ均衡　企業 A，企業 B ともに確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するという戦略の組合せがナッシュ均衡となる。そのとき企業 A が獲得する利潤（の期待値）は 6.5，企業 B が獲得する利潤（の期待値）は 3.5 である。

[*5] 期待値は以下のように計算する。『サイコロを 2 個同時に振って両方とも 1 の目が出れば賞金 1200 円，1 と 2 が出れば 300 円それ以外は賞金なし』というゲームを考えると，1 回だけそのゲームをプレイしたときの賞金の期待値は

$$\frac{1}{36} \times 1200 + \frac{1}{18} \times 300 = 50$$

となる。これはサイコロの目が事前の確率通りに出たとして（2 個のサイコロともに同じ目が出る確率はそれぞれの目について $\frac{1}{36}$，異なった目が出る確率はそれぞれの組み合わせについて $\frac{1}{18}$）このゲームを何度もプレイして得られる平均の賞金に等しい。

$q = 1/2$，すなわち企業 B が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき式 (2.1) の $3 - 6q$ がゼロであるから，企業 A にとってはどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じである。その場合，混合戦略ではなく純粋戦略として製品 X（$p = 1$ のとき）を選んでも製品 Y（$p = 0$ のとき）を選んでも得られる利潤の期待値は等しくなっている。したがって $p = 1/2$ とするのも最適反応である。同様に，$p = 1/2$，すなわち企業 A が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき，式 (2.2) の $6p - 3$ がゼロであるから，企業 B にとってどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じであり，$q = 1/2$ とするのも最適反応になっている。したがって，$p = 1/2$，$q = 1/2$ は互いに最適反応であるからナッシュ均衡になる。

このように混合戦略が相手のある戦略に対して最適反応になっている場合には，その混合戦略を構成する各純粋戦略自体も最適反応になっている[*6]。そうすると確率 1/2 はそれを選ぶプレイヤーの合理的な判断によって選ばれたものと考えるよりも，そのプレイヤーの戦略についての相手の予想を示すものと考えた方がよい。つまり企業 B にとっては企業 A が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。確率 1/2 はお互いの戦略が最適反応になるためにつじつまの合う予想になっている。

先に見たゲーム 2 も，2 つの純粋戦略によるナッシュ均衡の他に次のような混合戦略によるナッシュ均衡を持つ。

ゲーム 2 の混合戦略によるナッシュ均衡　企業 A は確率 5/7 で規格 X を，確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を，確率 5/7 で規格 Y を選ぶという戦略の組合せがナッシュ均衡である。

これは以下のようにして示される。

ゲーム 3 の場合と同様に企業 A が確率 p で規格 X を，確率 $1 - p$ で規格 Y を選び，企業 B が確率 q で規格 X を，確率 $1 - q$ で規格 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると

$$\begin{aligned}\pi_A &= 8pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 6(1-p)(1-q) \\ &= 6 + (7q-2)p - 3q \qquad (2.3)\end{aligned}$$

および

[*6] ここでは戦略の数が 2 つのゲームを考えているので混合戦略はその 2 つの戦略をある確率で選ぶものとなっているが，戦略の数が 3 つ（あるいはそれ以上）あるゲームにおいては 3 つすべてからなる混合戦略の他に 3 つの内の 2 つからなる混合戦略も考えることができる。そのような戦略が最適反応になっている場合には，それを構成する 2 つの純粋戦略それぞれも最適反応である。

$$\begin{aligned}\pi_B &= 6pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 8(1-p)(1-q) \\ &= 8 + (7p-5)q - 4p \end{aligned} \tag{2.4}$$

と表される。各企業の最適反応は以下の通りである。

(1). 企業 A の最適反応
 (i) $\frac{2}{7} < q \leqq 1$ のときは $p = 1$ が最適
 (ii) $0 \leqq q < \frac{2}{7}$ のときは $p = 0$ が最適
 (iii) $q = \frac{2}{7}$ のときは p の値は何でもよい
(2). 企業 B の最適反応
 (i) $\frac{5}{7} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適
 (ii) $0 \leqq p < \frac{5}{7}$ のときは $q = 0$ が最適
 (iii) $p = \frac{5}{7}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(1). $p = 1$, $q = 1$。これは企業 A が X，B も X を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(2). $p = 0$, $q = 0$。これは企業 A が Y，B も Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(3). $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

混合戦略によるナッシュ均衡においては企業 A は確率 5/7 で規格 X を確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を確率 5/7 で規格 Y を選ぶ。この場合には，企業 B にとっては企業 A が確率 5/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 2/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。5/7 と 2/7 がつじつまの合う予想になっている。

ナッシュ (John Nash) はプレイヤーの数や戦略の数が 2 以上の場合も含めて一般的に次のような定理を証明した[*7]。

ナッシュの定理　混合戦略を考えるとあらゆるゲームに少なくとも一つのナッシュ均衡が存在する。

このナッシュの業績にちなんで**ナッシュ均衡**と呼ばれている。前章で見たクールノー均衡，ベルトラン均衡もナッシュ均衡の一種である。

■ジャンケンゲーム　ジャンケンのゲームを考えよう。プレイヤーを A，B とすると，それぞれ戦略はグー，チョキ，パーの 3 つであり，これらを G, C, P と表す。そのゲームの利得表は表 2.6 のように表現される。勝てば利得は 1，負ければ −1，あいこの場合は 0

[*7] この定理の証明にはブラウワーの不動点定理（またはそれの拡張版である角谷の不動点定理）が用いられている。詳しくは数理経済学の書物を参照されたい。ブラウワーの不動点定理の

		プレイヤーBの戦略		
		G	C	P
プレイヤーAの戦略	G	0, 0	1,-1	-1, 1
	C	-1, 1	0, 0	1, -1
	P	1,-1	-1, 1	0, 0

表 2.6　ジャンケンゲーム

とする。このゲームに純粋戦略に限定したナッシュ均衡はない。混合戦略を考えよう。プレイヤーAが G, C, P をそれぞれ確率 $p_A, q_A, 1-p_A-q_A$ で出し，プレイヤーBが G, C, P を確率 $p_B, q_B, 1-p_B-q_B$ で出すとすると，プレイヤーAの期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_A =& p_A[0p_B + q_B - (1-p_B-q_B)] + q_A[-p_B + 0q_B + (1-p_B-q_B)] \\ &+ (1-p_A-q_A)[p_B - q_B + 0(1-p_B-q_B)] \\ =& p_A(3q_B-1) + q_A(1-3p_B) + p_B - q_B\end{aligned}$$

となる。したがって混合戦略の均衡においては

$$3q_B - 1 = 0$$

$$1 - 3p_B = 0$$

が成り立たなければならない。これらから

$$p_B = q_B = \frac{1}{3}$$

同様にプレイヤーBの期待利得を考えることによって

$$p_A = q_A = \frac{1}{3}$$

が求まる。つまりグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すような戦略の組が混合戦略を含めたときのナッシュ均衡である。

2.2.4　支配される戦略の逐次消去

図の囚人のジレンマの例を考えてみよう。

		B の戦略	
		X	Y
A の戦略	X	4, 4	0, 6
	Y	6, 0	2, 2

証明については第 2 章で解説している。

B が X，Y どちらの戦略を選んでも A は Y を選ぶ方がよい。同様に A がどちらの戦略を選んでも B は Y を選ぶ方がよい。そのとき A，B それぞれについて Y が X を強く支配する（強支配する）と言う（X は Y に強く支配される)。このような場合両プレイヤーにとって相手の戦略に関わらず X は最適反応にはなりえない。したがってナッシュ均衡を構成する戦略には含まれない（混合戦略を考えても同様）から X を省いてゲームを考えてもよいと考えられる。まず A の戦略 X を消去するとゲームは次のようになる。

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	6, 0	2, 2

ここで B にとっても X は Y に強く支配されているからこれを消すと双方にとって Y だけが残り，ともに Y を選ぶ状態，すなわちナッシュ均衡が得られる。このようにして選ばれる戦略を順に絞りながら均衡を考えて行く方法を「**強く支配される戦略の逐次消去**」と言う。別の例を考える。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 6
戦略	Y	6, 2	2, 0

このゲームでは A にとって X は Y に強く支配される戦略であるが，B にとってはそうではない。A がどちらを選ぶかで B の最適反応は異なる。しかし A の戦略 X を消去するとゲームは

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	6, 2	2, 0

となり，この状態では B にとって Y が X に強く支配されているから Y を消去すると (Y,X) という戦略の組だけが残りそれがナッシュ均衡になる。これも（と言うよりこのような手順が）強く支配される戦略の逐次消去である。B がどちらを選んでも（あるいは混合戦略を選んでも）A は絶対に X を選ばない。A が X を選ばないとすると B にとって Y が最適反応になることはありえないので消去してもナッシュ均衡を見つけるのに問題はない。互いの戦略が 3 つ以上あるゲームにおいてこの手順で戦略を消去した結果 2 つづつ（あるいはそれ以上）の戦略が残った場合，そのゲームでナッシュ均衡を考えることによってもとのゲームのナッシュ均衡が得られる。さらに別の例を考える。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 4
戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームには 2 つの（純粋戦略による）ナッシュ均衡がある。(X,X) と (Y,X)。また，A，B にとって X も Y も他方に強く支配される関係にはなっていない。しかし A にとっては X が Y より大きい利得を与えることはなく Y の方が X より大きい利得を与えることがある。このような場合 A にとって X は Y に弱く支配される（弱支配される）と言う。同様に B にとっては Y が X に弱く支配されている。弱く支配される戦略を順に消去して均衡を考える手順を「**弱く支配される戦略の逐次消去**」と言う。まず A の戦略 X を消去するとゲームは次のようになる。

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームにおいては B にとって Y が X に（強く）支配されているのでこれを消すとナッシュ均衡 (Y,X) が得られる。しかしこの方法によってはもう 1 つのナッシュ均衡が消えてしまう。このように弱く支配される戦略を消去してゲームの均衡を考えて行く手順によってはすべてのナッシュ均衡を見つけられない可能性がある。

せっかくだから戦略が 3 つのゲームも考えてみよう。

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3
	Z	2, 2	1, 1	1, 0

このゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡は (X,Z) と (Y,Z) の 2 つある。A にとって Z は Y に強く支配される戦略であるが，B の戦略にはそのような関係はない（A が Z を選んだ場合を考えればよい)。A の戦略 Z を消去するとゲームは

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3

となる。このゲームでは B にとって X，Y がともに Z に強く支配されているのでそれらを削除するとナッシュ均衡 (X,Z)，(Y,Z) の 2 つの状態しか残らない。一方もとのゲームにおいて A にとって X が Y に弱く支配されているのでそれも消去するとナッシュ均衡

(X,Z) が消えてしまう。ただし B にとって Y が X に弱く支配されているので，それを先に消去するとゲームは

A の戦略 \ B の戦略	X	Z
X	4, 4	3, 6
Y	4, 2	3, 3
Z	2, 2	1, 0

のようになり A にとって X が Y に弱く支配される関係ではなくなるので Z のみが消去され 2 つのナッシュ均衡はともに残る。このように弱く支配される戦略を消去する順番によっては残る均衡が異なることがある。

2.3　動学的なゲームと部分ゲーム完全均衡

前節では二人のプレイヤーがそれぞれの戦略を同時に 1 回限り選択するという構造をもったゲーム，同時決定ゲームを考えた。先に述べたように**同時に**というのは時間的に同時であるかどうかということではなく，各プレイヤーが相手がどのような戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないという意味である。それに対して一方のプレイヤーが先に意思決定をして行動を選び，その結果を見てからもう一方のプレイヤーが行動を選ぶという構造をもったゲームも考えられる。プレイヤーが交互に行動を選ぶのでこのようなゲームは交互行動ゲームと呼ぶことができる。またゲームの進行の中で時間の流れを考えているので**動学的なゲーム (dynamic game)** とも呼ばれる。やはりプレイヤーは互いに相談・協力することができないと仮定するので非協力ゲームである。

この節と次の節では純粋戦略のみを考える。

2.3.1　動学的なゲームとゲームの樹・展開型ゲーム

前節のゲーム 2 をもとにして次の例を考えてみよう。

ゲーム 4　ゲーム 2 と同様に企業 A と企業 B が製品の規格 X または Y を選ぶゲームであるが，企業 A が先にどちらの規格を選ぶかを決め，その結果を見てから企業 B が規格を選ぶ。

ゲーム 4 の構造を図に表すと図 2.1 のようになる。このようにゲームにおける意思決定の流れを樹が枝分かれするように表したものを**ゲームの樹 (game tree)** あるいは**展開型**

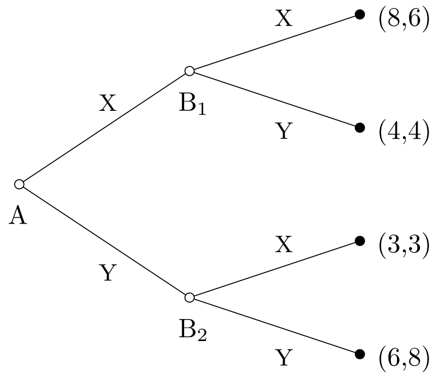


図 2.1　ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（展開型ゲーム）

ゲーム (extensive form game) と呼ぶ[*8]。図の点 A は企業 A が戦略を決める時点を，点 B_1 と B_2 は企業 B が戦略を決める時点を示す。A と B_1 あるいは A と B_2 を結ぶ線の上または下に書かれている X や Y は各プレイヤーが選択した戦略を表す。右側に並んでいる 4 つの黒い点は各プレイヤーがそれぞれの戦略を選んでゲームが終了する状態を表しており，各点の右に書かれている数字は各プレイヤーの利得である。左側の数字が企業 A の利得を右側の数字が企業 B の利得を表す。

このゲームでの企業 A の戦略の選択肢は静学的なゲームの場合と同じく規格 X と規格 Y の 2 つであるが，企業 B は企業 A の行動を見てから自分の行動を決めるので，企業 A が規格 X を選ぶか規格 Y を選ぶかに応じて 4 つの戦略の選択肢を持つ[*9]。企業 B の戦略は具体的には次のように表される。

(1). 戦略 XX
　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 X を選ぶ
(2). 戦略 XY
　企業 A が規格 X を選べば規格 X を，企業 A が規格 Y を選べば規格 Y を選ぶ。
(3). 戦略 YX
　企業 A が規格 X を選べば規格 Y を，企業 A が規格 Y を選べば規格 X を選ぶ。
(4). 戦略 YY
　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 Y を選ぶ。

[*8] 展開型ゲームは各プレイヤーにとっての行動の選択肢だけではなく，その行動を選ぶ順番やゲームの流れの中での位置関係，意思決定をする時点での情報の状態などがわかるようにゲームを記述するものでありゲームの樹を用いるとは限らない。
[*9] 戦略とは状況に応じて選ばれる行動の組み合わせであるが，ここでは企業 A が選んだ行動に応じて企業 B が選ぶ行動の組み合わせが企業 B の戦略である。

企業Aの戦略	企業Bの戦略	XX	XY	YX	YY
	規格 X	8,6	8,6	4,4	4,4
	規格 Y	3,3	6,8	3,3	6,8

表 2.7　ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（標準型ゲーム）

戦略 XY と YX に見られるように，企業 B は企業 A の戦略に応じて同じ規格を選ぶことも異なった規格を選ぶことも可能なので 4 つの選択肢を持つ。このように動学的なゲームで後から戦略を選ぶプレイヤーは静学的なゲームにおけるよりも多くの選択肢を持つことになる。通常静学的なゲーム（同時決定ゲーム）は表を用いた標準型ゲームとして，動学的なゲーム（交互行動ゲーム）はゲームの樹を用いた展開型ゲームで表されることが多いが，動学的なゲームを標準型ゲームとして表すこともできる。ゲーム 4 を標準型ゲームで表現すると表 2.7 のようになる。

2.3.2　部分ゲーム完全均衡

表 2.7 によってゲーム 4 のナッシュ均衡を考えてみよう。まず各プレイヤーの最適反応を調べてみる。

(1). 企業 A の最適反応
- (i) 企業 B が戦略 XX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3
- (ii) 企業 B が戦略 XY を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 6
- (iii) 企業 B が戦略 YX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 3
- (iv) 企業 B が戦略 YY を選ぶ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6

(2). 企業 B の最適反応
- (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 → 戦略 XX または XY を選ぶのが最適
  XX を選ぶと利潤は 6，XY を選ぶと 6，YX を選ぶと 4，YY を選ぶと 4
- (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 → 戦略 XY または YY を選ぶのが最適
  XX を選ぶと利潤は 3，XY を選ぶと 8，YX を選ぶと 3，YY を選ぶと 8

このゲームのナッシュ均衡は次のように 3 つある。

(1). **ナッシュ均衡 1**–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XX を選ぶ。

企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XX（または XY）であり，企業 B が戦略 XX を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(2). **ナッシュ均衡 2**–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XY を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XY（または XX）であり，企業 B が戦略 XY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(3). **ナッシュ均衡 3**–企業 A は規格 Y を選び，企業 B は戦略 YY を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 YY（または XY）であり，企業 B が戦略 YY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

以上の 3 つのナッシュ均衡はいずれも合理的なものであろうか。ナッシュ均衡 3 について検討してみよう。ナッシュ均衡 3 では，企業 B は図 2.1 の点 B_1 でも点 B_2 でも規格 Y を選ぶという戦略をとる。この均衡で想定されているように『企業 A が規格 Y を選ぶという前提で考えれば』点 B_1 は各企業が均衡戦略に示された行動を選択する限り実際には実現しない状態なので，企業 B はその時点で規格 X を選ぶと考えても規格 Y を選ぶと考えても利得に影響はなく戦略 YY は最適反応になっている。一方企業 A が規格 Y を選ぶにあたっては，もし『自分が規格 X を選んだとき相手は規格 Y で応じてくるであろう』という想定のもとに行動することになっているが，この想定は合理的ではないのではなかろうか。もし実際に企業 A が規格 X を選んでゲームが点 B_1 に達したとすれば，企業 B にとっては規格 Y よりも規格 X を選んだ方が利潤が大きくなり有利である。したがって『合理的な均衡では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶという戦略になっていなければならない』。すると企業 A は，規格 X を選べば 8 の規格 Y を選べば 6 の利潤を得られることになり，点 A において規格 X を選ぶであろう。以上のことからナッシュ均衡 3 は合理的ではない。この均衡は，B が「A が X を選んだら Y を選ぶ」という脅しをかけ，A がその脅しを信用していることによって成り立っている。しかし実際に A が X を選ぶと B は Y ではなく X を選ぶ方が利得が大きいので Y を選ぶインセンティブはない。このような脅しは**信用できない脅し (incredible threat)** と言う。以下で述べる部分ゲーム完全均衡は信用できない脅しにもとづくナッシュ均衡を排除する。

次にナッシュ均衡 1 では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶようになっているのでそれは合理的であるが，企業 A が規格 Y を選びゲームが点 B_2 に達したときに，企業 B が利得が小さい方の規格 X を選ぶことになっておりやはり合理的ではない。これも信用できない脅しである。『合理的な均衡では点 B_2 で企業 B が規格 Y を選ぶという戦略になっていなければならない』。

以上のことから，ゲーム 4 の合理的な均衡はナッシュ均衡 2 であることがわかる。

動学的なゲームの合理的な均衡を定義するのに次に示す部分ゲームの概念が必要となる。

部分ゲーム (subgame) 動学的なゲームにおいて，途中のある時点から先が一つの独立したゲームになっている場合，その途中の時点からのゲームを部分ゲーム (subgame) と呼ぶ。また全体のゲームそのものも一つの部分ゲームと見なされる。

ゲーム 4 にはそれ自身の他に，点 B_1 から始まるゲームと点 B_2 から始まるゲームの 2 つの部分ゲームがある。それぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 と呼ぶことにする。部分ゲーム 1 におけるプレイヤーの利得は点 B_2 での意思決定の影響を受けない。また部分ゲーム 2 における利得は点 B_1 での意思決定の影響を受けない。すなわち 2 つの部分ゲームは互いに独立している。この 2 つの部分ゲームにおいては企業 A は意思決定をする機会がなく企業 B のみが戦略を選択することができるが，ゲームであることには違いがない。企業 B にとっては点 B_1 では規格 X を，点 B_2 では規格 Y を選ぶのが最適なので，それらの戦略がそれぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 のナッシュ均衡になる。したがってゲーム 4 の 3 つのナッシュ均衡のうちナッシュ均衡 1 では点 B_2 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていない。またナッシュ均衡 3 では点 B_1 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていないことがわかる。ナッシュ均衡 2 においては部分ゲーム 1，部分ゲーム 2 ともにナッシュ均衡となる戦略が選ばれている。上で見た均衡の合理性とは戦略が各部分ゲームにおいてナッシュ均衡になっているということである。以上のことから動学的なゲームについて次の均衡概念を得る。

部分ゲーム完全均衡 動学的なゲームにおいて，そのゲームに含まれるすべての部分ゲームにおいてそれぞれナッシュ均衡となるような戦略の組合せを**部分ゲーム完全均衡** **(subgame perfect equilibrium)** と呼ぶ。

ゲーム 4 の部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡 2 だけである。部分ゲーム完全均衡の概念はゼルテン (Reinhert Selten) によって提唱されたものであり，動学的なゲームにおいてナッシュ均衡がいくつもある場合により合理的な均衡を選び出すのに用いられる。

2.3.3 部分ゲーム完全均衡の見つけ方

上の解説では動学的なゲームを行列を使った標準型ゲームとして表し，そのナッシュ均衡を求めた上でそれぞれの均衡の合理性を検討して部分ゲーム完全均衡を選び出したが，より簡単にゲームの樹を用いて直接部分ゲーム完全均衡を求めることができる。ゲーム 4 は点 A から始まって点 B_1 または B_2 に進むのであるが，逆に点 B_1，B_2 で企業 B にとって最適な戦略を考えることから始めよう。もしゲームが点 B_1 に到達したとすると企業 B は X を選べば利得 6，Y を選べば利得 4 を得るので X を選ぶであろう。これは部分ゲーム 1 のナッシュ均衡である。同様に点 B_2 においては Y を選んだ方が利得が大きいので

Y を選ぶことになる。これは部分ゲーム 2 のナッシュ均衡である。以上のような企業 B の行動についての見通しを前提として企業 A は点 A において X か Y を選ぶことになる。X を選んだ場合は企業 B も X を選ぶので A の利得は 8，Y を選ぶと B も Y を選ぶので A の利得は 6 となるから，企業 A は点 A において X を選ぶ。したがって点 A において企業 A が X，点 B_1，B_2 で企業 B はそれぞれ X，Y を選ぶという戦略の組合せが部分ゲーム完全均衡になる。このようにして動学的なゲームの部分ゲーム完全均衡は，ゲームを最後の方からさかのぼって解いていくことによって見つけることができる。このような動学的なゲームの解法は**逆向き推論法 (backward induction)**[*10]と呼ばれている。

前章で見た複占におけるシュタッケルベルク均衡は部分ゲーム完全均衡の一種である。シュタッケルベルク均衡は，一方の企業が先に産出量を決め，もう一方がそれを見てから自らの産出量を決める（見てからでないと決められない）から，先に決める企業は相手の反応を読み込んで産出量を決めることになる。このように複占，寡占の問題はゲーム理論を用いて分析できる代表的な経済学のテーマである。

2.3.4　繰り返しゲーム

最初に見たゲーム 1 を繰り返すような動学的ゲームを考えてみる。もう 1 度利得表を書いてみよう。

企業Aの戦略		企業Bの戦略：高価格	企業Bの戦略：低価格
	高価格	5, 5	1, 7
	低価格	7, 1	2, 2

このゲームを静学的なゲームと見た場合のナッシュ均衡は，ともに「低価格」を選ぶ戦略の組であった。このゲームを無限に繰り返すとすると毎回両者が協力して「高価格」を選ぶような戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる可能性がある。企業 A，企業 B が次の戦略を選ぶとする。このような戦略はトリガー（引き金）戦略と呼ばれる[*11]。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「高価格」を選んでいれば「高価格」を，「低価格」を選んでいればそれ以降は永遠に「低価格」を選ぶ。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。一方の企業から見て相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以降は相手が「低価格」に転じるので自分も「低価格」を選

[*10] この訳語は R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）による。

[*11] トリガー戦略以外にも部分ゲーム完全均衡となる戦略はあるが，トリガー戦略は最も単純でわかりやすいものである。協力せず常に低価格を選ぶという戦略も部分ゲーム完全均衡となる。相手が常に低価格を選ぶ限り自分がゲームのどこかで高価格を選んでも損をするだけである。

ぶのが最適となり永遠にその状態が続くから利潤は毎回 2 となる。そこで問題になるのは相手を出し抜いて「低価格」を選んで実現される利益と，それ以降利潤 2 になってしまうことによる損失との比較である。もし企業が将来の利潤を割り引いて考えないのであれば「低価格」を選ぶことは絶対に利益にはならない。すなわちともに「高価格」を選ぶカルテル状態が実現できるが，企業が将来の利潤を割り引く場合は「低価格」を選ぶことが利益になる可能性がある。割引因子 (discount factor) を δ とすると「低価格」を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである[*12]。

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots]$$

これより

$$\frac{5}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > 0.4$$

が求まる。したがって割引因子が 0.4 より大きければ (それ以上に割り引かなければ)，ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となり結果として「高価格」を選ぶ協力状態が永遠に続く。割引率 (discount rate) r を $\frac{1}{1+r}=\delta$ と定義するとこの条件は $r<\frac{3}{2}$ となる。つまり割引率が 150% より小さければともにトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となる。

■より罰則の弱い部分ゲーム完全均衡 トリガー戦略よりも罰則の弱い部分ゲーム完全均衡をもたらす戦略もある。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 2 回は自分も「低価格」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できる

[*12] 等比数列の和の公式によれば

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots\delta^{n-1}]$$

が成り立つ条件は

$$\frac{5(1-\delta^n)}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta(1-\delta^{n-1})}{1-\delta}$$

である。$n\to\infty$（n が限りなく大きくなる）とすると $\delta^n\to 0$，$\delta^{n-1}\to 0$ なので本文の式が得られる。

が，それ以降は 2 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその間は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。3 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 3 回のゲームでの利得による。それが 3 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。そのようになる条件を求める。3 回のゲームで相手が「高」「低」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7+2\delta+2\delta^2 \tag{2.5}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1+\delta+\delta^2) \tag{2.6}$$

である。(2.6) が (2.5) より大きくなる条件は $3\delta+3\delta^2>2$ であり，この式から

$$\delta>0.46$$

が得られる。これはトリガー戦略の場合の $\delta>0.4$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則が弱くなっているので協力が実現しにくくなるのである。

■さらに罰則の弱い部分ゲーム完全均衡　しつこいがさらに罰則の弱い部分ゲーム完全均衡をもたらす戦略を考えてみよう。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 1 回だけ自分も「低価格」を選び，2 回目以降は再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

やはり両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以後は 1 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその時は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。2 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 2 回のゲームでの利得による。それが 2 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。2 回のゲームで相手が「高」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7+2\delta \tag{2.7}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1+\delta) \tag{2.8}$$

である。(2.8) が (2.7) より大きくなる条件は $3\delta > 2$ であり，この式から

$$\delta > \frac{2}{3}$$

が得られる。これは 2 回罰する時の $\delta > 0.46$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則がさらに弱くなっているので一層協力が実現しにくくなるのである。

なお繰り返しの回数が無限ではない（有限回）とすると，常に低価格を選ぶ戦略のみが部分ゲーム完全均衡となる。なぜならば，最後のゲームではともに低価格を選ぶことがわかるのでその前のゲームで高価格を選んでも得られるものがなく低価格を選ぶ。その前のゲームでも高価格を選んでも得られるものがないので低価格を選ぶ。というように考えていくと，結局すべての段階でともに低価格を選ぶことになるからである。しかし戦略が 3 つ以上あると少し話が異なる。

■有限回繰り返しゲーム　囚人のジレンマのようにナッシュ均衡が 1 つしかなければ有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡は毎回ナッシュ均衡に対応した戦略を選ぶことだけであり，協力を維持することはできない。なぜならば最後の回では協力しても意味がないのでナッシュ均衡が実現する。それがわかればその前の回もナッシュ均衡になる。というように逆向きに考えていくと最初からナッシュ均衡だけしか実現しない。しかしナッシュ均衡が 2 つあるゲームでは有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡において協力が実現する可能性がある。以下のゲームを n 回繰り返すことを考えよう。

Bの戦略

		X	Y	Z
Aの戦略	X	4, 4	0, 5	0, 0
	Y	5, 0	2, 2	0, 0
	Z	0, 0	0, 0	0, 0

戦略 Z がなければ通常の囚人のジレンマゲームである。このゲームのナッシュ均衡は (Y,Y)，(Z,Z) の 2 つある。そこで繰り返しゲームにおける次のような戦略を考えよう。

> 最後の回は Y，それ以外は X。もし相手がこの戦略から逸脱したら次の回以降は Z を選ぶ。

n 回の繰り返しゲームにおいて m 回目（$m \leqq N-1$）にこの戦略から逸脱するとして得られる利得は（割引は考えない）

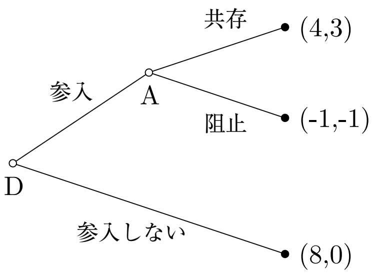
$$4(m-1)+5+(n-m)\times 0 = 4m+1$$

逸脱しない場合は

$$4(n-1)+2=4n-2$$

である。$m \leqq n-1$ であるから逸脱しない場合の利得の方が大きい。このように複数のナッシュ均衡があれば悪い方のナッシュ均衡を成す戦略を罰則として用いることによって有限回の繰り返しゲームで（最後の回を除いて）協力を実現できる可能性がある。

■チェーンストアパラドックス　部分ゲーム完全均衡の概念が必ずしも常識と一致しない例としてチェーンストアパラドックスというものがある。ある店 (A とする) が 3 つの地域で独占的に販売しているところに各地域で 1 つ 1 つ（B，C，D）の店が参入するかどうかを考えている状況を取り上げる。まず A と D のゲームを考える。

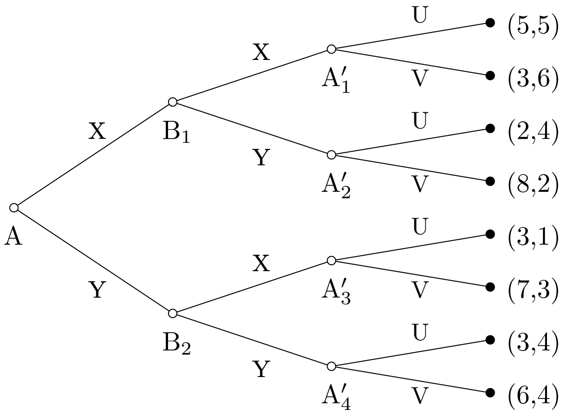


図において A は A 店が，D は D 店が意思決定する時点を表す。まず D が参入するかしないかを決め，それを見て A が受け入れて共存するか，参入を阻止すべく赤字覚悟で商品の値下げをするかを決める。数字は左側が A の右側が D の利潤である。D が参入しなければ A は大きな利潤を得られる。参入して共存すればそこそこの利潤，A が参入を阻止する行動に出ればともに赤字になる。このゲームにおいて部分ゲーム完全均衡を考えると D が参入したときに A は共存を選んだ方が得なのでそれを選ぶ。そのことがわかれば D は参入した方が得になるから参入する，ということになる。D 以外の店もすべて同じ状況におかれており，B，C，D の順にこのゲームをプレイすると考えると，まず最後のゲームで D が参入し，A は共存を選ぶ。それを前提に C のゲームを考えるとやはり C が参入し，A は共存を選ぶ。同じようにして B が参入し，A は共存を選ぶ。というようにすべての地域において参入と共存が実現するのが部分ゲーム完全均衡である。この結論は地域がいくつあっても成り立つ。しかし，現実には A が B とのゲームにおいて赤字覚悟で参入阻止行動を選ぶことによって後に続く C，D の参入を思いとどまらせようとすることがあると思われるし，その方が常識に叶っているかもしれない。このように部分完全均衡が意味する合理性が日常的な常識とは異なる場合もある。

この状況を説明するのに，参入した後の各店の利潤が確実ではなく，かつその情報を既存店の方が多く持っているというように不完備情報のゲームとして解釈する考え方も

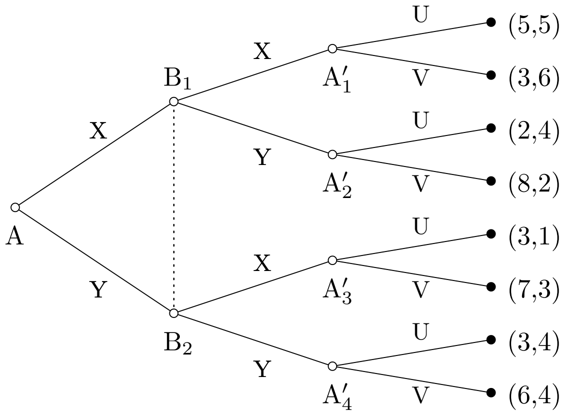
ある。

■部分ゲーム完全均衡の補足　下の図に表されたゲームを考える。プレイヤー A は A および A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 のいずれかで行動を選ぶ。つまり A は 2 度選択の機会がある。B の選択の機会は 1 度だけであり B_1，B_2 のいずれかで行動を選ぶ。ゲームを逆向きに考えて行くと A'_1 において A は U を，A'_2 においては V を，A'_3，A'_4 においても V を選ぶ。それを前提にすると B は B_1 において X を，B_2 においては Y を選ぶ。さらにそれを前提にすると A においてプレイヤー A は Y を選ぶ。そのような選択が部分ゲーム完全均衡である。



結果として A は Y と V を選び，B は Y を選んで利得は $(6,4)$（左側が A の利得）が実現するが，部分ゲーム完全均衡を表すには各点における選択のすべてを記述しなければならない。このゲームでは各点から始まるゲームがすべて部分ゲームになっている。

次に下の図に表されたゲームを考える。上のゲームとの違いはプレイヤー B にとってプレイヤー A が X を選んだか Y を選んだかがわからないという点である。B_1，B_2 が点線で結ばれているのは二つの点を B が区別できないという意味であり，B_1 と B_2 からなる集合は B の情報集合と呼ばれる（二つの点を線で結ぶのではなく楕円で囲む書き方もある)。このゲームは，まず A と B が同時に X か Y を選び，その結果を見てから A が U か V を選ぶという構造になっている。

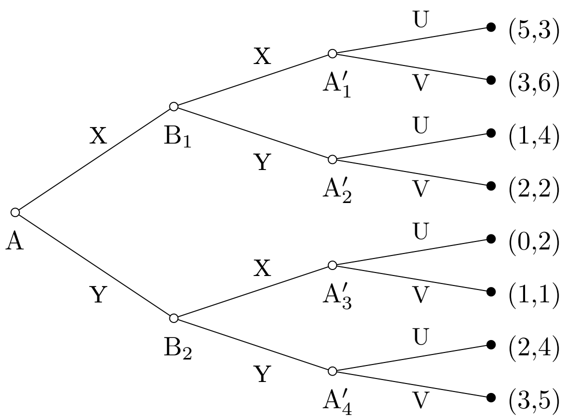


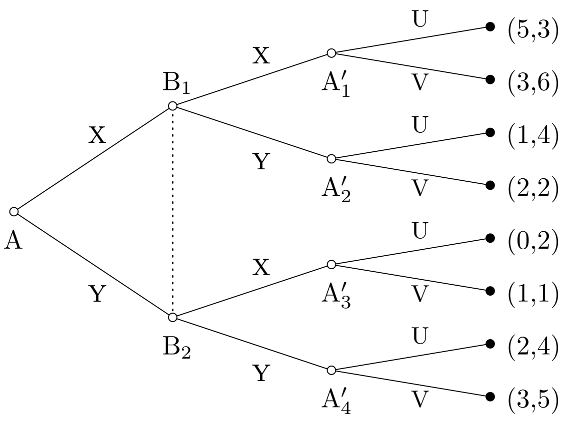
A_1'，A_2'，A_3'，A_4' における A の意思決定は上のゲームと同じであり，それを前提にすると X と Y の選択は次の標準型ゲームで表される。

		B の戦略	
		X	Y
A の戦略	X	5, 5	8, 2
	Y	7, 3	6, 4

この標準型ゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。混合戦略によるナッシュ均衡はあり（A が $\frac{1}{4}$ の確率で，B が $\frac{1}{2}$ の確率でそれぞれ X を選ぶ戦略の組み合わせ），それが（A_1'，A_2'，A_3'，A_4' における A の意思決定を含めて）このゲームの部分ゲーム完全均衡である。もちろん純粋戦略に限定すれば部分ゲーム完全均衡はない。このゲーム（図に表されたゲーム）では全体のゲームと A_1'，A_2'，A_3'，A_4' の各点から始まるゲームが部分ゲームになっているが，B_1 または B_2 から始まる部分ゲームはない。

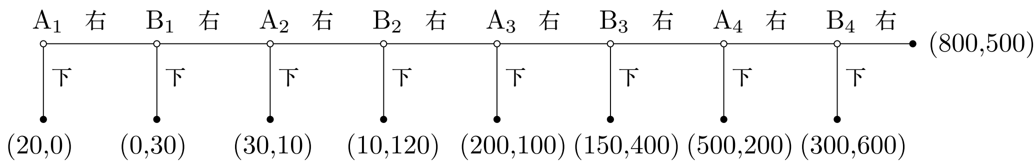
練習問題として次の二つのゲームを考えてみよう。





上のゲームでは A も B も X を選ぶ戦略の組が（A による U または V の選択と合わせて）部分ゲーム完全均衡になる。右側のゲームには二つの純粋戦略による部分ゲーム完全がある。確認してみていただきたい。

■ムカデゲーム　図のようなゲームを考えてみよう。



ムカデに似た図なのでムカデゲームと呼ばれる。ムカデの足はもっとたくさんあってもよい。プレイヤー A は A_1，A_2，A_3，A_4 で，プレイヤー B は B_1，B_2，B_3，B_4 で右か下かを選ぶ意思決定をする。右を選べば（B_4 を除いて）ゲームは続き，下を選べばゲームは終わる。左側の数字が A の利得である。逆向きに考えると，まず B_4 において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると A_4 において A は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると B_3 において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，$\ldots$，というように考えて行くと，結局 A_1 において A が下を選んでゲームは終わり，$(20,0)$ という利得が実現する。これがこのゲームの部分ゲーム完全均衡である。本当にそうなるだろうか？ A は A_1 で右を選ぶと次に B が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ。一方 B は B_1 で右を選ぶと次に A が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ，ということになっている。しかしともに少し我慢すれば 100 を越える利得が得られるのである。実際には何回か右に動き，適当な所で下に降りるという結果になるのではないかと予想されるしそのような実験結果もあるようだが，通常のゲーム理論の論理だけではなく心理学的な要因や，次の最後通牒ゲームと同様に利他的な行動を含めて考える必要があるかもしれない。

■最後通牒（つうちょう）ゲームとその実験について　部分ゲーム完全均衡の応用として最後通牒ゲームというのを紹介しよう。二人のプレイヤー A と B が 1 万円のお金を分け合うことを考える。そのルールは以下のようなものである。

(1). A が 1 円単位で自分と相手の取り分を提案する。自分が x 円取ると提案したとしよう。

(2). それに対して B は受け入れるか拒否するかを回答する。受け入れれば B の取り分は $10000-x$ 円であり，拒否すると二人とも 1 円ももらえない。そこでゲームは終わる。再提案はない。

動学的なゲームであるが図を描くまでもないだろう。A が提案した後の状況を考えると B は受け入れれば $10000-x$ 円もらえ，拒否すれば 1 円ももらえないから $x<10000$ ならば受け入れるのが最適であるが，$x=10000$ のときには受け入れても拒否しても結果は 1 円ももらえないので受け入れも拒否もどちらも最適な行動である。このとき受け入れを選ぶものと考えよう。すると，それに対応して A は $x=10000$，すなわち全部自分が取るという提案をするのが最適である。これが一つの部分ゲーム完全均衡である。一方，その提案に対して B が拒否を選ぶとすると A は $x=9999$，すなわち B に 1 円あげるという提案をすればよい。これが二つ目の部分ゲーム完全均衡である。1 円単位ではなくお金をいくらでも細分化できるならば後者の部分ゲーム完全均衡においても限りなく $x=10000$ に近づく。

最近はやりの実験経済学でこの最後通牒ゲームの実験が行われている。それによると以下のような事実が報告されている。

(1). プレイヤー B は自分の取り分があまりにも小さい（$10000-x=2000$ 程度以下の）提案は受け入れず A を道連れにしてともに 0 になることを選ぶ。

(2). プレイヤー A はそもそも相手にあまり不利な提案はせず，だいたい $x=5000$ から $x=7000$ くらいの提案をする。

これらの結果はゲーム理論が間違っていることを意味するのであろうか？ そんなことはない。そうではなくプレイヤーの利得（「効用」というべきかもしれない）が必ずしも自分の取り分だけでは決まらず，自分と相手との取り分の差にも依存するということを考えなければならないのである。上の 2 点について検討してみると。

(1). A の取り分と自分の取り分との差が大きいとプレイヤー B の利得が小さくなるのであまり x が大きい提案は受け入れない。これは人間が自分と比べて人の豊かさを羨む（あるいは妬む）という性質，つまり嫉妬心を持つということを意味すると考えられる。

(2). A にとっても同様に自分の取り分と B の取り分との差が大きいと利得が小さくな

るのであまり x が大きい提案はしない。これは人間が必ずしも利己的に行動するばかりではなく「公平性」や「平等」ということも意識しているということ，つまりより公平な提案をすることによって満足を得るということを意味すると考えられる。ただし，A の行動についてはあまり x が大きい提案は B によって拒否されるだろうという推測によるものであるという側面もあるかもしれない。

なお，このような場合に「人間は必ずしも合理的ではない」と言われることがあるが，それは違う。「利己的でない」ということと「合理的でない」ということとはまったく異なる。ゲーム理論で「合理的」とはプレイヤーが自らの利得を最大化するように行動（あるいは戦略）を選択するということであるが，上で述べたようにその利得が自らの取り分の大きさだけではなく相手との差にもよるとするならば，そのような利得を最大化することこそが「合理的」なのである。金儲け第一主義者にとっては金儲けを追求することが，他人のために尽くす人にとってはそうすることが「合理的」な行動なのである。

実験経済学の参考文献は，川越敏司「実験経済学」(東京大学出版会)。

さて，B が嫉妬心を持ち A が利他愛を持つようなケースをゲーム理論的に考えてみよう。それぞれの利得が次の式で表されるとする。

$$u_A = x_A - \frac{1}{12000}(x_A - x_B)^2$$

$$u_B = x_B - \frac{1}{2}(x_A - x_B)$$

u_A，u_B は各プレイヤーの利得，x_A，x_B はそれぞれの取り分であり $x_A \geqq x_B$ を前提とする。各プレイヤーにとって互いの取り分の差が大きいほど利得は小さくなる。B が A の提案を受け入れれば $x_B = 10000 - x_A$ であるが，拒否すれば $x_A = x_B = 0$，したがって $u_A = u_B = 0$ である。A の提案を x として（$x \geqq 5000$ とする）B がそれを受け入れたときの利得は $u_B = 10000 - x - \frac{1}{2}(2x - 10000) = 15000 - 2x$，拒否したときの利得は $u_B = 0$ であるから，$x \leqq 7500$ のときは受け入れることが最適であり，$x > 7500$ のときには拒否するのが最適である。つまり B は自分の取り分が 2500 円以上でなければ受け入れない。$\frac{1}{2}$ を変えればこの数字も変わる。混合戦略を考えるのは面倒なので $=$ のときは受け入れるものとしよう。それを前提にすると A の利得は

(1). B が提案を受け入れるときは $u_A = x - \frac{1}{12000}(2x - 10000)^2$ である。これは $x = 6500$ のとき最大値 5750 をとる。

(2). B が拒否するときは $u_A = 0$,

となる。したがって A の最適な戦略は $x = 6500$ を選ぶことであり，これは 7500 以下であるからその提案を B が受け入れるという戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。$\frac{1}{12000}$ を変えれば x の値も変わる。

B が $x = 7500$ 以下の提案しか受け入れないというのが嫉妬心によるものであり，A が $x = 6500$ を提案するというのが利他愛によるものである。A が利他愛を持たない場合（$u_A = x_A$ のとき）は $x = 7500$ を提案する（$x = 7500$ のとき $u_A \approx 5417 > 0$ である）。

2.4　経済学以外の例–アメリカ，ロシアの核戦略

プレイヤー　アメリカ，ロシア

戦略，行動　核兵器を持つか，持たないか

(1). 静学的なゲーム 1

アメリカとロシアが同時に戦略（行動）を選ぶ

		アメリカの戦略	
ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-10, -10	15, -15
	持たない	-15, 15	10, 10

数字は左側がロシアの利得，右側がアメリカの利得，ここで利得とは国民が得る経済的利益や精神的満足感などを合わせたもの。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 $\to$ 持つを選ぶのが最適

持つを選ぶと利得は -10，持たないを選ぶと利得は -15。

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 $\to$ 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 $\to$ 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 $\to$ 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）=（持つ，持つ）。

(2). 静学的なゲーム 2

アメリカの戦略

ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-10, -10	5, -15
	持たない	-15, 5	10, 10

相手が核兵器を持たないときに自分が持つ方がよいのか持たない方がよいのかが上のゲームと異なる。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は 5，持たないを選ぶと利得は 10。

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持つ），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持たない）の 2 つ。

このゲームは先に見た企業が製品の規格を選ぶゲームと似ているが，そのゲームとは違って 2 つのナッシュ均衡の一方がアメリカに，一方がロシアに有利なものにはなっておらず，（持たない，持たない）が両者にとってより望ましい均衡である。したがって協調してともに「持たない」を選ぶように促す仕組みがあればその均衡が実現できるかもしれないので**協調ゲーム (coordination game)** と呼ばれる。互いに協力はできないので「協力ゲーム」ではなくあくまでも「非協力ゲーム」である。次の動学的なゲームはこの（持たない，持たない）という均衡を実現する 1 つの仕組みになるかもしれない。
なおこのゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする)。

(3). 動学的なゲーム

静学的なゲーム 2 において先にロシアが行動を選び，それを見てからアメリカが行動を選ぶ。逆でもよい。

(i) ロシアの戦略は

[1] 持つ

[2] 持たない

の 2 通り。

(ii) アメリカの戦略は

[1] もも：ロシアが持てば持つ，持たなければ持つ。

[2] もな：ロシアが持てば持つ，持たなければ持たない。

[3] なも：ロシアが持てば持たない，持たなければ持つ。

[4] なな：ロシアが持てば持たない，持たなければ持たない。

■標準型ゲームで表す　標準型ゲームとは戦略の組み合わせとそれに対する利得の組み合わせで表現するもの。

アメリカの戦略

ロシアの戦略		もも	もな	なも	なな
	持つ	-10,-10	-10,-10	5,-15	5,-15
	持たない	-15,5	10,10	-15,5	10,10

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 「もも」または「もな」を選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 「もな」または「なな」を選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが「もも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが「もな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

[3] アメリカが「なも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

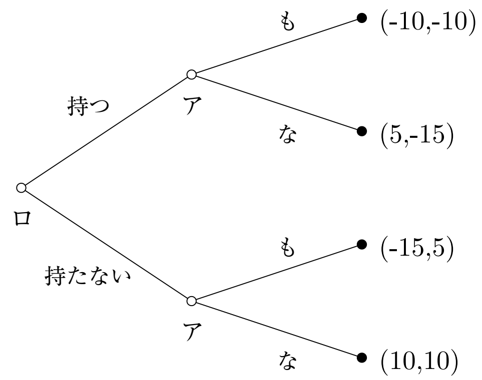
[4] アメリカが「なな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■部分ゲーム完全均衡　ナッシュ均衡はここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，もも），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，なな），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，もな）の 3 つ。

しかし（持つ，もも）はロシアが持たないを選んだときにアメリカが持つを選ぶという前提に立っており不合理。これは信用できない脅しである。また（持たない，なな）はロシアが持つを選んだときにアメリカが持たないを選ぶという前提に立っており不合理。合理的なのは（持たない，もな）。

別の方法で確認する。

■展開型ゲームで表す　展開型ゲームとは行動選択の順序を含めて図などを使って表現するもの。



ゲームを後ろから解く。上の「ア」でアメリカは持つを選ぶのが合理的で，下の「ア」では持たないを選ぶのが合理的。そのようなアメリカの行動選択を見越すとロシアは「持たない」を選ぶ。したがって（持たない，もな）が均衡。上下の「ア」から先を１つ１つのゲーム（部分ゲーム）と見るとそれぞれのゲームで均衡（アメリカが最適な戦略を選ぶよう）になっているのは（持たない，もな）のみ。これが部分ゲーム完全均衡である。

なお静学的ゲーム１を動学的なゲームにしても，ともに核兵器を持つのが均衡であることは変わらない。

(4). チキンゲーム

静学的ゲーム１に戻って少し設定を変える。利得が次のようであるとする。

		アメリカの戦略	
ロ の		持つ	持たない
シ 戦	持つ	-20, -20	15, -15
ア 略	持たない	-15, 15	10, 10

ともに核兵器を持つと戦争の危険性が高まり利得が -20 になる。相手が持たないときに持った方が有利であることは変わらない。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 $\rightarrow$ 持たないを選ぶのが最適

持つを選ぶと利得は −20，持たないを選ぶと利得は −15。

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持たない），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持つ）の 2 つ。静学的ゲーム 2 と同様に均衡は 2 つあるが「持つ」を選んだ方が有利であるという点が異なる。これを行動を順に選ぶ動学的なゲームにすれば先に選ぶ方が「持つ」を選ぶ均衡が部分ゲーム完全均衡となるのは明らかである。

このタイプのゲームは「チキン（弱虫）ゲーム」と呼ばれる[*13]。本来のチキンゲームは次のようなものである。

> 2 人の人が乗った車が崖に向かって走っている。一方が先に逃げればその時点で車は止まり，逃げた方が負け（利得 −15），残った方が勝ちとなる（利得は 15）。どちらも逃げなければ車は崖から落ちて 2 人とも大ケガをする（利得 −20）。たまたま同時に逃げれば引き分けで利得は 10。

「核兵器を持つ」を「逃げない」，「核兵器を持たない」を「逃げる」と変えればゲームの構造はまったく同じである。

このゲームも企業が規格を選ぶゲームに類似したゲームである。ただし互いに異なる規格を選ぶことがナッシュ均衡になる。経済の例としては，2 つの企業がある財の旧製品を売るか新製品を売るかを選択する次のようなゲームが考えられる。

		企業Bの戦略	
企業Aの戦略		新製品	旧製品
	新製品	-20, -20	15, -15
	旧製品	-15, 15	10, 10

互いに新製品を売れば市場を分け合うので開発費をかけた割には売れずに利潤はともに −20。ともに旧製品を売れば消費者はそれしかないからそこそこ売れ，費用はあまりかからないのでともに利潤は 10。一方が新製品，他方が旧製品を売れば新製品を売る企業はたくさん売れるので開発費用を回収してなお利潤は 15，旧製品を売る企業はまったく売れずに利潤は −15 となる。

*13 英語ではチキン (chicken) という言葉が弱虫を意味するらしい。

ナッシュ均衡は（企業A，企業B）＝（新製品，旧製品）と（企業A，企業B）＝（旧製品，新製品）である。
チキンゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする)。

2.5　不完備情報ゲームと完全ベイジアン均衡

2.5.1　不完備情報ゲーム

ここまで考えてきたゲームでは，各プレイヤーはゲームの構造だけでなく相手がどのようなプレイヤーであるか，すなわち相手の利得がどのようになっているかが分かっていると仮定していた。しかし，相手がどのようなプレイヤーであるかがよく分かっていない，つまり情報が十分ではない状況で行動しなければならないゲームもあるであろう。そのような，相手がいかなるタイプのプレイヤーであるかについての情報が十分ではないゲームは**不完備情報ゲーム (incomplete information game)** または，このようなゲームではプレイヤーのもっている情報が対称的ではないので**非対称情報ゲーム (asymmetric information game)** と呼ばれる[14]。具体的に次のゲームを考えてみよう。

ゲーム 5　ある産業で活動する企業 A と企業 B がある。企業 B は企業 A と同種の製品を作って戦いを挑むか，それとも異なる製品を作って正面からの対決を避けるかを選ばなければならない。企業 A について**強いタイプ（タイプ S）**と**弱いタイプ（タイプ W）**の 2 つの可能性があると仮定する。企業 A 自身は自分がどちらのタイプであるかがわかっているが，企業 B にはわからないものとする。企業 A がどちらのタイプであるかによってそれぞれの企業がある戦略を選んだときに得られる利得も異なっている。ここで，企業 B が戦略を選ぶ前に企業 A はある種の投資を行う必要がある。その投資には X，Y の 2 種類（投資 X と投資 Y と呼ぶ）があり，企業 A がタイプ S であるかタイプ W であるかによってその投資にかかるコストが異なる。たとえばタイプ S の場合は独自のアイデアが豊富で個性的な広告を作るのが得意であるのに対して，タイプ W の場合は他社の広告とよく似た広告を出すのが得意であるというように。企業 A がどちらの投資をするかは，投資そのものにかかる費用によって企業 A の利得に影響するが，企業 A と B とのゲームの結果には影響を与えない。したがって企業 A がどちらの投資を選ぶかは企業 B の利得には

[14] 情報が対称的でないとは，一方のプレイヤーが知っていることを他方のプレイヤーが知らないことを言う。

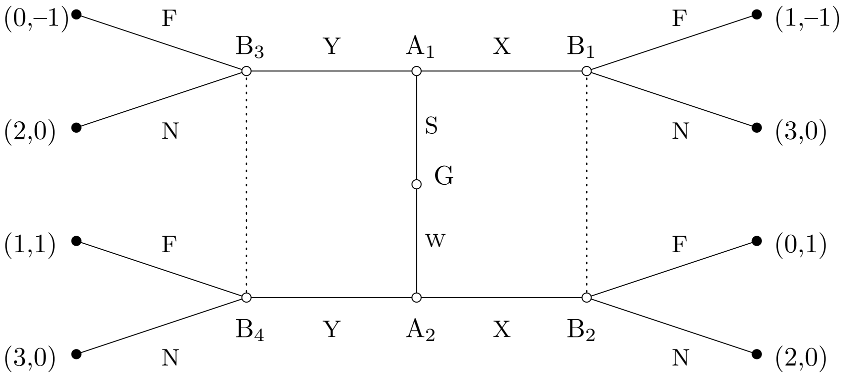


図 2.2　ゲーム 5–不完備情報ゲーム

関係しないものと仮定する。

ゲームが始まる前に企業 B は，企業 A がどちらのタイプであるかについて何らかの情報にもとづいてある確率的な推測を抱いているものする[*15]。具体的に

ゲーム開始前の企業 B の推測　企業 B は，企業 A が確率 2/3 でタイプ S であり，確率 1/3 でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と仮定する。一般的には

ゲーム開始前の企業 B の推測（一般的な表現）　企業 B は，企業 A が確率 p でタイプ S であり，確率 $1-p$ でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と表現される。この確率は推測の強さを示すものと考えることができる。

このような不完備情報のゲームにおいては，企業 A，B の他に企業 A のタイプを選ぶ，またそれだけの役割を担った第 3 のプレイヤーを考え，それを**自然 (Nature)** と名付ける。ゲーム 5 を展開型ゲームで表すと図 2.2 のようになる。点 G は自然が企業 A のタイプを選ぶ点を表す。F は企業 B が A に戦いを挑む (Fight) ということを，N は戦いを避ける (Not fight) ことを意味している。企業 A がタイプ S の場合ゲームは A_1 から出発し，そこで企業 A が投資 X か Y を選び，その結果を見て企業 B が戦いを挑むか避けるかを決める。企業 A が投資 X を選んだ場合ゲームは右に進んで点 B_1 に達し，投資 Y を選んだ場合は左に進んで点 B_3 に達する。企業 A がタイプ W の場合にはゲームは A_2 か

[*15] ここで言う推測は英語文献では belief という言葉が使われており，『信念』と訳す方がよいのかもしれないが，日本語で信念という言葉が表すほど強い意味ではないので推測と呼ぶことにする。R. ギボンズ（福岡正夫他訳）では信念と訳されている。

ら出発して企業 A が選ぶ投資に応じて同じように点 B_2 または B_4 へ進む。図の点 B_1 と B_2 とが点線で結ばれているのは，企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。つまり企業 B は企業 A が X を選んだか Y を選んだかはわかるがタイプ S かタイプ W かはわからないので，ゲームが B_1 か B_2 のどちらかに到達していることはわかってもそのいずれであるかはわからない。同様に点 B_3 と B_4 とが点線で結ばれているのも企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。点 B_1 と B_2 からなる集合，および点 B_3 と B_4 からなる集合はともに企業 B の**情報集合**と呼ばれる。あるプレイヤーの情報集合とはそのプレイヤーにとって区別できない（それぞれの点においてプレイヤーが持っている情報が同じであるような）点の集合である。

このようなゲームにおいては，企業 B は直接企業 A のタイプを知ることはできないが企業 A の投資行動を見て間接的にそのタイプを見抜くことができる可能性がある。企業 A の側から見れば自分のタイプを間接的に相手に知らせることができる，あるいは知られてしまう場合があるということである。そのようなとき，企業 A による投資行動がそのタイプの**シグナル**になると言う。あるプレイヤーの行動がそのプレイヤーのタイプのシグナルの役割を果たす可能性があるようなゲームを**シグナリングゲーム (signaling game)** と呼ぶ。ただし，このゲーム 5 の均衡では企業 A の投資はシグナルにはならない。演習問題 32 と次節でそのような例を扱う。

2.5.2　完全ベイジアン均衡

さてこのゲームの均衡を考えるのであるが，まずこのゲームには全体のゲーム以外には部分ゲームがないので部分ゲーム完全均衡の概念は使えない。あるいは，ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡とは同じ意味になる。（全体のゲーム以外の）部分ゲームとはゲームの途中から先が一つの独立したゲームになっていなければならず，その部分ゲーム以外の点におけるプレイヤーの行動や利得の影響を受けてはならない。ゲーム 5 の場合，点 A_1 から先のゲームにおいては企業 B が点 B_1 と B_2，および B_3 と B_4 とを区別できないため，点 A_2 から始まるゲームと完全に分離されていないからそのゲームにおけるプレイヤーの利得の影響を受けることになり部分ゲームにはならない。同様に点 A_2 から始まるゲームも部分ゲームにはならない。また，点 B_1 と B_2 とは企業 B にとって区別できない点であるため，B_1 あるいは B_2 から始まる部分ゲームというのは考えることができない。同様に，B_3 あるいは B_4 から始まる部分ゲームというのも考えられない。部分ゲームはプレイヤーがはっきり区別できる点から出発しなければならない。

企業 B は区別できない点においてどのようにして戦略を選ぶであろうか。もし企業 A が投資 X を選んだとすると，企業 B は自分が点 B_1 か B_2 のどちらかにいるということはわかるがどちらにいるかはっきりはわからない。しかし，はっきりはわからないまでも『多分 B_1 にいるのではないか』とか『まず間違いなく B_2 にいるであろう』とかいうよう

な推測あるいは見通しをもって自分の戦略を選ぶことになるのではないだろうか。具体的には

企業 A が投資 X を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 X を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は q，タイプ W である確率は $1-q$ というような推測を抱くものとする。

先に，ゲームが始まる前に企業 B は『企業 A は確率 2/3 でタイプ S で，確率 1/3 でタイプ W である』と思っていると仮定した。それはまだゲームが始まっていない段階で入手可能な情報をもとにした推測であったが，企業 A が X，Y いずれかの投資を選んだことが明らかになれば，当初の情報にその情報を加えて新たな推測を立てることになる。その推測がゲームが始まる前の推測と同じ場合もあれば異なることもある。このように新たに獲得した情報を用いて推測を更新していくプロセスをベイズ的な（ベイジアン，Bayesian）プロセスと呼ぶ。

企業 B の推測が上のようなものであるとすると，企業 A が X を選びそれに対応して企業 B が戦略 F を選んだときに企業 B が得られる利得の期待値（平均値）は次のように表される。

$$(-1)q + 1(1-q) = 1 - 2q \tag{2.9}$$

一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $q < 1/2$ ならば F を選んだ方が，$q > 1/2$ ならば N を選んだ方が利得が大きい。これが『企業 B の最適反応』である。不完備情報ゲームにおいては，最適反応は区別できない点における相手のタイプについてのプレイヤーの推測の値によって異なったものになる可能性がある。

企業 A が Y を選んだ場合はゲームは点 B_3 または B_4 に進むが，そのどちらであるか，すなわち企業 A のタイプについての企業 B の推測を企業 A が X を選んだ場合と同様に表すことができる。それを

企業 A が投資 Y を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 Y を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は r，タイプ W である確率は $1-r$ というような推測を抱く。

と表現する。すると企業 B が戦略 F を選んだ場合の利得の期待値は

$$(-1)r + 1(1-r) = 1 - 2r \tag{2.10}$$

となる。一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $r < 1/2$ ならば戦略 F が，$r > 1/2$ ならば N が『企業 B の最適反応』である。

不完備情報ゲームの均衡はプレイヤーの戦略だけではなく，情報が十分でない中で意思決定をするプレイヤーの推測も含めて定義されなければならない。そこで次のような均衡

概念を用いる。

完全ベイジアン均衡

(1). 企業 A の戦略は企業 B の戦略に対して最適反応になっている。

(2). 企業 B の戦略は，企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測のもとで最適反応になっている。

(3). 企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測は，ゲームが始まる前の企業 B の推測と企業 A の均衡戦略に対して整合的な (consistent)（矛盾しない）ものである。

以上の 3 つの条件を満たす均衡を**完全ベイジアン均衡 (perfect Bayesian equilibrium)（あるいは完全ベイズ均衡）**と呼ぶ。

最初の 2 つの条件は，企業 B の利得が相手のタイプについての推測にもとづいて計算されるということを除いて，各プレイヤーの戦略が互いに最適反応になっているというナッシュ均衡の条件と同じであるが，最後の条件が完全ベイジアン均衡を特徴づけるものになっている。具体的にゲーム 5 の完全ベイジアン均衡を考えてみよう。

ゲーム 5 には以下の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 X を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 N を選び，Y を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 であり，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さい（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)』という推測を企業 B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 Y を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 F を選び，Y を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測を企業 B が持つ。

それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

完全ベイジアン均衡 1 の確認

(1). 企業 A の戦略の最適性

企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利

得は 3，Y を選んだ場合の利得は 0 であるので X を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 2，Y を選んだ場合の利得は 1 であるので X を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性
企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は

$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

であるので，N が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F を選んだときの利得の期待値は企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいので

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きく，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，F が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性
企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が X を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が X を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 Y は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦略なので，企業 A が Y を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。つまりどのような推測を持ってもよい。

完全ベイジアン均衡 2 の確認

(1). 企業 A の戦略の最適性
企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利得は 1，Y を選んだ場合の利得は 2 であるので Y を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 0，Y を選んだ場合の利得は 3 であるので Y を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性
企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は，企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいから

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きいので，F が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F

を選んだときの利得の期待値は

$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

で，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，N が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性
企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が Y を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が Y を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 X は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦略なので，企業 A が X を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。したがってどのような推測を持ってもよい。

以上によって 2 つの均衡が完全ベイジアン均衡であることがわかる。

2.5.3　合理的な (reasonable) 完全ベイジアン均衡

ゲーム 5 には 2 つの完全ベイジアン均衡があるが，どちらも合理的な均衡であろうか。ここで問題になるのは**企業 B の推測の合理性**である。完全ベイジアン均衡の概念では，均衡において企業 A が選ぶ戦略についての企業 B の推測の整合性はチェックしたが，均衡で選ばれない戦略についての推測の合理性は検討していない[*16]。しかし，均衡で選ばれない戦略についての推測がどのようなものでもよいということではないであろう。特に，『このタイプの企業 A はこの戦略を選んでも得になることはないから選ぶはずがない』と言えるような場合，その戦略を選ぶ確率が正（プラス）であると推測することは合理的ではないことになる。

具体的に完全ベイジアン均衡 2 について考えてみよう。この均衡では，企業 A がもしも均衡戦略ではない投資 X を選んだ場合，『その企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さい，逆に言えばタイプ W である確率が 1/2 より大きい』と企業 B が推測するという前提に立っている。しかしタイプ W の企業 A が合理的に行動するとして投資 X を選ぶことがあるであろうか。タイプ W の企業 A が X を選んだ場合に得ることができる利

[*16] ここでは整合性 (consistency) という言葉と合理性という言葉を区別して使う。推測が整合的であるというのは，ゲームの途中の段階において，ゲームが始まる前に抱いていた推測と始まってから得た情報および想定されている均衡を構成する戦略と矛盾しない推測を持つということである。一方合理性とは，（整合性に加えて）ゲームの構造，特にプレイヤーの利得から見て相手がある戦略を選ぶ可能性があるかどうかを検討した上で理に適った推測を持つということを意味する。

得の最大値は，企業 B が N を選んだときの 2 である。一方均衡戦略の Y を選べば企業 B が N を選んでくれるのでタイプ W の企業 A は 3 の利得を得ることができる。ということは，タイプ W の企業 A にとっては均衡戦略を捨ててわざわざ X を選ぶ意味がない，あるいはいわゆるインセンティブ (incentive) がないということになる。したがって X を選んだ企業 A が確率 1/2 以上でタイプ W であるというこの均衡での企業 B の推測は合理的ではない。一方，タイプ S の企業 A が投資 X を選んだ場合はどうであろうか。そのとき，企業 B が N を選ぶと企業 A は 3 の利得を得ることができるが，これは均衡におけるこのタイプの企業 A の利得 2 を上回っているので，タイプ S の企業 A には投資 X を選ぶインセンティブがある。したがって企業 B は，企業 A がもしも投資 X を選んでくればその企業 A はタイプ S に違いないと考えるべきであるということになる。企業 B がそのような推測を持った場合，戦略 N を選んでタイプ S の企業 A との対決を避けることが最適となり完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

整理すると次のように表現される。

完全ベイジアン均衡の合理性の条件 以下の条件が満たされているときには，企業 B は，均衡戦略とは異なるある戦略を選ぶ企業 A がタイプ W である確率はゼロである（タイプ S である確率は 1 である）という推測を持つべきである。また，そうではない推測にもとづいて成立している完全ベイジアン均衡は合理的な均衡ではない。

(1). タイプ W の企業 A が均衡戦略とは異なるある戦略を選んで得られる**利得の最大値が均衡戦略によって得られる利得より小さい**。

(2). 一方，タイプ S の企業 A がその戦略を選んで得られる利得の最大値は均衡戦略によって得られる利得より大きい。

この条件の中でタイプ S とタイプ W の関係が逆の場合には，タイプ S である確率はゼロであるという推測を持つべきであるということになる。

以上のことから完全ベイジアン均衡 2 は合理的な均衡ではないことがわかる。では完全ベイジアン均衡 1 の方はどうであろうか。この均衡では，企業 A が均衡戦略ではない投資 Y を選んだ場合，企業 B はその企業 A がタイプ W である確率が 1/2 より大きい（1 でもよい）と推測するということが前提となっている。先ほどと同じように考えてみよう。タイプ W の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 3 であり，これは均衡における利得 2 より大きい。一方，タイプ S の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 2 であり，これは均衡における利得 3 より小さい。したがってタイプ W の企業 A には投資 Y を選ぶインセンティブがあるが，タイプ S の企業 A にはないことになり，企業 A が投資 Y を選んだときに企業 B は，『その企業 A がタイプ W である確率は 1 であるという推測を持つべきである』ということになるが，確率が 1/2 より大きいという推測も合理的なものである。

以上の議論によって，**ゲーム 5 の合理的な均衡は完全ベイジアン均衡 1 である**，という

結論を得る。

2.5.4　オークションの理論：ベイジアン・ナッシュ均衡

不完備情報ゲームの 1 つの応用としてオークションの理論を紹介する。ここで扱うゲームは動学的なゲームではなく静学的なゲームである。ある美術品を巡るオークションを取り上げる。オークションと言っても公開の場で行われるものではなく，密封した封筒に自分がつける価格を書いて提出するシールドビッド・オークション (sealed-bid auction)（入札）を考える。誰がこの美術品を落札し，いくらで購入するかについて主に 2 通りの決め方がある。

(1). **シールドビッド・ファーストプライス・オークション (sealed-bid first-price auction)**（以下「ファーストプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人がその価格で美術品を購入する。
2 人の人，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 がこのオークションに参加する。各プレイヤーがこの美術品から得る価値は v_1（億円）と v_2（億円）であるが，それぞれ相手がどのような評価をしているかはわからない。各々の評価はこの美術品をいくらで買う気持ちがあるかということを表す[*17]。v_1，v_2 は 0 から 1 までのあらゆる値（実数値）をとる可能性があり，またどのような値も同じ確率で起きるものとする。このような確率分布は一様分布 (uniform distribution) と呼ばれる。一様分布においては，たとえば v_1 が 0.2 から 0.5 までの値をとる確率は $\frac{0.5-0.2}{1-0}=0.3$ となる。他も同様である。厳密に 0.2 となる確率は 0 であり，常にある範囲の値をとる確率を考える。各プレイヤーにとって相手の評価は正確にはわからないが上記のような確率分布であることは知っているものとする。このゲームでは両方のプレイヤーが情報の非対称性に直面している。入札に勝ったときの利得は自分の美術品に対する評価額と入札額（支払額）の差に等しく，負けたときの利得は 0 である。一様分布の仮定によって 2 人の入札額が等しくなる確率は 0 である。各プレイヤーは不確実（確率的）な状況で戦略を選択するので期待利得を最大化するように戦略を選ぶ。各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 で表し，以下のような戦略の組がナッシュ均衡であることを証明しよう。

$$p_1=\frac{v_1}{2},\ p_2=\frac{v_2}{2}$$

v_1，v_2 は各プレイヤーのタイプを表すものと考えることができる。それぞれのタイプのプレイヤーがどのような戦略を選ぶかを決めなければならない。この戦略の

[*17] 買ってから転売するつもりであれば，同じような情報を持っている限り両者の評価が異なることはないであろう。評価が異なるとすれば各プレイヤーにとっての価値は自分で鑑賞して得られる効用を金額で表したものと見なされる。

組がナッシュ均衡であることを示すには，各プレイヤーにとって相手がこの戦略を選んでいるときに自分もそれを選ぶことが最適であることを示せばよい。

プレイヤー 1 が上記の戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略（入札額）p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2}$ は 0 から 0.5 までの値を等しい確率でとる（$0 \leqq v_1 \leqq 1$ であるから）。したがって $0 \leqq p_2 \leqq 0.5$ として入札に勝つ確率は $\frac{p_2}{0.5} = 2p_2$ である[*18]。$p_2 > 0.5$ の入札をしても勝つ確率は上がらず（$p_2 = 0.5$ で勝つ確率は 1 になる）支払額が増えるだけなのでそのような入札は行わない。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$2p_2(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - p_2 v_2)$$

となる。これは p_2 の二次関数なので最大値を求める手法により（微分してもよいが）

$$-2\left[\left(p_2 - \frac{v_2}{2}\right)^2 - \frac{v_2^2}{4}\right]$$

と変形され期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

が得られる。以上によって上記の戦略の組がナッシュ均衡であることが示された。このゲームのように情報が非対称な静学的ゲームで相手のタイプについての確率的な推測にもとづいて各プレイヤーが期待利得を最大化する戦略を選ぶナッシュ均衡は，**ベイジアン均衡**あるいは**ベイジアン・ナッシュ均衡**と呼ばれる。動学的なゲームの完全ベイジアン均衡に対応する。

■ファーストプライス・オークションの均衡について　プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

[*18] 負ける確率は $\frac{0.5 - p_2}{0.5} = 1 - 2p_2$ である。

と表す。たとえば $p_2=\frac{v_2}{2}+1$ ならば $g_2(p_2)=2p_2-2$ である。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1>p_2$ となる確率）は $g_2(p_1)$ に等しい（一様分布の仮定によって)。そのとき期待利得は

$$(v_1-p_1)g_2(p_1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1-p_1)g_2'(p_1)-g_2(p_1)=0$$

が得られる。プレイヤー 1 の入札額 $p_1=p_1(v_1)$ がこの式を満たすことが均衡の条件となる。プレイヤー 1 と 2 が同一の行動をとるとすると $p_2(v_2)$ と $p_1(v_1)$ が同じ関数になるのでそれらの逆関数 $g_2(p_2)$ と $v_1=g_1(p_1)$ も同じ関数となり，微分も同じ関数になる。したがって $g_2'(p_1)=g_1'(p_1)$ が得られるから上の式は

$$(v_1-p_1(v_1))g_1'(p_1)-g_1(p_1)=0$$

と書き直される。さらに逆関数の微分の関係より[*19]，

$$g_1'(p_1)=\frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，$g_1(p_1)=v_1$ と合わせて

$$(v_1-p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)}-v_1=0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1-p_1(v_1))-v_1p_1'(v_1)=0 \tag{2.11}$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1=\frac{v_1}{2}$$

である。実際 $p_1'=\frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1-\frac{v_1}{2})-\frac{1}{2}v_1=0$$

が成り立つ（この計算は微分方程式を解くことに相当する)。

[*19] $g_1'(p_1)$ は $\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1}$ から得られ，$p_1'(v_1)$ は $\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}$ から得られ，

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1}=\frac{1}{\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}}$$

が成り立つ。

■微分方程式のいくらか正式な解法　関数の微分を含む方程式が微分方程式である。

$$x(v_1) = v_1 p_1(v_1)$$

とおくと

$$x'(v_1) = p_1(v_1) + v_1 p_1'(v_1)$$

であるから (2.11) は次のように書き直される。

$$v_1 - x'(v_1) = 0 \text{ すなわち } x'(v_1) = v_1$$

したがって微分の公式を逆に用いて（つまり積分の公式）

$$x_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + C$$

が得られる（C は定数)。これにより

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{C}{v_1}$$

となる。定数 C は（x を）微分すると消えるので微分方程式の条件だけでは正確に再現できないが，オークションの意味を考えることによって決めることができる。v_1 がごく小さいときにはこの美術品に価値を感じないので p_1 もほとんど 0 になる。よって $C = 0$ でなければならない。以上から

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1$$

が求まる。

(2). **シールドビッド・セカンドプライス・オークション (sealed-bid second-price auction)**（以下「セカンドプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人が，2 番目に高い価格をつけた人の入札額で美術品を購入する。
上のファーストプライス・オークションと同じ状況を仮定する。このとき以下のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示す。

$$p_1 = v_1,\ p_2 = v_2$$

プレイヤー 1 がこの戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > v_1$ となる場合であるが v_1 は 0 から 1 までの値を等しい確率でとるので勝つ確率は p_2 である。勝ったときの利得は $v_2 - v_1$ に等しい。この値は p_2 には関係しない。$p_2 > v_2$ のときはオークションに勝てば利得は負（マイナス）で負けたときは 0 であるから，v_2 以上の p_2 で入札することはない。$v_2 - v_1 < 0$ のときは勝たない方がよいが，$p_2 = v_2$ を入札すれば勝つことはない。

一方 $v_2 - v_1 > 0$ のときには勝った方がよいが，このときも $p_2 = v_2$ を入札すれば望み通りになる[*20]。以上によって自分の評価額に等しい額を入札することがお互いに最適であるからそのような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。
セカンドプライス・オークションでは自分の入札額は支払額に影響せず相手の入札額によって支払額が決まるのでオークションに勝つか勝たないかだけを考えて自分の入札額を決めればよい。相手の入札額が自分の評価より高いか低いかによってオークションに勝つ方がよいか負ける方がよいかが決まる。したがって自分の評価に等しい額を入札することが最適な行動となるのである。このセカンドプライス・オークションは公共財の供給に関するグローブズメカニズムとよく似ている。

ファーストプライス・オークションよりセカンドプライス・オークションの方が入札額は高いが，2 番目に高い価格で購入することができるので実際に支払う額も高くなるわけではない。実はどちらのオークションでも支払額の期待値は等しい。ファーストプライス・オークションの場合には入札額が支払額に等しいのでプレイヤー 1 が落札する場合の支払額は $\frac{v_1}{2}$ に等しく，プレイヤー 2 が落札する場合の支払額は $\frac{v_2}{2}$ に等しい。一方セカンドプライス・オークションの場合にプレイヤー 1 が落札するのは $v_1 > v_2$ のときであるが，そのときの支払額は v_2 に等しい。そして $v_1 > v_2$ という条件のもとでの v_2 の期待値は $\frac{v_1}{2}$ である。同様にプレイヤー 2 が落札するのは $v_2 > v_1$ のときであるが，そのときの支払額は v_1 に等しく，$v_2 > v_1$ という条件のもとでの v_1 の期待値は $\frac{v_2}{2}$ である。したがってセカンドプライス・オークションでの支払額の期待値はファーストプライス・オークションでの支払額に等しい。

■3 人以上の場合　人数が 3 人以上の場合についてファーストプライス・オークションを考えてみよう。n 人の人がオークションに参加し，それぞれの評価額はすべて異なっているものとする。プレイヤー $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ の評価額を v_i で表す。やはり v_i はそれぞれ 0 から 1 までの値をとり，確率分布は一様分布であるとする。また各 v_i は独立で相関関係はないと仮定する。プレイヤー i の入札額を p_i で表す。このとき次のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。

$$\text{各プレイヤー } i \text{ について } p_i = \frac{n-1}{n} v_i$$

$n = 2$ のときには上で見た結果と一致する。あるプレイヤー i 以外のすべての人々がこの戦略を選んでいるとき，そのプレイヤー i がオークションに勝つのは他のすべての人々の評価 v_j について $p_i > \frac{n-1}{n} v_j$ が成り立つ場合である。プレイヤー i があるプレイヤー j に勝つ確率は $\frac{n}{n-1} p_i$ であるから，独立かつ一様分布との仮定により $n-1$ 人すべてに勝って落札する確率は $\left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-1}$ に等しい。勝ったときの利得は $v_i - p_i$ であるから期待利

[*20] $v_2 = v_1$ となる確率は 0 なので考える必要はないが，$p_2 = v_2$ を入札してそのようなことがあるとすれば勝っても負けても利得はともに 0 である。

得は

$$\left(\frac{n}{n-1}p_i\right)^{n-1}(v_i - p_i)$$

と表される。この式を p_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n-1}p_i\right)^{n-2}[(n-1)v_i - np_i] = 0$$

が得られ

$$p_i = \frac{n-1}{n}v_i$$

が求まる。i が誰であっても話は同じであるから上記の戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡である。プレイヤー i が勝ったときの支払額はもちろんこの $\frac{n-1}{n}v_i$ に等しい。

次にセカンドプライス・オークションを考える。2 人の場合と同様に

各プレイヤー i について $p_i = v_i$

という戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることが示される。2 人のケースと議論はほとんど変らない。他のプレイヤーがこの戦略を選んでいるとしてプレイヤー i がオークションに勝つのはすべての $j \neq i$ について $p_i > v_j$ の場合であり，その確率は p_i^{n-1} である。2 番目に高い人の評価を v_k としてプレイヤー i が勝ったときの利得は $v_i - v_k$ であるが，これは p_i の値には関係しない。ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ のときは勝たない方がよいが $p_i = v_i$ を入札すれば勝つことはない[*21]。一方すべての $j \neq i$ について $v_i > v_j$ のときには勝った方がよいが，$p_i = v_i$ を入札すればそのようになる。したがって上記の戦略の組はベイジアン・ナッシュ均衡である。

3 人以上の人々がいてもセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しいことが言える。セカンドプライス・オークションでプレイヤー 1 が落札する場合を考える。話をわかりやすくするためにプレイヤー 1 の評価額が最も高く，以下プレイヤー 2，3，$\cdots$，n の順になっているものとする。すなわち $v_1 > v_2 > \cdots > v_n$ となっている。プレイヤー 1 が落札するが支払額は v_2 に等しいから，v_2 の期待値を求めなければならない。プレイヤー $i(i = 2, 3, \cdots, n)$ の評価額 v_i の期待値を $E(v_i)$ とすれば

$$E(v_i) = \frac{n+1-i}{n+2-i}v_{i-1} \tag{2.12}$$

となる。これを数学的帰納法によって証明しよう。まずプレイヤー n について $v_{n-1} > v_n$ という条件のもとでの v_n の期待値は

$$E(v_n) = \frac{v_{n-1}}{2} \tag{2.13}$$

[*21] ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ であるとは自分以外の誰かの評価が自分の評価を上回っているということである。

に等しい。したがってまず $i=n$ のときに (2.12) が成り立つ。次にプレイヤー $n-1$ について $v_{n-2}>v_{n-1}>v_n$ という条件のもとでの v_{n-1} の期待値は

$$E(v_{n-1})=\frac{v_{n-2}+v_n}{2}$$

と表される。v_{n-2} の値がが決まっているとして，v_n の値も決まっていれば $E(v_{n-1})$ も決まるが v_n が確率的に変る（確率変数であると言う）ということを考慮すれば $E(v_{n-1})$ も確率的に変る。また v_{n-1} 自身も確率的に変る。その上で $E(v_{n-1})$ と $E(v_n)$ の期待値を求めそれらをあらためて $E(v_{n-1})$，$E(v_n)$ と書くことにする。以下同様である。すると

$$E(v_{n-1})=\frac{v_{n-2}+E(v_n)}{2}$$

と表され，(2.13) より

$$E(v_{n-1})=\frac{2}{3}v_{n-2}$$

が得られる。したがって $i=n-1$ のときに (2.12) が成り立つ。そこで $i=k$ のときに成り立つと仮定して $i=k-1$ のときにも成り立つことを証明しよう。$i=k$ のときに成り立つから

$$E(v_k)=\frac{n+1-k}{n+2-k}v_{k-1}=\frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1}) \tag{2.14}$$

である（v_{k-1} が確率変数であるということを考慮して）。次にプレイヤー $k-1$ について $v_{k-2}>v_{k-1}>v_k$ という条件のもとでの v_{k-1} の期待値は

$$E(v_{k-1})=\frac{v_{k-2}+v_k}{2}=\frac{v_{k-2}+E(v_k)}{2}$$

と表される（v_k が確率変数であるということを考慮して）。(2.14) をこれに代入すると

$$E(v_{k-1})=\frac{v_{k-2}+\frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1})}{2}$$

より

$$E(v_{k-1})=\frac{n+2-k}{n+3-k}v_{k-2} \tag{2.15}$$

が得られる。したがって (2.12) が一般的に成り立つことが示された。これに $k=3$ を代入すると

$$E(v_2)=\frac{n-1}{n}v_1$$

となるからセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しい。

■ダッチ（オランダ式）・オークションとイングリッシュ・オークション　公開で行われるオークションにも主に 2 種類がある。誰も買わないような高い価格から始めて徐々に下げて行き，最初に「買った！」と声を上げた人が落札するのがダッチ・オークションであり，逆に誰もが買う低い価格から始めて徐々に上げて行き，1 人を残して全員が脱落したところでその残った人が落札するのがイングリッシュ・オークションである。ダッチ・オークションはファーストプライス・オークションと同じ結果をもたらし，イングリッシュ・オークションではセカンドプライス・オークションと同じ結果になることが言える。

ファーストプライス・オークションでは各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格を書いた人が落札してその価格で購入する。ダッチ・オークションではどの段階で声を上げるかを決めておいて，その価格になったときに最初に声を上げた人が落札するので 1 番高い価格で声を上げるつもりだった人がその価格で購入することになる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

セカンドプライス・オークションにおいても各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格をつけた人が落札するが 2 番目に高い入札額で購入する。イングリッシュ・オークションでは低い価格から始まってせり上がって行くので自分がつけるつもりだった入札額よりも価格の方が高くなった人が脱落して行き，最後に残った人が落札するから最も高い入札額を予定していた人が落札する。しかし購入価格はその人の入札額ではなく，2 番目に高い入札額を考えていた人が脱落したときの価格であるからその 2 番目に高い人の入札予定額に等しくなる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

■オークションゲームの補足説明（微分方程式を用いた議論の簡易版）　2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションにおいて，プレイヤー 1，2 の評価 v_1，v_2（確率変数）が 5 から 8 までの一様分布となっているものと仮定する。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないがその分布は知っている。プレイヤー 1，2 の入札額がそれぞれ v_1，v_2 の一次関数になっていると考えて議論を進める。プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = av_2 + b \ (a,\ b \text{ は正の定数})$$

とする。この関数の逆関数は

$$v_2 = \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

と表される。プレイヤー 1 の入札額も同じ関数 $p_1 = av_1 + b$ で表され，その逆関数は $v_1 = \frac{1}{a}p_1 - \frac{b}{a}$ であるとする。プレイヤー 2 が落札するのは $p_2 > p_1$ となる場合であるが，それは

$$p_2 > av_1 + b$$

が成り立つときである。この式から

$$v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

が得られる。v_1 は 5 から 8 までの値を等しい確率でとるので $5 \leqq \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} \leqq 8$ として $v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$ となる確率は

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} - 5\right] = \frac{p_2 - (b+5a)}{3a}$$

に等しい。落札したときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$(v_2 - p_2)\frac{p_2 - (b+5a)}{3a}$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$-2p_2 + b + 5a + v_2 = 0$$

が得られる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{b+5a}{2}$$

を得る。これと上記の $p_2 = av_2 + b$ とから a，b それぞれは $a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{5}{2}$ と求まる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{5}{2}$$

が得られる。p_1 も同様である。このようにして求められる均衡はベイジアン・ナッシュ均衡と呼ばれる。

2.6　シグナリングゲーム

経済学で代表的な教育と労働市場についてのシグナリングゲームの例を検討してみよう。

2.6.1　労働市場のシグナリングゲーム

次のようなゲームを考える。

ゲーム 6　何人かの労働者がいる。労働者に 2 つのタイプ，能力（生産性）が低いタイプと高いタイプがある。それぞれタイプ 1，タイプ 2 と呼ぶことにする。具体的にタイプ 1 の労働者の生産性は 1，タイプ 2 の労働者の生産性は 2 であると仮定する。各々の労働者自身は自分のタイプについて知っているが，その労働者を雇う側の企業にはわからないものとする。ある一人の労働者について企業は，彼がタイプ 1 で

あると思えば賃金 1 を支払い，タイプ 2 であると思えば賃金 2 を，どちらのタイプかわからない場合はその労働者の能力について何らかの確率的な推測をもち，その確率に応じた労働者の生産性の期待値（平均値）に等しい賃金を支払う。企業数は 2 つ以上あるものとする。

ゲームが始まる前に企業は労働者のタイプについてある確率的な推測を抱いているが，それはすべての企業に共通であるとする。ここでは具体的に

ゲーム開始前の企業の推測　企業は，労働者が確率 1/2 で能力が低く（タイプ 1），確率 1/2 で能力が高い（タイプ 2）という推測を抱いている。

と仮定する。すべての企業が共通の推測を持つということについては，その推測が何らかの統計的な調査などによる客観的なデータにもとづいていると考えればよい。

労働者は自分のタイプを直接企業に知らせることはできないが，どの程度の教育を受けるかによって間接的に知らせることができるかもしれない。ここでは受ける教育のレベルを 0 から 2 までの数字で表現する。たとえば 0 はまったく教育を受けない，あるいは義務教育以上の教育を受けないことを意味し，0.5 は高校まで，1 は大学卒業，1.5 は有名大学卒業，2 は超有名大学卒業などと解釈できる。これらの区切りのよい数字だけではなく 0.8 は大学中退，1.8 は有名大学を優秀な成績で卒業などと適当に解釈すればよい。教育を受けるためにはコストがかかるが，それは入学金や授業料などの経済的コストだけではなく，入学するために必要な受験勉強に費やす時間と肉体的，精神的エネルギーなどのコストも含まれる。そして『能力の高い労働者の方が高いレベルの教育を受けるために要するコストは小さい』ものと仮定する。逆に言えば『能力の低い労働者にとってのコストの方が大きい』わけである。これは教育がシグナルの役割を果たすために必要な条件である。また，ここでは分析を簡単にするために『教育そのものは労働者の能力に影響を与えない』ものと仮定する。つまり，能力の高い労働者はレベルの高い教育を受けても受けなくても高い能力を持ち，能力の低い労働者は教育を受けても受けなくても低い能力しか持たないということである。したがって，教育を受けることは労働者の高い能力のシグナルとしての役割しか果たさない。労働者が選択する教育のレベルを e で表し，教育を受けるためのコストはタイプ 1 の労働者については $1.05e$，タイプ 2 の労働者については $0.4e$ であると仮定する。なお教育レベルの値はどんな実数でもよいのではなく 0.1 を最小単位として表されるものとする。

このゲームは以下のような 2 段階からなる。

(1). 第 1 段階
労働者が自分が受ける教育のレベルを決める。

(2). 第 2 段階
その労働者の選択を見て企業が支払う賃金を決める。

企業数が一つならばその企業は非常に低い賃金を支払って労働者からいわゆる搾取することができるかもしれないが，複数の企業が競争している状態であれば，生産性以下の賃金しか支払っていない企業は他の企業にその労働者を奪われてしまうことになるので，生産性（の期待値）に等しい賃金を支払わなければならない。したがってゲームの第 2 段階では，企業が利潤最大化を求めて意思決定をするというよりも企業間の競争によって賃金が決まると考えるべきである。

労働者の利得は賃金から教育にかかるコストを引いたものである。すべての労働者は自分自身のタイプに関する情報を，すなわち能力が高いか低いか，を除いて同じ状況におかれている。以下ではある一人の労働者と企業とのゲームを考える。

2.6.2 完全ベイジアン均衡–Separating 均衡と Pooling 均衡

このゲームの完全ベイジアン均衡を考える。次のような二種類の完全ベイジアン均衡がある。

Pooling 均衡

(1). タイプ 1 の労働者，タイプ 2 の労働者ともに教育レベル $e=0$ を選ぶ。

(2). 企業は $e=0$ を選んだ労働者にもそれ以外の教育レベルを選んだ労働者にも一律に賃金 1.5 を支払う。

(3). 企業は労働者がいかなる教育レベルを選ぼうとも，その労働者は確率 1/2 で能力が高く，確率 1/2 で能力が低いという推測を持つ。

Separating 均衡

(1). タイプ 2 の労働者は教育レベル $e=1$ を選び，タイプ 1 の労働者は教育レベル $e=0$ を選ぶ。

(2). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者に賃金 2 を支払い，$e<1$ を選んだ労働者に賃金 1 を支払う。

(3). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者は確率 1 で（間違いなく）能力が高く，$e<1$ を選んだ労働者は確率 1 で能力が低い（能力が高いということはありえない）という推測を持つ。

最初の均衡のように異なったタイプの労働者が同じ戦略を選ぶような均衡を **Pooling 均衡**（『一括均衡』と訳される），2 番目の均衡のように異なったタイプの労働者が異なった戦略を選ぶような均衡を **Separating 均衡**（『分離均衡』と訳される）と呼ぶ。それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

Pooling 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性

$e=0$ 以外の教育レベルを選んでも $e=0$ を選んだときより高い賃金を得るこ

とはできない。教育にはコストがかかるからどちらのタイプの労働者にとっても $e = 0$ を選ぶことが最適である。

(2). 企業の戦略の最適性
労働者の能力についての企業の推測を前提とすれば，上で述べた企業間の競争の結果実現する賃金としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性
(i) 労働者が $e = 0$ を選んだ場合
企業はゲームが始まる前から 1/2 の確率で労働者の能力が高いと推測していたが，どちらのタイプの労働者も均衡において $e = 0$ を選ぶので何も新しい情報を得られないからその推測を変える理由はない。したがって 1/2 の確率で能力が高いという推測は整合的である。
(ii) 労働者が $e = 0$ 以外を選んだ場合
均衡においてどちらのタイプの労働者も $e = 0$ を選ぶので，それ以外の教育レベルが選択された場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。つまり，企業と労働者の戦略の最適性に合致したものならばどのような推測を持ってもかまわない。したがって，確率 1/2 で能力が高いという推測も整合的である。

Separating 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性
企業の戦略を前提にすると，タイプ 2 の（能力の高い）労働者が $e = 1$ の教育を選んだときに得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 0.4 = 1.6$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 である。また，$e = 1$ より大きい e を選んでも得られる賃金は高くならない。したがってタイプ 2 の労働者にとって $e = 1$ という戦略は最適である。一方タイプ 1 の（能力の低い）労働者が $e = 1$ を選んで得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 1.05 = 0.95$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 であるからタイプ 1 の（能力の低い）労働者は $e = 0$ を選ぶ。

(2). 企業の戦略の最適性
均衡における労働者の戦略と企業の推測を前提とすれば，$e \geqq 1$ を選んだ労働者は能力が高く，$e < 1$ を選んだ労働者の能力は低いことになるので，それぞれに 2 と 1 の賃金が支払われるのは企業間の競争の結果としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性
均衡戦略では能力の高い労働者が $e = 1$ を選び，能力の低い労働者が $e = 0$ を選ぶから，労働者が $e = 1$ を選んだときと $e = 0$ を選んだときの企業の推測は整合的である。$e = 1$ と $e = 0$ 以外の教育レベルが選ばれた場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。

以上によって，Pooling 均衡，Separating 均衡ともに完全ベイジアン均衡であることが確認された。

2.6.3 合理的な均衡–シグナルとしての教育

このゲームでも 2 つの完全ベイジアン均衡が得られたが，それらの均衡における企業の推測が合理的であるかどうかを検討する必要がある。問題になるのは均衡において労働者が選ばない戦略についての企業の推測であり，均衡で選ばれる戦略については完全ベイジアン均衡における企業の推測の整合性の検討によってその合理性は確認されている。

まず Pooling 均衡の合理性を検討してみよう。この均衡は労働者が $e=0$ 以外の教育を選んだ場合にも確率 1/2 でその労働者がタイプ 2 である（能力が高い）という推測を企業が抱いているという前提にもとづいている。考えるべきはこの均衡においてタイプ 1 の（能力が低い）労働者がどの程度の教育レベルを選ぶインセンティブを持つであろうかということである。もしタイプ 1 の労働者が $e>0$ の教育を受けることを選び，それに対して企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合，彼が得ることのできる利得は賃金と教育費用の差 $2-1.05e$ である。これがタイプ 1 の労働者が e の教育レベルを選んで得られる最大の利得ということになる。$e>\frac{10}{21}\approx 0.48$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より小さい。したがってこの Pooling 均衡においてタイプ 1 の労働者はそれ以上の教育レベルを選ぶインセンティブを持たない。

一方タイプ 2 の労働者が e の教育レベルを選び，企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合に得られる利得は賃金と教育費用の差 $2-0.4e$ であるが，$e<1.25$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より大きい。したがって前節の完全ベイジアン均衡の合理性の条件を適用すると，企業は，『もし労働者が均衡戦略とは異なって $e>0.48(\geqq 0.5)$ の教育レベルを選んだ場合にはその労働者はタイプ 2 である（能力が高い）という推測をもつべきである』ということになる。企業がそのような推測を持つとすれば $e>0.48$ の教育を受けた労働者に支払われる賃金は 2 になり，タイプ 2 の労働者の最適な戦略は $e>0.48$ の教育レベルを選ぶことになるので Pooling 均衡は均衡ではなくなる。したがって Pooling 均衡は合理的ではない。

Separating 均衡においては，上で見たようにタイプ 1 の労働者は $e=1$ 以上の教育レベルを選ぶインセンティブをもたないので $e\geqq 1$ ならばタイプ 2 であるという推測は合理的である。またタイプ 2 の労働者が $e<1$（$e\leqq 0.9$）の教育レベルを選んだ場合には，タイプ 1 の労働者によってまねをされる可能性がある[*22]ので自分がタイプ 2 であることを企業に知らせることはできないから選ばない。したがって，Separating 均衡は合理的な均衡である。

[*22] タイプ 1 の労働者が $e=0.9$ を選んで，企業がその労働者はタイプ 2 であると思って賃金 2 を支払うと，労働者の利得は $2-1.05\times 0.9>1.055$ となり Separating 均衡の利得を上回る。

		個体 2 の戦略	
		タカ戦略	ハト戦略
個体 1 の戦略	タカ戦略	$\frac{1}{2}(V-C),\ \frac{1}{2}(V-C)$	$V,\ 0$
	ハト戦略	$0,\ V$	$\frac{1}{2}V, \frac{1}{2}V$

表 2.8　タカ・ハトゲーム

以上の分析から，**ゲーム 6 の合理的な均衡は Separating 均衡である**，という結論が得られる。

Separating 均衡においては，高いレベルの教育を受けることによって能力の高い労働者が間接的に自分の能力を企業に認識させることができるので，教育が労働者の能力のシグナルの役割を果たしている。

2.7　進化ゲーム

ゲーム理論は経済学や政治学のような社会科学ばかりではなく，生物学，特に進化論の研究にも応用されている，さらにその成果が経済学に取り入れられ，経済現象を生物学的，あるいは進化論的な観点から解釈しようとする研究が盛んに展開されている。

ここでは進化ゲームの基本的な考え方について，例を使って解説する[*23]。

2.7.1　タカ・ハトゲーム–進化的に安定な戦略

動物の個体が非常にたくさんいて，その各個体がランダムに 2 匹ずつ出会って，何かある資源を取り合うというゲームをプレイする[*24]。そのゲームには以下の 2 つの戦略がある。

(1). **タカ戦略** 戦って資源を奪い取ろうとする戦略。自分が傷ついて戦えなくなるか相手が逃げ出すまで戦い続ける。

(2). **ハト戦略** 自分の勢いを誇示する（あるいは威嚇する）が，相手が戦いを挑んできたらすぐに逃げる

このゲームでは戦略は各個体の遺伝子に組み込まれている何らかの性質であり，ゲームに臨んで選ばれるのではない。また資源とは，その資源を手に入れることによって環境への適応度が増しダーウィン的な自然淘汰 (natural selection) に従ってより多くの子孫を残

[*23] この節では式が多く出てくるが確率の初歩的な計算が中心である。また，この節では混合戦略も考える。

[*24] ここのモデルでは同じ種の動物について異なった遺伝的性質を『タカ』や『ハト』と呼んでもよいし，あるいはある地域においてタカ，ハトのように異なった種の動物が生息している状況を考えてもどちらでもよい。生物学的な厳密性は求めない。

すことができるようなものを意味する。したがってこのゲームにおいては，プレイヤーの合理的な意思決定として戦略が選択されるのではなく，ある性質を持った個体が環境に適応していれば多くの子孫を残しその性質を持ったものが増えていく，というようなプロセスを考える。

各個体はもともとある適応度を持っておりこのゲームを行うたびにその適応度がゲームの利得に応じて増加，あるいは減少する。

ゲームの結果には両者が選んでいる戦略の組み合わせによって次の 3 つの可能性がある。

(1). **タカ対タカ** タカ戦略同士が戦う場合には，いずれか一方が傷ついて逃げ出すと仮定する[*25]。勝った方は $V(>0)$ の価値を持った資源を得るが，負けると傷を負って $C(>0)$ の損害を被る。個体には差はないので，勝つ確率・負ける確率ともに 1/2 である。したがって期待利得（平均して得られる適応度の増加）は $\frac{1}{2}(V-C)$ に等しい。

(2). **タカ対ハト** ハト戦略を選んでいる方が逃げ出すのでタカが資源を手に入れる。利得はタカが V，ハトが 0 である。

(3). **ハト対ハト** それぞれが戦わずして確率 1/2 で資源を手にするものとする。したがって期待利得は $\frac{1}{2}V$ である。

以上の仮定を表にすると，表 2.8 のように表される。ゲームは対称的なのでどちらの個体が個体 1 と考えても個体 2 と考えてもかまわない。また戦略は純粋戦略ばかりでなく混合戦略をとることもできる[*26]。

ここで進化ゲームにおいて最も重要な概念である，進化的に安定な戦略を定義する。

進化的に安定な戦略 ある戦略（戦略 A とする）をすべての個体が選んでいるとして，突然変異によって別の戦略（戦略 B とする）を選ぶ個体がわずかに現れたとする。そのとき，戦略 A から得られる適応度が戦略 B から得られる適応度よりも大きいときに，戦略 A は**進化的に安定な戦略 (evolutionarily stable strategy)** であると言う。

[*25] 両方が傷つくとは考えない。

[*26] タカ戦略を純粋戦略として選ぶ個体は常にタカ戦略と選ぶという遺伝子を持っている。同様にある一定の確率でタカになったりハトになったりする（あるいはタカのように振る舞ったりハトのように振る舞ったりする）個体は，そのような遺伝子を親から受け継いでいるわけである。その場合相手の戦略によって自分の戦略を使い分けるわけではなく，相手の戦略に関わらずタカとハトを一定の確率に従ってランダムに選ぶ。進化ゲームにおける混合戦略の解釈には，このような各個体が混合戦略を選ぶという考え方とともに，たくさんいる個体の内混合戦略の確率で示される割合の個体がタカ戦略を選び，残りの個体がハト戦略を選ぶという解釈もある。後者の場合は一定の割合でタカ戦略とハト戦略が共存することになる。

もしそうでなければ突然変異の個体の方が多くの子孫を残し，戦略 A はやがて消えていってしまう。上の定義を式で表してみよう。ある戦略 I を選ぶ個体が戦略 J を選ぶ個体と対戦したときに得られる期待利得を $E(I,J)$ という記号で表す。戦略 A を選ぶ個体の割合が $1-p$，戦略 B を選ぶ個体の割合が p のとき，戦略 A を選ぶ個体は $1-p$ の割合で同じ戦略 A を選ぶ個体と対戦し，p の割合で戦略 B を選ぶ個体と対戦するから，戦略 A を選ぶ個体が得る期待利得は

$$(1-p)E(A,A)+pE(A,B) \tag{2.16}$$

で表される。同様にして戦略 B を選ぶ個体の期待利得は

$$(1-p)E(B,A)+pE(B,B) \tag{2.17}$$

となる。戦略 A が進化的に安定な戦略であるというのは，A 以外のあらゆる戦略 B について (2.16) が (2.17) より大きいということである。したがって

$$(1-p)E(A,A)+pE(A,B) > (1-p)E(B,A)+pE(B,B)$$

より

$$(1-p)[(E(A,A)-E(B,A)]+p[E(A,B)-E(B,B)] > 0 \tag{2.18}$$

が得られる。多数の集団の中でのわずかな突然変異を考えるので p は非常に小さい値であるから (2.18) は次のように書き直すことができる。

$$E(A,A) \geqq E(B,A) \text{ であり} \tag{2.19}$$

$$\text{もし } E(A,A)=E(B,A) \text{ ならば } E(A,B) > E(B,B) \tag{2.20}$$

(2.19) は戦略 A がそれ自身（相手の戦略 A）に対して最適反応であるという条件であるから，対称なゲームにおけるナッシュ均衡の条件になっている。つまり進化的に安定な戦略はナッシュ均衡をなす戦略であるということがわかる。しかし進化的に安定な戦略であるためにはさらに (2.20) の条件をも満たさなければならないので，ナッシュ均衡をなす戦略が必ずしも進化的に安定な戦略であるとは限らない。(2.20) は戦略 A が戦略 B との対戦において戦略 B 自身よりもよい結果をもたらすことを意味する。すなわち戦略 B はそれ自身に対する最適反応にはならないということである。なお (2.19) が厳密な不等式で満たされている場合は (2.20) の不等式は満たされていなくてもよい[*27]。

さて，タカ・ハトゲームの進化的に安定な戦略を調べてみよう。タカ戦略を H(Hawk) で，ハト戦略を D(Dove) で表すことにする。まず，純粋なハト戦略は進化的に安定な戦略にはなりえない。なぜならば

$$E(D,D)=\frac{1}{2}V < E(H,D)=V$$

[*27] 『p が非常に小さいので (2.19) が厳密な不等式で成り立てば，$E(B,B) > E(A,B)$ であったとしても (2.18) は満たされる』と考える。

であるから，ハト戦略からなる集団はタカ戦略の進入を許す，つまり突然変異で出現したタカ戦略の方が大きい利得を得ることになりハト戦略は安定ではない。

V と C の値の関係によって 2 つのケースに分けられる。

(1). **$\boldsymbol{V} \geqq \boldsymbol{C}$ の場合** このケースでは H が進化的に安定な戦略である。なぜならば $E(H,H)=\frac{1}{2}(V-C)\geqq 0$，$E(D,H)=0$ であるから (2.19) で戦略 A として H，戦略 B として確率 $q\,(0\leqq q<1)$ でタカを選ぶ混合戦略（純粋なハト戦略も含む）を考えると

$$
\begin{aligned}
E(B,H) &= qE(H,H)+(1-q)E(D,H)\\
&= \frac{q}{2}(V-C) \leqq \frac{1}{2}(V-C)
\end{aligned}
$$

より $E(H,H)\geqq E(B,H)$ となり，(2.19) が満たされている。$V>C$ ならば (2.19) は厳密な不等式で満たされる。もし $V=C$ ならば，$E(H,H)$ も $E(B,H)$ もともに 0 となるが，

$$
\begin{aligned}
E(H,B) &= qE(H,H)+(1-q)E(H,D)\\
&= \frac{1}{2}q(V-C)+(1-q)V=(1-q)V
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
E(B,B) =& qE(B,H)+(1-q)E(B,D)\\
=& q^2E(H,H)+q(1-q)E(D,H)+q(1-q)E(H,D)\\
&+(1-q)^2E(D,D)\\
=&(1-q)[qV+\frac{1}{2}(1-q)V]<(1-q)V
\end{aligned}
$$

より，$E(H,B)>E(B,B)$ となり，(2.20) が満たされている。

このケースではハト戦略からなる集団にタカ戦略を持った個体が一つ（一匹）突然変異によって進入すれば，タカ戦略を持った個体が多くの子孫を残し，いずれすべてがタカ戦略になってしまう。

(2). **$\boldsymbol{V} < \boldsymbol{C}$ の場合** この場合は純粋なタカ戦略は安定な戦略ではない。なぜならば，$E(H,H)=\frac{1}{2}(V-C)<0$ であり，$E(D,H)=0$ であるから，$E(H,H)<E(D,H)$ となり，タカ戦略からなる集団はハト戦略の進入を許してしまう。したがって混合戦略を安定な戦略の候補として考える。それを戦略 A とし，戦略 A は確率 r でタカ戦略を，確率 $1-r$ でハト戦略をとるとする。その場合

$$
\begin{aligned}
E(A,A) &= rE(H,A)+(1-r)E(D,A)\\
&= E(H,A)=E(D,A)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

		個体 2 の戦略	
		戦略 I	戦略 J
個体 1 の戦略	戦略 I	a, a	c, b
	戦略 J	b, c	d, d

表 2.9　戦略が 2 つのゲーム

となっていなければならない。これは H と D に対して A が (2.19) を等式として満たすということを意味しているが，一方この式は A が混合戦略のナッシュ均衡になる条件でもある。したがって混合戦略の場合にも進化的に安定な戦略はナッシュ均衡をなす戦略でなければならない[*28]。もし $E(H, A) < E(A, A)$ であれば (2.21) の最初の等式より $E(D, A) > E(A, A)$ となり，戦略 A の集団はハト戦略に侵入されてしまうので安定ではなくなる。逆に $E(D, A) < E(A, A)$ であれば，やはり (2.21) より $E(H, A) > E(A, A)$ となり，戦略 A の集団はタカ戦略に侵入されてしまう。

(2.21) より

$$\begin{aligned} E(H, A) &= rE(H, H) + (1 - r)E(H, D) \\ &= rE(D, H) + (1 - r)E(D, D) = E(D, A) \end{aligned}$$

が得られ，表 2.8 の値を代入して，

$$\frac{1}{2}r(V - C) + (1 - r)V = \frac{1}{2}(1 - r)V$$

となり，

$$r = \frac{V}{C}$$

が求まる。$V < C$ であるから，$0 < r < 1$ である。この混合戦略が (2.19)，(2.20) を満たすことについては以下で，より一般的なケースの中で証明する。

2.7.2　進化的に安定な戦略の存在–戦略が 2 つのゲーム

プレイヤー（個体）が選択可能な戦略が 2 つからなるゲームにおいては，標準的なある条件が満たされると進化的に安定な戦略が存在することが確かめられる。タカ・ハトゲームを一般化して表 2.9 のようなゲームを考える。2 つの戦略を I と J で表している。ここで以下の条件を仮定する。

$$a \neq b,\ c \neq d \tag{2.22}$$

[*28] この場合は (2.21) に加えて (2.20) も成り立たなければ進化的に安定な戦略ではない。

a, b, c, d の値によっていくつかのケースに分けられる。

(1). **$a > b$ の場合** I と J の適当な混合戦略を K として，戦略 K は確率 q で戦略 I を確率 $1-q$ で戦略 J をとるものとする。すると $E(I,I)=a$ および

$$E(K,I)=qE(I,I)+(1-q)E(J,I)=qa+(1-q)b$$

より

$$E(I,I)>E(K,I)$$

が得られる。これは (2.19) が厳密な不等式で満たされることを意味するから戦略 I が進化的に安定な戦略である。

(2). **$d > c$ の場合** ケース (1) と同様にして戦略 J が進化的に安定な戦略であることが示される。（演習問題とする）

$c > d$ のときには，戦略 K を上と同じ混合戦略であるとすると，

$$E(J,J)=d$$

と

$$\begin{aligned} E(K,J)&=qE(I,J)+(1-q)E(J,J)\\ &=qc+(1-q)d \end{aligned} \tag{2.23}$$

より

$$E(K,J)>E(J,J)$$

となるので戦略 J は進化的に安定な戦略ではない。同様に $b > a$ のときには戦略 I は進化的に安定な戦略ではない。

したがって，$a > b$ かつ $d > c$ であれば戦略 I，J の両方が進化的に安定な戦略になり，$a > b$ かつ $c > d$ であれば戦略 I のみが，$b > a$ かつ $d > c$ であれば戦略 J のみが進化的に安定な戦略である。

(3). **$b > a$ かつ $c > d$ の場合** 上で見たように，このケースでは戦略 I も J も進化的に安定ではない。確率 r で戦略 I を確率 $1-r$ で戦略 J をとる混合戦略 L を

$$E(L,L)=E(I,L)=E(J,L) \tag{2.24}$$

を満たすような戦略であるとする。これが混合戦略が安定な戦略になるために必要な条件であることはタカ・ハトゲームの 2 つ目のケースで説明した。すると $r=\frac{c-d}{b+c-a-d}$ が求まる[*29]。別の混合戦略（純粋戦略も含む）を K とし，K は確率

[*29] 以下のようにして計算できる。

$$E(I,L)=rE(I,I)+(1-r)E(I,J)=ra+(1-r)c$$

$q\,(q \neq r)$ で I をとる戦略であるとすると

$$E(K, L) = qE(I, L) + (1-q)E(J, L)$$

であるから，(2.24) より

$$E(L, L) = E(K, L)$$

が得られる。これは戦略 L が K に対して (2.19) を等式で満たすことを意味する。したがって L が (2.20) を満たすことを示せばよい。

$$\begin{aligned} E(L, K) &= rE(I, K) + (1-r)E(J, K) \\ &= qrE(I, I) + (1-q)rE(I, J) \\ &+ (1-r)qE(J, I) + (1-q)(1-r)E(J, J) \\ &= qra + (1-q)rc + (1-r)qb + (1-q)(1-r)d \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} E(K, K) &= qE(I, K) + (1-q)E(J, K) \\ &= q^2a + (1-q)qc + (1-q)qb + (1-q)^2d \end{aligned} \tag{2.25}$$

したがって

$$\begin{aligned} E(L, K) - E(K, K) &= q(r-q)a + (1-q)(r-q)c \\ &- q(r-q)b - (1-q)(r-q)d \\ &= (r-q)[q(a+d-b-c) + c - d] \end{aligned} \tag{2.26}$$

が得られる。ここで $r = \frac{c-d}{b+c-a-d}$ であることを考えると (2.26) は

$$E(L, K) - E(K, K) = (r-q)^2(b+c-a-d) \tag{2.27}$$

と変形できる。このケースでは $b > a,\ c > d$ と仮定していたので (2.27) がプラスになり，戦略 L は K に対して (2.20) を満たすことが示された。したがって戦略 L は進化的に安定な戦略である。

タカ・ハトゲームの 2 つ目の場合はこのケースの例である[*30]。

と

$$E(J, L) = rE(J, I) + (1-r)E(J, J) = rb + (1-r)d$$

を等しいとおいて本文の r が求められる。

[*30] $a = \frac{1}{2}(V-C),\ b = 0,\ c = V,\ d = \frac{1}{2}V$ を r の式に代入すると $r = \frac{V}{C}$ が得られる。

■補足–条件 (2.22) を満たさない場合　a と b，または c と d が等しいときは条件 (2.22) は満たされない。その場合の進化的に安定な戦略について検討する。

(1). **$a > b$ で $c = d$ の場合** この場合は上の (1) で見たように戦略 I は進化的に安定な戦略である。一方戦略 J は確率 $q\,(q \neq 0)$ で戦略 I をとる混合戦略を K として，(2.23) より

$$E(K, J) = E(J, J) = c$$

であり，また

$$E(J, K) = qE(J, I) + (1 - q)E(J, J) = qb + (1 - q)c \tag{2.28}$$

および，(2.25) に $c = d$ を代入して得られる

$$E(K, K) = q^2a + q(1 - q)b + (1 - q)c \tag{2.29}$$

より $a > b$ であるから

$$E(J, K) < E(K, K)$$

となり (2.20) を満たさないので進化的に安定ではない。

(2). **$a < b$ で $c = d$ の場合** 上で見たように，この場合は戦略 I は進化的に安定な戦略ではない。一方戦略 J は (2.28)，(2.29) より，$a < b$ であるから

$$E(J, K) > E(K, K)$$

となって (2.20) を満たすので進化的に安定な戦略である。

$a = b$ で $c > d$，および $a = b$ で $c < d$ の場合については上の 2 つのケースと同様にして考えることができる（演習問題とする）。$a = b$，$c > d$ のときは戦略 I が，$a = b$，$c < d$ のときには戦略 J が進化的に安定な戦略である。

タカ・ハトゲームで $V = C$ のケースは，$a = b$，$c > d$ の場合に相当する。

(3). **$a = b$ かつ $c = d$ の場合** このケースでは (2.28)，(2.29) からわかるように戦略 J は (2.20) を満たさないので安定ではない，同様に戦略 I も安定な戦略ではない。また混合戦略についても (2.27) がプラスにならないので進化的に安定な戦略はない。

以上，戦略が 2 つのゲームを見てきたが，戦略が 3 つ以上あるゲームの場合は最後のケースのような特殊なゲームでなくとも必ずしも進化的に安定な戦略が存在するとは限らない。

	プレイヤーBの戦略			
		G	C	P
プレイヤーAの戦略	G	0, 0	1,-1	-1, 1
	C	-1, 1	0, 0	1, -1
	P	1,-1	-1, 1	0, 0

表 2.10　ジャンケンゲーム

■ジャンケンゲーム　ジャンケンのゲームを進化ゲーム的に考えてみよう。先に見たようにこのゲームの混合戦略を含むナッシュ均衡はグー，チョキ，パーをそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で出す戦略の組であった。この戦略が進化的に安定になるであろうか？ 多くの人がいてその人たちが 2 人ずつ組み合わされて何度もジャンケンをするというゲームを考える。各自は自分の戦略（混合戦略を含めて）を予め決めている。数多くのジャンケンをプレーしたときの平均の利得が問題となる。一通り終わったところで各自の平均の利得を比べ次回はより大きい利得を得た戦略を選ぶ人が増える，というようなプロセスを考える。あるいは，2 匹ずつの動物がジャンケンで餌を取り合い多くの餌を得た個体が多くの子孫を残すというように考えてもよい。その場合選ばれる戦略は遺伝的に決まっている。

グー，チョキ，パーを確率 $\frac{1}{3}$ で出す混合戦略を戦略 I とする。すべての人（あるいは個体）がこの戦略を選んでいる状態において，突然変異によって常にグー（戦略 G）を選ぶ個体が少数現れたとしよう。その割合を ε とする。戦略 I の期待利得は，戦略 I 同士が対戦したときの期待利得はゼロなので

$$E(I)=\frac{1}{3}\{\varepsilon[E(G,G)+E(C,G)+E(P,G)]+(1-\varepsilon)\times 0\}=0$$

となる。ここで

$$E(G,G)=0,\ E(C,G)=-1,\ E(P,G)=1$$

である。一方戦略 G の期待利得は

$$E(G)=\{(1-\varepsilon)\frac{1}{3}[E(G,G)+E(G,C)+E(G,P)]+\varepsilon E(G,G)\}=0$$

となり，ともにゼロである。ここで

$$E(G,G)=0,\ E(G,C)=1,\ E(G,P)=-1$$

である。したがって上記の混合戦略の組は進化的に安定ではなく，このゲームに他にナッシュ均衡はないので進化的に安定な戦略はない。

2.7.3　マルコフ連鎖とその極限

以下の部分ではこれまでに説明した進化ゲームとは異なるアプローチによる寡占の進化ゲーム的分析の例として，同質的な寡占においてクールノー均衡ではなくすべての企業が競争的な産出量（価格と限界費用が等しくなる産出量）を選ぶ状態が長期的に実現するという Vega-Redondo(1997) による分析を，できるだけわかりやすく，かつ完結的に示してみたい[*31]。

準備として簡単なモデルを使って確率論のマルコフ連鎖について紹介する。天候はなかなか予測し難いものであるが，晴れ・雨それぞれの後ある確率で晴れ・雨になるものとして，ある日に晴れた後あるいは雨が降った後の何日後かに晴れ・雨になる確率を考えてみよう。仮定として晴れた日の翌日は確率 0.8 で晴れ，確率 0.2 で雨になり，雨の日の翌日は確率 0.5 で晴れ，同じく確率 0.5 で雨になるものとする（晴れと雨以外の天候はなく，また 1 日の内に天候が変化することも考えない)。たとえば 11 月 1 日に晴れたとすると，2 日に晴れる確率は 0.8 であるが 3 日に晴れる確率はいくらだろうか。2 日，3 日と晴れが続く確率は $0.8 \times 0.8 = 0.64$，一方 2 日に雨，3 日に晴れとなる確率は $0.2 \times 0.5 = 0.1$ であるから 3 日に晴れる確率は合わせて 0.74 であり，雨が降る確率は 0.26 となる。4 日に晴れる確率は 3 日，4 日と晴れが続く場合と，3 日に雨，4 日に晴れとなる場合の確率の和なので $0.74 \times 0.8 + 0.26 \times 0.5 = 0.722$ となる。同様にして 5 日に晴れる確率は $0.722 \times 0.8 + 0.278 \times 0.5 = 0.7166$ である。一方，11 月 1 日に雨が降ったとすると，3 日に晴れる確率は $0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.5 = 0.65$，4 日に晴れる確率は $0.65 \times 0.8 + 0.35 \times 0.5 = 0.695$，5 日に晴れる確率は $0.695 \times 0.8 + 0.305 \times 0.5 = 0.7085$ となる。このようにして天候の晴れ，雨などの現象が確率的に起きて行く過程は「マルコフ連鎖」と呼ばれる。今の例では 11 月 1 日に晴れても雨が降ってもその後に晴れる確率は徐々に等しい値に近づいて行くように見える。それは晴れる確率がそれ以上変化しなくなった状態における値である。そのような状態での晴れ，雨の確率の分布は「定常分布」（または極限分布）と呼ばれる[*32]。一般的に晴れた日の翌日に晴れる確率を $p(0 < p < 1)$，雨の日の翌日に晴れる確率を $q(0 < q < 1)$ で表し，定常分布において晴れる確率を x で表すと，晴れる確率が変化しなくなるのは次の式が成り立つときである。

$$px + q(1 - x) = x \tag{2.30}$$

この式から

$$x = \frac{q}{1 - p + q}$$

[*31] 以下の内容は主に F. Vega-Redondo, “The Evolution of Walrasian Behavior.” *Econometrica* Vol. 67 (1997), pp. 375-384 にもとづく。ただし大幅に簡略化されている。

[*32] 厳密にはそれ以上変化しなくなった分布が定常分布で，変化の行き着く先が極限分布であるが，本稿で扱うマルコフ連鎖の場合両者は等しい。

が得られる。先ほどの例では $x = 5/7(\approx 0.7143)$ となる。

別の例を考えてみよう。2人の雷様が晴れか雨かを決めているものとする。2人は1度晴れたら原則としてそのまま晴れを続け，1度雨が降ったらそのまま雨の日を続けると決めている。しかし，時たまそれぞれ気紛れを起こしてルールを守らないことがある。1人1人が気紛れを起こす確率を ε で表す。また，晴れた日の翌日に雨になるには2人が同時に気紛れを起こさなければならないが，逆に雨が降った日の翌日に晴れるには1人または2人が気紛れを起こせばよいものとする。すると晴れた日の翌日に雨になる確率は ε^2（晴れる確率は $1-\varepsilon^2$），雨の日の翌日に晴れる確率は $2\varepsilon-\varepsilon^2$（雨が降る確率は $(1-\varepsilon)^2$）となる。(2.30) 式に当てはめると $p = 1-\varepsilon^2$，$q = 2\varepsilon-\varepsilon^2$ であるから，定常分布において晴れる確率を x^* とすると

$$x^* = \frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

が得られる。一方定常分布において雨が降る確率は

$$1 - x^* = \frac{\varepsilon}{2}$$

である。たとえば $\varepsilon = 0.1$ であるとすると $x^* = 0.95$，$\varepsilon = 0.01$ であれば $x^* = 0.995$ というように ε が小さくなると x^* すなわち晴れる確率は1に近づいて行く。つまり，雷様が気紛れを起こす確率が非常に小さい場合，晴れから始まっても雨から始まっても長い時間の経過の中ではほとんどの日が晴れることになる。このような場合「晴れ」という状態は「確率的に安定な状態 (stochastically stable state)」であると言う。気紛れを進化論にならって「突然変異」と呼ぶことにする。

今の例では晴れた日の翌日に1人の雷様が突然変異を起こしても晴れのままであると仮定したが，もう少しモデルを広げてそのような場合には曇りになると考えてみよう。詳しく言えば，2人の雷様はそれぞれ晴れまたは雨を選び，2人の選択が一致すればその天候が実現し，一致しなければ（1人が晴れ，1人が雨を選ぶ）曇りになると仮定する。また，突然変異を含まない選択の変化を次のように仮定する。

(1). 晴れの翌日は2人とも晴れを選び天候は晴れになる。
(2). 曇りの翌日は2人とも晴れを選び天候は晴れになる。
(3). 雨の翌日は2人とも雨を選び天候は雨になる。

一方突然変異は，それによって各自が本来選ぶべき選択とは異なる選択をすることになるので次のような影響を及ぼす。

(1). 晴れまたは曇りの翌日は2人とも晴れを選ぶべきなので，1人だけが突然変異を起こせば天候は曇りになり，2人とも起こせば雨になる。
(2). 雨の翌日は2人とも雨を選ぶべきなので，1人だけが突然変異を起こせば天候は曇りになり，2人とも起こせば晴れになる。

このモデルのポイントは突然変異がなければ曇りの翌日は必ず晴れになるということである。

以上の仮定のもとで1人1人が突然変異を起こす確率を ε とすると，天候が移り行く確率は次のようになる。

(1). 晴れた日または曇りの日の翌日に晴れる確率は $(1-\varepsilon)^2$，曇る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$，雨が降る確率は ε^2。

(2). 雨の日の翌日に晴れる確率は ε^2，曇る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$，雨が降る確率は $(1-\varepsilon)^2$。

ある日に晴れる確率を x，雨が降る確率を y とすると（曇る確率は $1-x-y$ である）定常分布においてはこれらが変化しないので次の式が得られる。

$$(1-\varepsilon)^2x+(1-\varepsilon)^2(1-x-y)+\varepsilon^2y=(1-\varepsilon)^2(1-y)+\varepsilon^2y=x$$

$$\varepsilon^2x+\varepsilon^2(1-x-y)+(1-\varepsilon)^2y=\varepsilon^2(1-y)+(1-\varepsilon)^2y=y$$

これらを解くと

$$x=\frac{2-5\varepsilon+4\varepsilon^2}{2},\ y=\frac{\varepsilon}{2}$$

が得られ，したがって定常分布において曇る確率は

$$1-x-y=2\varepsilon(1-\varepsilon)$$

となる。たとえば ε が 0.01 であるとすると，$x=0.9752$，$y=0.005$，$1-x-y=0.0198$ となり，さらに ε を小さくして行くと x が 1 に近づく一方，y と $1-x-y$ はゼロに近づいて行く。したがって晴れのみが確率的に安定な状態である。

晴れが確率的に安定になる理由を考えてみよう。突然変異が起きる確率が低いとしても長い時間が経過する内にはいずれは起きるからどの状態から始まったかは長期的な状況の推移には関係がない。状態が雨から始まったとすると，1つの突然変異で曇りに移りさらに突然変異なしで晴れに移る。その後は2つの突然変異が重ならなければ雨にはならない。その確率は1つの突然変異が起きる確率が十分に小さければ無視できるほどである。したがって長期的に見て晴れに比べて雨が実現する確率はほとんど無視できる。一方晴れからは1つの突然変異で曇りに移るが，突然変異が続いて起きなければすぐに晴れに戻る。したがって長期的に曇りが実現する確率もほとんど無視できるのである。

次の節では以上の議論を寡占の進化ゲーム的分析に応用する。

2.7.4 寡占の確率的に安定な状態：複占の場合

企業の数が2つの寡占，いわゆる複占について以下のようなモデルを考える。

(1). 2 つの企業（企業 1 と企業 2 と呼ぶ）は同質的な財を生産し，その需要関数は財の価格を p，各企業の産出量を q_1，q_2 として

$$p = 12 - (q_1 + q_2)$$

で表されるものとする。

(2). 話を簡単にするため生産には費用はかからないものとする。

(3). さらに話を簡単にするために，企業は競争的（ワルラス的）な均衡における産出量（「競争的産出量」と呼ぶ）とクールノー均衡における産出量（「クールノー産出量」と呼ぶ）のいずれかの産出量を選択すると仮定する。

競争的産出量とは両企業が等しい産出量を生産して価格と限界費用が等しくなるような産出量であり，この例では $q_1 = q_2 = 6$ である。一方クールノー産出量は通常の計算によって $q_1 = q_2 = 4$ と求まる。各企業が 4 または 6 のいずれかの産出量を選ぶものとしてこの状況を標準型ゲームで表すと次の表のようになる。

企業 2 の産出量

		4	6
企業 1		4	6
の	4	16, 16	8, 12
産出量	6	12, 8	0, 0

表に示された企業の利得はそれぞれの利潤である。容易にわかるように通常のナッシュ均衡は各企業が産出量 4 を選ぶ戦略の組であるが，それが確率的に安定な状態とはならない。

2 つの企業はこのゲームを繰り返しプレイするのだが，進化ゲーム的な分析のために以下のような模倣 (imitation) にもとづく戦略の選択プロセスを考える。

(1). 各企業は需要関数の形を知らず相手の産出量に対する自らの最適反応を計算することはできない。

(2). 各企業は自らおよび相手が各時点において選択した産出量と得られた利潤を観察することができる。また両企業が同じタイプ (費用がゼロ) であることを知っている。

(3). 各企業はある時点における自らの利潤が相手の利潤より大きい（当然選んだ戦略は互いに異なる）場合には以下で述べる突然変異以外で戦略を変更することはない。また，ある時点で 2 つの企業が同一の戦略を選んでいた場合（この場合 2 つの企業の利潤は等しい）にも戦略を変更することはない。すなわち次の時点においてもそれまでと同じ戦略を選ぶ。一方相手の利潤が自らの利潤より大きい場合（この場合にも各企業が選んだ戦略は互いに異なる）には，利潤の小さい企業は利潤の大きい企業が選んだ戦略に厳密に正の確率で変更する可能性がある。ここでは話を簡単にするためにそのような場合は常に（確率 1 で）戦略を変更するものと仮定する。

(4). 上で述べた利潤の比較による戦略の選択とは別に，各企業は各時点においてある確

率で本来選ぶべき戦略とは異なる戦略を，何かの間違い，気紛れ，あるいは実験的に選ぶ可能性がある。これを「突然変異」を呼ぶことにし，そのような行動をとる確率を ε で表す。

模倣による戦略の選択プロセスは，より環境に適応した戦略，この場合にはより大きい利潤を得ることができる戦略が生き残るという意味でダーウィン的な自然淘汰（natural selection）の考え方に沿ったものであり，企業が需要関数の形を知らないという設定のもとにおいては理にかなったモデルであると思われる。

企業 1 が産出量 4 を企業 2 が 6 を選ぶ状態と，逆に企業 2 が産出量 4 を企業 1 が 6 を選ぶ状態とを区別せずに 1 つの状態として扱うと，起こり得る状態は両企業がともに産出量 4 を選ぶ状態（状態 C と呼ぶ），ともに産出量 6 を選ぶ状態（状態 W と呼ぶ），そして一方の企業が 4 を他方が 6 を選ぶ状態（状態 A と呼ぶ）の 3 つである。状態 A においては産出量 6 を選ぶ企業の方が利潤が大きい。上記のような突然変異を含む戦略の選択プロセスを仮定すると，ある時点から次の時点へ状態が移り行く確率は次のようになる。

(1). 状態 W がそのまま変わらない確率は $(1-\varepsilon)^2$，状態 A に移る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$，状態 C に移る確率は ε^2

(2). 状態 A から状態 W に移る確率は $(1-\varepsilon)^2$，そのまま変わらない確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$，状態 C に移る確率は ε^2

(3). 状態 C がそのまま変わらない確率は $(1-\varepsilon)^2$，状態 A に移る確率は $2\varepsilon(1-\varepsilon)$，状態 W に移る確率は ε^2

このプロセスは前節で議論した晴れ，曇り，雨の 3 つの状態からなる天候の変化とまったく同じ形になっており，状態 W が晴れに，状態 A が曇りに，状態 C が雨にそれぞれ対応している。したがって ε の値が十分に小さければ状態 W すなわち両企業がともに産出量 6（競争的な産出量）を選ぶ状態が確率的に安定な状態となる。

2.7.5 寡占の確率的に安定な状態：より一般的な場合

前節では企業数が 2 つの場合を考えたが，企業数が多くかつ産出量の選択肢が 2 つに限られないより一般的な寡占の場合にも同様の議論が成り立つ。簡単なモデルで要点を確認してみよう。産出量の選択肢が多いとは言っても無数にあっては困るので，ある有限の定数 δ の整数倍の産出量のみが選択可能で，その中には以下で述べる競争的な産出量が含まれているものとする。またいくつかの企業が異なる産出量を選んでいる状態（「非対称な状態」と呼ぶ）において複数の産出量が最大の利潤をもたらしている場合，次の時点においてすべての企業が同一の産出量を選ぶという状態が厳密に正の確率で起きるものと仮定する。

ある産業において $n(n \geqq 3)$ 社の企業が同質的な財を費用ゼロで生産しているものとし，

各企業の産出量を $q_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ で表して次のような需要関数を仮定する。

$$p = a - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n),\ a > 0$$

このとき競争的な産出量 q_w は $\frac{a}{n}$，クールノー的な産出量 q_c は $\frac{a}{n+1}$ である。

ある時点においてすべての企業が q_w とは異なる共通の産出量 q を選んでいたと仮定し（そのような状態を状態 q と呼ぶ），その次の時点で 1 つの企業（企業 1 とする）が q_w を選んだとすると，企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = \left[a - (n-1)q - \frac{a}{n}\right]\frac{a}{n} = (n-1)\left(\frac{a}{n} - q\right)\frac{a}{n}$$

一方他の企業の利潤は

$$\pi_{-1} = \left[a - (n-1)q - \frac{a}{n}\right]q = (n-1)\left(\frac{a}{n} - q\right)q$$

となる。その差を求めると

$$\pi_1 - \pi_{-1} = (n-1)\left(\frac{a}{n} - q\right)^2$$

が得られる。これは q と $\frac{a}{n}(= q_w)$ とが異なる限り正である。したがってすべての企業が q_w とは異なる産出量を選んでいる状態において，1 つの企業が突然変異によって q_w を選ぶとその企業の利潤が他の企業の利潤よりも大きくなり，その後突然変異なしですべての企業が q_w を選ぶ状態（そのような状態を状態 W と呼ぶ）に移る。

逆にある時点においてすべての企業が q_w を選んでいたとして，次の時点で 1 つの企業（企業 2 とする）が他の産出量 q を選んだとき，企業 2 の利潤は

$$\pi_2 = \left[a - (n-1)\frac{a}{n} - q\right]q = \left(\frac{a}{n} - q\right)q$$

一方他の企業の利潤は

$$\pi_{-2} = \left[a - (n-1)\frac{a}{n} - q\right]\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n} - q\right)\frac{a}{n}$$

となる。その差を求めると

$$\pi_2 - \pi_{-2} = -\left(\frac{a}{n} - q\right)^2$$

が得られる。これは q と $\frac{a}{n}(= q_w)$ とが異なる限り負である。したがってすべての企業が q_w を選んでいる状態において 1 つの企業が突然変異によって q_w とは異なる産出量を選んでも，その企業の利潤は他の企業の利潤よりも小さいので，その後突然変異なしでもとの状態 W に戻る。

状態 q から始まったとすると 1 つの突然変異で非対称な状態に移り，さらに突然変異なしで状態 W に移る。これはすべての状態 q について成り立つ。一方，状態 W からは 1 つの突然変異で非対称な状態になるがその後は突然変異なしですぐもとに戻るから，状

プレイヤー 2

プレイヤー 1	ソフト X	ソフト Y
ソフト X	4, 4	0, 0
ソフト Y	0, 0	1, 1

表 2.11　協調ゲーム

態 W において少なくとも 2 つの突然変異が同時に起きなければ状態 q には移らない。したがって状態 W と比べて状態 q が実現する確率は長期的に無視できるものである。今述べたように状態 W から 1 つの突然変異で非対称な状態に移るが，突然変異が連続しなければすぐもとに戻るので非対称な状態が実現する確率も長期的に無視できるから，この一般的なケースにおいてもすべての企業が競争的な産出量を選ぶ状態が確率的に安定な状態である。

2.7.6　ナッシュ均衡が 2 つある協調ゲームの進化ゲーム的分析

8 人の人がいて，ある作業をするのに 2 種類のソフト X，Y のいずれかを使うものとする。常に 2 人づつが共同で作業をするが互いに異なるソフトを使うとうまく作業ができず利得は 0[*33]，ともに X を使えば利得は 4，ともに Y を使った場合は共同作業は可能だがソフトの性能面などの差で利得は 1 であるとする。どの 2 人が共同作業するかはランダムに決まる。各プレイヤーは一定の期間を置いて自分が使うソフトを決め，各期間に何度もの共同作業を行うものとする。このゲームの一回一回のゲーム（段階ゲームと呼ぶ）の利得表は表 2.11 で表される。共同作業を行う各プレイヤーを 1 と 2 で表しているが，どちらがプレイヤー 1 でも 2 でも同じ状況になっている。これを通常の非協力ゲームと見れば純粋戦略によるナッシュ均衡は，「ともに X を選ぶ」と「ともに Y を選ぶ」の 2 つあるが，X を選ぶ方が利得が大きい協調ゲームになっている。つまりプレイヤーが協調して X を選ぶようにした方が大きな利得が得られるがナッシュ均衡の考え方だけではどちらが実現するかはわからない。また X も Y もともに進化的に安定な戦略である。人々が各期間に選ぶソフトを次のようなプロセスで決めるものと仮定する。

(1). 各期間において各人が表 2.11 に表されたゲームを何度もプレイするが，その期間中は予め決めたソフトを選び続ける。各人はそれぞれ他の人と等しい確率で共同作業を行う。

(2). ある期間を通して X を選ぶ人が得る平均利得が Y を選ぶ人が得る平均利得より大きい場合，次の期間に X を選ぶ人の数が増える。逆に Y を選ぶ人の平均利得の方

[*33] 利得 0 とはこのときの利得を基準にするということであり，この値を 1 として他の利得にすべて 1 を加えてもゲームの構造は変らない。

が大きいときには Y を選ぶ人の数が増える。一度に全員が同じソフトを選ぶようになると考えてもよいが，1 人づつ増えて行くと考えてもよい。

(3). 上で説明したソフト変更の他に，平均利得とは関係なく確率 ε で「何かの間違いで」あるいは「実験的に」ソフトを変更する可能性がある。すべての人についてその確率は等しい。これを突然変異と呼ぶことにする。突然変異によって選ぶソフトが変らない確率は $1-\varepsilon$ である。ε はごく小さい正の値であるとする。

まず，ある期間における平均利得を求めよう。人々の内 α 人が X を，β 人（$\alpha+\beta=8$ でそれぞれは 0 以上の整数）が Y を使っているとすると X を使っている人の平均利得 $E(X)$ は

$$E(X)=\frac{4(\alpha-1)}{7}\text{（自分を除くので }X\text{ を選んでいる人は}\alpha-1\text{ 人）}$$

となり，Y を使っている人の平均利得 $E(X)$ は

$$E(Y)=\frac{\beta-1}{7}=\frac{7-\alpha}{7}\text{（自分を除くので }Y\text{ を選んでいる人は}\beta-1\text{ 人）}$$

に等しい。差をとると

$$E(X)-E(Y)=\frac{5\alpha-11}{7}$$

であるから，$\alpha \geqq 3$ ならば X を選ぶ人の方が大きい平均利得を得，$\alpha \leqq 2$ のときには Y を選ぶ人の方が大きい平均利得を得る。また α が大きいほど $E(X)$ は大きくなり，$E(Y)$ は小さくなる。そうすると X，Y を選ぶ人の数の変化は次のようにまとめられる。

(1). 3 人以上が X を選んでいる場合は X を選ぶ人の方が大きい平均利得を得るので次の期間に X を選ぶ人は突然変異なしで増える。そうすると益々 X を選ぶ人の平均利得の方が大きくなるから突然変異なしで全員が X を選ぶ状態に移る。

(2). 6 人以上が Y を選んでいる場合は Y を選ぶ人の方が大きい平均利得を得るので次の期間に Y を選ぶ人は突然変異なしで増える。そうすると益々 Y を選ぶ人の平均利得の方が大きくなるから突然変異なしで全員が Y を選ぶ状態に移る。

(3). 全員が X を選んでいるときは突然変異以外で各ソフトを選ぶ人数が変ることはない。6 人以上が突然変異を起こせば次の期間において Y を選ぶ人の方が大きい平均利得を得ることになり上で説明したように突然変異なしで全員が Y を選ぶ状態に移る。突然変異を起こす人数が 5 人以下であれば X を選ぶ人の平均利得の方が大きいので突然変異なしでもとに戻る。

(4). 全員が Y を選んでいるときは突然変異以外で各ソフトを選ぶ人数が変ることはない。3 人以上が突然変異を起こせば次の期間において X を選ぶ人の方が大きい平均利得を得ることになり上で説明したように突然変異なしで全員が X を選ぶ状態に移る。突然変異を起こす人数が 2 人以下であれば Y を選ぶ人の平均利得の方が大きいので突然変異なしでもとに戻る。

ε の値が十分に小さければ突然変異なしでの状態の変化に突然変異が影響することはない。全員が X を選んでいるときに状態が変るためには同時に 6 人以上が突然変異を起こさなければならないが，その確率は ε^6 の何倍か（8 人から 6 人を選ぶ組み合わせの数）にほぼ等しい（ε が小さければ 7 人以上が突然変異を起こす場合は無視できる)。一方全員が Y を選んでいるときに状態が変るためには同時に 3 人以上が突然変異を起こさなければならないが，その確率は ε^3 の何倍か（8 人から 3 人を選ぶ組み合わせの数）にほぼ等しい（ε が小さければ 4 人以上が突然変異を起こす場合は無視できる)。ε の値が十分に小さければ ε^3 に比べて ε^6 は（それぞれの定数倍を比べても）無視できるほどに小さい。したがって長い時間の経過の中では全員が X を選ぶという状態がほとんどの期間に実現すると考えられる。すなわちそれが確率的に安定な状態である。このようにして複数のナッシュ均衡を持つゲームにおいて利得の大きい戦略を選ぶプレイヤーが増えるという進化論的なプロセスと確率的に起きる突然変異を合わせて考えることによって，より起こりやすい均衡を選び出すことができる（場合がある）のである。

■協調ゲームの進化ゲーム的分析の別の例

		プレイヤー 2	
プレイヤー 1		ソフト X	ソフト Y
	ソフト X	4, 4	0, 2
	ソフト Y	2, 0	3, 3

表の例を考える。(X, X) と (Y, Y) がナッシュ均衡であり，(X, X) がパレート効率的であることに変わりはない。ソフト Y を使っている人は相手が X でも多少の利得が得られるのに対して X を使っている人は相手が X でなければ利得を得ることはできない。人数を 9 人とする。9 人中 α 人が X を，残りが Y を使っているときのそれぞれの平均利得は

$$E(X) = \frac{4(\alpha - 1)}{8}$$

$$E(Y) = \frac{3(8 - \alpha) + 2\alpha}{8} = \frac{24 - \alpha}{8}$$

でありその差は

$$E(X) - E(Y) = \frac{5\alpha - 28}{8}$$

である。したがって X を使っている人が 6 人以上であれば X を使っている人の方が平均利得が大きく，5 人以下であれば Y を使っている人の方が平均利得が大きい。そうすると全員が X を選んでいる状態において 4 人以上が突然変異を起こせば全員が Y を選ぶ状態に移行するのに対して，全員が Y を選んでいる状態においては 6 人以上が突然変異を起こさなければ全員が X を選ぶ状態には移行しないから，全員が Y を選ぶ状態が確率的に安定である。これは自分以外の人達の内半分づつの人が X，Y を選んでいるときに自分

が X を選ぶより Y を選ぶ方が有利になることによる。このようなとき (Y, Y) という均衡は危険支配的 (risk dominant) であると言う。この例のようなゲームは stag hunt ゲーム（鹿狩ゲーム）と呼ばれる。二人の狩人が鹿または兎を取りに行く。ともに同じ戦略を選べば協力して獲物を得られるが，異なる戦略を選ん場合は兎だけが少し取れて鹿は取れない。X が鹿を，Y が兎を取りに行く戦略と考える。ともに鹿を取りに行くのが望ましい均衡である（利得支配的 (payoff dominant) と言う，パレート効率性の意味で優れているということでもある）が鹿を取りに行くと何も取れない可能性があるので利得の構造によってはともに兎を取りに行く均衡が危険支配的になる。

■危険支配の一般的な議論　次の対称的なゲームを考える。

プレイヤー 2

プレイヤー 1		X	Y
	X	a, a	b, c
	Y	c, b	d, d

(X, X)，(Y, Y) ともにナッシュ均衡であるとする。プレイヤー 1 の立場に立って相手（プレイヤー 2）が確率 p で X を，確率 $1-p$ で Y を選ぶとする。このゲームにおいてプレイヤー 1 が X，Y を選んだときの期待利得はそれぞれ

$$E(X) = pa + (1-p)b$$

$$E(Y) = pc + (1-p)d$$

であり，$E(X) > E(Y)$ となるのは

$$p(a-c) > (1-p)(d-b)$$

のときである。$p = \frac{1}{2}$，すなわち相手が X，Y を等しい確率で選ぶとするとこの条件は

$$a - c > d - b$$

となる。この式が成り立つとき (X, X) が危険支配的となる。逆に $d - b > a - c$ であれば (Y, Y) が危険支配的である。

上記の進化ゲームにこの議論を適用すると，(Y, Y) が危険支配的であることがわかる。しかし，少し注意しなければいけない点がある。全体の人数が N 人でその内 αN 人が X を選んでいるとすると自分が X を選ぶときに各ゲームのプレイにおいて相手が X を選ぶ確率は $\frac{\alpha N-1}{N-1}$，自分が Y を選ぶときに相手が X を選ぶ確率は $\frac{\alpha N}{N-1}$ である。N が非常に大きければ（厳密に言うと無限大）前者も後者も α に等しくなる。しかし例えば上で考えたように $N = 9$ とすると $\frac{\alpha N-1}{N-1} = \frac{9\alpha-1}{8}$ で，$\frac{\alpha N}{N-1} = \frac{9\alpha}{8}$ となり明らかに異なる。したがって人数が非常に多い場合には危険支配の議論はそのまま当てはまるが，人数が少ないときには注意して分析しなければならない。

2.8 協力ゲームの理論

協力ゲームとはゲームのプレイヤーが互いに話し合ったり相談したりできる状況で適当な解を見出そうとするものである。ここでは代表的な協力ゲームの理論について基本的な部分を紹介しよう。

2.8.1 コア

次のような例を考える。

隣り合わせに建っている 3 軒の家 A，B，C が近くまでパイプラインで来ている温泉を家に引き込みたいと考えているとする。各自が引けばパイプラインからの距離や家の構造などによって A は 70 万円，B は 55 万円，C は 65 万円かかる。しかし 2 軒あるいは 3 軒共同で引けば経費を安くすることができる。具体的に A と B が共同で引けば 119 万円，B と C なら 112 万円で引くことができ，単独で引くよりも合計では安くなる。一方 A と C は離れているために共同で引いても経費を下げられずメリットはない。さらに 3 軒共同で引けば 170 万で引くことができるものとする。A と B が協力すればそれぞれ単独で引くよりも合わせて 6 万円安くすることができるので，その協力による価値を

$$v(\{A,B\}) = 6$$

と表す。このように複数のプレイヤーが協力することを**提携**と呼ぶ。またその提携によって得られる価値を表す関数を**特性関数**と呼ぶ。上の式は提携 {A, B} の特性関数の値が 6 であることを意味する。同様に考えると

$$v(\{B,C\}) = 8$$

$$v(\{A,C\}) = 0$$

となる。A と C の 2 人の提携では節約はできない。また 3 人全員の提携 {A, B, C} の特性関数の値は

$$v(\{A,B,C\}) = 20$$

である。単独ではもちろん節約できないので，そのことを $v(\{A\}) = 0$，$v(\{B\}) = 0$，$v(\{C\}) = 0$ と表す。3 人で一緒に引けばそれぞれが単独で引くよりも 20 万円節約できる。特性関数の値から

$$v(\{A,B\}) > v(\{A\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{B,C\}) > v(\{B\}) + v(\{C\})$$

が得られ，さらに

$$v(\{A,B,C\}) > v(\{A,B\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A,B,C\}) > v(\{B,C\}) + v(\{A\})$$

$$v(\{A,B,C\}) > v(\{A,C\}) + v(\{B\})$$

が成り立つ。これらの式は A，B がそれぞれ単独で引くよりは協力した方がよいことを (B，C も同様)，また A，B2 人，あるいは B，C2 人または A，C2 人が協力するよりも 3 人で協力した方がよいことを意味する。そこで 3 人が協力して温泉を引いたとき，その経費をどのように分担するか，逆に言えば協力することによって節約できる分をどのように分けるのが適当であるかを，ある基準にもとづいて検討してみよう。全体で節約される 20 万円の A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とする。まず節約される 20 万円すべてを 3 人に配分し，かつ各自の取り分がマイナスでは誰も参加しないので次の 2 つの条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 20 \text{（全体合理性）}$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \text{（個人合理性）}$$

3 人の提携を実現するには単独で引く場合と比べた場合はもちろん，2 人で協力して引く場合よりもよりよい結果が実現されなければならない。そうでなければその 2 人は提携から抜けて 2 人だけで温泉を引くことを選ぶであろう。したがって上記の条件に加えて

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

が成り立たなければならない。これらの条件を満たす配分 (x,y,z) の集合を**コア (core)** と呼ぶ。コアがなるべく狭い方が限られた配分だけが望ましい配分の候補になるが，この例ではそうはならない。$x+y \geqq 6$，$y+z \geqq 8$ なので $z \leqq 14$，$x \leqq 12$ でなければならないが，$v(\{A,C\}) = 0$ によって $x+z \geqq 0$ であればよいので y に制約はない。したがって $(x,y,z) = (0,20,0)$ というような配分も $(x,y,z) = (6,0,14)$ というような配分もコアに含まれてしまう。次の「仁」ではさらに満たすべき条件をつけ加えてコアの中から最も望ましい配分を見つけ出す方法を考えてみよう。コアが存在しないゲームもある。仁はコアが存在すればそのコアに含まれているが，コアが存在しなくても仁は存在する。詳しくは仁の説明の中で述べる。

「仁」の説明で用いる「不満」という言葉を使えば，コアはすべての提携が正の不満を持たない配分の集合である。

■コアの図解　コアの図解を紹介する。

$$v(\{A,B\}) = 6,\ v(\{B,C\}) = 8,\ v(\{A,C\}) = 0,\ v(\{A,B,C\}) = 20,\ v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

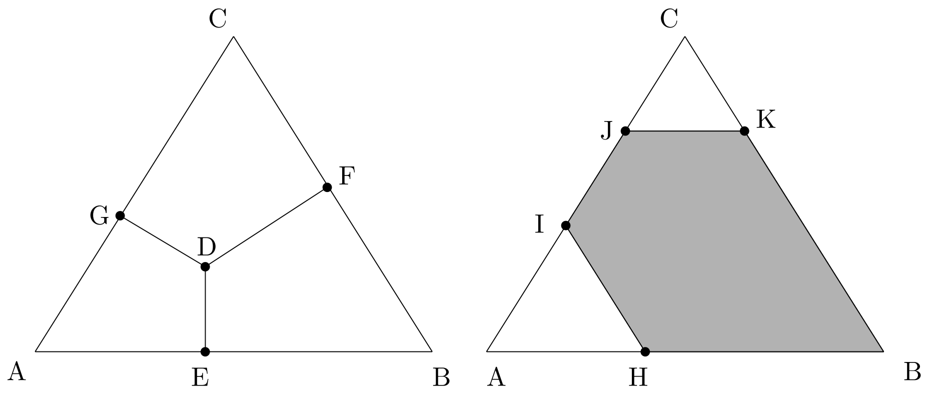


図 2.3　コアの図解

の例を考え，A，B，C の配分を x，y，z で表す。コアの条件は

$$x + y + z = 20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

であるが，$x + y \geqq 6$ は $z \leqq 14$ に，$y + z \geqq 8$ は $x \leqq 12$ に対応する。さて，図のような正三角形を描く。

まず左の図を見ていただきたい。E，F，G はそれぞれ D から各辺に下ろした垂線の足である。正三角形であるから DE，DF，DG の和は一定である（簡単に証明できる）。それぞれ $DF = x$，$DG = y$，$DE = z$，$DE + DF + DG = 20$ とすると D は上の配分を表していることがわかる。D と BC の距離がプレイヤー A の，D と AC の距離が B の，D と AB の距離が C の配分である，D はこの三角形内（辺と頂点を含む）のどこにでもとれる。例えば点 A を D とすると $(x, y, z) = (20, 0, 0)$ という配分を，AB 上のある点を D とすると $z = 0$ となる配分を表す。コアの条件 $x + y \geqq 6$，$y + z \geqq 8$ は，それぞれ $DE \leqq 14$，$DF \leqq 12$ を意味するからそれらを満たす領域は右の図のように表される。図の網掛けした部分がコアである。H，I，J，K はそれぞれ $(x, y, z) = (12, 8, 0)$，$(x, y, z) = (12, 0, 8)$，$(x, y, z) = (6, 0, 14)$，$(x, y, z) = (0, 6, 14)$ という配分を表している。

2.8.2　仁 (nucleous)

単独または 2 人の提携で実現できる価値と全員が提携したときに得られる各自の配分（または 2 人の配分の和）との差を「不満」と呼ぶことにする。今の例では次のように表される。

$$
\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=6-(x+y)\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=8-(y+z)\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=-(x+z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=-x\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=-z
\end{aligned}
$$

たとえば配分 $(x,y,z)=(6,0,14)$ に対する不満は上から 0，-6，-20，-6，0，-14 となる。マイナスの不満とは満足度を表すと考えればよい。上の式をすべて足し合わせると

$$14-3(x+y+z)=-46$$

となるから不満の合計は一定である。しかしそれに偏りがあることは望ましくない。より公平な配分を考えるにはできるだけ不満を均等化することが求められるであろう。そこでまず不満の内最も大きいものをなるべく小さくすることを考える。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$6-(x+y)\leqq m,\ 8-(y+z)\leqq m,\ -(x+z)\leqq m,\ -x\leqq m,\ -y\leqq m,\ -z\leqq m$$

$x+y+z=20$ より $-(x+y)=z-20$，$-(y+z)=x-20$，$-(x+z)=y-20$ であるから上記の条件は

$$-m\leqq x\leqq 12+m,\ -m\leqq y\leqq 20+m,\ -m\leqq z\leqq 14+m$$

と書き直される。ここで $m=-6$ とすると

$$6\leqq x\leqq 6,\ 6\leqq y\leqq 14,\ 6\leqq z\leqq 8$$

となる。これらを満たす (x,y,z) は存在する。しかし $m=-7$ とすると最初の条件が $7\leqq x\leqq 5$ となり，それを満たす x はないから -6 が最大の不満を最小化した値である。これで $x=6$ および $y+z=14$ が決まる。その前提で各提携（1 人の場合も提携と呼ぶことにする）の不満を求めると

$$
\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=-y\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=-6\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=-6-z\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=-6\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=-z
\end{aligned}
$$

が得られる。-6 が 2 つあるので 3 番目に大きい不満ができるだけ小さくなるように考えよう。すると $y+z=14$ という条件のもとで $y=7$，$z=7$ が得られる。したがって

$(x, y, z) = (6, 7, 7)$ が最も望ましい配分である。このようにして求められた配分を「仁」と呼ぶ。プレイヤーの数が多く 3 番目に大きい不満を最小化することで配分が確定しない場合にはさらに 4 番目，5 番目 $\cdots$ と配分が確定するまで続ける。

「仁」は不満を均等化する配分ではなく，「最大の不満を最小化し，その上で次の不満を最小化する。さらに次の不満を最小化する」というプロセスを配分が確定するまで続けて得られる配分である。不満の合計は一定なので不満を完全に均等化するような配分があればそれが仁となるが，そのような不満があるとは限らない。なお，不満を均等化するというのはもちろん配分を均等化することではない。

■コアが存在しない場合の仁　仁は不満を最小化するという条件で求められるものであり，コアの条件を課すわけではないのでコアがなくても仁は存在する。ただしその場合は正の不満が残ることになるので，一部のグループが全体の提携から抜けることも考えられる。

特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 7,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 6,\ v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 10$$

$$x + y \geqq 7,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x+y \geqq 7$，$y+z \geqq 8$ なので $z \leqq 3$，$x \leqq 2$ でなければならない。しかしそれでは $x+z \geqq 6$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。しかし仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 7 - (x + y) \\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z) \\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 6 - (x + z) \\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x \\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y \\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

すべて足し合わせると

$$21 - 3(x + y + z) = -9$$

となってやはり一定である。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m=\frac{1}{3}$ とすると

$$x+y \geqq \frac{20}{3},\ y+z \geqq \frac{23}{3},\ x+z \geqq \frac{17}{3},\ x \geqq \frac{1}{3},\ y \geqq \frac{1}{3},\ z \geqq \frac{1}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x=\frac{7}{3},\ y=\frac{13}{3},\ z=\frac{10}{3}$$

が求まる。このとき

$$x+y=\frac{20}{3}<7,\ y+z=\frac{23}{3}<8,\ x+z=\frac{17}{3}<6$$

であるから 2 人ずつの提携には不満が残る。

$m=\frac{1}{3}$ を求める。

$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$

と $x+y+z=10$ より

$$-m \leqq x \leqq 2+m,\ -m \leqq y \leqq 4+m,\ -m \leqq z \leqq 3+m$$

が得られる。先の例と同じ手順で $m=-1$ が最小化された最大の不満となりそうに思われるが，一方で不等式の右辺の和は 10 以上でなければならないので $9+3m \geqq 10$ から

$$m \geqq \frac{1}{3} > -1$$

となる。この $\frac{1}{3}$ が最小化された最大の不満である。
先の例では

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 20+m,\ -m \leqq z \leqq 14+m$$

の右辺の和が 20 以上であるという条件 $46+3m \geqq 20$ より $m \geqq -\frac{26}{3}(<-6)$ となるので $m=-6$ が最小化された最大の不満であることに問題はない。

■交渉集合 (barganing set)　コアより弱い条件を満たす交渉集合という概念もある．コアが存在しなくても交渉集合は存在し，仁は交渉集合に含まれる．コアが存在すれば交渉集合に含まれる．ここでは上記の例をもとに仁が交渉集合の条件を満たすことを確認する．

まず「異議」と「逆異議」を定義する．ある決まった配分において，例えばプレイヤーAが自分とCの利得をその配分より大きくし，それをAとCで実現できるような配分案を持っている場合，その配分案を「AからBへの異議」と言う．AとCからなるグループが不満を持つ場合異議がある．その異議に対してBが，自分の利得をもとの配分以上に，Cの利得をAの異議における利得以上にし，それをBとCで実現できるような配分案を持つ場合，その配分案を上記の異議に対する「逆異議」と言う．異議がないか，またはいかなる異議に対しても逆異議が存在するような配分の集合が「交渉集合」である．不満を持つグループがあれば異議が存在し，なければ異議は存在しないのでコアに含まれる配分は異議がないという意味で交渉集合の条件を満たしている．しかし，異議があっても逆異議があれば交渉集合の条件を満たすのでコアに含まれていない配分で交渉集合に含まれるものもある．$(x, y, z) = (\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3})$ に対するプレイヤーAからBへの異議を (x', y', z') とすると

$$x' > \frac{7}{3},\ z' > \frac{10}{3} \text{ かつ } x' + z' \leqq 6$$

が成り立たなければならないが，$\frac{7}{3} + \frac{10}{3} < 6$ なのでこれらの条件を満たすプレイヤーAからBへの異議が存在する．このとき $z' < \frac{11}{3}$ である．それに対してプレイヤーBが

$$y'' \geqq \frac{13}{3},\ z'' \geqq z' \text{ かつ } y'' + z'' \leqq 8$$

を満たす配分案 (x'', y'', z'') を持てば逆異議を持つ．$\frac{13}{3} + \frac{11}{3} = 8$ であるから逆異議は存在する．プレイヤーCからAへの異議を (x', y', z') とすると

$$y' > \frac{13}{3},\ z' > \frac{10}{3} \text{ かつ } y' + z' \leqq 8$$

が成り立たなければならないが，$\frac{13}{3} + \frac{10}{3} < 8$ なのでこれらの条件を満たすプレイヤーCからAへの異議が存在する．このとき $y' < \frac{14}{3}$ である．それに対してプレイヤーAが

$$x'' \geqq \frac{7}{3},\ y'' \geqq y' \text{ かつ } x'' + y'' \leqq 7$$

を満たす配分案 (x'', y'', z'') を持てば逆異議を持つ．$\frac{7}{3} + \frac{14}{3} = 7$ であるから逆異議は存在する．プレイヤーCからBへの異議を (x', y', z') とすると

$$x' > \frac{7}{3},\ z' > \frac{10}{3} \text{ かつ } x' + z' \leqq 6$$

が成り立たなければならないが，$\frac{7}{3} + \frac{10}{3} < 6$ なのでこれらの条件を満たすプレイヤーCからBへの異議が存在する．このとき $x' < \frac{8}{3}$ である．それに対してプレイヤーBが

$$x'' \geqq x',\ y'' \geqq \frac{13}{3} \text{ かつ } x'' + y'' \leqq 7$$

を満たす配分案 (x'', y'', z'') を持てば逆異議を持つ．$\frac{8}{3} + \frac{13}{3} = 7$ であるから逆異議は存在する．同様にして他のいかなる異議に対しても逆異議が存在することが示される（確認し

ていただきたい）ので，$(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3})$ という仁を構成する配分は交渉集合の条件を満たしている．この例では他に交渉集合に含まれる配分はないことが示される（一般的にはそうではないが）．

仁以外で

$$x+y \leqq 7,\ y+z \leqq 8,\ x+z \leqq 6$$

の条件を満たす配分について検討してみよう．$\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ として $(x,y,z) = (\frac{7}{3} + \varepsilon, \frac{13}{3} - \delta, \frac{10}{3} - \varepsilon + \delta)$ という配分を考える．$\varepsilon - \delta \leqq \frac{1}{3}$，$\delta \leqq \frac{1}{3}$ のときに上の条件は成り立ち，提携 $\{B, C\}$ は間違いなく不満を持つ．プレイヤー B から A への異議を (x', y', z') とすると，条件は

$$y' > \frac{13}{3} - \delta,\ z' > \frac{10}{3} - \varepsilon + \delta \text{ かつ } y' + z' \leqq 8$$

このとき $z' < \frac{11}{3} + \delta$．これに対してプレイヤー A の逆異議 (x'', y'', z'') があるとすると

$$x'' \geqq \frac{7}{3} + \varepsilon,\ z'' \geqq z' \text{ かつ } x'' + z'' \leqq 6$$

が成り立たなければならないが $z' = \frac{11}{3}$ の場合には成り立たないので逆異議はなく，もとの配分は交渉集合の条件を満たさない．他の配分についても同様である．

次に，以下の条件を満たす配分を考える．

$$x+y+z = 10$$

$$x+y \leqq 7,\ y+z \leqq 8,\ x+z > 6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

この場合提携 $\{A, B\}$，$\{B, C\}$ のいずれかが不満を持つが，$\{B, C\}$ が不満を持つ，すなわち $y+z < 8$ であると仮定しよう．そのときプレイヤー B から A への異議 (x', y', z') が存在する．条件は

$$y' > y,\ z' > z,\ y' + z' \leqq 8$$

それに対して，$x+z > 6$ であるから

$$x'' + z'' \geqq x + z',\ x'' + z'' \leqq 6$$

とはできないので A は逆異議を持てない．したがってもとの配分は交渉集合の条件を満たさない．$x+y > 7$ あるいは $y+z > 8$ の場合も同様.

最後に，以下の条件を満たす配分を考えてみよう．

$$x+y+z = 10$$

$$x+y \leqq 7,\ y+z>8,\ x+z>6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

この場合 $x+y<7$ となって 提携 $\{A,B\}$ が不満を持ち，プレイヤー A から C への異議 (x',y',z') が存在する．その条件は

$$x'>x,\ y'>y,\ x'+y' \leqq 7$$

そのとき，$y+z>8$ であるから

$$y''+z'' \geqq y'+z,\ y''+z'' \leqq 8$$

とはできないので C は逆異議を持てない．したがってもとの配分は交渉集合の条件を満たさない．他の場合も同様.

■より簡単な例–2 人の共同事業　もっと簡単な例を考えてみよう。2 人の人，A，B がいてある共同事業をしたときの収益の分け方を話し合っているものとする。共同事業をすれば 2000 万円の収益が得られるが，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができない。このゲームの特性関数は

$$v(\{A\})=100,\ v(\{B\})=200,\ v(\{A,B\})=2000$$

と表される。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。これらは次の条件を満たさなければならない。

$$x_A+x_B=2000,\ x_A \geqq 100,\ x_B \geqq 200$$

この条件を満たす x_A，x_B の集合がこのゲームのコアをなす。$(x_A,x_B)=(1800,200)$，$(x_A,x_B)=(100,1900)$ などコアに含まれる配分はたくさんある。次に仁を求めよう。このゲームでは提携は $\{A\}$，$\{B\}$，$\{A,B\}$ の 3 つしかないが，2 人の提携に対する 1 人だけの提携の不満は

$$\begin{aligned}\{A\}&:\ v(\{A\})-x_A=100-x_A\\ \{B\}&:\ v(\{B\})-x_B=200-x_B\end{aligned}$$

となる。2 人の不満を最小にするにはその不満を均等にすればよい。したがって

$$x_B-x_A=100$$

が成り立つことが求められる。これから $(x_A,x_B)=(950,1050)$ という配分が仁であることがわかる。

2.8.3　シャープレイ値

仁を計算したものと同じ例を用いる。ここで紹介するシャープレイ値 (Shapley value) は仁とは異なった観点から望ましい配分を求めようとするものである。シャープレイ値では提携が形成される際の各プレイヤーの貢献度が重要な意味を持つ。例えば提携 {A,B} に C が加われば提携 {A,B,C} が作られる，そのときの C の貢献度は $v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) = 14$ となる。A が 1 人だけいるところに B が加われば提携 {A,B} が作られる，そのときの B の貢献度は $v(\{A,B\}) - v(\{A\}) = 6$ である。また A 単独の提携については $v(\{A\})$ の値を貢献度とする。A が 1 人だけいるところに B が加わり，さらに C が加わって全員の提携が作られる過程を $A \to AB \to ABC$ と表す。同様にして B が 1 人だけいるところに C が加わり，さらに A が加わって全員の提携が作られる過程は $B \to BC \to ABC$ と表される。このときの提携 {B,C} における C の貢献度は $v(\{B,C\}) - v(\{B\}) = 8$，提携 {A,B,C} における A の貢献度は $v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) = 12$ である。このような過程は全部で 6 つある。まず各提携における各プレイヤーの貢献度を次のような一覧表で表してみる。

	A	B	C
{A,B,C}	20-8=12	20-0=20	20-6=14
{A,B}	6	6	–
{A,C}	0	–	0
{B,C}	–	8	8
{A}	0	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	0

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	6	14
$A \to AC \to ABC$	0	20	0
$B \to AB \to ABC$	6	0	14
$B \to BC \to ABC$	12	0	8
$C \to AC \to ABC$	0	20	0
$C \to BC \to ABC$	12	8	0

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均（期待値）を求めると A，B，C それぞれ 5，9，6 である。この値の組がシャープレイ値であり，それにもとづいた配分 $(x, y, z) = (5, 9, 6)$ が貢献度を基準とした

望ましい配分ということになる。

■より簡単な例–2 人の共同事業　仁の所で考えた A，B2 人の共同事業の例を見てみよう。共同事業から得られる収益は 2000 万円で，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができないと想定されていて，特性関数は

$$v(\{A\}) = 100,\ v(\{B\}) = 200,\ v(\{A, B\}) = 2000$$

のように表された。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。2 人の場合は提携の作り方が $A \to AB$ と $B \to AB$ しかない。貢献度を表にすると

	A	B
$A \to AB$	100	1900
$B \to AB$	1800	200

この表からシャープレイ値は $(950, 1050)$ であることがわかる。この配分は仁によるものと一致する。

シャープレイ値の公理

シャープレイ値は次の 4 つの条件（公理）を満たす唯一の解であることが知られている。

(1).「全体合理性」
全員の提携によって実現する利得のすべてが全員に配分されるということである。本文の表からもわかるように全員の提携が作られるプロセスにおける各プレイヤーの貢献度の和は全員の提携から得られる利得に等しい。したがって貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値は全体合理性を満たす。

(2).「ナルプレイヤー (null player) のゼロ評価」
ナルプレイヤーとはいかなる提携の形成にあたっても何の貢献もしないプレイヤーを意味する。あるプレイヤーを含む提携の特性関数の値と，そのプレイヤーだけを除いた提携の特性関数の値とが常に等しいとき，そのプレイヤーはナルプレイヤーとなる。この条件はそのようなナルプレイヤーの配分はゼロであることを要求する。すべての提携においてあるプレイヤーの貢献度がゼロならばそのシャープレイ値もゼロであるからこの条件は満たされている。

(3).「対称性：貢献度の等しいプレイヤーに対する配分はすべて等しくする」
プレイヤー i と j の貢献度が等しいというのは，i，j を含まない任意の提携に i が加わってできる提携の特性関数の値と j が加わってできる提携の特性関数とが等しいことを意味する。貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値はこの条件も満たす。

(4).「加法性」

同じプレイヤーの集合からなる 2 つのゲーム G_1，G_2 における任意の提携 S の特性関数をそれぞれ $v_1(S)$，$v_2(S)$，各ゲームにおけるプレイヤー i のシャープレイ値を $\varphi_i(v_1)$，$\varphi_i(v_2)$ とするとき

$$v(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

という特性関数を持つゲーム G におけるプレイヤー i のシャープレイ値 $\varphi_i(v_1+v_2)$ は

$$\varphi_i(v_1 + v_2) = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v_2)$$

に等しい。

各プレイヤーの G における各提携についての貢献度は G_1，G_2 における貢献度の和に等しくなるからシャープレイ値はこの条件を満たす。

■コア，仁，シャープレイ値の問題の例 3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 1,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 7,\ v(\{A, C\}) = 11$$

$$v(\{A, B, C\}) = 25$$

(1). **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x + y + z = 25,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 7,\ x + z \geqq 11$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $1 \leqq x \leqq 18$，$0 \leqq y \leqq 14$，$2 \leqq z \leqq 19$ でなければならない。

(2). **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 7 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 11 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = 1 - x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とすると

$$6-(x+y) \leqq m,\ 7-(y+z) \leqq m,\ 11-(x+z) \leqq m,\ 1-x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2-z \leqq m,$$

が得られる。$x+y+z=24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$1-m \leqq x \leqq 18+m,\ -m \leqq y \leqq 14+m,\ 2-m \leqq z \leqq 19+m$$

x, y, z の式がそれぞれ等式になる場合を考えると，$1-m=18+m$, $-m=14+m$, $2-m=19+m$ より各々 $m=-\frac{17}{2}$, $m=-7$, $m=-\frac{17}{2}$ を得る。この内最大のものは $m=-7$ であるから，これが最小化された最大の不満である。そうすると

$$8 \leqq x \leqq 11,\ 7 \leqq y \leqq 7,\ 9 \leqq z \leqq 12$$

となり $y=7$ が決まる。$m=-\frac{17}{2}$ とすると $\frac{17}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$ となり矛盾が生じる。
$y=7$ とすると各提携の不満は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=-1-x\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=-z\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=11-(x+z)=-7\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=1-x\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-7\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z
\end{aligned}$$

値が決まっていない不満の最大値を最小化することを考えると $1-x$ と $2-z$ を等しくすることになるので $x=\frac{17}{2}$, $z=\frac{19}{2}$ が求まる。したがって仁となる配分は $(x,y,z)=(\frac{17}{2},7,\frac{19}{2})$ である。

(3). **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
{A,B,C}	25-7=18	25-11=14	25-6=19
{A,B}	6	5	–
{A,C}	9	–	10
{B,C}	–	5	7
{A}	1	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	1	5	19
$A \to AC \to ABC$	1	14	10
$B \to AB \to ABC$	6	0	19
$B \to BC \to ABC$	18	0	7
$C \to AC \to ABC$	9	14	2
$C \to BC \to ABC$	18	5	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{53}{6}$，$\frac{19}{3}$，$\frac{59}{6}$ であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (\frac{53}{6}, \frac{19}{3}, \frac{59}{6})$ である。

2.9　交渉ゲーム

2.9.1　ナッシュ交渉解

2 人の当事者が交渉によって取り分を決めるような協力ゲームにはナッシュ交渉解 (Nash solution) と呼ばれる有名な理論がある。ごく単純なゲームでは仁やシャープレイ値と同じ結果になる場合もあるが結果を導き出す根拠に違いがある[*34]。人々の利得は（フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型）効用関数で表されるものとする。

例で考えよう。A，B の 2 人がある仕事の報酬を巡って交渉をする。それぞれの利得を x_A，x_B（ともに 0 以上）とし次のような状況を考える

(1). 2 人が共同で仕事をしたときに得られる利得は次の式を満たす。

$$2x_A + x_B \leqq 24 \tag{2.31}$$

このように交渉の結果が満たしていなければならないある条件に当てはまる x_A，x_B の値の範囲を U で表す。

(2). 交渉が決裂したときの利得をそれぞれ d_A，d_B とすると，$d_A = 4$，$d_B = 0$ であると仮定する。

ナッシュは最適な交渉の結果が以下のような条件（公理）を満たしていることを要求した。

(1). パレート効率的である：
A の取り分 x_A を小さくせずに B の取り分を大きくする（あるいは逆）分け方はない。したがって上の (2.31) は等式 (=) で満たされる。

[*34] ナッシュ交渉解のナッシュはナッシュ均衡のナッシュ (John Nash) と同一人物である。

(2). 対称性：
状況が対称的であれば結果も対称的である。たとえば U が

$$x_A + x_B = 12$$

のように表され，交渉が決裂したときの利得が $d_A = d_B = 2$ のときには交渉の結果は $x_A = x_B = 6$ でなければならない。この条件は 2 人の交渉力に差がないことを意味する。その人の押しの強さなどによって交渉の結果が左右されてはならない。対称的であるとは x_A と x_B，d_A と d_B を入れ替えても 2 人が置かれた立場が変らないことを意味する。

(3). 無関係な代替案からの独立性：
U から交渉の結果実現する状態以外の選択肢が抜けても交渉の結果は変らない。

(4). アフィン変換からの独立性：
この条件は A，B の利得をそれぞれ $ax_A + b$，$cx_B + e$（d_A，d_B も同様に変換する，a，b，c，e は定数，このような変換をアフィン変換と呼ぶ）に変換すればそれに対応するように交渉の結果も変るというもので利得がフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されていることによる[*35]。

これらの条件を満たす解として次のものを提示する。

ナッシュ交渉解 U の中で，A，B それぞれにとっての交渉の結果得られる利得と交渉が決裂したときの利得の差の「積」が最大となるような値が交渉の結果得られる利得である。すなわち

$$U \text{ の中で } (x_A - d_A)(x_B - d_B) \text{ が最大となるように } x_A, x_B \text{が決まる}$$

というようにして求められる x_A, x_B がナッシュ交渉解である。$(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ はナッシュ積 (Nash product) と呼ばれる。

機械的に計算されるように感じられるが，この解は上記の条件を満たしている。まず，もしパレート効率的でなければ x_A（または x_B）を下げずに x_B（または x_A）を大きくすることができるので当然 $(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ も最大化されていない。したがってナッシュ交渉解はパレート効率的である。次に，$d_A = d_B$ ならば $(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ は対称的な式であるから U が対称的であれば，A と B を入れ替えても同じ状況を表すことになり，ナッシュ積を最大化して得られるナッシュ交渉解も対称的である。さらに U の範囲内で $(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ が最大となるように x_A，x_B を決めれば，U からその x_A，x_B 以外の部分を省いても結果に影響はないので「無関係な代替案からの独立性」が成り立

[*35] フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数ならば，効用関数 u と $au + b$ とは同じ選好を表す。

つ。最後に，x_A，x_B をそれぞれ ax_A+b，cx_B+e に変換したとき $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ は次のように変わる。

$$(ax_A+b-ad_A-b)(cx_B+e-cd_B-e)=ac(x_A-d_A)(x_B-d_B) \tag{2.32}$$

U を表す式も同じように変る。変換後に ax_A+b，cx_B+e が条件を満たす範囲を U' とする。ac は定数であるから，(2.32) を最大化する x_A，x_B は $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B と同じである。その x_A，x_B が U に含まれていれば，ax_A+b，cx_B+e は U' に含まれている。したがって $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B から得られる ax_A+b，cx_B+e は (2.32) を最大化するナッシュ交渉解となる[36]。

では上の例でナッシュ交渉解を求めてみよう。これは (2.31) の条件のもとで

$$(x_A-4)x_B$$

を最大化する問題になるが，パレート効率性によって (2.31) は等式で満たされるのでラグランジュ乗数法を用いることができる。ラグランジュ関数を

$$\mathcal{L}=(x_A-4)x_B+\lambda(2x_A+x_B-24)$$

として x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B+2\lambda=0$$

$$x_A-4+\lambda=0$$

を得る。これらの式から

$$x_B=2x_A-8$$

が得られる。これと (2.31) により

$$x_A=8,\ x_B=8$$

が求まる。

次に交渉が決裂したときの B の利得が 4 の場合を考える。そのときナッシュ積は

$$(x_A-4)(x_B-4)$$

となり，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=(x_A-4)(x_B-4)+\lambda(2x_A+x_B-24)$$

---

[36] 上記の 4 条件を満たす解はナッシュ交渉解のみであることが証明されている。

と書け，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B - 4 + 2\lambda = 0$$

$$x_A - 4 + \lambda = 0$$

を得る。これらの式から

$$x_B = 2x_A - 4$$

が得られる。これと (2.31) により

$$x_A = 7,\ x_B = 10$$

が求まる。このように交渉に当たっては決裂したときの利得を大きくすることによってより有利な交渉結果を実現することができる。それが交渉力である。

ナッシュ交渉解は企業と労働組合の間の賃金交渉の理論など，いろいろな問題に応用されている（演習問題 42 を参照)。

■ナッシュの平滑化　4.9.2 では動学ゲームを用いてナッシュ交渉解の非協力ゲームによる解釈を説明しているが，「ナッシュの平滑化」と呼ばれるナッシュ自身が示した静学的なゲームによる解釈がある。簡単な例でその理論を解説しよう。その前にディマンドゲームというのを説明する。2 人のプレイヤー A，B が 1 の大きさの物（例えばケーキ）を分け合う。2 人が同時に自分の要求するケーキの大きさを提示し，その和が 1 以内なら提示した通りの大きさをもらうことができるが 1 を超えるとどちらもまったくもらえない。このゲームには以下のようなナッシュ均衡がある。プレイヤー A，B の提示する大きさをそれぞれ x，y とする。x，y はゼロ以上 1 以下の数である。

(1). x，y が $x+y=1$ を満たす正の数であればすべてナッシュ均衡。例えば $y=\frac{2}{3}$ とするとプレイヤー A は $x=\frac{1}{3}$ を提示すれば $\frac{1}{3}$ がもらえるが，それ以上を提示してもまったくもらえないので $y=\frac{2}{3}$ を前提とすれば $x=\frac{1}{3}$ は最適反応。$y=\frac{2}{3}$ も同様に最適反応なので (プレイヤー A の戦略，プレイヤー B の戦略) $=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ はナッシュ均衡。他の組み合わせも同様。

(2). $(1,0)$，$(0,1)$ もナッシュ均衡。$y=0$ とするとプレイヤー A は $x=1$ を提示することによってケーキをすべてもらえるので最適，一方 $x=1$ を前提とするとプレイヤー B はどのような提示をしてもまったくもらえないのでどの戦略も最適であるから 0 も最適であり $(1,0)$ はナッシュ均衡。同様に $(0,1)$ もナッシュ均衡。

(3). $(1,1)$ もナッシュ均衡。$y=1$ とするとプレイヤー A はどのような提示をしてもまったくもらえないのでどの戦略も最適であるから 1 も最適。同様にプレイヤー B にとって 1 は最適であり $(1,1)$ はナッシュ均衡である。

このようにディマンドゲームにはナッシュ均衡がいくつもあり均等に分ける $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が実現するとは限らない（これもナッシュ均衡であるが）。一方この問題をナッシュ交渉解で考えると対称的なゲームであるから明らかにケーキの取り分が $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ となるのが解である。そこで上のディマンドゲームを次のように作り変える。

> $x+y>1$ となってもまったく何ももらえなくなるわけではなくある確率で（ケーキが突然大きくなって）それぞれ提示した大きさがもらえるものとする。その確率は $x+y$ が大きくなるほど小さくなる。x，y は正の数であるが 1 以下でなくてもよい。

具体的に確率は次のような式 p で表されるものとする。

$x+y \leqq 1$ なら $p(x+y)=1$，$x+y>1$ なら $p(x+y)=-a(x+y-1)^2+1$，
a は正の数，$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で解があると仮定する

p は滑らかな関数（$x+y$ が 1 を超えると連続的に p が小さくなり，$x+y=1$ のときの p の微分は 0）なので「平滑化」の名がある。$x+y \geqq 1$（$x+y<1$ の状態はどちらのプレイヤーにとっても最適ではない）としてプレイヤー A，B の期待効用は $u_1=[-a(x+y-1)^2+1]x$，$u_2=[-a(x+y-1)^2+1]y$ と表される。それぞれ x，y で微分すると

$$-2a(x+y-1)x-a(x+y-1)^2+1=0,\ -2a(x+y-1)y-a(x+y-1)^2+1=0$$

$x+y=1$ のときは両式の左辺がともに正なので最適にはならない。$x+y>1$ とするとまず $x=y$ が求まる。すなわち平滑化されたゲームにおいてはナッシュ均衡は対称的である。そこで y を x で置き換えると

$$-2a(2x-1)x-a(2x-1)^2+1=0$$

より

$$8ax^2-6ax+a-1=0$$

が得られる。二次方程式の解の公式により

$$x=\frac{3a+\sqrt{a^2+8a}}{8a}=\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{8a}}$$

となる。ここで $a\to\infty$ の極限を求めると $x\to\frac{1}{2}$ が得られる。このとき $y=\frac{1}{2}$ である。$a\to\infty$ とは，$x+y$ が 1 を超えると急速に確率が小さくなることを意味する。したがって平滑化されたゲームがもとのディマンドゲームに近づくときのナッシュ均衡の極限がナッシュ交渉解と一致する。

2.9.2　交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡

最後に非協力ゲームの部分ゲーム完全均衡の考え方による交渉の分析を紹介する。ナッシュ交渉解の説明で用いた例（交渉が決裂したしたときの B の利得が 4 の場合）をもう一度考えてみよう。次のような手順で交渉を進める。

(1). まず A（B でもよいが，その場合は以下の A と B が入れ替わる）が (2.31) の条件を等式で満たす各自の取り分 x_A，x_B を提案する。

(2). 次に B がその提案を受け入れるか拒否するかを決める。受け入れればそこで交渉は終わる。拒否した場合は B が対案を提示する。

(3). その B の提案を受けて A が受け入れるか拒否するかを決める。受け入れればそこで交渉は終わり，拒否した場合は A が再度対案を提示する。という手順でどちらかが受け入れるまで続く。

(4). 相手の提案を拒否すれば自分が対案を出すことができるが，その提案を相手が受け入れたとしても自分が受け入れる場合よりも交渉が終了するのが 1 回遅れる。その間に時間が経過するので各プレイヤーが利得を割り引くものと考え，割引因子を δ で表す。δ は 1 より小さい正の数であり，A，B 両者に共通であるとする。交渉が決裂したときの利得（A，B ともに 4）は交渉が始まる前にすでに実現しており，交渉の過程で割り引かれないものとする。したがって提案されるのはこの 4 を除く利得の部分である。たとえば，まず A が x_A-4, x_B-4 を提案し，B がそれを拒否して x'_A-4, x'_B-4 を提案して A が受け入れた場合，A の利得は $\delta(x'_A-4)$，B の利得は $\delta(x'_B-4)$ となる。最初の A の提案を受け入れた場合にはもちろんそれぞれ x_A-4 と x_B-4 であった。さらに交渉の妥結が遅れればそれだけ利得は割り引かれる。

このとき次のような戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。

交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡 (1).　A は毎回 (x^*_A-4, x^*_B-4) を提案し，B は毎回 (y^*_A-4, y^*_B-4) を提案する。これらは次の関係を満たす

$$y^*_A-4=\delta(x^*_A-4),\ x^*_B-4=\delta(y^*_B-4) \tag{2.33}$$

当然 (2.31)（等式で満たす）により

$$2x^*_A+x^*_B=24,\ 2y^*_A+y^*_B=24 \tag{2.34}$$

が成り立っていなければならない。この式は次のようにも表される。

$$2(x^*_A-4)+x^*_B-4=12,\ 2(y^*_A-4)+y^*_B-4=12$$

(2). B は A の提案が $x_B - 4 \geqq x_B^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否する。A も同様に B の提案が $y_A - 4 \geqq y_A^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否する。

(3). したがってこの交渉は最初の A の提案を B が受け入れて終わる。

(2.33) と (2.34) から各提案は次のような値になる

$$x_A^* - 4 = \frac{6}{1+\delta},\ x_B^* - 4 = \frac{12\delta}{1+\delta}$$

$$y_A^* - 4 = \frac{6\delta}{1+\delta},\ y_B^* - 4 = \frac{12}{1+\delta}$$

これが部分ゲーム完全均衡であることを確認していこう。このゲームの（全体のゲーム以外の）部分ゲームとは提案 $\rightarrow$ 拒否が繰り返された後（1 回でもよい）次の提案から始まるゲームを言う。何回目かの A の提案から始まる部分ゲームを考えてみる。A が $x_B - 4 \geqq x_B^* - 4$ を満たさない，すなわち $x_B - 4 < x_B^* - 4$ であるような $x_B - 4$ を提案（自分の取り分については $x_A - 4 > x_A^* - 4$ を満たす $x_A - 4$ を提案）すると B はこれを受け入れない。B が上記の戦略をとるならば B に拒否された後に A にとって実現可能な利得は，A が提案をした回を基準として（それが何回目の提案であろうと交渉が始まってからそこまでの時間の経過は無視して）$\delta^2(x_A^* - 4)$（B の再提案を A が拒否した場合）か $\delta(y_A^* - 4)$（B の再提案を A が受け入れた場合）であるが，(2.33) によりこれらは等しく，$x_A^* - 4$ よりも小さい。したがって A は $x_B^* - 4$ より小さい $x_B - 4$ を提案はしない。一方 $x_B^* - 4$ より大きい $x_B - 4$ を提案すれば B はそれを受け入れるがそれでは A の利得が減るので意味がない。B の提案から始まる部分ゲームについても同じように考えることができる。何回目かの B の提案から始まる部分ゲームを考える。B が $y_A - 4 < y_A^* - 4$ であるような $y_A - 4$ を提案（自分の取り分については $y_B - 4 > y_B^* - 4$ を満たす $y_B - 4$ を提案）すると A はこれを受け入れない。A が上記の戦略をとるならば A に拒否された後に B にとって実現可能な利得は，B が提案をした回を基準として $\delta^2(y_B^* - 4)$（A の再提案を B が拒否した場合）か $\delta(x_B^* - 4)$（A の再提案を B が受け入れた場合）であるが，(2.33) によりこれらは等しく，$y_B^* - 4$ よりも小さい。したがって B は $y_A^* - 4$ より小さい y_A を提案はしない。一方 $y_A^* - 4$ より大きい $y_A - 4$ を提案すれば A はそれを受け入れるがそれでは B の利得が減るので意味がない。

以上で上記の均衡戦略の内各プレイヤーの提案が各部分ゲームにおいて最適であることが示された。次に相手の提案に対する回答が最適であることを確認しなければならない。A が提案をした回に B がそれを受け入れれば B の利得は（その時点を基準として）$x_B^* - 4$ である。一方拒否したときに得られる利得は上の議論から高々 $\delta(y_B^* - 4)$ である。(2.33) よりこれらは等しい。したがって $x_B - 4 \geqq x_B^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否するという B の戦略は最適である。一方 B が提案をした回に A がそれを受け入れれば A の利得は（その時点を基準として）$y_A^* - 4$ である。一方拒否したときに得ら

れる利得は上の議論から高々 $\delta(x_A^* - 4)$ である。(2.33) よりこれらは等しい。したがって $y_A - 4 \geqq y_A^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否するという A の戦略は最適である。

以上によって上記の戦略の組が部分ゲーム完全均衡であることが示された。ところでこの均衡とナッシュ交渉解には何か関係があるだろうか？ 割引因子 δ が非常に 1 に近い（あるいは割引率 $\frac{1}{\delta} - 1$ が 0 に近い）とすると[37]，A の提案を B が受け入れて決着する均衡における各プレイヤーの利得は

$$x_A^* \longrightarrow 7,\ x_B^* \longrightarrow 10$$

となる。これらは（極限において）ナッシュ交渉解と一致する。

2.9.3　企業立地の問題：ホテリングのモデル

ごく簡単なモデルで企業立地の問題を考えてみる。東西に範囲の決まった（有限の長さを持つ）1 本の道路の両側に一定の密度で（均等に）人が住んでいるものとする。2 つのアイスクリーム屋（かき氷屋でもよい）A，B がこの道路のどこかに店を出す。道路の長さを 1，人口も全体として 1 とし，店の大きさは無視する。したがって同じ場所に店を出すことも可能である。アイスクリームの価格は一定で 1 であるとする。また費用は 0 であると仮定する。A，B それぞれが店を出す場所を西の端からの距離で表し，x_A，x_B と書く ($0 \leqq x_A \leqq 1,\ 0 \leqq x_B \leqq 1$)。人々は自分の家から近い店に行く。同じ距離ならば確率 $\frac{1}{2}$ でどちらの店にも行くものとする。$x_A < x_B$（A の方が西）とすると A，B が獲得できるお客さんの数（それが利潤に等しい）π_A，π_B はそれぞれ

$$\pi_A = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$\pi_B = 1 - x_B + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = 1 - \frac{x_A + x_B}{2}$$

となる。A が B と同じ場所に店を出したとすると利潤は等しく

$$\pi_A = \pi_B = \frac{1}{2}$$

である。また A が B を越えて東側に店を出した ($x_A = x_B + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として，ε はごく小さい数) ときの利潤は

$$\pi_A = 1 - \frac{2x_B + \varepsilon}{2}$$

であり，逆に B が A を越えて西側に店を出した ($x_B = x_A - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として) ときの利潤は

$$\pi_B = \frac{2x_A - \varepsilon}{2}$$

[37] δ が 1 になってはいけないが限りなく 1 に近づくものとする。これは 2 人のプレイヤーが将来の利得をほとんど割り引かなくなることを意味する。

である。A にとって最適な戦略を考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく B に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_B - \varepsilon$ であり，そのときの利潤は $\frac{2x_B-\varepsilon}{2} = x_B - \frac{\varepsilon}{2}$，B と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，B より東側に立地したときの利潤は $1 - \frac{2x_B+\varepsilon}{2} = 1 - x_B - \frac{\varepsilon}{2}$ であるから，A の最適反応は次のようになる。

(1). $x_B < \frac{1}{2}$ のとき B より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_B = \frac{1}{2}$ のとき B と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_B > \frac{1}{2}$ のとき B より西側に隣接して立地するのが最適

次に B について考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく A に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_A + \varepsilon$ であり，そのときの利潤は $1 - \frac{2x_A+\varepsilon}{2} = 1 - x_A - \frac{\varepsilon}{2}$，A と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，A より西側に立地したときの利潤は $\frac{2x_A-\varepsilon}{2} = x_A - \frac{\varepsilon}{2}$ であるから，B の最適反応は次のようになる。

(1). $x_A < \frac{1}{2}$ のとき A より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_A = \frac{1}{2}$ のとき A と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_A > \frac{1}{2}$ のとき A より西側に隣接して立地するのが最適

それぞれ相手が中央よりも西側にいるときにはそれに隣接して東側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。同じように相手が中央よりも東側にいるときにはそれに隣接して西側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。したがってナッシュ均衡は「ともに中央に立地する ($x_A = x_B = \frac{1}{2}$)」という戦略の組み合わせである。

この議論は政党が選択する政策の問題に応用されている。ある政策に対する政党の提案について 1 本の線分上に並べられるような対立軸，有権者の考え方の違いがあるものとしよう（昔で言う左翼，中道，右翼のように)。それを 0 から 1 までの数字で表し，その間に有権者の考え方が均等に分布している（均等でなければ適当に目盛りを変えて均等に分布するようにすればよい)。有権者の人数が n 人（わかりやすくするために n は奇数であるとする）であるとすると 0 から順番に数えて中央に位置する（$\frac{n+1}{2}$ 番目の）人は丁度真ん中の位置（$\frac{1}{2}$ の所）に位置する考え方を持つ。このときある 1 つの提案を巡って賛否を問うと，中央の人が賛成ならば過半数が賛成となって可決され（左翼的な案でも，右翼的な案でも)，中央の人が反対ならば過半数が反対となって否決される。このように 1 つの提案が可決されるか否決されるかは中央の人がその案に賛成か反対かで決まる。このことを「中位投票者定理 (median voter theorem)」と呼ぶ。

2 つの政党 A，B があって上で仮定したような対立軸がある問題についてそれぞれが提案を行う。各政党はより多くの支持者を獲得しようと考える。各投票者は自分の考えに近い方の案を選ぶ。これはゲームとしてはアイスクリーム屋の立地の問題と同じ構造をしており，相手の政党が左翼的な案を出してくればそれより少し右翼的な案を出せば勝てる

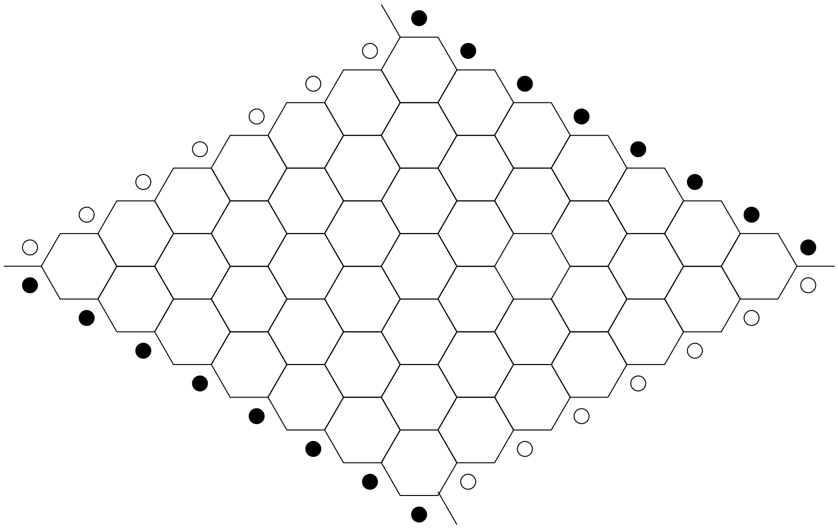


図 2.4　HEX ゲーム

し，逆に相手が右翼的な案を出してくればそれより少し左翼的な案を出せば勝てる。結局，ともに中間の案を出すことがナッシュ均衡となる。したがって二大政党体制においては両政党の政策が似通ってきてともに中間的なものになるとされる。

2.10　HEX ゲーム

図 2.4 に表されている HEX ゲームというのを考えてみよう[*38]。この図は 7×7 の HEX ゲームを表しているが形が対称であれば升目の数に制限はない。2 人のプレイヤー W 氏と B 氏がいて順番に図の六角形の升目を 1 つずつ埋めて行く。W 氏は白丸で B 氏は黒丸で埋める。すべての升目が埋まった状態で（あるいは途中でも）W 氏が（白丸が並んでいる）右下から左上へ向けて白丸の六角形を互いに接するように並べることができれば W 氏の勝ち，逆に B 氏が（黒丸が並んでいる）左下から右上へ向けて黒丸の六角形を互いに接するように並べることができれば B 氏の勝ちとなる。先に埋めた方が勝ちというのではなく，もし両者がこのように埋めることができれば両者が勝ちとなる。図で六角形の並び（これを「HEX ボード」と呼ぶ）の外に並べた白丸，黒丸はそれぞれ W 氏，B 氏の陣地を意味する。このゲームについて次の結論が得られる。

定理 2.10.1. *HEX* ゲームには必ずただ 1 人の勝者がいる。

証明の前に直観的に考えてみよう。（白丸が並んでいる）右下から左上へ向けて川が流

[*38] 「HEX」は六角形を意味する hexagon による。

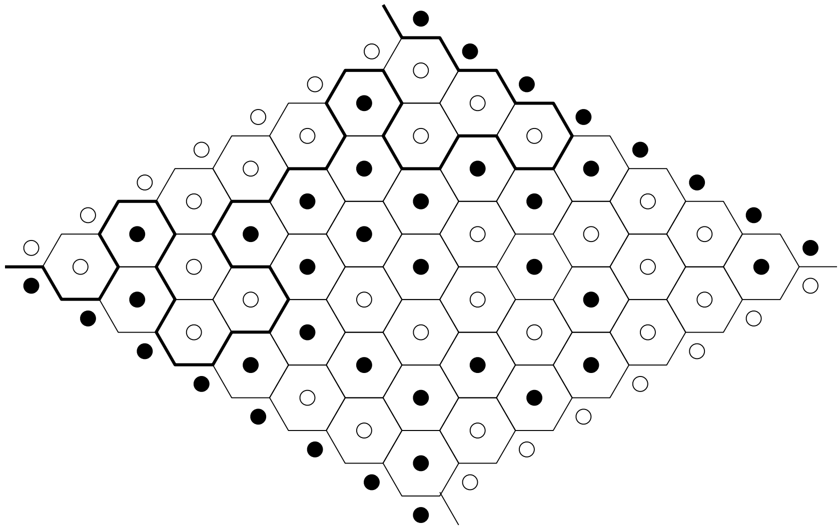


図 2.5　HEX ゲーム 2

れているとする。B 氏はこの川の流れをせき止めようとし，W 氏は流れを通そうとする。B 氏が黒丸を入れた六角形にはその六角形の形のブロックが置かれるが W 氏が白丸を入れた六角形には何も置かれない。このようにしてすべての六角形に白丸か黒丸のいずれかが入れられたとする。HEX ゲームで B 氏が勝てば川の左下から右上に向けてブロックが互いに接するように置かれ川はせき止められる。一方 W 氏が勝った場合には何も置かれない六角形が右下から左上へ向けて互いに接するように並ぶので川の流れはせき止められない。川がせき止められ，かつ流れる（両者が HEX ゲームに勝つ）ということはないし，またせき止められもしないし流れもしない（両者が負ける）ということもあり得ないので HEX ゲームには必ず 1 人の勝者がいることがわかる。図 2.5 では B 氏が勝者であり，太い線で結んだラインに沿って川がせき止められている。このように直観的には明らかであるが，これを証明するのには多少の議論が必要である。

証明. 図 2.5 の左端に出ている線分から出発して，HEX ボードの外にあるものも含めて白丸と黒丸の間の六角形の辺を通る道を考えると以下のことが言える。

(1). 上記の道は HEX ボードから突き出ている線分以外の所で行き止まりになることはない。

(2). 上記の道は一度通った六角形の頂点に戻って来ることはない。

したがって左端から出発した道は上，下，右に出た線分のいずれかに達する。図 2.5 で太い線で描いた道はそのようになっている。まずこの 2 つの結論を示す。図 2.6 に図 2.5 の左端の部分を拡大して示してある。左端の線分から出発した道は最初の六角形に（図

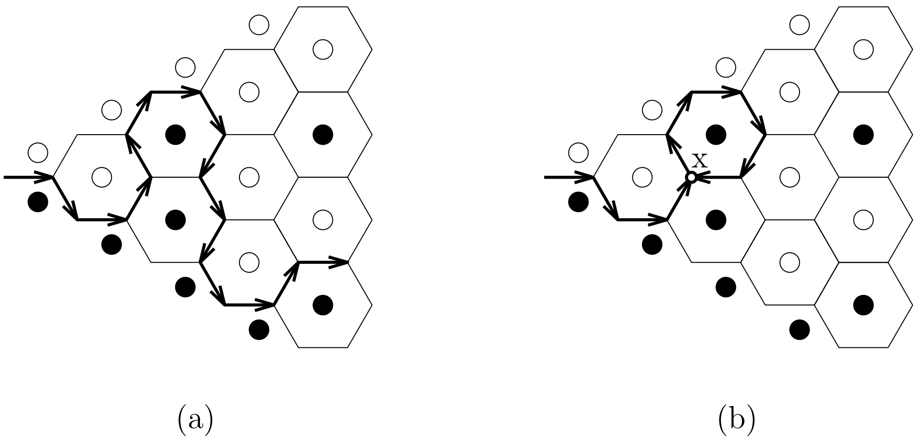


図 2.6　HEX ゲーム 3

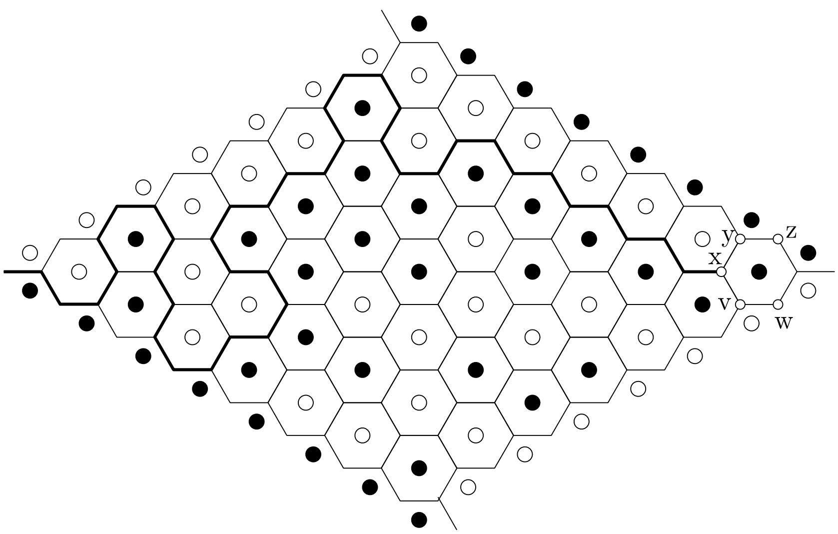


図 2.7　HEX ゲーム 4

2.5 のように）白丸が入っていれば右下に，黒丸が入っていれば右上に進む。右下に進むものとする。そのまま右下に白丸が続けばやがて下の線分から出て行く。どこかに黒丸があるとする。そのとき道は白丸と黒丸の間を右上に進む。その黒丸の真上の六角形が黒丸であればそれと隣の白丸の間を進み，真上が白丸ならば下の黒丸との間を進む。このようにして縁に至るまで進んで行ける。縁に出た場合も縁の外側の白丸または黒丸とその前に通った黒丸または白丸との間を進む。図 2.6(a) にその例が描かれている。したがって同じ所に戻って来ない限りいつかは上，下，右に突き出た線分のいずれかに到達する。図 2.6(b) の点 x のように同じ頂点に戻って来ることがあると仮定してみよう。x が二度通る最初の頂点であるとすると x を頂点として持つ 3 つの六角形がすべて白丸，あるいは黒丸ではいけない。もしそうなら x を通る道はない。図のように 2 つが黒丸で 1 つが白丸であるとする。すると道は x の左上，左下の頂点を通らなければならないので x が二度通る最初の頂点ならば右から戻って来なければならない。しかし上下ともに黒丸であるからそれはあり得ない。x の左上，左下を二度（同じ，または逆方向に）通るとすると x は二度通る「最初」の点ではない。x が縁にある場合も同様に考えることができる。

以上によって左端から出発した道は上，下，右に突き出た線分のいずれかに達することが証明された。図 2.5 のように左から出て上に抜ける場合は B 氏の勝ちになり，左から出て下に抜ける場合はその道に沿って白丸が並ぶので W 氏の勝ちになる。左から出て右に抜ける場合はどうであろうか？ 実はそのような場合はないのである。最後にそれを証明しよう。図 2.5 を見ればわかるように左端から出発した道は HEX ボードを 2 つの領域に分ける。上の領域（W 氏の左上の陣地の方）の境界（道に沿った部分）には白丸が並び，下の領域（B 氏の左下の陣地の方）の境界には黒丸が並ぶ。図 2.7 を見ていただきたい。この状況で図にあるように右端の六角形が黒丸ならば道は点 x から右上に進み，その後は右上の縁に沿って進んで上の線分から出て行く。一方右端の六角形が白丸ならば道は点 x から右下に進み，その後はクネクネ曲がりながら下の線分から出て行く。いずれにしても右の線分から出て行くことはない。道が右の線分から出るとすると右端の六角形が黒丸ならば点 v，w を通ってくるが，その場合道の上の領域の境界に黒丸が来る。逆に右端の六角形が白丸ならば点 y，z を通ってくるが，その場合道の下の領域の境界に白丸が来る。いずれにしても矛盾であり，したがって左の線分から出発した道が右の線分に達することはない。 □

この HEX ゲームに必ず勝者が存在するという定理は数学のブラウワーの不動点定理と同値である（それぞれが互いに相手を意味する）ことがわかっている[*39]。詳しくは K. Binmore, “Fun and Games”(Houghton Mifflin Company, 1992，経済学部図書室にある) pp. 323-329 を参照されたい。

もう少しこのゲームを考えてみよう。このゲームに必勝戦略（相手の戦略に関わらず自

[*39] 正確に言うと「HEX ゲームには必ず少なくとも 1 人の勝者がいる」という少し弱い定理とブラウワーの不動点定理が同値である。

分が必ず勝てる戦略[40]）があるとすれば，それは先手の戦略である[41]。その理由は以下の通り。先手が白丸，後手が黒丸で六角形を埋めて行くとする。後手に必勝戦略があり，それを先手も後手も知っていると仮定する。

(1). まず先手は適当に 1 つの六角形に白丸を入れる。次に後手が（必勝戦略に従うかどうかは別として）六角形を選び黒丸を入れる。
(2). ここで先手は自分が先に選んだ六角形には丸は入っていないと考える。そうすると先手は後手と同じ立場にいることになるから後手の必勝戦略に従って六角形を選び白丸を入れる。
(3). 以下同様である。自分が最初に選んだ六角形に丸が入っていないと見なすと，先手は常に後手と同じ立場にいることになるから後手の必勝戦略に従って六角形を選んで行くことができる。
(4). もし，ある手番において後手の必勝戦略に従って選ぶべき六角形が最初に自分が選んだ六角形であれば，そこに入っている白丸を生かし，適当にどこかの六角形を選んで白丸を入れるがそこには何も入っていないと見なす。

このようにして六角形を選んで行くと先手は後手の必勝戦略を完全に模倣することができ，さらに最初に選んだ六角形の存在は自分に有利に働くので必ず勝つことができる。よって後手が必勝戦略を持つことはなく，持つとすれば先手である。

しかし，そもそも必勝戦略は存在するのだろうか？ HEX ゲームにおいては情報の不完備性や不確実性はなく，また 2 人が同時に戦略を選ぶということもないので相手が選ぶ戦略がわからないということはない。このようなゲームは「完全情報ゲーム」と呼ばれる[42]。動学的なゲームの逆向き推論法で考えていこう。HEX ゲームには有限個の升目しかないのであらゆる手番の可能性も有限個である。7×7 ゲームであれば先手は最初に 49 個の六角形から 1 つ選ぶので 49 通りの選び方がある。次に後手はその各々に対して 48 通りの選び方がある。ここまでで六角形に白丸または黒丸を入れて行く方法は 49×48 通りある。以下同様に考えていくとすべての六角形が埋まるまでの丸の入れ方も有限個しかない（とんでもなく大きな数であろうが有限は有限である）。最後は 1 つしか升目が残っていないので選びようがないからその手前の手番を考える（升目が奇数個ならば後手，偶数個ならば先手の手番である）。そこから先が 1 つの部分ゲームになっている。この段階では 2 つ升目が残っているので勝てる方を選ぶ。どちらを選んでも勝てる場合，あるいはどちらを選んでも勝てない場合はどちらを選んでもかまわない。その上でこの部分ゲーム

[40] 相手の戦略によって必勝戦略は異なるが，相手がどのような戦略を選んでもそれに応じて必ず勝てる戦略があるということ。

[41] 図 2.5 では後手である B 氏が勝っているが，先手の必勝戦略があったとしても具体的にどのような戦略かわからなければ先手が負けることもあり得る。

[42] クールノー寡占やベルトラン寡占は完備情報ゲームではあるが完全情報ゲームではない。シュタッケルベルクの複占は完全情報ゲームである。

を先手の勝ち，後手の勝ちに対応した利得で置き換えてさらに 1 つ手前の手番を考える。この段階では 3 つの升目が残っているが，その内 1 つを選んだ後の結果は決まっているのでそれらの内勝てる選択肢を選ぶ。複数あればいずれでもよい。勝てる選択肢がなければどれでもよい。その上でこの部分ゲームを先手の勝ち，後手の勝ちに対応した利得で置き換えてさらに 1 つ手前の手番を考える，というようにゲームをさかのぼって考えていくと最初の 49 通りの選択肢それぞれに対応して先手の勝ちまたは後手の勝ちが決まる。49 通りのすべてが後手の勝ちであれば後手が必勝戦略を持ち，1 つでも先手の勝ちがあれば先手が必勝戦略を持つ。上で証明したように必勝戦略を持つとすれば先手であるから，結局次の定理が証明された。

定理 2.10.2. HEX ゲームには先手の必勝戦略が存在する。

ところで定理 2.10.1 の証明では 2 人のプレイヤーが交互に六角形を選ぶという条件は使っていない。したがって他のルールでも同じ結論が得られる。図 2.5 では W 氏と B 氏が埋める六角形の数の差は（合計が奇数であるから）1 であるが，そうでなくてもかまわない。適当に白丸，黒丸の数を変えて考えてみていただきたい。一方定理 2.10.2 については先手が後手の必勝戦略を模倣するためには交互に六角形を選ぶことが必要である。したがってここでの先手に必勝戦略があるという結論は交互に六角形を選ぶというルールに依存している。

2.11　マッチング理論

Gale と Shapley（シャープレイ）によるマッチング理論の簡単な例を紹介する。Shapley は主にこの業績（他にもシャープレイ値などたくさん業績はあるが）で 89 歳にして 2012 年度のノーベル経済学賞を受けた。

n 人ずつの男性と女性がいて男性，女性はそれぞれ異性に対して明確な順序づけができる好みを持っているとする。n は 2 以上の有限な自然数である。男性と女性がペアを作る問題を考える。このような問題をマッチングと呼ぶ。ペアの作り方すなわちマッチングには安定なものとそうでないものがある。安定マッチングとは次の条件を満たすものである。

> そのマッチングを構成するあるペアとは異なるペアを組んだときに，新しいペアの二人がともにもとのペアより好ましい相手を得る場合，もとのマッチングは安定ではない。そのような組，すなわちペアを組みかえて二人ともにより幸せになるような男女の組がないマッチングが安定マッチングである。

Gale と Shapley によるマッチングの手順（アルゴリズム）は次のようなものである。

(1). まず男性全員が自分が最も好む女性にペアを申し出る。まったく重複がなければそ

こでこのプロセスは終わる。重複があれば，各女性は申し出を受けた男性の中で（一人の場合も含めて）最も好む男性と暫定的なペアを作る（その男性をキープする)。それ以外の男性は断る。

(2). 申し出た女性に断られた男性全員がそれぞれの次に好む女性（他の男性と暫定的なペアを組んでいる女性も含めて）に申し出をする。

(3). 各女性は申し出を受けた男性と（もしいれば）キープしている男性の中で最も好む男性をキープする。キープする男性が変わるかもしれない。そのときキープからはずされた男性は断られた男性となる。

(4). キープからはずれた男性も含めて断られた男性全員がそれぞれの次に好む女性（暫定的なペアを組んでいる女性も含めて）に申し出をする。

(5). 以下同様。

この手順によって有限回のプロセスで必ず安定マッチングが得られることが言える。理由は以下の通り。

(1). まず，すべての女性が誰かから申し出を受けた時点でプロセスは終了する。最後に申し出を受ける女性（最後の女性）が申し出を受けたとき，それ（それら）以外の女性はすべて互いに異なる一人ずつの男性をキープしているので最後の女性に申し出る男性は一人だけである。競合が生じないので断る女性はおらず，それ以上にプロセスは進まない。

(2). そこに至るまでに要するプロセスは有限である。最後の女性が一人だとして，それ以外の女性が全員の男性から申し出を受けるとすると，その申し出の数は $n(n-1)$ である。1 回目に n 人全員の男性が誰かに申し出をするから，その後のプロセスにおいて各回一人の男性が申し出をするとしても $n(n-1)$ の申し出が生じるのに要するプロセスは最大 $n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2=n^2-2n+1$ である。次のプロセスで最後の女性が誰かから申し出を受けるので全体のプロセスは n^2-2n+2 より多くはないから有限回のプロセスでマッチングは終わる。最後の女性が二人以上ならもっと早く終わる。

(3). その結果実現するマッチングにおいては，ある男性 A にとって，ペアになっている女性より好む女性 a がいれば先にその女性に申し出をして断られているはずである。一方女性 a は A よりも好ましい男性とペアを作っている。したがってペアを組みかえて二人ともにより幸せになるような男女の組はないのでマッチングは安定なマッチングになっている。

例を考えてみよう。4 人の男性 A, B, C, D と，4 人の女性 a, b, c, d がいて選好が次のようになっているとする。

$$A: abcd,\ B: adcb,\ C: bcad,\ D: bcad$$

$$a : CDBA,\ b : DCAB,\ c : DABC,\ d : CABD$$

たとえば $A : abcd$ は A が abcd の順で女性を好むことを意味する。上記のプロセスを考えてみよう。

(1). 1 回目の申し出に対して a は B を，b は D をキープし，A と C が断られる。
(2). 次に A は b に，C は c に申し出をし，A は断られて C は受け入れられる。
(3). 次に A が c に申し出をして受け入れられ，C ははじかれる。
(4). 次に C が a に申し出をして受け入れられ，B ははじかれる。
(5). 次に B が d に申し出をして受け入れられそこでプロセスは終わる。

この結果

$$A-c,\ B-d,\ C-a,\ D-b$$

というマッチングができる。これは安定的なマッチングになっているがみんなが最愛の相手とペアになっているわけではない。相思相愛は D-b だけ。

以上は男性側から申し出をする場合であるが女性側からすればどうなるであろうか？

(1). 1 回目の申し出に対して C は a を，D は b をキープし，c と d が断られる。
(2). 次に c は A に，d も A に申し出をし，d は断られて c は受け入れられる。
(3). 次に d が B に申し出をして受け入れられそこでプロセスは終わる。

この結果

$$A-c,\ B-d,\ C-a,\ D-b$$

という同じマッチングができる。しかし，一般に男性から申し出る場合と女性から申し出る場合が同じマッチングをもたらすとは限らない。別の例を考えてみよう。

$$A : abcd,\ B : dacb,\ C : bcad,\ D : cbad$$

$$a : CDBA,\ b : DABC,\ c : DABC,\ d : CADB$$

男性側から申し出をする場合は 1 回の申し出で決着がつき A-a, B-d, C-b, D-c というマッチングができる。一方女性から申し出る場合は

(1). 1 回目の申し出に対して C は a を，D は c をキープし，b と d が断られる。
(2). 次に b は A に，d も A に申し出をし，d は断られて b は受け入れられる。
(3). 次に d が D に申し出をして断られる。
(4). 次に d が B に申し出をして受け入れられる。

この結果

$$A-b,\ B-d,\ C-a,\ D-c$$

というマッチングができる。前者の結果においては男性の好みが完全に反映されており，後者の結果では女性の好みが可能な限り反映されている。とは言っても後者の結果では女性 d は最も嫌いな B とペアを組まなければならない。それは前者においても同じであり，残念ながら安定なマッチングにおいては常にそうなってしまう。一般的には次のことが言える。

> 男性（または女性，以下同様）が申し出をする場合に実現する安定マッチングにおいて各男性が得る結果は他のどの安定マッチングにおいて得る結果よりも悪くはない。

証明は以下の通り。

各男性にとって，何らかの安定マッチングにおいてペアを組む可能性がある女性をその男性にとって「可能な女性 (possible woman)」と呼ぶことにする。証明は帰納法で行う。上記の手順のある段階において各々の男性がどの可能な女性からも断られていないと仮定し（このプロセスの最初においては誰も断られていない），次の段階において女性 a がある男性 B をキープして男性 A を断ったとする。そのとき a は A にとって可能ではないことを示す。男性 B はそれまでに断られた，したがって可能ではない女性を除く (可能な女性からは断られていないと仮定しているので) すべての女性の中で女性 a を最も好んでいる。ここで男性 A が女性 a とペアを組み，他のすべての男性はそれぞれにとって可能な女性とペアを組むようなマッチングを考える。そのマッチングにおいては男性 B は女性 a よりも好まない女性とペアを組まされている。そのとき男性 B と女性 a がペアを組むことによって二人ともより幸せになることができるのでもとのマッチングは安定ではなく，男性 A にとって女性 a は可能ではない。以上の議論は，上記の手順においては各女性が，「いかなる安定的なマッチングにおいてもペアを組む可能性がない男性」だけを断ることを意味している。したがって各男性にとって，この手順において実現するマッチングにおいてペアを組む相手よりも好ましい相手とペアを組むような他の安定マッチングはない。

上で述べた性質を持つマッチングは男性最良マッチング (men-optimal matching) と呼ばれる。同様にして女性から申し出をする場合は女性最良マッチング (women-optimal matching) が実現する。

■1 対多のマッチング　学校が入学生を選ぶ問題を考える。n 校の学校と m 人の入学希望者（生徒）がいる。$m > n$ である。各学校には定員（学校によって異なるかもしれない）が定められている。各入学希望者は学校について，学校は入学希望者について明確な順位づけのできる選好を持っている。入学者を決めるのに上で見た男女のペアを決めるのと同様の手順を考えるが，それによって実現する結果において，ある入学希望者が決まった学校より好む別の学校に入ることがその学校にとっても幸福である，つまり決まっている生徒の誰かよりも好ましい生徒であるような場合はもとの決め方（マッチング）は安定ではない。そのような入学希望者がいないマッチングが安定マッチングである。ここの例

ではどの学校にも入れてもらえない生徒が存在するかもしれない。手順は次の通り。

(1). まず入学希望者全員が自分が最も好む学校に申し込みをする。各学校は申し込みを受けた生徒の中で定員の範囲で好む順に暫定的に入学を認める候補に入れる（その生徒をキープする）。それ以外の希望者は断る。希望者が定員以下であれば全員受け入れる。
(2). 断られた入学希望者全員がそれぞれの次に好む学校（定員を満たしている学校も含めて）に申し込む。
(3). 各学校は申し込みを受けた生徒と（もしいれば）キープしている生徒を含めて定員の範囲で好む順にキープする。キープする生徒が変わるかもしれない。そのときキープからはずされた生徒は断られた生徒となる。
(4). キープからはずれた生徒も含めて断られた生徒全員がそれぞれの次に好む学校（定員を満たしている学校も含めて）に申し込む。
(5). 以下同様。

この手順によって有限回のプロセスで必ず安定マッチングが得られる。理由は以下の通り。

(1). まず，すべての生徒がどこかの学校の候補に入るかまたはすべての学校に断られた時点でプロセスは終了する。断られた生徒ももはや申し込むべき学校がない。
(2). そこに至るまでに要するプロセスは有限である。生徒による学校への申し込みの数は nm で有限であるから有限回で終了する。
(3). その結果実現するマッチングにおいては，ある生徒 A にとって，自分が候補に入っている学校より好む学校 a があれば先にその学校に申し込みをして断られているはずである。一方学校 a は A よりも好ましい生徒を候補にしている。したがって候補を組みかえて生徒も学校もより幸せになるような組み合わせはないのでマッチングは安定なマッチングである。
(4). さらにこのマッチングは男女のペアの場合と同様の意味で生徒にとって最良なマッチングである。

    各生徒にとって，何らかの安定マッチングにおいて入学を認められる可能性がある学校をその生徒にとって「可能な学校」と呼ぶ。上記の手順のある段階において各々の生徒がどの可能な学校からも断られていないと仮定し，次の段階において学校 a が何人かの生徒をキープして生徒 A を断ったとする。そのとき a は A にとって可能な学校ではないことを示す。a にキープされた生徒はそれまでに断られた，したがって可能ではない学校を除くすべての学校の中で a を最も好んでいる。ここで生徒 A が学校 a に入学を認められ，他のすべての生徒はそれぞれにとって可能な学校に入学を認められるマッチングを考える。そのマッチングにおいて少なくとも一人の生徒（A によって候補からはずされる生徒，その一人を生徒 B とする）は

学校 a よりも好まない学校に入学することになる。そのとき生徒 B が学校 a に入学することによって学校も生徒もよりよい結果になるのでもとのマッチングは安定ではなく，生徒 A にとって学校 a は可能ではない。以上の議論は，上記の手順においては各学校が，「いかなる安定的なマッチングにおいても入学を認めない生徒」だけを断ることを意味している。したがって各生徒にとって，この手順において実現するマッチングにおいて入学を認められる学校よりも好ましい学校に入るような他の安定マッチングはない。

■例　学校は 2 校 A, B で生徒が a, b, c, d, e の 5 人，各学校の定員は 2 名とする。選好は以下の通り

$$A : dbaec,\ B : abced$$

$$a : AB,\ b : AB,\ c : AB,\ d : BA,\ e : BA$$

まず 1 回目の申し込みに対して A は a と b を受け入れ c を断る。B は d, e をともに受け入れる。次に c が B に申し込んで受け入れられ d がはずされる。次に d が A に申し込んで受け入れられ a がはずされる。次に a が B に申し込んで受け入れられ e がはずされる。次に e が A に申し込んで断られプロセスは終了する。その結果 A には b と d が，B には a と c が入学し，e はどこにも入学できない。

2.12　補足

2.12.1　動学的なゲームの応用：銀行の取り付けゲーム

二人の投資家が銀行に D の預金をし，銀行はその資金をある投資プロジェクトに投資している。その預金を満期前（プロジェクトが完成する前）に引き出すか満期まで待つかの選択ができるが，一人が満期前に引き出せばもう一人もそうしなければならない。二人が同時に満期前に引き出した場合にはそれぞれ r を受けとり，一人だけが引き出した場合にはその人が D を，もう一人が $2r-D$ を受け取ってゲームが終わる。どちらも満期前に引き出さなければゲームは満期後に進む。ともに満期後に引き出せば R を，一人だけが満期後に引き出せばその人は $2R-D$ を，もう一人が D を受け取ってゲームが終わる。どちらも引き出さなければ銀行は R ずつを返してゲームが終わる。このゲームは満期前と満期後の 2 段階のゲームになっている。それぞれは標準型ゲームである。$R > D > r > \frac{D}{2}$ と仮定する。

まず満期後を考えると $R > D$ かつ $2R-D > R$ なので二人にとって引き出すことが支配戦略（相手が引き出しても引き出さなくても引き出すことが最適）になっており，ともに引き出すという戦略の組がナッシュ均衡である。利得表は以下の通り。満期後のゲームは全体のゲームの部分ゲームになっている。

投資家 2

投資家 1		引き出す	引き出さない
	引き出す	R, R	2R-D, D
	引き出さない	D, 2R-D	R, R

満期後のナッシュ均衡を前提にすると満期前のゲームの利得表は次のようになる。

投資家 2

投資家 1		引き出す	引き出さない
	引き出す	r, r	D, 2r-D
	引き出さない	2r-D, D	R, R

$r > 2r - D$，$R > D$ であるから，相手が引き出すとき各投資家の最適反応は「引き出す」，相手が引き出さないときの最適反応は「引き出さない」である。したがってこのゲームには「ともに満期前に引き出す」という戦略の組と「ともに満期前には引き出さず，ともに満期後に引き出す」という戦略の組の二つの純粋戦略によるナッシュ均衡がある。そのナッシュ均衡と満期後の「ともに引き出す」というナッシュ均衡の組がゲーム全体の部分ゲーム完全均衡である。

$R > D$ であるからともに満期まで待つ方がお互いにとって得策であるが，相手が満期前に引き出すのではないかという疑心暗鬼に陥ると自分も引き出すことが最適になってしまうのである。そのような均衡は銀行に対する取り付けと解釈できる。待っていた方が得だから合理的根拠を欠いた取り付けだと言えるかもしれないが，人が取り付けに走れば自分もそうした方がよいという意味では合理的である。満期前のゲームは「協調ゲーム」の例になっている。

2.12.2　コア，仁，シャープレイ値の問題の追加

3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 1,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 7,\ v(\{A, C\}) = 11$$

$$v(\{A, B, C\}) = 25$$

(1). **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x + y + z = 25,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x+y \geqq 6,\ y+z \geqq 7,\ x+z \geqq 11$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $1 \leqq x \leqq 18$，$0 \leqq y \leqq 14$，$2 \leqq z \leqq 19$ でなければならない。

(2). **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=6-(x+y)\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=7-(y+z)\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=11-(x+z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=1-x\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とすると

$$6-(x+y) \leqq m,\ 7-(y+z) \leqq m,\ 11-(x+z) \leqq m,\ 1-x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2-z \leqq m,$$

が得られる。$x+y+z=24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$1-m \leqq x \leqq 18+m,\ -m \leqq y \leqq 14+m,\ 2-m \leqq z \leqq 19+m$$

x, y, z の式がそれぞれ等式になる場合を考えると，$1-m=18+m$，$-m=14+m$，$2-m=19+m$ より各々 $m=-\frac{17}{2}$，$m=-7$，$m=-\frac{17}{2}$ を得る。この内最大のものは $m=-7$ であるから，これが最小化された最大の不満である。そうすると

$$8 \leqq x \leqq 11,\ 7 \leqq y \leqq 7,\ 9 \leqq z \leqq 12$$

となり $y=7$ が決まる。$m=-\frac{17}{2}$ とすると $\frac{17}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$ となり矛盾が生じる。

$y=7$ とすると各提携の不満は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=-1-x\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=-z\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=11-(x+z)=-7\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=1-x\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-7\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z
\end{aligned}$$

値が決まっていない不満の最大値を最小化することを考えると $1-x$ と $2-z$ を等しくすることになるので $x=\frac{17}{2}$，$z=\frac{19}{2}$ が求まる。したがって仁となる配分は $(x,y,z)=(\frac{17}{2},7,\frac{19}{2})$ である。

(3). **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
{A,B,C}	25-7=18	25-11=14	25-6=19
{A,B}	6	5	–
{A,C}	9	–	10
{B,C}	–	5	7
{A}	1	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	1	5	19
$A \to AC \to ABC$	1	14	10
$B \to AB \to ABC$	6	0	19
$B \to BC \to ABC$	18	0	7
$C \to AC \to ABC$	9	14	2
$C \to BC \to ABC$	18	5	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{53}{6}$，$\frac{19}{3}$，$\frac{59}{6}$ であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (\frac{53}{6}, \frac{19}{3}, \frac{59}{6})$ である。

第 3 章

不完全競争

3.1 独占企業の行動

ここまでは完全競争市場における企業の行動を考えてきたが，この節では独占企業の行動について検討する。**独占** (**monopoly**) とはある財の市場においてその財を供給する企業が一つしかない状況を指し，そのただ一つの企業を**独占企業**と呼ぶ。産業が独占的になる理由としては，先に述べた政府による規制や特殊な生産技術あるいは特許などの参入障壁によって新しい企業の参入が妨げられている場合とともに，規模の経済性によって産業が独占的になることも考えられる。規模の経済性とは生産規模の拡大に伴って限界費用や平均費用が低下していくという現象であるが，産出量が小さいうちは費用が高く，かなりの生産規模に至るまで規模の経済性が働いて費用が下がっていくような場合には，2 社以上の企業が市場を分け合うと需要が十分でないために両方の企業の利潤がマイナスになるということも起こりうる。そのような状況ではただ 1 社だけが正の利潤を稼いで活動することができる。このように特に規制がなくても独占になってしまうような産業は自然独占と呼ばれる。電力など大規模な設備を必要とする産業に見られると考えられる現象である。

競争的な企業の場合は，市場全体に占めるその企業の供給量の割合が小さく価格に影響を与えるような行動ができないと仮定されていた。しかし，独占企業の場合にはその企業自身の供給量がすなわち市場の供給となるため，その行動が財の価格に影響を与えることは避けられず，また企業自身がその影響を考慮に入れて行動せざるをえない。したがって独占企業は競争的な企業とは異なった行動原理に従うものと考えられる。

3.1.1 限界収入

独占企業の供給量は市場全体の供給に等しいから需要曲線がわかれば独占企業は供給量を決めることによって価格を決めることができる。独占企業が供給量を増やしそれを消費者に買ってもらえるようにするには価格を引き下げなければならない。その際すべての消

費者に同じ価格で販売しなければならないので，追加的に供給する財の価格を下げるだけではなく供給量全体の価格を下げる必要がある。

供給量 1 単位の増加による収入の増加を**限界収入 (marginal revenue)** と呼ぶ。上で述べたことから限界収入は

$$\begin{aligned}\text{限界収入} =&\text{供給量の増加による収入の増加}\\ &-\text{価格の低下による収入の減少}\end{aligned}$$

と表されることがわかる。需要の価格弾力性が小さい財の場合，価格の変化に対する需要の反応が小さいので，供給の増加に見合った需要の増加を生み出すのに必要な価格の引き下げ幅が大きくなり限界収入は小さくなる。場合によっては限界収入がマイナスになることもありうる。

表 3.1 には独占企業について財の需要曲線が

$$p = 320 - 10x, \qquad p \text{ は価格, } x \text{ は供給量} \tag{3.1}$$

で表される場合の収入，限界収入，利潤の例が示されている[*1]。産出量 10 に対する限界収入は産出量 10 のときの収入 2200 から産出量 9 のときの収入 2070 を引いて 130 となる。産出量 10 に対する価格（すなわち消費者に 10 単位買ってもらえる価格）は 220 であるが，それまでの 9 単位の価格が 230 から 220 に下がるので収入が 90 減少するため限界収入は 130 になるわけである。競争的な企業の場合は供給量の増加に伴う価格の低下を考慮する必要がない（あるいは意味がない）ので限界収入は価格に等しい。

3.1.2　独占企業の利潤最大化

利潤は収入から費用を引いたものであるから 1 単位産出量を増加させたときの独占企業の利潤の変化は次のように表される。

$$\begin{aligned}\text{利潤の変化} =&\text{産出量の増加による収入の増加}\\ &-\text{産出量の増加による費用の増加}\\ =&\text{限界収入} - \text{限界費用}\end{aligned}$$

したがって限界収入が限界費用より大きい間は産出量の増加によって利潤が増えるが，限界費用が限界収入より大きくなると産出量の増加によって利潤は減る。その境目のところで利潤が最も大きくなる。

表 3.1 では産出量 10 のとき利潤が最大の 750 となる。この産出量 10 に対する限界収入は 130 でそのときの限界費用 120 を上回っているが，1 単位多い産出量 11 については限界収入 110，限界費用 150 で限界費用の方が 40 大きくなり利潤も 40 減少する。一般的には次のことが言える。

[*1] この式は価格を需要の関数として表しているので逆需要関数と呼ばれることもある。

産出量	価格	収入	総 費 用	限界収入	限界費用	利潤
0	320	0	500	–	–	–500
1	310	310	650	310	150	–340
2	300	600	770	290	120	–170
3	290	870	870	270	100	0
4	280	1120	950	250	80	130
5	270	1350	1020	230	70	330
6	260	1560	1080	210	60	480
7	250	1750	1150	190	70	600
8	240	1920	1230	170	80	690
9	230	2070	1330	150	100	740
10	220	2200	1450	130	120	750
11	210	2310	1600	110	150	710
12	200	2400	1780	90	180	620
13	190	2470	1990	70	210	480
14	180	2520	2230	50	240	290
15	170	2550	2500	30	270	50

表 3.1　独占企業の利潤最大化

独占企業の利潤最大化条件　独占企業にとって利潤が最大となる産出量はその産出量のときの限界費用が限界収入より低いかまたは等しく，1 単位産出量を増やすと限界費用が限界収入を上回るようになる水準である。

これは競争的な企業の利潤最大化条件において価格のところが限界収入に置き換わった形になっている。上で述べたように競争的な企業の場合には価格と限界収入とが等しくなっているわけである。

産出量が分割可能な場合には限界費用が限界収入にいくらでも近くなるように産出量を選ぶことができるので独占企業の利潤最大化の条件は以下のようになる[*2]。

独占企業の利潤最大化条件（産出量が分割可能な場合）　産出量が分割可能な場合には独占企業は限界費用と限界収入が等しくなるように産出量を選ぶことによって利潤を最大化する。

[*2] 産出量がいくらでも分割できる場合には限界収入は 1 単位供給を増やしたときの収入の増加ではなく，ごくわずかに供給を増やしたときの収入の増加と供給の増加との比（供給増加 1 単位当りの収入の増加）である。

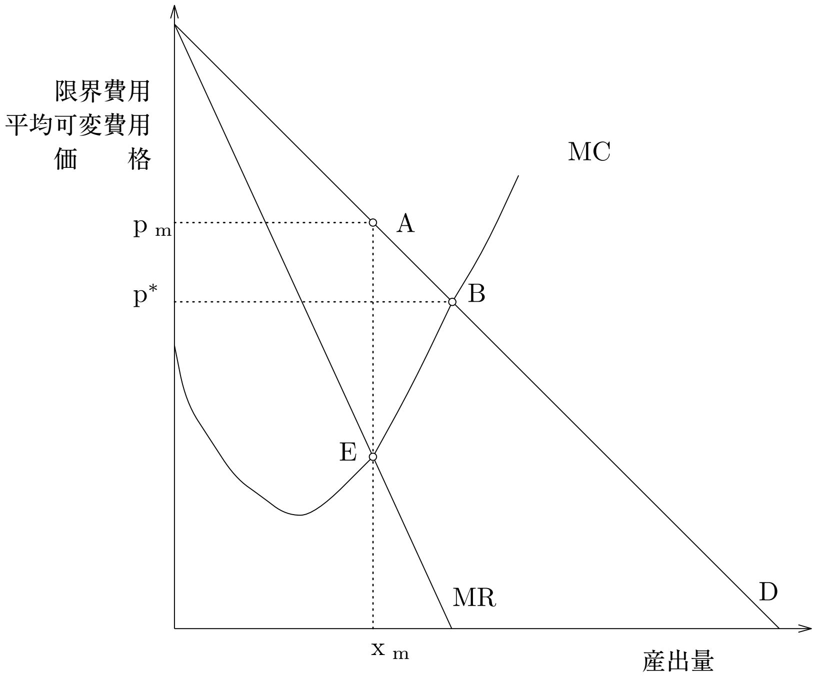


図 3.1　独占企業の利潤最大化 - 産出量が分割可能な場合

これは図 3.1 のように表される。図の MR は限界収入を表す曲線（限界収入曲線）である。点 E が独占企業の利潤を最大化する点を表し，そのときの産出量は x_m で示されている。表 3.1 からわかるように各産出量に対して限界収入はそのときの価格より低いので MR は需要曲線より下に位置している。点 E で限界収入曲線と限界費用曲線が交わっている。点 A はこの産出量に対応する需要曲線上の点でありそのときの価格 p_m が独占企業がつける価格（『独占価格』と呼ぶ）である。

3.2　製品差別化と独占的競争

この節では完全競争と比べてより現実的なモデルと見なされる，製品差別化された財を生産する独占的競争のモデルについて考える。

3.2.1　製品差別化

これまでは一つの産業に属する企業はすべてまったく同じ製品，すなわち同質的な製品を生産すると仮定してきた。同質的であるとは消費者から見てまったく区別できない，また区別する意味がないということである。しかしさまざまな企業が生産する財が同じ種類

の財であっても消費者から見てまったく同じではないというものが多いのではないかと考えられる。マヨネーズについて考えると Q 社のマヨネーズと A 社のマヨネーズとでは味が少し違っていて，Q 社のものを好む人もいれば A 社の製品の方がよいと思う人もいるであろうし，ビールについても K 社の L ビールを好む人もいれば A 社の SD ビールが好きな人もいるであろう。このように同種の製品ではあるが消費者から見て少し違っている，具体的には味（食品，飲料品の場合），色調やデザイン（洋服や家具など），機能（性能の差ではなく含まれている，あるいは重点がおかれている機能の違い，テレビ，電子レンジ，電話機等）などの面で異なった製品を生産することを**製品差別化 (product differentiation)** と呼ぶ。自動車について考えてみても同じ排気量の車であってもデザインの違いなどによってさまざまな消費者の好みに合わせようとしているから，やはり差別化された製品である。ほとんどの消費財が製品差別化されていると言えるかもしれない。

一般に製品差別化というのは，高級品と普及品のように品質に差のある製品が生産されていることではなく消費者の好みの違いに応じてタイプの異なる製品が生産されていることを指すが，消費者の所得の違いに対応して品質とそれに応じて価格が異なる製品が生産されている場合も**垂直的製品差別化**と呼んでこれに含めることもある。その場合消費者の好みに合わせた製品差別化は**水平的製品差別化**と呼ばれる。

3.2.2　独占的競争

企業の数は完全競争と同様に多数であり，また参入・退出も自由であるが，各企業が差別化された財を生産しているような産業の状態を**独占的競争 (monopolistic competition)** と呼ぶ。完全競争ではすべての企業が同質的な財を生産していたために，ある企業が他の企業より少しでも高い価格をつけると需要をすべて失うことになり市場で決まる価格に従わざるをえないが，差別化された製品を生産している場合には，それぞれの製品についてそれを好む消費者がいるので他の企業より少し高い価格をつけたからといってすべての顧客を失うわけではない。消費者によって特定の製品に対する好みの強さにも差があり，少しの価格差で他の企業の製品に乗換える人もいれば，かなりの価格差があっても購入する製品を変えない人もいるであろう。したがって，各企業が生産する財に対する需要は価格の上昇（低下）によって徐々に減少（増加）する。すなわち，独占的競争産業における企業は独占企業と同様に右下がりの需要曲線のもとで生産を行うことになる。しかし，参入・退出が自由なので企業は正の超過利潤を稼ぐことはできない。

独占的競争産業の均衡は図 3.2 のように描かれる。企業は限界収入と限界費用が等しくなる点 A に対応した産出量 x^* を選んでいるが，その産出量において企業の需要曲線と平均費用曲線とが点 E で接しているため価格と平均費用が等しくなっていて企業の超過利潤はゼロである。x^* 以外の産出量では平均費用の方が価格（価格は需要曲線によって表されている）より大きいので利潤はマイナスになっており x^* においてのみ利潤はゼロで

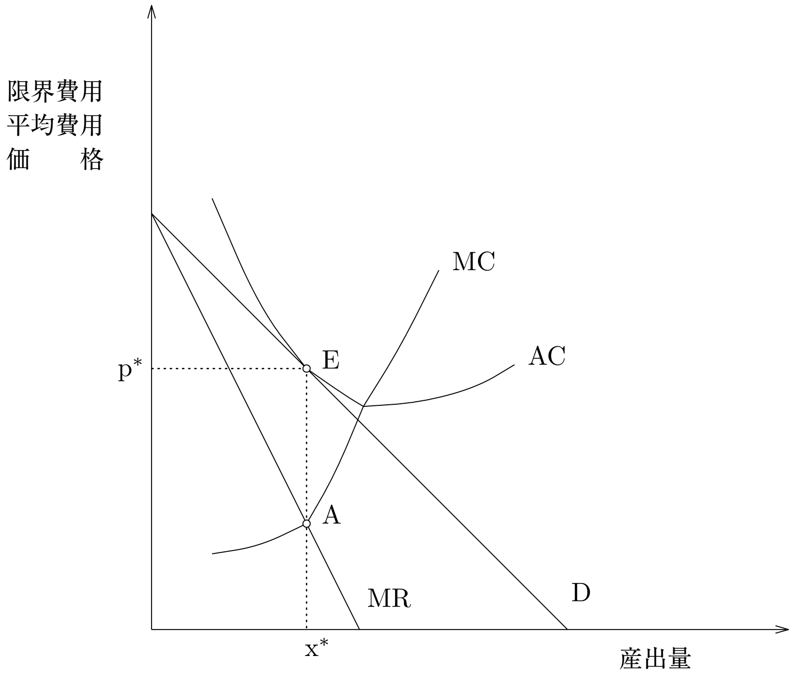


図 3.2　独占的競争

ある。均衡において平均費用曲線と需要曲線とが接するということは，その点において平均費用曲線が右下がり（産出量の増加に伴って平均費用が下がる）になっていなければならない。すなわち独占的競争の均衡にはある程度の規模の経済性が必要である。規模の経済性の度合いに応じて参入できる企業の数も変わる。規模の経済性の度合いが小さければ一つ一つの企業の産出量は小さくなり多くの企業が参入可能となるが，規模の経済性の度合いが大きければあまり多くの企業が参入できなくなる。

3.3　クールノーの寡占モデル

3.3.1　クールノーモデル - 同質財の場合

独占的競争では完全競争と同様に多くの企業が差別化された財を生産している産業を考えた。独占ではないが企業数が少ない産業は**寡占 (oligopoly)** と呼ばれる。寡占には同質的な財を生産している場合と，差別化された財を生産している場合がある。ここでは二つの企業が同質的な財を生産する最も簡単なケースを考えよう。企業数が二つの寡占は特に複占 (duopoly) と呼ばれることがある。具体的に企業 A と企業 B が，ある同じ財を生

産しているとする。その財の需要は以下のような需要関数で表されると仮定する。

$$p = 20 - X \tag{3.2}$$

p はこの財の価格，X は需要である。企業 A と企業 B の産出量をそれぞれ x と y で表すと市場均衡においては $X = x + y$ となっていなければならない。各企業が産出量を決めるとそれに応じて価格が決まる。企業 A，B の費用関数は同一であり，$c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ で表されるものとする。したがって各企業について限界費用も平均費用（および平均可変費用も）も一定で 2 に等しく，固定費用はない。企業 A の利潤は

$$\pi_A = px - 2x = (20 - x - y)x - 2x \tag{3.3}$$

同様に企業 B の利潤は

$$\pi_B = py - 2y = (20 - x - y)y - 2y \tag{3.4}$$

と表される。ここで，企業 A，企業 B は以下に述べる**クールノーの仮定**に従った行動をとるものとする。

クールノーの仮定　企業 A(または B) は，企業 B(または A) の産出量を与えられたものとして，あるいは企業 B(または A) の産出量は変化しないものと考えて，自分の利潤が最も大きくなるように産出量 x(または y) を決める。

すると (3.3) の企業 A の利潤は，y を一定として

$$\begin{aligned}\pi_A &= (20 - x - y)x - 2x = -x^2 + (18 - y)x \\ &= -[x - (9 - \frac{1}{2}y)]^2 + (9 - \frac{1}{2}y)^2\end{aligned}$$

と変形でき，二次関数の最大値を求める手法によって企業 A の利潤を最大化する x は次の式を満たすことがわかる。

$$x = 9 - \frac{1}{2}y \tag{3.5}$$

この式は，企業 B が選んだ（あるいは選ぶであろう）産出量 y に対応して企業 A は (3.5) より求められる産出量を選ぶということを意味する。同様の計算で企業 B について

$$y = 9 - \frac{1}{2}x \tag{3.6}$$

が得られる。(3.5) は企業 A の，(3.6) は企業 B の**反応関数 (reaction function)** と呼ばれる。均衡においては両企業の産出量が利潤最大化の条件を満たしていなければならないから，(3.5)，(3.6) の両方の式が成り立っていなければならない。したがってこれらを連立一次方程式として解くと各企業の産出量が次のように求まる。

$$x = y = 6 \tag{3.7}$$

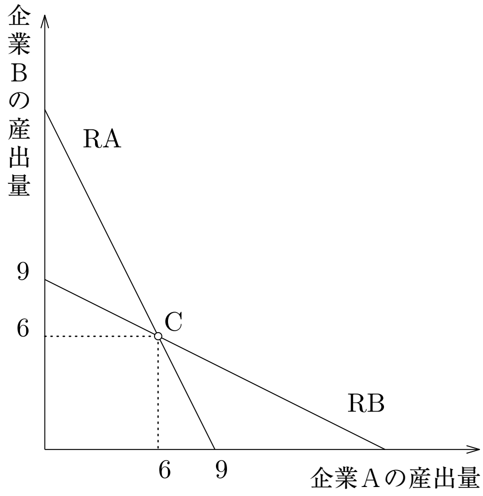


図 3.3　クールノーの寡占モデル

このようにして求められた寡占の均衡は**クールノー均衡**と呼ばれる。クールノー均衡の考え方はゲーム理論のナッシュ均衡と基本的に同じなので，ナッシュ・クールノー（あるいはクールノー・ナッシュ）均衡とも呼ばれる。(3.2) より財の均衡価格は $p = 20 - 12 = 8$ となり，企業 A，B の利潤は 36 と求まる。この例では両企業の費用関数が同一なので均衡において選ばれる産出量も等しいが，費用関数が企業によって異なっている場合はそうはならない。

寡占のモデルは図で表すこともできる。図 3.3 の RA，RB はそれぞれ企業 A，B の反応関数 (3.5) と (3.6) を図示したものであり，**反応曲線 (reaction curve)** と呼ばれる。図では直線になっているが，これは需要関数も費用関数も一次式であるためで一般的には直線になるとは限らない。均衡においては両企業が反応関数（曲線）にもとづいて産出量を選んでいるので，RA と RB の交点 C がクールノー均衡を表す。

3.3.2　クールノーモデル - 企業数が 3 以上の場合

企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルも複占と同じように考えることができる。ごく一般的に表してみよう。企業数を n（正の整数），各企業を i で表しその産出量を x_i，合計の産出量を X，価格を p とする。また需要関数（逆需要関数）を

$$p = p(X)$$

企業 i の費用関数を

$$c(x_i)$$

とし，費用関数はすべての企業に共通であるとする。固定費用は $c(0)$ と表すことができる。企業 i の利潤は

$$\pi_i = p(X)x_i - c(x_i)$$

であるから，利潤最大化の条件は

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = p + x_i p'(X) - c'(x_i) = 0$$

となる。$c'(x_i)$ は限界費用であり，$p'(X)$ は需要曲線の傾きを表す。各企業は自分以外の企業の産出量を与えられたものとして利潤を最大化するので x_i の変化は X の変化に等しく，単純に $p(X)$ を微分すればよい。具体的に $p = 10 - X$，$c(x_i) = x_i^2 + 2$ とし，すべての企業について費用関数が同一なので均衡における産出量も等しいことを考慮すれば利潤最大化条件は

$$10 - (n+1)x_i - 2x_i = 0$$

となり，

$$x_i = \frac{10}{n+3}$$

が得られる。このとき価格は $p = \frac{30}{n+3}$ に等しく，各企業の利潤は

$$\pi_i = \frac{200}{(n+3)^2} - 2$$

に等しい。企業の参入が自由であるとすれば利潤が負でない限り新しい企業が参入するので

$$\frac{200}{(n+3)^2} - 2 \geqq 0$$

から，$n = 7$ となるまで企業が参入することがわかる。

3.3.3 クールノーモデル - 差別化された財を生産する場合

2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とする。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A = 12 - x_A - kx_B$$

$$p_B = 12 - x_B - kx_A$$

とする。k は $-1 < k < 1$ を満たす定数であり，k が 1 に近づいたときの極限が同質財の場合に対応する。k が正の場合は両企業の財が代替的であることを，負の場合は補完的であることを意味する。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A = (12 - x_A - kx_B)x_A$$

となり，利潤を最大化する産出量は

$$x_A = 6 - \frac{k}{2} x_B$$

を満たす。同様に

$$x_B = 6 - \frac{k}{2} x_A$$

を得る。これらが反応関数である。k の符号によって傾きが異なる。これらから均衡産出量

$$x_A = x_B = \frac{12}{2+k}$$

が求まる。また，そのときの価格は

$$p_A = p_B = \frac{12}{2+k}$$

となる。

3.3.4 独占的競争の簡単なモデル

モデルの構造は企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルと似ている。n 社の企業が互いに差別化された財を生産し，各企業の需要関数は次のようであるとする。

$$p_i = a - b \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j - x_i$$

p_i は価格，x_i は産出量である。$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j$ は i 以外の企業の産出量の和に等しい。$a > 0$，$b (0 < b < 1)$ は定数。n は定数ではなく企業の利潤がゼロになるという条件によって決まる。各企業の費用関数を次のように仮定する（c，f は正の数)。

$$c_i = cx_i + f$$

c は一定の限界費用，f は固定費用である。そうすると各企業の利潤は次のように表される。

$$\pi_i = (a - b \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j - x_i) x_i - cx_i - f$$

すべての企業の産出量が等しいとすると利潤最大化の条件

$$a - [(n-1)b + 2] x_i - c = 0$$

によって

$$x_i = \frac{a-c}{(n-1)b+2}$$

を得る。そのとき企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{a-c}{(n-1)b+2}\right]^2 - f = x_i^2 - f$$

を満たす。これがゼロに等しいとすると

$$x_i = \sqrt{f}$$

が得られる。一方各企業の平均費用 AC_i は次のように表される。

$$AC_i = c + \frac{f}{x_i}$$

x_i を横軸にとって描いた平均費用曲線の傾きは

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -\frac{f}{x_i^2}$$

に等しい。ここに $x_i = \sqrt{f}$ を代入すると

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -1$$

が得られるが，これは（他の企業の産出量を一定と仮定した）各企業の需要曲線の傾きに等しい。すなわち各企業が最大化した利潤がゼロとなるまで企業が参入した均衡においては需要曲線と平均費用曲線は接しているから（利潤がゼロであることよりこれらは交わり，さらに傾きが等しい)，このモデルは図 3.2 に描かれている独占的競争の均衡を表現していると考えられる。

3.4　シュタッケルベルク均衡

クールノーの複占モデルでは両企業ともに相手の産出量が一定であると見なすと仮定していた。もし一方の企業が相手の反応を読んでいた場合にはどうなるであろうか。企業 A が企業 B の反応を計算に入れて自らの産出量を決めるものとする。企業 A，企業 B の産出量を x，y，価格を p（同質財を考える)，費用関数を $c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ として，需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表されるとすると，企業 B の反応関数は上で求めたように

$$y = 9 - \frac{1}{2}x$$

となる（企業 B は企業 A の産出量を与えられたものとして行動する)。企業 A はこれを計算に入れるのでその利潤は

$$\pi_A = [20 - x - (9 - \frac{1}{2}x)]x - 2x = 9x - \frac{1}{2}x^2$$

となるから，利潤を最大化する産出量は $x = 9$ となり，企業 B の産出量は 4.5 である。このとき企業 A，B の利潤はそれぞれ 40.5，20.25 となる。

このようなモデルはシュタッケルベルクのモデルと呼ばれ，その均衡をシュタッケルベルク均衡と言う。また企業 A をリーダー (leader)，企業 B をフォローワー (follower) と呼ぶ。シュタッケルベルク均衡はゲーム理論における部分ゲーム完全均衡の一種である。

3.5　ベルトランモデル

3.5.1　ベルトラン均衡 - 同質財を生産する場合

クールノーのモデルでは各企業が産出量を決めると考えたが，価格を決める場合はどうなるだろうか[*3]。同質財を生産する複占で企業 A，B の限界費用（平均費用も）は 2 であり（固定費用はない)，需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表される場合を考える。まず企業 A，B がともに価格を 8 にしていたとすると（産出量は等しいものと仮定する）両企業の利潤は 36 である。ここで企業 A が価格を 7 に下げると，同質財であるからすべての消費者が企業 A の財を買うことになり企業 A の販売量は 13，利潤は 65 に増える。したがってクールノーモデルの均衡は企業が価格を選ぶベルトランモデルでは均衡とならない。もちろんこのとき企業 B の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 B が価格を 6 に下げるとすべての消費者が企業 B の財を買うことになり企業の販売量は 14，利潤は 56 になる。そのとき企業 A の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 A が価格を 4 に下げると販売量は 16，利潤は 32 になる，$\cdots$ と考えていくと価格が 2 より高い限り各企業は相手よりもわずかに低い価格をつけてすべての消費者を奪いそれまでよりも大きな利潤を得ることができる。ともに価格が 2 になると両企業の利潤は 0 になる。それ以上に価格を下げると売れば売るだけ損をすることになるし，自分だけが価格を上げると誰も買ってくれない。したがってともに価格 2 をつけ利潤が 0 になる状態が均衡となる。この均衡はベルトラン均衡と呼ばれる。このような競争行動を考えれば企業数がわずかに 2 であっても完全競争と同様の均衡が実現するのである。このベルトラン均衡もクールノー均衡と同様にゲーム理論のナッシュ均衡の一種である。

3.5.2　ベルトラン均衡 - 差別化された財を生産する場合

上記のクールノーモデルと同様に 2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量および需要を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とす

[*3] 企業が決める変数を「戦略変数」と呼ぶ。クールノーのモデルでは産出量が戦略変数であり，ここで考えるベルトランのモデルでは価格が戦略変数である。

る。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A = 12 - x_A - kx_B$$

$$p_B = 12 - x_B - kx_A$$

と仮定する。$-1 < k < 1$ である。この両式から

$$x_A = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_A + kp_B]$$

$$x_B = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_B + kp_A]$$

が得られる。これらが需要関数である。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_A + kp_B]p_A$$

となる。各企業は相手の価格を与えられたものとして自らの利潤が最大となるようにその価格を決めるから，利潤を最大化する価格は

$$p_A = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_B$$

を満たす。同様に

$$p_B = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_A$$

を得る。これらが反応関数である。したがって均衡価格

$$p_A = p_B = \frac{12(1-k)}{2-k}$$

が求まる。$0 < k < 1$ または $-1 < k < 0$ のとき，この価格は差別化された財を生産するクールノー均衡における価格よりは低いが[*4]，同質財のベルトラン均衡（費用がゼロなので価格もゼロになる）の価格よりは高い[*5]。企業間で費用が異なれば通常は均衡価格も異なる（演習問題 5 参照)。

k に数字を入れてクールノーモデルを含めて計算の練習をしてみていただきたい。たとえば

$$p_A = 24 - 2x_A - x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B - x_A$$

[*4]

$$\frac{12}{2+k} - \frac{12(1-k)}{2-k} = \frac{12k^2}{(2+k)(2-k)} > 0$$

[*5] $k = 1$ に近づいた極限が同質財の場合である。

あるいは

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

などで。

3.6 公共財

3.6.1 公共財とは

これまで考えてきた財はすべて私的な財 (private good) であった。それに対して公共財 (public good) と呼ばれるものがある。警察官は犯罪防止のためにパトロールして犯罪が起きたときには犯人の逮捕に努力する。このような警察のサービスの利益はそのサービスに対して対価を支払ったかどうかに関わらず全ての人々に及ぶ（逮捕される人にとっては利益ではないが)。対価を支払わなくても警察サービスを消費することから何人も排除されない。このような性質を「消費の非排除性」と言う。それに対して食物や衣服や住宅サービスなど私的な財（サービスを含む）は対価を支払わなければ消費することはできない（政府によって無料で支給される場合を除く）[*6]。これらの財やサービスについては対価を支払わない人は消費から排除される。

警察サービスのもう 1 つの特徴は，ある人が警察サービスを消費したからといって他の人が消費できる警察サービスの量が減少することはないという点である。つまり複数の人々が同時に警察サービスを消費できる。ここで「警察サービスを消費する」とは，泥棒に入られたので警察官に家まで来て調べてもらうといったことだけではなく，日常的な警察の活動によって人命と財産が守られていることを言う。それに対して食物や衣服や住宅サービスはある人がそれらを消費すれば他の人は同時に消費することはできない。ある人がある財を消費すると他の人はまったく消費できないか，消費できる量が減少するとき「消費は競合する」と言う。消費が競合しない財の性質は「消費の非競合性」と呼ばれる。

消費の非排除性と非競合性を備えた財を「公共財」と言う。警察サービス以外にも国防や外交なども同様である。一般の道路は誰かの消費（利用）を排除することはできないので「非排除性」は満たされるが，混んでくると人々の消費は競合するので「非競合性」は満たされないかもしれない。一方有料道路は料金を払わない人々の消費を排除できるが，混んでいなければ「非競合性」が満たされる。

警察サービスや国防などは対価を支払わない者の消費を排除することは不可能であるか，もし可能であったとしても，ある人がお金を払わないからといってその人を警察の保

[*6] 住宅サービスとは住宅を借りて住むことによって受けられる便益であり，その対価として家賃を支払う。持ち家の場合は自分が住宅サービスの供給者であるとともに需要者でもある。家賃は払わないが，国民所得には「帰属家賃」として計上される。

護の対象からはずしたり，軍隊（自衛隊）の防衛対象からはずすというのは国家が存在する目的にそぐわないし手続きも面倒である（費用がかかる）。このように消費の非排除性が存在する財については、消費者はまったく費用を負担しなくてもそれを消費できるので，その財の費用を負担しようとしなくなる。このように費用を負担しないで財・サービスを享受することを「ただ乗り (free ride)」と言う。多くの人々がただ乗りしようとして費用を負担しなければ，民間企業ではその財を供給することができない。したがってこのような財は強制的に費用を徴収できる政府の手に頼らざるをえない。しかし政府が公共財をうまく供給できるかどうかはまた別問題である。

3.6.2　公共財の最適供給

x_i を各個人の私的財（1 種類とする）の消費量，y を公共財の供給量，1 人 1 人の効用関数を $u_i(x_i, y)$ とする。世の中にこの 2 種類の財しか存在しない。各自の所得を m_i（定数とする），私的財の価格は 1，公共財の価格（費用）は p，人数を n とすると

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i) = py$$

が成り立つ。$m_i - x_i$ は各個人から徴収する税であり，この式は政府の予算制約式と見なすことができる。政府はこの予算制約のもとで人々の効用の加重平均 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x_i, y)$ を最大化する ($\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$)。加重平均が最大化されていれば各自の比重 α_i を一定として，誰かの効用を上げるためには他の誰かの効用を下げなければならないのでパレート効率的（パレート最適）な状態になっている。ラグランジュ乗数を λ とするとラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x_i, y) + \lambda(\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i) - py)$$

となる。これを x_i，y で微分すると，各 i について

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \lambda = 0$$

および

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - p\lambda = 0$$

が得られる。上の式から

$$\alpha_i = \left(1/\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\lambda$$

が得られ，それを下の式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = p \tag{3.8}$$

が求まる。この式は

> 1 人 1 人の公共財の限界効用と私的財の限界効用の比（公共財と私的財の限界代替率）の和が公共財の価格に等しくなるように公共財の供給量を決めることが最適である

ことを意味する（これはサミュエルソン (Samuelson) の条件と呼ばれる)。効用関数が同じなら，人数が多いほど一定の供給量について公共財と私的財の限界代替率の和が大きくなるので，この式を満たす公共財の供給量は一般に人数が多いときの方が大きい。

ラグランジュ乗数法を用いない場合は，予算制約式から

$$y = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i)$$

を求めて個人の効用関数に代入し，その加重平均

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x_i, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}(m_j - x_j)) \tag{3.9}$$

を最大化する ($\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$)。これで同じ結果が得られることの確認は演習問題とする。

3.6.3　リンダール均衡

1 人 1 人がどのように公共財の費用を負担するかという問題を考えてみよう。まず政府が各自の負担率 t_i（負担の額ではない）を決める。そのとき公共財の供給量を y_i とすると各個人の私的財の消費量は $x_i = m_i - pt_iy_i$ となる。p，m_i，t_i を与えられたものとして個人の効用最大化（$\max u_i(x_i, y_i)$）を考えると，（$y_i = \frac{m_i - x_i}{pt_i}$ であるから）その条件は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{pt_i}\frac{\partial u_i}{\partial y_i} \tag{3.10}$$

となる。そこで各個人はこの条件を満たすような公共財供給量 y_i を自らの希望として政府に申告する。すべての人の希望が一致すればそれが政府が選ぶ公共財の供給量となる。もし一致しなければ大きい供給量を希望した人の負担率を引き上げ，小さい供給量を希望した人の負担率を引き下げる。限界効用逓減（あるいは公共財と私的財との限界代替率逓減）を仮定すれば負担率 t_i が上がると $\frac{\partial u_i}{\partial y_i}$ を（$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ に対して）相対的に大きくしなければ (3.10) が満たされないので希望する公共財供給量 y_i を下げてくる。逆に負担が減った人は希望する公共財供給量を上げる。このようにして調整を続ければ各自の希望が近づいていき均衡において等しくなる。そのような均衡を**リンダール均衡 (Lindahl equilibrium)** と呼ぶ。均衡における公共財供給量を y とする。(3.10) より

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right) / \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = pt_i$$

が得られ，これをすべての人について足し合わせると $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ なので

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right)\Big/\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = p$$

が導かれる。この式は上記の (3.8) と同じである。したがってリンダール均衡においてはパレート効率性が成り立っている。

大きな公共財供給量を希望すれば負担が上がるのでなるべく小さな希望を申告しようというインセンティブが生じる。自分が小さな希望を出しても他の人が大きな希望を出してくれれば少ない負担でそれなりの公共財を消費できる（これが「ただ乗り」である)。しかしみんながそう考えると全体として希望が小さくなり供給される公共財の量は小さくなってしまう[*7]。したがって政府が個人の効用関数を知っているのでない限り社会的に望ましい公共財が供給されることにはならない。

3.6.4 グローブズメカニズム (Groves mechanism)

グローブズメカニズムと呼ばれる別の方法を紹介しよう。2 人の人，A，B がいて，ある公共財を作るかどうか，また費用の負担をどうするかということを考える[*8]。その公共財に対する各自の評価（貨幣で測った効用）は v_A，v_B で表される。公共財を作るのに必要な費用は c であるとする。次のような手順で費用負担を決める。

(1). 各自が評価額 $r_i (i = A, B$ 以下同じ$)$ を申告する。ただし $r_i = v_i$ であるとは限らない。

(2). $r_A + r_B \geqq c$ ならば公共財を作るが，$r_A + r_B < c$ ならば作らない。

(3). 公共財を作る場合の各自の費用負担額は c から相手の申告額を引いたものとする。すなわち A の負担額は $c - r_B$，B の負担額は $c - r_A$ である。

もちろん 2 人の真の評価の和 $v_A + v_B$ が c より大きければ（小さくなければ）公共財を作る価値がある。しかし，この方法において各自が真の評価 v_i を申告するインセンティブを持つであろうか？ B の申告を r_B として A の申告 r_A と（公共財の供給とその費用負担から得られる）A の効用との関係について以下のケースに分けて考えてみよう。

(1). $v_A + r_B - c > r_A + r_B - c \geqq 0$ のとき（$r_A < v_A$）
このときは v_A を申告してもそれより小さい r_A を申告しても公共財は生産され，いずれの場合も A の効用は $v_A + r_B - c$ である。A の申告と A の負担とには関係がないことに留意されたい。

(2). $v_A + r_B - c \geqq 0 > r_A + r_B - c$ のとき（$r_A < v_A$）

[*7] この状況は次章で扱うゲーム理論で言うところの「囚人のジレンマ」の一種である。

[*8] 以下の内容は梶井厚志・松井彰彦『ミクロ経済学 戦略的アプローチ』（日本評論社）を参考にしたものである。

このとき正直に v_A を申告すれば公共財は生産され A の効用は $v_A + r_B - c$ になるが v_A より小さい r_A を申告すれば公共財は生産されず（公共財に関する）効用は 0 である。v_A を申告した方が大きな（少なくとも小さくない）効用が得られる。

(3). $0 > v_A + r_B - c > r_A + r_B - c$ のとき（$r_A < v_A$）
v_A を申告してもそれより小さい r_A を申告しても公共財は生産されず効用は 0 である。

(4). $r_A + r_B - c > v_A + r_B - c \geqq 0$ のとき（$r_A > v_A$）
このときは v_A を申告してもそれより大きい r_A を申告しても公共財は生産され，いずれの場合も A の効用は $v_A + r_B - c$ である。

(5). $r_A + r_B - c \geqq 0 > v_A + r_B - c$ のとき（$r_A > v_A$）
このとき正直に v_A を申告すれば公共財は生産されないが v_A より大きい r_A を申告すれば公共財は生産される。しかしそのとき得られる効用はマイナスになる（$0 > v_A + r_B - c$）ので v_A を申告した方が大きな効用（この場合は 0）が得られる。

(6). $0 > r_A + r_B - c > v_A + r_B - c$ のとき（$r_A > v_A$）
v_A を申告してもそれより大きい r_A を申告しても公共財は生産されず効用は 0 である。

以上によってこの費用負担の方法であれば正直に v_A を申告することによって少なくとも他の申告をするよりも悪くなることはなく，より大きな効用を実現できる場合もあることがわかる。B についても同様に考えることができる。この方法で費用負担を決めればうまく行くように思われるがなかなかそうではない。公共財の費用は c であるが 2 人の負担額の合計はいくらになるのであろうか？ 各自が正直に申告すれば A の負担額は $c - v_B$ で B の負担額は $c - v_A$ であるからその和は $2c - (v_A + v_B)$ である。もし $v_A + v_B > c$ であれば（費用よりも価値の方が大きければ）$2c - (v_A + v_B) < c$ となって公共財を生産するのに要するお金を集めることができなくなってしまう。そこでこれを次のように修正した負担方法を考えてみよう。

（修正されたグローブズメカニズム）　公共財を生産するしないに関わらず，もし相手が費用の均等割り（2 人ならば半分）よりも大きな申告をしているならば相手の申告額と均等割り額の差額が自分の負担額に追加される。

この方法において A が得られる効用と r_A の関係を次のように整理することができる。

(1). $r_B \leqq \frac{c}{2}$ のとき
  (i) 公共財が生産される（$r_A + r_B \geqq 0$）ならば効用は $v_A + r_B - c$。
  (ii) 公共財が生産されない（$r_A + r_B < 0$）ならば効用は 0。以上 2 つのケースの効用は上の方法と同じなので同様の議論で v_A を申告しても損をすることはない。

(2). $r_B > \frac{c}{2}$ のとき

(i) 公共財が生産される（$r_A + r_B \geqq 0$）ならば効用は $v_A - \frac{c}{2}$。この場合の負担額は $c - r_B + (r_B - \frac{c}{2}) = \frac{c}{2}$ である。

(ii) 公共財が生産されない（$r_A + r_B < 0$）ならば効用は $\frac{c}{2} - r_B < 0$。このときは公共財が生産されなくてもお金を取られてしまう。

公共財が生産される場合と生産されない場合の A の効用の差を計算すると $v_A + r_B - c$ となる。$v_A + r_B - c \geqq 0$ であれば公共財が生産される方が効用が大きく（少なくとも小さくなく），また v_A を申告することによって公共財が生産されるようにできるので v_A を申告すればよい（公共財が生産されるようにできれば他の申告でもよいが v_A でもよい）。逆に $v_A + r_B - c < 0$ ならば公共財が生産されない方が効用が大きいが，このときは v_A を申告しても公共財は生産されない。

以上によってこの修正された費用負担においても v_A を申告することは少なくとも悪くないことが言える。では負担の合計はどうなるであろうか？ 公共財が生産されるならば $v_A + v_B \geqq c$ が成り立っているので（正直に申告するとして）少なくともどちらかの人が費用の半額に等しいかそれより大きい申告をしている。$v_B > \frac{c}{2}$ かつ $v_A < \frac{c}{2}$ と仮定してみよう。このとき A の負担額は $c - v_B + v_B - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$ で，B の負担額は $c - v_A$ であるからその合計は $\frac{3}{2}c - v_A$ となるが，仮定より $v_A < \frac{c}{2}$ なのでこれは c より大きい。$v_A \geqq \frac{c}{2}$ かつ $v_B \geqq \frac{c}{2}$ の場合は A の負担額も B の負担額も $\frac{c}{2}$ になり合計は丁度 c になる。以上によりこの修正された方法では公共財を生産すべきときには必要な費用を集めることができる。しかし，生産しない場合にもどちらかの人の評価が $\frac{c}{2}$ を越えているならばもう一方の人からお金を取ることになってしまう。また公共財が生産される場合も一方の申告額が費用の半分より小さい場合は余分にお金を集めることになる。

演習問題

1. (new) x を所得として 3 人の人の効用関数が次のようであるとする。

$$u_1 = 24x + x^2,\quad u_2 = 24x,\quad u_3 = 24x - x^2$$

確率的に起きる事故によって -10 の損害を被る可能性に備えて保険に加入する。事故が起きたときは $x = 0$，起きないときは $x = 10$ であり，事故が起きる確率は $\frac{1}{10}$ であるとする。保険によって損害は全額が保障される。このとき以下の問に答えよ。

   (i) 効用関数 u_1 の人が払う保険料は 1 より大きいか小さいか，あるいは 1 に等しいか？ 計算もすること。

   (ii) 効用関数 u_2 の人が払う保険料は 1 より大きいか小さいか，あるいは 1 に等しいか？ 計算もすること。

   (iii) 効用関数 u_3 の人が払う保険料は 1 より大きいか小さいか，あるいは 1 に等しいか？ 計算もすること。

   (iv) それぞれの効用関数を持つ人の危険（リスク）に対する態度を何と言うか。

2. ある事故を保障する保険を考える。事故が起きたときの損害額は 20 であり，次の 2 つのタイプの人々がいるものとする。

   (i) タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1 = 800 + 160x - 4x^2$

   (ii) タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{2}$，効用関数は同じ $u_2 = 800 + 160x - 4x^2$

   事故が起きないときの経済的利益は $x = 20$，起きたときは $x = 0$ である。保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいること，それぞれが事故を起こす確率，および効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからない（もちろん本人はわかっている）ものとする。またタイプ 1 の人々よりタイプ 2 の人々の方が人数が多く，その比は 1 : 2 であることがわかっている。

   以下の問に答えよ。

   (i) 全額保障される保険があるとしてタイプ 1，タイプ 2 の人々はそれぞれいくらまで保険料を払うか？ またタイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとしてこの保険は採算がとれるか？ 両方のタイプの人々が加入するように保険料を決めるものとする。

(ii) 2 種類の保険を作り各タイプの人々が異なる保険を購入するように仕向ける方法を具体的に考えよ。

3.

$$p = 20 - X$$

で表される需要関数のもとでのクールノーの複占モデルにおいて，企業 A の費用が $c(x) = 3x$，企業 B の費用が $c(y) = y$ で表される場合の各企業の産出量を求め，反応曲線を図示せよ。x，y は企業 A，B の産出量であり，X はその和である。

4. n 社の企業が同質財を生産するクールノーの寡占モデルを考える。n は正の整数である。各企業を i で表す。需要関数は

$$p = a - b\sum_{i=1}^{n} x_i,\ a > 0,\ b > 0$$

で表されるものとする。x_i は企業 i の産出量，p は財の価格である。また企業 i の費用関数は

$$c = dx_i + f,\ 0 < d < a,\ f > 0$$

であり，すべての企業に共通であるとする。f は生産しなくても必要となる固定費用である。

(i) 企業 i の利潤を最大化する産出量を求めよ。

(ii) 企業の利潤がゼロとなるような n の値を求め（この n は長期均衡における企業数である），f とその n の値の関係を調べよ。

(iii) 企業数が (ii) の n のときの財の価格を求めよ。f が 0 に近づくとどうなるか？

均衡においてすべての企業の産出量が等しくなることを用いてもよい。

5. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + 2kx_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + 2kx_A$$

であり，企業 A，B の費用が

$$c_A = x_A$$

$$c_B = 2x_B$$

で表される。$k = \frac{1}{2}$ の場合と $k = -\frac{1}{2}$ の場合について，クールノー均衡とベルトラン均衡における各企業の産出量，各財の価格を求めよ。

6. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

であり，企業 A，B の費用はともにゼロであるとする。このときクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡（企業 A がリーダー，B がフォローワーとする）における各企業の産出量と利潤を求めよ。

7. ある財の 2 つの地域 1，2 での需要がそれぞれ次のように表される。

$$d_1 = 600 - p_1,\ d_1\text{は地域 1 での需要},\ p_1\text{は価格}$$

$$d_2 = 400 - 2p_2,\ d_2\text{は地域 2 での需要},\ p_2\text{は価格}$$

1 つの企業が独占的に両地域に財を供給しているとき，利潤を最大化する各地域での価格，供給量を求めよ。ただしこの企業の費用関数は

$$c = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},\ x_1,\ x_2\text{は各地域での供給量}$$

である。

8. n 社からなるクールノー的な寡占を考える。p を財の価格，X を全企業の産出量の合計，需要関数を $p = 240 - 4X$，各企業の共通の費用関数を $c_i = x_i^2 + 100$（x_i は各企業の産出量）として各企業の利潤を最大にする産出量を求めよ。また n が非常に大きい値になって行くとき n 社の産出量の合計はどのような値に近づいて行くか？ さらに財の価格がどのような値に近づいて行くかについても答えるとともに，費用関数が $c_i = 4x_i$ のときにも同じ問題を解け。

9. 表のゲームにおける各プレイヤーの純粋戦略に限定した最適反応を求めよ。さらに（存在すれば）純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

		プレイヤー B	
		戦略 X	戦略 Y
プレイヤー A	戦略 X	1, 3	5, 3
	戦略 Y	4, 5	2, 2

10. ある公共財の供給を巡るゲームを考える。2 人のプレイヤー A と B がいて，公共財の需要を大きくする（大）か小さくする（小）かを政府に申告する。申告した需要に基づいて費用負担が決められる。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給されるが，一方が「大」を他方が「小」が選んだ場合は「小」を選んだプレイヤーは少ない負担である程度の公共財を得ることができる。「大」を選んだ方は供給され

る公共財に比べて負担が大きくなる。ともに小を選んだ場合は公共財は供給されない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレイヤーA		大	小
	大	a, a	1, b
	小	b, 1	3, 3

このゲームが「囚人のジレンマ」となるように a，b の値を決め，最適反応，ナッシュ均衡を分析せよ。

11. 前問と同様の公共財の供給を巡るゲームを考える。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給され，一方が「大」を選んだ場合も公共財が供給されるがその量は少ない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレイヤーA		大	小
	大	a, a	c, b
	小	b, c	3, 3

このゲームにおいてともに「大」を選ぶ戦略の組がナッシュ均衡となるように a，b，c の値を決め，164 ページのグローブズメカニズムとの関連を考えよ。

12. 表のゲームの純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	3, 4	1, 2
	戦略 Y	5, 1	2, 2

13. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 2	2, 3
	戦略 Y	2, 3	2, 1

14. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 2	3, 1
	戦略 Y	2, 1	1, 3

15. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤー A		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 1	3, 2
	戦略 Y	2, 3	1, 1

16. (new) 次の表のようなゲームにおいて
    (i) 純粋戦略による最適反応を求め，純粋戦略によるナッシュ均衡があるかないかを調べよ。
    (ii) 混合戦略によるナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

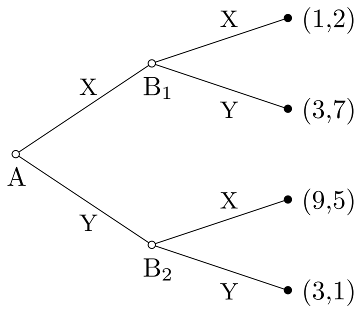
プレイヤー A		X	Y
	X	3, 0	0, 3
	Y	2, 2	4, 0

17. 表のゲームにおいて，A の方が先に戦略を選ぶことができる場合のナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡を求めよ。ゲームの樹ではなく標準型ゲーム（行列表記）を用いて求めること。

プレイヤー B

プレイヤー A		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	2, 2	5, 3
	戦略 Y	3, 5	2, 2

18. 上のゲームにおいて，B の方が先に戦略を選ぶことができる場合の部分ゲーム完全均衡をゲームの樹を描いて求めよ。
19. 次の図のゲームの部分ゲーム完全均衡における各プレイヤーの戦略を求め，その理由を説明せよ。



A はプレイヤー A が，B_1，B_2 はプレイヤー B が意思決定する時点を表している。

20. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「静学的ゲーム 2」に混合戦略による均衡が

あるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。

21. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「チキンゲーム」に混合戦略による均衡があるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。

22. 2 つの企業 1，2 からなる寡占を考える。それらの産出量を x_1，x_2 として逆需要関数が

$$p_1 = 32 - 2(x_1 + kx_2),\ 0 < k < 1$$

$$p_1 = 32 - 2(x_2 + kx_1),\ 0 < k < 1$$

で表される。企業 1 の方が先に産出量を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。またそのときの各企業の利潤を比較せよ。x_1，p_1，x_2，p_2 はそれぞれ企業 1 が生産する財の産出量，価格，企業 2 が生産する財の産出量，価格である。企業の費用は 0 とする。

23. 2 つの企業 1，2 が差別化された財を生産する寡占を考える。それらの産出量と価格を x_1，x_2，p_1，p_2 として需要関数が

$$x_1 = 48 - 2p_1 + p_2$$

$$x_2 = 48 - 2p_2 + p_1$$

であるとする。また費用は 0 とする。

(i) 2 つの企業が同時に価格を決めるベルトラン的な均衡を求めよ。

(ii) 企業 1 の方が先に価格を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。また，そのときの各企業の利潤を求めよ。

24. 2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションを考える。それぞれの評価 v_1，v_2 が 2 から 3 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

p_1，p_2 は各プレイヤーの入札額である。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないが上で示したような一様分布であることは知っている。

25. 上の問題で v_1，v_2 が 1 から 4 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

26. 80 ページの解説に沿って第 24 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ であることを示せ。

27. 80 ページの解説に沿って第 25 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1+1}{2}$，$p_2 = \frac{v_2+1}{2}$ であることを示せ。

28. 表のゲームを永遠に繰り返すときトリガー戦略

    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「戦略 X」を選んでいれば「戦略 X」を，「戦略 Y」を選んでいればそれ以降は永遠に「戦略 Y」を選ぶ。

    が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子または割り引き率が満たすべき条件を求めよ。

プレイヤー B

		戦略 X	戦略 Y
プレ			
イヤ	戦略 X	4, 4	1, 8
ー A	戦略 Y	8, 1	2, 2

29. (new) 表のゲームを永遠に繰り返すとき，両プレイヤーが上記と同様のトリガー戦略を選ぶ戦略の組が部分ゲーム完全均衡となるための条件を考える。

プレイヤー B

		戦略 X	戦略 Y
プレ			
イヤ	戦略 X	4, 4	0, 6
ー A	戦略 Y	6, 0	1, 1

割り引き因子を δ として以下の問に答えよ。

(i) 戦略 Y を選ぶことが絶対に利益にならない条件を不等式で表せ。

(ii) 上記の不等式を用いて両者がトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となる割り引き因子の値の範囲を求めよ。

30. 表のゲームにおいて次の戦略が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子が満たすべき条件を求めよ。

    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。相手が「戦略 X」を選べば次の回では自分も「戦略 X」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「戦略 Y」を選んだらその後 2 回は自分も「戦略 Y」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「戦略 X」を選ぶ。以下同様。

プレイヤー B

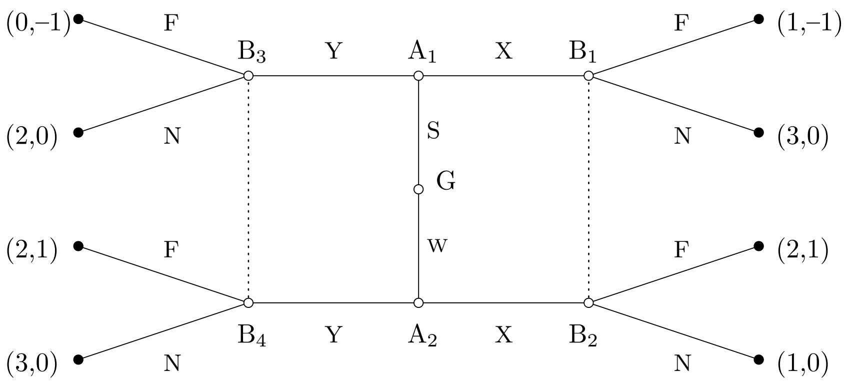
		戦略 X	戦略 Y
プレ			
イヤ	戦略 X	4, 4	0, 8
ー A	戦略 Y	8, 0	1, 1

31. 72 ページのゲーム 5 について次の問に答えよ。

(i) タイプ S の企業 A が投資 X を，タイプ W の企業 A が投資 Y を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

(ii) タイプSの企業Aが投資Yを，タイプWの企業Aが投資Xを選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

32. 図に表されているような不完備情報ゲームを考える。プレイヤーはA，B，プレイヤーAのタイプはS，W，行動の選択肢はX，Y，プレイヤーBの行動の選択肢はF，Nとし，ゲーム開始前に「プレイヤーBは，プレイヤーAが確率2/3でタイプSであり，確率1/3でタイプWであるという推測を抱いてる」とする。プレイヤーの戦略やタイプの意味は問わない。



このゲームには次の2つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1(separating **均衡**)

(i) タイプSのプレイヤーAはXを，タイプWのプレイヤーAはYを選ぶ。

(ii) プレイヤーAがXを選んだときはプレイヤーBは戦略Nを選び，Yを選んだときには戦略Fを選ぶ。

(iii) 『プレイヤーAがXを選んだときそれがタイプSである確率は1であり，プレイヤーAがYを選んだときそれがタイプSである確率はゼロである』という推測をプレイヤーBが持つ。

完全ベイジアン均衡 2(pooling **均衡**)

(i) タイプSのプレイヤーAもタイプWのプレイヤーAもYを選ぶ。

(ii) プレイヤーAがXを選んだときはプレイヤーBは戦略Fを選び，Yを選んだときには戦略Nを選ぶ。

(iii) 『プレイヤーAがXを選んだときそれがタイプSである確率は1/2より小さく（タイプWである確率は1/2より大きい），プレイヤーAがYを選んだときそれがタイプSである確率は2/3である』との推測をプレイヤーBが持つ。

以下の問に答えよ。

(i) それぞれの均衡が完全ベイジアン均衡であることを示せ。

(ii) それぞれが合理的な均衡であるかどうかを調べよ。

(iii) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

(iv) タイプ S のプレイヤー A が Y を，タイプ W のプレイヤー A が X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

33. 大学の入学試験や企業の就職試験における「指定校」の取り扱いについてシグナリングゲームの理論にもとづいて考えてみよ。

34. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

個体 2 の戦略

個体 1 の戦略		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	5, 5	0, 10
	戦略 Y	10, 0	3,3

35. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

個体 2 の戦略

個体 1 の戦略		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	2, 2	2, 1
	戦略 Y	1, 2	4, 4

36. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

個体 2 の戦略

個体 1 の戦略		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 1	3, 2
	戦略 Y	2, 3	1, 1

37. 97 ページのケース (2)（$d > c$ の場合）において戦略 J が進化的に安定な戦略になることを確認せよ。

38. 99 ページにある「補足」の $a = b$ で $c > d$ のケース，および $a = b$ で $c < d$ のケースを分析せよ。

39. 3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 0,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 8,\ v(\{A, C\}) = 2$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

コアが存在しない場合もある。本文で説明した例と比較してどのようなことが言えるか。

40. 特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A,B\})=9,\ v(\{B,C\})=8$$

$$v(\{A,C\})=7,\ v(\{A,B,C\})=11$$

$$v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$$

このときコアと仁を求めよ。コアが存在しない場合もある。

41. 119 ページにある「2 人の共同事業」の例をナッシュ交渉解を用いて解け。

42. ナッシュ交渉解を企業と労働組合の賃金・雇用交渉の問題に応用する。賃金を w, 雇用者数を l で表す。企業は一定の資本のもとで生産を行うものとし生産関数を $40\sqrt{l}$ とする。労働組合は 2400 人の人を預かり企業に雇用されない場合は外部の仕事で 8000 の賃金を受け取れる。企業が生産する財の価格は 16000 であるとする。企業の利得は財の販売から得られる収入と賃金費用の差であり，組合の利得は企業に雇用される者と雇用されない者を含めた全員の賃金収入の合計である。交渉が決裂した場合は企業は生産ができなくなるが，組合員は外部からの賃金を得ることができる。以上の設定のもとで以下の問に答えよ。また，外部の仕事で得られる賃金率が 10000 のときにも同じ問題を解け。
   (i) 交渉が決裂したときのそれぞれの利得を求めよ。
   (ii) 企業と組合の利得を式で表せ。
   (iii) ナッシュ交渉解における賃金率と雇用者数を求めよ。

43. (new) 男性 4 人，A，B，C，D，女性 4 人，a，b，c，d，からなるマッチング問題を考える。各自の異性に対する選好が以下のようであるとする。左から順に好む。

$$A: dbca,\ B: bdac,\ C: adbc,\ D: abdc$$

$$a: CADB,\ b: BACD,\ c: BDCA,\ d: CBDA$$

そのとき
   (i) 安定マッチングの意味を説明せよ。
   (ii) 男性から申し出たときの安定マッチングを求めよ。求める手順も説明すること。
   (iii) 女性から申し出たときの安定マッチングを求めよ。求める手順も説明すること。両者は同じ場合もあるし，異なる場合もある。

44. (new) 男性 4 人，A，B，C，D，女性 4 人，a，b，c，d，からなるマッチング問題を考える。各自の異性に対する選好が以下のようであるとする。左から順に好む。

$$A: acbd,\ B: cadb,\ C: cbda,\ D: cdba$$

$$a : BDAC,\ b : DCAB,\ c : ACDB,\ d : ADBC$$

そのとき

(i) 安定マッチングの意味を説明せよ。

(ii) 女性から申し出たときの安定マッチングを求めよ。求める手順も説明すること。

(iii) 男性から申し出たときの安定マッチングを求めよ。求める手順も説明すること。両者は同じ場合もあるし，異なる場合もある。

略解

1. 作成中
2. (i) 保険がないときのタイプ 1 の人々の期待効用は

$$2400 \times \frac{9}{10} + 800 \times \frac{1}{10} = 2240$$

であるから，保険料を y とすると

$$800 + 160(20 - y) - 4(20 - y)^2 = 2400 - 4y^2 = 2240$$

より $y = 2\sqrt{10} \approx 6.3$ が求まる。したがって 6.3 までの保険料を支払う用意がある。一方保険がないときのタイプ 2 の人々の期待効用は

$$2400 \times \frac{1}{2} + 800 \times \frac{1}{2} = 1600$$

であるから，保険料を y とすると

$$2400 - 4y^2 = 1600$$

より $y = 10\sqrt{2} \approx 14.1$ が求まる。したがって 14.1 までの保険料を支払う用意がある。保険料を 6.3 以下にしなければタイプ 1 は保険に加入しない。タイプ 1 よりタイプ 2 の人々の方が 2 倍多いので事故が起きる確率は $\frac{11}{30}$ である。事故の損害は 20 であるからその期待値は約 7.3 となり保険料を上回るので採算がとれない。

(ii)（以下は 1 つの例である）次のような 2 つの保険を考えてみよう。

[1] 保険 1：損害保障額は 15 で保険料は 8。したがって事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-13，起きなかったときは -8。

[2] 保険 2：損害保障額は 5 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-16，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

[1] タイプ 1：保険 1 から得られる期待効用は

$$2144 \times \frac{9}{10} + 1724 \times \frac{1}{10} = 2102$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$2396 \times \frac{9}{10} + 1376 \times \frac{1}{10} = 2294 > 2240$$

であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。

[2] タイプ 2：保険 1 から得られる期待効用は

$$2144 \times \frac{1}{2} + 1724 \times \frac{1}{2} = 1934 > 1600$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$2396 \times \frac{1}{2} + 1376 \times \frac{1}{2} = 1886$$

であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

この保険ではそれぞれのタイプの人々が事故を起こす確率を考えると保険会社の採算に問題はない。

3. 企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (20 - x - y)x - 3x$$

$$\pi_A = (20 - x - y)x - y$$

と表され，利潤最大化条件は

$$17 - 2x - y = 0$$

$$19 - x - 2y = 0$$

となる。したがって企業 A，B の反応曲線の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$x = \frac{1}{2}(17 - y)$$

$$y = \frac{1}{2}(19 - x)$$

(各自図示していただきたい)
また均衡産出量はそれぞれ

$$x = 5,\ y = 7$$

と求まる。

4. (i) 企業 i の利潤は

$$\pi_i = (a - b\sum_{i=1}^{n} x_i)x_i - dx_i - f$$

と表されるから，利潤最大化の条件は

$$a - b\sum_{i=1}^{n} x_i - bx_i - d = 0$$

となる。ここですべての企業の費用関数が等しいから均衡産出量も等しくなることを用いると $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{a-d}{(n+1)b}$$

が求まる。

(ii) 均衡価格は

$$p = a - bnx_i = \frac{a+nd}{n+1}$$

となるので，均衡における各企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{a+nd}{n+1} - d\right]\frac{a-d}{(n+1)b} - f = \frac{(a-d)^2}{(n+1)^2 b} - f$$

に等しい。$\pi_i = 0$ とおくと

$$n = \frac{a-d}{\sqrt{bf}} - 1$$

が得られる。f が大きくなるとこの式を満たす n の値は小さくなる。

(iii) 財の価格は

$$p = \frac{a + d\left[\frac{a-d}{\sqrt{bf}} - 1\right]}{\frac{a-d}{\sqrt{bf}}} = d + \sqrt{bf}$$

となる。f が 0 に近づけば p は d（限界費用の値）に近づく。

5. (i) $k = \frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A + x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (24 - 2x_B + x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$23 - 4x_A + x_B = 0$$

$$22 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{38}{5},\ x_B = \frac{37}{5}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{81}{5},\ p_B = \frac{84}{5}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 24 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 24 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [24 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [24 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$74 - 4p_A - p_B = 0$$

$$76 - 4p_B - p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{44}{3},\ p_B = \frac{46}{3}$$

を得，そのときの各企業の産出量

$$x_A = \frac{82}{9},\ x_B = \frac{80}{9}$$

が得られる。

(ii) $k = -\frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A - x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (24 - 2x_B - x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$23 - 4x_A - x_B = 0$$

$$22 - 4x_B - x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{14}{3},\ x_B = \frac{13}{3}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{31}{3},\ p_B = \frac{32}{3}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 8 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 8 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [8 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [8 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$26 - 4p_A + p_B = 0$$

$$28 - 4p_B + p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{44}{5},\ p_B = \frac{46}{5}$$

を得る。そのときの各企業の産出量

$$x_A = \frac{26}{5},\ x_B = \frac{24}{5}$$

が得られる。

6. (i) クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A + x_B)x_A$$

$$\pi_B = (24 - 2x_B + x_A)x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$24 - 4x_A + x_B = 0$$

$$24 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = x_B = 8$$

を得る。各企業の利潤は次の通りである。

$$\pi_A = \pi_B = 128$$

(ii) シュタッケルベルク均衡

企業 B の行動はクールノー均衡と同一であるから，その反応関数は

$$x_B = 6 + \frac{1}{4}x_A$$

となる。そのとき企業 A の利潤は次のように表される。

$$\pi_A = (30 - \frac{7}{4}x_A)x_A$$

これを x_A で微分してゼロとおくと

$$30 - \frac{7}{2}x_A = 0$$

となり $x_A = \frac{60}{7}$ が得られる。そのとき $x_B = \frac{57}{7}$ であり，各企業が生産する財の価格はそれぞれ

$$p_A = \frac{105}{7} = 15,\ p_B = \frac{114}{7}$$

であるから，各企業の利潤は次のように求まる。

$$\pi_A = \frac{900}{7} = \frac{6300}{49}$$

$$\pi_B = \frac{6498}{49}$$

このとき $\pi_B > \pi_A$ である。

7. 均衡においては需要と供給が（各地域）で等しいから $d_1 = x_1$，$d_2 = x_2$ が成り立つ。需要関数から逆需要関数を求めると，それぞれの地域で

$$p_1 = 600 - x_1$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(400 - x_2)$$

となる。したがってこの企業の利潤は

$$\pi = (600 - x_1)x_1 + \frac{1}{2}(400 - x_2)x_2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

と表される。これを x_1，x_2 で微分すると

$$600 - 3x_1 = 0$$

$$200 - 2x_2 = 0$$

が得られるから供給量は $x_1 = 200$，$x_2 = 100$ となる。また価格はそれぞれ $p_1 = 400$，$p_2 = 150$ である。

8. ある企業（企業 i とする）の利潤は

$$\begin{aligned} &\pi_i = px_i - x_i^2 - 100 = (240 - 4X)x_i - x_i^2 - 100, \\ &X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n \end{aligned}$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 240 - 4x_i - 4X - 2x_i = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{120}{2n + 3}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{120n}{2n + 3}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{120}{2 + \frac{3}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 60 に近づいて行く。そのとき財の価格は 0 に近づく。

各企業（企業 i で代表させる）の費用関数が $c_i = 4x_i$ であるとすると利潤は

$$\pi_i = px_i - 4x_i = (240 - 4X)x_i - 4x_i,\ X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 236 - 4x_i - 4X = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{59}{n+1}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{59n}{n+1}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{59}{1+\frac{1}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 59 に近づいて行く。そのとき財の価格は 4 に近づく。

9. プレイヤー A，B それぞれの最適反応を考えよう。
   (i) プレイヤー A の最適反応
   B が X を選んだときは Y が最適であり，B が Y を選んだときは X が最適である。
   (ii) プレイヤー B の最適反応
   A が X を選んだときは X も Y も最適であり，A が Y を選んだときは X が最適である。

   したがってナッシュ均衡は（X, Y）（A が X，B が Y）および (Y, X)（A が Y，B が X）の 2 つある。

10. （1 つの例）
    $b > a$, $a > 3$, $2a > b + 1$ となるように a，b を選ぶ。たとえば $a = 6$，$b = 8$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

プレイヤー B

		大	小
プレイヤーA			
	大	6, 6	1, 8
	小	8, 1	3, 3

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応
B が大を選んだときは小が最適であり，B が小を選んだときにも小が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が大を選んだときは小が最適であり，A が小を選んだときにも小が最適である。

したがって「小」が両方のプレイヤーにとって支配戦略となり，ナッシュ均衡は (小, 小) のみである。

11. （1 つの例）

たとえば $a = 8$，$b = 6$，$c = 4$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

		プレイヤー B 大	プレイヤー B 小
プレイヤーA	大	8, 8	4, 6
	小	6, 4	3, 3

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が大を選んだときは大が最適であり, B が小を選んだときも大が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が大を選んだときは大が最適であり，A が小を選んだときも大が最適である。

したがってナッシュ均衡は (大, 大) のみである。

グローブズメカニズム（あるいは修正されたグローブズメカニズム）では自分の負担が自分の申告額ではなく相手の申告額によって決まるように設計されている。この例のゲームでは相手が「大」を選べば自分が「大」を選んでも「小」を選んでも公共財が供給されるが「小」を選んだときには公共財の供給量は少なくなる。一方負担は相手の申告「大」によって決まるので利得は下がってしまう。したがって囚人のジレンマのように小を選ぶインセンティブはない。一方相手が小を選んだときには自分が大を選ばなければ公共財は供給されないが，自分の負担は相手の申告によって決まっているので公共財が供給されるべきであるとすれば自分は大を申告すべきである。

12. 最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が X を選んだときは Y が最適であり，B が Y を選んだときにも Y が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が X を選んだときは X が最適であり，A が Y を選んだときは Y が最適である。

したがってナッシュ均衡は (Y, Y)（ともに Y を選ぶ）である。

13. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 2 - pq$$

$$\pi_B = 2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + 2p + 2q - 3pq = 1 + q(2-3p) + 2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

[1] $0 < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適

[2] $q = 0$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適

[2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 1$ が最適

[3] $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(i) $p = 0,\ q = 1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略からなる均衡である。

(ii) $q = 0$ で $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$。この均衡ではプレイヤー B は純粋戦略として Y を選ぶが，プレイヤー A は $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ の範囲で純粋戦略（X）または混合戦略を選ぶ。したがってこの均衡には次のような均衡も含まれる。

「$p = 1,\ q = 0$，プレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略からなる均衡」

14. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 3p(1-q) + 2(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + 2p + q - 3pq = 1 + p(2-3q) + q$$

$$\pi_B = 2pq + p(1-q) + (1-p)q + 3(1-p)(1-q) = 3 - 2p - 2q + 3pq = 3 + q(3p-2) - 2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適

[2] $0 \leqq q < \frac{2}{3}$ のときは $p = 1$ が最適

[3] $q = \frac{2}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適

[2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 0$ が最適

[3] $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は $p=\frac{2}{3}$，$q=\frac{2}{3}$ のときのみである（p と q の値が等しいのはこのゲームの構造によるものであり混合戦略によるナッシュ均衡において常にそうであるとは限らない)。

15. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 3p(1-q) + 2(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + p(2-3q) + q$$

$$\pi_B = pq + 2p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + q(2-3p) + p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < q \leqq 1$ のときは $p=0$ が最適

[2] $0 \leqq q < \frac{2}{3}$ のときは $p=1$ が最適

[3] $q=\frac{2}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q=0$ が最適

[2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q=1$ が最適

[3] $p=\frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(i) $p=0, q=1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(ii) $p=1, q=0$。これはプレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(iii) $p=\frac{2}{3}, q=\frac{2}{3}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

また $\frac{2}{3}$ になってしまった。別のゲームを考えてみよう。

		プレイヤー B	
プレイヤー A		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 1	4, 2
	戦略 Y	3, 5	1, 1

この場合プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq+4p(1-q)+3(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+3p+2q-5pq = 1+p(3-5q)+2q$$

$$\pi_B = pq+2p(1-q)+5(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+p+4q-5pq = 1+q(4-5p)+p$$

となる。このゲームの均衡は次のようになる。

(i) $p=0, q=1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(ii) $p=1$, $q=0$。これはプレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(iii) $p=\frac{4}{5}$, $q=\frac{3}{5}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

16. 作成中

17. プレイヤー A の戦略は X と Y の 2 つであるが，プレイヤー B の戦略は次の 4 つある。
   (i) XX：A が X のときは X，Y のときも X
   (ii) XY：A が X のときは X，Y のときは Y
   (iii) YX：A が X のときは Y，Y のときは X
   (iv) YY：A が X のときは Y，Y のときも Y

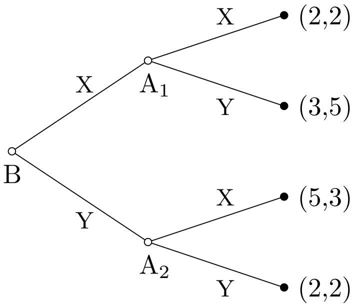
   この動学的なゲームを標準型ゲームで表現すると次の表が得られる。

プレイヤー A \ プレイヤー B	XX	XY	YX	YY
戦略 X	2, 2	2, 2	5, 3	5, 3
戦略 Y	3, 5	2, 2	3, 5	2, 2

   最適反応を考えてみよう。
   (i) プレイヤー A の最適反応
   B が XX を選んだときは Y が最適であり，B が XY を選んだときは X も Y も最適であり，B が YX を選んだときは X が最適であり，B が YY を選んだときは X が最適である。
   (ii) プレイヤー B の最適反応
   A が X を選んだときは YX と YY が最適であり，A が Y を選んだときは XX と YX が最適である。

   したがってナッシュ均衡は (X, YY)（A が X，B が YY），(Y, XX)（A が Y，B が XX），(X, YX)（A が X，B が YX）の 3 つある。しかし (X, YY) は A が Y を選んだときに B が Y を選ぶという前提に立っており合理的ではない。また (Y, XX) は A が X を選んだときに B が X を選ぶという前提に立っておりこれも合理的ではない。したがって合理的なナッシュ均衡（部分ゲーム完全均衡）は (X, YX) である。

18. ゲームの樹は次のように描かれる。



左側の数字がプレイヤー A の，右側の数字がプレイヤー B の利得である。B はプレイヤー B が，A_1，A_2 はプレイヤー A が意思決定する時点を表している。A_1 において A は Y を選び，A_2 においては X を選ぶ。それに対応して B は X を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (YX, X) である。

19. B_1 において B は Y を選び，B_2 においては X を選ぶ。それに対応して A は Y を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (Y, YX) である。

20. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\pi_A = -10pq + 5p(1-q) - 15(1-p)q + 10(1-p)(1-q) = 5p(2q-1) - 25q + 10$$

$$\pi_R = -10pq - 15p(1-q) + 5(1-p)q + 10(1-p)(1-q) = 5q(2p-1) - 25p + 10$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{1}{2}$ のとき $p = 0$ が最適
(ii) $\frac{1}{2} < q \leqq 1$ のとき $p = 1$ が最適
(iii) $q = \frac{1}{2}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{1}{2}$ のとき $q = 0$ が最適
(ii) $\frac{1}{2} < p \leqq 1$ のとき $q = 1$ が最適
(iii) $p = \frac{1}{2}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p = 0$，$q = 0$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持たない純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。
(ii) $p = 1$，$q = 1$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持つ純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。
(iii) $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{1}{2}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

21. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}\pi_A =& -20pq+15p(1-q)-15(1-p)q+10(1-p)(1-q)\\ =& -10pq+5p-25q+10=5p(1-2q)-25q+10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_R =& -20pq-15p(1-q)+15(1-p)q+10(1-p)(1-q)\\ =& -10pq-25p+5q+10=5q(1-2p)-25p+10\end{aligned}$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{1}{2}$ のとき $p=1$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < q \leqq 1$ のとき $p=0$ が最適

(iii) $q=\frac{1}{2}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{1}{2}$ のとき $q=1$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < p \leqq 1$ のとき $q=0$ が最適

(iii) $p=\frac{1}{2}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p=0$，$q=1$。これはアメリカが核兵器を持たず，ロシアが持つという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(ii) $p=1$，$q=0$。これはアメリカが核兵器を持ち，ロシアが持たないという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(iii) $p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

22. 企業 2 の利潤は

$$\pi_2=[32-2(x_2+kx_1)]x_2$$

であるから x_1 を与えられたものとしてこれを x_2 で微分してゼロとおくと

$$32-2kx_1-4x_2=0$$

より

$$x_2=8-\frac{k}{2}x_1$$

が得られる。これをもとに企業 1 の利潤は

$$\pi_1=[32-2(x_1+8k-\frac{k^2}{2}x_1)]x_1$$

と表される。したがって企業 1 の利潤最大化条件は

$$32-16k-2(2-k^2)x_1=0$$

となり

$$x_1 = \frac{8(2-k)}{2-k^2}$$

を得る。そのときの企業 2 の産出量は

$$x_2 = 8 - k\frac{4(2-k)}{2-k^2} = \frac{4(4-2k-k^2)}{2-k^2}$$

である。また，各企業が生産する財の価格は

$$p_1 = 32 - 2x_1 - 2kx_2 = \frac{8[4-2k-2k^2+k^3]}{2-k^2} = 8(2-k)$$

$$p_2 = 32 - 2kx_1 - 2x_2 = \frac{8[4-2k-k^2]}{2-k^2}$$

であるから，企業 1，2 の利潤はそれぞれ

$$\pi_1 = p_1x_1 = \frac{64(2-k)^2}{2-k^2},\ \pi_2 = p_2x_2 = \frac{32(4-2k-k^2)^2}{(2-k^2)^2}$$

となる。これらを比較すると

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_2 =& \frac{64(2-k)^2}{2-k^2} - \frac{32(4-2k-k^2)^2}{(2-k^2)^2} \\ =& \frac{32}{(2-k^2)^2}[2(4-4k+k^2)(2-k^2) - (4-2k-k^2)^2] \\ =& \frac{32k^3}{(2-k^2)^2}(4-3k)\end{aligned}$$

となる。したがって $-1 < k < 1$ であるから $k > 0$ のとき $\pi_1 > \pi_2$，$k < 0$ のとき $\pi_1 < \pi_2$ である。

23. (i) 企業 1，2 の利潤最大化条件は

$$48 - 4p_1 + p_2 = 0$$

$$48 - 4p_2 + p_1 = 0$$

これらより $p_1 = p_2 = 16$ が求まる。

(ii) 企業 2 の反応関数は

$$p_2 = 12 + \frac{1}{4}p_1$$

となるから企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = \left(60 - \frac{7}{4}p_1\right)p_1$$

と表される。したがって利潤最大化条件は

$$60 - \frac{7}{2}p_1 = 0$$

となり。$p_1 = \frac{120}{7}$ が得られる。そのとき $p_2 = \frac{114}{7}$ である。需要関数より各企業の産出量は $x_1 = \frac{210}{7}(= 30)$，$x_2 = \frac{228}{7}$ となるので利潤

$$\pi_1 = \frac{25200}{49},\ \pi_2 = \frac{25992}{49}$$

が得られる。このとき $\pi_2 > \pi_1$ であるからフォローワーである企業 2 の利潤の方が大きい。

24. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2} + 1$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2} + 1$ は 2 から 2.5 までの値を等しい確率でとる（$2 \leqq v_1 \leqq 3$ であるから）。したがって入札に勝つ確率は $2 \leqq p_2 \leqq 2.5$ として $\frac{p_2 - 2}{0.5} = 2(p_2 - 2)$ である。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$2(p_2 - 2)(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - 2p_2 - p_2 v_2 + 2v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - (2 + v_2) = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1$$

を得る。

25. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1 + 1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により

$\frac{v_1+1}{2}$ は 1 から 2 までの値を等しい確率でとる（$1 \leqq v_1 \leqq 3$ であるから)。したがって入札に勝つ確率は $1 \leqq p_2 \leqq 2$ として $p_2 - 1$ である。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$(p_2 - 1)(v_2 - p_2) = -(p_2^2 - p_2 - p_2 v_2 + v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - (1 + v_2) = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2}$$

を得る。

26. プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1) - 2$ に等しい（一様分布の仮定によって)。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 2)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 2 = 0$$

が得られる。$g_2'(p_1) = g_1'(p_1)$ より上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g_1'(p_1) - g_1(p_1) + 2 = 0$$

と書き直される。さらに

$$g_1'(p_1) = \frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)} - v_1 + 2 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - (v_1 - 2)p_1'(v_1) = 0$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1$$

である。実際 $p_1' = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2} - 1) - \frac{1}{2}(v_1 - 2) = 0$$

が成り立つ。

27. プレイヤー 2 の入札額を $p_2 = p_2(v_2)$ とし，その逆関数を $v_2 = g_2(p_2)$ と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $\frac{g_2(p_1)-1}{3}$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$\frac{1}{3}(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 1 = 0$$

が得られる。以下は上の問題とほぼ同じ。

28. 割り引き因子を δ とすると戦略 Y を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである。

$$4(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) > 8 + 2(\delta + \delta^2 + \cdots)$$

これより

$$\frac{4}{1-\delta} > 8 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > \frac{2}{3}$$

が求まる。したがって割り引き因子が $\frac{2}{3}$ より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となり戦略 X を選ぶ状態が永遠に続く。割引率 $r(\frac{1}{1+r} = \delta)$ で表せばこの条件は $r < \frac{1}{2}$ となる。

29. 作成中

30. 割り引き因子を δ とすると，3 回のゲームで相手が「戦略 X」「戦略 Y」「戦略 Y」を選び自分が「戦略 Y」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$8 + \delta + \delta^2 \tag{3.11}$$

であり，互いに「戦略 X」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$4(1+\delta+\delta^2) \tag{3.12}$$

である。(3.12) が (3.11) より大きくなる条件は $3\delta+3\delta^2>4$ であり，この式から

$$\delta > 0.76$$

が得られる。

このゲームでトリガー戦略を考えてみよう。戦略 Y を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである。

$$4(1+\delta+\delta^2+\cdots) > 8+(\delta+\delta^2+\cdots)$$

これより

$$\frac{4}{1-\delta} > 8+\frac{\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > \frac{4}{7}$$

が求まる。

31. (i) そのような完全ベイジアン均衡があるとすると，企業 A が X を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ S であり，企業 A が Y を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ W であるという推測が企業 B にとって整合的な推測になる。したがって企業 B は X に対しては N を，Y に対しては F を選ぶ。しかし，そうするとタイプ W の企業 A は Y ではなく X を選んだ方が有利となるので均衡の条件を満たさない。よってそのような完全ベイジアン均衡はない。

    (ii) そのような完全ベイジアン均衡があるとすると，企業 A が X を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ W であり，企業 A が Y を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ S であるという推測が企業 B にとって整合的な推測になる。したがって企業 B は X に対しては F を，Y に対しては N を選ぶ。しかし，そうするとタイプ W の企業 A は X ではなく Y を選んだ方が有利となるので均衡の条件を満たさない。よってそのような完全ベイジアン均衡はない。

32. (i) **完全ベイジアン均衡 1 の確認：　プレイヤー A の戦略の最適性**　プレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は N を，Y を選んだときは F を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 3，Y を選んだときに得られる利得は 0 であるから X を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 1，Y を選んだときに得られる利得は 2 であるから Y を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性　プレイヤー B はプレイヤー A が X を選んだときにそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。またプレイヤー A が Y を選んだときにそれが間違いなくタイプ W であるという推測を持つので F が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性　この均衡おいてはタイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A が異なる戦略を選ぶから，それぞれに応じて明確な推測を持つことができる。タイプ S のプレイヤー A は X を，タイプ W のプレイヤー A は Y を選ぶので完全ベイジアン均衡 1 に示されている推測は整合的である。

完全ベイジアン均衡 2 の確認：　**プレイヤー A の戦略の最適性**　プレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は F を，Y を選んだときは N を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 1，Y を選んだときに得られる利得は 2 であるから Y を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 2，Y を選んだときに得られる利得は 3 であるから Y を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性　プレイヤー B はプレイヤー A が X を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より小さい確率でタイプ S であるという推測を持つので F が最適である。またプレイヤー A が Y を選んだときにそれが確率 $\frac{2}{3}$ でタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性　この均衡においてはどちらのタイプのプレイヤー A も Y を選ぶから，プレイヤー A が Y を選んだときのプレイヤー B の推測はゲームが始まる前の確率と同じでなければならない。一方どちらのタイプのプレイヤー A も X を選ばないので，プレイヤー A が X を選んだときのプレイヤー B の推測には制約はなく，どのような推測を持ってもかまわない。

(ii) **完全ベイジアン均衡 1 の合理性**　タイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A とが異なる戦略を選ぶのでプレイヤー B の推測の合理性には問題がない。

完全ベイジアン均衡 2 の合理性　問題はプレイヤー A が X を選んだときにプレイヤー B が持つ推測が合理的であるかどうかである。この均衡はプレイヤー A が X を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より大きい確率でタイプ W であるという推測を持つという前提に基づいている。タイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得ることができる最大の利得は 2 であるがそれは均衡の利得 3 よりも小さい。一方タイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得ることができる最大の利得は 3 であり，それは均衡利得 2 よりも

大きい。したがってプレイヤー A が X を選んだとき，プレイヤー B はそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つべきであるということになる。そうするとプレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は N を選ぶのが最適となり，完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

(iii) そのような均衡があるとすれば企業 A がタイプ S である確率が $\frac{2}{3}$ であるから，両タイプの企業 A が X を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適となる。そうするとタイプ W の企業 A は Y を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

(iv) そのような均衡があるとすれば，企業 A が X を選んだとき企業 B は F を，企業 A が Y を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適である。そうするとタイプ W の企業 A は Y を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

33. （各自考えてみていただきたい）

34. まずすべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p)（p はごく小さな正の数）で戦略 Y を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき X を選ぶ個体の期待利得は $5(1-p)$ であり，Y を選ぶ個体の期待利得は $10(1-p)+3p=10-7p$ であるから，明らかに Y を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略ではない。

一方すべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で（確率 q で X を選ぶ）混合戦略（戦略 J とする）を選ぶ個体が出現したとする。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得を $E(Y)$ とすると

$$E(Y)=3(1-p)+pF(q) \quad (F(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

であり，J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$E(J)=3(1-p)(1-q)+pG(q) \quad (G(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

である。差をとれば

$$E(Y)-E(J)=3(1-p)q+pH(q) \quad (H(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

となるから p が小さく $q>0$（X を選ぶ確率が正）であれば $E(Y)>E(J)$ である。したがって戦略 Y は進化的に安定な戦略である。

35. すべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で（確率 q で X を選ぶ）混合戦略（戦略 J とする）を選ぶ個体が出現したとする。そのとき X を選ぶ個体の期待利得を $E(X)$ とすると $E(X)=2$ であり，J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$E(J)=(2q+1-q)(1-p)+pF(q) \quad (F(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

である。差をとれば

$$E(X) - E(J) = 1 - q + p(1 + q) - pF(q)$$

となるから p が小さく $q < 1$（Y を選ぶ確率が正）であれば X を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略である。
一方すべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で戦略 J を選ぶ個体が出現したとする。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得を $E(Y)$ とすると

$$E(Y) = 4(1 - p) + pF(q) \quad (F(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

であり，J を選ぶ個体の期待利得は

$$E(J) = (1 - p)[2q + 4(1 - q)] + pG(q) \quad (G(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

である。差をとれば

$$E(Y) - E(J) = 2(1 - p)q + pH(q) \quad (H(q) \text{ は } p \text{ に関係のない } q \text{ の関数})$$

となる。p が小さければ Y を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 Y も進化的に安定な戦略である。

36. まずすべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p)（p はごく小さな正の数）で戦略 Y を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき X を選ぶ個体の期待利得は

$$(1 - p) + 3p = 1 + 2p$$

であり，Y を選ぶ個体の期待利得は

$$2(1 - p) + p = 2 - p$$

である。p の値が小さければ Y を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略ではない。一方すべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で戦略 X を選ぶ個体が出現したとする。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得は

$$(1 - p) + 2p = 1 + p$$

であり，X を選ぶ個体の期待利得は

$$3(1 - p) + p = 3 - 2p$$

である。p が小さければ X を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 Y も進化的に安定な戦略ではない。そこで確率 $\frac{2}{3}$ で戦略 X を，確率 $\frac{1}{3}$ で戦略 Y を選ぶ混合戦略を考えてみよう。これを戦略 I とする。このとき

$$E(I, I) = \frac{2}{3}E(X, I) + \frac{1}{3}E(Y, I)$$

であるが

$$E(X,I)[=\frac{2}{3}E(X,X)+\frac{1}{3}E(X,Y)]=E(Y,I)[=\frac{2}{3}E(Y,X)+\frac{1}{3}E(Y,Y)]=\frac{5}{3}$$

が成り立つ。したがって $E(I,I)=\frac{5}{3}$ である。確率 $q(\neq\frac{2}{3})$ で X を，$1-q$ で Y を選ぶ任意の戦略を J として，すべての個体が戦略 I を選んでいる状態においてわずかな割合 (p) で戦略 J を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき I を選ぶ個体の期待利得を $E(I)$ とすると

$$\begin{aligned}E(I)=&(1-p)E(I,I)+pE(I,J)=(1-p)\frac{5}{3}+p[\frac{2}{3}E(X,J)+\frac{1}{3}E(Y,J)]\\=&(1-p)\frac{5}{3}+p\left\{\frac{2}{3}[qE(X,X)+(1-q)E(X,Y)]\right.\\&\left.+\frac{1}{3}[qE(Y,X)+(1-q)E(Y,Y)]\right\}\\=&(1-p)\frac{5}{3}+p\frac{7-3q}{3}\end{aligned}$$

となる。一方 J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$\begin{aligned}E(J)=&(1-p)E(J,I)+pE(J,J)\\=&(1-p)[qE(X,I)+(1-q)E(Y,I)]\\&+p[qE(X,J)+(1-q)E(Y,J)]\\=&(1-p)\frac{5}{3}+p\{q[qE(X,X)+(1-q)E(X,Y)]\\&+(1-q)[qE(Y,X)+(1-q)E(Y,Y)]\}\\=&(1-p)\frac{5}{3}+p(3q-3q^2+1)\end{aligned}$$

となる。両者の差を求めると

$$E(I)-E(J)=\frac{p}{3}(2-3q)^2$$

が得られる。したがって $q\neq\frac{2}{3}$ ならば I を選ぶ個体の方が大きい利得を得るので I は進化的に安定な戦略である。

37. I と J の適当な混合戦略を K として，戦略 K は確率 q で戦略 I を確率 $1-q$ で戦略 J をとるものとする。すると $E(J,J)=d$ および

$$E(K,J)=qE(I,J)+(1-q)E(J,J)=qc+(1-q)d$$

より

$$E(J,J)>E(K,J)$$

が得られる。これは (2.19) が厳密な不等式で満たされることを意味するから戦略 J が進化的に安定な戦略である。

38. **$\boldsymbol{a = b}$ で $\boldsymbol{c < d}$ の場合** この場合は前問で示したように戦略 J は進化的に安定な戦略である。一方戦略 I は，確率 $q\,(q \neq 0)$ で戦略 I をとる混合戦略を K として

$$E(K, I) = E(I, I) = a$$

であり，また

$$E(I, K) = qE(I, I) + (1-q)E(I, J) = qa + (1-q)c \tag{3.13}$$

および (2.25) と $a = b$ より

$$E(K, K) = qa + (1-q)qc + (1-q)^2 d \tag{3.14}$$

であり，$c < d$ によって

$$E(I, K) < E(K, K)$$

となり (2.20) を満たさないので進化的に安定ではない。

$\boldsymbol{a = b}$ で $\boldsymbol{c > d}$ の場合 この場合は戦略 J は進化的に安定な戦略ではない。一方戦略 I は前問の (3.13)，(3.14) より $c > d$ であるから

$$E(I, K) > E(K, K)$$

となって (2.20) を満たすので進化的に安定な戦略である。

39. (i) **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x + y + z = 20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 2$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $0 \leqq x \leqq 12$，$0 \leqq y \leqq 18$，$2 \leqq z \leqq 14$ でなければならないが $(x, y, z) = (0, 18, 2)$ や $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ などもコアに含まれる。本文中の例と比較して z（C の取り分）が 2 以上であるという点が異なる。

(ii) **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$
\begin{aligned}
&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=6-(x+y)\\
&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=8-(y+z)\\
&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=2-(x+z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\})-x=-x\\
&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y\\
&\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z
\end{aligned}
$$

最大の不満の大きさを m とすると

$6-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 2-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2-z \leqq m,$

が得られる。$x+y+z=20$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 18+m,\ 2-m \leqq z \leqq 14+m$$

$m=-6$ とすると

$$6 \leqq x \leqq 6,\ 6 \leqq y \leqq 12,\ 8 \leqq z \leqq 8$$

となるから，この -6 が最小化された最大の不満であり，$x=6$，$z=8$ が決まり，さらに $y=6$ が決まる。したがって仁となる配分は $(x,y,z)=(6,6,8)$ である。本文の例と比べると z が 1 大きくなり，y が 1 小さくなっている。$v(\{C\})=2$ および $v(\{A,C\})=2$ によって，C が自らの力で 2 の利得を確保する力を持ったことによって交渉の結果をより有利なものに変えることができたのである。その影響で B の取り分は減った。

(iii) **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
{A,B,C}	20-8=12	20-2=18	20-6=14
{A,B}	6	6	–
{A,C}	0	–	2
{B,C}	–	6	8
{A}	0	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	6	14
$A \to AC \to ABC$	0	18	2
$B \to AB \to ABC$	6	0	14
$B \to BC \to ABC$	12	0	8
$C \to AC \to ABC$	0	18	2
$C \to BC \to ABC$	12	6	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ 5，8，7 であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (5, 8, 7)$ である。上記の仁と同様に本文の例と比べると C の取り分が大きくなり，B の取り分が小さくなっている。これはやはり $v(\{C\}) = 2$ および $v(\{A, C\}) = 2$ によって，C が自力で 2 の利得を確保する力を持ったことによるものであると考えられる。

このように協力ゲームにおける自らの取り分を大きくするには，交渉がうまく行かなかったときに自力で確保できる利得を大きくしておくことが有効であると言える。

40. A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 11$$

$$x + y \geqq 9,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 7$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x + y \geqq 9$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 2$，$x \leqq 3$ でなければならない。しかしそれでは $x + z \geqq 7$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 9 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 7 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$9-(x+y)\leqq m,\ 8-(y+z)\leqq m,\ 7-(x+z)\leqq m,\ -x\leqq m,\ -y\leqq m,\ -z\leqq m$

$m=\frac{2}{3}$ とすると

$$x+y\geqq\frac{25}{3},\ y+z\geqq\frac{22}{3},\ x+z\geqq\frac{19}{3},\ x\geqq-\frac{2}{3},\ y\geqq-\frac{2}{3},\ z\geqq-\frac{2}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x=\frac{11}{3},\ y=\frac{14}{3},\ z=\frac{8}{3}$$

が求まる。このとき

$$x+y=\frac{25}{3}<9,\ y+z=\frac{22}{3}<8,\ x+z=\frac{19}{3}<7$$

であるから 2 人づつの提携には不満が残る。

$m=\frac{2}{3}$ を求める。

$9-(x+y)\leqq m,\ 8-(y+z)\leqq m,\ 7-(x+z)\leqq m,\ -x\leqq m,\ -y\leqq m,\ -z\leqq m$

と $x+y+z=11$ より

$$-m\leqq x\leqq 3+m,\ -m\leqq y\leqq 4+m,\ -m\leqq z\leqq 2+m$$

が得られる。問題 107 と同じ手順で $m=-1$ が最小化された最大の不満となりそうに思われるが，一方で不等式の右辺の和は 11 以上でなければならないので $9+3m\geqq 11$ から

$$m\geqq\frac{2}{3}>-1$$

となる。この $\frac{2}{3}$ が最小化された最大の不満である。

問題 107 では

$$-m\leqq x\leqq 12+m,\ -m\leqq y\leqq 18+m,\ 2-m\leqq z\leqq 14+m$$

の右辺の和が 20 以上であるという条件 $44+3m\geqq 20$ より $m\geqq -8(<-6)$ となるので $m=-6$ が最小化された最大の不満であることに問題はない。

41. この問題を 124 ページのナッシュ交渉解の記号を使って表すと，U は $x_A+x_B\leqq 2000$ で表され，$d_A=100$，$d_B=200$ である。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=(x_A-100)(x_B-200)+\lambda(x_A+x_B-2000)$$

となり，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B - 200 + \lambda = 0$$

$$x_A - 100 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式と $x_A + x_B = 2000$ から

$$x_A = 950,\ x_B = 1050$$

が求まる。この場合はナッシュ交渉解と仁が一致する。

42. (i) 交渉が決裂したときの企業の利得は 0，組合の利得は 19,200,000(8000×2400) である。

(ii) 企業の利得は

$$u_1(w, l) = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl$$

労働組合の利得は

$$u_2(w, l) = wl + (2400 - l) \times 8000$$

と表される。

(iii) ナッシュ積は

$$(16000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) \tag{3.15}$$

と書ける。これを w で微分してゼロとおくと

$$-l(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) + l(16000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0$$

となり，$l \neq 0$ であるから次の式が得られる。

$$wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000 = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl \tag{3.16}$$

この式はナッシュ交渉解において「企業の利得」と「労働組合の利得から外部賃金を引いたもの」（すなわち交渉によってそれぞれが得られる利得）が等しいことを意味している。一方 (3.15) を l で微分してゼロとおくと

$$\begin{aligned}&(320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000)\\&+ (w - 8000)(16000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0\end{aligned}$$

が得られる。(3.16) より

$$320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 8000 = 0 \tag{3.17}$$

となり $l = 1600$ が求まる。これが交渉解における雇用量である。$l = 1600$ を (3.16) に代入すると

$$1600w - 12800000 = 25600000 - 1600w$$

となり $w = 12000$ を得る。これが交渉解における賃金率である。
外部の仕事から得られる賃金率が 10000 であれば (3.15) は

$$(16000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000)$$

(3.16) は

$$wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000 = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl \tag{3.18}$$

となり，(3.17) は

$$320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 10000 = 0$$

となるので $l = 1024 (= 32^2)$ が得られる。これを (3.18) に代入すると

$$1024w - 10240000 = 20480000 - 1024w$$

より $w = 15000$ が求まる。本文でも述べたように交渉に当たっては決裂したときの利得を大きくすることによってより有利な交渉結果を実現することができる。

43. 作成中
44. 作成中

索引

ゲーム理論入門

2014 年 4 月 1 日　　　　初版発行

著 者　田中靖人（たなかやすひと）

発 行　同志社大学経済学部

〒602-8580 京都市上京区今出川通烏丸東入

同志社大学良心館

TEL 075-251-3648（田中研究室）

Printed in Ryoshinkan at Karasuma-Imadegawa