交渉ゲーム

2020年1月20日

ゲーム理論入門　第13回講義

荒木一法

第９章　交渉ゲーム

1. 2人の交渉問題
2. ナッシュの公理
3. ナッシュ交渉解
4. 交渉の戦略ゲーム

３．ナッシュ交渉解

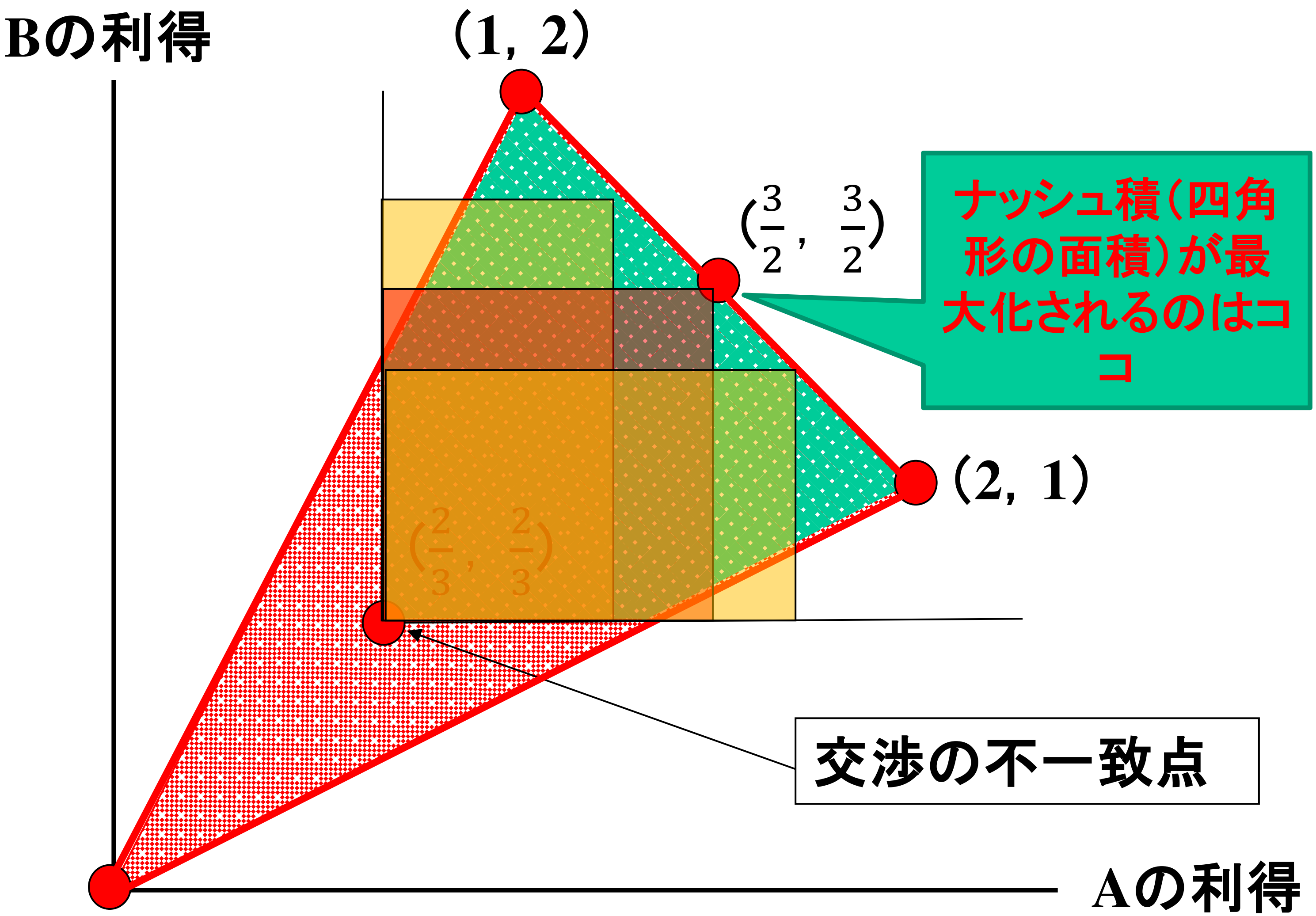
ナッシュ交渉解：実現可能集合に含まれる次の式(ナッシュ積)を最大化する交渉の妥結点$(\boldsymbol{u_1}^*, \boldsymbol{u_2}^*)$

ナッシュ積(Nash Product)

$$\boxed{(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)}$$

ただし$(\boldsymbol{u_1}\ \ , \boldsymbol{u_2}\ \ ) \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{u_i} \geq \boldsymbol{d_i}$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2})$

男女の争いのナッシュ交渉解



ナッシュ交渉解の計算（例）

男女の争いの場合、ナッシュ積が最大になるのは、パレート効率的な配分を表す直線（$u_1 + u_2 = 3$）上に位置する。したがってナッシュ積は

$$(u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2)$$

$$= \left(u_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(3 - u_1 - \frac{2}{3}\right) = \left(u_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} - u_1\right)$$

この値を最大化するu_1の値は$\frac{3}{2}$で、そのときu_2も$\frac{3}{2}$となる。

ナッシュの定理

４つの公理（）を同時に満たす、交渉解 $f^N:(U,d) \to \mathbb{R}^2$ は唯一つ存在し、それは次のものである。

$$f^N(U,d) = \underset{(d_1,d_2)\leq(u_1,u_2)\in S}{\operatorname{argmax}} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$$

この定理の証明は省略
「証明」の流れは、

(a) Verify that f^N is well defined and the maximizer is unique.

(b) Check that f^N satisfy the four axioms.

(c) Finally, show that f^N is the only bargaining solution that satisfies all axioms.

To complete (c), suppose that f is a bargaining solution which satisfies all axioms and we show $f = f^N$.

４．交渉の戦略ゲーム

＜ナッシュ･プログラム＞

ナッシュ交渉解を公理系からではなく、具体的交渉プロセスの結果として導こうとする研究ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑ。ここでは代表的な成果を簡単に紹介。

Ståhl－Rubinstein流交渉ゲーム

２人のプレーヤーが一定の大きさのパイのわけ前について交互に提案を行うゲーム。このゲームの部分ゲーム完全均衡で実現する利得がナッシュ交渉解に一致することが示された。

S-R流交渉ゲーム（概要）

- 一定の大きさの合計利得Xをもたらす分割可能な財を二人のプレーヤー(A,B)が交渉によって分ける。
- この財はどのような分割も可能で、どのように分割されても常に合計でXの効用をもたらす。

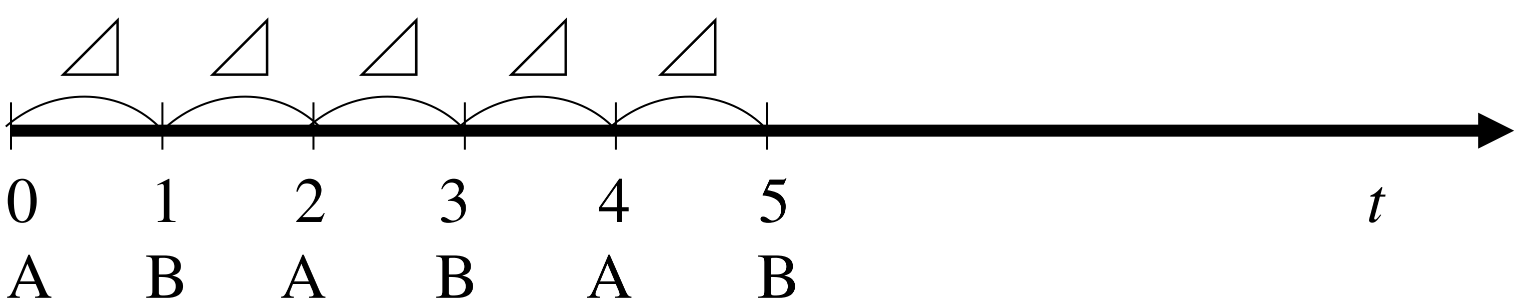
＊双方の不一致点が0で、大きさXのパイを分ける交渉ゲーム⇒ナッシュ交渉解は均等分配を予想

S-R流交渉ゲーム（交渉過程）

- まず、時点０でプレーヤーAが自らの取り分X_Aを提示し、Bがこれを受け入れれば、AがX_A 、ＢがXーX_Aを受け取る分配が実現する。
- ＢがＡの提案を拒否した場合は、時間⊿が経過したのち、Ｂが自らの取り分X_Bを提案し、Ａがこれを受け入れれば、ＡがXーX_B 、ＢがX_Bを受け取る。ただし、これらの利得を時点０で評価すると、それぞれのプレーヤーの割引因子δ_A, δ_Bで割引くため、それぞれ$\delta_A(X-X_B)$, $\delta_B X_B$となる。

S-R流交渉ゲーム（交渉過程）

- もし、ＡがＢの提案を拒否すると、さらに時間 が経過し、再びAに提案権が戻り同じゲームが継続する。
- すなわち、提案が相手に受け入れられればゲームは終了するが、受け入れられないと次のステージに進む。この間、時点を $(t = 0,1,2,\ldots)$ であらわすと偶数時点ではAが、奇数時点はＢが提案権をもつ。また、１期経過するごとに割引因子が適用される。



部分ゲーム完全均衡

- ここで、この交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡は次の二つの性質を満たすと仮定する。（これらの性質は実際にはこのゲームの部分ゲーム完全均衡においては必ず満たされる。）
  - （性質１）均衡では、各プレーヤーは自らが提案権を持つとき常に同じ水準の提案を行う。
  - （性質２）均衡では、提案は常に受諾される。
- これらの性質をみたす均衡における各プレーヤーの提案水準をX_A*, X_B*と置くと部分ゲーム完全均衡は、次ページのように特徴付けられる。

部分ゲーム完全均衡

- 次の戦略の組は、S-R交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡となっている。
  - プレーヤーAは、提案権をもつとき常に${X_A}^*$を提案し、Bの提案に対しては、それが$X_B \le {X_B}^*$を満たす場合は受諾、満たさない場合は拒否する。
  - プレーヤーBは、提案権をもつとき常に${X_B}^*$を提案し、Aの提案に対しては、それが$X_A \le {X_A}^*$を満たす場合は受諾、満たさない場合は拒否する。
- ${X_A}^*, {X_B}^*$は次のスライドで示される関係を満たす。

X_A*, X_B*の導出

$$X - X_A^* = \delta_B X_B^*, \quad X - X_B^* = \delta_A X_A^*$$

- この関係が成立しないとき、いずれか少なくとも一方のプレーヤーは、前頁の戦略から逸脱することで利得を増やすことができる！連立方程式として解くと

$$X_A^* = \frac{1-\delta_B}{1-\delta_A \delta_B} X, \quad X_B^* = \frac{1-\delta_A}{1-\delta_A \delta_B} X$$

結果の解釈

- 均衡パスでは、最初にAがX_A*を提案し、Bがそれを受け入れる。したがって、各プレーヤーの利得はそれぞれ以下の通りとなる。

$$X_A^* = \frac{1-\delta_B}{1-\delta_A\delta_B}X, \quad 1-X_A^* = \frac{\delta_B\left(1-\delta_A\right)}{1-\delta_A\delta_B}X$$

- 両者の割引率が等しく十分に1に近いと（⊿が十分に小さい）、均等分配（ナッシュ交渉解）が実現。一般には、δの値が大きいプレーヤー、先に提案権をもつプレーヤーが有利。