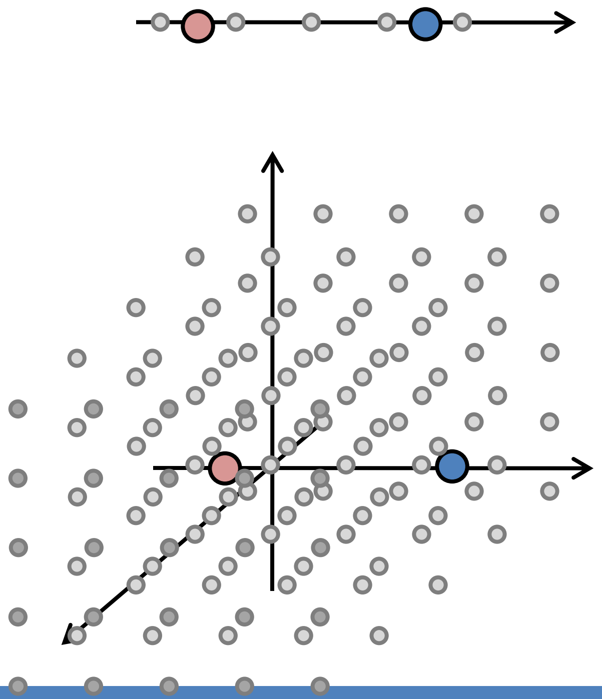
#5 次元削減と
等式制約の最適化

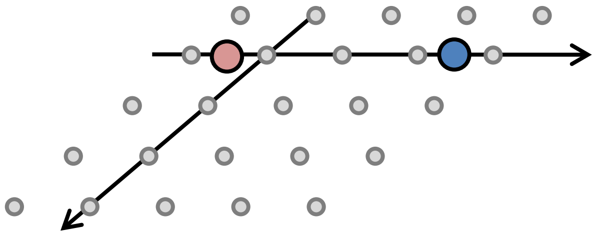
パターン認識における次元削減の必要性

■ 次元の呪い

- 特徴空間の次元が高くなると，信頼できる境界を得るために必要な学習データの量が幾何級数的に増大する。

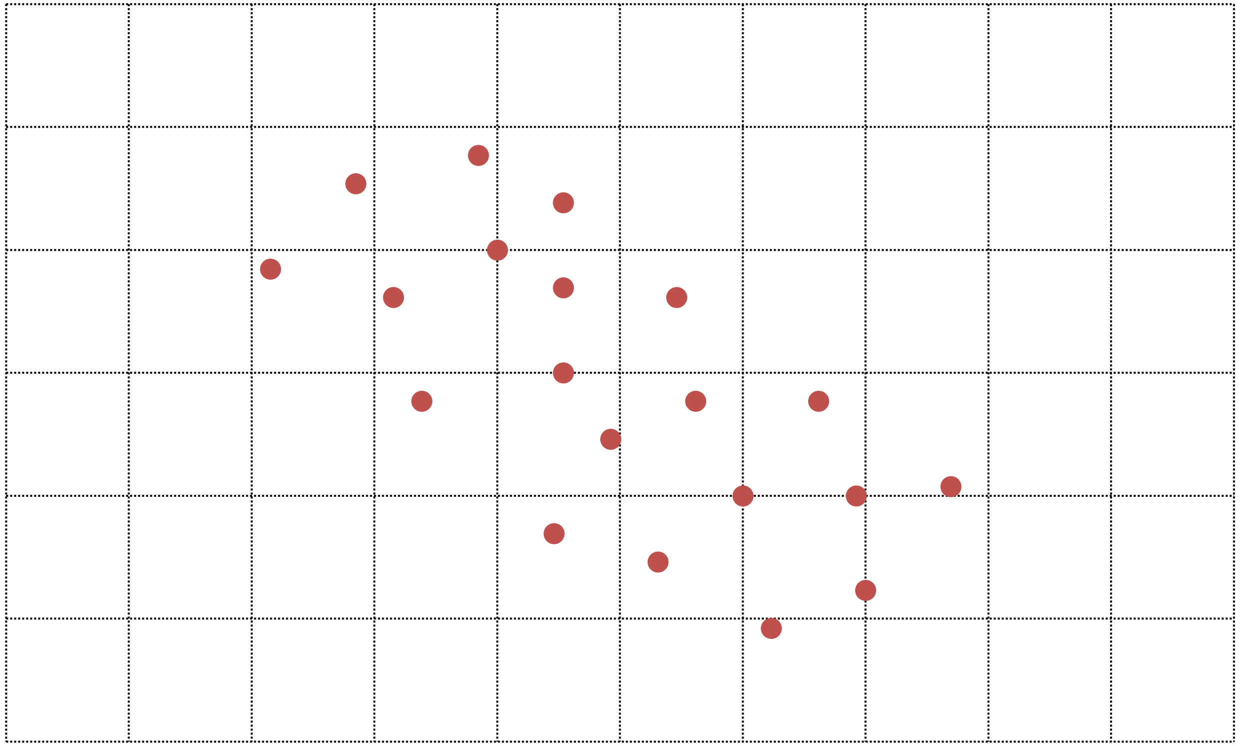
⇒ 次元削減（情報圧縮）の必要性





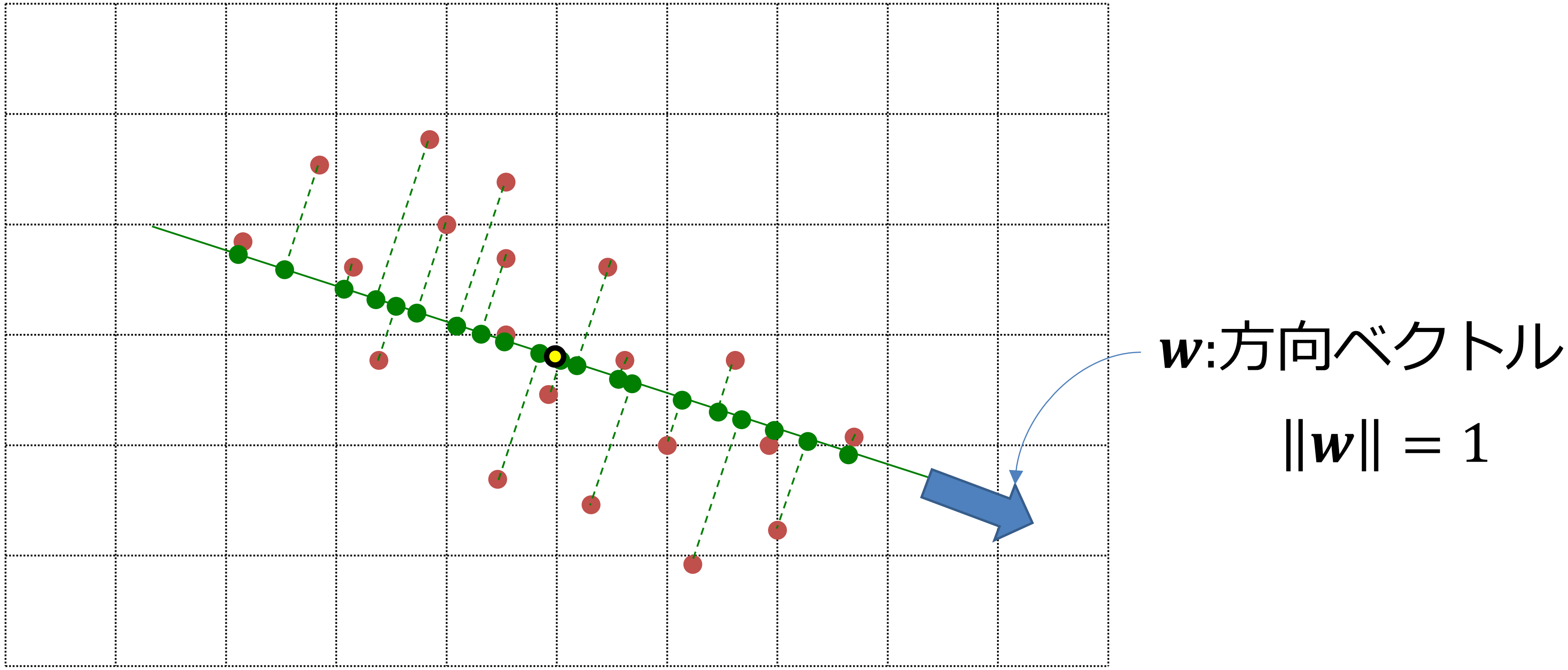
◆ 次元を増やすたびに，周囲にクラスを定めていない未知の空間が，幾何級数的に増加する。

主成分分析



- R^2 の空間に分布するデータが与えられたとする。

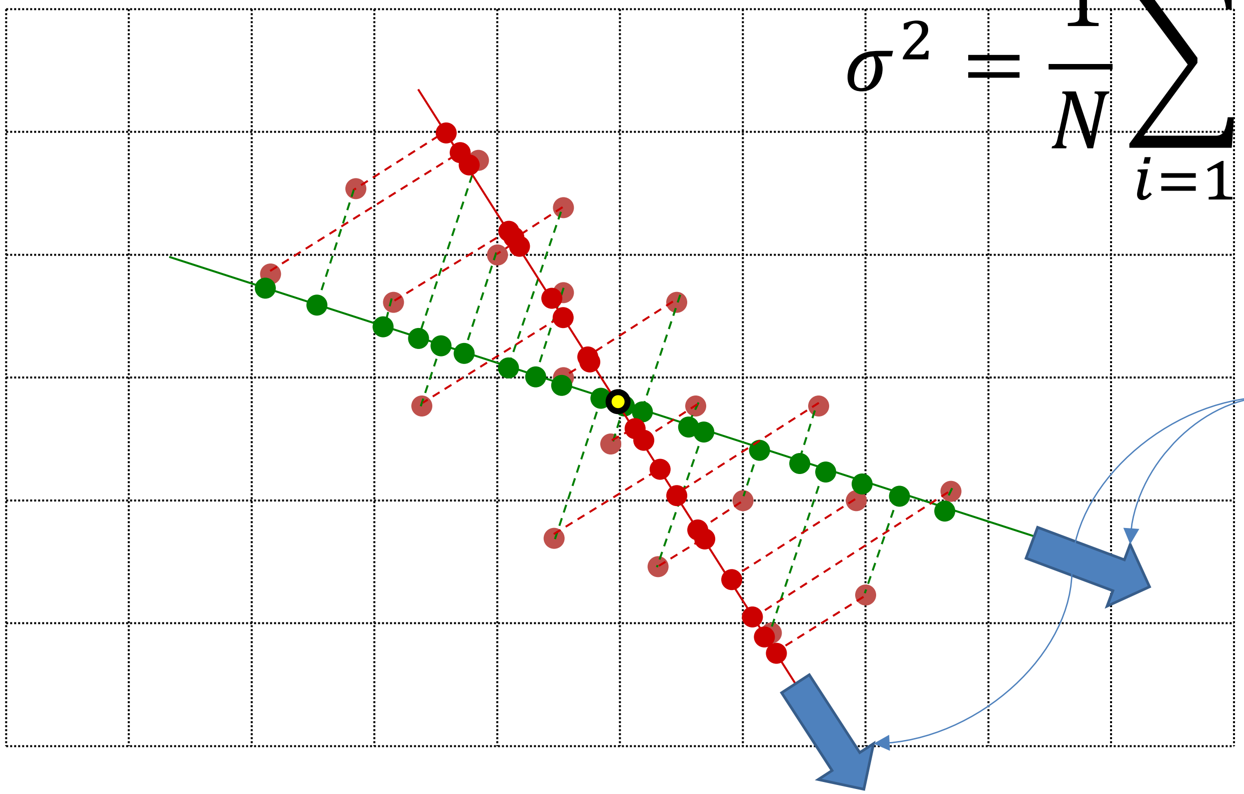
主成分分析



- この 空間上に分布するデータを，直線状の部分空間に写像することを考える。

主成分分析

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle \boldsymbol{x}_i{}^T\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_i{}^T\boldsymbol{w}\rangle$$



$\boldsymbol{w}$:方向ベクトル

$\|\boldsymbol{w}\| = 1$

- 部分空間を変えれば，部分空間上での分散が変わる。
- 最も，射影成分の分散の大きくなる部分空間を求めたい !!
- ただし，$\|\boldsymbol{w}\| = 1$　でなければならない !!

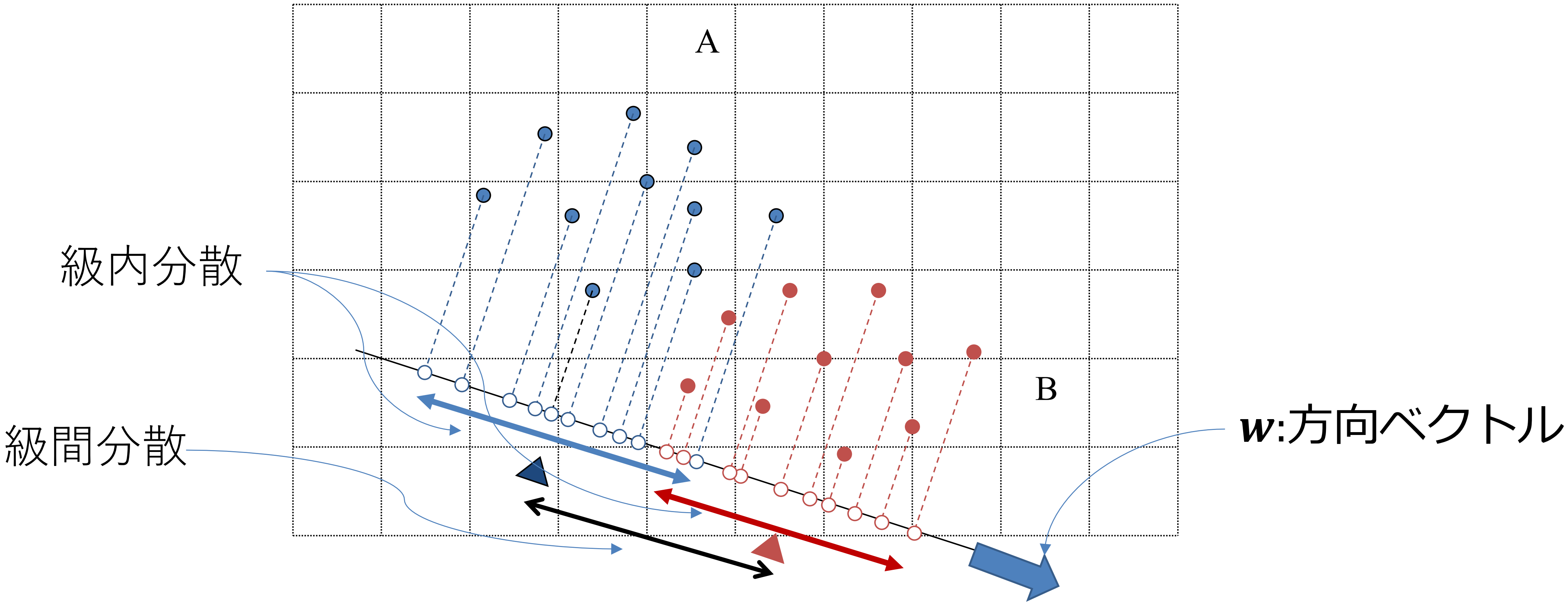
主成分分析の問題

問題は，$\|\boldsymbol{w}\| = 1$ を満たす $\boldsymbol{w}$ で，$\boldsymbol{x}_i$ と$\boldsymbol{w}$の内積の総和 を最大化すること。

$$\max_{\boldsymbol{w}} \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{x}_i{}^T \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_i{}^T \boldsymbol{w} \rangle$$

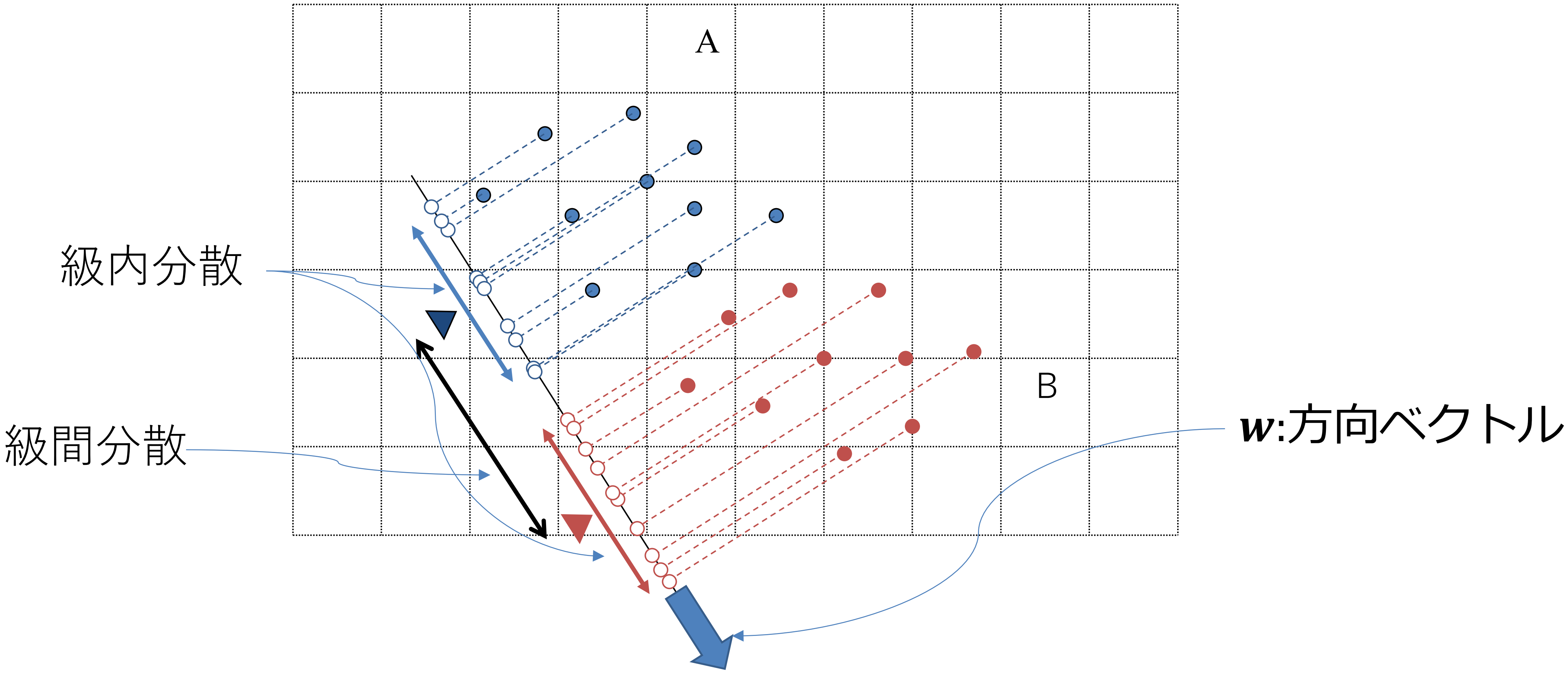
$$\mathrm{s.t.}\ \|\boldsymbol{w}\| = 1$$

線形判別分析



- 分布するデータを，直線状の部分空間に写像する。
- ここで，分離度＝級間分散／級内分散　を考える。
- 分離度が大きければ，ふたつのクラスの認識は容易。

線形判別分析



- 分離度は，射影の方向ベクトルに依存して決まる。
- 分離度を最大化する方向ベクトルを求めたい!!

線形判別分析の問題

- 問題は， $\boldsymbol{w}$ で 分離度を最大化すること

$$\max_{\boldsymbol{w}} 分離度(\boldsymbol{w}) = \max_{\boldsymbol{w}} \frac{級間分散(\boldsymbol{w})}{級内分散(\boldsymbol{w})}$$

- この問題は，級内分散一定の下で級間分散を最大化する問題と等価

$$\max_{\boldsymbol{w}} 級間分散(\boldsymbol{w})$$
$$s.t.\ 級内分散(\boldsymbol{w}) = 定数$$

本章の目的

- パターン認識で必要となる次元圧縮には，等式制約付きの最適化の問題として定式化されるものが多い。
- まず，等式制約付き最適化問題を解く常套手段としてラグランジュの未定乗数法を学び，
- ついで，主成分分析，線形判別分析等の代表的な線形次元圧縮法，およびその発展型について学ぶ。