(I) **次の関数について, 下の各問に答えよ.**

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & (x < 1) \\ 2x^2 - 3x + 1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

問

1. $x < 1$ のとき, $f'(x) = 3x^2 - 2x,\ f''(x) = 6x - 2,\ f'''(x) = 6, f^{(4)}(x) = 0$

2. $x > 1$ のとき, $f'(x) = 4x - 3,\ f''(x) = 4,\ f'''(x) = 0, f^{(4)}(x) = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 - 1 = 0,\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 - 3 + 1 = 0$
$\displaystyle\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$
また, $\displaystyle f(1) = 0 = \lim_{x\to 1} f(x)$ より f は $x = 1$ で連続である.

4. $f'(1)$ は存在するか. 存在する場合はその値を求めよ. また, 関数 f' は $x = 1$ で連続か.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\{(1+h)^3 - (1+h)^2\} - 0}{h} = 1$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1\} - 0}{h} = 1$
よって, $f'(1)$ は存在し, $f'(1) = 1$. さらに,
$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to 1+0} f'(x) = 1$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f'(x) = 1 = f'(1)$ より,
f'は $x = 1$ で連続である.

5. $f''(1), f'''(1), f^{(4)}(1)$ は存在するか. 存在する場合はそれぞれ値を求めよ. また, 関数 $f'', f''', f^{(4)}$ は $x = 1$ で連続か.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{\{3(1+h)^2 - 2(1+h)\} - 1}{h} = 4$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{\{4(1+h) - 3\} - 1}{h} = 4$
よって, $f''(1) = 4$, f''は $x = 1$ で連続.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{\{6(1+h) - 2\} - 4}{h} = 6$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{4 - 4}{h} = 0$
よって, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h}$ が存在しないので $f'''(1)$ は存在しない.
したがって, f'''は $x = 1$ で不連続.
よって, $f^{(4)}(1)$ は存在しない. $f^{(4)}$は $x = 1$ で不連続.

6. $y = f(x)$ の増減凹凸表を書き, 極値を求めよ.

(1) $f'(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } \frac{2}{3}$

$x > 1$ のとき, $4x - 3 = 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f'(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

(2) $f''(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $6x - 2 = 2(3x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$x > 1$ のとき, $4 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f''(1) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

(3) $f(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x > 1$ のとき, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$

(4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

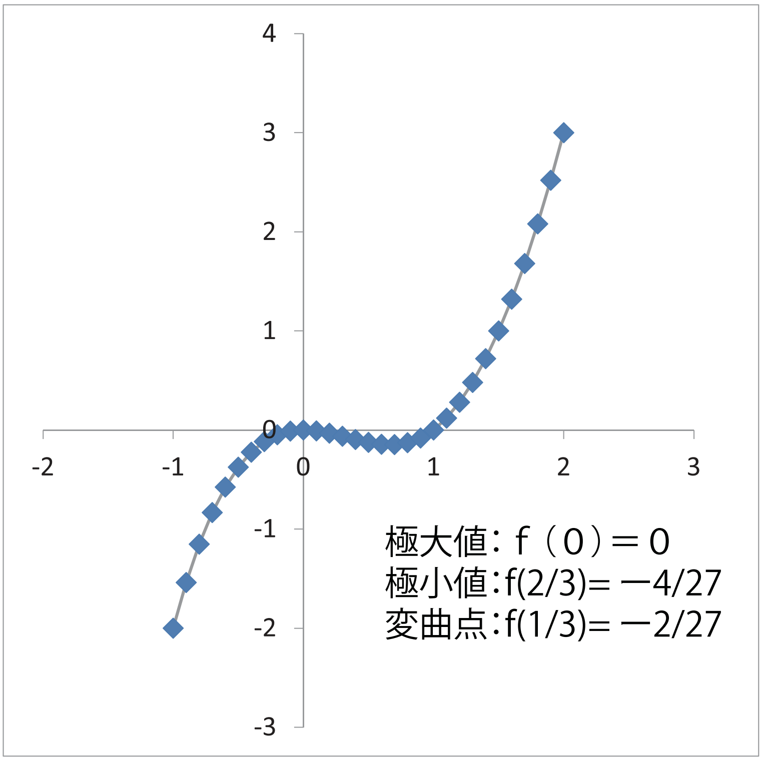
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

増減凹凸表

x	$-\infty$	$\leftarrow$	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	1	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	4	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\swarrow$	0		$-\frac{2}{27}$		$-\frac{4}{27}$		0	$\nearrow$	$+\infty$
f		$\nearrow$ $\cap$	極大値 $\cap$	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ 変曲点	$\searrow$ $\cup$	極小値 $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	

増減凹凸表から 極大値：$f(0) = 0$，　極小値：$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

7. $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.



(2)

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2+1 & (x<1)\\ 1 & (x=1)\\ -2x^2+3x & (x>1)\end{cases}$$

問

1. $x<1$ のとき, $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
   $f'(x)=-3x^2+2x$, $f''(x)=-6x+2$

2. $x>1$ のとき, $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
   $f'(x)=-4x+3$, $f''(x)=-4$

3. 定義に従って $f'(1)$, $f''(1)$ を求めよ.

   微分の定義から $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ である.
   右側極限 $a_1=\lim_{h\to +0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ と左側極限 $a_2=\lim_{h\to -0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ が存在し,
   かつ $a_1=a_2$ のとき, 極限 $a=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ が存在し, $a=a_1(=a_2)$ である.
   a_1, a_2 は, $a_1=\lim_{h\to +0}\dfrac{\{-2(1+h)^2+3(1+h)\}-1}{h}=-1$

$a_2 = \lim_{h \to -0} \dfrac{\{-(1+h)^3 + (1+h)^2 + 1\} - 1}{h} = -1$　より $a_1 = a_2$であるから, $f'(1) = -1$ である.

$f''(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ である.

$$\lim_{h \to +0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\{-4(1+h) + 3\} - (-1)}{h} = -4$$
$$\lim_{h \to -0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{\{-3(1+h)^2 + 2(1+h)\} - (-1)}{h} = -4$$

よって, $f''(1) = -4$

4. $y = f(x)$ の増減表を書き, 極値を求めよ.
   $f'(x) = 0$ となる x を求める.
   $x < 1$ のとき, $f'(x) = -3x^2 + 2x = -x(3x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $\frac{2}{3}$
   $x = 1$ のとき, $f'(x) = -1 (\neq 0) \Rightarrow$ 解なし.
   $x > 1$ のとき, $f'(x) = -4x + 3 = 0 \Rightarrow$ 解なし.

増減表

x	$-\infty$	$\leftarrow$	0		$\frac{2}{3}$	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ $\nwarrow$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	$\searrow$ $-\infty$

増減表より $f(0) = 1$ は極小値, $f(\frac{2}{3}) = \frac{31}{27}$ は極大値.

(注) 増減表の代わりに $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0) = 1$ は極小値.
$f''(\frac{2}{3}) = -2 < 0 \Rightarrow f(\frac{2}{3}) = \frac{31}{27}$は極大値と解答してもよい.

(3)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8 & (x < -1) \\ 5 & (x = -1) \\ -3x^2 - 18x - 10 & (x > -1) \end{cases}$$

問

1. $x < -1$ のとき, $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
   $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, $f''(x) = 12x + 6$

2. $x > -1$ のとき, $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.
   $f'(x) = -6x - 18$, $f''(x) = -6$

3. $f'(-1)$, $f''(-1)$ を求めよ.

$$\lim_{h\to -0}\frac{\{2(-1+h)^3+3(-1+h)^2-12(-1+h)-8\}-5}{h}=-12$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{\{-3(-1+h)^2-18(-1+h)-10\}-5}{h}=-12$$

よって, $f'(-1)=-12$ である.

$$\lim_{h\to -0}\frac{f'(-1+h)-f'(-1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\{6(-1+h)^2+6(-1+h)-12\}-(-12)}{h}=-6$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f'(-1+h)-f'(-1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{\{-6(-1+h)-18\}-(-12)}{h}=-6$$

よって, $f''(-1)=-6$ である.

4. $y=f(x)$ の増減表を書き, 極値を求めよ.

$f'(x)=0$ となる x を求める.

$x<-1$ のとき, $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)=0\Rightarrow x=-2$

$x=-1$ のとき, $f'(x)=-12(\neq 0)\Rightarrow$ 解なし.

$x>-1$ のとき, $f'(x)=-6x-18=-6(x+3)=0\Rightarrow$ 解なし.

増減表

x	$-\infty$	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\swarrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

増減表より f(-2)=12 は極大値.

(注) 増減表の代わりに $f''(-2)=-18<0\Rightarrow f(-2)=12$ は極大値と解答してもよい.

(II) 関数の極限 (Limit) を求めよ.

(lim-1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-e^{-x}+1} \quad \leftarrow \text{L'Hospital}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^{-x}} \quad \leftarrow \text{L'Hospital}\\&=\frac{2}{1}\\&=2\end{aligned}$$

(lim-2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-2x+2\log(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x-2+2\cdot\frac{1}{(1+x)}\cdot 1} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2+2\cdot(-1)(1+x)^{-2}\cdot 1} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6}{2\cdot(-1)(-2)(1+x)^{-3}\cdot 1} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \frac{6}{4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

(lim-3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)}{2x} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

あるいは
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)}{2x} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)\cdot(2x)+\left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\right)}{2} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 0\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 2}{2} \\
&= \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(lim-4)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1-x)-e^{-x}+1} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{-1}{1-x}+e^{-x}} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(-1)\cdot(1-x)^{-1}+e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(-1)\cdot(-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1)-e^{-x}} \quad \leftarrow \text{L}'\text{Hospital} \\
&= \frac{2}{-1-1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

(III) **関数の極値 (Extremum) を求めよ.**

(extr-1)

$$f(x)=\sqrt{x}-\log x \quad (x>0) \text{ のとき},$$
$$f(x)=\sqrt{x}-\log x = x^{\frac{1}{2}}-\log x$$
$$f'(x)=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{x}=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$$
$$f''(x)=\tfrac{1}{2}\cdot(-\tfrac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}-(-1)x^{-2}=-\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}$$
$$f'(x)=\tfrac{1}{2\sqrt{x}}-\tfrac{1}{x}=\tfrac{\sqrt{x}}{2x}-\tfrac{2}{2x}=\tfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$
$$f''(4)=-\tfrac{1}{4}\cdot 4^{-\frac{3}{2}}+4^{-2}=-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{4^3}}+\tfrac{1}{4^2}=-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{-1+2}{32}>0 \Rightarrow f(4) \text{ は極小値.}$$
$$f(4)=2-\log 4 : \text{極小値.}$$

(注) 増減表から求めてもよい.

<u>増減表</u>

x	$+0$	$\leftarrow$	4	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \nwarrow$	$\searrow$	$2-\log 4$	$\nearrow$	$\nearrow +\infty$

増減表より $f(4)=2-\log 4$ は極小値.4

(extr-2)

$$f(x)=e^{1+x^2} \text{ のとき},$$
$$f'(x)=e^{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=2xe^{1+x^2}$$
$$f''(x)=(2x)'e^{1+x^2}+2x(e^{1+x^2})'$$
$$=2e^{1+x^2}+(2x)(2x)e^{1+x^2}$$
$$=(2+4x^2)e^{1+x^2}$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$f''(0)=2e>0 \Rightarrow f(0) \text{ は極小値}.f(0)=e^1=e : \text{極小値.}$$

(注) 増減表から求めてもよい.

<u>増減表</u>

x	$-\infty$	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \nwarrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\nearrow +\infty$

増減表より $f(0)=e$ は極小値.

(extr-3)

$$f(x) = \log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0) \text{ のとき},$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log x + x^{-\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{x} + (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} \\
&= x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}} \\
f''(x) &= (-1)x^{-2} - (\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} \\
&= -x^{-2} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \to \sqrt{x} = \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{4}$$

$$f''(\frac{1}{4}) = -16 + \frac{3}{4} \cdot 32 = -16 + 24 > 0 \to f(\frac{1}{4}) : \text{極小値}$$

$$f(\frac{1}{4}) = \log(\frac{1}{4}) + 2 = -2\log 2 + 2 : \text{極小値}$$

(注) 増減表から求めてもよい.

増減表

x	$+0$	$\leftarrow$	$\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty(*) \nwarrow$	$\searrow$	$-2\log 2 + 2$	$\nearrow$	$\nearrow +\infty$

増減表より $f(\frac{1}{4}) = -2\log 2 + 2$ は極小値.

(*) $f(x) = \log x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ である.

$$\lim_{x \to +0} \left(\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}\log x + 1}{\sqrt{x}}$$

ここで, $\displaystyle \lim_{x \to +0} (\sqrt{x}\log x) = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$ ←L'Hospital

$\displaystyle = \lim_{x \to +0} (-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x}) = -0$ であるから, $\displaystyle \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}\log x + 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{0 + 1}{\sqrt{x}} = +\infty$

(extr-4)

$$f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}} \text{ のとき},$$

$$f(x) = e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]' \\
&= e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' \\
&= e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) = e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} &\cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
&+ e^{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot [\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \cdot 2x + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2]
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \to x = 0$$

$$f''(0) = 0 + e[0+1] = e > 0 \to f(0) : \text{極小値}$$

$$f(0) = e : \text{極小値}$$

(注) 増減表から求めてもよい.

増減表

x	$-\infty$	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ $\nwarrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\nearrow$ $+\infty$

増減表より $f(0) = e$ は極小値.

(IV) **下の各問に答えよ.**

労働投入量 $\ell(>0)$ だけの関数 $y = f(\ell)$ を生産関数とする. y は財の産出量である. いま, 労働力 1 単位あたりの賃金を w, 資本投入にかかる固定費用を C とする. また, 財は販売価格 p ですべて売れるものとする. このとき, 次の各問に答えよ.

$f(\ell)=\ell^{\frac{2}{3}}, p=4, w=2, C=10$ のとき,利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ.
また,最適労働投入量 ℓ^*とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-1)
$$\pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=4\ell^{\frac{2}{3}}-2\ell-10$$
$$\pi'(\ell)=4\cdot\tfrac{2}{3}\ell^{-\frac{1}{3}}-2=\tfrac{8}{3}\ell^{-\frac{1}{3}}-2,\ \ \pi''(\ell)=-\tfrac{8}{9}\ell^{-\frac{4}{3}}<0$$
$$\pi'(\ell)=0\Leftrightarrow\frac{8}{3\sqrt[3]{\ell}}=2$$
$$\ell^*=(\tfrac{4}{3})^3=\tfrac{64}{27}$$
$$y^*=f((\tfrac{4}{3})^3)=(\tfrac{4}{3})^2=\tfrac{16}{9}$$
(注) $f'(\ell)=\frac{2}{3}\ell^{-\frac{1}{3}}>0,\ \ f''(\ell)=-\frac{2}{9}\ell^{-\frac{4}{3}}<0$
すなわち,f は単調増加で上に凸な関数である.

$f(\ell)=\ell^{\frac{4}{5}}, p=25, w=3, C=10$ のとき,利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ.
また,最適労働投入量 ℓ^*とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-2)
$$\pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=25\ell^{\frac{4}{5}}-3\ell-10$$
$$\pi'(\ell)=20\ell^{-\frac{1}{5}}-3,\ \ \pi''(\ell)=-4\ell^{-\frac{6}{5}}<0$$
$$\pi'(\ell)=0\Leftrightarrow 20\ell^{-\frac{1}{5}}=3\Leftrightarrow\sqrt[5]{\ell}=\tfrac{20}{3}$$
$$\Leftrightarrow\ell=\tfrac{20^5}{3^5}=\tfrac{3200000}{243}$$
$$\ell^*=\tfrac{20^5}{3^5}$$
$$y^*=f(\tfrac{20^5}{3^5})=\tfrac{20^4}{3^4}=\tfrac{160000}{81}$$
(注) $f'(\ell)=\frac{4}{5}\ell^{-\frac{1}{5}}>0,\ \ f''(\ell)=-\frac{4}{25}\ell^{-\frac{6}{5}}<0$
すなわち,f は単調増加で上に凸な関数である.

$f(\ell)=\ell^{\frac{1}{4}}, p=2, w=4, C=10$ のとき,利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ.
また,最適労働投入量 ℓ^*とそのときの生産量 y^*(y の最大値) を求めよ.

(eco-3)
$$\pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=2\ell^{\frac{1}{4}}-4\ell-10$$
$$\pi'(\ell)=\tfrac{1}{2}\ell^{-\frac{3}{4}}-4,\ \ \pi''(\ell)=-\tfrac{3}{8}\ell^{-\frac{7}{4}}<0$$
$$\pi'(\ell)=0\Leftrightarrow\tfrac{1}{2}\ell^{-\frac{3}{4}}=4\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[4]{\ell}^3}=8$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[4]{\ell}^3=\tfrac{1}{2^3}$$
$$\Leftrightarrow\ell^3=\tfrac{1}{(2^3)^4}=\tfrac{1}{(2^4)^3}\Leftrightarrow\ell=\tfrac{1}{2^4}=\tfrac{1}{16}$$
$$\ell^*=\tfrac{1}{16}$$
$$y^*=f(\tfrac{1}{16})=\tfrac{1}{2}$$
(注) $f'(\ell)=\frac{1}{4}\ell^{-\frac{3}{4}}>0,\ \ f''(\ell)=-\frac{3}{16}\ell^{-\frac{7}{4}}<0$
すなわち,f は単調増加で上に凸な関数である.

(eco-4)

$f(\ell)=\ell^{\frac{2}{3}}, w=2, C=10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).

$$\pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=p\cdot\ell^{\frac{2}{3}}-2\ell-10$$
$$\pi'(\ell)=\tfrac{2}{3}p\ell^{-\frac{1}{3}}-2,\ \ \pi''(\ell)=-\tfrac{2}{9}p\ell^{-\frac{4}{3}}<0$$
$$\pi'(\ell)=0\Leftrightarrow\tfrac{2p}{3\sqrt[3]{\ell}}=2$$
$$\ell^*=(\tfrac{p}{3})^3=\tfrac{p^3}{27}$$
$$y^*(p)=f((\tfrac{p}{3})^3)=(\tfrac{p}{3})^2=\tfrac{p^2}{9}$$

(注) 利潤が最大化されているときの ℓ を $y\,(=y^*)$ で表わし, 費用関数を求め, それから供給関数を求めることもできる.

$y=f(\ell)=\ell^{\frac{2}{3}}$ より $\ell=y^{\frac{3}{2}}$

費用関数は, $C(y)=w\ell+\overline{C}=2y^{\frac{3}{2}}+10$

$\to C'(y)=3y^{\frac{1}{2}}(=p)$

$C''(y)=\frac{3}{2}y^{-\frac{1}{2}}>0$

利潤関数は, $\pi(y)=p\cdot y-w\ell-\overline{C}=p\cdot y-2y^{\frac{3}{2}}-\overline{C}$

$\pi'(y)=p-3y^{\frac{1}{2}}=0\ \left(,\ \pi''(y)=-\frac{3}{2}y^{-\frac{1}{2}}<0\right)$

$\to p=3y^{\frac{1}{2}}\to y^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{p}{3}\right)\to y=\left(\frac{p}{3}\right)^2$

(eco-5)

$f(\ell)=\ell^{\frac{4}{5}}, w=3, C=10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).

$$\pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=p\cdot\ell^{\frac{4}{5}}-3\ell-10$$
$$\pi'(\ell)=\tfrac{4}{5}p\ell^{-\frac{1}{5}}-3,\ \ \pi''(\ell)=-\tfrac{4}{25}p\ell^{-\frac{6}{5}}<0$$
$$\pi'(\ell)=0\Leftrightarrow\tfrac{4}{5}p\ell^{-\frac{1}{5}}=3\Leftrightarrow\tfrac{p}{\sqrt[5]{\ell}}=\tfrac{15}{4}\Leftrightarrow\sqrt[5]{\ell}=\tfrac{4p}{15}$$
$$\ell^*=(\tfrac{4p}{15})^5=\tfrac{1024p^5}{759375}$$
$$y^*(p)=f((\tfrac{4p}{15})^5)=(\tfrac{4p}{15})^4=\tfrac{256p^4}{50625}$$

(注) 利潤が最大化されているときの ℓ を $y\,(=y^*)$ で表わし, 費用関数を求め, それから供給関数を求めることもできる.

$y=f(\ell)=\ell^{\frac{4}{5}}$ より $\ell=y^{\frac{5}{4}}$

費用関数は, $C(y)=w\ell+\overline{C}=3y^{\frac{5}{4}}+10$

$\to C'(y)=\frac{15}{4}y^{\frac{1}{4}}(=p)$

$C''(y)=\frac{15}{16}y^{-\frac{3}{4}}>0$

利潤関数は, $\pi(y)=p\cdot y-w\ell-\overline{C}=p\cdot y-3y^{\frac{5}{4}}-\overline{C}$

$\pi'(y)=p-\frac{15}{4}y^{\frac{1}{4}}=0\ \left(,\ \pi''(y)=-\frac{15}{16}y^{-\frac{3}{4}}<0\right)$

$\to p=\frac{15}{4}y^{\frac{1}{4}}\to y^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{4p}{15}\right)\to y=\left(\frac{4p}{15}\right)^4$

$f(\ell) = \ell^{\frac{1}{4}}, w = 4, C = 10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ (y^*を p の関数として表わせ).

(eco-6)

$$\begin{aligned}
\pi(\ell) &= p \cdot f(\ell) - w\ell - C = p \cdot \ell^{\frac{1}{4}} - 4\ell - 10 \\
\pi'(\ell) &= \tfrac{1}{4}p\ell^{-\frac{3}{4}} - 4,\ \ \pi''(\ell) = -\tfrac{3}{16}p\ell^{-\frac{7}{4}} < 0 \\
\pi'(\ell) = 0 &\Leftrightarrow \tfrac{p}{\sqrt[4]{\ell^3}} = 16 \\
&\Leftrightarrow \sqrt[4]{\ell^3} = \tfrac{p}{16} \\
&\Leftrightarrow \ell^3 = (\tfrac{p}{16})^4 \\
\ell^* &= \frac{p^{\frac{4}{3}}}{16^{\frac{4}{3}}} \\
y^*(p) &= f(\frac{p^{\frac{4}{3}}}{16^{\frac{4}{3}}}) = \frac{p^{\frac{1}{3}}}{16^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

(注) 利潤が最大化されているときの ℓ を $y\,(= y^*)$ で表わし, 費用関数を求め, それから供給関数を求めることもできる.

$y = f(\ell) = \ell^{\frac{1}{4}}$ より $\ell = y^4$

費用関数は, $C(y) = w\ell + \overline{C} = 4y^4 + 10$

$\rightarrow C'(y) = 16y^3 (= p)$

$C''(y) = 48y^2 > 0$

利潤関数は, $\pi(y) = p \cdot y - w\ell - \overline{C} = p \cdot y - 4y^4 - \overline{C}$

$\pi'(y) = p - 16y^3 = 0\ \big(,\ \pi''(y) = -48y^2 < 0\big)$

$\rightarrow p = 16y^3 \rightarrow y^3 = \frac{p}{16} \rightarrow y = \big(\frac{p}{16}\big)^{\frac{1}{3}}$