統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

- Bayes の定理
  - 3枚のコインの問題
  - Bayes の定理
  - Bayes の定理の応用

3枚のコインの問題(1)

- 箱の中に、3枚のコインがある
  - HH（両面とも表の刻印）
  - HT（片面に表、もう片面に裏の刻印）
  - ＴＴ（両面とも裏の刻印）
- 箱をよく振ってから、どのコインが取られたかを分からないようにして1枚を取り出し、机上に置いたら表の刻印であった。
- 取り出したコインがHHである確率は？

3枚のコインの問題(2)

- よくある誤答
  - コインは3種類ある。
  - T Tでないことは確実だ。
  - 残るは HH と HT の2種類である。
  - どちらのコインも五分五分で取り出された。
    - でたらめに取っているのだから、
  - したがって、HHである確率は 1/2 だ。

3枚のコインの問題(3)

- Bayesの定理による解答
  - 記号
    - H_1= {取り出したコインがHH}
    - H_2= {取り出したコインがHT}
    - H_3= {取り出したコインがT T}
    - A = {片面が表の刻印}

3枚のコインの問題(3)

– 利用可能な条件
  - $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$
    （どのコインも同じ確率で取り出される）
  - 条件つき確率
    – $P(A|H_1) = 1$（HH を取ったら、表の出る確率1）
    – $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$（HT を取ったら、表の出る確率1/2）
    – $P(A|H_3) = 0$（T T を取ったら、表の出る確率0）

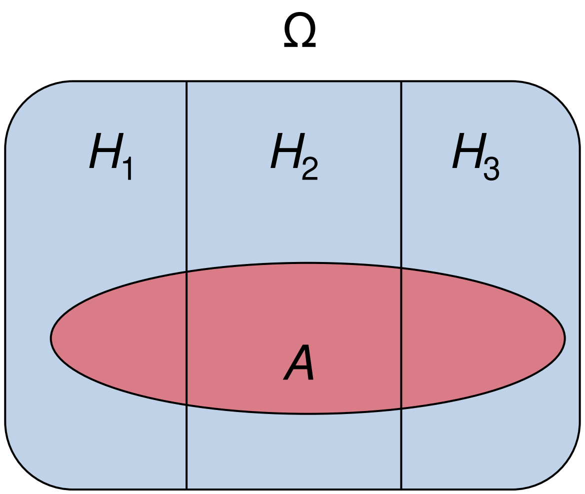
3枚のコインの問題(4)

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(H_1 \cap A)}{P\left((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup (H_3 \cap A)\right)}$$

$$= \frac{P(H_1 \cap A)}{P(H_1 \cap A) + P(H_2 \cap A) + P(H_3 \cap A)}$$

$$= \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3)}$$



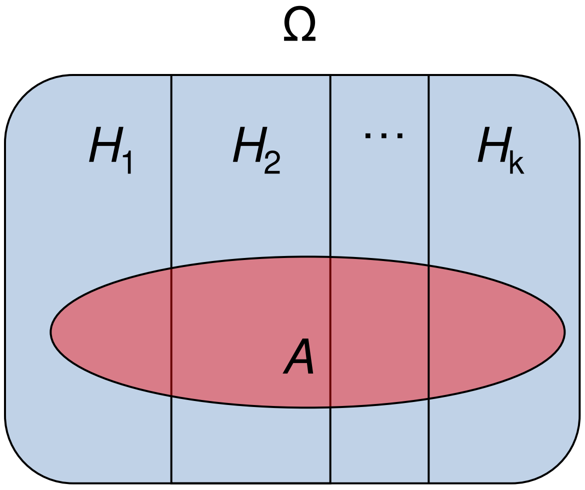
3枚のコインの問題(5)

$$
= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0}
$$

$$
= \frac{2}{3}
$$

Bayesの定理(1)

- Bayes の定理
  - 前提:
    - 標本空間が $H_1, H_2, \ldots, H_k$ に分割されている。
      - つまり: $H_i \cap H_j = \emptyset \; (i \neq j)$ かつ $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_k$
    - $P(H_i) \; (i = 1, 2, \ldots, k)$ が既知
    - $P(A|H_i) \; (i = 1, 2, \ldots, k)$ が既知
  - このとき
    - $P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A|H_j)}$



Bayesの定理(2)

$$左辺 = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(H_i \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_k \cap A))}$$

$$= \frac{P(H_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j \cap A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$

Bayesの定理(3)

- Bayesの定理の有用性
  - H_i : 原因となるような事象
  - A : 結果となるような事象
  - 3つの条件（満たされる場合が少なくない）
    - 原因がすべてわかっている。
    - おのおのの原因がどの程度の可能性で発生するかは既知。
    - 原因H_iのもとで、結果Aがどの程度の可能性で発生するかも既知。

Bayesの定理(4)

- これらの条件がそろえば、結果Aの発生を与件として原因H_iの発生確率を数値的に評価できる。
  - 結果から原因について判断できる。
- $P(H_i)$（事前確率）を観察された事実Aによって、あらたな値$P(H_i|A)$（事後確率）へと更新する、とも読める。
  - $P(H_i) \underset{\uparrow \atop A}{\rightarrow} P(H_i|A) \underset{\uparrow \atop B}{\rightarrow} P(H_i|A \cap B)$

Bayes の定理の応用(1)

- ある大学の入学試験
  - 模試の判定がAであったら
    - 合格率95%
  - 模試の判定がそれ以外であったら
    - 合格率30%
  - 入試の受験者における模試判定の人数比
    - A : それ以外 = 10:90

Bayes の定理の応用(2)

- 問題:
  - 合格者のうち、模試の判定がAであるものの割合（確率）は？
- 記号の整理:
  - H_1: 受験者の模試の判定がAである。
  - H_2: 受験者の模試の判定がA以外である。
  - D: 入学試験に合格する。
  - 求めるべき確率: $P(H_1|D)$

Bayes の定理の応用(3)

- あたえられた条件の整理
  - $P(H_1) = 0.1; P(H_2) = 0.9$
  - $P(D|H_1) = 0.95; P(D|H_2) = 0.3$
- Bayes の定理の適用
  - $P(H_1|D) = \frac{P(H_1)P(D|H_1)}{P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)}$

$$= \frac{0.1 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.3} = 0.26$$

Bayes の定理の応用(4)

- 直感と違う？
  - A判定者なら合格率95%なら、合格者に占めるA判定者の割合がもっと高いはずだ。
  - 入試の合否は、A判定者を見つけるうえで、一定の効果はある。
    - $P(H_1) = 0.1; P(H_1|D) = 0.26$
  - なぜ、想像以上に低いと感じるのか。
    - 「A判定者以外の数が圧倒的に多い」ことが理由。

Bayesの定理の応用(5)

Bayes の定理の応用(6)

- 3つのドアの問題（Let’s make a deal）
  - 閉じられたドアが3つある。
    - そのうちの1つの裏には車、残りの2つの裏にはヤギが隠されている。
    - 回答者（あなた）は自分が選んだドアの裏に隠してあるものをもらえる。

Bayes の定理の応用(7)

- 回答者（あなた）が1番のドアを選んだ。
- 司会者が3番のドアを開けて、ヤギが入っていることを回答者に見せた。
  - 司会者は車を隠してあるドアを知っている。
    - 車の隠してあるドアは絶対に開けない。
- 司会者いわく:「1番のドアから2番のドアに変えてもいいですけれども、変えますか？」
- 回答者（あなた）はドアを変えるべきか？

Bayesの定理の応用(8)

- 記号の整理
  - H_1 : 1番目のドアの後ろに車がある。
  - H_2 : 2番目のドアの後ろに車がある。
  - H_3 : 3番目のドアの後ろに車がある。
  - A : 司会者が3番目のドアを開ける。
- 確率に関する想定
  - 事前確率
    - $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$
      - » 回答者は、どのドアの後ろに車があるか知らないので、ドアを無作為に選ぶ。

Bayes の定理の応用(9)

- 条件つき確率
  - $P(A|H_1) = \frac{1}{2}$
    - 1番目のドアの後ろに車があるとき、司会者の開けるドアが2つ（2番目と3番目）あるので、司会者はどちらかのドアを無作為に開く。
  - $P(A|H_2) = 1$
    - 2番目のドアの後ろに車があるとき、司会者の開けるドアが3番目しかないので、司会者は必ず3番目のドアを開ける。
  - $P(A|H_3) = 0$
    - 3番目のドアの後ろに車があるとき、司会者は絶対に3番目のドアを開けない。

Bayes の定理の応用(10)

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{\frac{1}{3} \times 0}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = 0$$