統計学II

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

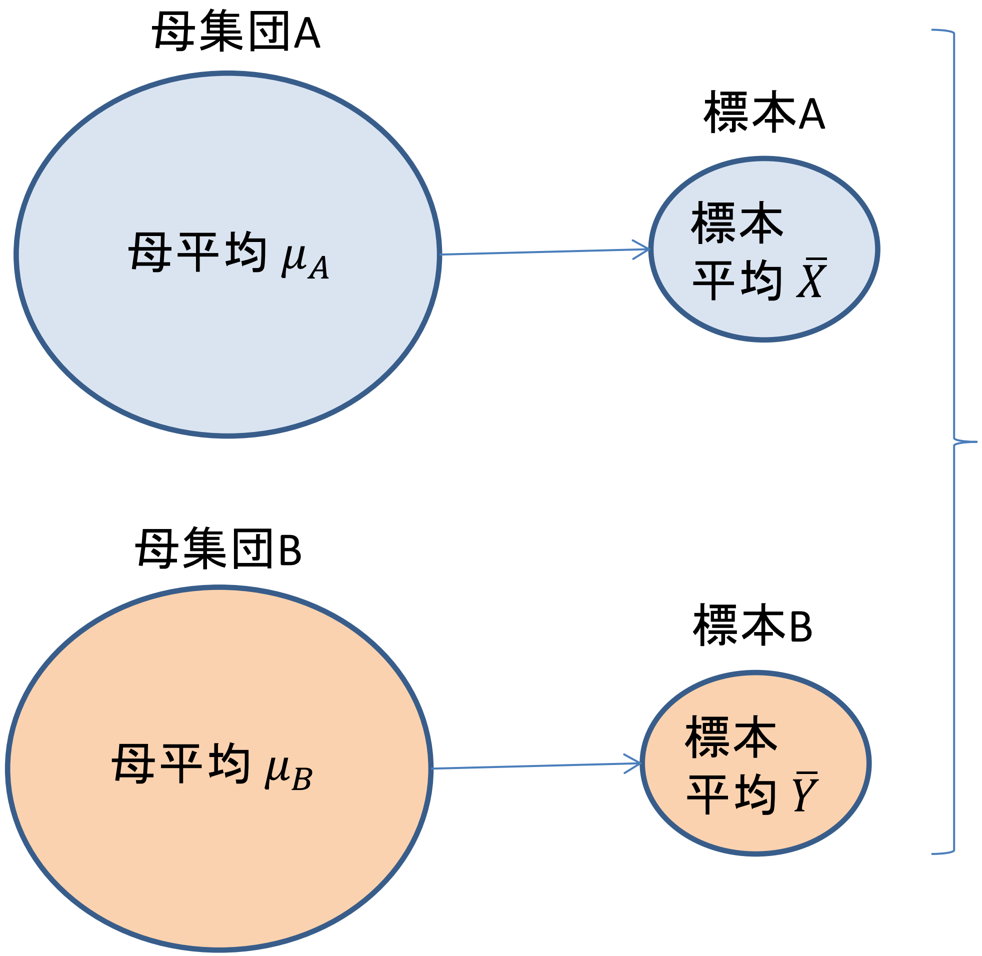
本日の目標

- 2標本問題
- 母平均の差の検定
- 成功確率（母比率）の差の検定
- 無作為割付

利用データについて

- JGSS2010、JGSS2000
  - 抽出実験に用いたデータは、東京大学社会科学研究所付属社会調査・データアーカイブ研究センターSSJデータアーカイブのリモート集計システムを利用し、同データアーカイブが所蔵する[JGSS2010, JGSS2000]の個票をデータを集計したものである。

2標本問題の例



標本情報から

$$\mu_A = \mu_B$$

であるかどうかを
判断したい。

たとえ

$$\bar{X} \neq \bar{Y}$$

であるとしても、

$$\mu_A \neq \mu_B$$

とは即断できない。

図1:2標本問題の例

母平均の差の検定(1)

- 2標本問題
  - 2つの独立標本
    - 標本A $X_i \sim_{iid} (\mu_A, \sigma_A^2)\ i = 1, 2, \dots, n.$
    - 標本B $Y_j \sim_{iid} (\mu_B, \sigma_B^2)\ j = 1, 2, \dots, m.$
  - 仮説の設定
    - $\begin{cases} H_0\colon \mu_A = \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B = 0 \\ H_1\colon \mu_A \neq \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B \neq 0 \end{cases}$

母平均の差の検定(2)

– 検定統計量と検定手続き（標本サイズが両方とも大きいとき）

- $T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n}+\frac{S_B^2}{m}}}\to_d N(0,1)$ （正規近似）
  - $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_j,S_A^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$ $S_B^2=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2$
- もし、H_0 が正しければ、$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n}+\frac{S_B^2}{m}}}\to_d N(0,1)$
- 両側検定（有意水準0.05）
  - もし、$|T|>1.96$ であれば、H_0を棄却する。

母平均の差の検定(3)

- 例：平均就労年数の差（p. 175)
  - 標本A：JGSS2010から、$n = 50$ の無作為標本
    - $\bar{X}_{obs} = 17.1, S^2_{A\ obs} = 211.9$
  - 標本B：JGSS2000から、$m = 50$ の無作為標本
    - $\bar{Y}_{obs} = 13.3, S^2_{B\ obs} = 107.4$
  - 検定統計量の値
    - $|T|_{obs} = \dfrac{|17.1 - 13.3|}{\sqrt{\frac{211.9}{50} + \frac{107.4}{50}}} = 1.50 < 1.96$
  - 検定の結果
    - H_0は棄却されない。
      - 平均就労年数に差があるとはいえない。

母平均の差の検定(4)

- 2標本問題（分散が等しい2つの正規母集団を想定した場合）
  - 2つの正規独立標本
    - 標本A $X_i \sim_{iid} N(\mu_A, \sigma^2)\ i = 1, 2, \dots, n.$
    - 標本B $Y_j \sim_{iid} N(\mu_B, \sigma^2)\ j = 1, 2, \dots, m.$
  - 仮説の設定
    - $\begin{cases} H_0\colon\ \mu_A = \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B = 0 \\ H_1\colon \mu_A \neq \mu_B \Leftrightarrow \mu_A - \mu_B \neq 0 \end{cases}$

母平均の差の検定(5)

– 検定統計量と検定手続き（標本サイズが両方とも大きいとき）

- $T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\sim t(n+m-2)$　　　（厳密に）
  - $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ \bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}Y_j,\ \hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2}{n+m-2}=\frac{(n-1)S_A^2+(m-1)S_B^2}{(n-1)+(m-1)}$
- もし、H_0 が正しければ、$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}\sim t(n+m-2)$
- 両側検定（有意水準0.05）
  - もし、$|T|>t_{0.025}(n+m-2)$ であれば、H_0を棄却する。

母平均の差の検定(6)

- 例：Karl Pearson の親子の身長（教科書と違う数値例）
  - 標本A：10人の父親の無作為標本
    - 63, 65, 66, 68, 70, 66, 64, 66, 71, 69.
    - $\bar{X}_{A\,obs} = 66.8, S^2_{A\,obs} = 6.84.$
  - 標本B：10人の息子の無作為標本
    - 71, 69, 67, 72, 64, 72, 70, 69, 74, 72.
    - $\bar{Y}_{B\,obs} = 70.0, S^2_{B\,obs} = 8.44.$
  - 検定統計量の値
    - $|T|_{obs} = \frac{|66.8-70.0|}{\sqrt{\frac{(10-1)6.84+(10-1)8.44}{10+10-2}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}} = 2.588 > t_{0.025}(10+10-2) = 2.101$
    - H_0 は棄却される。

成功確率（母比率）の差の検定(1)

- 2標本問題（Berunoulli分布の場合）
  - 2つの独立標本
    - 標本A $X_i \sim_{iid} Bernoulli(p_A)\ i = 1, 2, \ldots, n.$
    - 標本B $Y_j \sim_{iid} Bernoulli(p_B) j = 1, 2, \ldots, m.$
  - 仮説の設定
    - $\begin{cases} H_0\colon\ p_A = p_B \Leftrightarrow p_A - p_B = 0 \\ H_1\colon p_A \neq p_B \Leftrightarrow p_A - p_B \neq 0 \end{cases}$

成功確率（母比率）の差の検定(2)

– 検定統計量と検定手続き（標本サイズが両方とも大きいとき）

- $T = \dfrac{\hat{p}_A - \hat{p}_B - (p_A - p_B)}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n} + \frac{p_B(1-p_B)}{m}}} \sim N(0,1)$　（正規近似）
  - $\hat{p}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \hat{p}_B = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$
- もし、H_0 が正しければ、$p_A = p_B = p$ と記して
  $T = \dfrac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$

成功確率（母比率）の差の検定(3)

- p の推定（H_0が正しいとしたときの成功確率の推定）
  - $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j}{n+m} = \frac{n\hat{p}_A + m\hat{p}_B}{n+m}$
    - » 標本Aと標本Bを合併して求めた経験的成功確率
- 検定統計量と検定手続き（有意水準0.05）
  - $|T| = \frac{|\hat{p}_A - \hat{p}_B|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$
  - もし、$|T| > 1.96$ であれば、H_0 を棄却する。

成功確率（母比率）の差の検定(4)

- 例：2つの地域の罹患率（p. 180）
  - 2つの独立標本
    - 標本A：地域Aから無作為標本200人（罹患者50人）
    - 標本B：地域Bから無作為標本200人（罹患者65人）
  - 両地域で罹患率に差があるといえるか？
  - 検定統計量の値
    - $\hat{p}_{A\,obs} = \frac{50}{200}, \hat{p}_{B\,obs} = \frac{65}{200}, \hat{p}_{obs} = \frac{50+65}{200+200} = \frac{115}{400}$

成功確率（母比率）の差の検定(5)

- $|T|_{obs} = \dfrac{\left|\frac{50}{200} - \frac{65}{200}\right|}{\sqrt{\frac{115}{400}\left(1 - \frac{115}{400}\right)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200}\right)}} = 1.66 < 1.96$

– 検定の結果

- 両地域の罹患率に差があるとはいえない。

無作為割付(1)

- 例：インフルエンザと投薬
  - インフルエンザの薬
  - 患者が投薬を選べるとする。
  - 服用・非服用ごとの治癒の状況

表1a：重症の患者

	治癒	非治癒	合計
服用	40	40	80
非服用	0	20	20
合計	40	60	100

表1b：軽症の患者

	治癒	非治癒	合計
服用	20	0	20
非服用	60	20	80
合計	80	20	100

出所：狩野裕(2002)「構造方程式モデリング、因果推論、そして非正規性」（甘利俊一他(2002)『多変量解析の展開』岩波書店 91ページ。）

無作為割付(2)

- 全患者（重症＋軽症）における服用・非服用ごとの治癒の状況

表2：全患者

	治癒	非治癒	合計
服用	60	40	100
非服用	60	40	100
合計	120	80	200

  – 服用・非服用は治癒の状況と独立（薬に効き目がない）ように見える。
    » Simpson の逆説と呼ばれる。

無作為割付(3)

– 交絡変数

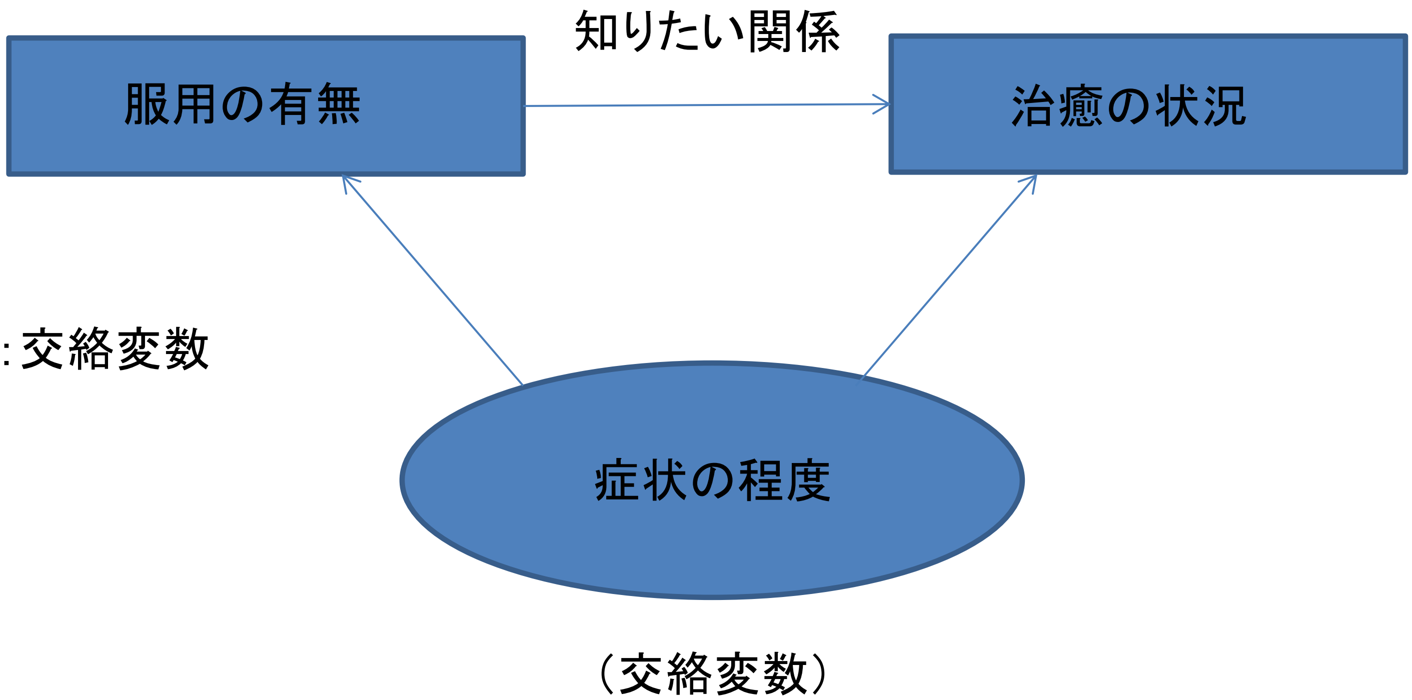


図2：交絡変数

無作為割付(4)

- 交絡変数の制御（調整）
  - 交絡変数が観察可能な場合
    - 直接的な調整
      - 例：グループ分け
  - 交絡変数が観察不可能な場合
    - 間接的な調整
      - 無作為割付
- 無作為割付
  - どの患者にも一定の確率で薬を投与する。
    - 例：五分五分の確率
      - 重症の患者にも五分五分の確率で投与される。
      - 軽症の患者にも五分五分の確率で投与される。
    - 投与するグループ（処置群）と投与しないグループ（制御群）とで、症状の分布がほぼ同じになる。

無作為割付(5)

– 無作為割付の結果
  - どの患者にも確率50%で薬を投与する。
  - 表1a, b の確率で治癒・非治癒が発生するとする。

表3a：重症の患者

	治癒	非治癒	合計
服用	25	25	50
非服用	0	50	50
合計	25	75	100

表3b：軽症の患者

	治癒	非治癒	合計
服用	50	0	50
非服用	37.5	12.5	50
合計	87.5	12.5	100

表4：全患者

	治癒	非治癒	合計
服用	75	25	100
非服用	37.5	62.5	100
合計	112.5	87.5	200

無作為割付(6)

- 無作為割付の結果の解釈
  - 服用者の治癒率:　75/100
  - 非服用者の治癒率:　37.5/100
    - 症状の程度が観察不可能な場合にも、薬効の有無を検定できる。
- 無作為割付の効果
  - 服用者グループと非服用者グループの症状の程度(および他の要因)を両者間で平均的に均質化できる。
    - 処置群:服用者のグループ
    - 制御群:非服用者のグループ