統計学I

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

– 条件つき確率
– 乗法定理
– 事象の独立

条件つき確率(1)

- 条件つき確率
  - サイコロを2つ投げる。
    - A:出目が2つとも3以上
    - B:出目の和が7
  - 「Aが生じた」という条件のもとでBが生じる確率は？

図1:2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						B
2						
3				AB		
4						
5					A	
6						

条件つき確率（2）

- 条件つき確率の意味
  - 「Aが生じた」という条件のもとで：
    - 両方の目が3以上であるものに注目する。
      - 標本空間をAに限定して確率を評価する。
    - 前スライドの図1で、エンジ色の部分（A）だけに注目して、その中で、青色の部分（B）が生起する確率を考える。

条件つき確率(3)

- 条件つき確率の評価
  - $P(B|A)$:
    - 「Aが生じた」という条件のもとでBが生起する確率
      - 標本空間をAに限定して確率を評価する。
    - 「サイコロを2つ投げる試行においては、標本空間の中のすべての根元事象が等確率で生起する」ことに注意する。この条件が、標本空間を限定したときにも、成り立つと考える。

条件つき確率(4)

- 条件事象
  - 「Aが生起した」に対応する標本点の数:
    - 16(エンジ色の部分)
- 評価対象の事象
  - 「(標本空間をAに制限したときに)Bが発生する」
=「AとBが同時に生起する」に対応する標本点の数
    - 2(エンジ色の中にある青の部分)

条件つき確率(5)

– したがって、この例においては、

$$P(B|A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

– 以上の議論をどのように一般化するか？

条件つき確率(6)

- 条件つき確率
  - 次式によって定義する: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
    - 例による確認:
      　サイコロを2つ投げる試行において条件つき確率は 1/8 であった。上の公式で計算すると、
      $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(2/36)}{(16/36)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

条件つき確率(7)

- 条件つき確率と同時(積事象の)確率
  - 定義の比較
    - 条件つき確率 $P(B|A)$:
      - 「Aが生じた」という状況でB が生じている確率
    - 同時確率 $P(A \cap B)$ の意味:
      - AとBが同時に生じる確率
  - 類似点と相違点
    - 類似点:積事象 $A \cap B$ が評価対象。
    - 相違点:考慮する標本空間の範囲

条件つき確率(8)

- (全)標本空間:Ω
  - 例:サイコロをふたつ投げる試行において、(全)標本空間は36個の根元事象から成る。
  - $P(\Omega) = 1$(標本空間に含まれるいずれかの事象が必ず生起する。)
- 条件つき確率

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 同時確率

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\Omega)}$$

条件つき確率(9)

- 条件つき確率
  - サイコロを2つ投げる。
    - A:出目が2つとも3以上
    - B:出目の和が7
  - 「Aが生じた」という条件のもとでBが生じる確率は？

図1:2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						B
2						
3				AB		
4						
5					A	
6						

条件つき確率（10）

- 例：出席者から学生をひとり選ぶ。
  - A：選ばれた学生が男性
  - B：選ばれた学生が喫煙者
    - $P(B|A)$
      =（男子出席者から喫煙者が選ばれる確率）
      =（男子喫煙者数）÷（男子出席者）
    - $P(A \cap B)$
      =（出席者から男子喫煙者が選ばれる確率）
      =（男子喫煙者数）÷（全出席者）

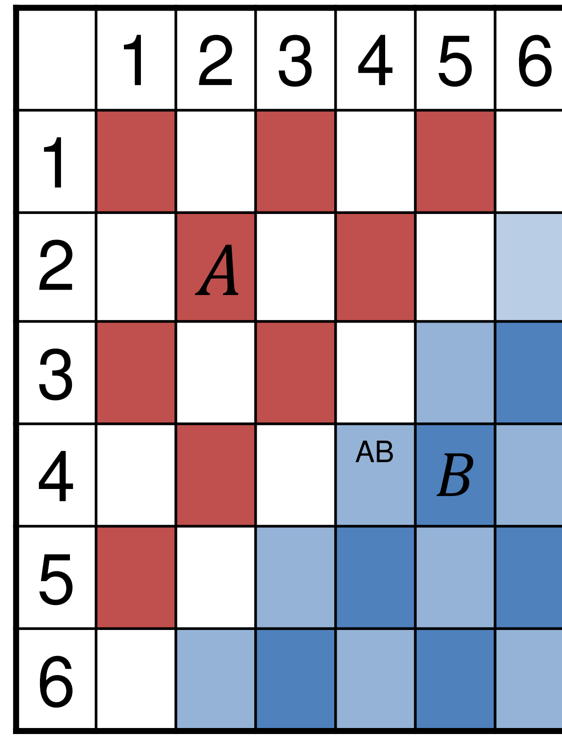
条件つき確率の例(1)

– サイコロを2つ投げる。
  - A : 出目の和が偶数になる。
  - B : 出目の和が7より大きい。
  - $P(A|B) =?$
  - $P(B|A) =?$

条件つき確率の例(2)

– サイコロを2つ投げる。
- A : 出目の和が偶数になる。
- B : 出目の和が7より大きい。
- $P(A|B) = \frac{(9/36)}{(15/36)} = \frac{3}{5}$
- $P(B|A) = \frac{(9/36)}{(18/36)} = \frac{1}{2}$

図2:2つのサイコロの出目



条件つき確率の例(3)

- トランプ（52枚、ジョーカーなし）から1枚を抜き取る。
  - A : キングを抜き取る。
  - B : ハートを抜き取る。
  - C : クイーンを抜き取る。
  - $P(A|B) = ?$
  - $P(B|C) = ?$
  - $P(C|A) = ?$

条件つき確率の例(4)

– トランプ（52枚、ジョーカーなし）から1枚を抜き取る。
  - A : キングを抜き取る。
  - B : ハートを抜き取る。
  - C : クイーンを抜き取る。
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(1/52)}{(13/52)} = \frac{1}{13}$
  - $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{(1/52)}{(4/52)} = \frac{1}{4}$
  - $P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{(0/52)}{(4/52)} = 0$

条件つき確率の例(5)

– トランプ（52枚、ジョーカーなし）から2枚を抜き取る（非復元）。
    - A：1枚目にハートを抜き取る。
    - B：2枚目にハートを抜き取る。
    - $P(A) = ?$
    - $P(B|A) = ?$
    - $P(B) = ?$
    - $P(A|B) = ?$

条件つき確率の例(6)

– トランプ（52枚、ジョーカーなし）から2枚を抜き取る（非復元）。
  - A : 1枚目=ハートを抜き取る。
  - B : 2枚目にハートを抜き取る。
  - $P(A) = \frac{13}{52}$
  - $P(B|A) = \frac{\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}}{(13/52)} = \frac{12}{51}$

条件つき確率の例(7)

- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} = \frac{13}{52}$
- $P(A|B) = \frac{\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}}{(13/52)} = \frac{12}{51}$

乗法定理(1)

- 乗法定理

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B)P(A \mid B) \\
&= P(A)P(B \mid A)
\end{aligned}
$$

  – 標本空間をうまく制限して、同時確率の計算を簡単にする。

乗法定理（2）

- 誕生日問題
  - 25人の中に、少なくとも2人の誕生日が同じである確率は？
    - 仮定：
      - 1年は365日ある。
      - ある人の誕生日は、等しい確率で365日のうちの1日になる。
      - ある人の誕生日と別の人の誕生日は独立である。

乗法定理(3)

– 解法:
  - 25人を1列に並べる。
  - A_k:
    – 「先頭からk番目の人の誕生日が、先頭から $k-1$ 番目の人の誕生日と異なる事象」
      » $P(A_1)=1$ と決める。
  - 先頭の2人の誕生日が異なる事象:
    – $A_1 \cap A_2$
  - 先頭の2人の誕生日が異なる確率
    – $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 1 \times \frac{364}{365}$

乗法定理(4)

- 先頭の3人の誕生日が異なる事象
  - $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
- 先頭の3人の誕生日が異なる確率
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2)$
    $= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$
    $= 1 \times \dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365}$
- 先頭の25人の誕生日が異なる確率
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{25})$
    $= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_{25}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{24})$
    $= 1 \times \dfrac{364}{365} \times \cdots \times \dfrac{341}{365} = 0.43 \ldots$

乗法定理(5)

- 少なくとも2人の誕生日が同じである確率 = 1 – 全員の誕生日が異なる確率
  - 1 – 0.43 = 0.57
    - 意外と高い。
    - 25人から2人選ぶ組み合わせ = 300組

乗法定理(6)

- 例題
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)
    - A:1枚目にキングを抜き取る。
    - B:2枚目にクイーンを抜き取る。
    - $P(A \cap B) = ?$
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(復元)
    - $P(A \cap B) = ?$

乗法定理(7)

- 例題
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)
    - A : 1枚目にキングを抜き取る。
    - B : 2枚目にクイーンを抜き取る。
    - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(復元)
    - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

事象の独立（1）

- 独立性
  - 事象AとBが独立

$$P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

- 「事象Aの発生と事象Bの発生とが無関係である」の意。
- 独立性は、上の条件の成否で確かめられる。
  - 「直観的に考えて明らかだ」は通用しない。

事象の独立（2）

- 例
  - サイコロを1つ投げる。
    - A : 出目が2の倍数
    - B : 出目が3の倍数
    - C : 出目が4の倍数
    - $P(A) = \frac{3}{6}$; $P(A|B) = \frac{1}{2}$; AとBは独立である。
    - $P(B) = \frac{2}{6}$; $P(B|C) = 0$; BとCは独立でない。
    - $P(C) = \frac{1}{6}$; $P(C|A) = \frac{1}{3}$; AとCは独立でない。

事象の独立（3）

- サイコロを2つ投げる。
  - A : 出目の和が2の倍数である。
  - B : 出目の和が3の倍数である。
  - C : 出目の和が4の倍数である。
  - $P(A) =?; P(A|B) =?;$ AとBは独立？
  - $P(B) =?; P(B|C) =?;$ BとCは独立？
  - $P(C) =?; P(C|A) =?;$ AとCは独立？

事象の独立(4)

- サイコロを2つ投げる。
  - A : 出目の和が2の倍数である。
  - B : 出目の和が3の倍数である。
  - C : 出目の和が4の倍数である。
  - $P(A) = \frac{18}{36}$; $P(A|B) = \frac{(6/36)}{(12/36)}$; AとBは独立である。
  - $P(B) = \frac{12}{36}$; $P(B|C) = \frac{(1/36)}{(9/36)}$; BとCは独立でない。
  - $P(C) = \frac{9}{36}$; $P(C|A) = \frac{(9/36)}{(18/36)}$; AとCは独立でない。