06/22/2021
瀧澤武信

2021 年度春学期 線形代数 (木 2)
第 1 回-第 13 回

$\mathbf{R}$(実数全体の集合）の性質

a. 連続性

b. 大小関係（順序性）

c. 演算

上記の [c.] に着目する部分が「代数学」(Algebra)

和と積に注目すると，次の性質が成り立つ.

(0) $\forall a, b \in \mathbf{R}, a+b \in \mathbf{R}, ab \in \mathbf{R}$. 以下 $a, b, c \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (和の結合法則)

(2) $a+b = b+a$ (和の交換法則)

(3) ${}^{\exists}0 \in \mathbf{R}, {}^{\forall} a \in \mathbf{R}, a+0 = 0+a = a$

(4) ${}^{\forall}a \in \mathbf{R}, {}^{\exists} b \in \mathbf{R}, a+b = b+a = 0$.この b を $-a$ と表す.

(5) $(ab)c = a(bc)$ （積の結合法則）

(6) $ab = ba$ （積の交換法則）

(7) ${}^{\exists}1 \in \mathbf{R}, \forall a \in \mathbf{R}, a1 = 1a = a$

(8) ${}^{\forall}a \in \mathbf{R}, a \neq 0, {}^{\exists} b \in \mathbf{R}. ab = ba = 1$.この b を $1/a$ と表す.

(9) $a(b+c) = ab+ac,\ (a+b)c = ac+bc$ (結合法則)

（注意）　上の (0) $\sim$ (9) が成り立つ空でない集合を「体」（たい，Field）という.
体の例
$\mathbf{Q}$ 有理数体
$\mathbf{R}$ 実数体
$\mathbf{C}$ 複素数体
(注) $\mathbf{Z}$(整数全体の集合) は (8) の性質を満たさないので．体ではない.

ベクトル空間 (線形空間）(Vector Space, Linear Space)
ベクトル空間の例

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbf{R}\right\}$$

$$\mathbf{R}^n=\overbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}}^{n}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\, x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R}\right\}$$

空でない集合 $\mathbf{V}$ が次の性質を持つとき. $\mathbf{V}$ を $\mathbf{R}$ 上の線形空間 (ベクトル空間) (Linear Space(Vector Space)) という.

(0) $^\forall a,^\forall b\in\mathbf{V}, a+b\in\mathbf{V},^\forall a\in\mathbf{V},^\forall\lambda\in\mathbf{R},\lambda a\in\mathbf{V}$. 以下 $a,b,c\in\mathbf{V},\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ とする.

(1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (和の結合法則)

(2) $a+b=b+a$ (和の交換法則)

(3) $^\exists 0\in\mathbf{V},^\forall a\in\mathbf{V}, a+0=0+a=a$　この 0 を零ベクトルという.

(4) $^\forall a\in\mathbf{V},^\exists b\in\mathbf{V}, a+b=b+a=0$. この b を $-a$ と表す.

(5) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ （(係数の）分配法則）

(6) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ （(ベクトルの）分配法則）

(7) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$

(8) $1\cdot a=a$

ベクトル空間の要素をベクトルという.
ベクトルの記法 単に a と書くか, $\mathbf{a},\vec{a}$ などと表す．この授業では，単に a と書く．スカラーはギリシャ文字を用いて表すので，混同しないだろう.
$\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となることが分かる．これを n 次元ベクトル空間という.
この定義によれば $\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$ は 1 次元ベクトル空間 , $\mathbf{R}^0=\{0\}$ は 0 次元ベクトル空間 (次元について，詳しくは「基底」で述べる).
例
開区間 $(0,1)$ 上で連続な関数全体の集合 $C^0(0,1)$ はベクトル空間である.$f,g\in C^0(0,1),(f+g)(x)\overset{\leftarrow}{=}f(x)+g(x),(\lambda f)(x)\overset{\leftarrow}{=}\lambda f(x)$ として，和とスカラー倍を定義すればベクトル空間になっていることが分かるだろう．このような関数の集合の場合, その次元は $+\infty$ である（無限次元ベクトル空間).
有限次元のベクトル空間の場合, ベクトルを列ベクトル（行ベクトル）で表すことができる．以下では列ベクトルで表す.

たとえば，零ベクトル 0 は $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ である.

$\mathbf{R}^n$の要素 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ の　k 番目のもの　$a_k \in \mathbf{R}$ を a の第 k 成分という.

$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ の場合, いわゆる「幾何ベクトル」で表すことができる.

問

$\mathbf{R}^n$ がベクトル空間であることを証明せよ.

（略解）

和とスカラー倍を適切に定義して，それらがベクトル空間の性質 (0) $\sim$ (8) をみたしていることを調べればよい.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し, $a + b \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$, $\lambda a \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$, と定めれば, (0) $\sim$ (8) をみたす．たとえば, (4) は, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し, $b = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ をとると, $a + b = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ \vdots \\ a_n + (-a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

ベクトル空間には「ノルム」と呼ばれる，大きさの概念をもつものがある.これと「内積」と呼ばれるものを使って, ベクトルのなす角が定義される.

$\mathbf{R}^n$における ベクトルの内積 (inner product)

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$のとき, a と b の内積を $(a|b)$ とすると, $(a|b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbf{R}$ である.

内積の記号（記法）

ベクトル a とベクトル b の内積を表す記号 : $(a, b), (a|b)$ などが用いられる．この講義では $(a|b)$ を用いる.

<u>例</u> 幾何ベクトル

<u>例 1</u> 平面ベクトル

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$であれば, $(a|b) = a_1b_1 + a_2b_2 \in \mathbf{R}$

<u>例 2</u> 空間ベクトル

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$であれば, $(a|b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \in \mathbf{R}$

<u>例題</u> n 個の商品の価格ベクトルを $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, 販売数量ベクトルを $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ とすると,

総売上高は $(p|q) = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots p_nq_n = \sum_{k=1}^{n} p_kq_k$ である.

<u>内積の性質</u>

$a, b, c \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}$ とすると，次の性質が成り立つ.

(1) $(a|b) = (b|a)$

(2) ① $(a|b+c) = (a|b) + (a|c)$

② $(a+b|c) = (a|c) + (b|c)$

(3) $(\lambda a|b) = (a|\lambda b) = \lambda(a|b)$

(4) ① $(a|a) \geq 0$

② $(a|a) = 0$ ならば $a = 0$

(2)①の証明）

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ とする.

$$
\begin{aligned}
(a|b+c) &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} \right) \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \cdots + a_n(b_n + c_n) \\
&= (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2) + \cdots + (a_nb_n + a_nc_n) \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right) \\
&= (a|b) + (a|c)
\end{aligned}
$$

(4)①の証明)

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とすると, $(a|a) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

ここで,$^\forall k, a_k^2 \geq 0$ だから, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$

(4)②の証明)

$(a|a) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2 = 0$ とする.

ここで,$^\exists k, a_k^2 \gneqq 0$ であれば,$^\exists \ell, \ell \neq k, a_\ell^2 \lneqq 0$ でなければならないが, 2 乗して負になる実数 a_ℓは存在しない.

したがって,$^\forall k, a_k^2 = 0$ である. 2 乗して 0 になる数は 0 だけなので,$^\forall k, a_k = 0$.

よって, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (零ベクトル) である.

その他の性質は問とする.

$\mathbf{R}^n$ におけるベクトルのノルム (Norm)

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$のとき,

$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$を a の**(ユークリッド) ノルム** (**(Euclid)Norm**) という.

記号 : $|a|, ||a||, ||a||_2$と表わす. この授業では単に $|a|$ と表わす.

(注意) 他のノルムもある. 例えば, $|a| = |a_1| + \ldots + |a_n|$, $|a| = \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}$

ユークリッドノルムは $|a|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = (a|a)$ を満たす.

<u>単位ベクトル (unit vector)</u>

u が単位ベクトル $\Leftrightarrow |u| = 1$

(例) 基本ベクトル $e_i (1 \leq i \leq n)$ は単位ベクトル

(例) $\mathbf{R}^2$における基本ベクトルは, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

単位ベクトルは単位円周上の点.

(例) $\mathbf{R}^3$における基本ベクトルは, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

単位ベクトルは単位球面上の点.

<u>ノルムの性質</u>

$a, b \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}$ のとき,

(1) (i)$|a| \geq 0$ (ii)$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2) $|\lambda a|=|\lambda||a|$

(3) $|(a|b)| \leq |a||b|$ < シュワルツ (Schwarz) の不等式 >

(4) $|a+b| \leq |a|+|b|$ < 三角不等式>

（証明）

(1) ノルムの定義から明らか.

(2) $a=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とすると，一般に$\alpha \in \mathbf{R}$ のとき

$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ に注意すると

(たとえば,$\sqrt{(-5)^2}=5=|-5|, \sqrt{(+5)^2}=5=|+5|$)

$|\lambda a|=\left|\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right|$

$=\left|\begin{pmatrix} (\lambda a_1) \\ \vdots \\ (\lambda a_n) \end{pmatrix}\right|$

$=\sqrt{(\lambda a_1)^2+\ldots(\lambda a_n)^2}$

$=\sqrt{\lambda^2 a_1^2+\ldots+\lambda^2 a_n^2}$

$=\sqrt{\lambda^2(a_1^2+\ldots a_n^2)}$

$=|\lambda|\sqrt{a_1^2+\ldots a_n^2}$

$=|\lambda||a|$

(3) $a=0=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とすると, $(0|b)=0\cdot b_1+\cdots+0\cdot b_n=0+\cdots+0=0$

よって, $|(a|b)|=|a||b|=0\cdot|b|=0$

$a \neq 0$ とする.

内積の性質　$(a|a)=|a|^2, (a|b)=(b|a)$ と実数の性質 $|\alpha|^2=\alpha^2$に注意すると,

$(|a||b|)^2-|(a|b)|^2=|a|^2|b|^2-(a|b)^2$

$=|a|^2\left(|b|^2-\frac{(a|b)^2}{|a|^2}\right)$

$=|a|^2\left(|b|^2-\frac{(a|b)^2}{|a|^2}-\frac{(a|b)^2}{|a|^2}+\frac{(a|b)^2}{|a|^2}\right)$

$=|a|^2\left((b|b)-\frac{(a|b)}{|a|^2}(b|a)-\frac{(a|b)}{|a^2|}(a|b)+\left(\frac{(a|b)}{|a|^2}\right)^2(a|a)\right)$

$=|a|^2\left((b|b)-\left(b\left|\frac{(a|b)}{|a|^2}\right.a\right)-\left(\left(\frac{(a|b)}{|a|^2}a\middle|b\right)-\left(\frac{(a|b)}{|a|^2}a\left|\frac{(a|b)}{|a|^2}a\right.\right)\right)\right)$

$=|a|^2\left(\left(b\left|b-\frac{(a|b)}{|a|^2}a\right.\right)-\left(\frac{(a|b)}{|a|^2}a\left|b-\frac{(a|b)}{|a|^2}a\right.\right)\right)$

$=|a|^2\left(b-\frac{(a|b)}{|a|^2}a\left|b-\frac{(a|b)}{|a|^2}a\right.\right)=|a|^2\left|b-\frac{(a|b)}{|a|^2}a\right|^2 \geq 0$

よって，　$(|a||b|)^2 \geq |(a|b)|^2$

ここで, $|a|, |b|, (a|b) \in \mathbf{R}, |a|, |b|, |(a|b)| \geq 0$ であるから, $|a||b| \geq |(a|b)|$ である.

(4) $(|a+b|)^2 = (a+b|a+b)$

$= (a|a) + 2(a|b) + (b|b)$

$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

シュワルツの不等式より

$(a|b) \in \mathbf{R}$ であるから

$(a|b) \leq |(a|b)| \leq |a||b|$

よって, $(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$

一方, $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ より $|a+b| \leq |a|+|b|$　　(証明終)

ベクトルのなす角

ノルムと内積を使ってベクトルのなす角を定義できる.

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbf{R}^n$とする.

このとき，シュワルツの不等式 $(|(a|b)| \leq |a||b|)$ から$\frac{|(a|b)|}{|a||b|} \leq 1$ であるから,

$0 \leq^{\exists_1} \theta \leq \pi, \frac{(a|b)}{|a||b|} = \cos\theta,$ $\left(\text{または},\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(a|b)}{|a||b|}\right)\right)$ のθを a と b とのなす角という.

特に, $(a|b) = 0$ のとき, $a \perp b$ と表わし, a と b は直交する，または，垂直であるという

($\cos\theta = 0\ (0 \leq \theta \leq \pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$)

(例) $e_i \perp e_j\ (i \neq j)$

<u>例題</u> $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき, $|a|, |b|, a$ と b とのなす角θを求めよ.

(解)

$|a| = \sqrt{(a|a)} = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|b| = \sqrt{(b|b)} = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$

$(a|b) = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$

よって$\theta = \frac{\pi}{2}\ (a \perp b)$

<u>例題</u>

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$と直交する単位ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$を求めよ.

(1) $a \perp u \longrightarrow u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0$

(2) $b \perp u \longrightarrow 4u_1 + 5u_2 + 6u_3 = 0$

$(2) - 2 \times (1) : 2u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -2u_1$

(1) へ代入 : $u_1 - 4u_1 + 3u_3 = 0 \Rightarrow -3u_1 + 3u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = u_1$

$\mu = u_1$とすると, $u_2 = -2\mu, u_3 = \mu$

$|u|^2=1 \Rightarrow \mu^2+(-2\mu)^2+\mu^2=1 \Rightarrow 6\mu^2=1 \Rightarrow \mu=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$u=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \mp\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

<u>ベクトルの1次結合</u>

$a_1,\ldots,a_p\in\mathbf{R}^n, \lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbf{R}$のとき,$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_pa_p$を　$a_1,\ldots,a_p$の1次結合, 線形結合(linear combination)という.

<u>ベクトルの組の1次独立性, 1次従属性</u>

$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_pa_p=0\Leftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$のとき, $\{a_1,\ldots,a_p\}$は1次独立(線形独立, linearly independent)という.

（1次独立性の否定）$\exists i,\lambda_i\neq0,\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_pa_p=0$のとき, $\{a_1,\ldots,a_p\}$は1次従属(線形従属, linearly dependent)という.

（例）基本ベクトルの集合　$\{e_1,\ldots,e_n\}$は1次独立.

$$\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0\Leftrightarrow\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$

定理

(1) a_pを$a_1,\ldots,a_{p-1}$の1次結合で表わすことができるならば, $\{a_1,\ldots,a_p\}$は1次従属である.

(2) 逆に, $\{a_1,\ldots,a_p\}$が1次従属ならば，この中の少なくとも一つを他のベクトルの1次結合で表わすことができる.

証明

(1) a_pが$\{a_1,\ldots,a_{p-1}\}$の1次結合とする.
$\Rightarrow a_p=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_{p-1}a_{p-1}$ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}\in\mathbf{R})$
$\Rightarrow \lambda_1a_1+\cdots+\lambda_{p-1}a_{p-1}+(-1)a_p=0$
ここで, (a_pの係数)$=(-1)\neq0$より, $\{a_1\ldots,a_p\}$は1次従属.

(2) $\{a_1,\ldots,a_p\}$が1次従属である $\Rightarrow\ {}^{\exists}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_pa_p=0$

<u>たとえば</u> $\lambda_p\neq0$とすると,
$a_p=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\right)a_1+\cdots+\left(-\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\right)a_{p-1}$となる．すなわち, a_pを他のベクトルの1次結合で表わすことができる.

例題

次のベクトルの組の 1 次独立性を調べよ．1 次従属の場合はどれか一つのベクトルを他のベクトルの 1 次結合で表わせ.

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(解) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},\ \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ とおく.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (1) \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = 0 \quad (2) \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) - (2) : 4\lambda 2 + 3\lambda 3 = 0 \ \ (4)$

$(1) + (2) + (3) : -\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

(4) へ代入 : $\lambda_3 = 0$

(1) へ代入 : $\lambda_1 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

解 : a, b, c は 1 次独立である.

(2) $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(解) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},\ \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ とおく.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3\lambda_1 - 7\lambda_2 - 4\lambda_3 & = 0 \quad (1) \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \quad (2) \\ 4\lambda_1 - 8\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) + 2 \times (2) : \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$

$(1) + (2) + 2 \times (3) : 7\lambda_1 - 21\lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = \mu$とおくと,$\lambda_1 = 3\mu$

(2) へ代入 : $6\mu + 2\mu + 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -4\mu$

$\mu = 1$ とおくと, $3a + b - 4c = 0$

解 : a, b, c は 1 次従属である. $b = 4c - 3a$

定理 $\{a_1, \ldots, a_p\}$: 1 次独立, $\{a_1, \ldots, a_{p+1}\}$: 1 次従属 $\Longrightarrow {}^{\exists_1} \lambda_1, \ldots {}^{\exists_1} \lambda_p,\ a_{p+1} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p$

（注）この場合は, a_{p+1}が他のベクトルの１次結合で「一意的に」書ける（他のベクトルが書けるかどうかは分からないが）.

（証明）

(存在) $\{a_1,\ldots,a_{p+1}\}$ が１次従属 $\Longrightarrow {}^{\exists}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_{p+1}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$,

$\mu_1 a_1+\cdots+\mu_{p+1}a_{p+1}=0$

ここで, $\mu_{p+1}=0$ と仮定すると $\mu_1 a_1+\cdots+\mu_p a_p=0$

すると，定理の仮定から $\{a_1,\ldots,a_p\}$ は１次独立であるから $\mu_1=\cdots=\mu_p=0$

よって, $\mu_1=\cdots=\mu_p=\mu_{p+1}=0$

すると, $\{a_1,\ldots,a_{p+1}\}$: １次独立となり，定理の仮定と矛盾する．したがって,$\mu_{p+1}\neq 0$

$\Longrightarrow a_{p+1}=\left(-\frac{\mu_1}{\mu_{p+1}}\right)a_1+\cdots+\left(-\frac{\mu_p}{\mu_{p+1}}\right)a_p \Longrightarrow$ ここで, $\lambda_i=-\frac{\mu_i}{\mu_p+1}$ $(1\le i\le p)$ とおけばよい.

(一意性) $a_{p+1}=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_p a_p=\lambda'_1 a_1+\cdots+\lambda'_p a_p$と別の表現があるとする.

$\Longrightarrow (\lambda_1-\lambda'_1)a_1+\cdots+(\lambda_p-\lambda'_p)a_p=0$

$\{a_1,\ldots,a_p\}$ は１次独立であるから,$\lambda_1-\lambda'_1=\cdots=\lambda_p-\lambda'_p=0$

$\Longrightarrow \lambda_i=\lambda'_i$ $(1\le i\le p)$

（証明終）

ベクトル空間の基底

生成する線形空間

$a_1,\ldots,a_k\in\mathbf{R}^n, V=\{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_k a_k|\lambda_i\in\mathbf{R}, 1\le i\le k\}$

のとき, V を $a_1,\ldots a_k$が生成するベクトル空間という.

基底

$V:\mathbf{R}$ 上のベクトル空間, $a_1,\ldots,a_n\in V$ が

(i) $\{a_1,\ldots a_n\}$ は１次独立

(ii) ${}^{\forall}v\in V; v=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n({}^{\exists}\lambda_i\in\mathbf{R})$ と表わされる (すなわち, V は $a_1,\ldots,a_n$で生成される)

とき，順序を考えた組 $<a_1,\ldots,a_n>$ を V の基底という．また, n を V の次元という.

（例）$<e_1,\ldots,e_n>$ は $\mathbf{R}^n$の基底であり, $\mathbf{R}^n$の次元は n.

（解）

(i) $\{e_1,\ldots e_n\}$ が１次独立である : $a_1 e_1+\cdots+a_n e_n=0$

$$\Longrightarrow a_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow a_k=0$ $(1\le^{\forall}k\le n)\Longrightarrow\{e_1,\ldots e_n\}$ は１次独立.

(ii) $e_1,\ldots,e_n$が $\mathbf{R}^n$を生成する.$^\forall a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \Longrightarrow a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\,(a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{R})$

注意

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ が V の基底とすると，たとえば a_1をμ倍（但し,$\mu \neq 0$) した $\{\mu a_1, a_2, \ldots a_n\}$ も V の基底となることは明らかである．したがって，基底は一組見つかれば無限組存在する．しかし，基底を構成するベクトルの個数は同じである．

(証明) $< a_1,\ldots,a_n >$ と $< b_1,\ldots,b_m >$ 但し, $n \leq m$ が V の基底とする. $\Rightarrow$ 基底の条件から $\{a_1,\ldots,a_n\}$ が V を生成するので, V の要素 $b_1,\ldots,b_m$ も $a_1,\ldots,a_n$を使って表現することができる．したがって, $\{b_1,\ldots,b_m\}$ を使って表現される V の要素は $\{a_1,\ldots,a_n\}$ を使って表現できる．よって, V の次元は m と n の大きくない方（この場合は n）となる（実際は $m = n$）.

例題

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき, $\{a, b, c\}$ は $\mathbf{R}^3$の基底であることを示せ.

(2) (1) の a, b, c を用いて, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を表せ.

解

(1) $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ とおく. $\begin{cases} (1) & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (2) & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (3) & \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

(2) より $\lambda_2 = -\lambda_1$

(3) より $\lambda_3 = \lambda_1$

(1) へ代入 : $\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

よって，　$\{a, b, c\}$ は 1 次独立である. $\mathbf{R}^3$は 3 次元ベクトル空間なので ($< e_1, e_2, e_3 >$ が基底の一つであるから), 1 次独立なベクトルの個数は最大 3 個である．したがって, $\{a, b, c\}$ は $\mathbf{R}^3$の基底である.

(2) $x = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c$ とおくと, $\begin{cases} (1)\ 1 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \\ (2)\ 0 = \mu_1 + \mu_2 \\ (3)\ 0 = \mu_1 - \mu_3 \end{cases}$

(2) より $\mu_2 = -\mu_1$

(3) より $\mu_3 = \mu_1$

(1) へ代入 : $\mu_1 + \mu_1 + \mu_1 = 1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mu_2 = -\frac{1}{3}, \mu_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$

1 次写像（線形写像, LinearMapping）

写像 (Mapping)

対応

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^m \\ & \omega & & \omega \\ & x & & y \end{array}$$

が，各 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ が 1 個だけとなるとき，この対応 f を $\mathbf{R}^n$から $\mathbf{R}^m$への写像（関数）という.

特に，写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が $^\forall x, ^\forall x' \in \mathbf{R}^n, ^\forall \lambda \in \mathbf{R}$ に対し，次の (1)(2) の性質を満たすとき, f を 1 次写像（線形写像）という.

(1) $f(x + x') = f(x) + f(x')$

(2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

（注）(1)(2) の中の加算やスカラー倍演算は，厳密には左辺と右辺で異なるものだが，同じ性質を持っているので，同じ記号で書いていることに注意.（左辺は $\mathbf{R}^n$における演算，右辺は $\mathbf{R}^m$における演算）.

（例）$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ のときは, $f(x) = \alpha x (\alpha \in \mathbf{R})$ のことで，定数部分が 0 の 1 次関数のことである. 1 次写像は，このような易しい写像であるが $y = f(x)$ の x や y が $\mathbf{R}$ の要素ではなく，次元が高いことには注意が必要である．以下では, 1 次写像の表わし方を考える.

$e_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (j 行目)，$e_i^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i 行目)，$e_j^n \in \mathbf{R}^n$, $e_i^m \in \mathbf{R}^m$ とすると,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= x_1 e_1^n + \cdots + x_n e_n^n \left(= \sum_{j=1}^{n} x_j e_j^n \right)$ であるから, f : 1 次写像ならば

$$f(x)=f(x_1e_1^n+\cdots+x_ne_n^n)\ \left(=f\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j^n\right)\right)$$

$$=f(x_1e_1^n)+\cdots+f(x_ne_n^n)\ \left(=\sum_{j=1}^{n}f\left(x_je_j^n\right)\right)$$

$$=x_1f\left(e_1^n\right)+\cdots+x_nf\left(e_n^n\right)\left(=\sum_{j=1}^{n}x_jf\left(e_j^n\right)\right)$$

ここで, $f\left(e_j^n\right)\in\mathbf{R}^m\ (1\leq j\leq n)$ だから

$$f\left(e_j^n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\alpha_1e_1^m+\cdots+\alpha_me_m^m\left(=\sum_{i=1}^{m}\alpha_ie_i^m\right)$$ と表わすことができる.

$a_{ij}\overset{\leftarrow}{=}\alpha_i\ (1\leq i\leq m)$ とおくと, $f(e_j^n)=a_{1j}e_1^m+\cdots+a_{mj}e_m^m\left(=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e_i^m\right)\ (1\leq j\leq n)$ となる.

さて, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=y_1e_1^m+\cdots+y_me_m^m\left(=\sum_{i=1}^{m}y_ie_i^m\right)$

$$=f(x)=x_1f(e_1^n)+\cdots+x_nf(e_n^n)$$

$$=x_1\left(a_{11}e_1^m+\cdots+a_{m1}e_m^m\right)+\cdots+x_n\left(a_{1n}e_1^m+\cdots+a_{mn}e_m^m\right)\left(=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e_i^m\right)\right)$$

$$=\left[\left(x_1a_{11}\right)e_1^m+\cdots+\left(x_1a_{m1}\right)e_m^m\right]+\cdots+\left[\left(x_na_{1n}\right)e_1^m+\cdots+\left(x_na_{mn}\right)e_m^m\right]\left(=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(x_ja_{ij}\right)e_i^m\right)\right)$$

$$=\left[x_1a_{11}+\cdots+x_na_{1n}\right]e_1^m+\cdots+\left[x_1a_{m1}+\cdots+x_na_{mn}\right]e_m^m\left(=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_ja_{ij}\right)e_i^m\right)$$

よって, ($\{e_1^m,\ldots e_m^m\}$ は $\mathbf{R}^m$の基底だから) $y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ (i=1,\ldots,m)$

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \qquad\vdots\\ y_m=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

1 次写像の表現

1 次写像の表現の一つとして行列 (matrix) が用いられる.

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの積

行列 A とベクトル x の積を Ax と書く.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y$$

すると, $y = f(x)$ は f の表現行列 A を用いて $y = Ax$ と表わされる.

例題 1

1 次写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$が

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times2}$ で表現されるとき,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ と $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$(但し, $y = f(x)$) の関係を求めよ.

(解) $f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y$

すなわち, $\begin{cases} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= -x_2 \\ y_3 &= 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

例題 2

1 次変換（線形変換, Linear Transformation，同じ空間内における線形写像）$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$が

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times3}$ で表現されるとき,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ (但し, $y = f(x)$) の関係を求めよ.

（注）このような行の数と列の数が等しい行列を**正方行列 (SquareMatrix)**という．また，このときの行の数（ = 列の数，この例では, 3）を正方行列の次数といい，この行列を 3 次正方行列という.

(解)

$$\begin{cases} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_3 &= -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

行列 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{行（第1行）} \\ \\ \leftarrow \quad \text{（第} m \text{行）} \end{array} : \begin{pmatrix} m\ \text{行}\ n\ \text{列の行列} \\ (m,n)\ \text{行列} \\ m \times n\ \text{行列} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

列（第 1 列） (第 n 列)

$= (a_{ij})$ (省略記法)

a_{ij}を行列 A の第 i 行第 j 列の要素 (element), (i,j) 要素という.

行列 A は, n 次元行ベクトル $a_{i\cdot}(1 \leq i \leq m)$ または m 次元列ベクトル $a_{\cdot j}(1 \leq j \leq n)$

$a_{i\cdot} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})(1 \leq i \leq m),\ a_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(1 \leq j \leq n)$ を用いて, $A = \begin{pmatrix} a_{1\cdot} \\ \vdots \\ a_{m\cdot} \end{pmatrix} = (a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n})$ と表すことができる.

${}^{\forall}i, {}^{\forall}j, a_{ij} \in \mathbf{R}$ である (m,n) 行列全体の集合を $\mathbf{R}^{m\times n}$と表す.

$A, B \in \mathbf{R}^{m\times n}$のとき,

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \begin{pmatrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$

<u>行列の演算 (1 次写像の演算 $f \pm g, \lambda f$ に対応している)</u>

省略記法で $A = (a_{ij})$ と書いたとき A の (i,j) 要素を a_{ij}と表すこととする．いま, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in \mathbf{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbf{R}$ とする．このとき, $C = A \pm B \leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$

$C = \lambda A \leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$

あるいは, $(a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}), \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

<u>零行列</u>((i,j) 要素がすべて 0 である行列)

$0 = \begin{pmatrix} 0\cdots 0 \\ \cdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ を零行列という.

<u>行列の（1 次写像の）和，差，スカラー倍演算の性質</u>

$A, B, C \in \mathbf{R}^{m\times n},\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ のとき,

(0) $A + B \in \mathbf{R}^{m\times n}, \lambda A \in \mathbf{R}^{m\times n}$(これらの演算は $\mathbf{R}^{m\times n}$ の中で閉じている)

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$(和の結合法則)

(2) $A + B = B + A$ (和の交換法則)

(3) ${}^{\exists}0 \in \mathbf{R}^{m\times n};\ {}^{\forall}A \in \mathbf{R}^{m\times n}, A + 0 = 0 + A = A$

(4) ${}^{\forall}A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Rightarrow {}^{\exists}B \in \mathbf{R}^{m\times n},\ A + B = B + A = 0$

(5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (scalar の分配法則)

(6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (行列の分配法則)

(7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(8) $1 \cdot A = A$

が成り立つ.
(証明）要素ごとに行えばよい.

したがって, $m \times n$ 行列全体の集合 $\mathbf{R}^{m\times n}$（$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への 1 次写像の全体）は，ベクトル空間の定義 (0) ∼ (8) をみたすので，実ベクトル空間である.

<u>**行列の積（1 次写像の合成）**</u>

$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$
$f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^\ell$
が 1 次写像であれば, $f \circ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$, $(f \circ g)(x) \stackrel{\leftarrow}{=} f(g(x))$ は 1 次写像である.
（証明）f, g が 1 次写像であれば,

(1) ${}^\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$,
$(f \circ g)(x_1 + x_2) = f(g(x_1 + x_2)) = f(g(x_1) + g(x_2)) = f(g(x_1)) + f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_1) + (f \circ g)(x_2)$

(2) ${}^\forall x \in \mathbf{R}^n$, ${}^\forall \lambda \in \mathbf{R}$,
$(f \circ g)(\lambda x) = f(g(\lambda x)) = f(\lambda g(x)) = \lambda(f(g(x)) = \lambda(f \circ g)(x)$

（証明終）
ここで, $y = g(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m)$, $z = f(y)$ $(y \in \mathbf{R}^m$, $z \in \mathbf{R}^\ell)$ とすると,
${}^\exists B \in \mathbf{R}^{m\times n}, y = g(x) = Bx$, ${}^\exists A \in \mathbf{R}^{\ell\times m}$, $z = f(y) = Ay$
したがって, $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ であるが, $z = Ay = A(Bx)$ である.
ここで,${}^\exists C \in \mathbf{R}^{\ell\times n}, z = (f \circ g)(x) = Cx$ と書けるが，行列とベクトルとの積の定義を思い出すと，行列と行列との積も同様に定義すれば良いことが分かる．各要素 c_{ij} が
$c_{ij} \stackrel{\leftarrow}{=} \underbrace{(a_{i\cdot}|b_{\cdot j})}_{\text{内積}} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)$ と定義されているとき,

c_{ij} を (i, j) 要素としてもつ行列 $C = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots \\ c_{\ell 1} \cdots c_{\ell n} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{\ell\times n}$ を行列 A と B との積といい,
$C = A \cdot B$（または $C = AB$）と書く.
(注意）C の要素 c_{ij} は $a_{i\cdot}$ と $b_{\cdot j}$ の内積であるので　積 AB が作れるためには $a_{i\cdot}$ と $b_{\cdot j}$ との内積が作れることが条件になっている.
すなわち, (A の列の数）$= m =$（B の行の数）であることが条件．したがって,

(1) 積 AB が作れても積 BA が作れるかどうかはわからない.

(2) 積 AB, BA が共に作れても，それらの属する空間が異なる場合がある.
(例）$A \in \mathbf{R}^{m\times n}, B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ であると, $AB \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $BA \in \mathbf{R}^{n\times n}$

(3) 積 AB, BA が共に作れて，しかもそれらの属する空間が同じ（正方行列の場合）であっても, $AB = BA$ とは限らない

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 2}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 4}$であれば,

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 4}$であり, BA は作れない.

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 2}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 3}$であれば,

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3},\ BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ である.

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$であれば,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$である.

行列の積の性質

(1) $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ B \in \mathbf{R}^{n\times p},\ C \in \mathbf{R}^{p\times q}$, のとき, $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

(2) (i) $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ B, C \in \mathbf{R}^{n\times p}$ のとき, $A(B+C) = AB + AC$ (分配法則)

(ii) $A, B \in \mathbf{R}^{m\times n},\ C \in \mathbf{R}^{n\times p}$ のとき, $(A+B)C = AC + BC$ (分配法則)

(3) $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ B \in \mathbf{R}^{n\times p},\ \lambda \in R$ のとき,$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

(注) $AB \neq BA$(交換法則は成り立たない)

(証明) 要素毎に行う.

要素は $\mathbf{R}$ の元だから, 乗算の交換法則が成り立つことに注意する.

問 行列の積の結合法則を証明せよ.

解 $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ B \in \mathbf{R}^{n\times p},\ C \in \mathbf{R}^{p\times q}$, また, $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{k\ell})$ とする.

$U \fallingdotseq AB$ とおくと, $U \in \mathbf{R}^{m\times p},\ U = (u_{ik}),\ u_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$,

さらに, $V \fallingdotseq (AB)C = UC$ とおくと, $V \in \mathbf{R}^{m\times q},\ V = (v_{i\ell}),\ v_{i\ell} = u_{i1}c_{1\ell} + \cdots + u_{ip}c_{p\ell}$

$= \sum_{k=1}^{p} u_{ik}c_{k\ell} = (a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1\ell} + \cdots + (a_{i1}b_{1p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{p\ell} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell}\ \ldots[1]$

また, $W \fallingdotseq BC$ とおくと, $W \in \mathbf{R}^{n\times q},\ W = (w_{j\ell}),\ w_{j\ell} = b_{j1}c_{1\ell} + \cdots + b_{jp}c_{p\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$,

さらに, $X \fallingdotseq A(BC) = AW$ とおくと, $X \in \mathbf{R}^{m\times q},\ X = (x_{i\ell}),\ x_{i\ell} = a_{i1}w_{1\ell} + \cdots + a_{in}w_{n\ell}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_{j\ell} \ = a_{i1}(b_{11}c_{1\ell} + \cdots + b_{1p}c_{p\ell}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}c_{1\ell} + \cdots + b_{np}c_{p\ell}) \ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{k\ell}) \ \ldots [2]$$

ここで, $(a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1\ell} + \cdots + (a_{i1}b_{1p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{p\ell} = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) c_{k\ell}$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1\ell} + \cdots + b_{1p}c_{p\ell}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}c_{1\ell} + \cdots + b_{np}c_{p\ell}) \ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{k\ell})$$

であるから, [1], [2] は等しい．すなわち, $(AB)C = A(BC)$（証明終）

<u>転置行列 TransposedMatrix</u>

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ の行と列を入れ替えた行列を A の転置行列という.

転置行列：A', A^t, ${}^tA$, A^T, ${}^TA$ 等と表す

この授業では,${}^tA$ と表すこととする.

$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ の転置行列を ${}^tA = \left({}^t a_{ji}\right) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ とすると,

${}^t a_{ji} = a_{ij} \quad \begin{pmatrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{pmatrix}$

<u>例</u>

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{第 1 列} & \text{第 2 列} & \text{第 3 列} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{第 1 行} \rightarrow \\ \text{第 2 行} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$$

とすると,

$$ {}^tA = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{第 1 列} & \text{第 2 列} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{第 1 行} \Rightarrow \\ \text{第 2 行} \Rightarrow \\ \text{第 3 行} \Rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbf{R}^{3 \times 2}$$

<u>転置の性質</u>

(1) $^\forall A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, ${}^t({}^tA) = A$

(2) $^\forall A, ^\forall B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

(3) $^\forall A \in \mathbf{R}^{m \times n}, ^\forall \lambda \in \mathbf{R}$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

(4) $^\forall A \in \mathbf{R}^{m \times n}, ^\forall B \in \mathbf{R}^{n \times p}$, ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

(証明)

(1) $\sim$ (3) は，やさしい（要素毎に行えばよい）.

(4)$C = AB$ とおく. (${}^tC = {}^tB\, {}^tA$ を示す)

$C = AB \in \mathbf{R}^{m \times p}$ だから,${}^tC = {}^t(AB) \in \mathbf{R}^{p \times m}$，また,${}^tB \in \mathbf{R}^{p \times n}$, ${}^tA \in \mathbf{R}^{n \times m}$ だから ${}^tB\, {}^tA \in \mathbf{R}^{p \times,}$.

属する空間が等しいので，要素を比較する.

$({}^tC$ の (j,i) 要素$)$ を c^t_{ji} とすると，$\begin{pmatrix} 1 \le j \le p \\ 1 \le i \le m \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
c^t_{ji} &= c_{ij} \\
&= (a_{i\cdot}|b_{\cdot j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} b^t_{jk}a^t_{ki} \\
&= (b^t_{j\cdot}|a^t_{\cdot i}) \\
&= \left({}^tB{}^tA \text{ の } (j,i) \text{ 要素}\right)
\end{aligned}
$$

よって，各要素が等しいので,${}^tC ={}^t B\,{}^tA$ (証明終).

<u>正方行列 (SquareMatrix)</u>

$\mathbf{R}^{n\times n}$の要素（n 行 n 列の行列）を n 次元<u>正方行列</u>という.

$$
A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}
$$

$\boxed{\text{枠}}$で囲った $a_{ii} (1 \le i \le n)$ を A の<u>対角要素 (DiagonalElement)</u>という.

正方行列は $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$（線形変換）の表現とみることができる.

<u>単位行列 (UnitMatrix)</u>

$$
E = E_n = \begin{pmatrix} 1\cdots 0 \\ \ddots \\ 0\cdots 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})
$$

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \text{(クロネッカーのデルタ)}
$$

<u>単位行列の性質</u>

$\forall A \in \mathbf{R}^{n\times n}, AE = EA = A$

E は $\mathbf{R}^n$の恒等変換 $I = I_n$の表現.

$$
\begin{array}{cccc}
I: & \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\
 & \omega & & \omega \\
 & x & \longmapsto & I(x) = x
\end{array}
$$

<u>スカラー行列 (ScalarMatrix)</u>

$\begin{pmatrix} \lambda\cdots 0 \\ \ddots \\ 0\cdots \lambda \end{pmatrix} = \lambda E$ をスカラー行列という.

λE は $\mathbf{R}^n$ のλ倍変換の表現.

<u>零因子 (Zero − Divisor)</u>

$A \neq 0,\ B \neq 0,\ AB = 0$ のとき, A, B を零因子という.

<u>例題</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 5 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}\text{のとき,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\ (BA \neq 0)$$

<u>行列のべき乗</u>

$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$のとき,

$$A^2 = A \times A\,,\ A^3 = A \times A \times A\,, \cdots\,,\ A^k = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{k\ \text{個}} \in \mathbf{R}^{n\times n}\ (1 \leq k < \infty)$$

<u>べき乗の性質</u>

(1) $A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell}$

(2) $(A^k)^\ell = (A^\ell)^k = A^{k\ell}$

(注) 一般に $(AB)^k \neq A^k B^k$ (例えば, $(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2B^2$)

<u>べき零行列 (Nilpotent)</u>

$A \neq 0,\ A^k = 0\ ({}^\exists k \gneqq 1)$ となる A をべき零行列という.

<u>例題</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{のとき,}\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^3 = (0),\ A^k = 0 (k \leq 3)$$

（注意）べき零行列は零因子である．この例題で, $A \neq 0,\ A^2 \neq 0$ であるが,

$0 = A^3 = A \cdot A^2$である.

<u>べき等行列 (Idempotent)</u>

$A^2 = A$ である行列をべき等行列という.

<u>例</u>

$E = E_n$はべき等行列. $E_n^2 = E_n \cdot E_n = E_n$

<u>例題</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \text{であれば,}\ A^2 = A\ \text{である.}$$

<u>対称行列 (SymmetricMatrix)</u>

${}^tA = A\ (a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq^\forall i,^\forall j \leq n)$

<u>交代行列 (Skew − SymmetricMatrix)</u>

$${}^tA = -A \quad \begin{pmatrix} a_{ij} = -a_{ji}, (1 \leq^\forall i,^\forall j \leq n) \\ (\text{したがって}, a_{ii} = 0) \end{pmatrix}$$

<u>三角行列 (TriangularMatrix)</u>

<u>上三角行列 (Upper Triangular Matrix)</u> $a_{ij} = 0\ (i > j)$

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{（左下部分はすべて 0）}$$

<u>下三角行列 (Lower Triangular Matrix)</u> $a_{ij} = 0\ (i < j)$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \text{（右上部分はすべて 0）}$$

<u>対角行列 (Diagonal Matrix)</u> $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{（対角要素以外はすべて 0）}$$

<u>対角行列，零行列の言い換え</u>

$$\begin{array}{ccc} \text{対角行列} & \longleftrightarrow & \text{三角行列\&対象行列} \\ & \longleftrightarrow & \text{上三角行列\&下三角行列} \\ \text{零行列} & \longleftrightarrow & \text{対称行列\&交代行列} \\ & \longleftrightarrow & \text{対角行列\&交代行列} \\ & \longleftrightarrow & \text{三角行列\&交代行列} \end{array}$$

<u>正則行列 (Non – SingularMatrix) , 逆行列 (InverseMatrix)</u>

$A \in \mathbf{R}^{n\times n} \longrightarrow^{\exists} X \in \mathbf{R}^{n\times n}$; $AX = XA = E_n$のとき,

A を正則行列, X を A の逆行列（記号 A^{-1}) という.

逆行列は，存在するとすれば，一通り.

（証明）

X と Y を A の逆行列とすると, $X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$（証明終）

<u>逆行列の性質</u>

(1) A : 正則 $\longrightarrow A^{-1}$: 正則, $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A : 正則 $\longrightarrow {}^tA$: 正則, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

(3) A, B : 正則 $\longrightarrow AB$: 正則, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>直交行列 (OrthogonalMatrix)</u>

$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$が

$$\begin{cases} {}^tAA = E_n \\ A{}^tA = E_n \end{cases}$$

をみたす,（すなわち,${}^tA = A^{-1}$である）とき, A を直交行列という.

直交行列の性質

$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$が直交行列であれば, $\begin{cases} a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \end{cases}$

但し,δ_{ij}はクロネッカーのデルタ (Kronecker delta)： $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ (i=j) \\ 0\ (i \neq j) \end{cases}$

（証明）

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とする.

${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ であり,${}^tAA = E_n$であるから,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

したがって, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

同様に, $A^tA = E_n$ より, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$（証明終）.

1 次写像と，その表現としての行列との関係（まとめ）

合成写像 $\Longleftrightarrow$ 行列の積

変換 $\Longleftrightarrow$ 正方行列

恒等変換 $\Longleftrightarrow E_n$

逆変換 $\Longleftrightarrow$ 逆行列

直交変換 $(|x| = |f(x)|) \Longleftrightarrow$ 直交行列

連立 1 次方程式（解が一意的に決まる場合）

$Ax = b$; $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbf{R}^n$, A : 正則ならば

$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

行列の階数 (Rank)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n}$とするとき,

$a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}$から，適当にベクトルを選びそれらのベクトルの組（集合）が 1 次独立なものの中でベクトルの個数が最大となる組を構成するときのベクトルの個数を，この行列 A の階数といい, $\mathrm{Rank}(A)$ と表す．した

がって, Rank(A) は 0 または自然数である.

定理 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$に対し，次の 5 条件は同値である.

(1) A は正則，すなわち,$^\exists X \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $XA = AX = E_n$

(2) A の n 個の列ベクトルの組が線形独立．すなわち, $\mathrm{Rank}(A) = n$

(3) A の n 個の行ベクトルの組が線形独立．すなわち. $\mathrm{Rank}({}^tA) = n$

(4) $^\exists X \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $XA = E_n$

(5) $^\exists X \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $AX = E_n$

（証明）略.

行列式

$$\begin{array}{cccc}
\det : & \mathbf{R}^{n\times n} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\
 & \omega & & \omega \\
 & A = (a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}) & \longmapsto & \det(A) = \det(a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}) \\
 & (n \text{ 次正方行列}) & &
\end{array}$$

が次の (1) ∼ (3) の性質を満たすとき, $\det(A)$ を A の行列式といい，記号で $\det(A)$ あるいは $|A|$ と表す.

（注意）「絶対値」と同じ記号を使うが, $|A| < 0$ のこともあるので，注意する.

(1) 双線形 (Bi-linear) と呼ばれる性質

1. $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j} + b_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$
   $= \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) + (a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{b_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$
2. $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{\lambda a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$
   $= \lambda \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

(2) $a_{\cdot i} = a_{\cdot j}$, $(i \neq j) \longrightarrow \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = 0$

(3) $\det(E_n) = 1$

行列式の性質

行列式は，さらに，次の (4) ∼ (6) の性質をみたす.

(4) $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = -\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$ $(i \neq j)$

(5) $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + \lambda a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$ $(i \neq j)$

(6) A が正則でない $\Longrightarrow \det(A) = 0$

（証明）

(4) $0 \underbrace{=}_{(2)} \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$\underbrace{=}_{(1)1.} \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) + \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$\underbrace{=}_{(1)1.} \underbrace{\boxed{\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})}}_{=0(2)} + \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$+ \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) + \underbrace{\boxed{\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})}}_{=0(2)}$

$\longrightarrow \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = -\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

(5) $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + \lambda a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$\underbrace{=}_{(1)1.} \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) + \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{\lambda a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$\underbrace{=}_{(1)2.} \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) + \lambda \underbrace{\boxed{\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})}}_{=0(2)}$

$\longrightarrow \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} + \lambda a_{\cdot j}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot j}}_{j\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

(6) A が正則でない $\longrightarrow$ A の列ベクトルの集合 $\{a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}\}$ が線形独立でない（線形従属）

$\longrightarrow^{\exists}\, i; a_{\cdot i} = \lambda_1 a_{\cdot 1} + \cdots + \lambda_{i-1} a_{\cdot i-1} + \lambda_{i+1} a_{\cdot i+1} + \cdots + \lambda_n a_{\cdot n}$

$\longrightarrow a_{\cdot i} - \lambda_1 a_{\cdot 1} - \cdots - \lambda_{i-1} a_{\cdot i-1} - \lambda_{i+1} a_{\cdot i+1} - \cdots - \lambda_n a_{\cdot n} = 0$

(5) を繰り返し用いると, $\det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$= \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i} - \lambda_1 a_{\cdot 1} - \cdots - \lambda_{i-1} a_{\cdot i-1} - \lambda_{i+1} a_{\cdot i+1} - \cdots - \lambda_n a_{\cdot n}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n})$

$= \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{0}_{=0\cdot a_{\cdot i}, (i\text{ 列目})}, \cdots, a_{\cdot n}) = 0 \det(a_{\cdot 1}, \cdots, \underbrace{a_{\cdot i}}_{i\text{ 列目}}, \cdots, a_{\cdot n}) = 0$

<u>例</u> $n = 2$ のとき，行列式の性質 (1) $\sim$ (6) を示す.

(1) 1. $\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & \mu b \\ c & \mu d \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(4) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+\mu a \\ c & d+\mu c \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{vmatrix} = 0\ ,\ \begin{vmatrix} \mu a & a \\ \mu c & c \end{vmatrix} = 0$

行列式の性質$A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$のとき,

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(2) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$ (A : 正則)

(3) $\det({}^tA) = \det(A)$

小行列，小行列式

$m \times n$ 行列 A の内, p 個の行と p 個の列を任意に選んでつくった p 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ & \cdots & \\ a_{i_pj_1} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 \lneqq i_2 \lneqq \cdots \lneqq i_p \leq m \\ 1 \leq j_1 \lneqq j_2 \lneqq \cdots \lneqq j_p \leq n \end{matrix} \quad ({}_mC_p \times_n C_p\text{個ある})$$

を p 次小行列, p 次小行列の行列式を p 次小行列式という.

(注意) $\mathrm{Rank}(A) = r$ とすると, A の r 次の小行列式で 0 でないものが存在し, A の $(n+1)$ 次以上の小行列式はすべて 0 である.

$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$とする.

$$A = \left(\underbrace{a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}}_{\text{列ベクトル}}\right) = \left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_11}e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_nn}e_{i_n}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\det(A) = \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_11}e_{i_1}, a_{\cdot 2}, \cdots, a_{\cdot n}\right) \underbrace{=}_{\substack{(1)1. \\ (1)2.}} \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_11}\det(e_{i_1}, a_{\cdot 2}, \cdots, a_{\cdot n})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_11}\left(\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_22}\det(e_{i_1}, e_{i_2}, a_{\cdot 3}, \cdots, a_{\cdot n})\right) \underbrace{=}_{\text{展開すると}} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_11}a_{i_22}\det(e_{i_1}, e_{i_2}, a_{\cdot 3}, \cdots, a_{\cdot n})$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\det(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}) \ \ldots\ (n^n\text{個の項}).$$

ここで, $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}$の中に同じものが2個以上あるとその項は0 ($\det(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}) = 0$ (行列式の性質 (2) より)) である.

$\det(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}) = 0$ とならない項は, $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}$がすべて異なる，すなわち, $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}$が $e_1, \cdots e_n$を並べ替えたもの（置換という）のときのみである．そのような $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_n}$ の組は, ${}_nP_n = n!$個ある．

例 $2^2 = 4, 2! = 2; 3^3 = 27, 3! = 6; 4^4 = 256, 4! = 24; \cdots$

置換と互換

変換$\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$ が $\{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)\} \underbrace{=}_{\text{集合として}} \{1, 2, \cdots, n\}$ をみたすとき,

σを $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換（並べ替え）という．

$1, 2, \cdots, n$ に対して $i_1, i_2, \cdots, i_n$を対応させる置換をσとすると ($\sigma(1) = i_1, \cdots \sigma(n) = i_n$),

$$\det(A) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots e_{\sigma(n)}\right)$$

置換の内，ある二つの文字のみを交換し，残りは変えないものを互換という．

σが互換のときは, $\det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots e_{\sigma(n)}\right) \underbrace{=}_{\text{行列式の性質 (4)}} -\det(e_1, e_2, \cdots e_n) \underbrace{=}_{\text{行列式の性質 (3)}} -1$ である．

一般の置換は互換の繰り返し（積）により到達する．到達のしかたは一意ではないが，常に偶数回の互換（偶置換）か．常に奇数回の互換（奇置換）の積により到達する（行列式は一意的に決まるため）．

$$\mathrm{sgn}(\sigma) \overset{\leftarrow}{=} \det(e_{\sigma(1)}, \cdots e_{\sigma(n)}) = \begin{cases} 1 & \sigma : \text{偶数回の互換の積（偶置換）} \\ -1 & \sigma : \text{奇数回の互換の積（奇置換）} \end{cases}$$ とすると,

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$n \times n$ 行列 A の行列式の計算法

$n = 1$ のとき, $A = (a) \Rightarrow \det((a)) = a$

$n \geq 2$ のとき,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \Longleftarrow \text{行列式の第 } i \text{ 行に関する余因数展開}$$

ただし, i は $1 \leq i \leq n$ の整数のいずれか. D_{ij}は A から第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次小行列の行列式. $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$を a_{ij}の余因数，余因子 (Cofactor) という．

(注意) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij} \Longleftarrow$ 行列式の第 j 列に関する余因数展開

例題 1　2 次正方行列の行列式

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} \\
&\underbrace{=}_{i \text{ は } (1 \leq i \leq 2 \text{ をみたす適当な整数だから}, i=1 \text{ とする.}} \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} \\
&= \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} a_{11} \underbrace{D_{11}}_{=a_{22}} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=-1} a_{12} \underbrace{D_{12}}_{=a_{21}} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

参考

a_{11}	a_{12}	$\longleftarrow$ 第 1 行を取り除く
a_{21}	$\boxed{a_{22}}$	$= D_{11}$
$\uparrow$ 第 1 列を取り除く		

$D_{11} = a_{22} \Longrightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = a_{22}$

$$\begin{array}{ccl} a_{11} & a_{12} & \leftarrow \text{第 1 行を取り除く} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \\ = D_{12} & \underset{\text{第 2 列を取り除く}}{\uparrow} & \end{array} \quad D_{12} = a_{21} \Longrightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -a_{21}$$

例題 2　3 次正方行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$$

$$\underbrace{=}_{i\text{ は }(1\leq i\leq 3\text{ をみたす適当な整数だから, }i=1\text{ とする.}} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} a_{11} \underbrace{D_{11}}_{=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=-1} a_{12} \underbrace{D_{12}}_{=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}} + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{=1} a_{13} \underbrace{D_{13}}_{=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

参考

$$\begin{array}{cccl} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \leftarrow \text{第 1 行を取り除く} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \\ \underset{\text{第 1 列を取り除く}}{\uparrow} & & & \end{array} \quad D_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccl} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \leftarrow \text{第 1 行を取り除く} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \\ & \underset{\text{第 2 列を取り除く}}{\uparrow} & & \end{array} \quad D_{12} = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccl} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \leftarrow \text{第 1 行を取り除く} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & \\ & & \underset{\text{第 3 列を取り除く}}{\uparrow} & \end{array} \quad D_{13} = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

(再掲) $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

例題 1 と例題 2 (2 次正方行列と 3 次正方行列) の行列式の計算法をサールス (サラス, Sarrus) の規則という.

(注意) このような「規則」は 4 次以上の行列式の計算法にはない.

例題 3　次の行列 $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(解)

$$
\det(A) = \det \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & \text{第 2 列}-\text{第 1 列} & \text{第 3 列}-\text{第 1 列} & \text{第 4 列}-\text{第 1 列} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot D_{12}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot D_{13}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot D_{14}}_{=0}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1
$$

<u>例題 4</u> <u>バンデルモンド (Vandermonde) 行列式</u>

$$
V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n} \text{のとき}, \det(V) \text{ を求めよ.}
$$

(解) V で $a_i = a_j \ (i \neq j)$ ならば, $\begin{pmatrix} 1 \\ a_i \\ a_i^2 \\ a_i^3 \\ \vdots \\ a_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_j \\ a_j^2 \\ a_j^3 \\ \vdots \\ a_j^{n-1} \end{pmatrix}$ であるから, $\underbrace{\det(V) = 0}_{\text{行列式の性質 (2)}}$ である.

したがって, $\det(V)$ は $(a_i - a_j)$ で割り切れる（因数定理）

$$
\left. \begin{array}{rcccc} P \stackrel{\leftarrow}{=} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) & \cdots & (a_n - a_1) \\ \times & (a_3 - a_2) & \cdots & (a_n - a_2) \\ & & \cdots & \\ & & \times & (a_n - a_{n-1}) \end{array} \right\} (n-1 \text{ 行})
$$

$= \displaystyle\prod_{i>j} (a_i - a_j)$ とおくと, $\det(V)$ は P で割り切れる.

$\det(V) \stackrel{\leftarrow}{=} \lambda P \ (\lambda \in \mathbf{R})$ とおき, $a_2 a_3^2 a_4^3 \cdots a_n^{n-1}$ の係数を比較する.

$\det(V) : 1, \ P : 1$

であるから,$\lambda = 1$. よって, $\det(V) = P = \displaystyle\prod_{i>j} (a_i - a_j)$

<u>定理</u> 行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の (r, s) 要素 a_{rs} の余因数を $A_{rs} = (-1)^{r+s} D_{rs}$ とすると,

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}\det(A) & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1\ell}+a_{2j}A_{2\ell}+\cdots+a_{nj}A_{n\ell}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{i\ell}=\begin{cases}\det(A) & (j=\ell)\\ 0 & (j\neq \ell)\end{cases}$$

(証明)

上の式で, $=\det(A)$ となる方は，行列式の定義そのものである. $=0$ となる方は,

$$(\text{左辺}) = \begin{array}{r} \\ \\ (i\text{ 行目})\rightarrow \\ \\ (k\text{ 行目})\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

下の式も同様.

(証明終)

<u>余因数行列 (AdjugateMatrix)</u>

$A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$, a_{ij}の余因数を $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$とするとき,

$$U=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ を A の余因数行列という.

（注意）番目の付け方に注意する.

<u>定理</u> $\det(A)\neq 0$ のとき, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}U$

(証明)

$$AU=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\text{直前の定理}}\begin{pmatrix} \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

$$=\det(A)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$=\det(A)E$

$\Longrightarrow A\cdot\dfrac{1}{\det(A)}U=E$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{\det(A)}U=A^{-1}$ (同値の 5 条件の定理より)

(証明終)

<u>例題</u> 次の行列の余因数行列，逆行列を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&3&2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

（解）

A の余因数行列を U とする．

$$U=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}&(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix}&(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&4\\3&2\end{vmatrix}\\(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}&(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&4\\3&3\end{vmatrix}&(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}\\(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}&(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}&(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}+(9-2)&-(6-4)&+(4-12)\\-(3-6)&+(6-12)&-(4-4)\\+(1-9)&-(2-6)&+(6-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&-8\\3&-6&0\\-8&4&4\end{pmatrix},$$

また, $\det(A)=18+12+4-36-4-6=-12\neq 0$

$$\Longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}U=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}7&-2&-8\\3&-6&0\\-8&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{12}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

B の余因数行列を V とする．

$$V=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{21}&B_{31}\\B_{12}&B_{22}&B_{32}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+(45-48)&-(18-24)&+(12-15)\\-(36-42)&+(9-21)&-(6-12)\\+(32-35)&-(8-14)&+(5-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix},$$

また, $\det(B)=45+84+96-105-48-72=0$

$\Longrightarrow B$ の逆行列は存在しない．

<u>連立１次方程式（線形方程式）</u>

（方程式の個数と未知数の個数が等しい場合）

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

は, $A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\\cdots\\a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$ とおくと, $Ax=b$ とかける．ここで,

A が正則であれば, $A^{-1}(Ax)=x=A^{-1}b$ である．

<u>例題</u> 次の連立１次方程式を解け． $\begin{cases}2x_1+2x_2+4x_3&=&18\\4x_1+3x_2+3x_3&=&19\\3x_1+x_2+3x_3&=&14\end{cases}$

解 $A \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$, $x \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ 14 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とおく.

$\det(A) = 18 + 18 + 16 - 36 - 6 - 24 = -14 \neq 0$,

A の余因数行列 $U = \begin{pmatrix} +(9-3) & -(6-4) & +(6-12) \\ -(12-9) & +(6-12) & -(6-16) \\ +(4-9) & -(2-6) & +(6-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -3 & -6 & 10 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} U = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$$

$$\Longrightarrow x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}\times 18 + \frac{1}{7}\times 19 + \frac{3}{7}\times 14 \\ \frac{3}{14}\times 18 + \frac{3}{7}\times 19 - \frac{5}{7}\times 14 \\ \frac{5}{14}\times 18 - \frac{2}{7}\times 19 + \frac{1}{7}\times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-54+19+42}{7} \\ \frac{27+57-70}{7} \\ \frac{45-38+14}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（解）$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

定理　クラーメル (Cramel) の公式

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ とおくと,

$Ax = b$ は, A が正則ならば, $x_i = \dfrac{D_i}{\det(A)}$ $(1 \leq i \leq n)$

但し,　　D_iは A の第 i 列を右辺のベクトル b で置き換えた行列の行列式.

（証明）

$A^{-1} \overset{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ とおくと,

$$Ax = b \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_i = c_{i1}b_1 + \cdots + c_{in}b_n \ (1 \leq i \leq n)$$

ところで, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} U \Leftrightarrow c_{ij} = \dfrac{(-1)^{j+i} D_{ji}}{\det(A)}$ だから,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overbrace{(-1)^{j+i} D_{ji}}^{=A_{ji}}}{\det(A)} \cdot b_j = \frac{1}{\det(A)} \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji} \right)}^{（注）} = \frac{D_i}{\det(A)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

（注）最後の () 内は, A の第 i 列を右辺のベクトル $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ で置き換えた行列の行列式すなわち, D_i

$(c.f.)\ \det(A) = a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}$

例題 次の連立 1 次方程式を解け. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

解 $A \stackrel{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$, $x \stackrel{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b \stackrel{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とおく.

$\det(A) = -6 - 6 + 30 - 8 - 27 - 5 = -22 \neq 0$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ \mathbf{8} & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 3 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 3 + 48 - 4 - 9 - 8 = 22$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{1} & 2 \\ 5 & \mathbf{8} & 3 \\ 2 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix} = -24 + 6 + 10 - 32 - 9 + 5 = -44$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & \mathbf{1} \\ 5 & 2 & \mathbf{8} \\ 2 & 3 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 6 - 16 + 15 - 4 - 72 + 5 = -66$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{22}{-22} = -1\,,\ x_2 = \frac{-44}{-22} = 2\,,\ x_3 = \frac{-66}{-22} = 3$$

(解) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

一般の連立 1 次方程式の解法

係数行列 A が非正方行列の場合や，正方行列であっても $\det(A) = 0$ すなわち，非正則行列の場合（クラーメルの公式が使えない場合）も含む.

(注意）クラーメルの公式は理論計算では重要であるが，実際の数値の計算では効率が良くない．一般の連立 1 次方程式の解法には,「掃き出し法」を用いる.

補題（1 次方程式の解の構造）

$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$のとき,

(1)$Ax = 0$ の解全体 $\mathbf{R}^*$は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる.

さらに, ($\mathbf{R}^*$の 1 次独立なベクトルの数の最大値，すなわち, $\mathbf{R}^*$の次元) $= n - \mathrm{Rank}(A)$ である.

(注) $\mathbf{R}^*$を A が表現している写像の kernel(核) という.

(2)$Ax = b$ が少なくとも 1 個の解を持つ $\Longleftrightarrow$ $\overbrace{\mathrm{Rank}(Ab)}^{A\text{ の列ベクトルと } b \text{ を並べた行列の Rank}} = \mathrm{Rank}(A)$

さらに, x_0を $Ax = b$ の解の一つとすると,

($Ax = b$ の一般解) $= x_0 +$ ($Ax = 0$ の一般解) である.

(証明略)

(注意)

(1) $n > m$ のとき，すなわち,「変数の個数」>「方程式の個数」とすると, $\mathrm{Rank}(A) \leq m < n$ より, $\mathbf{R}^*$の 1 次独立なベクトルの最大個数 $\geq n - m > 0$ であるから, $Ax = 0$ の解で $x \neq 0$ であるものが無数に存在する.
したがって, $Ax = b$ の解は，存在するとすれば，無数に存在する.

(2) $n = m$ で. A が正則のときは, $\mathrm{Rank}(A) = n$ より
($\mathbf{R}^*$の 1 次独立なベクトルの最大個数)，すなわち, $\mathbf{R}^*$の次元 $= n - \mathrm{Rank}(A) = 0$
よって, $Ax = 0$ の解は $x = 0$ のみである．したがって, $Ax = b$ の解も一つのみ $(x = A^{-1}b)$ である.

<u>一般の連立 1 次方程式の解法</u>

$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$ とする．連立 1 次方程式 $Ax = b$ を解くには

(1) 適当な正則行列 P と置換行列 Q を用いて,
$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形に変形する（掃き出し計算 (Sweep – out) という）.
このとき, $Ax = b$ と $PAQ(Q^{-1}x) = Pb$ は同値である.

$$Q \text{ は置換行列} \left(\text{すなわち，互換行列}: \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \text{の積} \right) \text{であるか}$$

ら, Q^{-1}も置換行列で, $Q^{-1}x$ は, x の成分を置換したものである.

$$Q^{-1}x = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_{1\,1} & \cdots & c_{1\,n-r} \\ & \cdots & \\ c_{r\,1} & \cdots & c_{r\,n-r} \end{pmatrix}, \ Pb = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \text{ となったとすると,}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

すなわち, $\begin{cases} x_{i_1} & & +c_{11}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{1\,n-r}x_{i_n} & = & d_1 \\ & \ddots & \cdots & & \vdots \\ & x_{i_r} & +c_{r1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{r\,n-r}x_{i_n} & = & d_r \\ & & 0 & = & d_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & 0 & = & d_m \end{cases}$

と同値である.

(2) したがって.

(i) $d_{r+1},\ldots,d_m$の中に0でないものが一つでもあれば, $Ax=b$は解を持たない.

(ii) $d_{r+1}=\cdots=d_m=0$ならば, $x_{i_{r+1}},\ldots,x_{i_n}$の値を$\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r}$(任意)とし,

$$\begin{cases} x_{i_1} & = & d_1-c_{11}\lambda_1-\cdots-c_{1\,n-r}\lambda_{n-r} \\ & \vdots & \\ x_{i_r} & = & d_r-c_{r1}\lambda_1-\cdots-c_{r\,n-r}\lambda_{n-r} \\ x_{i_{r+1}} & = & \lambda_1 \\ & \vdots & \\ x_{i_n} & = & \lambda_{n-r} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}$ により，解が求められる.

（参考）（注）例 $x\in\mathbf{R}^3$のとき,

Qが，はじめに1番目と2番目を入れ替え，次に1番目と3番目を入れ替えるものであれば,

Q^{-1}は逆に，はじめに1番目と3番目を入れ替え，次に1番目と2番目を入れ替えるものである.

$Q:(123)\Rightarrow(213)\Rightarrow(312)$

$Q^{-1}:(123)\Rightarrow(321)\Rightarrow(231)$

$$Q=\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix},\ Q^{-1}=\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2\\x_3\\x_1 \end{pmatrix},\ Q\begin{pmatrix} x_2\\x_3\\x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix},\ \left(Q\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3\\x_1\\x_2 \end{pmatrix}\right)$$

<u>例題1</u> 次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ -x_1 & +7x_2 & +6x_3 & & = & 9 \\ & +3x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = & -15 \\ x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +2x_4 & = & 7 \end{cases}$$

（解）　便宜的に係数行列と右辺を並べて書く.

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&4&4&5\\-1&7&6&0&9\\0&3&3&7&-15\\1&4&5&2&7\end{array}\right)\xrightarrow[1\text{ 行}\leftrightarrow 4\text{ 行}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&5&2&7\\-1&7&6&0&9\\0&3&3&7&-15\\3&1&4&4&5\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{2\text{ 行}+1\text{ 行}\\4\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&5&2&7\\0&11&11&2&16\\0&3&3&7&-15\\0&-11&-11&-2&-16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行}+2\text{ 行}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&5&2&7\\0&11&11&2&16\\0&3&3&7&-15\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[2\text{ 行}-4\times 3\text{ 行}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&5&2&7\\0&-1&-1&-26&76\\0&3&3&7&-15\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{1\text{ 行}+4\times 2\text{ 行}\\3\text{ 行}+3\times 2\text{ 行}}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&-102&311\\0&-1&-1&-26&76\\0&0&0&-71&213\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{2\text{ 行}\times(-1)\\3\text{ 行}\times\left(-\frac{1}{71}\right)}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&-102&311\\0&1&1&26&-76\\0&0&0&1&-3\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\boxed{3\text{ 列}\leftrightarrow 4\text{ 列}}]{\boxed{*}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-102&1&311\\0&1&26&1&-76\\0&0&1&0&-3\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{1\text{ 行}+102\times 3\text{ 行}\\2\text{ 行}-26\times 3\text{ 行}}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&5\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&-3\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$Q^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{pmatrix}\quad\left(\boxed{*}\text{で第 3 列と第 4 列を入れ替えたから.}\right)$$

$$\Longrightarrow Ax=b\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{PAQ}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{pmatrix}}_{Q^{-1}b}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\0\end{pmatrix}}_{Pb}$$

$\Longleftrightarrow x_3=\lambda$とおくと,

$$\begin{cases}x_1+\lambda&=&5\\x_2+\lambda&=&2\\x_4&=&-3\\x_3&=&\lambda\end{cases}$$

$$(\text{解})\begin{cases}x_1&=&5-\lambda\\x_2&=&2-\lambda\\x_3&=&\lambda\\x_4&=&-3\end{cases}$$

例題 2 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & +5x_2 & -6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 1 \end{cases}$$

（解） 便宜的に係数行列と右辺を並べて書く.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 行}-2\times 1\text{ 行}]{\text{2 行}-5\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & 9 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{3 行}-2\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

よって, $\mathrm{Rank}A = 2 \neq 3 = \mathrm{Rank(A|b)}$（あるいは, 3 行目は $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$ となり矛盾する.）よって,

解：解なし

例題 3 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -7 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$

（解） 便宜的に係数行列と右辺を並べて書く.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1 行}\Leftrightarrow\text{2 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{3 行}-3\times 1\text{ 行} \\ \text{4 行}-1\text{ 行}}]{\text{2 行}-2\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2 行}\Leftrightarrow\text{3 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2 行}\times\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{3 行}+5\times 2\text{ 行} \\ \text{4 行}-2\text{ 行}}]{\text{1 行}-2\times 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{4 行}\times\frac{1}{3}]{\text{3 行}\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2 行}-3\text{ 行}+4\text{ 行}]{\text{1 行}+3\text{ 行}-4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(列の入れ替えなしだから) （解） $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

例題 4 次の行列の階数 Rank を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\5&6&4\\1&3&-1\end{pmatrix}$$

(解) $A=A=\begin{pmatrix}1&0&2\\5&6&4\\1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}]{2\text{行}-5\times1\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&6&-6\\0&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2\text{行}\times\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{行}-3\times2\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$(A)\Longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&*\\0&1&*\\\hline 0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow \underline{\mathrm{Rank}(A)=2}$

例題 5 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&2\\2&-1&3\end{pmatrix}$$

(解) $(A|E_3)=A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\3&2&2&0&1&0\\2&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[3\text{行}-2\times1\text{行}]{2\text{行}-3\times1\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&-1&-3&1&0\\0&-3&1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2\text{行}\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&3&-1&0\\0&-3&1&-2&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[3\text{行}+3\times2\text{行}]{1\text{行}-2\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&1&3&-1&0\\0&0&4&7&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{3\text{行}\times\frac{1}{4}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&1&3&-1&0\\0&0&1&\frac{7}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\xrightarrow{2\text{行}-3\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&0&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{7}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$

$$\underline{(\text{解})\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{7}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$