統計学II

早稲田大学政治経済学術院
西郷 浩

本日の目標

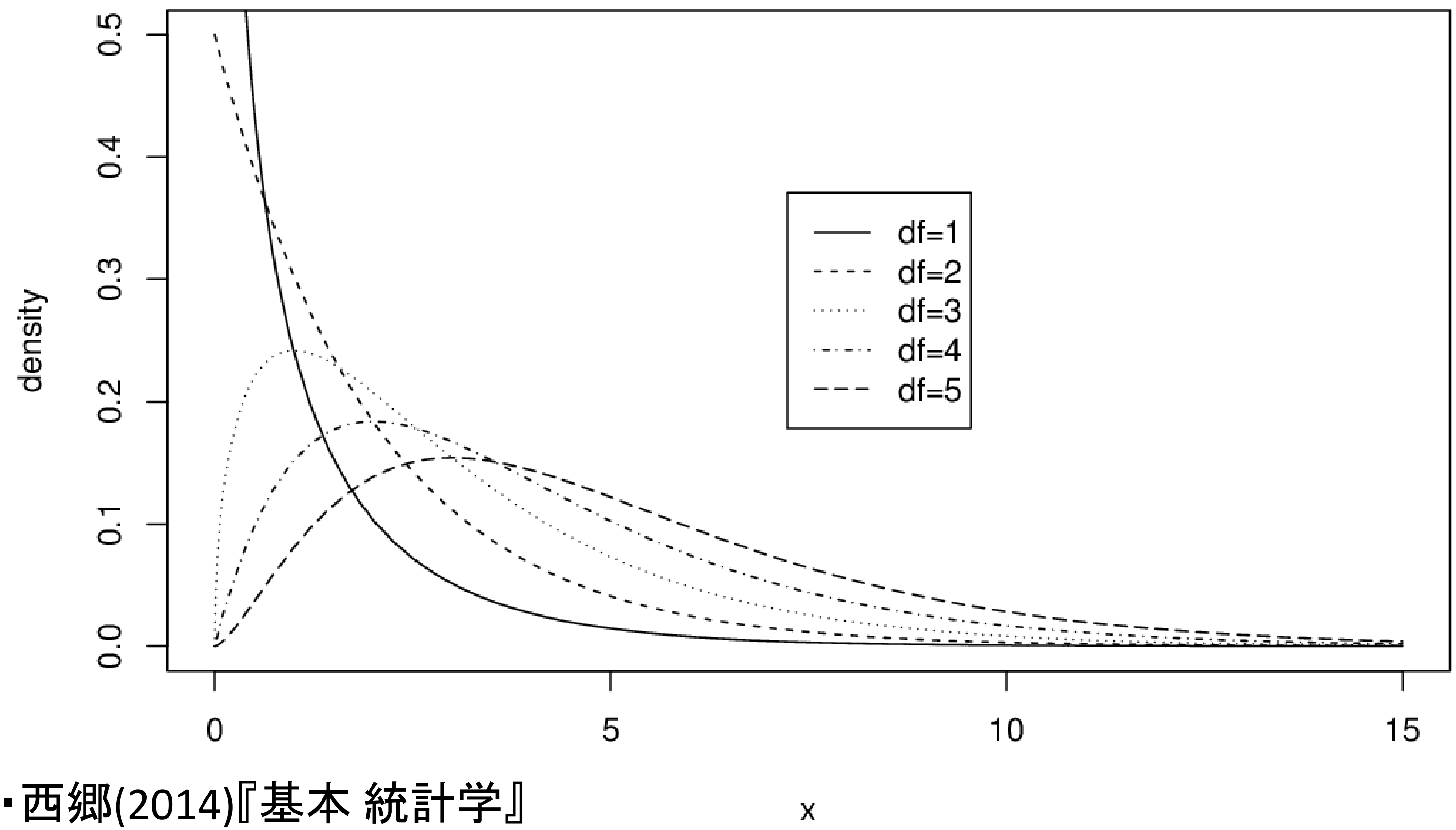
- 正規分布から派生する3つの分布の紹介
  - χ^2 分布
  - t 分布
  - F 分布
- 同じ正規分布から独立に発生したデータ
  - 算術平均(標本平均)
  - 分散(標本分散)
  - 両者が独立になる。
    - 位置の情報(標本平均)とバラつきの情報(標本分散)とを別個に扱える。

χ^2分布(1)

- 標準正規確率変数
  - $Z_i \sim_{iid} N(0,1), i = 1, 2, \dots, m$.
- 新しい確率変数を作成する。
  - $Y_m = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_m^2$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
  - $Y_m \sim \chi^2(m)$　　（自由度 m の χ^2 分布にしたがう確率変数）
- χ^2 分布の性質
  - 非負の実現値
  - 自由度によって確率分布の形状が変化する。
  - $E(Y_m) = m$
  - $V(Y_m) = 2m$

χ^2分布(2)

図1 : χ^2 分布の確率密度関数の例



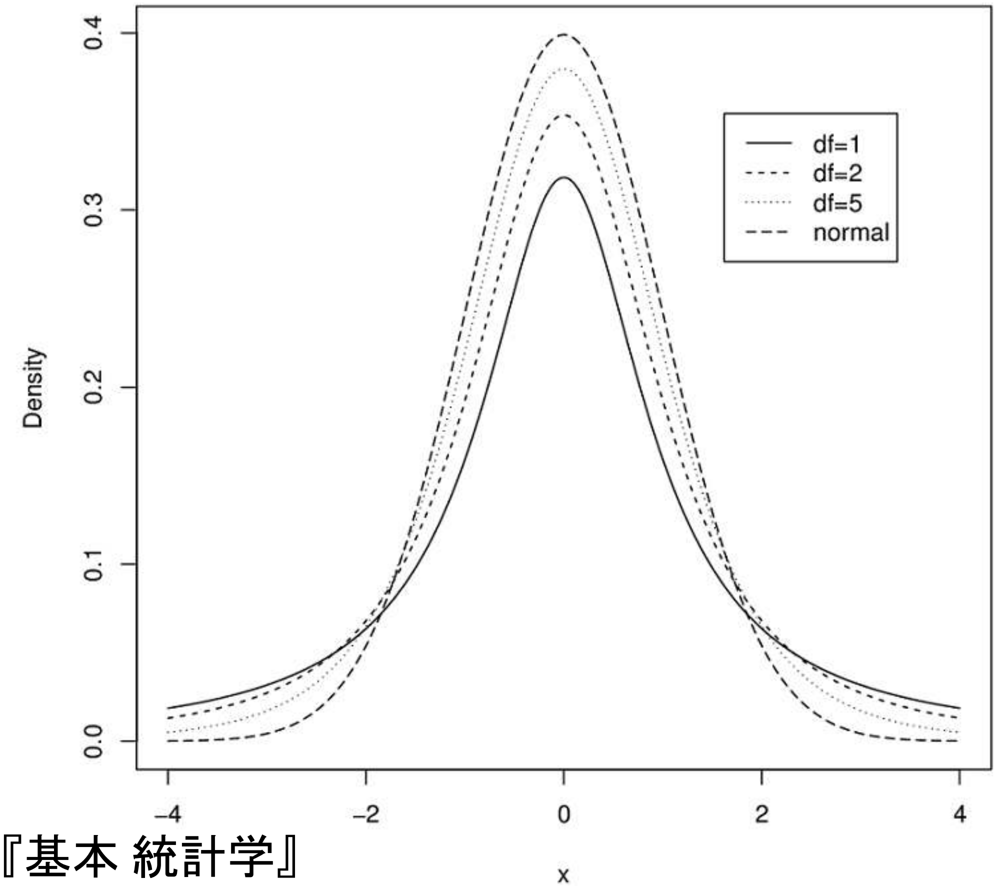
野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 100.

t分布(1)

- 標準正規確率変数と χ^2 確率変数
  - $Z \sim N(0,1), Y_m \sim \chi^2(m)$
    - 両者が独立とする。
- 新しい確率変数を作成する。
  - $X = \frac{Z}{\sqrt{Y_m/m}}$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
  - $X \sim t(m)$ （自由度 m の t 分布）
- t分布の性質
  - 対称分布（正規分布と似ている but 似て非なるもの）
  - 自由度によって確率分布の形状が変わる。
  - $E(X) = 0$ ($m > 1$)
  - $V(X) = \frac{m}{m-2}$ ($m > 2$)

t 分布(2)

図2 : t 分布の確率密度関数の例



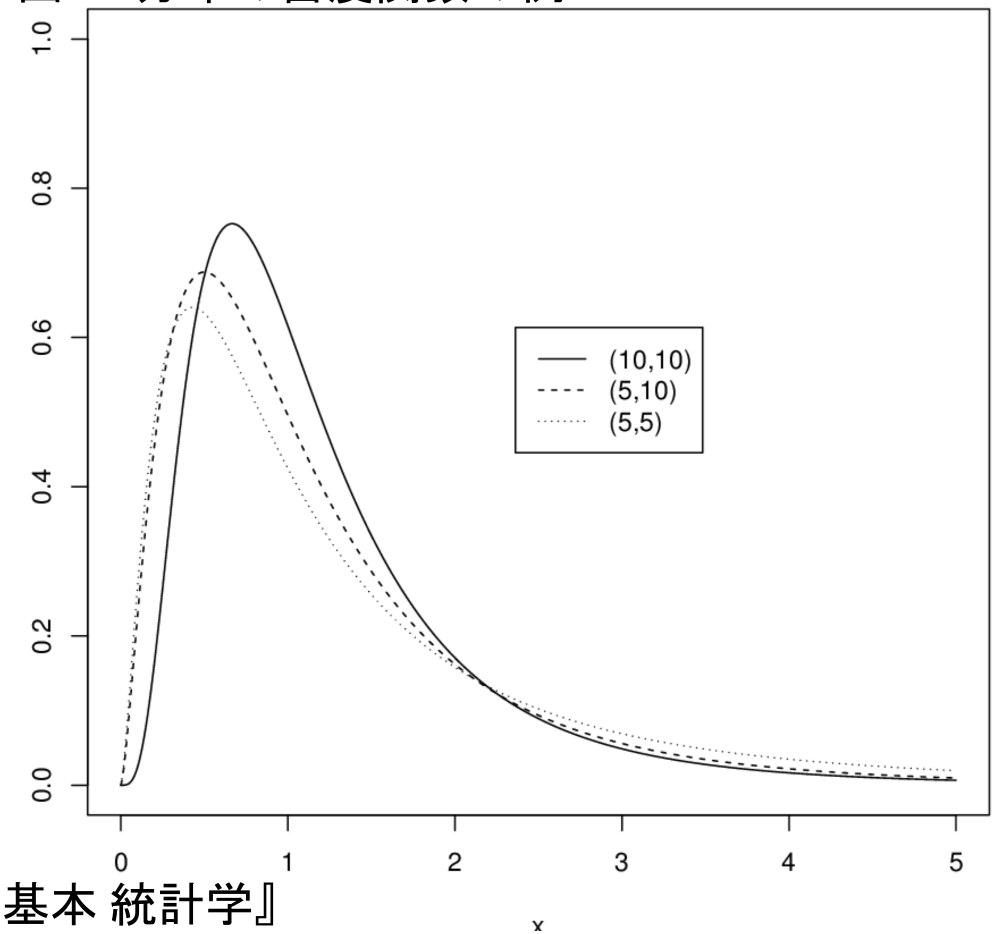
野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 101.

F 分布(1)

- 2つの χ^2 確率変数
  - $Y_{m_1} \sim \chi^2(m_1), Y_{m_2} \sim \chi^2(m_2)$
    - 両者は独立であるとする。
- 新しい確率変数を作成する。
  - $X = \frac{Y_{m_1}/m_1}{Y_{m_2}/m_2}$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
  - $X \sim F(m_1, m_2)$　　（自由度 (m_1, m_2) の *F* 分布
- *F* 分布の性質
  - 非負の実現値
  - 自由度によって確率分布の形状が変わる。
  - $E(X) = m_2/(m_2 - 2)$　　$(m_2 > 2)$
  - $V(X) = 2m_2^2(m_1 + m_2 - 2)/\{m_1(m_2 - 2)^2(m_2 - 4)\}$ $(m_2 > 4)$

F 分布(2)

図3：F分布の密度関数の例



野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 103.

正規母集団からの標本(1)

- 正規母集団からの無作為標本
  - $X_i \sim_{iid} N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \ldots, n.$
- このとき、以下の性質が示せる。

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ は標本（不偏）分散と呼ばれる。

(3) 上の2つの確率変数が独立である。

正規母集団からの標本(2)

- 性質(1)
  - $\bar{X}$ が（多変量）正規分布の一次結合で表せることからわかる。
    - $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$
    - $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$

正規母集団からの標本(3)

- 性質(2), (3)
  - 数学的な説明は教科書を参照のこと。
- とくに、性質(3)が有用
  - 正規母集団からの標本については、以下の2つの標本情報が独立（互いに無関係）になる。
    - 分布の中心の位置（標本平均）
    - 分布の散らばり（標本分散）
  - 1～3番目の性質から、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$ となる。