日本経済論(2020年春学期)

補足資料 (1)

寄与度分解の求め方

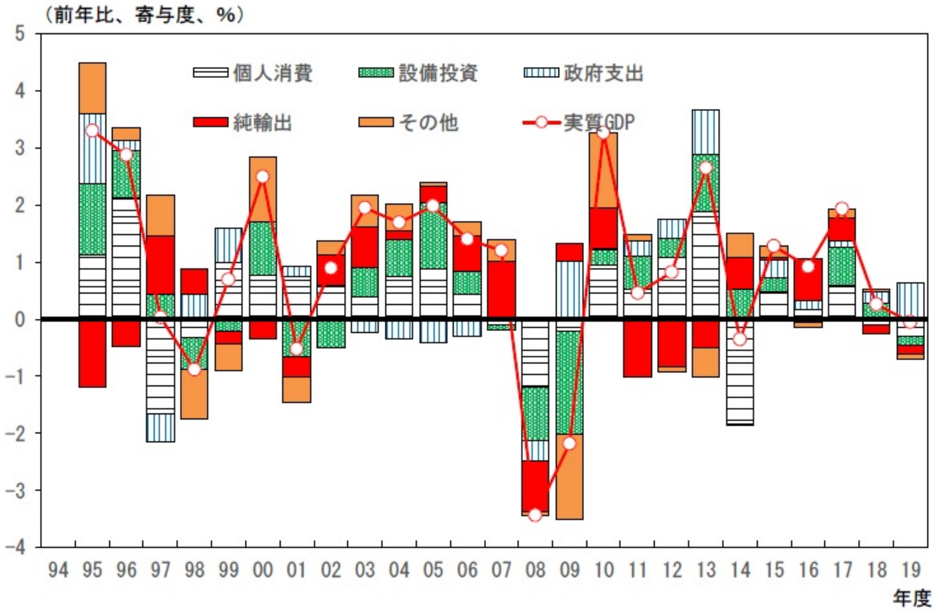
篠 潤之介

1　寄与度分解について

1.1　はじめに

寄与度分解(=**要因分解**)とは, ある変数(例えば実質GDP)の変化に対し, その変数の構成要素(例えば消費, 投資, 輸出, ... それぞれを**コンポーネント(Component)**と呼びます)の変化がどの程度影響を与えたか, すなわち**寄与度=Contribution**をみる分析手法です. 図1は実質GDP変化率(ここでは前年度比)の推移(折れ線グラフ)を, それぞれのコンポーネントの寄与度(棒グラフの積み上げ)で表したものです.

図1: 実質GDP変化率の寄与度分解



寄与度分解には様々なパターンがあります. 最も重要な点は, **自分自身で寄与度分解の式(以下「寄与度分解式」と呼びましょう)が導出できるようになることです**[1]. 寄与度分解式が導出でき, 対応するデータを入手すれば, すぐに図1のようなグラフを書くことが可能になります.

さて, 寄与度分解式を導出するアプローチは, 以下の2つに大別されます:

寄与度分解式導出のための「2つのアプローチ」

- **<アプローチ1>差分表現を用いて, 「厳密に」寄与度分解式を導出する.**
- **<アプローチ2>(全)微分表現を用いて, 「近似的に」寄与度分解式を導出する.**

厳密なのは<アプローチ1>ですが, 寄与度分解の対象となる変数(GDP, 失業率, 有効求人倍率, などなど)のパターンによって導出方法が異なり, かつそれぞれ寄与度分解式に至るまでにはある種の数学的な「工夫」が必要です. 一方, <アプローチ2>は, (全)微分さえできれば, 近似的

[1]本稿は, 筆者(篠)が日本銀行で経済情勢分析の仕事についてから, 日銀の過去の分析資料や白書で寄与度分解式を見るたびに, 「どうやってこの式の導出を思いつたのか」まったく理解できなかった経験に基づいています.

とはいえ, 寄与度分解式を「工夫要らず」で一気に導出することができます. いずれのアプローチでも重要な点は, **変数の定義式から出発して, その変数を寄与度分解したい形式 (前期比や前期差など) に書き直していくことです**. それでは, 以下の 3 つのケースそれぞれについて, ＜アプローチ 1 ＞と＜アプローチ 2 ＞を用いた寄与度分解式の導出について, 説明していきます.

寄与度分解の３つのケース

- (**ケース 1: 和で定義される変数**) $Z_t = X_t + Y_t$ で定義される変数 Z_t について, Z_t の**変化率 (前期比) を寄与度分解**する.
  - 実質 GDP の前年比 (=変化率) を, コンポーネント別に要因分解するケースなどがこれに該当します.
- (**ケース 2: 積で定義される変数**) $Z_t = X_t Y_t$ で定義される変数 Z_t について, Z_t の**変化率 (前期比) を寄与度分解**する.
  - 生産関数で表現される生産量 Z_t の変化率を, それぞれの生産要素 (例えば労働 X_t と資本 Y_t) で要因分解するケースなどがこれに該当します.
- (**ケース 3: 比率で定義される変数**) $Z_t = X_t / Y_t$ で定義される変数 Z_t について, Z_t の**差分 (前期差) を寄与度分解**する.
  - 例えば有効求人倍率は＜有効求人数/有効求職数＞で定義されるので, このケースにあてはまりますが, 倍率については前期からの変化「率」ではなく, 前期からの「差分」すなわち前期差で評価することが一般的です. 有効求人倍率の前期差を, 「有効求人要因」と「有効求職要因」に要因分解するケースなどがこれに該当します.

1.2 ＜アプローチ１＞差分表現を用いて, 厳密に寄与度分解式を導出する方法

1.2.1 ケース 1: 和で定義される変数 $Z_t = X_t + Y_t$ の変化率 (前期比) を寄与度分解する

まず, **定義式から出発して, 左辺を Z_t の前期比, すなわち $(Z_t - Z_{t-1})/Z_{t-1}$ に近づけること**を目指します.

$$
\begin{array}{rcll}
Z_t & = & X_t + Y_t & (Z_t \text{ の定義式}) \\
-)Z_{t-1} & = & X_{t-1} + Y_{t-1} & (\text{t-1 期についても定義式は成立する}) \\
\hline
Z_t - Z_{t-1} & = & (X_t - X_{t-1}) + (Y_t - Y_{t-1}) & (\text{辺々引く})
\end{array}
$$

ここから両辺を Z_{t-1} で割ると,

$$
\underbrace{\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{Z_t\text{の前期比}} = \underbrace{\frac{X_t - X_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{\textbf{X}\text{ 要因}} + \underbrace{\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{\textbf{Y}\text{ 要因}}. \tag{1}
$$

となります．以上で寄与度分解の導出は終了です (これだけ!)．右辺の第 1 項を「変数 X 要因」, 第 2 項を「変数 Y 要因」と呼びます．例えば Z を GDP, X を消費, Y を投資とすれば (単純化のため GDP がこの 2 項目だけで構成されていると仮定), X, Y, Z いずれの系列も時系列データが内閣府経済社会総合研究所の GDP のページで簡単にダウンロードできますので, (1) 式にそれぞれのデータを代入すれば, t 期における各コンポーネントの寄与度が計算でき, この計算を各期について行うことで（実際はエクセル上の数式をコピペするだけ）, 図 1 のグラフを書くことができます．グラフの書き方については授業でお見せします．

なお, グラフを作成するための寄与度分解式の導出としてはこれで十分なのですが, (1) 式を以下のように変形することで, 解釈が分かりやすくなります．

$$\underbrace{\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{Z_t\text{の前期比}} = \underbrace{\underbrace{\frac{X_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{X_{t-1}\text{のウェイト}} \cdot \underbrace{\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}}_{X_t\text{の前期比}}}_{\textbf{X 要因}} + \underbrace{\underbrace{\frac{Y_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{Y_{t-1}\text{のウェイト}} \cdot \underbrace{\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}}_{Y_t\text{の前期比}}}_{\textbf{Y 要因}} \tag{2}$$

(1) 式と (2) 式が同値であることを確認してください．そう, (1) 式の右辺第 1 項に $\frac{X_{t-1}}{X_{t-1}}(=1)$, 第 2 項に $\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-1}}(=1)$ を掛けただけです (経済学では解釈しやすい式を導出するために, しばしばこのような式変形を行います)．すなわち, **Z_t の前期比 (変化率) は, 各コンポーネント X_t および Y_t の前期比を, その変数の前期のウェイトで加重平均したものに等しくなります．**

1.2.2　ケース 2：積で定義される変数 $Z_t = X_t Y_t$ の変化率 (前期比) を寄与度分解する．

寄与度分解式の方針はケース 1 と全く同様です．すなわち, **定義式から出発して, 左辺を Z_t の前期比: $(Z_t - Z_{t-1})/Z_{t-1}$ に近づける**ことを目指しましょう．

$$\begin{array}{rcll} Z_t & = & X_t \times Y_t & (Z_t\ \text{の定義式}) \\ -)Z_{t-1} & = & X_{t-1} \times Y_{t-1} & (\text{t-1 期についても定義式は成立する}) \\ \hline Z_t - Z_{t-1} & = & (X_t \times Y_t) - (X_{t-1} \times Y_{t-1}) & (\text{辺々引く}) \end{array}$$

左辺を前期比の形にすべく, ここから両辺を Z_{t-1} で割ると, 以下を得ます．

$$\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}} = \frac{(X_t \times Y_t)}{Z_{t-1}} - \frac{(X_{t-1} \times Y_{t-1})}{Z_{t-1}} \tag{3}$$

左辺は無事 Z_t の前期比になりました．さて, 問題は右辺です．(3) 式の右辺は, (1) 式の右辺のような＜X の変化 $(X_t - X_{t-1})$ を含む項＞と＜Y の変化 $(Y_t - Y_{t-1})$ を含む項＞には分解できていません．そこで, **(3) 式の右辺の分子を, 以下のように「工夫して」変形します**:

$$(3)\ \text{の右辺の分子}: (X_t \times Y_t) - (X_{t-1} \times Y_{t-1}) = Y_t(X_t - X_{t-1}) + X_{t-1}(Y_t - Y_{t-1}) \tag{4}$$

実際に (4) 式の左辺と右辺が一致することを確認してください．そう, 左辺に $-Y_t X_{t-1} + X_{t-1} Y_t (=0)$

を加えたものが右辺になります (これがまさに「工夫」です). (3) 式の分子をこのように変形すると (3) 式は以下のように書き換えることができます:

$$\underbrace{\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{Z_t\text{の前期比}} = \underbrace{\frac{Y_t(X_t - X_{t-1})}{Z_{t-1}}}_{\textbf{X 要因}} + \underbrace{\frac{X_{t-1}(Y_t - Y_{t-1})}{Z_{t-1}}}_{\textbf{Y 要因}}. \tag{5}$$

(5) 式が, $Z_t = X_tY_t$ で定義される積の変数の「厳密な」寄与度分解式ということになります. 右辺第 1 項は, 変数 X の変化 $(X_t - X_{t-1})$ を含むので「X 要因」, 第 2 項は, 変数 Y の変化 $(Y_t - Y_{t-1})$ を含むので「Y 要因」となります.

さて, ここまで来て, すでに知識のある方は, 「あれ? $Z_t = X_tY_t$ で定義される積の変数の場合, ＜ Z_t の変化率=X_t の変化率+Y_t の変化率＞じゃなかったっけ?」と思う方がいらっしゃると思います. その通りなのですが, それはあくまで「近似的に成り立つ関係」です. そして, 1.3.2 節で後述するように, この近似的な関係のほうがはるかに簡単に導出できます. しかし, あくまで厳密な寄与度分解式としては, (5) 式が正解なのです. 本稿の 1 つのメッセージなのですが, 導出の**厳密性と簡便性の間には, 常にトレードオフが存在します.** そして, **導出の厳密性を重視して簡便性を捨てるのが, 今行っている差分を用いた＜アプローチ１＞**で, **導出の簡便性を重視して厳密性を捨てるのが, 次のセクションで説明する微分を用いた＜アプローチ２＞**になります.

(以下の２パラグラフは蛇足なので, 飛ばしてケース３に行っても問題ありません)

(蛇足１) すなわち, ここでは導出の簡便性を捨てているのですが, 簡便性を捨てたことによって生じる導出の難しさは, (4) 式の変形において感じられます. このような「工夫」に基づく変形は, どうやって思いつくのでしょうか. その思いつきをあえて言語化すれば,

- (3) 式の分子を, $(X_t - X_{t-1})$ や $(Y_t - Y_{t-1})$ を含む表現に無理やり変形して, 変形前の表現と同値になるように帳尻を合わせる（すなわちここでは $-Y_tX_{t-1} + Y_tX_{t-1}(= 0)$ を加える）.

と言えるかもしれません.

(蛇足２) もっとも, このような発想で「工夫した」式変形を行っていくのは, 数学を得意とする人たちにとっては, ごく自然なもののようです. 実際, 上と同様の思考プロセスをたどる簡単な例として, 私の東工大大学院時代の数学科出身の先輩は, 以下の**「積の微分の公式」の導出**を挙げてくれました. あくまで参考ですが, せっかくなので微分の復習を兼ねて, 公式の導出をここで記しておきます. きっと「求めたい表現＝目的地にたどり着くために帳尻を合わせる」イメージが多少なりとも分かると思います.

$$\textbf{積の微分の公式：} \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6}$$

(積の微分の公式の導出): (6) 式の左辺 $f(x)g(x)$ をまとめて 1 つの関数とみなし, 微分の公式を使って書き換えていきます:

$$
\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \quad \text{(微分の公式)} && (7)\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{[f(x+h)-f(x)]\,g(x+h)}{h}+\frac{f(x)\,[g(x+h)-g(x)]}{h}\right\}\text{(「工夫した」変形!)} && (8)\\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}}_{=f'(x)\ as\ h\to 0}\underbrace{g(x+h)}_{=g(x)\ as\ h\to 0}+\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}}_{=g'(x)\ as\ h\to 0}f(x) && (9)\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) && (10)
\end{aligned}
$$

(7) 式から (8) 式の変形 — あえて$< -f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)=0 >$を加える —, これがまさに目的地=積の微分の公式に向かって帳尻を合わせつつ変形していくイメージです!

1.2.3 ケース３: 比率で定義される変数 $Z_t = X_t/Y_t$ の差分 (前期差) を寄与度分解する.

比率で定義される変数についても原則はこれまでと同じで, 定義式から出発していきましょう. 定義式 $Z_t = X_t/Y_t$ で, Z_t の前期差の寄与度を求めたいので, まずは左辺=前期差の形にしましょう:

$$
Z_t - Z_{t-1} = \frac{X_t}{Y_t} - \frac{X_{t-1}}{Y_{t-1}}. \tag{11}
$$

すなわち, t 期の表現から $t-1$ 期の表現を左右両辺について引いただけです.

さて問題はここからです. ケース 2 同様, (11) 式の右辺を X_t の変化分 $(X_t - X_{t-1})$ を含む項と Y_t の変化分 $(Y_t - Y_{t-1})$ を含む項に分けるべく, 「工夫して」変形していきます. ここでは一気に結論まで示しましょう.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{Z_t - Z_{t-1}}_{Z_t\text{の前期差}} = \frac{X_t}{Y_t} - \frac{X_{t-1}}{Y_{t-1}} &= \frac{X_tY_{t-1}-X_{t-1}Y_t}{Y_tY_{t-1}} \quad \text{(通分)} && (12)\\
&= \frac{(X_t - X_{t-1})Y_{t-1} - X_{t-1}(Y_t - Y_{t-1})}{Y_tY_{t-1}} \quad \text{(「工夫した」変形!)} && (13)\\
&= \underbrace{\frac{1}{Y_t}(X_t - X_{t-1})}_{\mathbf{X}\text{ 要因}} - \underbrace{\frac{X_{t-1}}{Y_tY_{t-1}}(Y_t - Y_{t-1})}_{\mathbf{Y}\text{ 要因}}. && (14)
\end{aligned}
$$

となり, 寄与度分解式の導出が終了しました. (12) 式から (13) 式への変形などは, 積の微分公式の導出とそっくりですね（1.2.2 節の「蛇足」パートを読み飛ばした人は無視してください）. 例えば Z_t を有効求人倍率としたとき, X_t は有効求人数, Y_t は有効求職数となります. (14) 式は, 有効求人倍率が上昇する $(Z_t - Z_{t-1} > 0)$, すなわち労働需給がタイトになるのは, 求人数が増加するか $(X_t - X_{t-1} > 0)$, 求職数が低下するか $(Y_t - Y_{t-1} < 0)$ のいずれかのケースであるという当然のことを示しています[2]. しかし, それぞれの求人倍率前期差に対する重みが $1/Y_t$ および $X_{t-1}/[Y_tY_{t-1}]$

[2]もちろん,$1/Y_t > 0$ かつ $X_{t-1}/[Y_tY_{t-1}] > 0$ であることが前提ですが, いずれの変数も単位は「人数」ですので, これは常に満たされています.

であることは, 上に示したような厳密な寄与度分解式の導出を経ないと分かりません.

もちろんこのケースでも, 有効求人倍率, 有効求人数, 有効求職数とも厚生労働省の職安統計から長期時系列のデータが取得可能ですので, 寄与度分解式さえ導出してしまえば, 図 1 に対応する寄与度分解の時系列グラフを作成することが簡単にできます. 後述するように, これは末尾の図 3 に対応します.

1.3 ＜アプローチ２＞(全) 微分を用いて, 近似的に寄与度分解式を導出する方法

前節では, 差分表現を用いて, 「厳密な寄与度分解式」を導出してきました. そこでは, 何回か「工夫した」式展開が登場してきました. これらを見て, 「自分で寄与度分解式を導出するのは無理!」と思われる方も少なくない多いと思います (私も答えを知っているからこそ説明できるのであって, 何も知らなかったとしてあのような式変形ができるかは全くもって心もとないです). そこで, この節では, ある程度厳密性を捨象しつつも, 簡単に寄与度分解式を導出できる方法を説明します.

ポイントは, **とにかく寄与度分解をしたい変数の定義式を全微分してしまうこと**です. まず, 2 変数関数 $Z_t = f(X_t, Y_t)$ の全微分の定義と, 寄与度分解のために必要な知識を以下に記します.

全微分の公式 (２変数関数の場合)

- まず, 関数 $Z_t = f(X_t, Y_t)$ の 全微分 は, 以下で表現されます.

$$dZ_t = \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial Y_t} dY_t \tag{15}$$

  - dZ_t は「Z_t の微小な変化量」を表します. $\partial f(X_t, Y_t)/\partial X_t$ は, 「$f(X_t, Y_t)$ を X_t で偏微分する」ことを意味します. (X_t で) 偏微分するとは, ざっくりいうと, 「X_t 以外の変数 (ここでは Y_t) を定数とみなして微分すること」です.

- つぎに, X_t と Y_t を t の関数とみなすとき, 合成関数の微分公式から,

$$\frac{dZ_t}{dt} = \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial X_t} \cdot \frac{dX_t}{dt} + \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial Y_t} \cdot \frac{dY_t}{dt} \tag{16}$$

  となります. 直感的には, 「(15) 式の左右両辺を dt で割る」と覚えてしまえばよいでしょう.

- 最後に, t の微小な変化に対する Z_t の変化量 (**すなわち前期差**) と t の微小な変化に対する Z_t の変化率 (**すなわち前期比**) は, それぞれ以下の通りとなります:

$$\text{前期差}: \frac{dZ_t}{dt} \qquad \text{前期比}: \frac{dZ_t/dt}{Z_t} \tag{17}$$

(17) 式のうち, まず, 「t 期の前期差」については, 差分を用いた＜アプローチ１＞における「t

期の前期差」は $Z_t - Z_{t-1}$ でした．一方, ここで説明する＜アプローチ 2＞＝微分アプローチでは, t の「微小な変化」前提としますので, t 期の前期差は,「そんな t の微小な変化に対する Z_t の変化」, すなわち dZ_t/dt として定義されます.

一方,「t 期の**前期比**」について, ＜アプローチ 1＞では,「t 期の前期差 $Z_t - Z_{t-1}$ を, 前期の水準 Z_{t-1} で割ったもの」として定義していました．微分アプローチでも考え方は同じで, (17) 式の前期比の表現に見られるように, 分子には前期差 dZ_t/dt をとります．一方, 分母については, 差分の場合と同様, Z_{t-1} を持ってきても良いのですが, 微分アプローチではそもそも「t と $t-1$ がものすごく近い世界」を想定している (より正確には時点 t における瞬間的な変化を考える) ので, Z_t と Z_{t-1} もものすごく近い, すなわちほとんど同じものと想定しています．そしてこのような場合, 微分アプローチでは Z_{t-1} でなく Z_t を分母にするのが一般的です.

ここまで前期差, 前期比について差分アプローチと微分アプローチにおける表現の違いをみてきました．重要な点は, **われわれが分析の対象にしているのはあくまで差分的な世界**=毎月, 毎四半期, あるいは毎年 1 つずつデータが更新され, **今期と前期 ＝ t 期と t-1 期がものすごく近くはない世界**, です．したがって, 繰り返しになりますが, **厳密に寄与度分解式が求まるのは＜アプローチ１＞の差分アプローチであり, ＜アプローチ２＞の微分アプローチは, 微分を使える＝簡便性を重視する代わりに, 厳密性を捨てて世界を近似的に描写している**, ということになります．(17) 式の前期比の分母を Z_t としたのも, ＜アプローチ 2＞では, 近似的な前期比表現を求めることを許容しているからと言えます.

とはいえ, 全微分アプローチは機械的に寄与度分解式を求められるので、とても有用なツールです．これから, 1.2 節の＜アプローチ 1＞で取り上げた 3 つのケースについて, 全微分を用いて近似的な寄与度分解式を導出していきます．ケース 1 より, ケース 2 およびケース 3 の方が全微分アプローチの有用さを体感できるかもしれません.

1.3.1 ケース 1: 和で定義される変数 $Z_t = X_t + Y_t$ の変化率寄与度分解

全微分の表現である (15) 式に沿って, 定義式 $Z_t = X_t + Y_t$ を全微分すると,

$$dZ_t = \underbrace{1}_{\frac{\partial f(X_t,Y_t)}{\partial X_t}} \cdot dX_t + \underbrace{1}_{\frac{\partial f(X_t,Y_t)}{\partial Y_t}} \cdot dY_t = dX_t + dY_t \tag{18}$$

となり, さらに合成関数の微分公式から (両辺を dt で割ると),

$$\frac{dZ_t}{dt} = \frac{dX_t}{dt} + \frac{dY_t}{dt} \tag{19}$$

となります．最後に, 両辺を Z_t で割って, 以下を得ます.

$$\frac{dZ_t/dt}{Z_t} = \frac{dX_t/dt}{Z_t} + \frac{dY_t/dt}{Z_t} \tag{20}$$

これで近似的な寄与度分解式の導出は終わりです．これを以下で再掲する (1) 式と比べてみましょう．

$$\underbrace{\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{Z_t\text{の前期比}} = \underbrace{\frac{X_t - X_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{\mathbf{X}\text{ 要因}} + \underbrace{\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Z_{t-1}}}_{\mathbf{Y}\text{ 要因}}. \tag{21}$$

(20) 式が (21) 式と異なっているの点は，分子の前期差が微分表現になっていることと，分母が Z_{t-1} から Z_t に代わっていることです．繰り返しですが，(20) は「近似的な世界」で許容される $Z_t = Z_{t-1}$ を前提としているので，分母を Z_t としても問題ないのです．さらに言い換えると，(20) 式の分母の変数を全て Z_{t-1} にしたとしても，もちろん問題ありません．

実際に (20) 式まで導出できれば，あとは差分アプローチの場合と同じく (前節の GDP の例に沿うと)，Z_t として t 期の GDP，dX_t/dt として t 期の消費前期差，dY_t/dt として t 期の投資前期差を用いることで，寄与度グラフが作成できます．

(20) 式に基づいた寄与度グラフと，(21) 式に基づいた寄与度グラフは，概ね一致しており，異なるインプリケーションをもたらすほどの違いが生じることは通常ありません (できれば GDP データを用いて各自で確かめてみてください (それをレポートとしてもらっても可)．使うデータは全く同じなので，それほど時間はかからないはずです)．

1.3.2　ケース 2: 積で定義される変数 $Z_t = X_t Y_t$ の変化率寄与度分解

次は積の変数です．定義式 $Z_t = X_t Y_t$ を全微分したあと，合成関数の微分公式を使って (すなわち両辺を dt で割る)，以下を得ます．

$$dZ_t = Y_t dX_t + X_t dY_t \quad (\text{定義式を全微分}) \tag{22}$$

$$\frac{dZ_t}{dt} = Y_t \frac{dX_t}{dt} + X_t \frac{dY_t}{dt} \quad (\text{両辺を } dt \text{ で割る}) \tag{23}$$

さらに両辺を Z_t で割ることで，左辺を Z_t の前期比表現にすることができます:

$$\underbrace{\frac{dZ_t/dt}{Z_t}}_{Z_t\text{の前期比}} = \underbrace{\frac{Y_t(dX_t/dt)}{Z_t}}_{X\text{ 要因}} + \underbrace{\frac{X_t(dY_t/dt)}{Z_t}}_{Y\text{ 要因}} \tag{24}$$

これを「工夫した」式変形を経てたどり着いた (5) 式と比べてみてください．そう，微分アプローチでは僅かこれだけで寄与度分解式の導出は終了なのです．差分アプローチで必要とされた式展開の「工夫」は今や全く必要ありません．ただし，もちろんこれは近似表現で，正確な表現は (5) 式です．これが，微分アプローチが「簡便性を重視して厳密性を捨ている」とした所以です．

もっとも，厳密性を捨象したとは言え，実際にグラフにしてみると，微分アプローチと差分アプローチの間に殆ど違いはありません．

(24) 式に実際のデータを代入すれば，すぐに寄与度グラフが作成できますが，(24) 式には別表現もありますので，もう少し先へ進みましょう．定義式 $Z_t = X_t Y_t$ を (24) 式右辺の分母に代入する

と, 以下のように変形できます.

$$\frac{dZ_t/dt}{Z_t} = \frac{Y_t}{X_tY_t}\frac{dX_t}{dt} + \frac{X_t}{X_tY_t}\frac{dX_t}{dt} \quad (\text{定義式の代入}) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{X_t}\frac{dX_t}{dt} + \frac{1}{Y_t}\frac{dX_t}{dt} = \underbrace{\frac{dX_t/dt}{X_t}}_{X_t\text{の前期比}} + \underbrace{\frac{dY_t/dt}{Y_t}}_{Y_t\text{の前期比}} \tag{26}$$

すなわち, (26) 式は,

積の変数 $Z_t = X_tY_t$ **について**は,「Z_t**の前期比**$=$$X_t$**の前期比＋**$\mathrm{Y}_t$**の前期比**」が成り立つ (27)

ことを示しています. この関係は差分アプローチを扱った 1.2.2 節で触れましたが, そこではこの関係を導出できませんでした. なぜなら (27) 式はあくまで微分アプローチ=近似として導出される関係だからです. 厳密な関係はあくまで (5) 式なのです. 別の言い方をすれば, (5) 式において,「近似の世界で許される関係」である $Z_{t-1} = Z_t$, $X_{t-1} = X_t$, $Z_{t-1} = Z_t$ をそれぞれ右辺第 1 項の分母, 第 2 項の分子, 第 2 項の分母に代入してさらにそこに定義式 $Z_t = X_tY_t$ を代入すれば, (27) 式の関係性が導けます. いずれにせよ,「Z の前期比=X の前期比＋Y の前期比」という関係性も, 寄与度分解式の 1 つの形なのです.

ケース 3 に行く前に, **対数を用いた表現**についても確認しておきましょう. ある変数 A_t について, 対数をとって微分し, 以下の「⇒」に沿って変形していくと以下が成り立ちます.

$$\frac{d\ln A_t}{dA_t} = \frac{1}{A_t} \;\Rightarrow\; d\ln A_t = \frac{dA_t}{A_t} \Rightarrow \underbrace{\frac{d\ln A_t}{dt}}_{\text{対数前期差}} = \underbrace{\frac{dA_t/dt}{A_t}}_{\text{前期比}} \tag{28}$$

すなわち, (28) の一番右側の等式は,

ある変数の対数前期差は, その変数の前期比に近似的に等しい (29)

ことを意味しています. (28) 式の A_t を Z_t,X_t,Y_t に置き換えて (26) 式の左辺と右辺にそれぞれ代入すると,

$$\underbrace{\frac{d\ln Z_t}{dt}}_{Z_t\text{対数前期差}=Z_t\text{前期比}} = \underbrace{\frac{d\ln X_t}{dt}}_{X_t\text{対数前期差}=Z_t\text{前期比}} + \underbrace{\frac{d\ln Y_t}{dt}}_{Y_t\text{対数前期差}=Z_t\text{前期比}} \tag{30}$$

を得ます. (26) 式と (30) は同値です. すなわち,

積の変数 $Z_t = X_tY_t$ については,「Z_t **の前期比**$=$ X_t **の前期比＋** Y_t **の前期比**」を,
「Z_t **の対数前期差**$=$ X_t **の対数前期差＋** Y_t **の対数前期差**」**に置き換えて計算してもよい.**

ことになります. そして当然ですが, (26) 式を使って作成したグラフと, (30) 式を使って作成したグラフは近似的に等しくなります (実際はほぼ同一の形です).

以上, 対数を使った前期比表現を見てきました. ポイントは (28) 式の式変形なので, しっかり理

解してください.

1.3.3 ケース 3: 比率で定義される変数 $Z_t = X_t/Y_t$ の前期差寄与度分解

これは思いのほか簡単です. 特に, 1.2.3 で示した差分アプローチの導出に比べていかに簡単かを実感してください. 比率の変数 $Z_t = X_t/Y_t$ を全微分することからはじめましょう. $Z_t = X_t Y_t^{-1}$ としたほうが全微分の表現 (15) 式を適用しやすいかもしれません:

$$dZ_t = \frac{1}{Y_t}dX_t - \frac{X_t}{Y_t^2}dY_t \quad (\text{定義式を全微分}) \tag{31}$$

$$\frac{dZ_t}{dt} = \frac{1}{Y_t}\frac{dX_t}{dt} - \frac{X_t}{Y_t^2}\frac{dY_t}{dt} \quad (\text{両辺を } dt \text{ で割る}) \tag{32}$$

改めて (32) 式をみてみましょう.

$$\underbrace{\frac{dZ_t}{dt}}_{Z_t\text{の前期差}} = \underbrace{\frac{1}{Y_t}\frac{dX_t}{dt}}_{X\text{ 要因}} - \underbrace{\frac{X_t}{Y_t^2}\frac{dY_t}{dt}}_{Y\text{ 要因}} \tag{33}$$

(33) 式を, 差分アプローチで求めた厳密な寄与度分解式である (14) 式と比べてみましょう. そう, ケース 2 同様, たったこれだけで寄与度分解式の導出は終了なのです ((14) 式の右辺第 2 項の X_{t-1} と Y_{t-1} をそれぞれ X_t と Y_t に置き換えれば, (33) 式の X_t/Y_t^2 と一致します!). 差分アプローチで見たような「工夫」を要する式変形はまったく必要ありません.

以上で寄与度分解式導出の説明は終わりです. 経済レポートや白書でみられる寄与度分解は, 一見複雑に見えても, その多くはこれまで見てきた単純なパターンの組み合わせによって, 理解が可能となります.

また, 自分で寄与度分解式を導出する際, もちろん差分アプローチで厳密な寄与度分解式にたどり着ければよいのですが, 難しいケースの方が多いと思います. そんなとき, すなわち, **寄与度分解式の導出に困ったときは, とりあえず全微分してみましょう**. 近似的な表現であれ, とりあえず目的地に到着することができると思います.

最後に, この節のまとめとして, 比率の変数である有効求人倍率 (=有効求人数/有効求職数) の前年差について, 差分アプローチである (14) 式で作成したグラフと, 微分アプローチである (33) 式で作成したグラフを並べて掲載しておきます. 差分アプローチで求めた図 3 では, 全ての年について, 棒グラフ=寄与度の積み上げが折れ線グラフの値と一致しています. 一方, 微分アプローチで求めた図 4 では, 棒グラフの積み上げが折れ線グラフの値と必ずしも一致していません. 特に, 変化の大きい年 (1975 年や 2009 年など) は, 両者の乖離幅が相対的に大きくなっています. これは, 前述したように, 厳密な寄与度分解式である (14) 式おける X_{t-1} と Y_{t-1} が, (33) 式においてはそれぞれ X_t と Y_t に置き換えられたことの帰結です. もっとも, 2 つの図表の間で, 異なるインプリケーションが引き出されるほどの大きな違いは生じていません. 分析者としてどちらのアプ

ローチを採用して図表を作成するかは, これまで繰り返し述べてきたように, 簡便性と厳密性のどちらをとるかの問題であって, 唯一の正解はありません.

図 2: 有効求人倍率の長期時系列

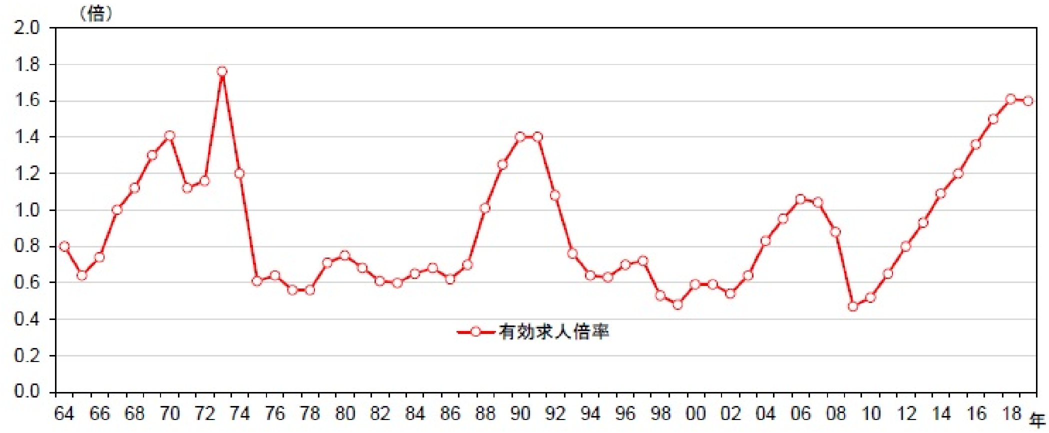


図 3: 有効求人倍率前年差の寄与度分解 (1)：差分アプローチ

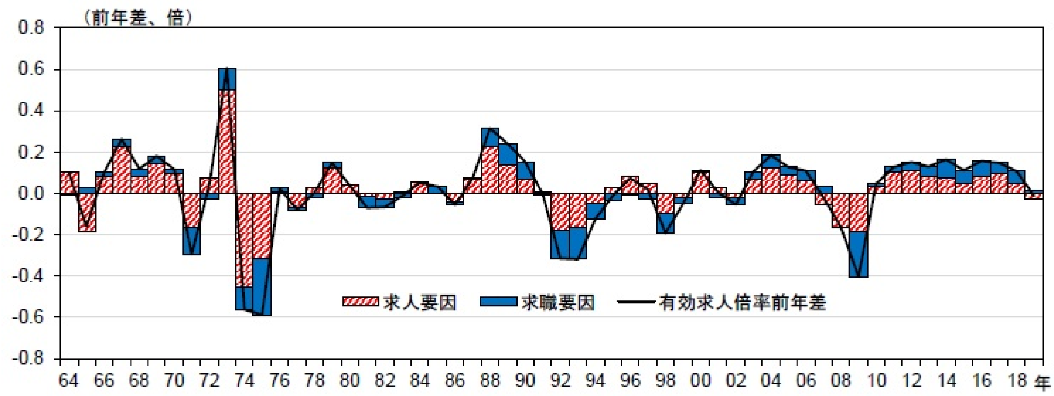


図 4: 有効求人倍率前年差の寄与度分解 (2)：微分アプローチ