2016 年度春学期 経済数学 I(解析学基礎) 確認問題 解答例（月 2）

【第 1 回：pre-test 】（担当：瀧澤 武信）4 月 11 日（月）

(1) 次の関数の極限は存在するか．存在する場合はその値を求めよ．また, グラフの概形を描け．

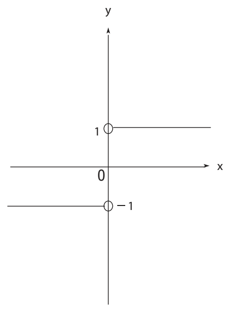
1. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ のとき $\lim_{x \to 0} f(x)$

$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ のとき

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to -0} (-1) = -1$$

$\lim_{x \to +0} f(x)$, $\lim_{x \to -0} f(x)$ は共に存在するが, $\lim_{x \to +0} f(x) \neq \lim_{x \to -0} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない.



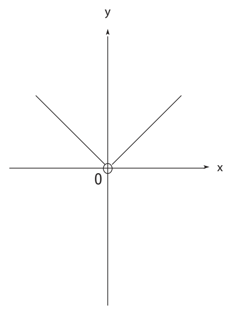
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ のとき $\lim_{x \to 0} f(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ のとき

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \to +0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +0} x = 0$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to -0} (-x) = 0$$

$\lim_{x \to +0} f(x)$, $\lim_{x \to -0} f(x)$ は共に存在し, $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$



(2) 次の関数について, 下の各問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & (x < 1) \\ 2x^2 - 3x + 1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

1. $x < 1$ のとき, $f'(x) = 3x^2 - 2x,\ f''(x) = 6x - 2,\ f'''(x) = 6, f^{(4)}(x) = 0$

2. $x > 1$ のとき, $f'(x) = 4x - 3,\ f''(x) = 4,\ f'''(x) = 0, f^{(4)}(x) = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1 - 1 = 0,\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 - 3 + 1 = 0$
$\displaystyle\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$
また, $\displaystyle f(1) = 0 = \lim_{x\to 1} f(x)$ より f は $x = 1$ で連続である.

4. $f'(1)$ は存在するか. 存在する場合はその値を求めよ. また, 関数 f' は $x = 1$ で連続か.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\{(1+h)^3 - (1+h)^2\} - 0}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\{(1+3h+3h^2+h^3) - (1+2h+h^2)\}}{h}$
$\displaystyle= \lim_{h\to -0} \frac{h + 2h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{h(1+2h+h^2)}{h} = \lim_{h\to -0}(1 + 2h + h^2) = 1$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1\} - 0}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\{2(1+2h+h^2) - 3(1+h) + 1\}}{h}$
$\displaystyle= \lim_{h\to +0} \frac{2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h + 1}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h + 2h^2}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h(1+2h)}{h} = \lim_{h\to +0}(1 + 2h) = 1$
よって, $\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ であるから $\displaystyle f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
は存在し, $f'(1) = 1$.　さらに, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to 1+0} f'(x) = 1$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f'(x) = 1 = f'(1)$ より,
f' は $x = 1$ で連続である.

5. $f''(1), f'''(1), f^{(4)}(1)$ は存在するか. 存在する場合はそれぞれ値を求めよ. また, 関数 $f'', f''', f^{(4)}$ は $x = 1$ で連続か. $\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{\{3(1+h)^2 - 2(1+h)\} - 1}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\{3(1+2h+h^2) - 2(1+h)\} - 1}{h}$
$\displaystyle= \lim_{h\to -0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 2 - 2h - 1}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{4h + 3h^2}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{h(4+3h)}{h} = \lim_{h\to -0}(4 + 3h) = 4$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{\{4(1+h) - 3\} - 1}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{4 + 4h - 3 - 1}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{4h}{h} = 4$
よって, $f''(1)$ は存在し, $f''(1) = 4$.　さらに,
$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f''(x) = \lim_{x\to 1+0} f''(x) = 4$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f''(x) = 4 = f''(1)$ より, f'' は $x = 1$ で連続である.
$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{\{6(1+h) - 2\} - 4}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{6h}{h} = 6$
$\displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{4 - 4}{h} \lim_{h\to +0} \frac{0}{h} = 0$
よって, $\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h} \neq \lim_{h\to +0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h}$ であるから, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h}$ が存在しないので $f'''(1)$ は存在しない. したがって, f''' は $x = 1$ で不連続.
よって, $f^{(4)}(1)$ は存在しない. $f^{(4)}$ は $x = 1$ で不連続.

6. $y = f(x)$ の増減凹凸表を書き, 極値を求めよ.

(1) $f'(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $\frac{2}{3}$

$x > 1$ のとき, $4x - 3 = 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f'(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

(2) $f''(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $6x - 2 = 2(3x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$x > 1$ のとき, $4 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f''(1) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ 解なし.

(3) $f(x) = 0$ となる x を求める.

$x < 1$ のとき, $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x > 1$ のとき, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$ 解なし.

$x = 1$ のとき, $f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$

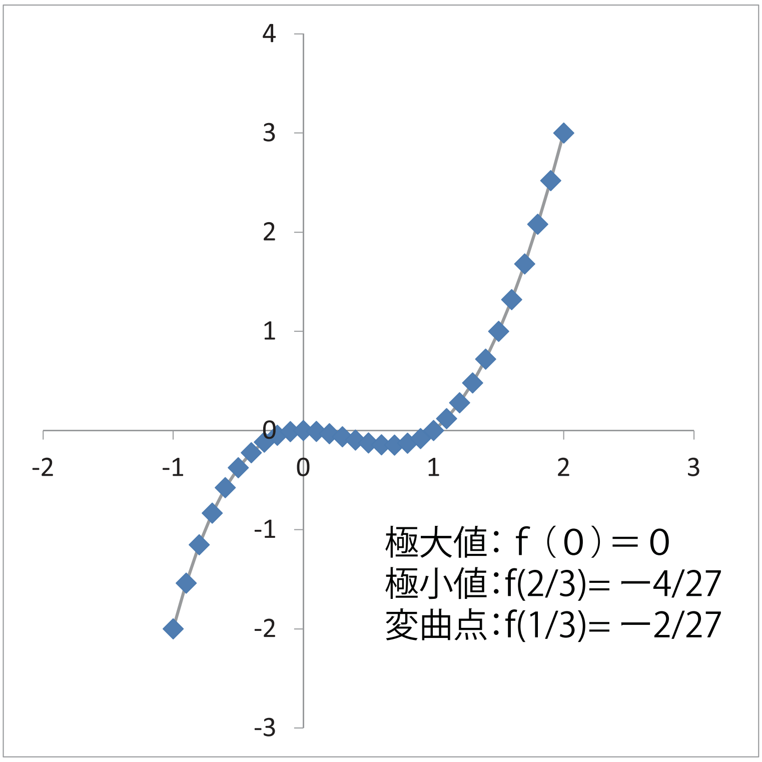
(4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

増減凹凸表

x	$-\infty$	$\leftarrow$	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1	$\rightarrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	1	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	4	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\swarrow$	0		$-\frac{2}{27}$		$-\frac{4}{27}$		0	$\nearrow$	$+\infty$
f		$\nearrow$ $\cap$	極大値 $\cap$	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ 変曲点	$\searrow$ $\cup$	極小値 $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	

7. $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.



(3) 次の関数の極限を求めよ.

$f(x) = \dfrac{x^4}{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}$ のとき $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{e^x + e^{-x} - x^2 - 2} &= \lim_{x \to 0} \frac{4x^3}{e^x - e^{-x} - 2x} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{12x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{24x}{e^x - e^{-x}} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{24}{e^x + e^{-x}} \quad \leftarrow \mathrm{L'Hospital} \\
&= \frac{24}{2} \\
&= 12
\end{aligned}
$$

(4) Maclaurin 展開せよ (2 次の項まで示せ).

$f(x) = e^{\sqrt{1-x}}$

$f(x) = e^{\sqrt{1-x}} = e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ のとき

$f'(x) = e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$

$f''(x) = \{e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\}' \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) + e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)\}'$

$= e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)\}^2 + e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)^2$

$= e^{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right]$ であるから

$f(0) = e, f'(0) = -\frac{1}{2}e, f''(\theta x) = e^{(1-\theta x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-\theta x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-\theta x)^{-\frac{3}{2}}\right]$

$\Longrightarrow f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(\theta x)$

$= e + x \cdot (-\frac{1}{2}e) + \frac{x^2}{2} \cdot e^{(1-\theta x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-\theta x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-\theta x)^{-\frac{3}{2}}\right]$

$e^{\sqrt{1-x}} = e - \dfrac{e}{2}x + \dfrac{x^2}{8}e^{(1-\theta x)^{\frac{1}{2}}}\{(1-\theta x)^{-1} - (1-\theta x)^{-\frac{3}{2}}\}$

(5) **次の関数の偏導関数を求めよ.**

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$のとき，$f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$，$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

(6) **指示された点における接平面の方程式を求めよ.**

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{3+2x^2-2y^4}$，点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$z = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{3+2x^2-2y^4} = (3+2x^2-2y^4)^{\frac{1}{2}}$のとき,

$f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(3+2x^2-2y^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x$

$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(3+2x^2-2y^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8y^3)$

$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3+8-2} = 3$

$f_x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{4}{3}$

$f_y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-8) \cdot 1 = -\frac{4}{3}$

$z - 3 = \frac{4}{3}(x-2) + (-\frac{4}{3})(y-1)$

$\Rightarrow z = \frac{4}{3}x + (-\frac{4}{3})y + (3 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3})$

$z = \dfrac{4}{3}x + (-\dfrac{4}{3})y + \dfrac{5}{3}$

(7) 次の関数の極値を求めよ.

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + y^2 - xy - y + 1$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + y^2 - xy - y + 1$ のとき

$f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 - y$

$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y - x - 1$

$f_{xx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6x \quad f_{xy}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1$

$f_{yx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \quad f_{yy}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$

極値の候補を求める : $f_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 3x^2 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (3x+1)(2x-1) = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ または $x- = \frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ これらの点は $\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$ をみたす

判別する

$\Delta_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6x$

$\Delta_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 1$

$\Delta_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -4 - 1 < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ では極値をとらない

$\Delta_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = 6 - 1 > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ で極値をとる

$\Delta_1\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ は極小値

$f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{9}{16}$: 極小値

(8) Lagrange の未定乗数法を用いて条件付極値を求めよ．十分条件も吟味せよ．

$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y - 1 = 0$ のもとで

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 - x^2 + y^2$ の極値を求める.

$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (1 - x^2 + y^2) - \lambda(x + 2y - 1)$ とおく.

$$\begin{cases} L_x = -2x - \lambda = 0 & (1) \\ L_y = 2y - 2\lambda = 0 & (2) \\ L_\lambda = -(x + 2y - 1) = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) より $x = -\frac{\lambda}{2}$, (2) より $y = \lambda$

(3) に代入して解くと, $\lambda = \frac{2}{3} \Longrightarrow x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

極値の候補は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

十分条件を吟味する． $g_x = 1, g_y = 2$

$L_{xx} = -2, L_{xy} = 0, L_{yx} = 0, L_{yy} = 2$

より, 縁つき Hesse 行列式 $|B|$ は

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 8 - 2 - 0 = 6 > 0$$

よって, $f\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 1 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{3}$: 極大値.