演習問題１（配分問題を動的計画法で解く）

３つの工場における資源 $x\ (>0)$ と収益 $g_i(x)$ の関係が次式で与えられている.

$$g_1(x) = -x^2 + 5x + 10$$

$$g_2(x) = -2x^2 + 11x + 14$$

$$g_3(x) = x^2 - 5x + 12$$

ただし，$g_i(0) = 0$ とする．ここで，x_i を工場 i に配分する資源の量とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \le 6, \qquad x_i > 0$$

という制約（配分する資源の総量が 6 以下）のもとで，収益の合計

$$\sum_{i=1}^{3} g_i(x_i)$$

を最大にする資源の分配 $x_i\ (i = 1,2,3)$ を求めよ.

解答）資源 k が配分されたときの工場 i の収益 $g_i(k)$ は以下の表になる．

$g_i(k)$		k = 1	2	3	4	5	6
i	1	14	16	16	14	10	4
	2	23	28	29	26	19	8
	3	8	6	6	8	12	18

1）$n = 1$（工場1のみの場合）：

a. 工場1で使える資源が $k = 1$ のときの最大収益：$f_1(1) = g_1(1) = 14$

b. 工場1で使える資源が $k = 2$ のときの最大収益：$f_1(2) = g_1(2) = 16$

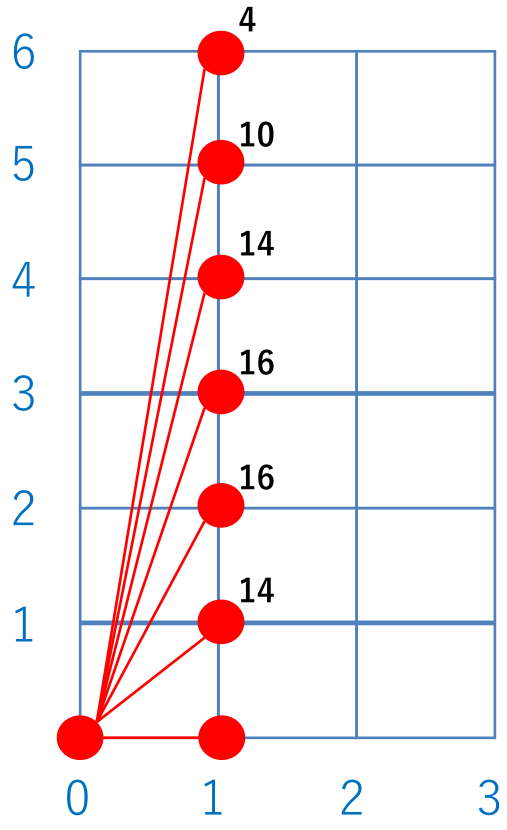
c. 工場1で使える資源が $k = 3$ のときの最大収益：$f_1(3) = g_1(3) = 16$

d. 工場1で使える資源が $k = 4$ のときの最大収益：$f_1(4) = g_1(4) = 14$

e. 工場1で使える資源が $k = 5$ のときの最大収益：$f_1(5) = g_1(5) = 10$

f. 工場1で使える資源が $k = 6$ のときの最大収益：$f_1(6) = g_1(6) = 4$

$f_1(k)$ への最適パス



2) $n=2$（工場2を加えた場合）：

a. 工場1と2で使える資源が $k=1$ のとき：$f_2(1)=\max_{0\le x_2\le 1}[f_1(1-x_2)+g_2(x_2)]=23$

- 工場2に0を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(0)=14+0=14$
- 工場2に1を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(1)=0+23=23$ (max)

b. 工場1と2で使える資源が $k=2$ のとき：$f_2(2)=\max_{0\le x_2\le 2}[f_1(2-x_2)+g_2(x_2)]=37$

- 工場2に0を配分（工場1に2を配分）：$f_1(2)+g_2(0)=16+0=16$
- 工場2に1を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(1)=14+23=37$ (max)
- 工場2に2を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(2)=0+28=28$

c. 工場1と2で使える資源が $k=3$ のとき：$f_2(3)=\max_{0\le x_2\le 3}[f_1(3-x_2)+g_2(x_2)]=42$

- 工場2に0を配分（工場1に3を配分）：$f_1(3)+g_2(0)=16+0=16$
- 工場2に1を配分（工場1に2を配分）：$f_1(2)+g_2(1)=16+23=39$
- 工場2に2を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(2)=14+28=42$ (max)
- 工場2に3を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(3)=0+29=29$

d. 工場1と2で使える資源が $k=4$ のとき：$f_2(4)=\max_{0\le x_2\le 4}[f_1(4-x_2)+g_2(x_2)]=44$

- 工場2に0を配分（工場1に4を配分）：$f_1(4)+g_2(0)=14+0=14$
- 工場2に1を配分（工場1に3を配分）：$f_1(3)+g_2(1)=16+23=39$
- 工場2に2を配分（工場1に2を配分）：$f_1(2)+g_2(2)=16+28=44\ (\max)$
- 工場2に3を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(3)=14+29=43$
- 工場2に4を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(4)=0+26=26$

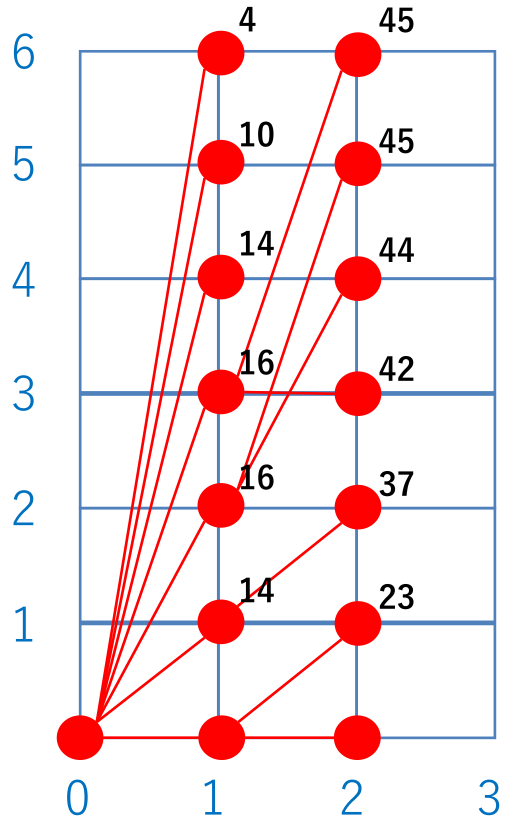
e. 工場1と2で使える資源が $k=5$ のとき：$f_2(5)=\max_{0\le x_2\le 5}[f_1(5-x_2)+g_2(x_2)]=45$

- 工場2に0を配分（工場1に5を配分）：$f_1(5)+g_2(0)=10+0=10$
- 工場2に1を配分（工場1に4を配分）：$f_1(4)+g_2(1)=14+23=27$
- 工場2に2を配分（工場1に3を配分）：$f_1(3)+g_2(2)=16+28=44$
- 工場2に3を配分（工場1に2を配分）：$f_1(2)+g_2(3)=16+29=45\ (\max)$
- 工場2に4を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(4)=14+26=40$
- 工場2に5を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(5)=0+19=19$

f. 工場1と2で使える資源が $k=6$ のとき：$f_2(6)=\max_{0\le x_2\le 6}[f_1(6-x_2)+g_2(x_2)]=45$

- 工場2に0を配分（工場1に6を配分）：$f_1(6)+g_2(0)=4+0=4$
- 工場2に1を配分（工場1に5を配分）：$f_1(5)+g_2(1)=10+23=33$
- 工場2に2を配分（工場1に4を配分）：$f_1(4)+g_2(2)=14+28=42$
- 工場2に3を配分（工場1に3を配分）：$f_1(3)+g_2(3)=16+29=45\ (\max)$
- 工場2に4を配分（工場1に2を配分）：$f_1(2)+g_2(4)=16+26=42$
- 工場2に5を配分（工場1に1を配分）：$f_1(1)+g_2(5)=14+19=33$
- 工場2に6を配分（工場1に0を配分）：$f_1(0)+g_2(6)=0+8=8$

$f_2(k)$ への最適パス



2) $n = 3$（工場3を加えた場合）：

a. 工場1と2と3で使える資源が $k = 1$ のとき：$f_3(1) = \max_{0 \leq x_3 \leq 1} [f_2(1 - x_2) + g_3(x_3)] = 23$

- 工場3に0を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1) + g_3(0) = 23 + 0 = 23$ (max)
- 工場3に1を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0) + g_3(1) = 0 + 8 = 8$

b. 工場1と2と3で使える資源が $k = 2$ のとき：$f_3(2) = \max_{0 \leq x_3 \leq 2} [f_2(2 - x_2) + g_3(x_3)] = 37$

- 工場3に0を配分（工場1と2に2を配分）：$f_2(2) + g_3(0) = 37 + 0 = 37$ (max)
- 工場3に1を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1) + g_3(1) = 23 + 8 = 31$
- 工場3に2を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0) + g_3(2) = 0 + 6 = 6$

c. 工場1と2と3で使える資源が $k = 3$ のとき：$f_3(3) = \max_{0 \leq x_3 \leq 3} [f_2(3 - x_2) + g_3(x_3)] = 45$

- 工場3に0を配分（工場1と2に3を配分）：$f_2(3) + g_3(0) = 42 + 0 = 42$
- 工場3に1を配分（工場1と2に2を配分）：$f_2(2) + g_3(1) = 37 + 8 = 45$ (max)
- 工場3に2を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1) + g_3(2) = 23 + 6 = 29$
- 工場3に3を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0) + g_3(3) = 0 + 6 = 6$

d. 工場1と2と3で使える資源が $k = 4$ のとき：$f_3(4) = \max_{0 \le x_3 \le 4} [f_2(4 - x_2) + g_3(x_3)] = 50$

- 工場3に0を配分（工場1と2に4を配分）：$f_2(4) + g_3(0) = 44 + 0 = 44$
- 工場3に1を配分（工場1と2に3を配分）：$f_2(3) + g_3(1) = 42 + 8 = 50$ (max)
- 工場3に2を配分（工場1と2に2を配分）：$f_2(2) + g_3(2) = 37 + 6 = 43$
- 工場3に3を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1) + g_3(3) = 23 + 6 = 29$
- 工場3に4を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0) + g_3(4) = 0 + 8 = 8$

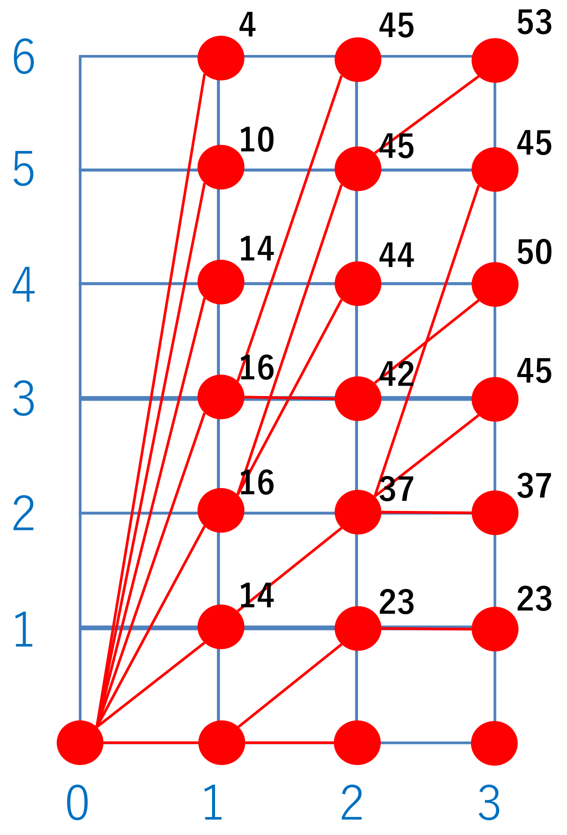
e. 工場1と2と3で使える資源が $k = 5$ のとき：$f_3(5) = \max_{0 \le x_3 \le 5} [f_2(5 - x_2) + g_3(x_3)] = 45$

- 工場3に0を配分（工場1と2に5を配分）：$f_2(5) + g_3(0) = 45 + 0 = 10$
- 工場3に1を配分（工場1と2に4を配分）：$f_2(4) + g_3(1) = 44 + 8 = 27$
- 工場3に2を配分（工場1と2に3を配分）：$f_2(3) + g_3(2) = 42 + 6 = 44$
- 工場3に3を配分（工場1と2に2を配分）：$f_2(2) + g_3(3) = 37 + 6 = 45$ (max)
- 工場3に4を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1) + g_3(4) = 23 + 8 = 40$
- 工場3に5を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0) + g_3(5) = 0 + 12 = 19$

f. 工場1と2と3で使える資源が $k=6$ のとき：$f_3(6)=\max_{0\le x_3\le 6}[f_2(6-x_2)+g_3(x_3)]=53$

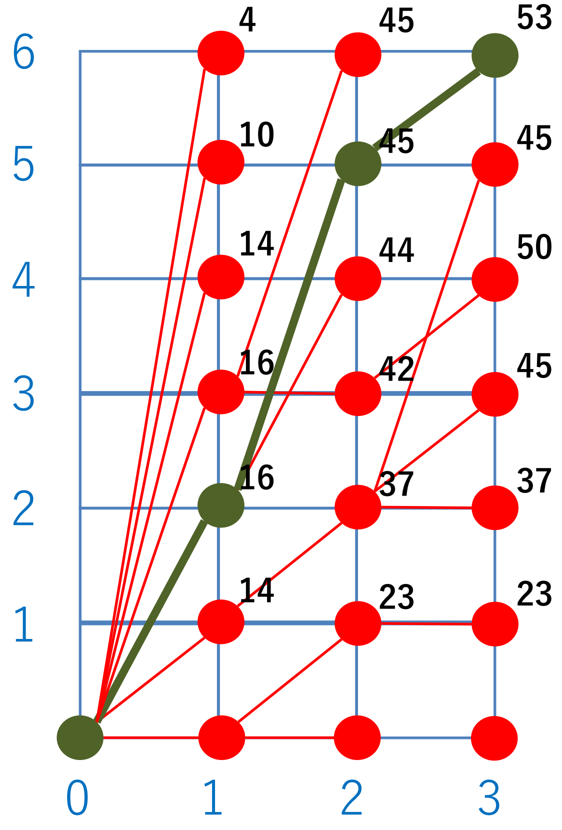
- 工場3に0を配分（工場1と2に6を配分）：$f_2(6)+g_3(0)=45+0=45$
- 工場3に1を配分（工場1と2に5を配分）：$f_2(5)+g_3(1)=45+8=53\ (\max)$
- 工場3に2を配分（工場1と2に4を配分）：$f_2(4)+g_3(2)=44+6=50$
- 工場3に3を配分（工場1と2に3を配分）：$f_2(3)+g_3(3)=42+6=48$
- 工場3に4を配分（工場1と2に2を配分）：$f_2(2)+g_3(4)=37+8=45$
- 工場3に5を配分（工場1と2に1を配分）：$f_2(1)+g_3(5)=23+12=35$
- 工場3に6を配分（工場1と2に0を配分）：$f_2(0)+g_3(6)=0+18=18$

$f_3(k)$ への最適パス



$\max_k[f_3(k)] = f_3(6) = 53$ であり，工場1と2と3で $k = 6$ の資源を使うときに最大収益53が得られることがわかる．最適な資源配分は，以下のバックトラックにより得られる．

- 最大収益 $f_3(6)$ を与える資源配分は，工場3に**1**を配分し，工場1と2に**5**を配分するとき（$f_2(5)$）
- 工場1と2に5を配分するときの最大収益 $f_2(5)$ を与える資源配分は，工場2に**3**を配分し，工場1に**2**を配分するとき（$f_1(2)$）



以上より，最適な資源配分は，

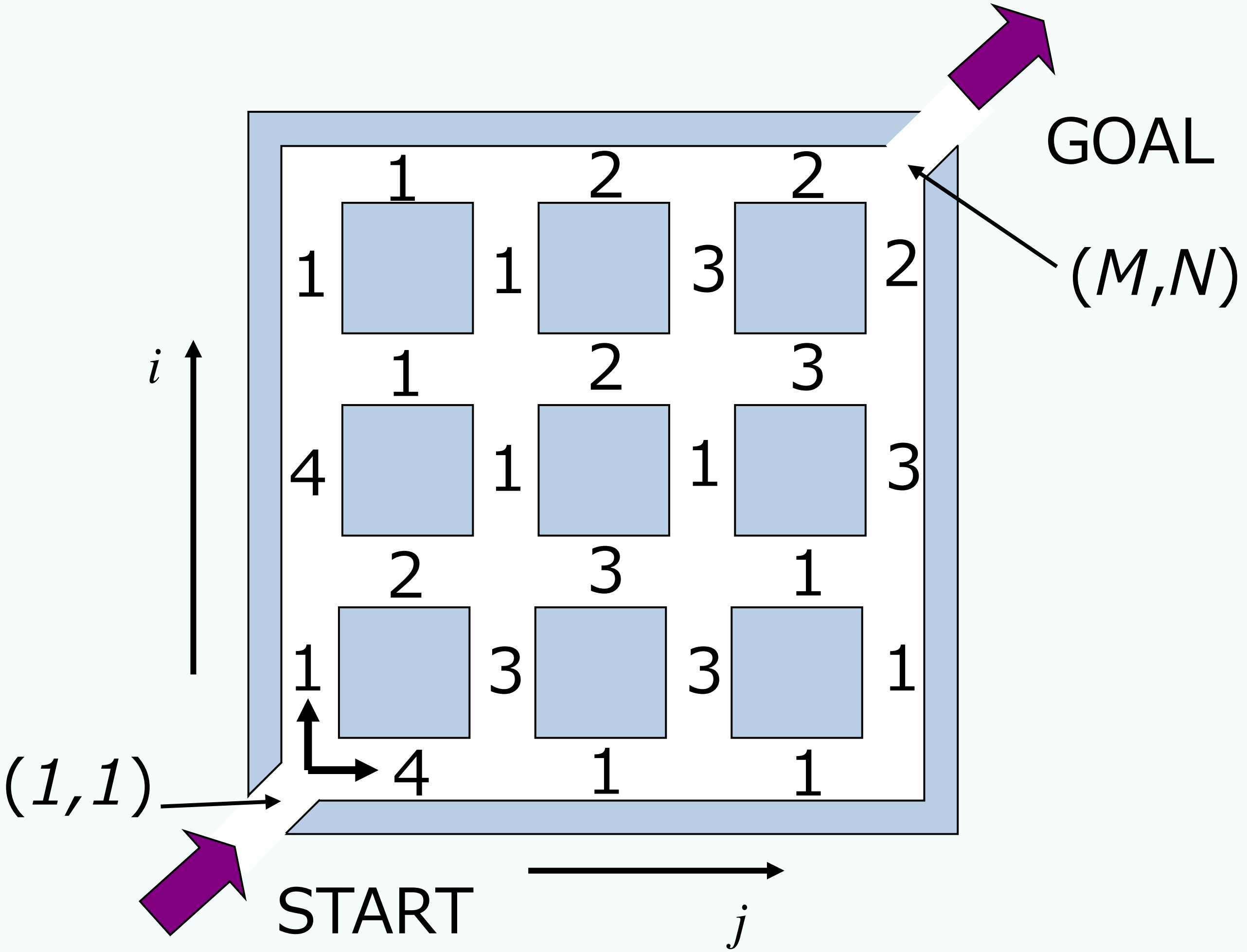
工場1に $x_1 = 2$，工場2に $x_2 = 3$，工場3に $x_3 = 1$，

を配分するときであり、このときの最大収益は 53 である．

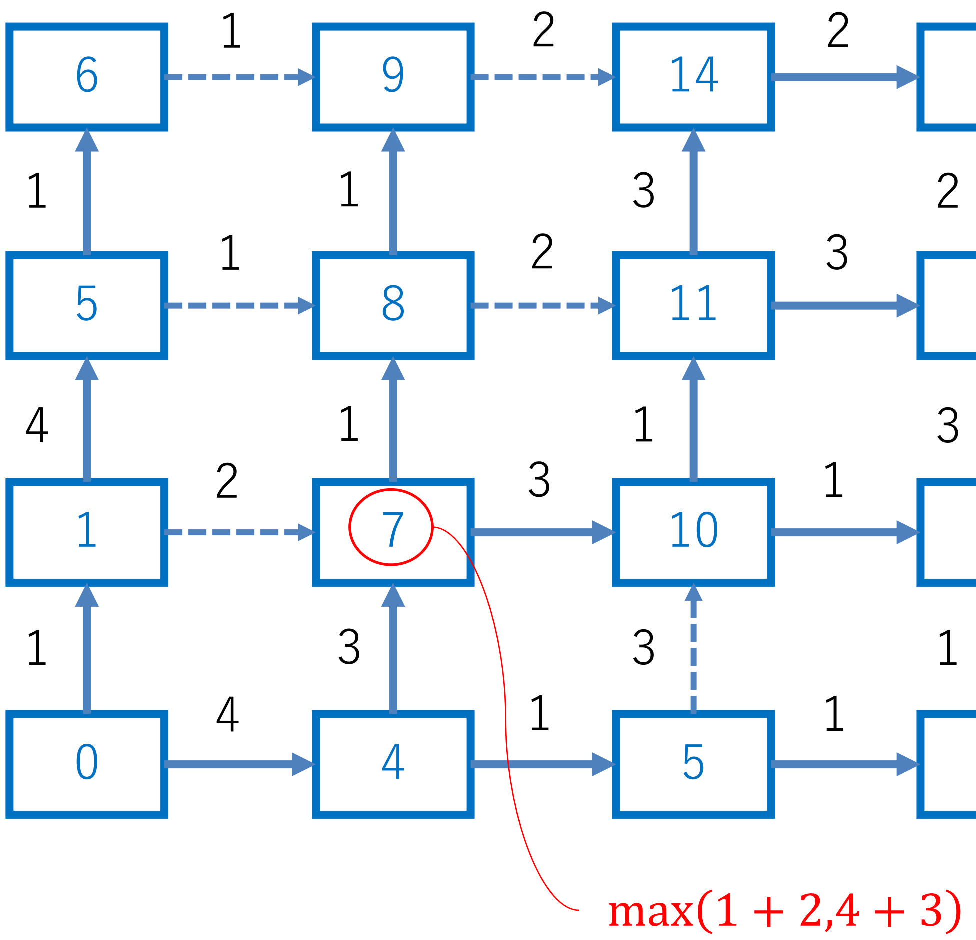
また，このときの $f_n(k)$ に関する最適パスは，$f_1(2) \rightarrow f_2(5) \rightarrow f_3(6)$ である．

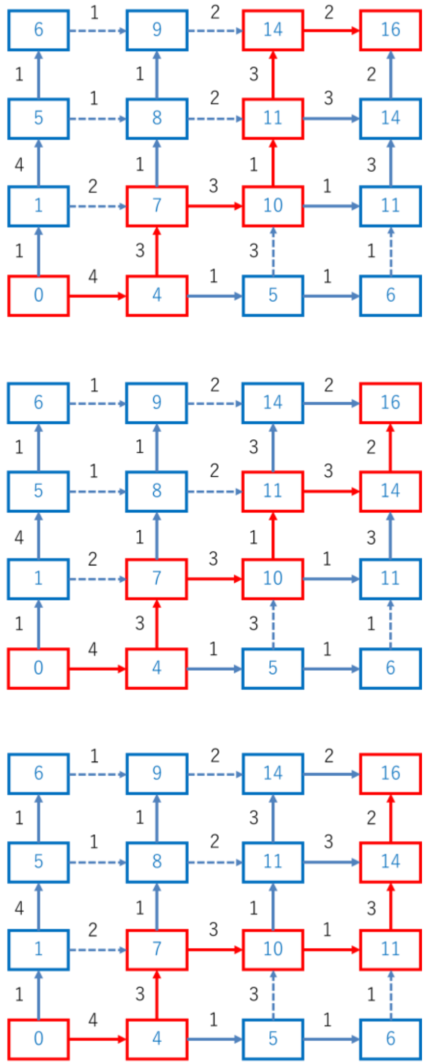
演習問題２（経路探索問題を動的計画法で解く）

1. 右図に示した経路探索問題において，各パスに置かれた数字を収益と見て，総収益を最大にする経路を求めるプログラムを作れ。それを用いて，最適経路を求めよ。
2. 右図に示した経路探索問題において，各パスに置かれた数字をコストと見て，総コストを最小にする経路を求めるプログラムを作れ。それを用いて，最適経路を求めよ。

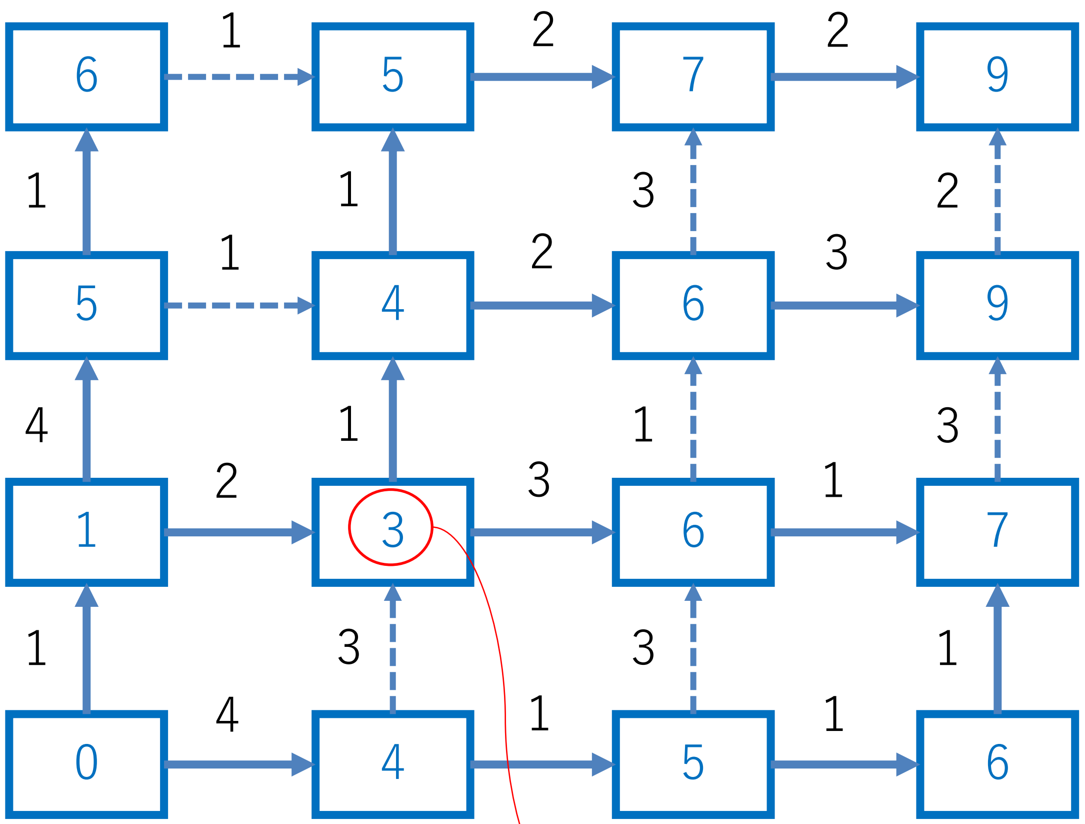


1. 最適経路は右図の3通り.

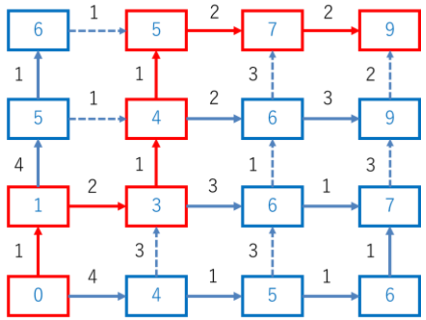




2. 最適経路は右図の1通り.

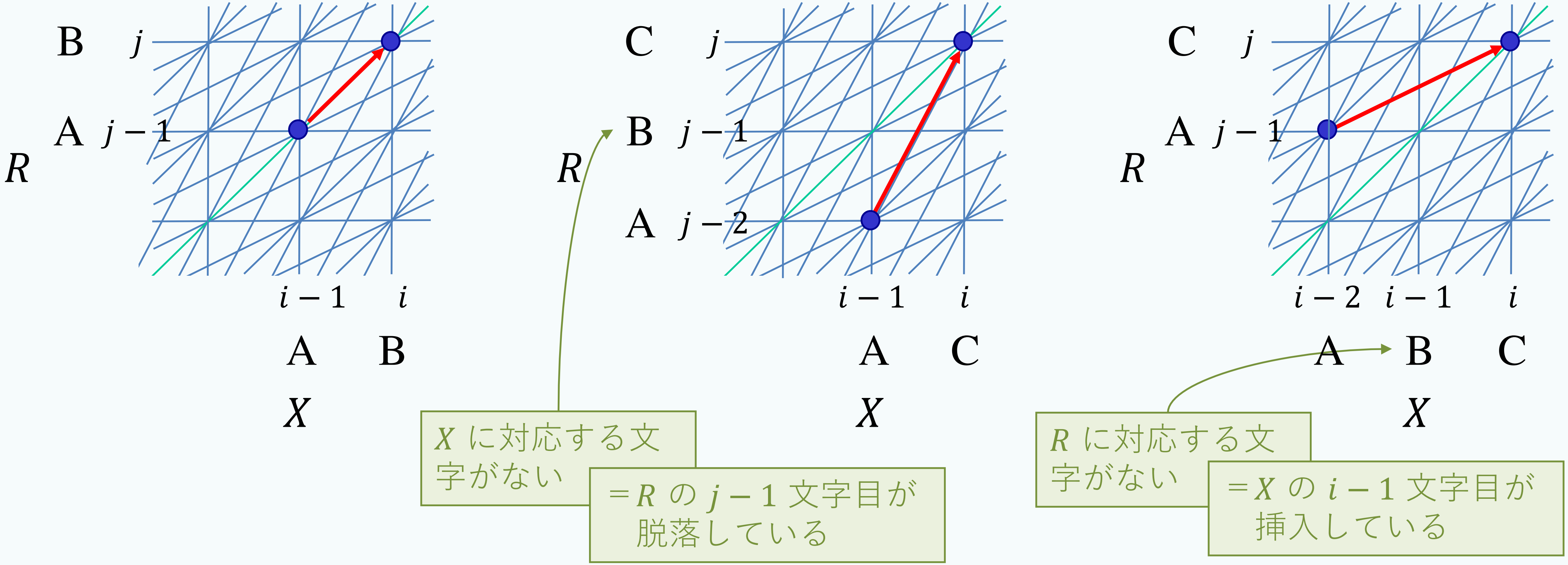


$\min(1+2, 4+3)$



演習問題３（文字列の距離を動的計画法で求める）

参照用の文字列を R，入力文字列を X とする．いま，文字の脱落・挿入をトレリス上で以下のように扱うことにしたうえで，文字列 R と X の距離を求めることを考える．



演習問題３（文字列の距離を動的計画法で求める）

このとき，以下の問に答えよ.

1. 文字列 X の１文字目から i 文字目までの部分文字列と文字列 R の１文字目から j 文字目までの部分文字列の距離を α(j,i) とする。subCost(a,b) を文字 a を文字 b に誤るコスト，delCost() を R の文字1文字が脱落する（R にあるものが X にない）コスト，insCost() を X に1文字が挿入する（R にないものが X にある）コストとするとき，α(j,i) を漸化式の形で表せ.
2. 文字列 X と文字列 R の距離を求めるアルゴリズムを記述せよ.
3. “KOBATAKE” と “KOBEATAK” は，トレリス上のどのようなパスで対応づけられるかを示せ. ただし，subCost(a,b)，delCost()，insCost() はともに 1 とする.

解答）

1. 漸化式は以下のように書ける.

```
alpha(j,i)= min( alpha(j-1,i-1),
                 alpha(j-2,i-1) + delCost(),
                 alpha(j-1,i-2) + insCost() )
              + subCost(R(j),X(i))
```

2. 講義スライドを参照のこと.

3. 文字列の対応付けはトレリス上で以下のように書ける．これより，挿入誤り，脱落誤りを1つずつ含むことがわかる．なお，無効なパスは記載していない．