04/12/2021

瀧澤武信

**(注意) 講義ノート．内容は随時変更される．**

**以下にあるもののうち，三角関数に関するものは経済数学入門の授業では取り扱わない．**

**「演習問題等」は過去の他のクラスの課題．このクラスでは，参考資料として扱う．**

**序論**

1. 数の集合とその記号

$\mathbf{N}$:自然数全体の集合

$\mathbf{Z}$:（有理）整数全体の集合

$\mathbf{Q}$:有理数（分数）全体の集合

$\mathbf{R}$:実数全体の集合

$\mathbf{C}$:複素数全体の集合

埋め込み (embedding) により，

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

とみなすことができる．

濃度 (potency) $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2$.

2. 対応と関数

対応

$f$ が集合 $A$ から集合 $B$ への対応であるとは，$A$ の各要素に対して $B$ の空集合でない部分集合 $Y$ が関係付けられていることをいう．これを

$$\begin{array}{cccccc} f & : & A & \to & B \\ & & \omega & & \cup \\ & & x & \mapsto & Y = f(x) \end{array}$$

または

$$\begin{array}{cccccc} f & : & A & \to & B \text{ の部分集合全体の集合} \\ & & \omega & & \omega \\ & & x & \mapsto & Y = f(x) \end{array}$$

で表わす．

記法

関数は対応の特別な場合

対応 $f$ が集合 $A$ から集合 $B$ への関数であるとは，上の対応の定義における $Y$ の要素が一つだけのときをいう．

$(Y = \{y\})$

すなわち，$A$ の各要素に対して $B$ の一つの要素 $y$ が対応していることをいう．これを

$$\text{関数 } f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \omega & & \omega \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

で表わす.

関数の例: 数列

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ \omega & & \omega \\ n & \mapsto & a_n = s(n) \end{array}$$

は, $\mathbf{N}$ から $\mathbf{R}$ への関数である.

関数のグラフ

$G \subset \mathbf{R}^2$が関数 $y = f(x)$ のグラフ (graph) であるとは, $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y = f(x) \right\}$ のことをいう.

3. 距離空間

距離が定義されている集合 (距離空間)

$$A : \text{空集合でない集合のとき}, \forall a, \forall b \in A \Longrightarrow \exists c \in R, c \geq 0$$

が, 次の (i) ~ (iii) の性質を持つとき, この $c$ を $d(a,b)$ と表わし, $a$ と $b$ との距離という.

$$\begin{array}{cc} \text{(i)} & d(a,b) \geq 0, \;\; d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \\ \text{(ii)} & \forall a, \forall b \in A, d(a,b) = d(b,a) \\ \text{(iii)} & \forall a, \forall b, \forall c \in A, d(a,c) + d(c,b) \geq d(a,b) \text{ (三角不等式)} \end{array}$$

このとき, $(A, d)$(または, 単に $A$) を距離空間という.

例 $\mathbf{R}^2$

$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R} \right\}$ において, $P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき

$$d(P,Q) = \sqrt{(|a_1 - b_1|)^2 + (|a_2 - b_2|)^2}$$

とすると, $d$ は距離となる.したがって, $\mathbf{R}^2$は距離空間である.

(注) この $d$ を $Euclid$ の距離という.

例 $\mathbf{R}$

$d(a,b) = |a - b|$ とすると, $d$ は距離となる.したがって $\mathbf{R}$ は距離空間である.

距離空間における開円盤

$$\text{距離空間 } A \text{ において}\alpha\text{を中心とする, 半径}\varepsilon(>0)\text{ の開円盤を } U_\varepsilon(\alpha) \text{ とすると,}$$

$$U_\varepsilon(\alpha) = \{a \in A | d(a,\alpha) < \varepsilon\} \text{ と表せる.}$$

**R** における開円盤

$$U_\varepsilon(\alpha) = \{a \in A | d(a,\alpha) < \varepsilon\} = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \ \ (\text{開区間})$$

4. 関数の極限, 連続性

関数の極限

$$f : A \to B \text{ 関数とする.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall a \in U_\delta(\alpha) - \{\alpha\}, f(a) \in U_\varepsilon(\beta) \text{ のとき,}$$

$$a \text{ を}\alpha\text{に近づけたときの関数 } f \text{ の極限は}\beta\text{であるといい, } \lim_{a \to \alpha} f(a) = \beta \text{ と表わす.}$$

関数の連続性

関数 $f : A \to B$ が点$\alpha \in A$ で連続であるとは $\left\{\begin{array}{c} \text{関数値 } f(\alpha) : \text{存在} \dagger \\ \text{極限値} \lim\limits_{a \to \alpha} f(a) : \text{存在} \\ \lim\limits_{a \to \alpha} f(a) = f(\alpha) \end{array}\right\}$ であることをいう.

関数の極限, 左側極限, 右側極限

以下の議論では, $A \subset R, B \subset R$ とする.

$$\text{関数 } f : A \to B$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall a \in (\alpha - \delta, \alpha), f(a) \in U_\varepsilon(\beta) \text{ のとき,}$$

$$a \text{ を}\alpha\text{に (左から) 近づけたときの関数 } f \text{ の左側極限の値は}\beta\text{であるといい, } \lim_{a \to \alpha - 0} f(a) = \beta \text{と表わす.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall a \in (\alpha, \alpha + \delta), f(a) \in U_\varepsilon(\beta) \text{ のとき,}$$

$$a \text{ を}\alpha\text{に (右から) 近づけたときの関数 } f \text{ の右側極限の値は}\beta\text{であるといい, } \lim_{a \to \alpha + 0} f(a) = \beta \text{と表わす.}$$

**定理**

$$a \text{ を点}\alpha\text{に近づけたときの関数 } f \text{ の極限が存在するならば (その値 } \lim_{a \to \alpha} f(a) = \beta \text{とする)}$$

$$a \text{ を点}\alpha\text{に (左から) 近づけたときの関数 } f \text{ の左側極限,}$$

$$a \text{ を点}\alpha\text{に (右から) 近づけたときの関数 } f \text{ の右側極限が存在し,}$$

$$\lim_{a \to \alpha - 0} f(a) = \lim_{a \to \alpha + 0} f(a) = \beta \text{である.}$$

$$\text{逆に}, a \text{ を点}\alpha\text{に左から近づけたときの関数 } f \text{ の左側極限と},$$

$$a \text{ を点}\alpha\text{に右から近づけたときの関数 } f \text{ の右側極限が存在し},$$

$$\text{かつ}, \text{それらの値が等しければ (共通の値} \lim_{a \to \alpha - 0} f(a) = \lim_{a \to \alpha + 0} f(a) = \beta \text{とする)},$$

$$a \text{ を点}\alpha\text{に近づけたときの関数 } f \text{ の極限が存在し}, \lim_{a \to \alpha} f(a) = \beta \text{である}.$$

関数の連続, 左側連続, 右側連続

関数 $f : A \to B$ が点$\alpha \in A$ で左側連続であるとは $\left\{\begin{array}{c} \text{関数値 } f(\alpha) : \text{存在 } \dagger \\ \text{左側極限} \lim_{a \to \alpha - 0} f(a) : \text{存在} \\ \lim_{a \to \alpha - 0} f(a) = f(\alpha) \end{array}\right\}$ であることをいう.

関数 $f : A \to B$ が点$\alpha \in A$ で右側連続であるとは $\left\{\begin{array}{c} \text{関数値 } f(\alpha) : \text{存在 } \dagger \\ \text{右側極限} \lim_{a \to \alpha + 0} f(a) : \text{存在} \\ \lim_{a \to \alpha + 0} f(a) = f(\alpha) \end{array}\right\}$ であることをいう.

**定理**

関数 $f$ が点 $a \in A$ で連続であるならば, 関数 $f$ は点 $a$ で左側連続かつ右側連続である.

逆に, 関数 $f$ が点 $a \in A$ で左側連続かつ右側連続であるならば, 関数 $f$ は点 $a$ で連続である.

$^\dagger f : A \to B$ は関数であるから, $\forall a \in A, \exists_1 f(a) \in B$ であることは明らかである.

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の場合

ある区間（開区間）$(a, b)$ で連続

$$\forall x \in (a, b), f : \text{連続}$$

$$f \in C^0(a, b)$$

区間 $(a, b)$ が明らかなとき,

$$f \in C^0$$

実数全体で連続

$$f \in C^0(\mathbf{R}) \text{ または } f \in C^0$$

例

(i) 連続

(ii) 極限有り，関数値有り，不連続

(iii) 極限有り，関数値無し，不連続（注：定義域が $\mathbf{R}$ でないもの）

(iv) 極限なし，左および右側極限有り，左側連続

(v) 極限なし，左および右側極限有り，右側連続

(vi) 極限なし，左および右側極限有り，関数値有り

(vii) 極限なし，左および右側極限なし

**問：次の関数の極限は存在するか．存在する場合はその値を求めよ**.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

解
(1) 存在しない.
(注)

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{のとき} \lim_{x\to +0} f(x) = 1 \text{ (右側極限は存在する)}$$
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{のとき} \lim_{x\to -0} f(x) = -1 \text{ (左側極限は存在する)}$$

(2) 存在する.

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|} \text{のとき} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

<u>**例題**</u>: $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$ が存在する.
(証明)

(1) $\underline{x \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ のとき}}$

$n = x$ とする.

$$\begin{aligned}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2\big(\frac{1}{n}\big)^2 + {}_n\mathrm{C}_3\big(\frac{1}{n}\big)^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\big(\frac{1}{n}\big)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\big(1 - \frac{1}{n}\big) + \frac{1}{3!}\big(1 - \frac{1}{n}\big)\big(1 - \frac{2}{n}\big) + \cdots + \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

したがって,

$$\lim_{n\to+\infty}\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\text{級数})$$

級数は項が無限個ある和であるから, その”和”は普通には求められない. 部分和の数列の極限が存在するとき, 級数が存在するという.

ここで, 部分和

$$S_p \overset{\leftarrow}{=} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{p!}$$

を考察する.

$$S_{p+1} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{p!}+\frac{1}{(p+1)!}$$

であるから,

(A)
$$S_{p+1}-S_p = \frac{1}{(p+1)!} > 0$$

よって,

$$\forall p : S_p < S_{p+1} \Longrightarrow S_p : \underline{\text{単調増加}}$$

また,

$$T_p \overset{\leftarrow}{=} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(p-1)\cdot p}$$

とおくと,

(B)

$$\begin{aligned} S_p \le T_p &= 1+\frac{1}{1}+\bigl(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\bigr)+\bigl(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\bigr)+\bigl(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\bigr)+\cdots+\bigl(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\bigr) \\ &= 3-\frac{1}{p} \end{aligned}$$

(等号は $p = 1,\ 2,\ 3$ のとき)

よって,

$$S_p \le T_p = 3-\frac{1}{p} < 3 \Longrightarrow S_p : \underline{\text{上に有界}}$$

⊙<u>Weierstrass の定理</u>: 有界な単調数列は収束する

これを使えば,

$$\text{(A)\&(B)} \Longrightarrow \lim_{p\to+\infty} S_p = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)^n$$

は存在する. その値を $e$ で表わす.

(2) $\underline{x \in \mathbf{R}, x > 0 \text{ のとき}}$

どのような実数 $x > 0$ も, 二つの自然数の組 $\big[n, n+1\big)$ で挟むことができる. すなわち,

$$\forall x \in \mathbf{R}, x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}, n \leq x < n+1$$

すると, 逆数を取れば,

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

すなわち,

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$
$$\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1} \geq \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{n+1} > \big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1}$$
$$\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n}\big(1 + \frac{1}{n}\big) \geq \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x}\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\beta} > \big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1}$$
$$\text{但し}, \beta \stackrel{\leftarrow}{=} (n+1) - x$$

ここで,$0 < \beta \leq 1$ であり, また,$x \to +\infty$ のとき $n \to +\infty, (n+1) \to +\infty$ であるから, 各辺で $x \to +\infty$ とすると,

$$\lim_{n \to +\infty}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n}\big(1 + \frac{1}{n}\big) \geq \lim_{x \to +\infty}\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x}\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\beta} \geq \lim_{(n+1) \to +\infty}\big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1}$$

したがって,

$$e \geq \lim_{x \to +\infty}\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x} \geq e \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty}\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x} = e$$

**問題**

$f(x) = \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^{x}$ のとき, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ が存在することを仮定し,
その値を $e$ で表す. このとき,

<u>問 I</u> : 次の値を求めよ.

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty}\big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} c\,\big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^{ax}$

(3) $\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

問 II : 次のそれぞれに答えよ.

(4) $\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = c\,(1+\alpha)$ のとき, $a$ の値を求めよ.

(注) この $a$ の値は期間 $b$ 後に, (単利計算で) 金利 $\alpha$ となるように $c$ 円お金を借りたときの, (理論的な複利計算の基の) 金利である.

(5) $\lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = 10000(1+0.1)$ のとき, $a$ の値を求めよ.

(6) (5) の $a$ の値を用いて, $y = \lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{182.5}{365}x}$ の値を求めよ.

(注) この $y$ の値は, 365 日後に (理論複利で)10%の金利を払う約束で 10,000 円借りたものを, 182.5 日後に返すときの理論上の元利合計の金額である.

また, それは $10000(1+0.1)^{\frac{1}{2}}$ と同じ値である.

**解**

$f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ のとき, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ が存在することを仮定し,
その値を $e$ で表す. このとき,

(1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} \quad (t \overset{\leftarrow}{=} -x)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right]^t\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t\\
&= \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{r+1} \quad (r \overset{\leftarrow}{=} t-1)\\
&= \lim_{r\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^r\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]\\
&= e
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} &= c\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a\\
&= ce^a
\end{aligned}
$$

$A \overset{\leftarrow}{=} \lim_{x\to+\infty} c\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ とする.

(3) (i) $a = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} c\left(1+0\right)^x = c$

$a \neq 0 \Longrightarrow A = c\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}$

$$a>0 \Longrightarrow \tfrac{x}{a} \to +\infty$$

(ii)

$$A = c\left[\lim_{\frac{x}{a}\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = ce^a$$

$$a<0 \Longrightarrow \tfrac{x}{a} \to -\infty$$

(iii) $$A = c\left[\lim_{\frac{x}{a}\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = ce^a \quad ((1)\text{ 参照})$$

(i) では $c = ce^0$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = ce^a$

(4)

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = c\,(1+\alpha)$ とする $(b \neq 0\ ,\ c \neq 0)$.

$$(\text{左辺}) = c\cdot e^{ab} \Longrightarrow e^{ab} = 1+\alpha \quad (c\neq 0)$$

$$ab = \log(1+\alpha) \Longrightarrow a = \frac{\log(1+\alpha)}{b} \quad (b \neq 0)$$

(5)

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = 10000\,(1+0.1)$ とする.

$$(\text{左辺}) = 10000\cdot e^a \Longrightarrow e^a = 1+0.1$$

$$a = \log 1.1$$

(6)

$$y = \lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{182.5}{365}x} = 10000\,e^{\frac{182.5}{365}a} = 10000\,(e^a)^{\frac{182.5}{365}}$$

$$a = \log 1.1 \Longrightarrow e^{\log 1.1} = 1.1$$

$$y = 10000\times 1.1^{\frac{1}{2}} = 10000\sqrt{1.1}$$

**導関数**

関数 $f$ が，ある点 $x$ で微分可能とは，極限（$h$ の関数の）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在することである．

この値を $f'(x), \frac{df}{dx}, y', \frac{dy}{dx}$ 等と表わす．

注意 : $f$ は点 $x$ で微分可能 $\Longrightarrow$ $f$ は点 $x$ で連続

ある区間 $(a,b)$ の各点で微分可能なとき，$f$ は区間 $(a,b)$ で微分可能という．このとき，$f'$ は $(a,b)\longrightarrow \mathrm{R}$ の関数となるが，この $f'$ を関数 $f$ の 導関数 という．

$(a,b)$ で $f$ が微分可能で, $f'$が連続（連続微分可能という）なとき，

$$f\in C^1(a,b) \text{ または } f\in C^1$$

で表わす．実数全体 $\left(\ \mathrm{R}=(-\infty,+\infty)\right)$ で微分可能で $f'$ が連続なとき，

$$f\in C^1(R) \text{ または } f\in C^1=\{f|f:1\text{ 回（以上）微分可能}, f':\text{連続 }\}$$

で表わす．

注意 : $f\in C^1 \Longrightarrow f\in C^0$

例題 : $f(x)=x^n\ (n\in\ \mathrm{N})$

（解）

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{{}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n\}-x^n]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+\{{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^{n-2}\}h^2]\\
&= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\{{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^{n-2}\}h]\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

例題 : $f(x)\equiv C\ (C\in\ \mathrm{R}$:定数$)$ のとき

（解）

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$n \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup 0$ のとき，$f'(x) = nx^{n-1}$.
(注)「公式」では $x=0$ のとき, 計算できないように見えるが, 上で示しているように $x=0$ でも計算でき，そのときの値は $0$ である.

<u>関数の演算 (1)</u>

関数
$$
\begin{array}{cccc}
f & : & R & \longrightarrow & R\\
g & : & R & \longrightarrow & R
\end{array}
$$

スカラー $(scalar)$ $\lambda \in R$

これらから, 関数のスカラー倍, 和, 差, 値の積, 値の商演算による新しい関数を作ることができる:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(\lambda f) & : & R & \to & R & & & & \\
 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & x & \mapsto & y & = & (\lambda f)(x) & \overset{\leftarrow}{=} & \lambda\cdot f(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(f+g) & : & R & \to & R & & & & \\
 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & x & \mapsto & y & = & (f+g)(x) & \overset{\leftarrow}{=} & f(x)+g(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(f-g) & : & R & \to & R & & & & \\
 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & x & \mapsto & y & = & (f-g)(x) & \overset{\leftarrow}{=} & f(x)-g(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(f\cdot g) & : & R & \to & R & & & & \\
 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & x & \mapsto & y & = & (f\cdot g)(x) & \overset{\leftarrow}{=} & f(x)\cdot g(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(\frac{f}{g}) & : & R - \{x\in R|g(x)=0\} & \to & R & & & & \\
 & & \omega & & \omega & & & & \\
 & & x & \mapsto & y & = & \left(\frac{f}{g}\right)(x) & \overset{\leftarrow}{=} & \dfrac{f(x)}{g(x)}
\end{array}
$$

<u>微分公式</u>

$$\{\lambda f\}' = \lambda f'$$
$$\{f \pm g\}' = f' \pm g'$$
$$\{f \cdot g\}' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{（値の積）}$$
$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \text{（値の商）}$$

（証明）値の商を新しい関数の値とするような関数についてのみ行う．他は演習．

$$F \leftrightarrows \left\{\frac{f}{g}\right\} \text{とする．}$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\} - \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot [\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)}{h} - \frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}] \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

$$\text{よって,} \left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

<u>例題 $A$</u> : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

（解）

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

<u>例題</u> : $f(x) = x^n (n \in \mathrm{Z})$

（解）

$n \geq 0$ のときは OK．（既に示した）．$n < 0$ のときを行う．

$m = -n$ とおくと，$m > 0$．すると，

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \text{だから，微分公式より}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} \\
&= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

<u>合成関数の微分公式</u>

$$
\begin{array}{ccccc}
g & : & R & \to & R \\
 & & \omega & & \omega \\
 & & y & \mapsto & z(= g(y)) \\
f & : & R & \to & R \\
 & & \omega & & \omega \\
 & & x & \mapsto & y(= f(x))
\end{array}
$$

のとき，合成関数

$$
\begin{array}{ccccc}
g \circ f & : & R & \to & R \\
 & & \omega & & \omega \\
 & & x & \mapsto & z\bigl(= (g \circ f)(x)\bigr)
\end{array}
$$

このとき，次の公式が成り立つ

$$(g \circ f)' = g' \cdot f'$$

$i.e.$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

<u>例題</u> : $f(x) = x^{\alpha}\,(\alpha \in \mathrm{Q})$
（解）
$\alpha$ は有理数だから，$\alpha = \frac{q}{p}$ , $p, q \in \mathbf{Z}\,, p \neq 0$ とおける．
すると，

$$y = x^{\alpha} = x^{\frac{q}{p}} \Longleftrightarrow y^p = x^q \overset{\rightarrow}{=} z$$

よって，合成関数の微分公式から，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow qx^{q-1} = p\,y^{p-1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{q}{p} \cdot \frac{x^{q-1}}{y^{p-1}} \cdot \frac{y}{y} \\
&= \frac{q}{p} \cdot \frac{x^{q-1} \cdot x^{\frac{q}{p}}}{x^q} \\
&= \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

<u>例題</u>：$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$
（解）

$$u \overset{\leftarrow}{=} 1 - x^2 \text{とおくと}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\
&= \frac{-x}{\sqrt{u}} \\
&= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

<u>例題 $A$</u>：$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
（解）

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (1+x^2)^{-1} \\
f'(x) &= (x)' \cdot (1+x^2)^{-1} + x \cdot \{(1+x^2)^{-1}\}' \\
&= 1 \cdot (1+x^2)^{-1} + x \cdot (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot (1+x^2)' \\
&= (1+x^2)^{-1} + x \cdot (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x \\
&= \frac{(1+x^2) + x \cdot (-1) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

解析学入門 演習問題

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の関数を微分せよ (**全員**, **解答すること**).

(1) $f(x) = x^2 (1 - x)$

(2) $f(x) = 1 - x^2$

(3) $f(x) = (1 - x)^2$

(4) $f(x) = x^2 \log x \qquad (x > 0)$

(5) $f(x) = \log(x^2) \qquad (x > 0)$

(6) $f(x) = (\log x)^2 \qquad (x > 0)$

(7) $f(x) = x^2 e^x$

(8) $f(x) = e^{x^2}$

(9) $f(x) = (e^x)^2$

(10) $f(x) = e^{(\log x)^2 + 1} \qquad (x > 0)$

裏に続く

金利の計算(**余裕があれば, 計算せよ.**)

$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ が存在することを仮定し,
その値を $e$ で表す. このとき,

問 I : 次の値を求めよ.

(1)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

(2)
$$\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$$

(3)
$$\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

問 II : 次のそれぞれに答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=c\,(1+\alpha)$ のとき, $a$ の値を求めよ.
(注) この $a$ の値は期間 $b$ 後に, (単利計算で) 金利 $\alpha$ となるように $c$ 円お金を借りたときの, (理論的な複利計算の基の) 金利である.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=10000(1+0.1)$ のとき, $a$ の値を求めよ.

(6) (5) の $a$ の値を用いて, $y=\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{182.5}{365}x}$ の値を求めよ.
(注) この $y$ の値は, 365 日後に (理論複利で)10%の金利を払う約束で 10,000 円借りたものを, 182.5 日後に返すときの理論上の元利合計の金額である.
また, それは $10000(1+0.1)^{\frac{1}{2}}$ と同じ値である.

提出日: / /

瀧澤武信

解析学入門 演習問題 解答例

次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = x^2\,(1-x) \Longrightarrow f'(x) = 2x - 3x^2\ (= -3x^2 + 2x)$

(2) $f(x) = 1 - x^2 \Longrightarrow f'(x) = -2x$

(3) $f(x) = (1-x)^2 \Longrightarrow f'(x) = -2 + 2x\ (= 2x - 2)$

(4) $f(x) = x^2 \log x \qquad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = x(2\log x\ +\ 1)$

(5) $f(x) = \log(x^2) \qquad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$

(6) $f(x) = (\log x)^2 \qquad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2\log x}{x}$

(7) $f(x) = x^2 e^x \Longrightarrow f'(x) = xe^x(x+2)$

(8) $f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f'(x) = 2xe^{x^2}$

(9) $f(x) = (e^x)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

(10) $f(x) = e^{(\log x)^2+1} \qquad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2e^{(\log x)^2+1}\log x}{x}$

演習問題解説

(1) $f'(x) = (x^2)' \cdot (1-x) + x^2 \cdot (1-x)' = 2x \cdot (1-x) + x^2 \cdot (-1)$
$= 2x - 2x^2 - x^2 = 2x - 3x^2$
(注) $f(x) = x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3x^2$

(2) $f(x) = 1 - x^2 \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ u = x^2 \end{cases}$
$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (-1) \cdot (x^2)' = -2x$
(注)$f'(x) = (1)' - (x^2)' = 0 - 2x = -2x$

(3) $f(x) = (1-x)^2 \Longrightarrow \begin{cases} y = u^2 \\ u = 1 - x \end{cases}$
$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u \cdot (1-x)' = 2(1-x) \cdot (-1) = -2 + 2x$
(注) $f(x) = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow f'(x) = -2 + 2x$

(4) $f(x) = x^2 \log x \quad (x > 0) \Longrightarrow$
$f'(x) = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$

(5) $f(x) = \log(x^2) \quad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot (2x) = \dfrac{2}{x}$
(注 1) $f(x) = 2\log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$
(注 2) $x$ の条件は $x \neq 0$ でもよい.

(6) $f(x) = (\log x)^2 \quad (x > 0) \Longrightarrow f'(x) = 2(\log x) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\log x}{x}$

(7) $f(x) = x^2 e^x \Longrightarrow f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(x+2)$

(8) $f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

(9) $f(x) = (e^x)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$
(注) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

(10) $f(x) = e^{(\log x)^2 + 1} \quad (x > 0)$
$\Longrightarrow f'(x) = e^{(\log x)^2+1} \cdot [(\log x)^2 + 1]' = e^{(\log x)^2+1} \cdot 2(\log x) \cdot \dfrac{1}{x}$
$= \dfrac{2e^{(\log x)^2+1} \log x}{x}$

提出日: / /
瀧澤武信

<u>金利の計算（解答例）</u>

$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ が存在することを仮定し，
その値を $e$ で表す．このとき，

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} \quad (t \stackrel{\leftarrow}{=} -x)\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right]^t\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t\\
&= \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{r+1} \quad (r \stackrel{\leftarrow}{=} t-1)\\
&= \lim_{r\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^r\left(1+\frac{1}{r}\right)\right]\\
&= e
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}c\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} &= c\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a\\
&= ce^a
\end{aligned}$$

(3) $A \stackrel{\leftarrow}{=} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}c\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ とする．

$$\text{(i)}\ \begin{cases} a=0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}c\left(1+0\right)^x = c \\ a\neq 0 \Longrightarrow A = c\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a} \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \begin{cases} a>0 \Longrightarrow \frac{x}{a}\to+\infty \\ A = c\left[\displaystyle\lim_{\frac{x}{a}\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = ce^a \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{cases} a<0 \Longrightarrow \frac{x}{a}\to-\infty \\ A = c\left[\displaystyle\lim_{\frac{x}{a}\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = ce^a \end{cases}$$

((1) 参照)(i) では $c=ce^0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}c\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = ce^a$

(4)
$$\lim_{x\to+\infty} c\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = c\,(1+\alpha) \text{ とする } (b\neq 0\ ,\ c\neq 0).$$
$$(\text{左辺}) = c\cdot e^{ab} \Longrightarrow e^{ab} = 1+\alpha \quad (c\neq 0)$$
$$ab = \log(1+\alpha) \Longrightarrow a = \frac{\log(1+\alpha)}{b} \quad (b\neq 0)$$

(5)
$$\lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = 10000\,(1+0.1) \text{ とする}.$$
$$(\text{左辺}) = 10000\cdot e^{a} \Longrightarrow e^{a} = 1+0.1$$
$$a = \log 1.1$$

(6)
$$y = \lim_{x\to+\infty} 10000\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{182.5}{365}x} = 10000\,e^{\frac{182.5}{365}a} = 10000\,(e^{a})^{\frac{182.5}{365}}$$
$$a = \log 1.1 \Longrightarrow e^{\log 1.1} = 1.1$$
$$y = 10000\times 1.1^{\frac{1}{2}} = 10000\sqrt{1.1}$$

**追加の例題**

次の関数を微分せよ.

$f(x) = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{2}}$

(解)

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{x^2}{2}} = (1+\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2})^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\frac{x^2}{2})' \\ &= \frac{x}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} \quad \cdots \text{標準的な解答} \\ &= \frac{x}{\sqrt{4+2x^2}} \quad \cdots (\text{これ以下の解答も OK}) \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{4+2x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+2}} \end{aligned}$$

**対数関数, 指数関数**

$$
\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& \log x & (\text{但し}, \ x>0) & \longrightarrow & f'(x) &=& \frac{1}{x} \\
f(x) &=& e^x & & \longrightarrow & f'(x) &=& e^x
\end{array}
$$

(注意) log の性質. $\log 1 = 0$ , $\log_e e = 1$
$\log(xy) = \log x + \log y$ , $\log(\dfrac{x}{y}) = \log x - \log y$
$\log(x^y) = y \log x$

(証明)
$f(x) = \log_e x$ のとき.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\bigl(1 + \frac{h}{x}\bigr)
\end{aligned}
$$

ここで,$t \overset{\leftarrow}{=} \frac{x}{h}$ すなわち, $\frac{h}{x} = \frac{1}{t}$ , $\frac{1}{h} = \frac{t}{x}$ とすると,
$h \to 0$ のとき,$t \to \pm\infty$. したがって,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{x} \log\bigl(1 + \frac{1}{t}\bigr) \\
&= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{x} \log\bigl(1 + \frac{1}{t}\bigr)^t
\end{aligned}
$$

ここで,
(i) $t > 0$(すなわち $t \to +\infty$) のとき

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{x} \log\bigl(1 + \frac{1}{t}\bigr)^t &= \frac{1}{x} \log_e e \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

(ii) $t < 0$(すなわち $t \to -\infty$) のとき, $s \overset{\leftarrow}{=} -t$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \log\bigl(1 + \frac{1}{t}\bigr)^t &= \lim_{s\to+\infty} \log\bigl(1 - \frac{1}{s}\bigr)^{-s} \\
&= \lim_{s\to+\infty} \log\bigl[\bigl(1 - \frac{1}{s}\bigr)^{-1}\bigr]^s
\end{aligned}
$$

ここで, $\bigl(1 - \dfrac{1}{s}\bigr)^{-1} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{s}} = \dfrac{1}{\frac{s-1}{s}} = \dfrac{s}{s-1}$ であるから,

$r \overset{\leftarrow}{=} s - 1$ とおくと

$$
s = r + 1 \, , \ s \to +\infty \Longleftrightarrow r \to +\infty
$$

$$
\begin{aligned}
\text{したがって,}\ \lim_{s\to+\infty}\Big\{\Big(1-\frac{1}{s}\Big)^{-1}\Big\}^{s} &= \lim_{r\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{r}\Big)^{r+1} \\
&= \lim_{r\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{r}\Big)^{r}\Big(1+\frac{1}{r}\Big) \\
&\!\!\!\!\!\Big(=e\Big) \\
\text{したがって,}\ \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{x}\log\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^{t} &= \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{x}\log\Big[\Big\{\Big(1-\frac{1}{s}\Big)^{-1}\Big\}^{s}\Big] \\
&= \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{x}\log\Big[\Big(1+\frac{1}{r}\Big)^{r}\Big(1+\frac{1}{r}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{x}\log_e e \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$f(x)=e^{x}$のとき.

$$y=e^{x} \Longleftrightarrow \log y = x \stackrel{\rightarrow}{=} z$$

すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \\
\Longleftrightarrow 1 &= \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$

$$\text{したがって,}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^{x}$$

(注意) ここで, 指数関数と対数関数はそれぞれ逆関数の関係となっていることに注意する. すなわち,

(性質) $\log e^{x}=x\,,\ e^{\log x}=x$

定理 : 逆関数の微分公式

$$
\begin{array}{lclcl}
\text{関数}\ f & : & X & \longrightarrow & Y \\
 & & \omega & & \omega \\
 & & x & \mapsto & y \quad = f(x)
\end{array}
$$

の逆関数

$$
\begin{array}{lclcl}
f^{-1} & : & Y & \longrightarrow & X
\end{array}
$$

が関数とする.

$$
\begin{array}{lclcl}
f^{-1} & : & Y & \longrightarrow & X \\
 & & \omega & & \omega \\
 & & y & \mapsto & x \quad = f^{-1}(y)
\end{array}
$$

このとき, $f\in C^{1}(A), f^{-1}\in C^{1}(B)$ であれば,

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'}\text{すなわち}\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\text{である.}$$

例題 : $f(x) = x^x \ (x \in \mathbf{R}, x > 0)$

（解）

$$y = x^x \Longleftrightarrow \log y = x \log x \overset{\rightarrow}{=} z$$

すると,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \Longleftrightarrow (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' &= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1 \\ &= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\text{したがって}, \frac{dy}{dx} = \frac{\log x + 1}{\frac{1}{y}} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

例題 : $f(x) = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbf{R})$

（解）

$$y = x^\alpha \Longleftrightarrow \log y = \alpha \log x \overset{\rightarrow}{=} z$$

すると,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \Longleftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{x} &= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

したがって, $\frac{dy}{dx} = \alpha \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

**三角関数**

$f(x) \ = \sin x \qquad \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) \ = \cos x \qquad \longrightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) \ = \tan x \quad \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2} \ \big(= (\sec x)^2\big)$

(性質)

$\cos x \ = \sin\big(x + \dfrac{\pi}{2}\big)$

$\tan x \quad = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(注意) 三角関数には, $\sin x,\ \cos x,\ \tan x$ の他 $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\mathrm{cosec}\ x = \dfrac{1}{\sin x}$ がある.

(証明)

$f(x)=\sin x$ のときを行う． $f(x)=\cos x$, $f(x)=\tan x$ のときは演習.

(注意 1) $\sin A-\sin B=2\cos\bigl(\dfrac{A+B}{2}\bigr)\sin\bigl(\dfrac{A-B}{2}\bigr)$

これは, 同じ象限にある場合, 幾何学的に証明できるので, その結果を利用することにする.

(注意 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$f(x)=\sin x$ のとき.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\sin(x+h)-\frac{\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Bigl[2\cos\Bigl(\frac{(x+h)+x}{2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{(x+h)-x}{2}\Bigr)\Bigr] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} \\
&= \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x+\frac{h}{2}) \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

(注意 3) $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$

(参考)

$f(x)=\cos x\ =\sin\bigl(x+\dfrac{\pi}{2}\bigr)$ のとき.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot(x+\frac{\pi}{2})' \\
&= \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

$f(x)=\tan x\ =\bigl(\dfrac{\sin x}{\cos x}\bigr)$ のとき.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \Bigl(\frac{\sin x}{\cos x}\Bigr)' \\
&= \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{(\cos x)^2} \\
( &= (\sec x)^2)
\end{aligned}
$$

**高階導関数 (高次導関数)**

導関数の導関数を 2 階 (2 次) 導関数という.$(n-1)$ 階 ($(n-1)$ 次) 導関数の導関数を $n$ 階 ($n$ 次) 導関数という.

一般に 2 階 (2 次) 以上の導関数を高階 (高次) 導関数という.

記号

$n$ 階導関数: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

(注) $n$ が小さいとき, たとえば $f^{(2)}$ を $f''$ と表わす場合がある.

$f$ が $n$ 回微分可能で, $f^{(n)}$が連続なとき,

$$f \in C^n = \{f | f : n \text{ 回 (以上) 微分可能}, f^{(n)}(x) : \text{連続}\}$$

で表わす.

$f$ が何回でも微分可能なとき,

$$f \in C^\infty$$

で表わす.

例題 :

以下は, いずれも $f \in C^\infty$

$$f(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x, \qquad f''(x) = 2, \qquad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 3)$$

$$f(x) = \log x \quad \longrightarrow \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

問：次の関数の $n$ 階導関数 $f^{(n)}(x)$ と $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(1)
$$f(x) = \log(1+x)$$

(2)
$$f(x) = \log(1-x)$$

問の解：

(1)

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

(2)

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$

(解析学用)

例題：

$$f(x)=\sin x \quad\longrightarrow\quad f^{(n)}(x)=\sin\bigl(x+\tfrac{n\pi}{2}\bigr),\quad f^{(n)}(0)=\sin\tfrac{n\pi}{2}.$$
$$f(x)=\cos x \quad\longrightarrow\quad f^{(n)}(x)=\cos\bigl(x+\tfrac{n\pi}{2}\bigr),\quad f^{(n)}(0)=\cos\tfrac{n\pi}{2}.$$

例題：

$$f(x)=\log x\longrightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$y=\log x,\ y'=x^{-1},\ y''=(-1)x^{-2},\ y'''=(-1)(-2)x^{-3},\ y^{(4)}=(-1)(-2)(-3)x^{-4},$$
$$\cdots,$$
$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(-1)(-2)\cdots\bigl(-(n-1)\bigr)\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\end{aligned}$$

Leibniz の公式：

$$\begin{aligned}\bigl[u(x)v(x)\bigr]^{(n)}=&\ {}_n\mathrm{C}_0u(x)^{(n)}v(x)+{}_n\mathrm{C}_1u(x)^{(n-1)}v'(x)+{}_n\mathrm{C}_2u(x)^{(n-2)}v''(x)+\cdots\\&+{}_n\mathrm{C}_nu(x)v(x)^{(n)}\\&\Bigl(=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ku(x)^{(n-k)}v(x)^{(k)}\Bigr)\end{aligned}$$

但し，

$$u^{(0)}(x)=u(x)$$
$$v^{(0)}(x)=v(x)$$

(略証) 本来は帰納法で行う.

$$\varphi(x)\overset{\leftarrow}{=}u(x)v(x)$$（値の積）とする.

$$\begin{aligned}\varphi&=uv\\\varphi'&=u'v+uv'\\\varphi''&=(u''v+u'v')+(u'v'+uv'')\\&=u''v+2u'v'+uv''\\\varphi'''&=(u'''v+u''v')+2(u''v'+u'v'')+(u'v''+uv''')\\&=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''\\&\ \vdots\\\varphi^{(n)}&={}_n\mathrm{C}_0u^{(n)}v+{}_n\mathrm{C}_1u^{(n-1)}v'+{}_n\mathrm{C}_2u^{(n-2)}v''+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nuv^{(n)}\end{aligned}$$

例題：$f(x)=x^2e^x$のとき，$f^{(n)}(x)$ と $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = {}& {}_n\mathrm{C}_0(x^2)^{(n)}e^x + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-3}(x^2)'''(e^x)^{(n-3)} \\
& + {}_n\mathrm{C}_{n-2}(x^2)''(e^x)^{(n-2)} + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(x^2)'(e^x)^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_n x^2(e^x)^{(n)} \\
= {}& \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot e^x + n\cdot 2x\cdot e^x + x^2e^x \\
= {}& [x^2+2nx+n(n-1)]e^x, \\
f^{(n)}(0) = {}& n^2-n.
\end{aligned}
$$

問：次の関数の $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x)$ と $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(3)
$$f(x) = xe^{-x}$$

問の解：

(3)

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-x)e^{-x} \\
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}n
\end{aligned}
$$

**最大最小**

補題 1
$$f:[a,b] \text{ で連続} \Longrightarrow [a,b] \text{ で最大値と最小値をとる.}$$

補題 2
$$f:[a,b] \text{ で連続}, f(a)=f(b) \Longrightarrow (a,b) \text{ 内で最大値または最小値をとる.}$$

定理 1: Rolle の定理

$$f \in C^1(a,b), f:[a,b] \text{ で連続}, f(a)=f(b) \Longrightarrow {}^{\exists}c \in (a,b), f'(c)=0$$

(証明) 補題 1 から,$f$ は $[a,b]$ で最大値および最小値をとるが, $f(a)=f(b)$ であるから, 補題 2 により $(a,b)$ で最大値または最小値をとる. 例えば最大値をとったとする. すなわち,

$${}^{\exists}c \in (a,b), f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

とすると,

$$h \neq 0 \Rightarrow f(c+h) \leq f(c)$$

$$\begin{cases} \text{(i) } h > 0; \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \Longrightarrow f'(c) \leq 0 \\ \\ \text{(ii) } h < 0; \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \Longrightarrow f'(c) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(i)\&(ii)} \Longrightarrow f'(c) = 0$$

(証明終)

<u>定理 2</u>: (Lagrange の) 平均値の定理

$$f \in C^1(a,b), f : [a,b] \text{ で連続}, \Longrightarrow {}^{\exists}c \in (a,b), \begin{cases} f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \end{cases}$$

(証明)

$$g(x) \overset{\leftarrow}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \text{ とおくと,}$$

$$g \in C^1,\ g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(a) = 0,\ g(b) = 0 \Longrightarrow g(a) = g(b)$$

よって,<u>Rolle</u> の定理により

$${}^{\exists}c \in (a,b),\ g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>系 1</u>

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a + \theta(b-a)), 0 < {}^{\exists}\theta < 1$$

(証明) 定理 2 で

$$a < c < b \text{ より } \theta \overset{\leftarrow}{=} \frac{c-a}{b-a} \text{ とおくと,}$$

$$0 < \theta < 1,\ c = a + \theta(b-a)$$

(証明終)

<u>系 2</u>

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h), 0 < {}^{\exists}\theta < 1$$

(証明) 系 1 で

$$h \overset{\leftarrow}{=} b - a$$

とおけばよい.(証明終)

<u>定理 3</u>: Cauchy の平均値の定理

$$f, g \in C^1(a,b),\ f,g:[a,b]\text{ で連続},\ g(a) \neq g(b) \Longrightarrow {}^\exists c \in (a,b),\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

(証明)

$$\varphi(x) \overset{\leftarrow}{=} (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))\text{ とおくと},$$

$$\varphi \in C^1,\ \varphi'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$$

$$\varphi(a) = 0,\ \varphi(b) = 0 \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

よって,Rolle の定理により

$${}^\exists c \in (a,b),\ \varphi'(c) = 0 \Longleftrightarrow (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

$$\text{よって},\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

定理 4: L'Hospital の定理

$$f, g \in C^1(a\text{ の周りで}),\ f(a) = g(a) = 0\ \left(\text{すなわち }\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ (\text{右辺が存在すれば左辺も存在する})$$

(証明)

$$f(a) = g(a) = 0\text{ より }\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\text{ところが, Cauchyの定理より},\ {}^\exists c \in (a,b), \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\text{ここで}, h \overset{\leftarrow}{=} b-a,\ \theta \overset{\leftarrow}{=} \frac{c-a}{b-a}\text{とおくと},$$

$$0 < \theta < 1,\ c = a + \theta h$$

したがって,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

よって,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明終)

例題: 次の極限を求めよ: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

(注)　これ以下では, $(e^x)' = e^x, (\log x)' = \frac{1}{x}$ 等は既知とする.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\mathrm{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

問：次の関数の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$$

(解)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}\overset{\mathrm{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$$

系 : $f,g\in C^1$($a$ 自身を除いた $a$ の周りで), $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ , $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ (\text{右辺が存在すれば左辺も存在する})$$

(証明) 略

定理: Taylor の定理 ($n=2$)

$$f\in C^2(a,b\ \text{を含むある区間で})$$
$$\Longrightarrow\ ^{\exists}c\in(a,b),\, f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

(証明)

$$\varphi(x)\overset{\leftarrow}{=}f(b)-\bigl\{f(x)+(b-x)f'(x)\bigr\}-\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\cdot K\qquad \text{但し}, K=\Bigl[f(b)-\bigl\{f(a)+(b-a)f'(a)\bigr\}\Bigr]$$

とおく. すると, $\varphi\in C^1, \varphi(a)=0,\ \varphi(b)=0\Longrightarrow\varphi(a)=\varphi(b)$ よって,Rolle の定理により

$$^{\exists}c\in(a,b),\ \varphi'(c)=0$$

ところで,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\bigl[f'(x)+\bigl\{-f'(x)+(b-x)f''(x)\bigr\}\bigr]-\frac{2(b-x)\cdot(-1)}{(b-a)^2}\cdot K\\ &= -(b-x)f''(x)+\frac{2(b-x)}{(b-a)^2}\cdot K\\ &= (b-x)\bigl[\frac{2K}{(b-a)^2}-f''(x)\bigr]\end{aligned}$$

よって,

$$\varphi'(c)=(b-c)\bigl[\frac{2K}{(b-a)^2}-f''(c)\bigr]=0$$

$b \neq c$ であるから,

$$\frac{2K}{(b-a)^2}=f''(c)$$

すなわち,

$$K=\frac{(b-a)^2}{2}\cdot f''(c)$$

したがって,

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

(証明終)

<u>系 1</u>

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)\,,\ 0<{}^{\exists}\theta<1$$

(証明)$a<b$ のとき, 定理において

$$a<c<b \text{ より } \theta \overset{\leftarrow}{=} \frac{c-a}{b-a} \text{ とおくと,}$$

$$0<\theta<1,\ c=a+\theta(b-a)$$

また,

$$h \overset{\leftarrow}{=} b-a$$

とおくと,

$$b=a+h\,,\ c=a+\theta(b-a)=a+\theta h$$

(注) $b<a$ のとき, 問とする. (証明終)

<u>系 2</u>: Maclaurin の定理 ($n=2$)

$$f \in C^2(0\text{の周りで}) \Longrightarrow 0 <^{\exists}\ \theta < 1,$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(\theta x)$$

(証明)

系 1 で,$a = 0$ , $h = x$ とすればよい.

(証明終)

<u>例題</u>

$x = 0$ **の周りで** Taylor **の定理を用いて** 1 **次以下の式で近似せよ**.(2 **次の剰余項まで示せ**)

(1) $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(2) $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

<u>例題解答</u>

$x = 0$ **の周りで** Taylor **の定理を用いて** 1 **次以下の式で近似せよ**.(2 **次の剰余項まで示せ**)

(1) $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

[解] $\quad f(x) = 1 - x + x^2(1+\theta x)^{-3}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$f(0) = 1\,,\ f'(0) = -1\,,\ f''(\theta x) = 2(1+\theta x)^{-3}$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(\theta) = 1 - x + x^2(1+\theta x)^{-3}$$

(2) $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

[解] $\quad f(x) = 1 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{32}x^2(1-\dfrac{\theta x}{2})^{-\frac{5}{2}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = (1-\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (-\frac{1}{2})(1-\frac{x}{2})^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2})$$

$$f''(X) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1-\frac{x}{2})^{-\frac{5}{2}}(-\frac{1}{2})^2$$

$$f(0) = 1\,,\ f'(0) = \frac{1}{4}\,,\ f''(\theta x) = \frac{3}{16}((1-\frac{\theta x}{2})^{-\frac{5}{2}}$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{3}{32} x^2 (1 - \frac{\theta x}{2})^{-\frac{5}{2}}$$

<u>定理 5</u>: Taylor **の定理**

$$f \in C^n(a, b \text{ を含むある区間で})$$

$$\Longrightarrow {}^{\exists} c \in (a,b), f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

(証明)

$$\varphi(x) \stackrel{\leftarrow}{=} f(b) - \big\{ f(x) + \frac{(b-x)}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \big\} - \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n} \big[ f(b) - \big\{ f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) +$$

とおく. ここで,[　　] の中身は定数なのでそれを $K$ とおく. すなわち,

$$K \stackrel{\leftarrow}{=} \big[ f(b) - \big\{ f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \big\} \big]$$

まず,$1 \leq k \leq n-1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\big[ \frac{(b-x)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x) \big]' &= \big[ \frac{(b-x)^k}{k!} \big]' \cdot f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} \cdot \big[ f^{(k)}(x) \big] \\
&= \frac{k(b-x)^{k-1} \cdot (b-x)'}{k!} \cdot f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} \cdot f^{(k+1)}(x) \\
&= -\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} \cdot f^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

(但し, $0! = 1$ とする.)

また,

$$\big[ \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n} \big]' = \frac{n(b-x)^{n-1} \cdot (-1)}{(b-a)^n}$$

したがって,$\varphi \in C^1$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\big[ f'(x) + \big\{ -f'(x) + \frac{(b-x)}{1!} f''(x) \big\} + \big\{ -\frac{(b-x)}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \big\} + \cdots \\
&\qquad + \big\{ -\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \big\} \big] + \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} \cdot K \\
&= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} \cdot K \\
&= (b-x)^{n-1} \big[ \frac{nK}{(b-a)^n} - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} \big]
\end{aligned}$$

$$\varphi(a)=0,\ \varphi(b)=0 \Longrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$$

よって,Rolle の定理により

$$^{\exists}c\in(a,b),\ \varphi'(c)=0 \Longleftrightarrow (b-c)^{n-1}\Big[\frac{nK}{(b-a)^n}-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\Big]=0$$

$b\neq c$ であるから,

$$\frac{nK}{(b-a)^n}=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}$$

よって,

$$K=\frac{(b-a)^n\cdot f^{(n)}(c)}{n\cdot(n-1)!}=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

したがって,

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

(証明終)

系 1

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)\,,\ 0<{}^{\exists}\theta<1$$

(証明) 定理 5 で

$$a<c<b \text{ より } \theta \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{c-a}{b-a} \text{ とおくと,}$$
$$0<\theta<1,\ c=a+\theta(b-a)$$

また,

$$h \stackrel{\leftarrow}{=} b-a$$

とおくと,

$$b=a+h\,,\ c=a+\theta(b-a)=a+\theta h$$

(証明終)

系 2

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n(x)$$

但し,$R_n(x)$ はLagrangeの剰余:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}\big(a+\theta(x-a)\big)\,,\ 0<{}^{\exists}\theta<1$$

(証明) 略

<u>系 3</u> (Taylor 展開)

$$f \in C^{\infty} \text{で, かつ, 系 2 における } R_n(x) \text{ が, } \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \text{ のとき,}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$
$$\Big( = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \Big)$$
$$\text{但し}, 0! = 1\,,\ f^{(0)}(a) = f(a) \text{ とする.}$$

(証明) 略

<u>定理 6</u>: Maclaurin の定理

$$f \in C^n (0 \text{ の周りで}) \Longrightarrow 0 <^{\exists}\, \theta < 1,$$
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

(証明)
Taylor の定理の系 2 で,$a = 0$ とすればよい.
(証明終)

<u>系 :</u> (Maclaurin 展開)

$$f \in C^{\infty} \text{で, かつ, } R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ が, } \lim_{n \to +\infty} R_n = 0 \text{ をみたせば,}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$
$$\Big( = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \Big)$$
$$\text{但し}, 0! = 1\,,\ f^{(0)}(a) = f(a) \text{ とする.}$$

(証明) 略

<u>Maclaurin **の定理 例題**</u>

<u>例題</u> $$f(x) = e^x$$

(解)

$$f \in C^{\infty} \text{すなわち } {}^{\forall} n \in \mathbf{N}, f \in C^n(\mathbf{R})$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$$

よって， Maclaurin の定理から,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot 1 + \frac{x^n}{n!}\cdot e^{\theta x}\,,\ 0 < {}^{\exists}\theta < 1$$

ここで, $R_n(x) \leftleftharpoons \dfrac{x^n}{n!}\cdot e^{\theta x}$ とおくと,

$$\lim_{n\to+\infty}|R_n(x)| = \lim_{n\to+\infty}\Big|\frac{x^n}{n!}\cdot e^{\theta x}\Big| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x^n|}{n!}e^{\theta x}$$

また, ${}^{\exists}K \in \mathbf{N}$, $K + 1 > 2|x|$ とできる.

すると, $\dfrac{|x|}{K+1} < \dfrac{1}{2}$

また, $0 < \theta < 1$ だから, $x > 0$ のとき, $e^{\theta x} < e^x$, $x < 0$ のとき $e^{\theta x} < 1$ よって, ($e^{\theta x}$ は有限の値だから)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}|R_n(x)| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^K}{K!}\cdot\frac{|x|}{K+1}\cdot\frac{|x|}{K+2}\cdots\frac{|x|}{n}\cdot e^{\theta x}\\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^K}{K!}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-K}e^{\theta x}\\ &= 0\end{aligned}$$

したがって,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}R_n = 0$ をみたすので, $x \in \mathbf{R}$ で $e^x$ は Maclaurin 展開が可能である.

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\\ \Big( &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)\end{aligned}$$

但し, $0! = 1$ とする

<u>例題</u> $\quad f(x) = \sin x$

(解)

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}),\ f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),\ f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n\pi}{2})$$

したがって,

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 0 + \frac{x^3}{3!}\cdot(-1) + \frac{x^4}{4!}\cdot 0 + \cdots$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\\ \Big( &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\end{aligned}$$

$(x \in \mathbf{R})$

例題 $f(x) = \cos x$

(解)

$$f \in C^{\infty}(\mathbf{R}),\ f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}),\ f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n\pi}{2})$$

したがって,

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} \cdot 1 + \cdots \\ \Longrightarrow \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ (&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}) \end{aligned}$$

$(x \in \mathbf{R})$

但し, $0! = 1$ とする

**Eulerの公式**

Maclaurin 展開により, $x \in \mathbf{R}$ のとき

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

となるが (等式), これを拡張して,$z \in \mathbf{C}$ のとき, 定義式

$$e^z \overset{\leftarrow}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots (= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})$$

とおく. $z = i\theta$, ここに,$i$ は虚数単位 $(i^2 = -1)$, $\theta \in \mathbf{R}$, すなわち, 純虚数のとき,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots (= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}) \\ &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots (= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!}) \\ &= \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\big) + i\big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\big) \\ &\quad (= [\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}] + i[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}]) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

ここで，$\theta = \pi$ のとき，

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

例題
$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \\ \sin(2\theta) &= 2\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

(解)

$$e^{i(2\theta)} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

一方，

$$\begin{aligned} e^{i(2\theta)} &= e^{(i\theta)\cdot 2} = (e^{i\theta})^2 \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (\cos\theta)^2 + 2(\cos\theta)\cdot(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^2 \\ &= (\cos\theta)^2 + i(2\cos\theta\sin\theta) - (\sin\theta)^2 \\ &= \{(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\} + i(2\cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

したがって，(2 倍角の公式)

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \\ \sin(2\theta) &= 2\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

例題
$$f(x) = \log(1+x) \quad (-1 < x \leq 1)$$

(解)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\log(1+x) = 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot(-1)\cdot 1! + \frac{x^3}{3!}\cdot(-1)^2\cdot 2! + \frac{x^4}{4!}\cdot(-1)^3\cdot 3! + \cdots$$

$$\Longrightarrow \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\left( = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)$$

問：**Euler の公式を利用して，次の関係式を示せ．**

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \sin(x+y) &= \cos x\sin y + \sin x\cos y \end{aligned}$$

**(解)**

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

一方,

$$\begin{aligned}
e^{i(x+y)} &= e^{ix+iy} \;= e^{ix}\cdot e^{iy} \\
&= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\
&= \cos x\cos y + \cos x(i\sin y) + (i\sin x)\cos y + (i\sin x)(i\sin y) \\
&= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y)
\end{aligned}$$

したがって, (加法定理)

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\
\sin(x+y) &= \cos x\sin y + \sin x\cos y
\end{aligned}$$

問 : **次の関数を級数展開** (Maclaurin **展開**) **せよ**.

(1) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \le x < 1)$$

(2) $$f(x) = \log(1-x) \quad (-1 \le x < 1)$$

**(解)**

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x)=\tfrac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\
\Longrightarrow f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{9}{2}} \\
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{(2n+1)}{2}} \\
f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2^n}\{1\cdot3\cdots(2n-1)\} \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\frac{x}{1!}\frac{2!}{2^2\cdot1!}+\frac{x^2}{2!}\frac{4!}{2^4\cdot2!}+\frac{x^3}{3!}\frac{6!}{2^6\cdot3!}+\frac{x^4}{4!}\frac{8!}{2^8\cdot4!}+\cdots \\
&= 1+\frac{2!x}{2^2(1!)^2}+\frac{4!x^2}{2^4(2!)^2}+\frac{6!x^3}{2^6(3!)^2}+\frac{8!x^4}{2^8(4!)^2}+\cdots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2k)!x^k}{2^{2k}(k!)^2}\quad (\text{但し}, 0!=1\text{ とする}) \\
\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}+\cdots\quad (4\text{ 次の項まで})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log(1-x) \\
\Longrightarrow f'(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)' = -(1-x)^{-1} \\
f''(x) &= -(-1)(1-x)^{-2} \cdot (-1) = -1!(1-x)^{-2} \\
f'''(x) &= -(-1)(-2)(1-x)^{-3} \cdot (-1)^2 = -2!(1-x)^{-3} \\
f^{(4)}(x) &= -(-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4} \cdot (-1)^3 = -3!(1-x)^{-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= -(n-1)!(1-x)^{-n} \\
f^{(n)}(0) &= -(n-1)! \\
\log(1-x) &= 0 + \frac{x}{1!} \cdot (-1) + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1!) + \frac{x^3}{3!} \cdot (-2!) + \frac{x^4}{4!} \cdot (-3!) + \cdots \\
&= -\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}
\end{aligned}
$$

$$
\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) \quad \text{(4 次の項まで)}
$$

**追加の例題**

$$
\begin{aligned}
f(x)=\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
\Longrightarrow f'(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1 \\
f''(x) &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\
f'''(x) &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1+x)^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(1+x)^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{(2n-1)}{2})(1+x)^{-\frac{(2n+1)}{2}} \\
f^{(n)}(0) &= (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{(2n-1)}{2}) \\
&= (-1)^n\frac{1}{2^n}\{1\cdot 3\cdots(2n-1)\} \\
&= (-1)^n\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} \\
&= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{1!}\frac{2!}{2^2\cdot 1!}+\frac{x^2}{2!}\frac{4!}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^3}{3!}\frac{6!}{2^6\cdot 3!}+\frac{x^4}{4!}\frac{8!}{2^8\cdot 4!}+\cdots \\
&= 1-\frac{2!x}{2^2(1!)^2}+\frac{4!x^2}{2^4(2!)^2}-\frac{6!x^3}{2^6(3!)^2}+\frac{8!x^4}{2^8(4!)^2}+\cdots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!x^k}{2^{2k}(k!)^2} \quad (\text{但し}, 0!=1\text{ とする}) \\
\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}+\cdots \quad (4\text{ 次の項まで})
\end{aligned}
$$

<u>関数の増減</u>

$$f(x):(a,b)\text{ で増加} \Longleftrightarrow {}^{\forall}x_1,\ {}^{\forall}x_2\in(a,b), x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2)$$

$$f(x):(a,b)\text{ で減少} \Longleftrightarrow {}^{\forall}x_1,\ {}^{\forall}x_2\in(a,b), x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2)$$

<u>定理 7</u> $f\in C^1,\ {}^{\forall}x\in(a,b), f'(x)=0 \Longrightarrow f(x):\text{一定}$

(証明)

$$^\forall x_1, {}^\forall x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Longrightarrow \underline{\text{平均値の定理}}\text{より}\ {}^\exists c \in (x_1, x_2), f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$^\forall x \in (a,b), f'(x) = 0\ \text{であり}, c \in (x_1, x_2)\ \text{であるから}\ c \in (a,b), \text{したがって}, f'(c) = 0$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$^\forall x_1, {}^\forall x_2 \in (a,b), f(x_1) = f(x_2)\ \text{すなわち}\ f: \text{一定}$$

(証明終)

<u>定理 8</u> $f \in C^1, \begin{cases} ^\forall x \in (a,b), f'(x) > 0 \Longrightarrow f:(a,b)\ \text{で増加} \\ ^\forall x \in (a,b), f'(x) < 0 \Longrightarrow f:(a,b)\ \text{で減少} \end{cases}$

(証明)

$$^\forall x_1, {}^\forall x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Longrightarrow \underline{\text{平均値の定理}}\text{より}\ {}^\exists c \in (x_1, x_2), f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(i) $^\forall x \in (a,b), f'(x) > 0$ のとき, $c \in (x_1, x_2)$ であるから $c \in (a,b)$, したがって, $f'(c) > 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0\ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$^\forall x_1, {}^\forall x_2 \in (a,b), x_1 < x_2\ ,\ f(x_1) < f(x_2)\ \text{すなわち}\ f:(a,b)\ \text{で増加}$$

(ii) $^\forall x \in (a,b), f'(x) < 0$ のとき, (i) と同様に $f'(c) < 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0\ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$$^\forall x_1, {}^\forall x_2 \in (a,b), x_1 < x_2\ ,\ f(x_1) > f(x_2)\ \text{すなわち}\ f:(a,b)\ \text{で減少}$$

(証明終)

<u>例題</u> $f(x) = x \log x\ (x > 0)$ のとき, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(解) $y$ 切片 : なし , $x$ 切片 : $f(x) = 0 \leftrightarrow \log x = 0 \leftrightarrow x = 1$

増加, 減少について調べる.

$$f \in C^1, f'(x) = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1\ \text{より}$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$0 < x < e^{-1}, f'(x) < 0 \Longrightarrow f: \text{減少}$$

$$e^{-1} < x, f'(x) > 0 \Longrightarrow f : 増加$$

左右の右側極限，左側極限を調べる.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +0} f(x) &= \lim_{x \to +0} x \log x \\
&= \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\
\text{L'Hospital} \longrightarrow &= \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} \\
&= \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x \to +0} -\frac{x^2}{x} \\
&= \lim_{x \to +0} (-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x \log x \\
&= +\infty \ (\text{極限は存在しない})
\end{aligned}$$

<u>増減表</u>

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $+0 \leftarrow$ | | $e^{-1}$ | | $\rightarrow +\infty$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-0 \nwarrow$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ | $\nearrow$ | $\nearrow +\infty$ |

(終)

<u>関数の凹凸</u> (Concave, Convex)

$$f(x) : (a, b) \text{ で上に凸 (凹)} \Longleftrightarrow {}^\forall x_1, {}^\forall x_2, {}^\forall x_3 \in (a, b)\,,\ x_1 < x_2 < x_3 \to \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$f(x) : (a, b) \text{ で下に凸 (凸)} \Longleftrightarrow {}^\forall x_1, {}^\forall x_2, {}^\forall x_3 \in (a, b)\,,\ x_1 < x_2 < x_3 \to \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

<u>定理 9</u> $f \in C^2, \begin{cases} {}^\forall x \in (a, b), f''(x) < 0 \Longrightarrow f : (a, b) \text{ で上に凸} \\ {}^\forall x \in (a, b), f''(x) > 0 \Longrightarrow f : (a, b) \text{ で下に凸} \end{cases}$

(証明)

$${}^\forall x_1, {}^\forall x_2, {}^\forall x_3 \in (a, b)\,,\ x_1 < x_2 < x_3$$

$$\Longrightarrow \underline{\text{平均値の定理}}\text{より}{}^{\exists}c_1 \in (x_1, x_2)\,,\ {}^{\exists}c_2 \in (x_2, x_3)\,,$$
$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,,\ f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(i)
$$^{\forall}x \in (a,b), f''(x) < 0 \Rightarrow f' : (a,b)\ \text{で減少}$$

$$x_1 < x_2 < x_3\,,\ c_1 \in (x_1, x_2)\,,\ c_2 \in (x_2, x_3)\ \text{よって}\ c_1 < c_2\ \text{だから}, f'(c_1) > f'(c_2)$$
$$\text{すなわち}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\ \text{したがって}, f : (a,b)\ \text{で上に凸}$$

(ii)
$$^{\forall}x \in (a,b), f''(x) > 0 \Rightarrow f' : (a,b)\ \text{で増加}$$

$$c_1 < c_2\ \text{だから}, f'(c_1) < f'(c_2)$$
$$\text{すなわち}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\ \text{したがって}, f : (a,b)\ \text{で下に凸}$$

(証明終)

<u>極値問題</u>

$$f(a):\text{極小値}\cdots x=a\text{の附近で}f(a):\text{最小値}\Longleftrightarrow 0<|h|<<1, f(a+h)\underset{(=)}{>}f(a)$$

$$f(a):\text{極大値}\cdots x=a\text{の附近で}f(a):\text{最大値}\Longleftrightarrow 0<|h|<<1, f(a+h)\underset{(=)}{<}f(a)$$

<u>定理 A</u> : 極値となるための必要条件　　$f\in C^1(a\text{の附近で}),\ f(a):\text{極大値/極小値}\ \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\ f'(a)=0$

(証明) $\Longrightarrow$)　　$f(a)$ : 極小値のとき

$$f(a+h)>f(a)$$

$$\left.\begin{array}{l} h>0\Longrightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}>0\Longrightarrow \displaystyle\lim_{h\to+0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0\\ h<0\Longrightarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}<0\Longrightarrow \displaystyle\lim_{h\to-0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow f'(a)=0$$

$f(a)$ : 極大値のときも同様 ∎

$\not\Longleftarrow$)　　反例を示す

$$f(x)=x^3\text{のとき}, f'(x)=3x^2, f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

しかし, $x=0$ は増加 (の途中の) 点であり, 極値点ではない.

(注意) このような点は変曲点 (その前後で $f''$の符号が変る点) である.

(証明終)

<u>定理 B</u>: 極値となるための十分条件 $f\in C^2(a\text{の附近で}),\ f'(a)=0,\ \begin{cases} f''(a)>0\Longrightarrow f(a):\text{極小値}\\ f''(a)<0\Longrightarrow f(a):\text{極大値}\end{cases}$

(証明)　　$\varphi(h)\overset{\leftarrow}{=}f(a+h)-f(a)$ とおく.

$f\in C^2$, <u>Taylor の定理</u>より, $f(a+h)=f(a)+\dfrac{h}{1!}f'(a)+\dfrac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)\ (0<{}^{\exists}\theta<1)$, また, $f'(a)=0$

したがって

$$\varphi(h)=\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)$$

ここで, $\sigma\overset{\leftarrow}{=}f''(a+\theta h)-f''(a)$ とおくと

$$\varphi(h)=\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^2}{2!}\sigma$$

ここで, $h\longrightarrow 0$ とすると, $f''$は連続であり, また, $f''(a)$ は定数であるから, $|\sigma|<|f''(a)|$ とすることができる

したがって, $h$ を十分小さくとると,

(i) $f''(a)>0 \Longrightarrow \varphi(h)>0 \Longrightarrow f(a+h)>f(a) \Longrightarrow f(a)$ : 極小値

(ii) $f''(a)<0 \Longrightarrow \varphi(h)<0 \Longrightarrow f(a+h)<f(a) \Longrightarrow f(a)$ : 極大値

$$n=2m\,,\ m\in\mathbf{N}^{+}$$

<u>定理 C</u>: $f\in C^n(a\text{ の附近で})\,,\ f^{(k)}(a)=0\ (1\le k\le n-1)\ \begin{cases} f^{(n)}(a)>0 \Longrightarrow f(a):\text{極小値} \\ f^{(n)}(a)<0 \Longrightarrow f(a):\text{極大値} \end{cases}$

(証明) $$\varphi(h)\overset{\leftarrow}{=}f(a+h)-f(a)\text{ とおく.}$$

$f\in C^n$ , <u>Taylor の定理</u>より,

$$\varphi(h)=\Big[f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)\Big]-f(a)\ (0<\ {}^{\exists}\theta<1)$$

また, $f^{(k)}(a)=0\ (1\le k\le n-1)$ より

$$\varphi(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

ここで, $\sigma\overset{\leftarrow}{=}f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)$ とおくと

$$\varphi(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^n}{n!}\sigma$$

ここで, $h\longrightarrow 0$ とすると, $f^{(n)}$は連続であり, また, $f^{(n)}(a)$ は定数であるから,

$|\sigma|<|f^{(n)}(a)|$ とすることができる

したがって, $h$ を十分小さくとると,

($n$ は偶数であるから $h$ の正負によらず $h^n>0$ であることに注意すると)

(i) $f^{(n)}(a)>0 \implies \varphi(h)>0 \implies f(a+h)>f(a) \implies f(a)$ : 極小値

(ii) $f^{(n)}(a)<0 \implies \varphi(h)<0 \implies f(a+h)<f(a) \implies f(a)$ : 極大値

$$n=2m+1\,,\ m\in\mathbf{N}$$

<u>系</u>: $f\in C^n(a\text{ の附近で})\,,\ f^{(k)}(a)=0\ (1\le k\le n-1)\ \left.\begin{cases} f^{(n)}(a)>0 \Longrightarrow f(a):\text{増加点} \\ f^{(n)}(a)<0 \Longrightarrow f(a):\text{減少点} \end{cases}\right\}$ 極値点ではない

(証明) $$\varphi(h)\overset{\leftarrow}{=}f(a+h)-f(a)\text{ とおく.}$$

$$\varphi(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)\ (0<\ {}^{\exists}\theta<1)$$

ここで, $\sigma\overset{\leftarrow}{=}f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)$ とおくと

$$\varphi(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^n}{n!}\sigma$$

ここで, $h\longrightarrow 0$ とすると, $f^{(n)}$は連続であり, また, $f^{(n)}(a)$ は定数であるから,

$|\sigma|<|f^{(n)}(a)|$ とすることができる

したがって, $h$ を十分小さくとると,

($n$ は奇数であるから $h > 0 \longrightarrow h^n > 0$, $h < 0 \longrightarrow h^n < 0$ であることに注意すると)

(i) $f^{(n)}(a) > 0$ $\left\{\begin{matrix} h > 0 \Longrightarrow \varphi(h) > 0 \Longrightarrow f(a+h) > f(a) \\ h < 0 \Longrightarrow \varphi(h) < 0 \Longrightarrow f(a+h) < f(a) \end{matrix}\right\}$ $f(a)$ : 増加点

(ii) $f^{(n)}(a) < 0$ $\left\{\begin{matrix} h > 0 \Longrightarrow \varphi(h) < 0 \Longrightarrow f(a+h) < f(a) \\ h < 0 \Longrightarrow \varphi(h) > 0 \Longrightarrow f(a+h) > f(a) \end{matrix}\right\}$ $f(a)$ : 減少点

(注意)$n \geq 3$ の場合これらの点は変曲点となる.

<u>極値問題アルゴリズム</u>

(1) 極値の候補をみつける $f'(x) = 0 : x = a_1, a_2, \cdots, a_p$ (<u>定理 A</u>)

(2) 判別する $\left\{\begin{matrix} \left.\begin{matrix} f''(a_i) > 0 \Longrightarrow f(a_i) : \text{極小値} \\ f''(a_i) < 0 \Longrightarrow f(a_i) : \text{極大値} \end{matrix}\right\} \quad (\text{定理 B}) \\ f''(a_i) = 0 \Longrightarrow f(a_i) : \text{極値点/変曲点} \quad (\text{定理 C および その系}) \end{matrix}\right.$

<u>例題</u> $f(x) = xe^{-x}$ の極値を求めよ.また, グラフの概形を描け.

(解)

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

$$f''(1) = -e^{-1} < 0 \longrightarrow f(1) = e^{-1} : \text{極大値}$$

$$y \text{ 切片} : f(0) = 0,\ x \text{ 切片 } f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2,\ f'''(x) = (3-x)e^{-x},\ f'''(2) = e^{-2} \neq 0 \longrightarrow f(2) = 2e^{-2} : \text{変曲点}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty (\text{極限なし})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\substack{\text{L'Hospital} \\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = +0 \blacksquare$$

<u>例題</u> $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - 1$ は, $x = 0$ で極値をとるか.

<u>解</u>

$f'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$ $f'(0) = -0 + 0 - 0 = 0$ よって, $f(0)$ は極値の候補である.

$f''(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2}$ $f''(0) = -1 + 1 - 0 = 0$

$f'''(x) = \sin x - x$ $f'''(0) = 0 - 0 = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x - 1$ $f^{(4)} = 1 - 1 = 0$

$f^{(5)}(x) = -\sin x$ $f^{(5)} = 0$

$f^{(6)}(x) = -\cos x$ $f^{(6)} = -1 < 0$

$$6\text{ は偶数. したがって}, f(0)=1+0-0-1=0\text{ : 極大値}\ \blacksquare$$

**演習問題**

**次の関数の極値を求めよ.**

(1) $$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(2) $$f(x)=\frac{e^x}{x}$$

(3) $$f(x)=x^4-2$$

(4) $$f(x)=60x^7-70x^6-84x^5+105x^4+100$$

**演習問題解答**

次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

解 : $f(0)=1$ : 極大値

解説

$$f'(x)=(-x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=(x^2-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f''(0)=-1<0\Rightarrow f(0)\text{ : 極大値}$$

$$f(0)=1$$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

解 : $f(1)=e$ : 極小値

解説

$$f(x) = x^{-1}\, e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2}\, e^x + x^{-1}\, e^x \\ &= (-x^{-2} + x^{-1})\, e^x \\ \Big( &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \Big) \\ f''(x) &= (2x^{-3} - x^{-2})e^x + (-x^{-2} + x^{-1})e^x \\ &= (2x^{-3} - 2x^{-2} + x^{-1})e^x \end{aligned}$$

$$\left( \begin{aligned} &= \tfrac{(e^x + xe^x - e^x)x^2 - (xe^x - e^x)\,2x}{x^4} \\ &= \tfrac{x^3 e^x - 2x^2 e^x + 2xe^x}{x^4} \\ &= \tfrac{x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x}{x^3} \end{aligned} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(1) = (2 - 2 + 1) \cdot e^1 = e > 0 \Rightarrow f(1) : \text{極小値}$$

$$f(1) = e$$

(3) $\quad f(x) = x^4 - 2$

解 : $f(0) = -2$ : 極小値

解説

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$f^{(4)}(0) = 24 > 0 \Longrightarrow f(0) = 0 - 2 = -2 : \text{極小値}$$

$$\text{解} : f(0) = -2 : \text{極小値}$$

(4) $\quad f(x) = 60x^7 - 70x^6 - 84x^5 + 105x^4 + 100$

解 : $f(-1) = 159$ : 極大値, $f(0) = 100$ : 極小値

解説

$$f'(x) = 420x^6 - 420x^5 - 420x^4 + 420x^3$$

$$\frac{f'(x)}{420} = x^6 - x^5 - x^4 + x^3 = (x-1)^2(x+1)x^3$$

$$\frac{f''(x)}{420} = 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 1, -1$$

$$f''(0) = 420(0 - 0 - 0 + 0) = 0$$

$$f''(1) = 420(6 - 5 - 4 + 3) = 0$$

$$f''(-1) = 420(-6 - 5 + 4 + 3) = 420 \times (-4) < 0$$

$$\Longrightarrow f(-1) = -60 - 70 + 84 + 105 + 100 = 159 : \text{極大値}$$

$$\frac{f'''(x)}{420} = 30x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 6x$$

$$f'''(0) = 420(0 - 0 - 0 + 0) = 0$$

$$f'''(1) = 420(30 - 20 - 12 + 6) = 420 \times 4 > 0$$

$$\Longrightarrow f(1) = 60 - 70 - 84 + 105 + 100 = 111 : \text{増加点}$$

$$\frac{f^{(4)}(x)}{420} = 120x^3 - 60x^2 - 24x + 6$$

$$f^{(4)}(0) = 420(0-0-0+6) = 420 \times 6 > 0 \Longrightarrow f(0) = 0-0-0+0+100 = 100 : \text{極小値}$$

$$\text{解}\quad f(-1) = 159 : \text{極大値}\ ,\ f(0) = 100 : \text{極小値}$$

**経済学への応用 -短期利潤の最適化問題-**

1 変数関数の極値問題の経済学への応用として，短期利潤の最適化問題について述べる．これは,「1 変数関数の等式制約条件付き最適化問題」とも呼ばれる．

まず，経済学への応用に際し，よく使われる用語，記号と仮定を述べる．基本的な仮定は「生産者も消費者も合理的に行動する」ということである．いま，一つの消費財を生産する生産者（企業など）について考える場合に，生産財の産出量を $y$ , 労働投入量を $\ell \quad (\geq 0)$ , 労働 1 単位当たりのコスト (賃金) を $w(\geq 0,$定数$)$，資本投入量を $k(\geq 0)$，資本 1 単位当たりのコスト (レンタル料) を $r(\geq 0,$定数$)$ とし，生産した財はすべて価格 $p(>0)$ で売れると仮定する．利潤は，総収入-総費用で求める．

<u>短期利潤の最適化問題 (極値問題の応用)</u>

短期利潤の最適化を考える場合は，資本投入量を $k$ を定数と考えて $\overline{k} = k$ とし，最適解を求める．また，生産関数 $y = f(\ell)$ は $\ell$ に関し単調増加（すなわち，労働投入量が増加すれば生産財の産出量が増加すること）を仮定する．利潤関数 $\Pi(\ell)$ は $\Pi(\ell) = p \cdot y - w\ell - r\overline{k} = pf(\ell) - w\ell - r\overline{k}$ ($r\overline{k}$は定数) となる．

このとき，$\Pi'(\ell) = pf'(\ell) - w,\ ,\Pi''(\ell) = pf''(\ell)$ であるから，$\ell = \ell^*$ のとき $\Pi'(\ell^*) = 0, \Pi''(\ell^*) < 0$ であれば, $\Pi(\ell^*)$ が極大値である．

(注) $y^* = f(\ell^*)$ とおくと, $\Pi(\ell^*) = pf(\ell^*) - w\ell^* - r\overline{k} = py^* - w\ell^* - r\overline{k}$ である．このとき，$\ell^*$は定数なので, $y^*$ は $p$ だけの関数として表すことができるが，$y^* = \frac{\Pi(\ell^*) + w\ell^* + r\overline{k}}{p} = S(p)$ と表すときの $S(p)$ を供給関数という．

**例**

$f(\ell) = \ell^{\frac{2}{3}}, p = 4, w = 2, C = r\overline{k} = 10$ のとき, 利潤関数$\Pi(\ell)$ を求めよ．また, 最適労働投入量 $\ell^*$とそのときの生産量 $y^*$($y$ の最大値) を求めよ．

利潤関数は $\Pi(\ell) = p \cdot f(\ell) - w\ell - C = 4\ell^{\frac{2}{3}} - 2\ell - 10$ である．よって,

$\Pi'(\ell) = 4 \cdot \frac{2}{3}\ell^{-\frac{1}{3}} - 2 = \frac{8}{3}\ell^{-\frac{1}{3}} - 2,\ \ \Pi''(\ell) = -\frac{8}{9}\ell^{-\frac{4}{3}} < 0.$

したがって，$\Pi$は $\mathbf{R}$ 全体で凹関数 （上に凸） であるから，$\Pi'(\ell) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3\sqrt[3]{\ell}} = 2$　よって，$\ell^* = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27}$で $\Pi$は極大値を持つ．このとき, $y^* = f((\frac{4}{3})^3) = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$である．

(注) $f'(\ell) = \frac{2}{3}\ell^{-\frac{1}{3}} > 0,\ \ f''(\ell) = -\frac{2}{9}\ell^{-\frac{4}{3}} < 0$ であるから, $f$ は単調増加な凹関数である．

**問**

$f(\ell)=\ell^{\frac{3}{5}}, p=1, w=1, C=r\overline{k}=10$ のとき, 利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ.
また, 最適労働投入量 $\ell^*$とそのときの生産量 $y^*$($y$ の最大値) を求めよ.

**解**

$f(\ell)=\ell^{\frac{3}{5}}, p=1, w=1, C=r\overline{k}=10$ のとき, 利潤関数$\pi(\ell)$ を求めよ.また, 最適労働投入量 $\ell^*$とそのときの生産量 $y^*$($y$ の最大値) を求めよ.
利潤関数は$\Pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=\ell^{\frac{3}{5}}-\ell-10$ である．よって,$\Pi'(\ell)=\frac{3}{5}\ell^{-\frac{2}{5}}-1$，$\Pi''(\ell)=-\frac{6}{25}\ell^{-\frac{7}{5}}<0$.
$\Pi'(\ell)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{5\sqrt[5]{\ell^2}}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}=\sqrt[5]{\ell^2} \Leftrightarrow (\frac{3}{5})^5=\ell^2 \Longrightarrow \ell^*=(\frac{3}{5})^{\frac{5}{2}} \Longrightarrow y^*=f((\frac{3}{5})^{\frac{5}{2}})=\{(\frac{3}{5})^{\frac{5}{2}}\}^{\frac{3}{5}}=(\frac{3}{5})^{\frac{3}{2}}$ .
(注)　$f'(\ell)=\frac{3}{5}\ell^{-\frac{2}{5}}>0$，$f''(\ell)=-\frac{6}{25}\ell^{-\frac{7}{5}}<0$ すなわち, $f$ は単調増加な凹（上に凸の）関数である.

**例**

$f(\ell)=\ell^{\frac{2}{3}}, w=1, C=r\overline{k}=10$ のとき, 供給関数 $y^*(p)$ を求めよ ($y^*$を $p$ の関数として表わせ).

利潤関数は $\Pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=p\cdot\ell^{\frac{2}{3}}-\ell-10$ である.
よって，$\Pi'(\ell)=\frac{2}{3}p\ell^{-\frac{1}{3}}-1$，　$\Pi''(\ell)=-\frac{2}{9}p\ell^{-\frac{4}{3}}<0$ .
したがって，$\Pi$は $R$ 全体で凹関数（上に凸）であるから．$\Pi'(\ell)=0 \Leftrightarrow \frac{2p}{3\sqrt[3]{\ell}}=1 \Longrightarrow \ell=(\frac{2}{3}p)^3$.
よって，$\ell^*=(\frac{2}{3}p)^3$で$\Pi$ は極大値を持つ.
また，$\Pi$ が極大値をとるときの最適生産量 $y^*$ は，$y^*(p)=f((\frac{2}{3}p)^3)=\{(\frac{2}{3}p)^3\}^{\frac{2}{3}}=(\frac{2}{3}p)^2$である.

**問**

$f(\ell)=\ell^{\frac{1}{3}}, w=3, C=r\overline{k}=10$ のとき, 利潤関数$\Pi(\ell)$ を求めよ.
また, $\Pi$ が極大値を取るときの最適生産量 $y^*$を $p$ の関数として表す供給関数 $y^*(p)$ を求めよ.

**解**

利潤関数は $\Pi(\ell)=p\cdot f(\ell)-w\ell-C=p\cdot\ell^{\frac{1}{3}}-3\ell-10$ である．よって，$\Pi'(\ell)=\frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}-3$，　$\Pi''(\ell)=-\frac{2}{9}p\ell^{-\frac{5}{3}}<0$.
したがって，$\Pi$は $\mathbf{R}$ 全体で凹（上に凸）な関数であるから, $\Pi'(\ell)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}p\ell^{-\frac{2}{3}}=3 \Leftrightarrow \frac{p}{\sqrt[3]{\ell^2}}=9 \Leftrightarrow \frac{p}{9}=\sqrt[3]{\ell^2} \Longrightarrow \ell^2=(\frac{p}{9})^3 \Leftrightarrow \ell^*=\sqrt{(\frac{p}{9})^3}$で$\Pi$は極大値をもつ.
$\Pi$が極大値をもつときの最適生産量 $y^*$は $y^*(p)=f(\sqrt{(\frac{p}{9})^3})=\sqrt{\frac{p}{9}}=\frac{\sqrt{p}}{3}$である.