2016 年度春学期 経済数学 I（解析学基礎）（月 2）

【第 12 回: 極値問題 (2 変数) 】(担当: 瀧澤 武信) 提出期限: 7 月 11 日 (月) 17:00 (出題日 : 7 月 4 日 (月))

問題

関数の極値 (Extremum) を求めよ. (2*2 点)

1. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^3 - 12xy - 3y^2 + 18y - 100$

2. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{1 - x^2} + \log(1 - y^2) + xy \quad (|x| < 1, |y| < 1)$

解答例

1. $f\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 35$: 極大値

2. $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$: 極大値

$\boxed{\text{解説}}$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=4x^3-12xy-3y^2+18y-100\text{ のとき}$$

$$f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=12x^2-12y$$

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-6y-12x+18$$

$$f_{xx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=24x\quad f_{xy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-12$$

$$f_{yx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-12\quad f_{yy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-6$$

1.

$$\begin{gathered}
\text{極値の候補を求める：}f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\\
\Leftrightarrow y=x^2\\
\Rightarrow\\
-6x^2-12x+18=0\\
-6(x^2+2x-3)=0\\
-6(x-1)(x+3)=0\\
\Rightarrow\\
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}\\
\text{判別する.}\\
\Delta_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}24&-12\\-12&-6\end{vmatrix}=-144-144<0\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{では極値をとらない}\\
\Delta_2\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-72&-12\\-12&-6\end{vmatrix}=432-144>0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}\text{で極値をとる}\\
f_{xx}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}=-72<0\Rightarrow f\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}\text{は極大値}\\
f\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}=-108-243+324+162-100=35:\text{極大値}
\end{gathered}$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sqrt{1-x^2}+\log(1-y^2)+xy\ (|x|<1,|y|<1)\text{ のとき},$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\log(1-y^2)+xy$$

$$f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)+y=(-x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+y$$

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\tfrac{-2y}{1-y^2}+x=(-2y)(1-y^2)^{-1}+x$$

$$f_{xx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+(-x)(-\tfrac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{xy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f_{yx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1$$

$$f_{yy}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(-2)(1-y^2)^{-1}+(-2y)\cdot(-1)(1-y^2)^{-2}\cdot(-2y)$$

$$=(-2)(1-y^2)^{-1}-4y^2(1-y^2)^{-2}$$

$$\text{極値の候補を求める}:f_x\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

2.

$$\Leftrightarrow y=x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ x=2y(1-y^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{(A) } y^2=x^2(1-x^2)^{-1}\Rightarrow x=2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2(1-x^2)^{-1})^{-1}$$

$$\text{ここで},(1-x^2(1-x^2)^{-1})^{-1}=(1-\tfrac{x^2}{1-x^2})^{-1}=(\tfrac{(1-x^2)-x^2}{1-x^2})^{-1}=(\tfrac{1-2x^2}{1-x^2})^{-1}=\tfrac{1-x^2}{1-2x^2}$$

$$\text{よって},x=2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2(1-x^2)^{-1})^{-1}$$

$$=\tfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\tfrac{1-x^2}{1-2x^2}$$

$$=\tfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

$$\Rightarrow(1-2x^2)x=2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow(1-2x^2)^2x^2=(2x)^2(1-x^2)$$

$$\Rightarrow x^2[(1-2x^2)^2-4(1-x^2)]=0$$

$$\Rightarrow x^2[1-4x^2+4x^4-4+4x^2]=0\Rightarrow x^2[-3+4x^4]=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\text{ or }x^4=\tfrac{3}{4}$$

$$\text{ここで},x^4=\tfrac{3}{4}\text{のとき},x^2=+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{であるから},\text{(A) に代入して }y^2=\tfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^{-1}$$

$$=\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\tfrac{2-\sqrt{3}}{2})^{-1}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\tfrac{2}{2-\sqrt{3}})=\tfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$1<\sqrt{3}<2\text{ であり},\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2=2(\sqrt{3}-1)>0\text{ であるから},\tfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}>1$$

$$\text{すなわち},y^2>1\text{ よって},|y|>1\text{ したがって},x^4=\tfrac{3}{4}\text{の場合は},\text{極値の候補ではない}.$$

$$x=0\text{ のとき},y=0\text{ であり},f_x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=f_y\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\text{ を満たすので},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{は極値の候補である}.$$

判別する.

$$\Delta_2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}f_{xx}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & f_{xy}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ f_{yx}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & f_{yy}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2-1>0\text{ であるから,}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{は極値である.}$$

$$\Delta_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=f_{xx}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=-1<0\text{ であるから,}f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{は極大値である.}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=1+0+0=1$$

$$\text{解： }f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=1:\text{極大値}$$