線形計画法

一般的な制約つき最適化問題

$\boldsymbol{x}$ を R^nの線形空間とし， A はその部分空間とする。
また， $f(\boldsymbol{x})$， $g_k(\boldsymbol{x}), k = 1,2,\cdots,m$ は $R^n \to R$ の関数とする。
ここで，

$\boldsymbol{x} \in A$ ：設計変数

$g_k(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad k = 1,2,\cdots,m$ ：制約条件

の下で，

$f(\boldsymbol{x})$ ：目的関数

を最小化（あるいは最大化）する問題。

線形計画問題

$f(\boldsymbol{x})$，　$g_k(\boldsymbol{x})$が共に$\boldsymbol{x}$の線形関数の場合，線形計画問題(LP)と呼ばれる。

$$\boldsymbol{x} = (x_i), x_i \geq 0$$

：設計変数

$$g_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_k{}^T\boldsymbol{x} \leq a_k, a_i \geq 0, k = 1,2,\cdots,m$$

：制約条件

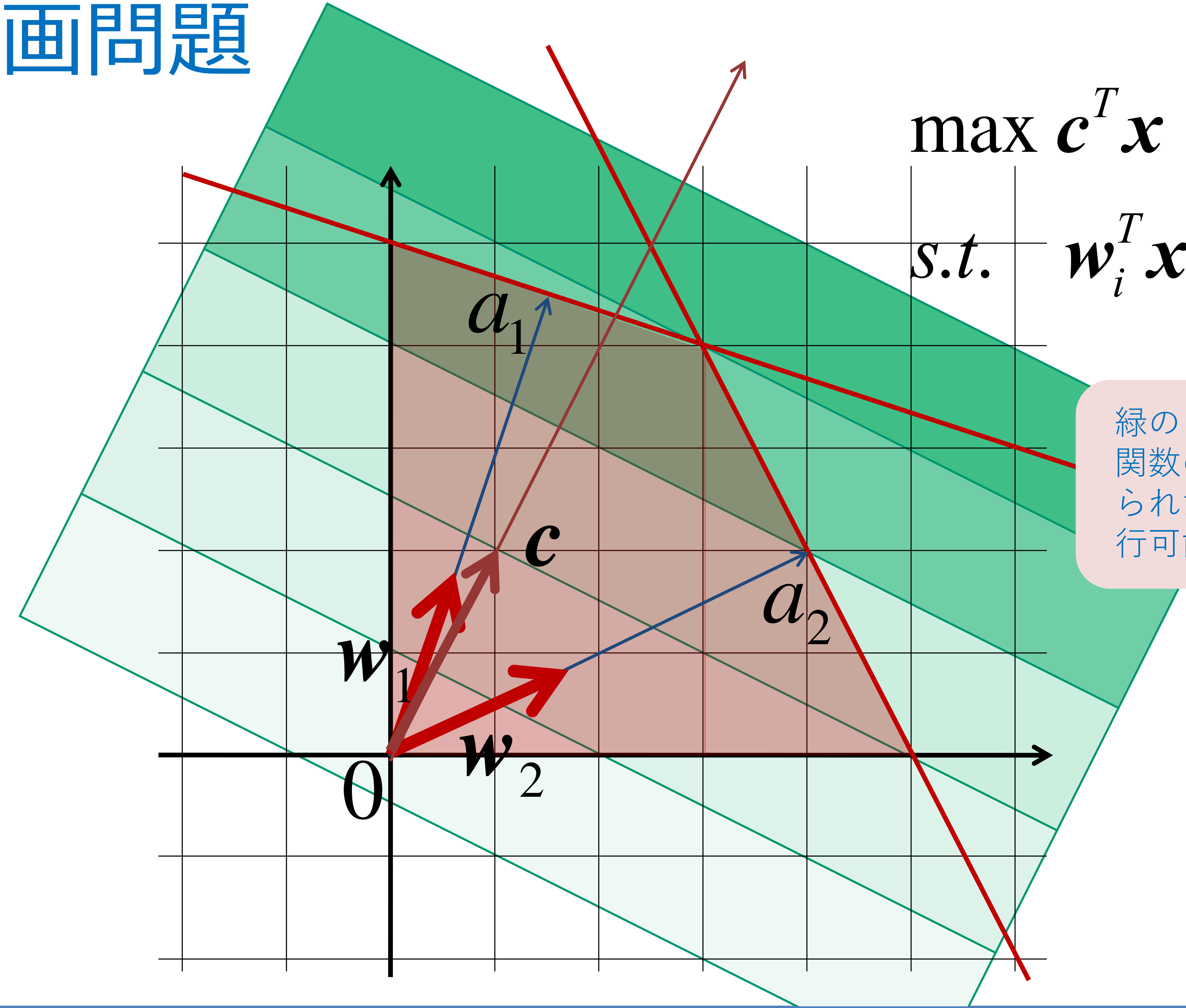
の下で，

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x}$$

：目的関数

を最大化（あるいは最小化）する問題。

線形計画問題



$$\max\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

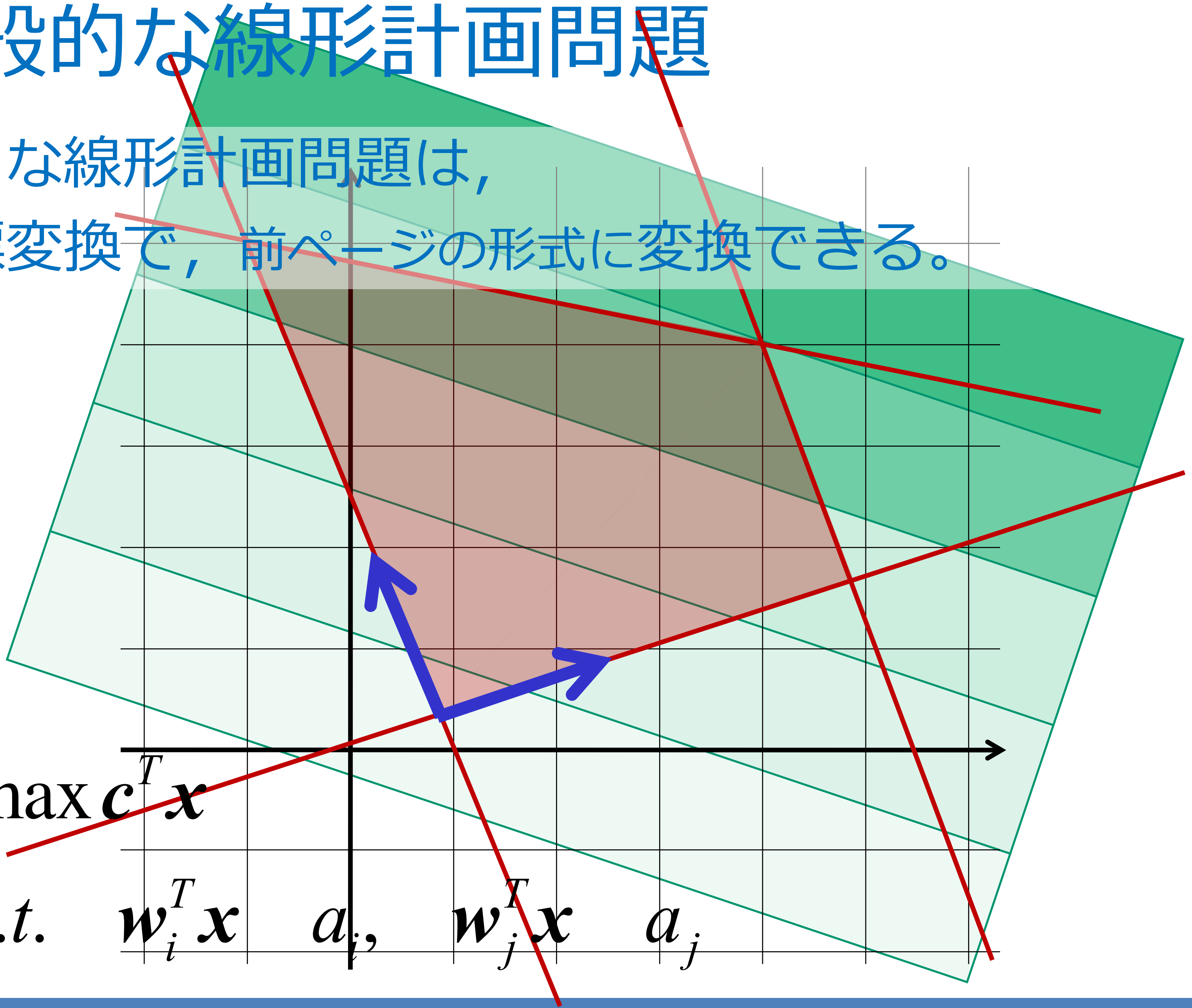
$$s.t.\quad \boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{x} \quad a_i$$

緑のグラデーションが目的
関数の勾配を表し，赤で塗
られた領域が制約条件（実
行可能領域）を表します．

より一般的な線形計画問題

より一般的な線形計画問題は，

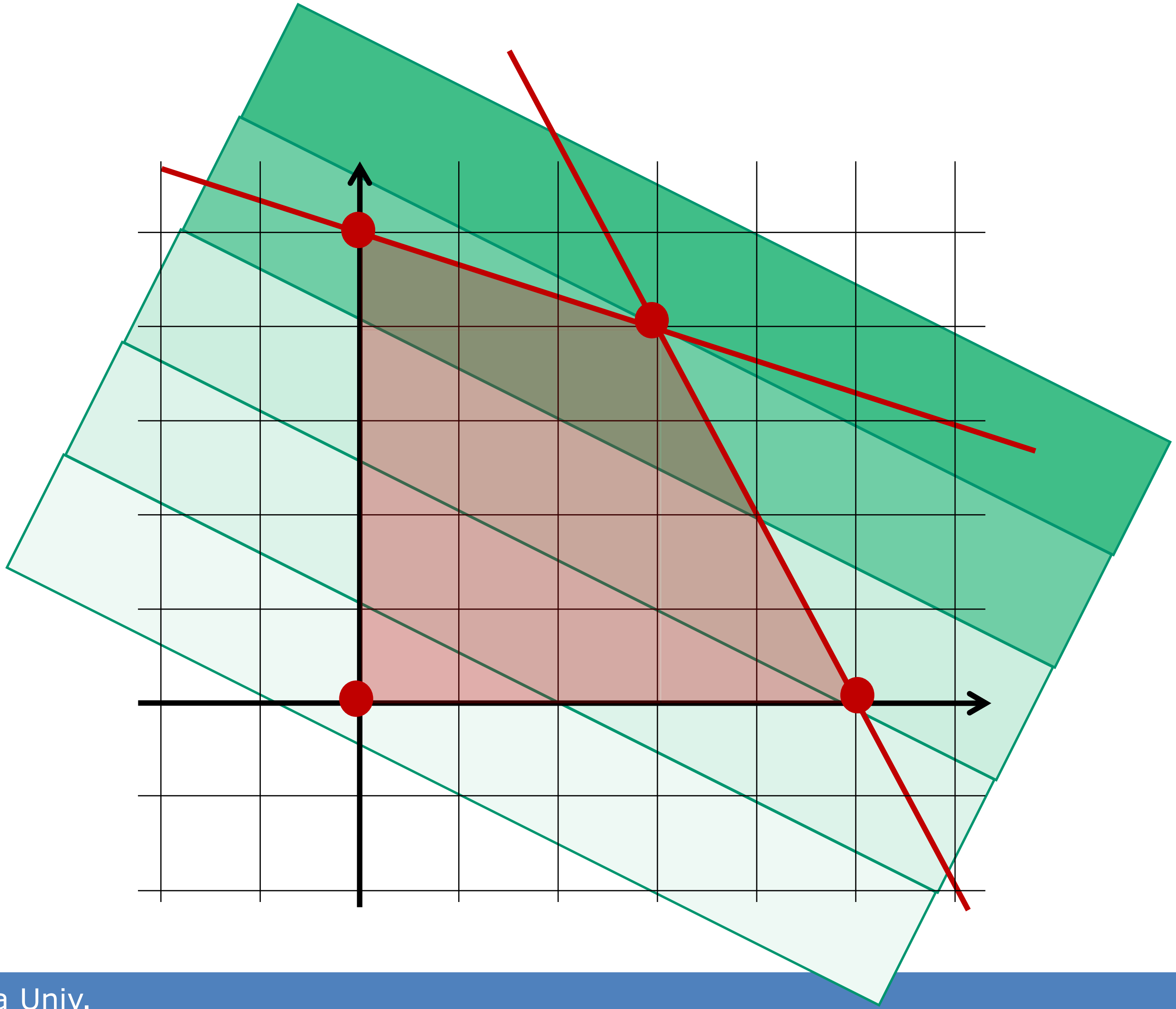
適当な座標変換で，前ページの形式に変換できる。



$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

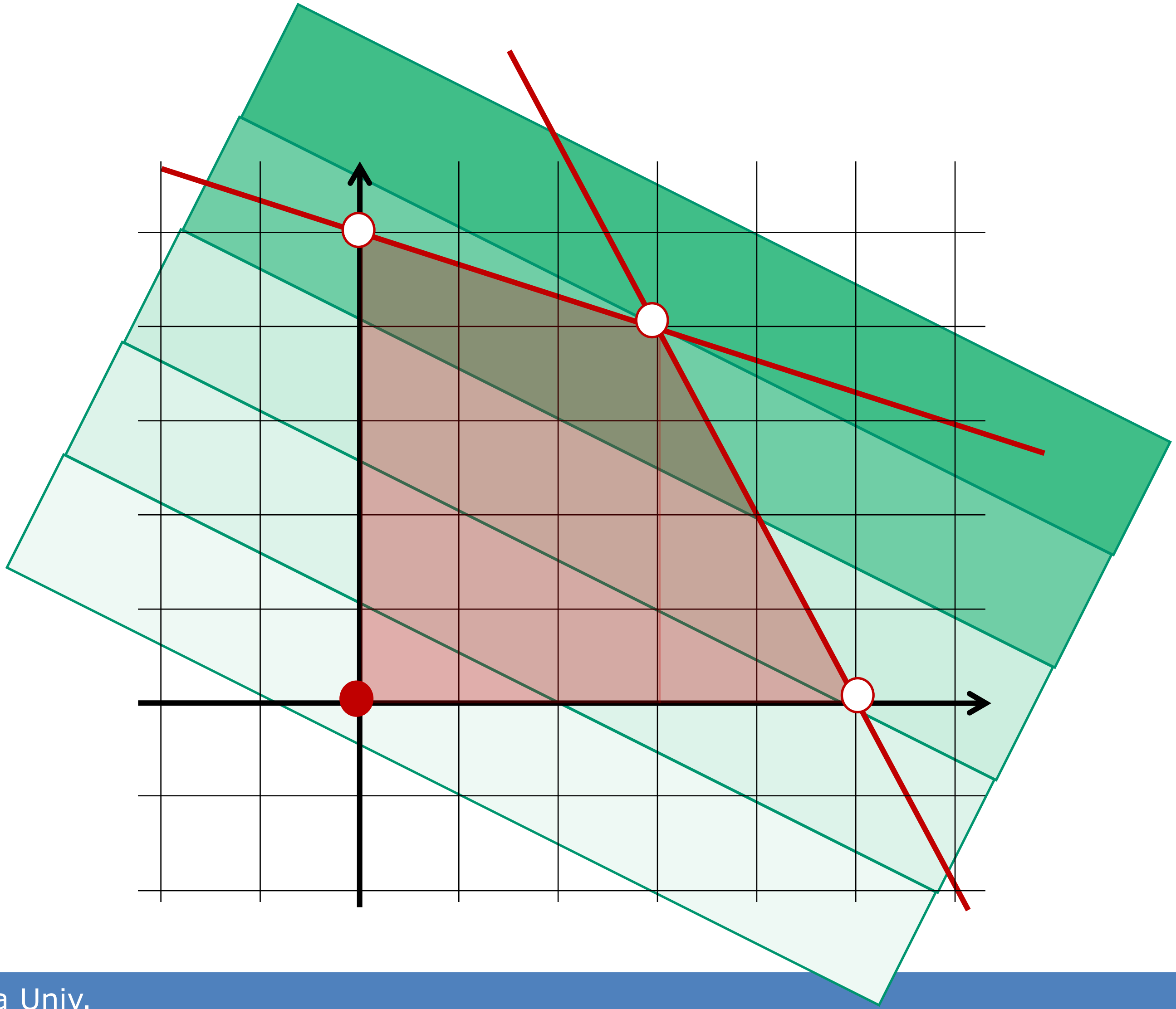
$$s.t. \quad \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x} \quad a_i, \quad \boldsymbol{w}_j^T \boldsymbol{x} \quad a_j$$

線形計画問題では，必ず制約条件が作る多角形の頂点のいずれかにおいて，最適解を持つ。



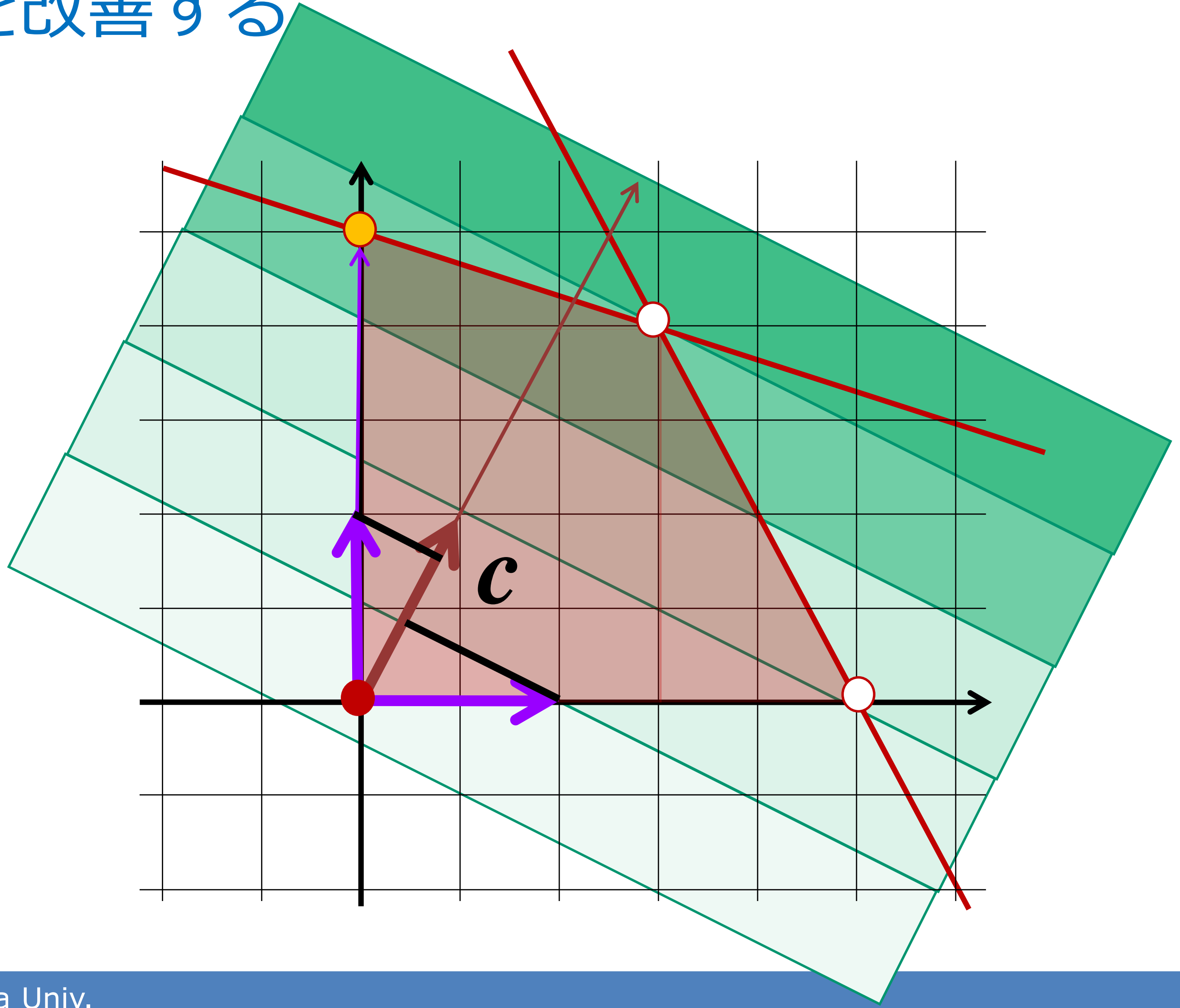
原点は可能解である。

よって原点を初期解（暫定解）として，これを改善することを考える。

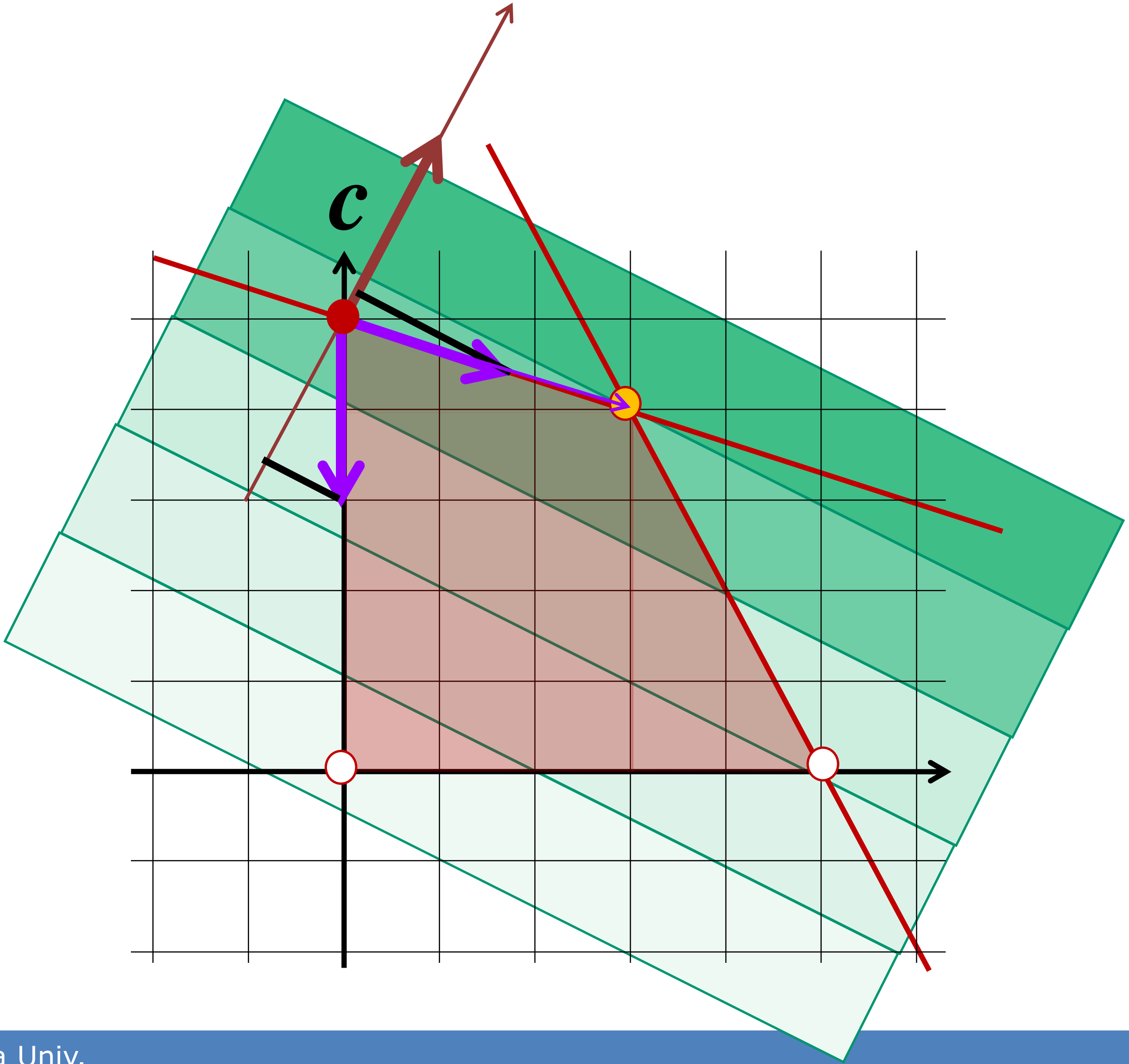


暫定解から伸びる辺の方向に解を改善することを考える。

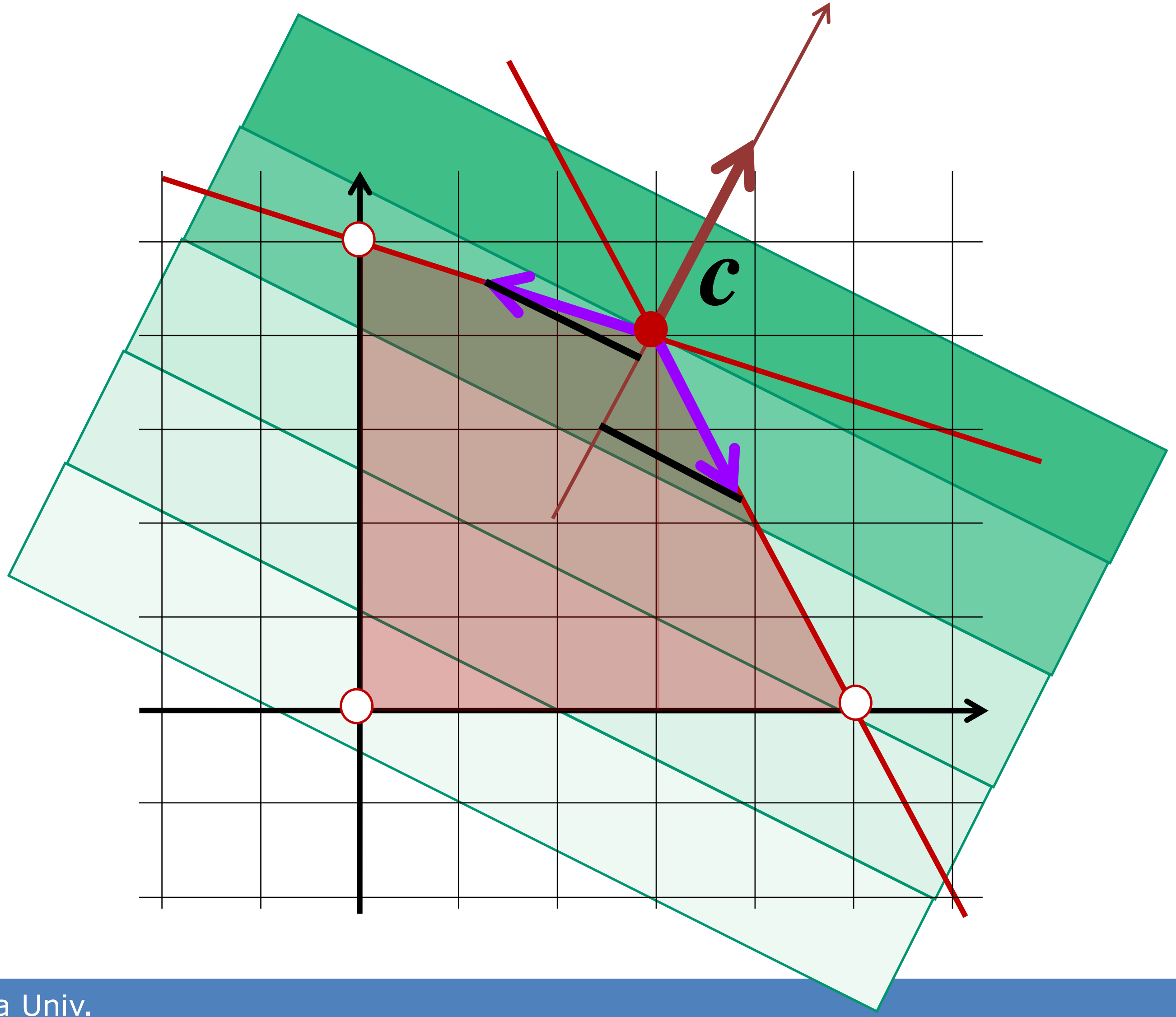
暫定解から複数ある候補に向かうとき，急な正の勾配を持つ方向を選んで解を改善する



処理を繰り返す。



改善する方向が見つからなくなったら，暫定解を最適解として終了する。



スラック変数と正準形

$$x_1 + 3x_2 \le 15$$

$$2x_1 + x_2 \le 10$$

$$x_1 + 2x_2 = z$$

問題：条件 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
のもとで，z を最大化

スラック変数と正準形

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 & x_1 & + 3 & x_2 & + & y_1 & & & & = 15 \\
 2 & x_1 & + & x_2 & & & + & y_2 & & = 10 \\
 - & x_1 & - 2 & x_2 & & & & & + z & = 0
\end{array}
$$

スラック変数の導入，不等式の等式化

問題：条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

のもとで， z を最大化

スラック変数と正準形

$y_1 = 15 - 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2$

$$x_1 + 3x_2 + y_1 = 15$$

$y_2 = 10 - 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = 10$$

$z = 0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

$$-x_1 - 2x_2 + z = 0$$

x_1, x_2：独立変数 ・・・ 非基底変数

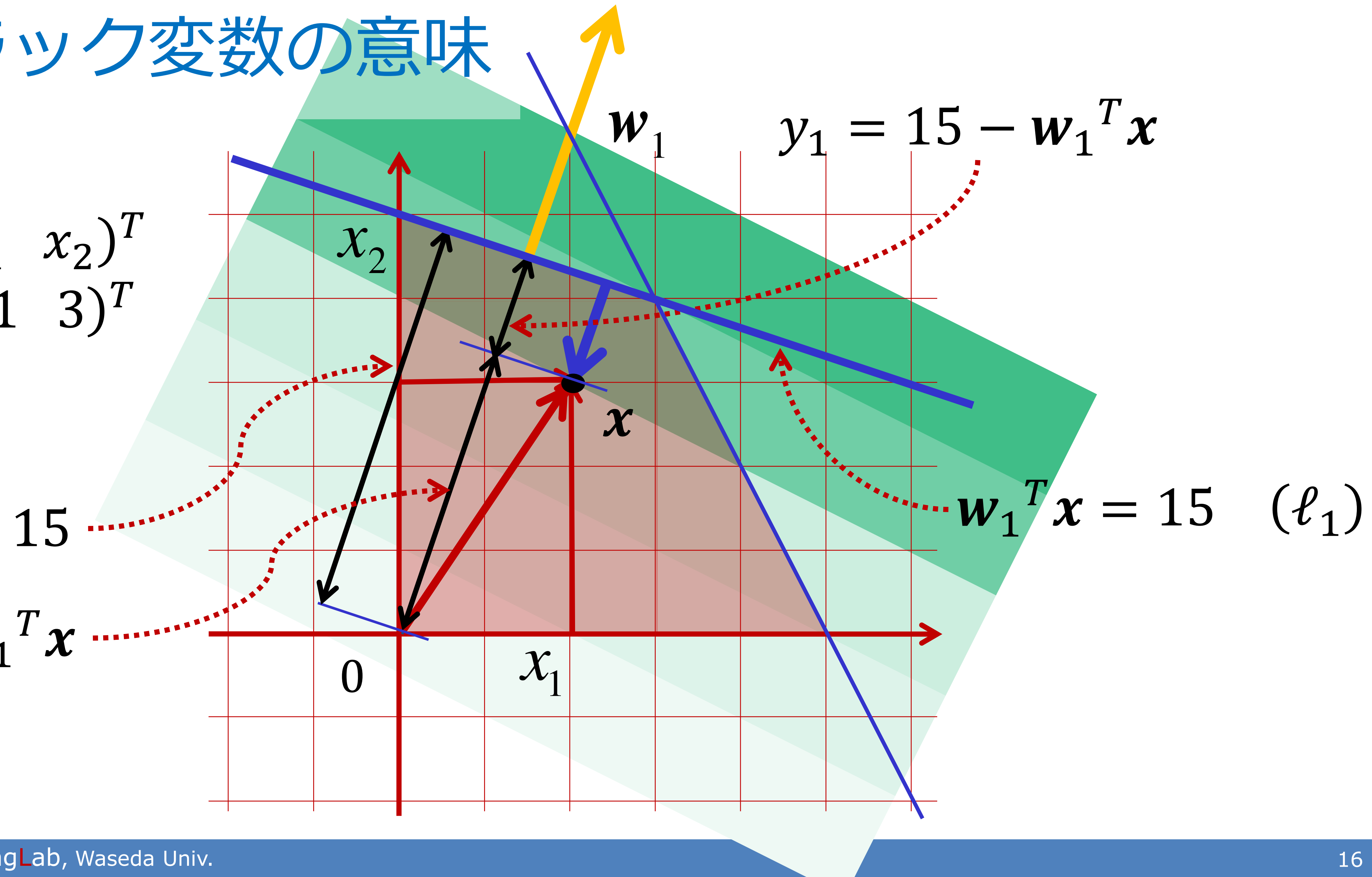
y_1, y_2：従属変数（1箇所しか出現しない変数） ・・・ 基底変数

シンプレックス法

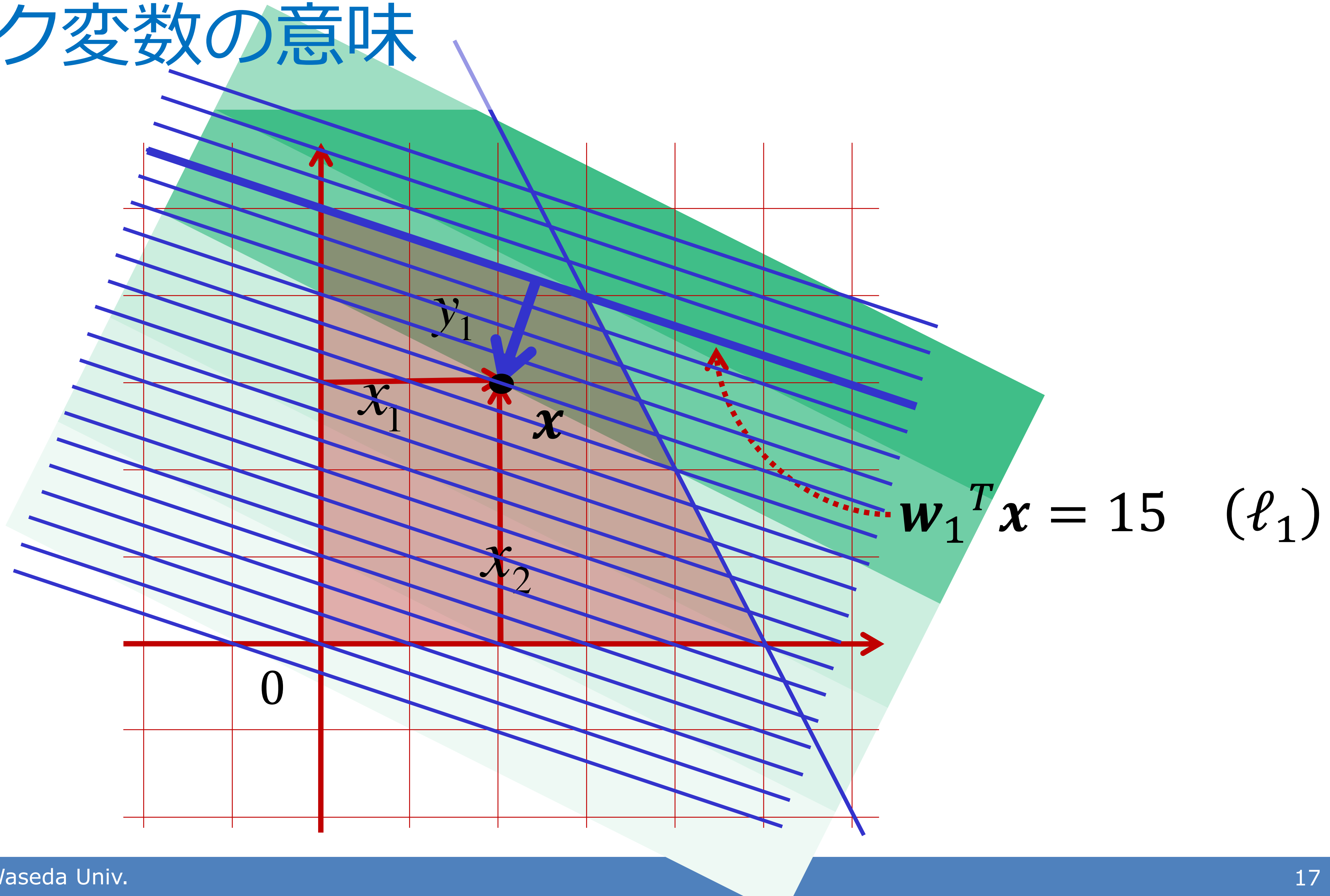
1. 正準形に変換する
2. 以下を繰り返す
   2-1. 全ての非基底変数を0とおいたときの目的関数の値（基底可能解）を z とする。
   2-2. 非基底変数のうち最適化に最も寄与するものを選ぶ。
   この非基底変数を x とする。寄与するものがなければ，現在の z を最適値として終了する。
   2-3. x 以外の非基底変数を0のままとし，x だけ変化させるとき，どの条件式まで x を変化させることができるかを調べる。このとき，選ばれる条件式を S とする。
   2-4. S を用いて，他の条件式から x を消去し，非基底変数を入れ替える。
   （x を基底変数からはずす。このとき基底変数のどれかが非基底変数になる）

スラック変数の意味

$\boldsymbol{x} = (x_1 \ \ x_2)^T$
$\boldsymbol{w}_1 = (1 \ \ 3)^T$



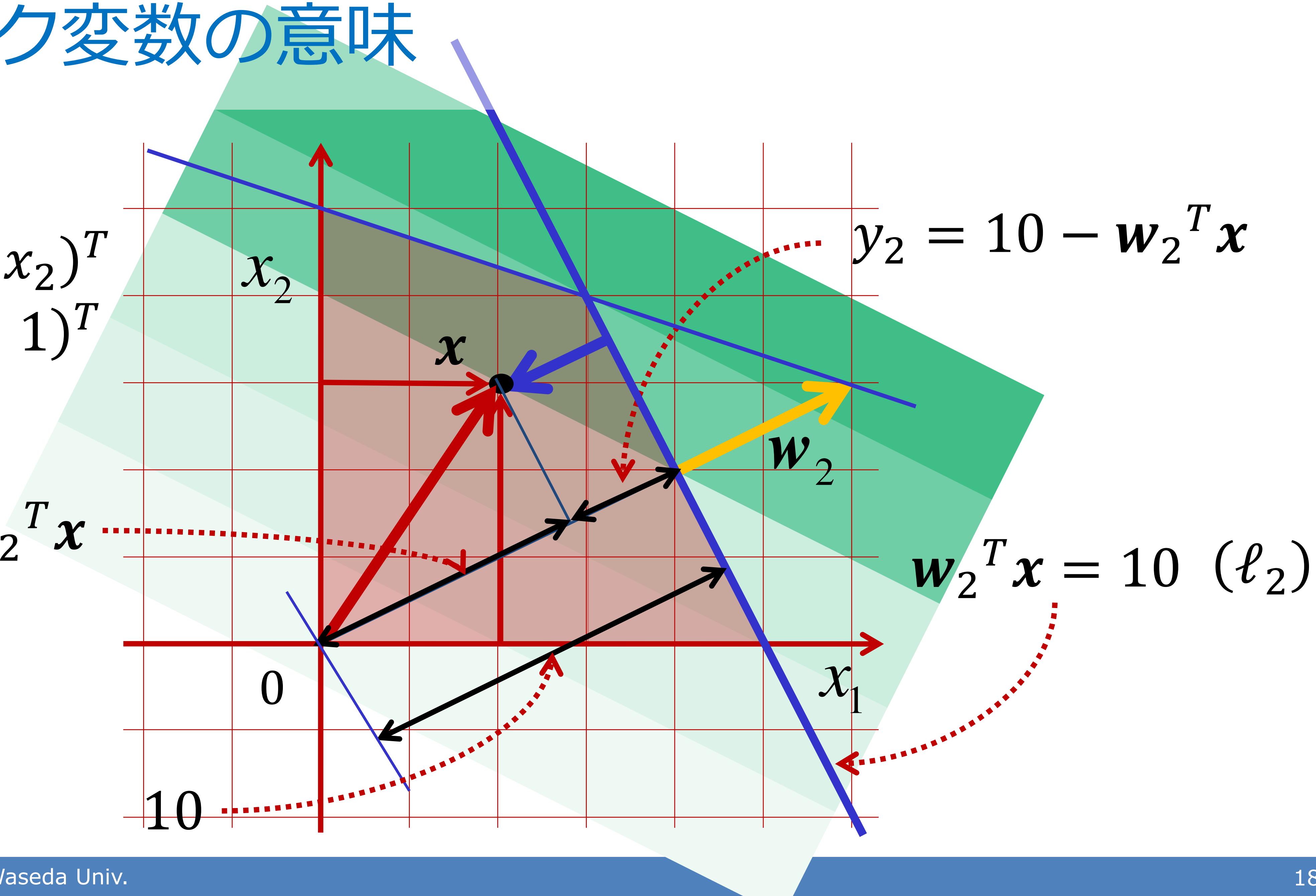
スラック変数の意味



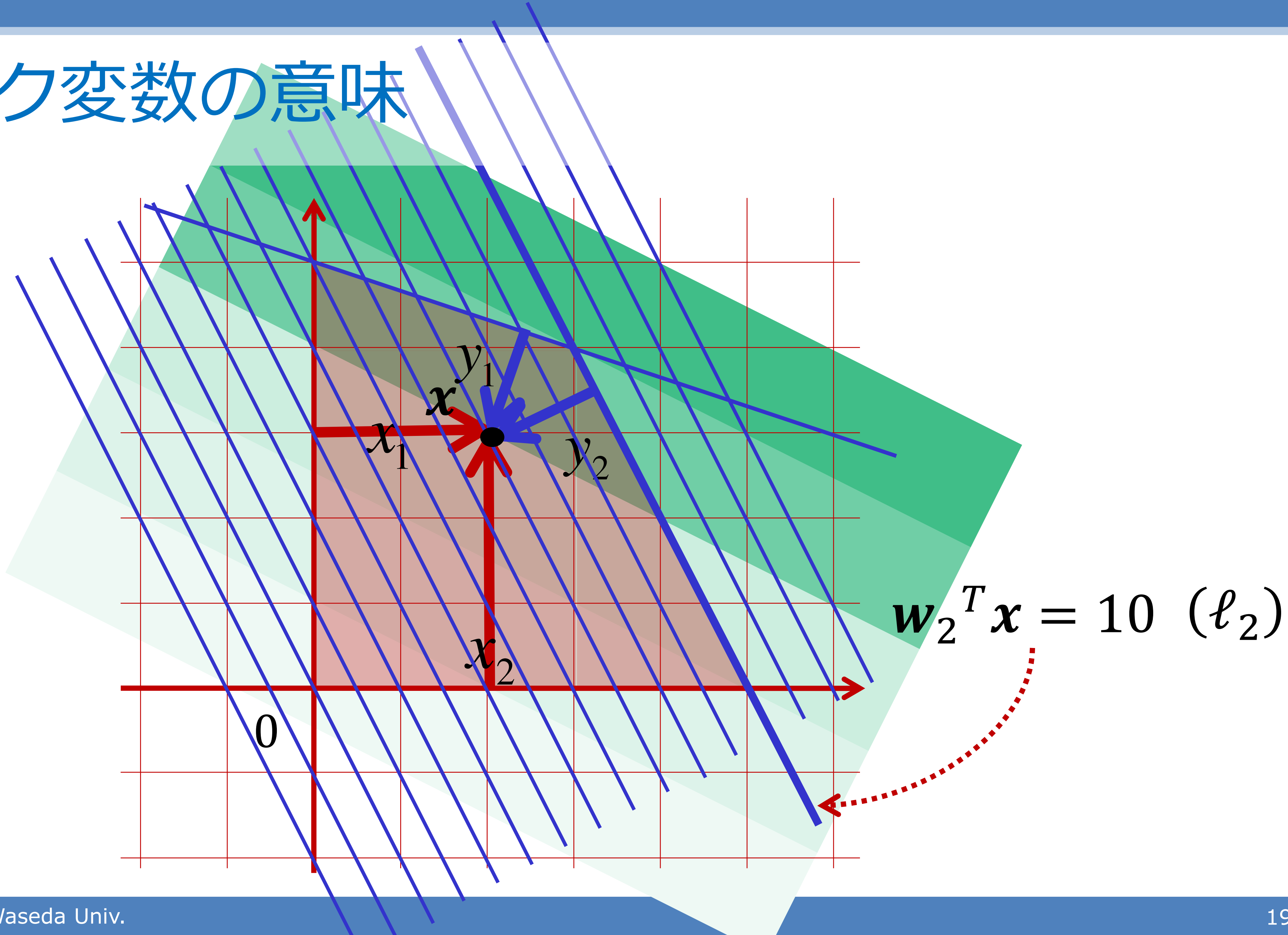
y_1
x_1
$\boldsymbol{x}$
x_2
0
$\boldsymbol{w}_1{}^T\boldsymbol{x} = 15 \quad (\ell_1)$

スラック変数の意味

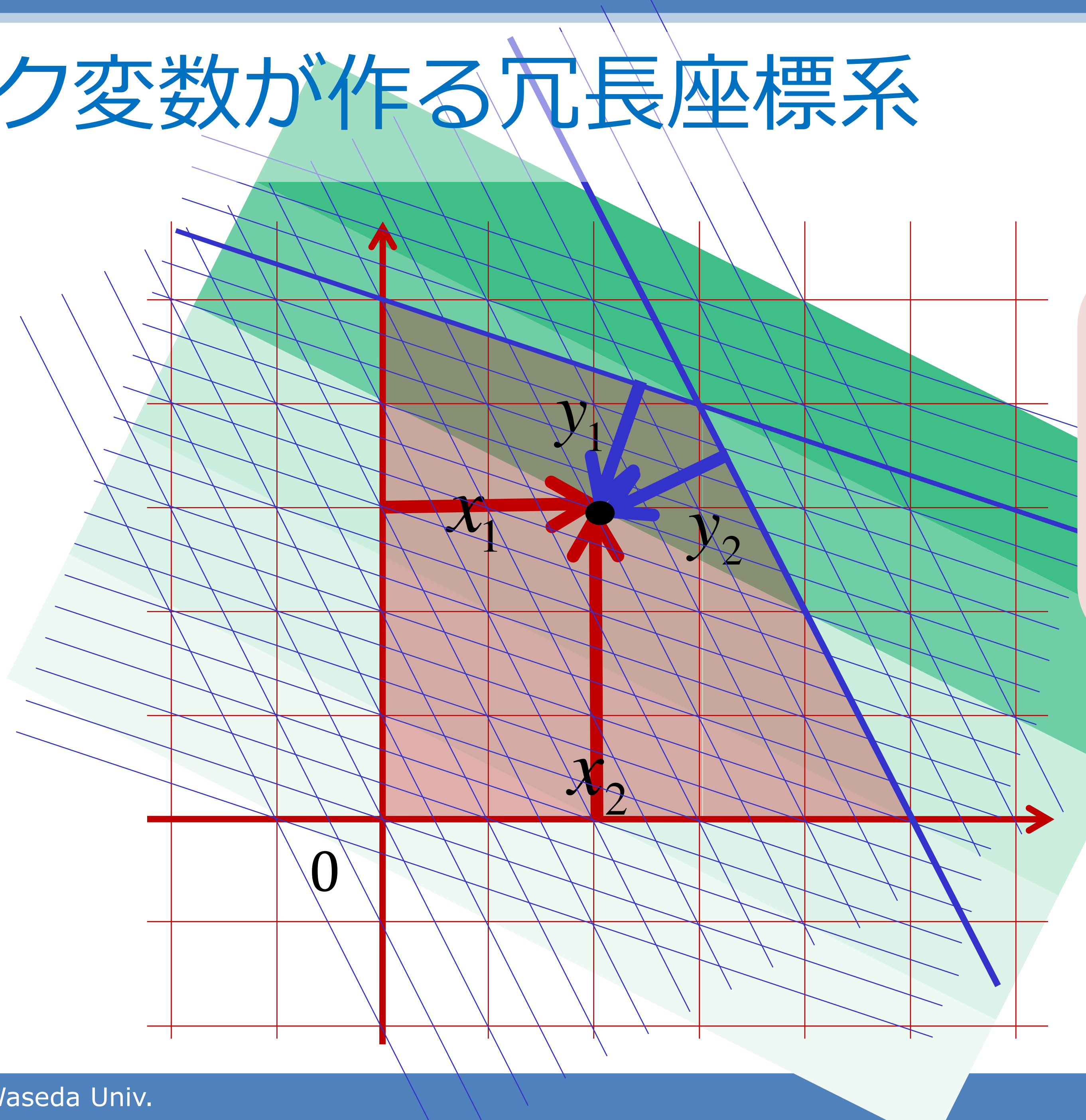
$\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2)^T$
$\boldsymbol{w}_2 = (2 \;\; 1)^T$



スラック変数の意味

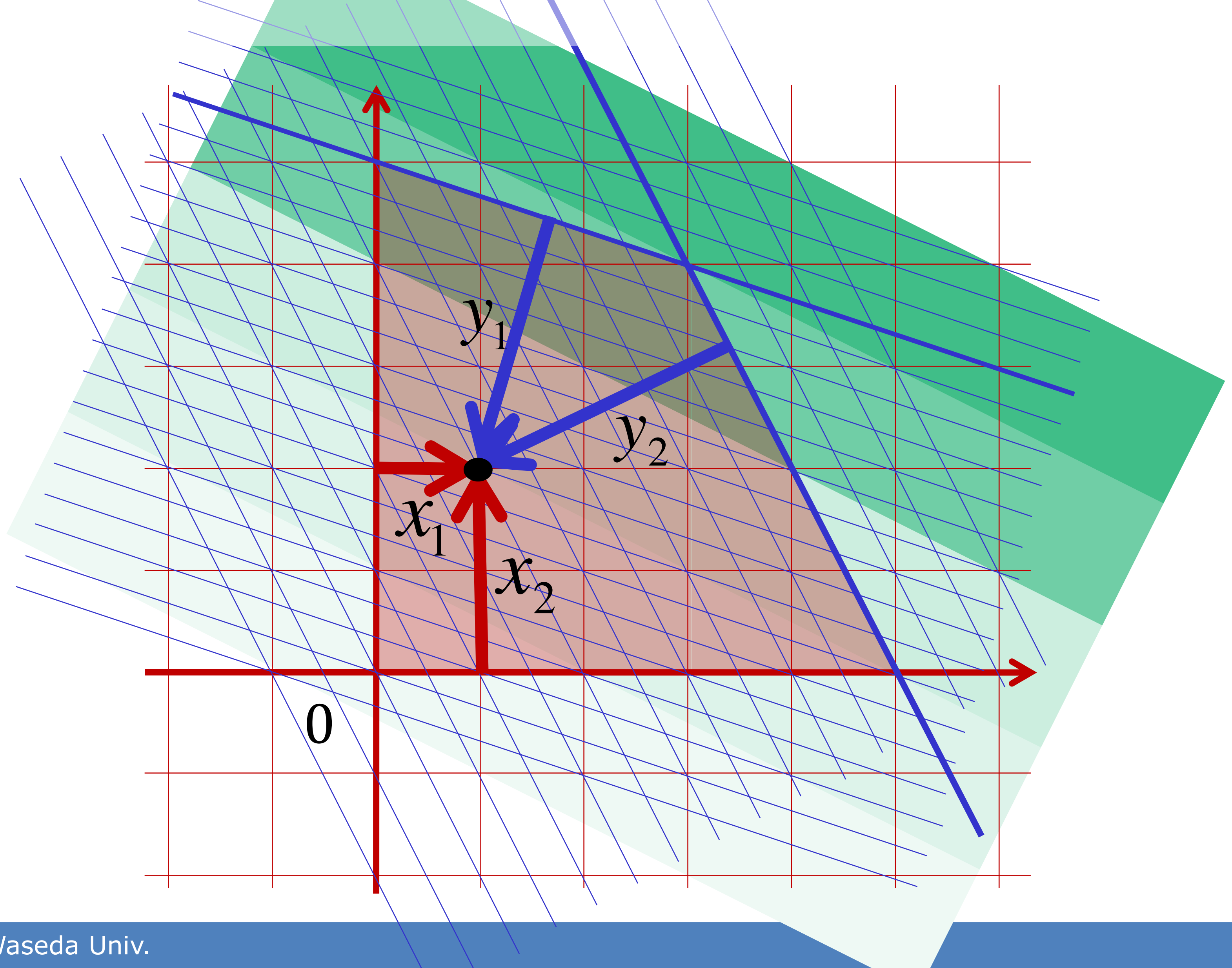

y_1
$\boldsymbol{x}$
x_1
y_2
x_2
0
$\boldsymbol{w}_2{}^T\boldsymbol{x} = 10$ (ℓ_2)

スラック変数が作る冗長座標系

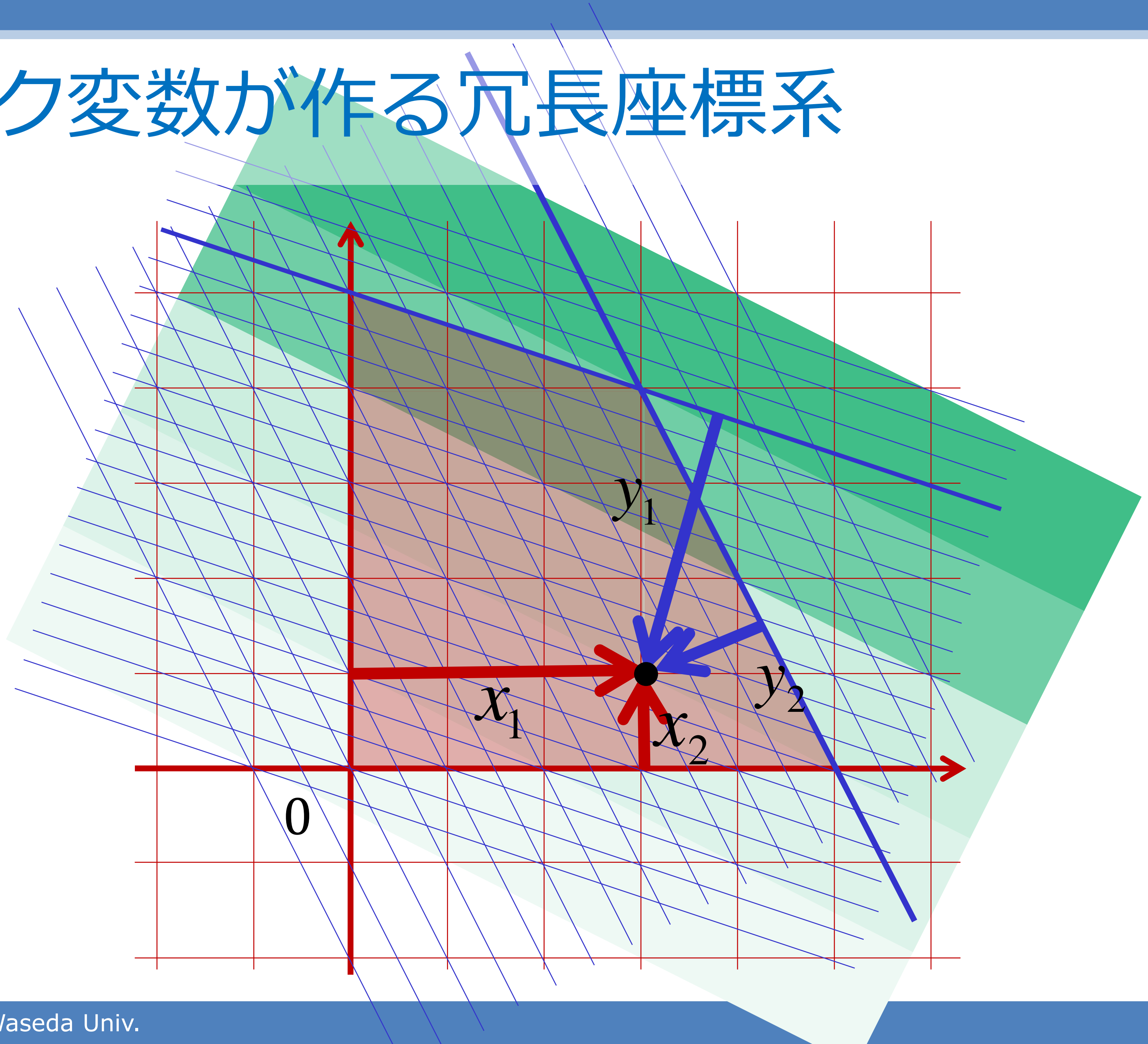


非基底変数（独立変数）は原点をどこに置くかで決まっていて，この場合であれば原点がx_1軸とx_2軸の交点になっていますので，x_1とx_2が非基底変数（独立変数）になります．

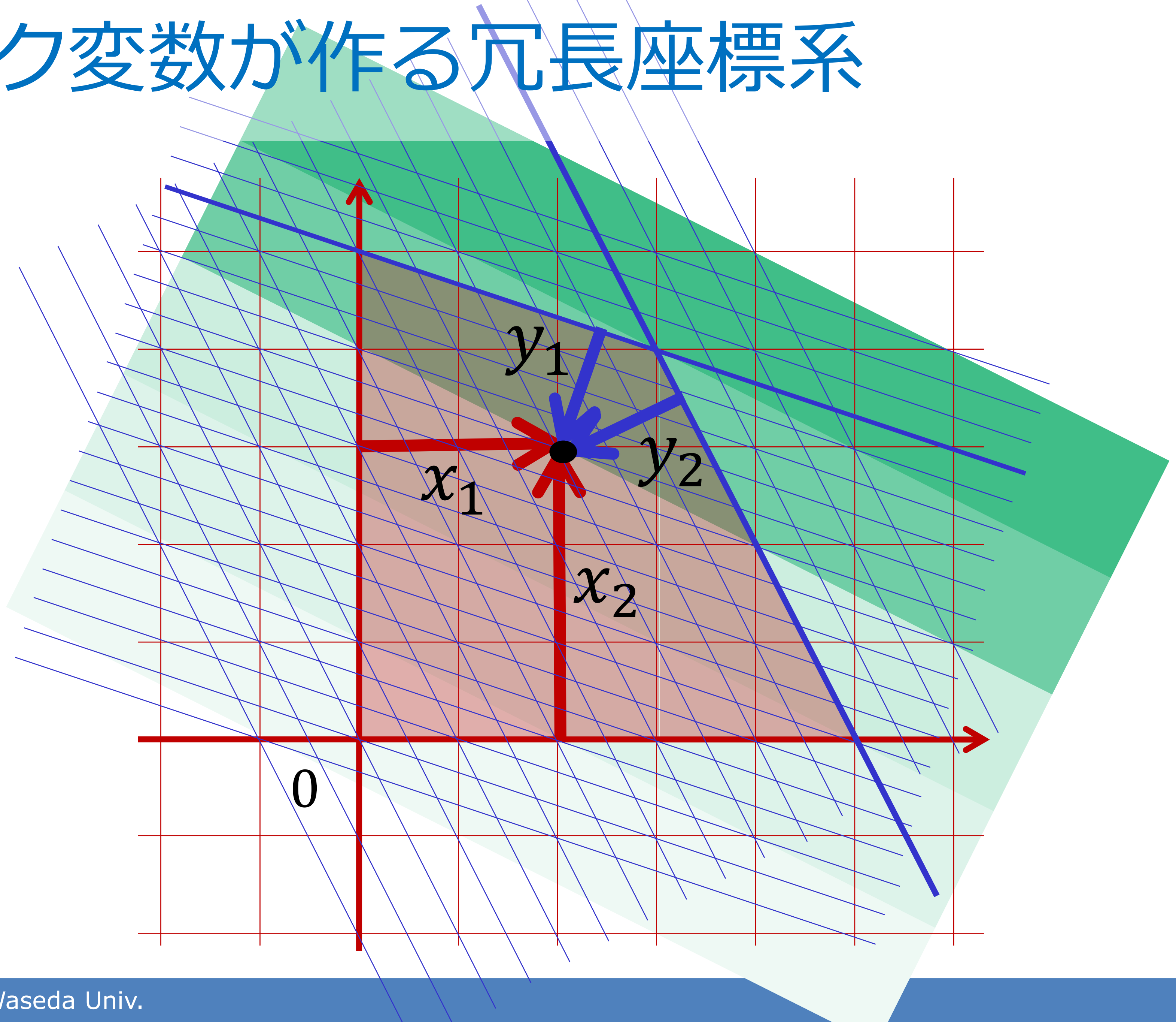
スラック変数が作る冗長座標系



スラック変数が作る冗長座標系

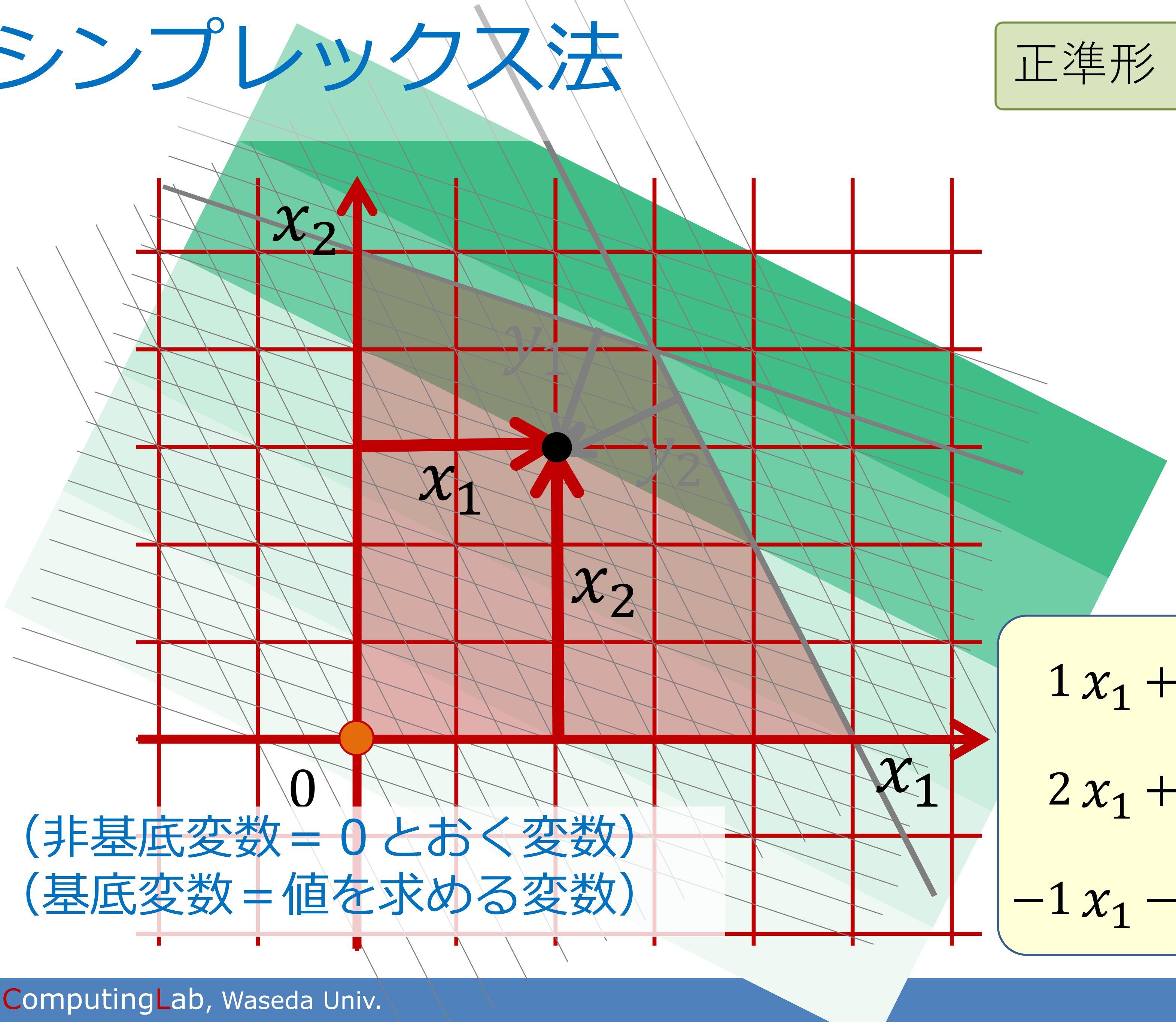


スラック変数が作る冗長座標系



シンプレックス法

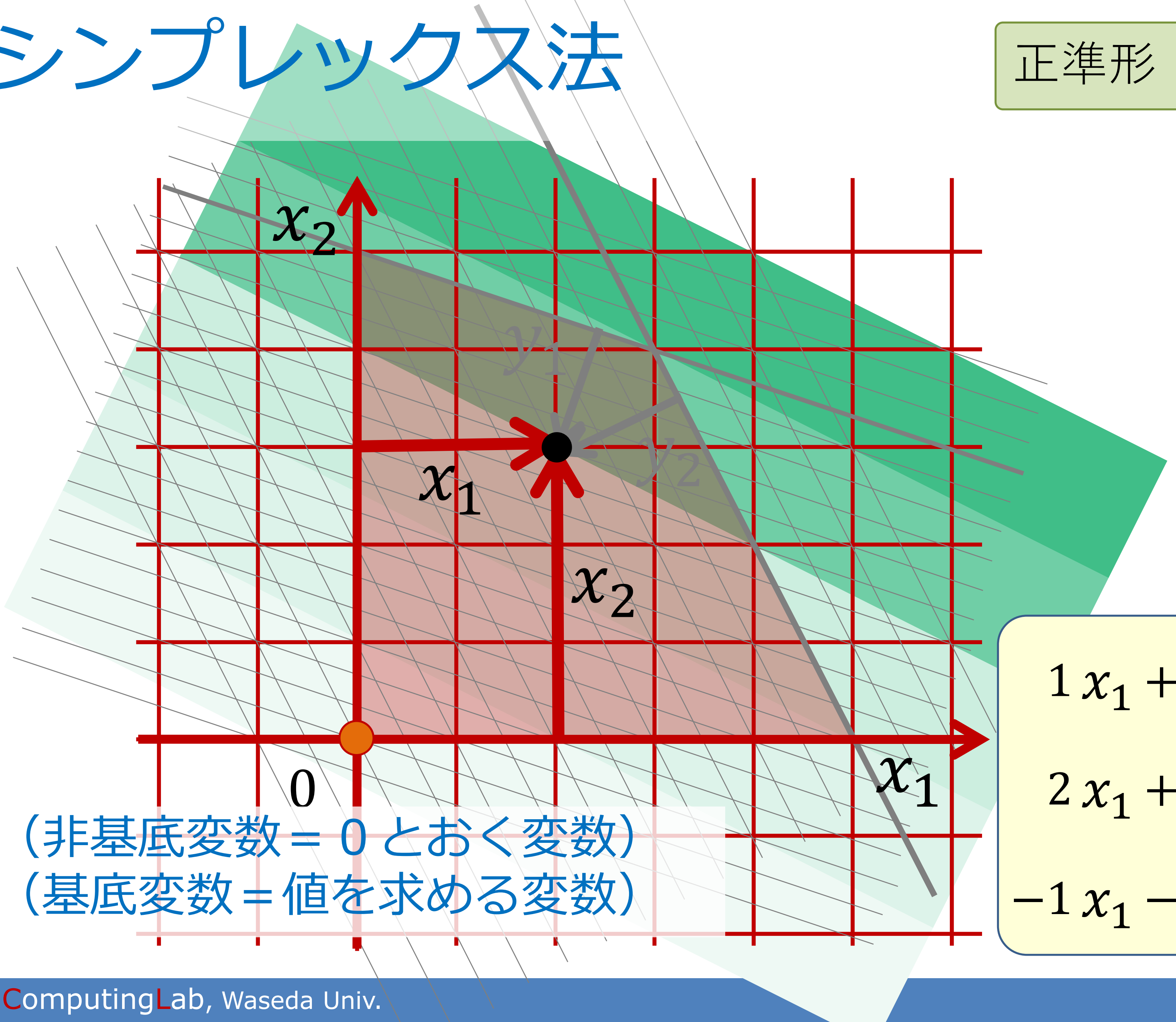
正準形



$$
\begin{array}{rrrrrr}
1\,x_1 & +3\,x_2 & +1\,y_1 & & & = 15 \\
2\,x_1 & +1\,x_2 & & +1\,y_2 & & = 10 \\
-1\,x_1 & -2\,x_2 & & & +z & = \ \ 0
\end{array}
$$

赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

シンプレックス法



赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

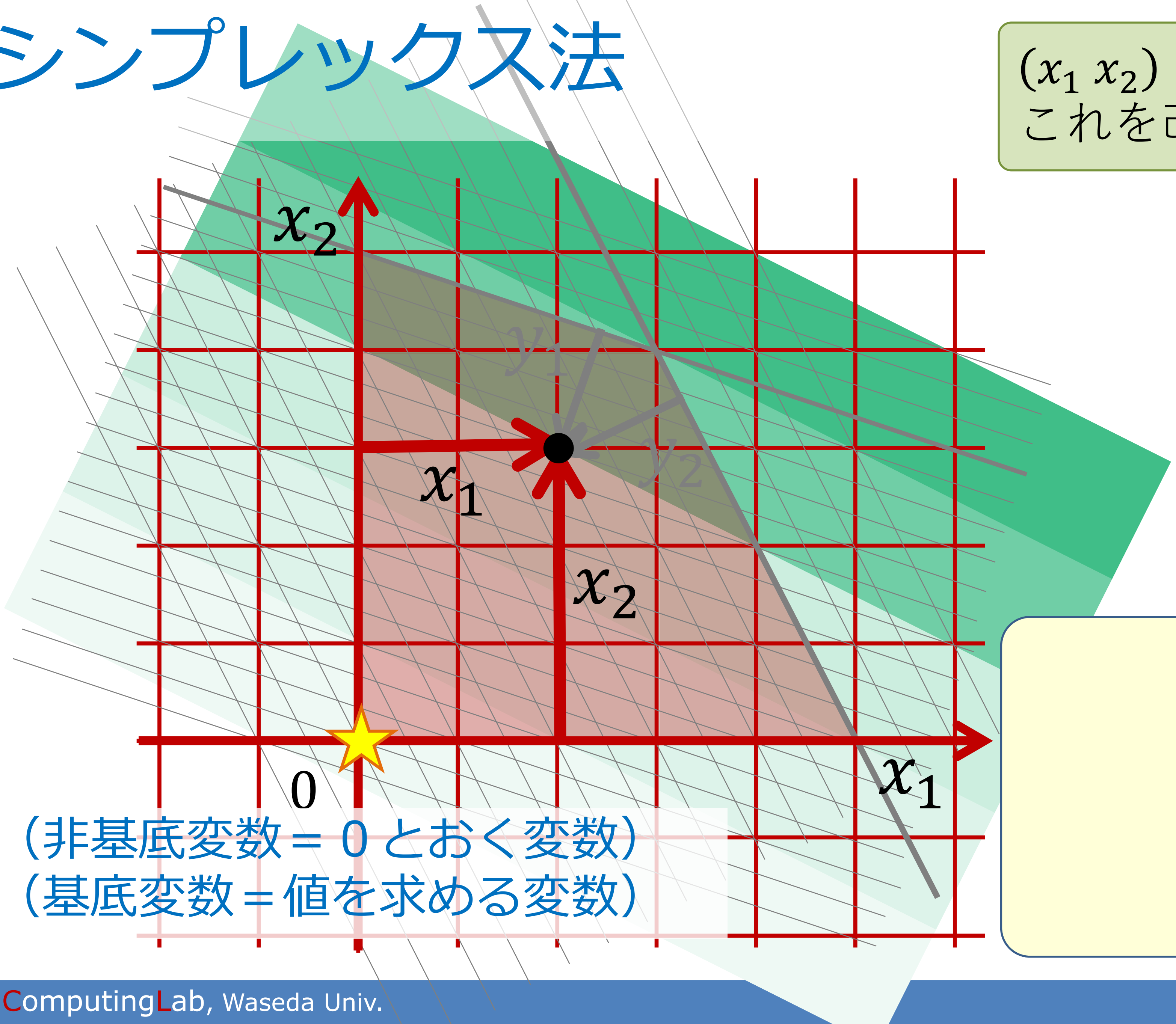
正準形

制約条件が作る超平面が交差する点を**基底解**と呼びます．特に，実行可能領域を表す凸多面体の頂点を**実行可能基底解**と呼びます．また，基底解を定める際に値を０に固定した変数を**非基底変数**，それ以外の変数を**基底変数**と呼びます．

$$1\,x_1 + 3\,x_2 + 1\,y_1 \qquad 15$$
$$2\,x_1 + 1\,x_2 \qquad + 1\,y_2 \qquad 10$$
$$-1\,x_1 - 2\,x_2 \qquad + z = \quad 0$$

シンプレックス法

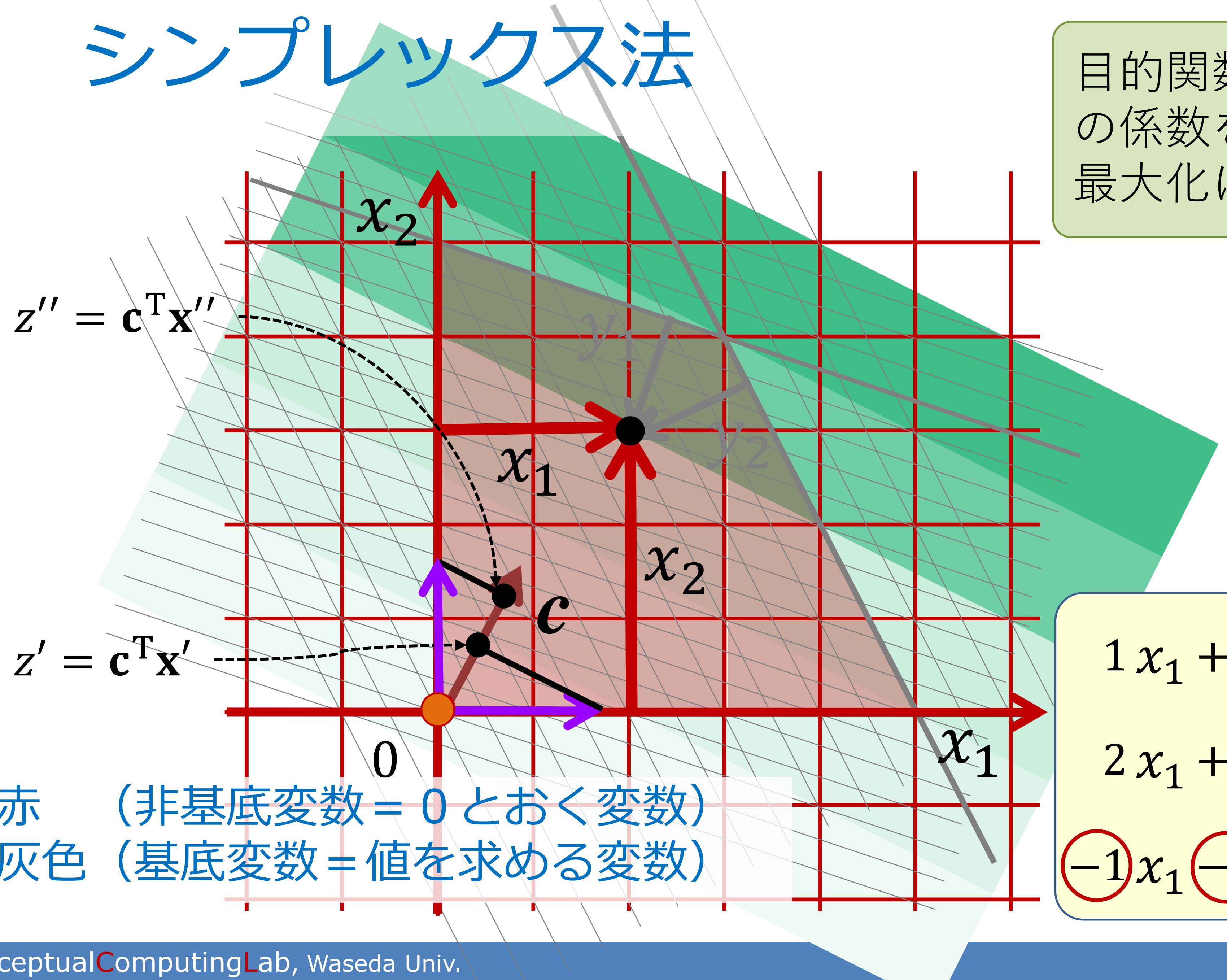
$(x_1\ x_2) = (0\ 0)$ は基底解。
これを改善する。



$$
\begin{aligned}
+1\,y_1 \quad &= 15 \\
+1\,y_2 &= 10 \\
+z &= \ \ 0
\end{aligned}
$$

赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

シンプレックス法

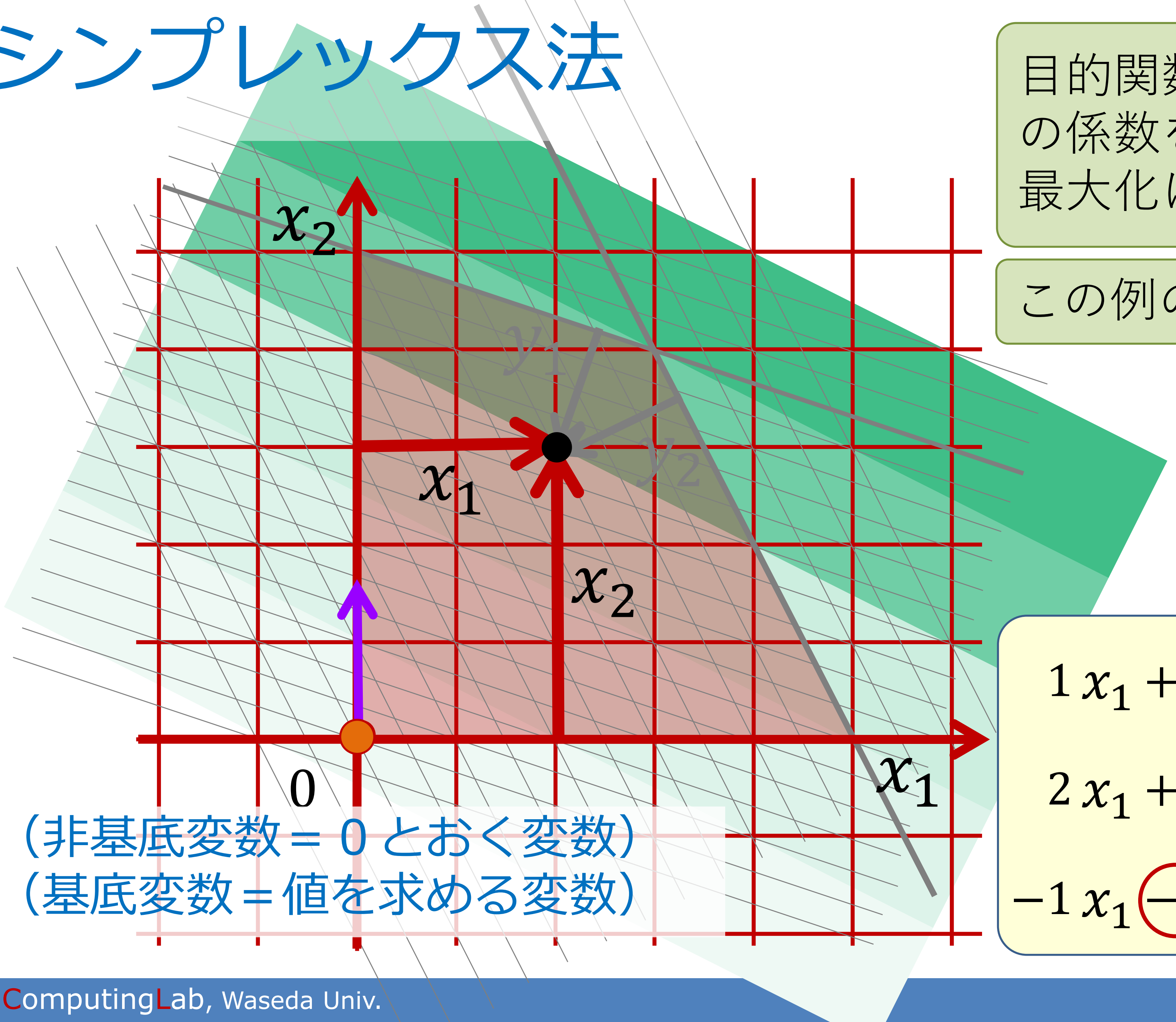


目的関数における，非基底変数の係数を比較し，どちらが z の最大化に寄与するかを調べる。

$$
\begin{array}{lllll}
1\,x_1 & +3\,x_2 & +1\,y_1 & & = 15 \\
2\,x_1 & +1\,x_2 & & +1\,y_2 & = 10 \\
-1\,x_1 & -2\,x_2 & & +z & = \ \ 0
\end{array}
$$

赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

シンプレックス法



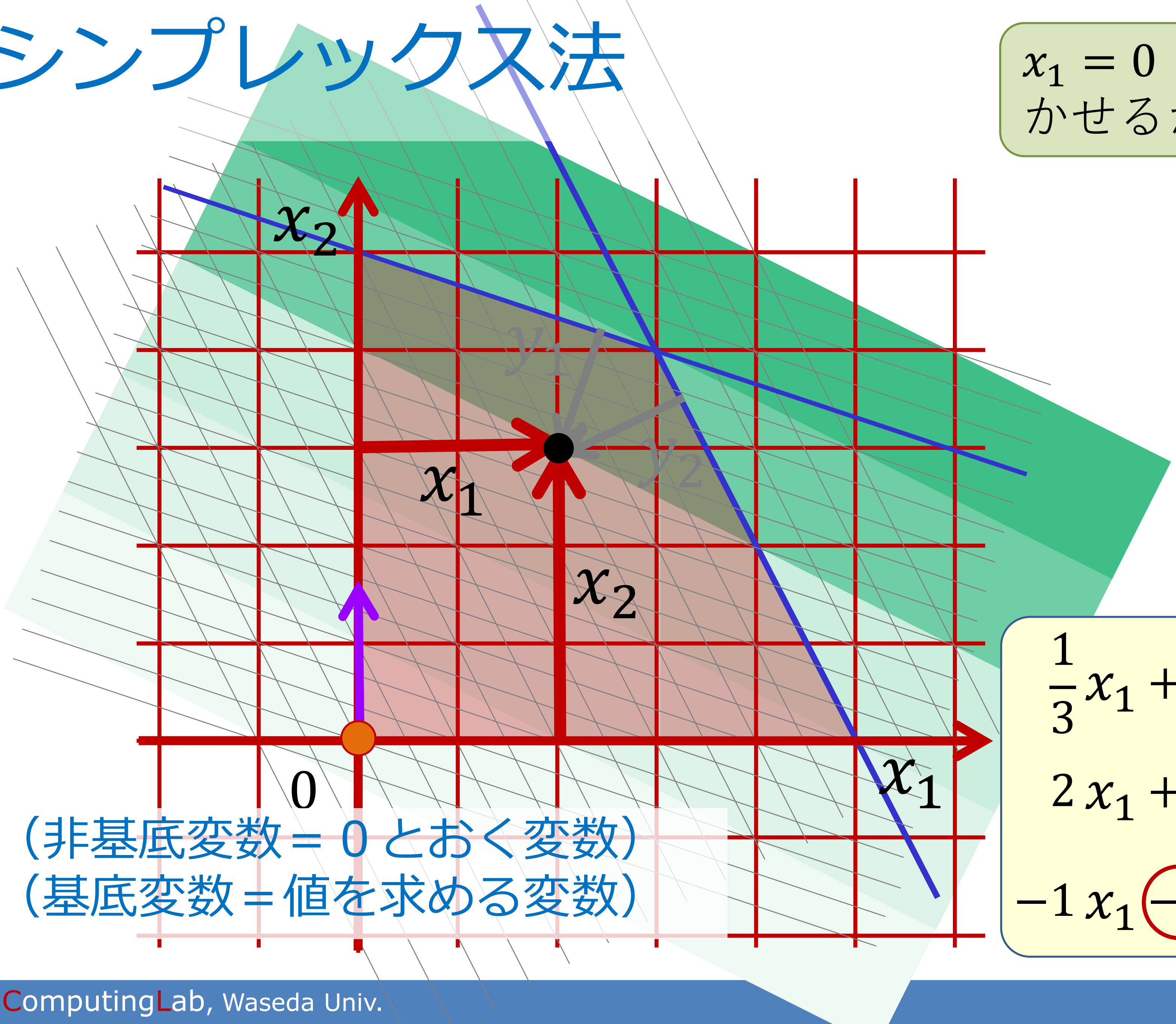
目的関数における，非基底変数の係数を比較し，どちらが z の最大化に寄与するかを調べる。

この例の場合, x_2 が選ばれる。

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 3x_2 + 1y_1 \quad &= 15 \\
2x_1 + 1x_2 \quad + 1y_2 &= 10 \\
-1x_1 - 2x_2 \quad + z &= 0
\end{aligned}
$$

赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

シンプレックス法



$x_1 = 0$ として，x_2をどこまで動かせるか調べる。

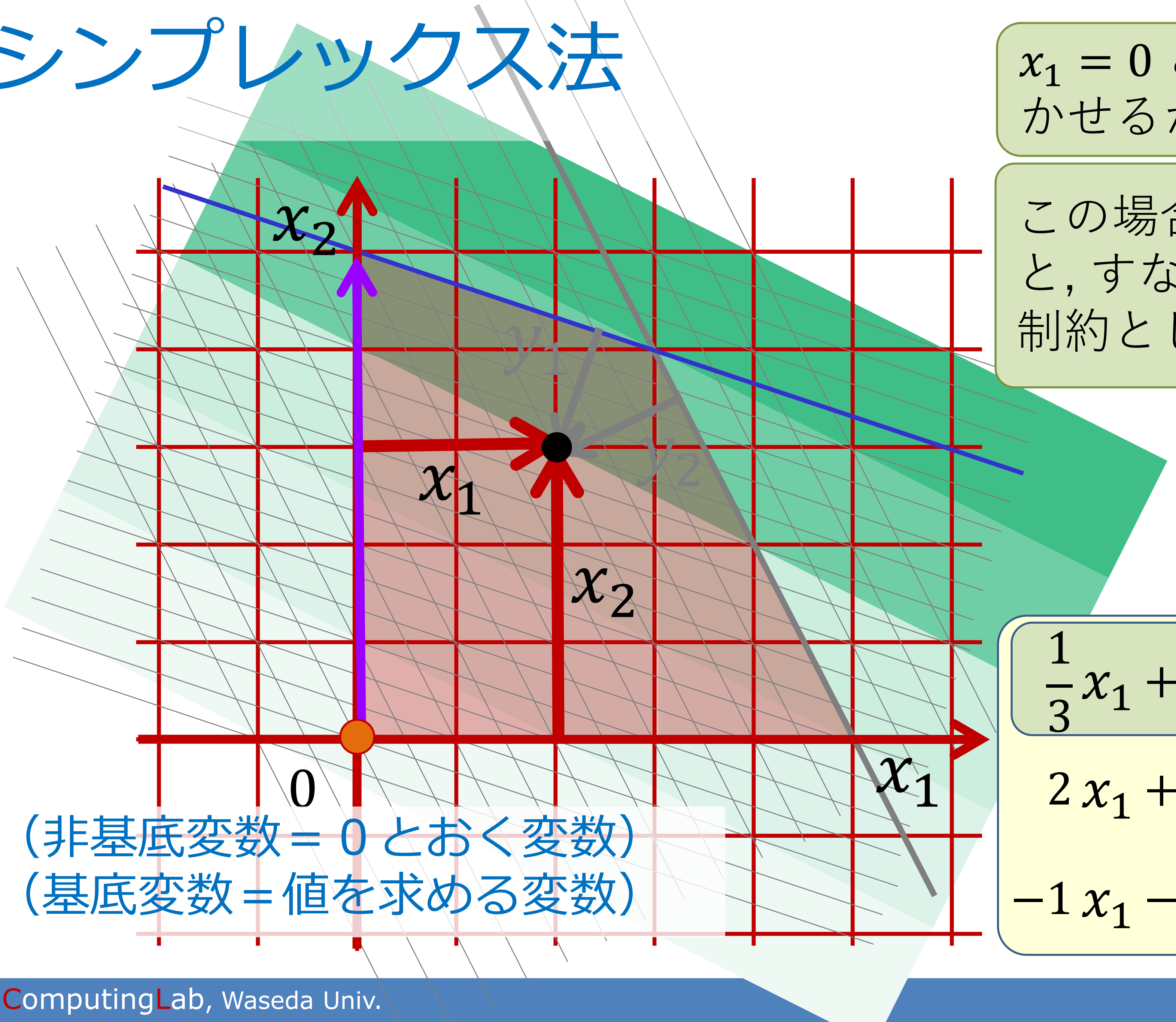
$$\frac{1}{3}x_1 + 1\,x_2 + \frac{1}{3}y_1 = 5$$

$$2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,y_2 = 10$$

$$-1\,x_1 - 2\,x_2 + z = 0$$

赤　（非基底変数 = 0 とおく変数）
灰色（基底変数 = 値を求める変数）

シンプレックス法



$x_1 = 0$ として，x_2をどこまで動かせるか調べる。

この場合$x_2 = 5$まで動かせること，すなわち，1本目の不等式が制約として効くことが分かる。

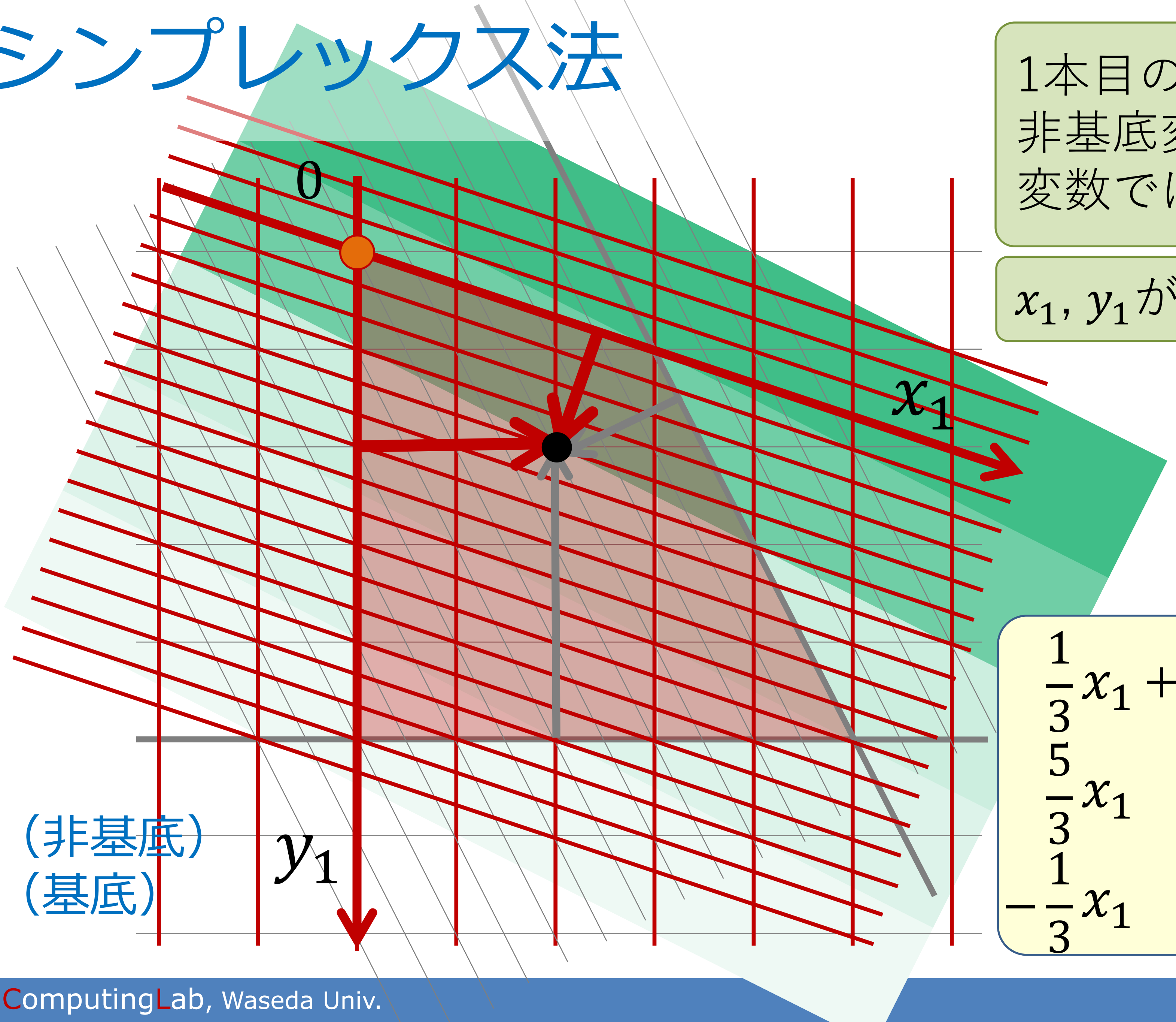
$$\frac{1}{3}x_1 + 1\,x_2 + \frac{1}{3}y_1 = 5$$

$$2\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,y_2 = 10$$

$$-1\,x_1 - 2\,x_2 + z = 0$$

赤　（非基底変数＝０とおく変数）
灰色（基底変数＝値を求める変数）

シンプレックス法



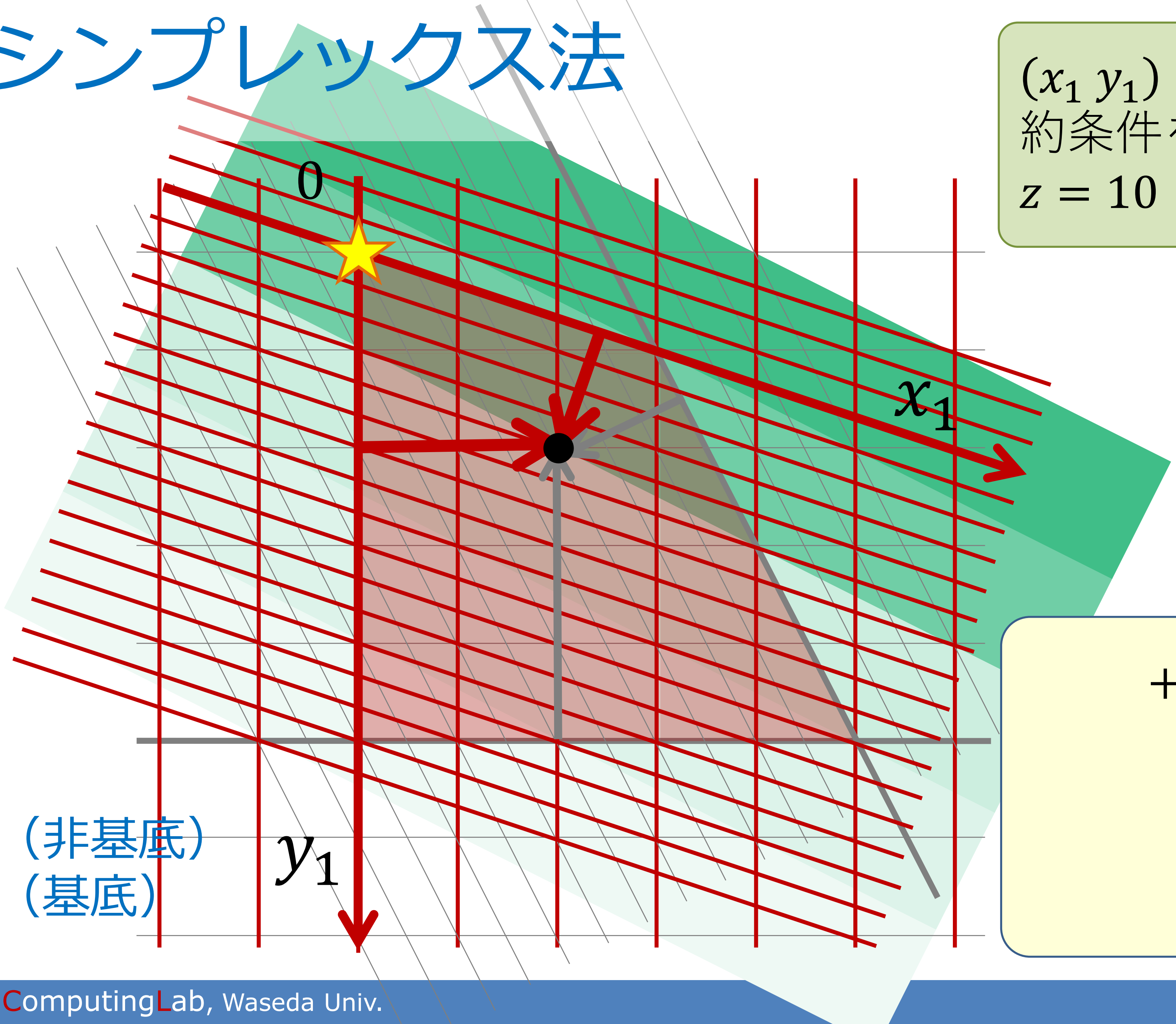
1本目の方程式を使って，x_2を非基底変数から外す（x_2を独立変数ではなくする）。

x_1, y_1が非基底変数となる。

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\frac{1}{3}x_1 & +1\,x_2 & +\frac{1}{3}y_1 & & & = \ 5 \\
\frac{5}{3}x_1 & & -\frac{1}{3}y_1 & +1\,y_2 & & = \ 5 \\
-\frac{1}{3}x_1 & & +\frac{2}{3}y_1 & & +z & = 10
\end{array}
$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法



$(x_1\ y_1) = (0\ 0)$は基底可能解（制約条件を満たす）このとき，
$z = 10$（まだ，最適ではない）

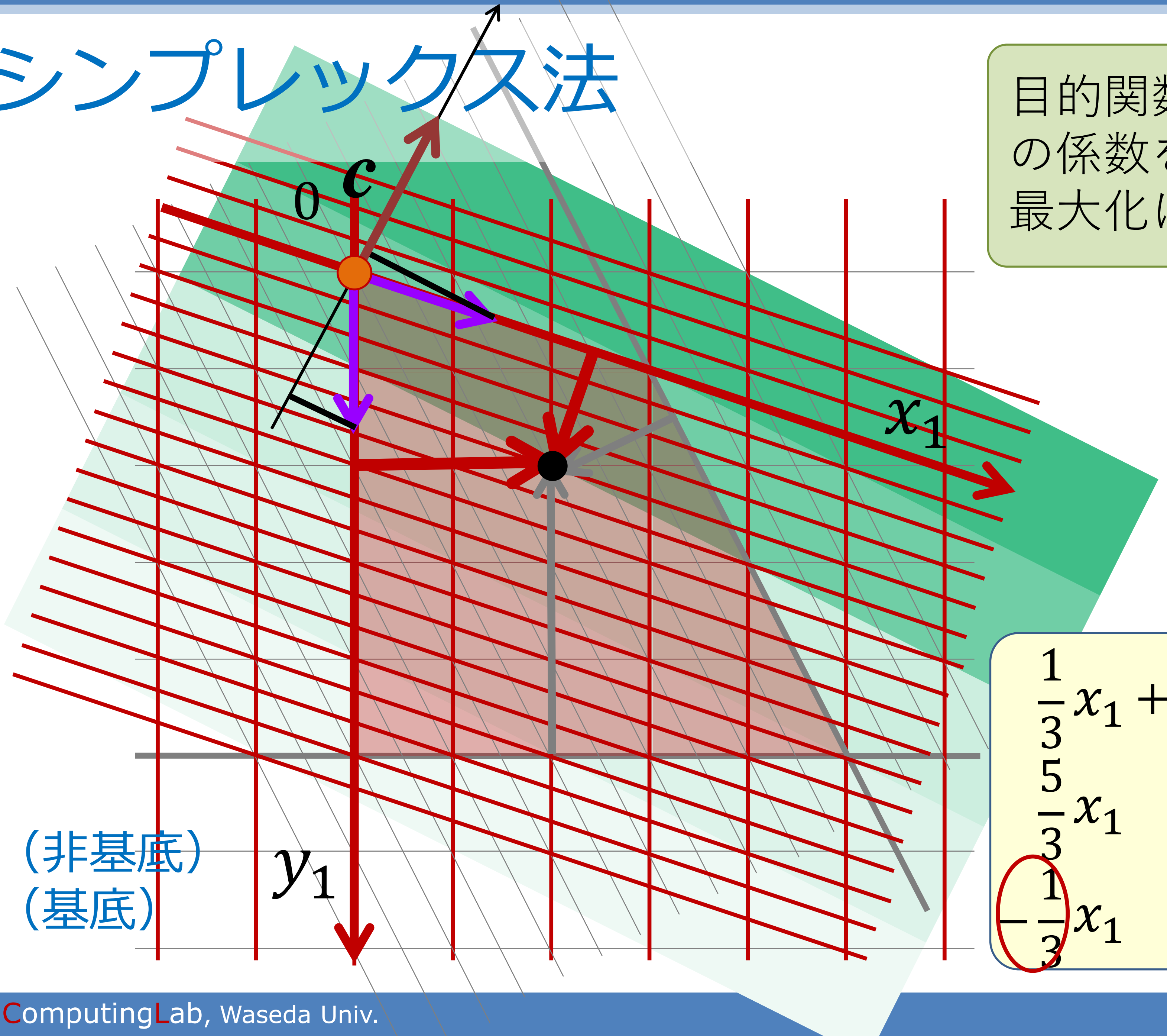
$$+1\,x_2 = 5$$

$$+1\,y_2 = 5$$

$$+z = 10$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法

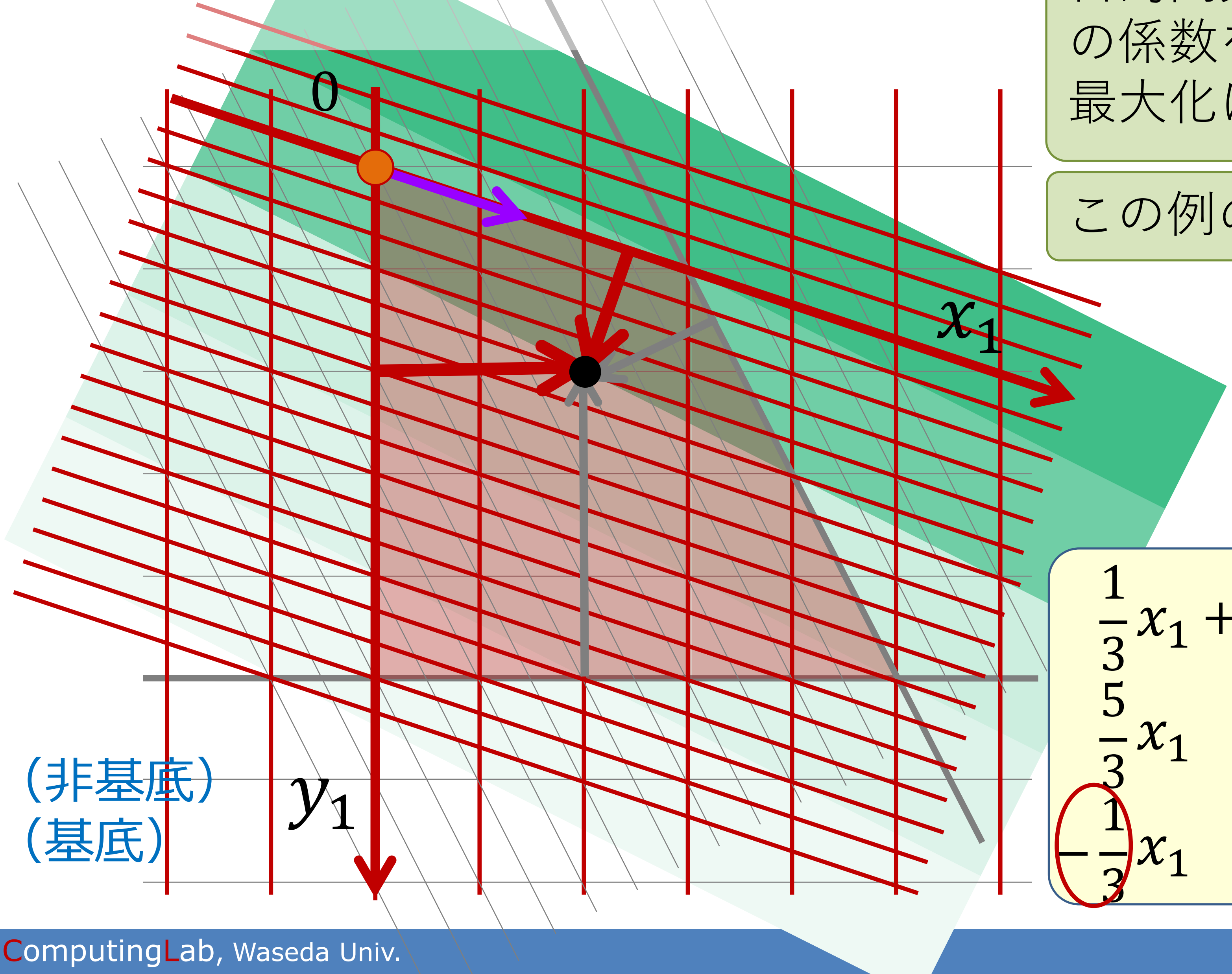


目的関数における，非基底変数の係数を比較し，どちらが z の最大化に寄与するかを調べる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}x_1 + 1\,x_2 + \frac{1}{3}y_1 & & &= 5 \\
\frac{5}{3}x_1 & - \frac{1}{3}y_1 + 1\,y_2 & &= 5 \\
-\frac{1}{3}x_1 & + \frac{2}{3}y_1 & + z &= 10
\end{aligned}
$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法



目的関数における，非基底変数の係数を比較し，どちらが z の最大化に寄与するかを調べる。

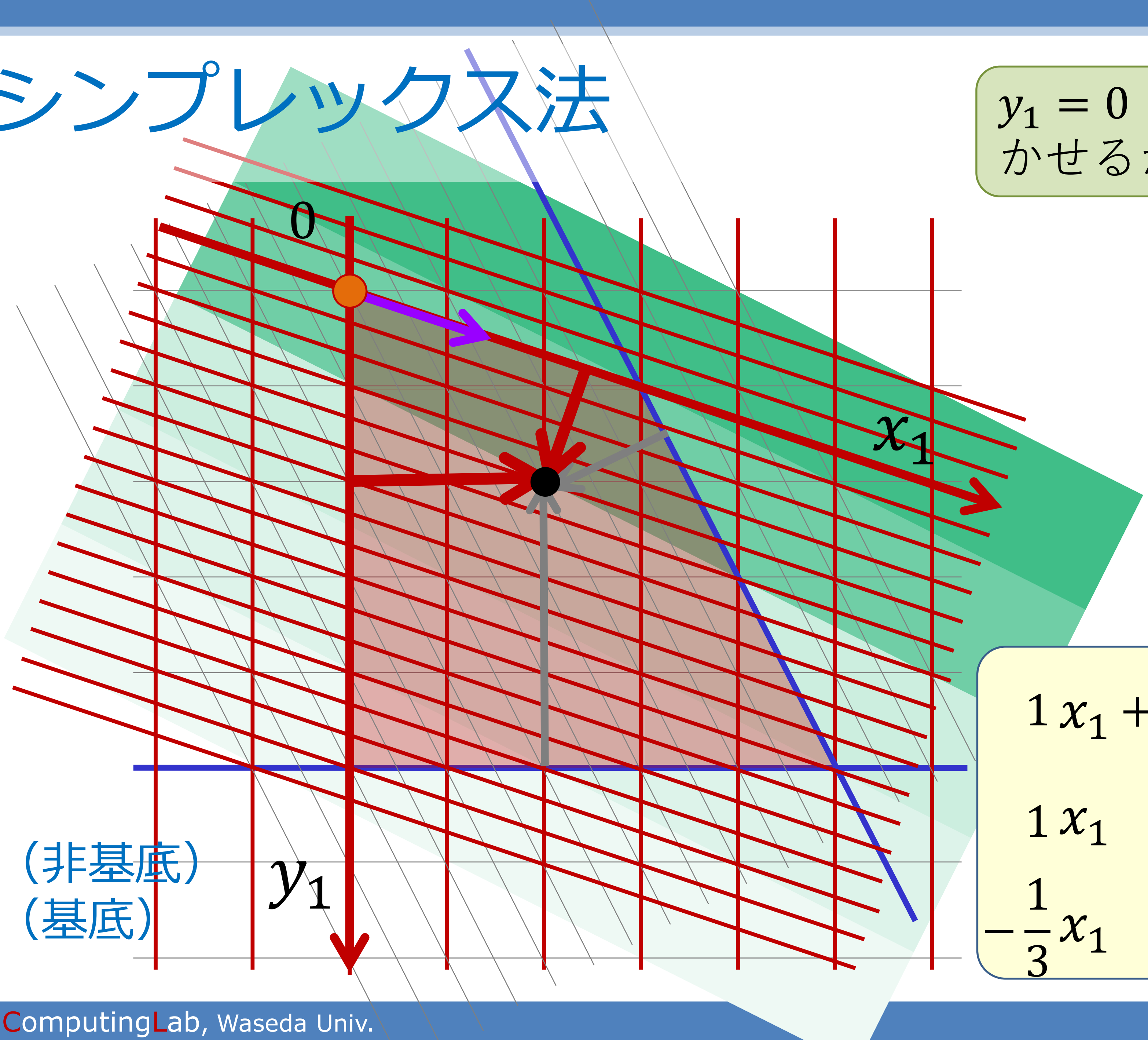
この例の場合, x_1 が選ばれる。

赤　（非基底）
灰色（基底）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}x_1 + 1\,x_2 + \frac{1}{3}y_1 \qquad\qquad &= 5 \\
\frac{5}{3}x_1 \qquad - \frac{1}{3}y_1 + 1\,y_2 \quad &= 5 \\
-\frac{1}{3}x_1 \qquad + \frac{2}{3}y_1 \qquad + z &= 10
\end{aligned}
$$

シンプレックス法

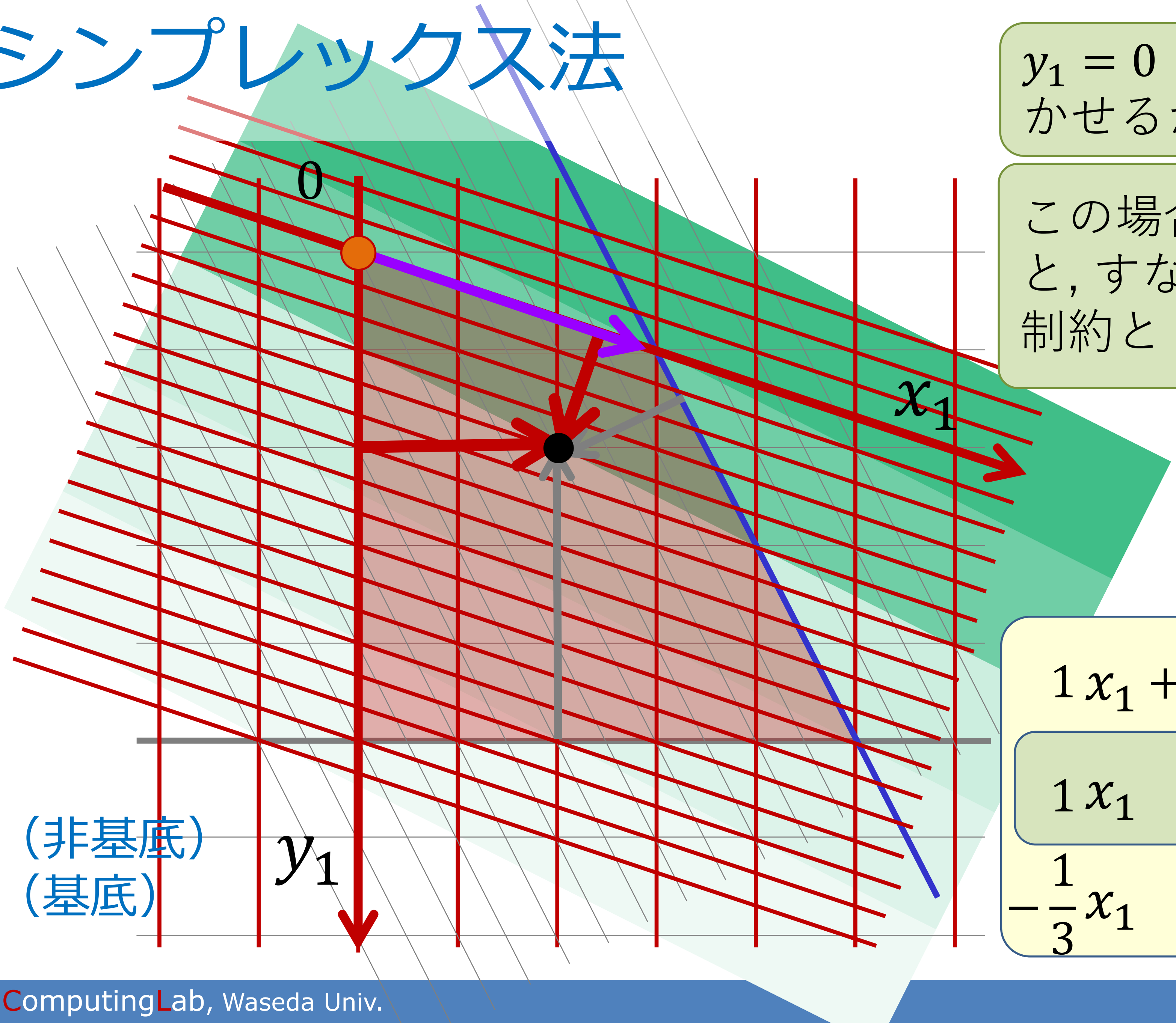
$y_1 = 0$ として，x_1をどこまで動かせるか調べる。



$$
\begin{array}{lllll}
1\,x_1 & +3\,x_2 & +1\,y_1 & & = 15 \\
1\,x_1 & & -\frac{1}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2 & & = 3 \\
-\frac{1}{3}x_1 & & +\frac{2}{3}y_1 & +z & = 10
\end{array}
$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法



赤　（非基底）
灰色（基底）

$y_1 = 0$ として，x_1をどこまで動かせるか調べる。

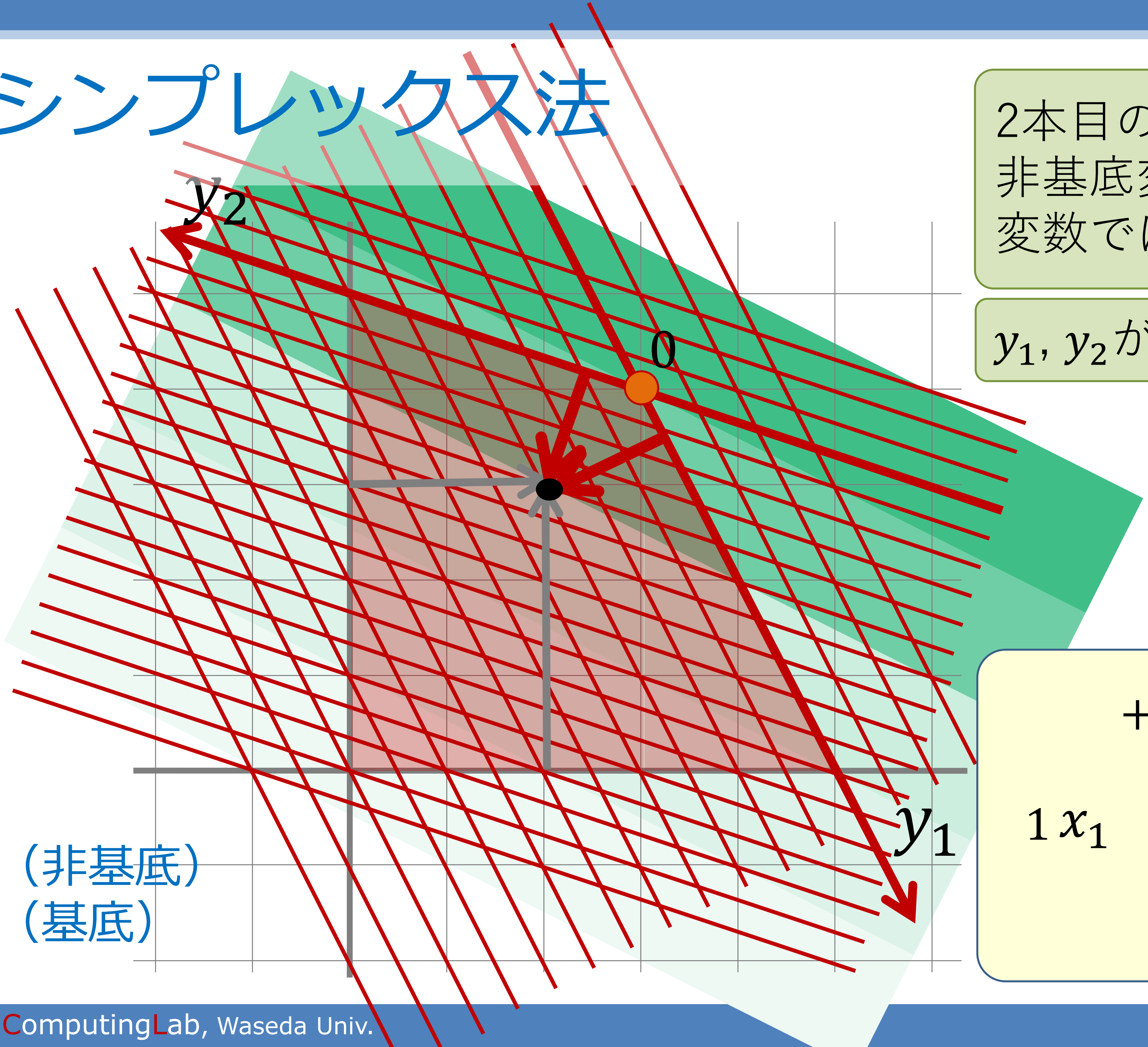
この場合$x_1 = 3$まで動かせること，すなわち，2本目の不等式が制約として効くことが分かる。

$$1x_1 + 3x_2 + 1y_1 = 15$$

$$1x_1 - \frac{1}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2 = 3$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + z = 10$$

シンプレックス法



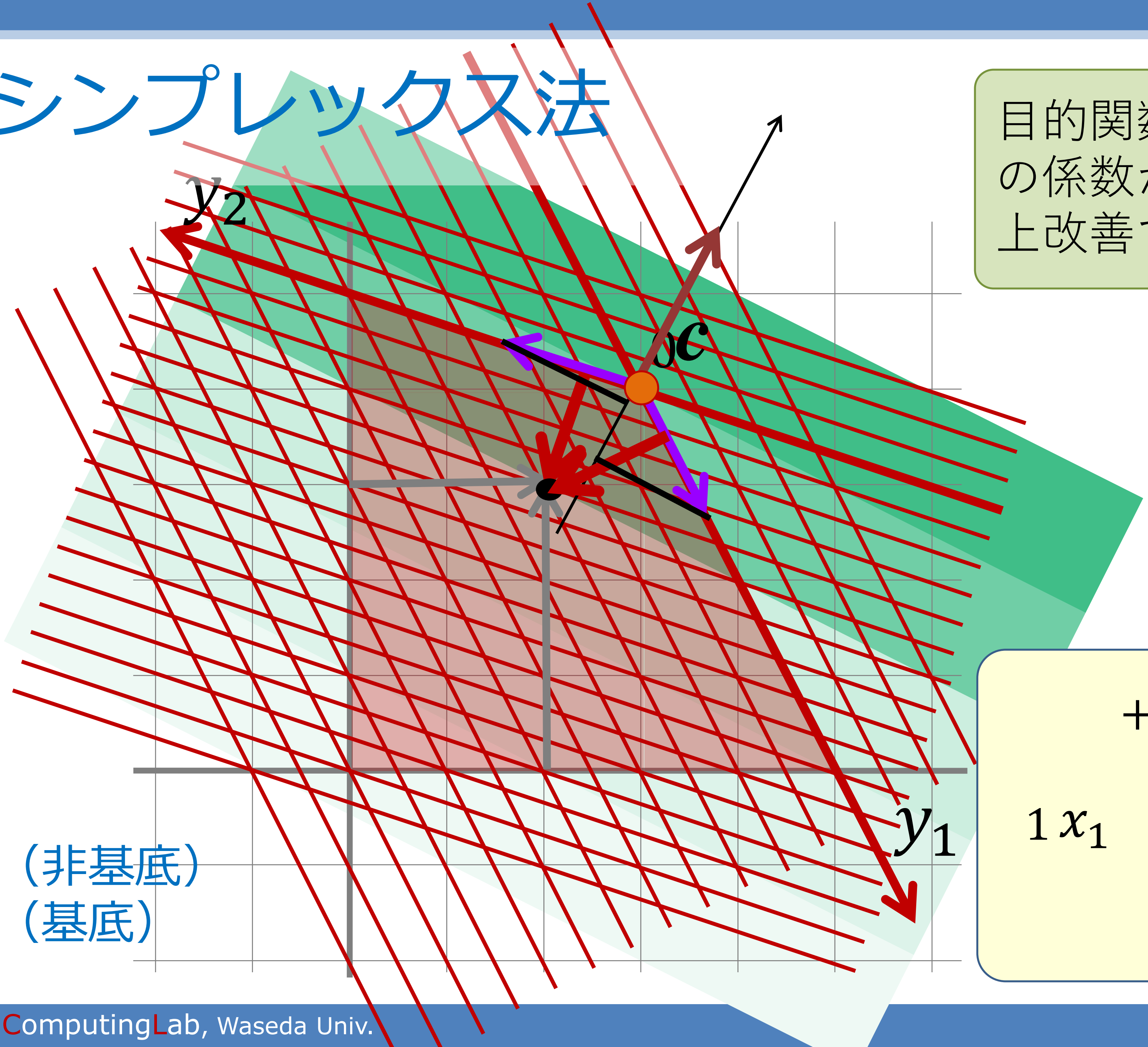
2本目の方程式を使って，x_1を非基底変数から外す（x_1を独立変数ではなくする）。

y_1, y_2が非基底変数となる。

$$
\begin{array}{lllll}
 & +1\,x_2 & +\frac{2}{5}y_1 & -\frac{1}{5}y_2 & = 4 \\
1\,x_1 & & -\frac{1}{5}y_1 & +\frac{3}{5}y_2 & = 3 \\
 & & +\frac{3}{5}y_1 & +\frac{1}{5}y_2 + z & = 11
\end{array}
$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法



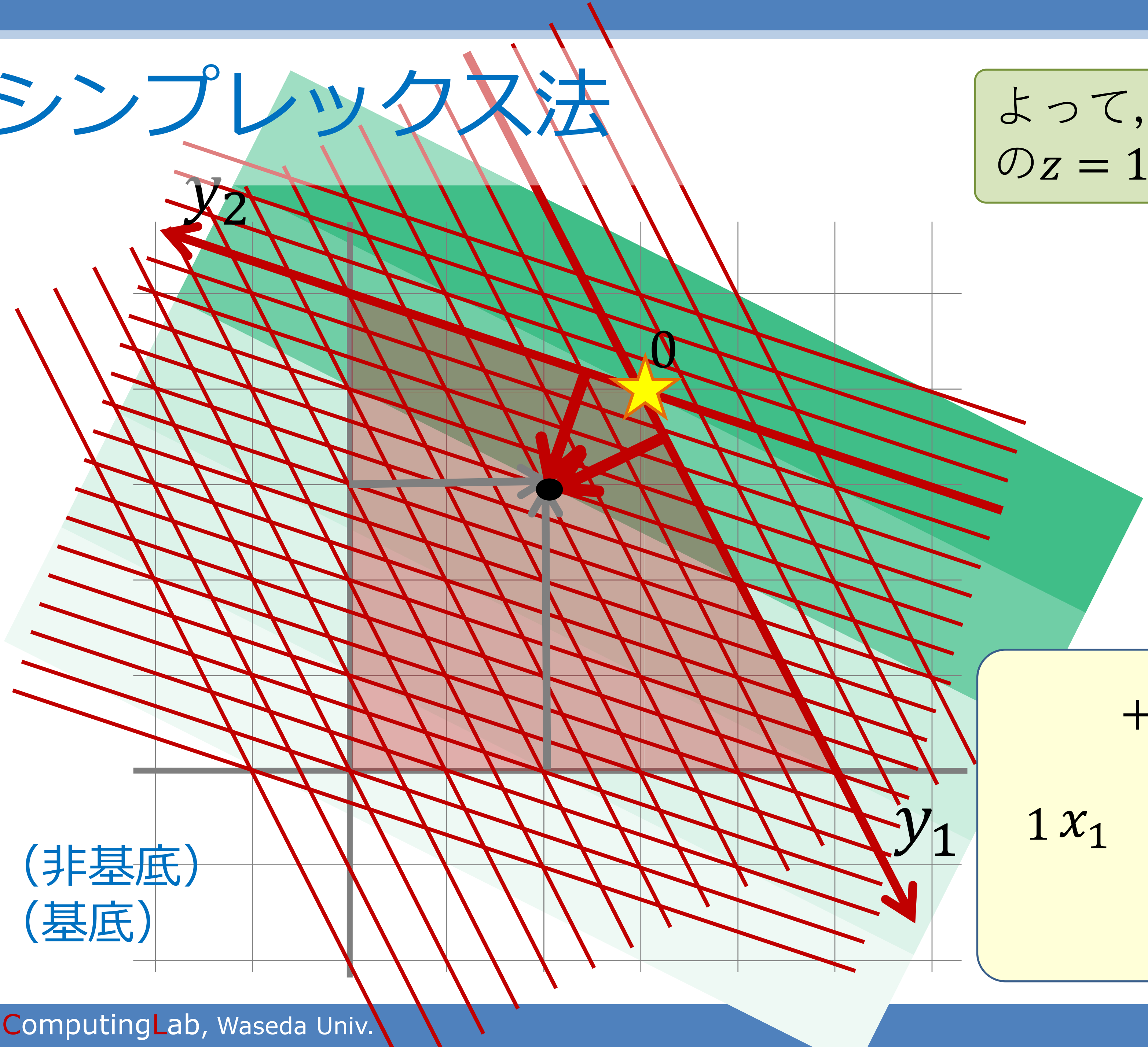
目的関数の，全ての非基底変数の係数が正であるから，これ以上改善できない。

$$
\begin{array}{lllllll}
 & +1\,x_2 & +\frac{2}{5}y_1 & -\frac{1}{5}y_2 & & = & 4 \\
1\,x_1 & & -\frac{1}{5}y_1 & +\frac{3}{5}y_2 & & = & 3 \\
 & & +\frac{3}{5}y_1 & +\frac{1}{5}y_2 & +z & = & 11
\end{array}
$$

赤　（非基底）
灰色（基底）

シンプレックス法

よって，$(y_1\ y_2) = (0\ 0)$ のときの$z = 11$は最適値である。



赤　（非基底）
灰色（基底）

$$+1\,x_2 = 4$$

$$1\,x_1 = 3$$

$$+z = 11$$

線形計画問題の例と具体的解法

$$x_1 + 3\,x_2 \leq 15$$

$$2\,x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2\,x_2 = z$$

問題：条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
のもとで，zを最大化

正準形

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$x_1 + 3x_2 + y_1 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + y_2 = 10$$

$$-x_1 - 2x_2 + z = 0$$

スラック変数の導入，不等式の等式化

問題：条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,$
のもとで，　zを最大化

通常は，係数だけの変形を行なう

1	3	1	0	15
2	1	0	1	10
−1	−2	0	0	0

【列探索】最下行（目的関数の係数）のうち，最小値（絶対値が最大）がある列を探す.

1	3	1	0	15
2	1	0	1	10
-1	-2	0	0	0

【列探索】最下行（目的関数の係数）のうち，最小値（絶対値が最大）がある列を探す． ➡ **第2列！**

1/3	1	1/3	0	5
2	1	0	1	10
−1	−2	0	0	0

【行探索】第2列にある各行の要素で，各行の右端の要素を割った値が最小となる行を探す．

1/3	1	1/3	0	5
2	1	0	1	10
−1	−2	0	0	0

【行探索】第2列にある各行の要素で，各行の右端の要素を割った値が最小となる行を探す．

1/3	1	1/3	0	5
2	1	0	1	10
− 1	− 2	0	0	0

【行探索】第2列にある各行の要素で，各行の右端の要素を割った値が最小となる行を探す． ➡ **第1行！**

1/3	1	1/3	0	5
5/3	0	1/3	1	5
1/3	0	2/3	0	10

【掃き出し演算】1行2列目の要素をピボットにして掃き出し演算を行う.

1/3	1	1/3	0	5
5/3	0	1/3	1	5
1/3	0	2/3	0	10

【列探索】最下行（目的関数の係数）のうち，最小値（絶対値が最大）がある列を探す.

1	3	1	0	15
1	0	1/5	3/5	3
1/3	0	2/3	0	10

【列探索】最下行（目的関数の係数）のうち，最小値（絶対値が最大）がある列を探す． ➡ **第1列！**

1	3	1	0	15
1	0	1/5	3/5	3
1/3	0	2/3	0	10

【行探索】第１列にある各行の要素で，各行の右端の要素を割った値が最小となる行を探す．

1	3	1	0	15
1	0	1/5	3/5	3
1/3	0	2/3	0	10

【行探索】第１列にある各行の要素で，各行の右端の要素を割った値が最小となる行を探す． ➡ **第２行！**

0	1	2/5	1/5	4
1	0	1/5	3/5	3
0	0	3/5	1/5	11

【掃き出し演算】２行１列目の要素をピボットにして掃き出し演算を行う.

0	1	2/5	1/5	4
1	0	1/5	3/5	3
0	0	3/5	1/5	11

【終了条件】最下行の最小値が**ゼロ以上**であれば終了する.

0	1	2/5	1/5	4
1	0	1/5	3/5	3
0	0	3/5	1/5	11

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1\,x_2 & 2/5 & 1/5 & & = 4 \\
1\,x_1 & 0 & 1/5 & 3/5 & & = 3 \\
0 & 0 & 3/5 & 1/5 & z & = 11
\end{array}
$$

例題

製品Ａ，Ｂがあって，これはともに材料α，βから作るものとする。

製品Ａを1単位作るためには，材料αを1単位，材料βを2単位必要とする。

製品Ｂを1単位作るためには，材料αを2単位，材料βを1単位必要とする。

製品Ａは，１単位あたり単価20円，製品Ｂは1単位あたり単価30円で売れるものとする。

今，αの在庫が16単位，βの在庫が14単位あるとき，売り上げを最大にするためには，Ａ，Ｂをそれぞれ何単位作るべきか。ただし，作った製品はすべて売れるものとして考えよ。

解答

x_1: 製品Aの生産量，x_2: 製品Bの生産量

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

製品Aをx_1作るための
α の必要量

製品Bをx_2作るための
α の必要量

α の在庫

解答

x_1: 製品Aの生産量，x_2: 製品Bの生産量

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14$$

製品Aをx_1作るための β の必要量

製品Bをx_2作るための β の必要量

β の在庫

解答

$$
\begin{aligned}
x_1 &+ 2x_2 &\leq 16 \\
2x_1 &+ x_2 &\leq 14 \\
20x_1 &+ 30x_2 &= z
\end{aligned}
$$

製品Aをx_1売ることによる売上

製品Bをx_2売ることによる売上

総売上

解答

x_1: 製品Aの生産量，x_2: 製品Bの生産量

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 &\le 16 \\ 2x_1 &+ x_2 &\le 14 \\ 20x_1 &+ 30x_2 &= z \end{aligned}$$

問題：条件$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$のもとで，zを最大化

解答

正準形

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + y_1 &= 16 \\
2x_1 + x_2 + y_2 &= 14 \\
-20x_1 - 30x_2 + z &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 14 \\ -20 & -30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 14 \\ -20 & -30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 8 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 6 \\ -5 & 0 & 15 & 0 & 240 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\ -5 & 0 & 15 & 0 & 240 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 6 \\ 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 40/3 & 10/3 & 260 \end{bmatrix} \end{array}$$

答：
x_1を4単位,
x_2を6単位つくる。
このとき，売上は260

nVals

nEqs $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 14 \\ -20 & -30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

cpivot

rpivot $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 14 \\ -20 & -30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
A=[1,2,1,0,16; 2,1,0,1,14; -20,-30,0,0,0];
nVals = 2;             // 変数の数
nEqs = 2;              // 制約（不等式）の数
nc = nVals+nEqs+1;     // 列の数
nr = nEqs+1;           // 行の数
```

```
for i= 1:(nc-2)
    [minV,cpivot] = min(A(nr,:));
    if minV >= 0 then break end
    B=A(:,nc)./ A(:,cpivot);
    [minV,rpivot] = min(B(1:nr-1));
    A(rpivot,:) = A(rpivot,:) / A(rpivot,cpivot);
    for j=1:nr
        if j == rpivot then continue end
        const = A(j,cpivot) / A(rpivot,cpivot);
        A(j,:) = A(j,:) - A(rpivot,:) * const;
    end
end
A(nr,nc)¥
```

線形計画法における双対問題

主問題　x_1：製品Aの生産量，x_2：製品Bの生産量

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 16 \\
2x_1 + x_2 &\le 14 \\
20x_1 + 30x_2 &= z
\end{aligned}
$$

問題：条件 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$ のもとで，z を最大化

双対問題

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 16 \\
2x_1 + x_2 &\le 14 \\
20x_1 + 30x_2 &= z
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\xi_1 x_1 &+ 2\,\xi_1 x_2 &\leq 16\xi_1 \\
2\,\xi_2 x_1 &+ \quad \xi_2 x_2 &\leq 14\,\xi_2 \\
\\
20 \quad x_1 &+ 30 \quad x_2 &= z
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{array}{ccccccc}
\xi_1 x_1 & + & 2\xi_1 x_2 & \leq & 16\xi_1 & & \\
+ & & + & & + & = & \zeta \\
2\xi_2 x_1 & + & \xi_2 x_2 & \leq & 14\xi_2 & & \\
\rotatebox{-90}{$\geq$} & & \rotatebox{-90}{$\geq$} & & \rotatebox{-90}{$\geq$} & & \\
20 x_1 & + & 30 x_2 & = & z & &
\end{array}
$$

双対問題

$$\xi_1 + 2\xi_2 \geq 20$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \geq 30$$

$$16\xi_1 + 14\xi_2 = \zeta$$

問題：条件 $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ のもとで, ζ を最小化

双対問題

主問題

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t.$$

$$w_{11}x_1 + w_{12}x_2 \leq a_1$$
$$w_{21}x_1 + w_{22}x_2 \leq a_2$$

双対問題

$$\min a_1\xi_1 + a_2\xi_2$$

$$s.t.$$

$$w_{11}\xi_1 + w_{21}\xi_2 \geq c_1$$
$$w_{12}\xi_1 + w_{22}\xi_2 \geq c_2$$

主問題では目的関数を最大化し，双対問題では最小化しています．**双方の最適解においては，目的関数の値は一致**します．

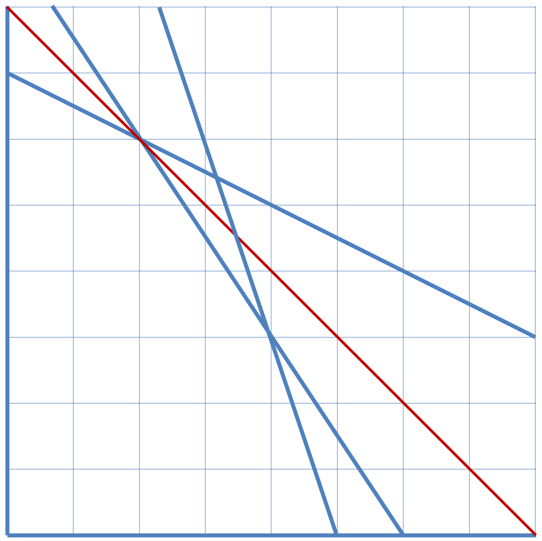
まとめ

- 線形計画問題では，必ず制約条件が作る多角形の頂点のいずれかにおいて，最適解を持つ。
- シンプレックス法は，制約条件が作る多角形の頂点を効率よく調べながら，線形計画問題の解を求める方法にあたる。

演習問題

1. 次の最適化の問題をとけ

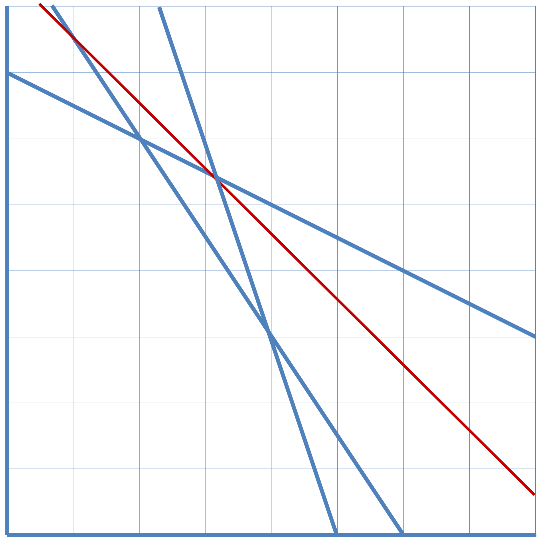
$$\max x + y$$
$$s.t.$$
$$x + 2y \leq 14$$
$$3x + 2y \leq 18$$
$$3x + y \leq 15$$



演習問題

2. 次の最適化の問題について設問に答えよ

$$\min x + y$$
$$s.t.$$
$$x + 2y \geq 14$$
$$3x + 2y \geq 18$$
$$3x + y \geq 15$$



1) 変数 a, b, c を使って，双対問題を導け

2) 1)で導いた問題をシンプレックス法を用いて解け