

אלגוריתמים 2017 – תרגיל 5

מועד הגשה: 30.11.17 עד ל-00:23 באתר הקורס

שימו לב: כאשר אתם מציעים אלגוריתם דינאמי לפתרון בעיה: (1) תארו את תתי-הבעיות, (2) הציגו את נוסחת הרקורסיה המקשרת בין תתי הבעיות והסבירו את בנייתה, (3) הגדירו טבלה, את סדר מילוייה ואת אופן חילוף הפתרון האופטימלי ממנה, (4) נתחו את זמן הריצה. אין צורך בהוכחת נכונות פורמלית של נוסחת הרקורסיה אלא אם ציינו אחרת.

- (תכנון דינאמי) הציגו אלגוריתם המכריע בזמן $O(nv)$ האם ניתן להחזיר עודף של $v \in \mathbb{N}$ שקלים כאשר לרשותנו עומדים מטבעות שערכיהם $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. ניתן להניח שמכל ערך יש מספר בלתי מוגבל של מטבעות.
- (תכנון דינאמי) שושלת בואנדיה ידועה באילן היוחסין הענף שלה. בראש המשפחה עומד חוסה בואנדיה ותחתיו כל ילדיו, כאשר תחת כל ילד מופיעים ילדיו שלו וכן הלאה. בתוכנית "100 שנים שכאלה" החליטו לעשות כתבה על המשפחה, ועבור כל דמות באילן היוחסין קבעו ציון: מספר ממשי המייצג את כמות הרייטינג שתוסיף הדמות לכתבה. מפתא קוצר במקום הוחלט הכלל שאב ובן לא יופיעו יחד בכתבה. כלומר, מכל זוג של אב-בן לכל היותר אחד יופיע בכתבה, אך לא שניהם.
א. בהינתן אילן היוחסין של שושלת בואנדיה, מצאו את הרייטינג המקסימלי שכתבה יכולה לקבל, כאשר רייטינג הכתבה הוא סכום הרייטינג של כל הדמויות המשתתפות בה.
(1) פרמלו את הבעיה. התייחסו לאילן היוחסין של המשפחה כאל עץ. הגדירו את הבעיה על העץ הזה. במילים אחרות, הסבירו מה צריך להיות הפלט של אלגוריתם שפותר את הבעיה, ומהם התנאים שהפלט הזה צריך לקיים.
(2) הציגו אלגוריתם דינאמי הפותר את הבעיה. בעת ניתוח זמן הריצה, הציגו את זמן הריצה שקיבלתם כפונקציה של מספר האנשים בשושלת.
ב. הציגו דרך למקסם את סכום הרייטינג הכולל של הדמויות המשתתפות בכתבה, תוך שאתם מביטחים שראש המשפחה, חוסה בואנדיה, יופיע בכתבה (למען שלום בית, כמובן).
- (תכנון דינאמי) לחברה להשכרת ציוד סקי יש m זוגות של מגלשי סקי. האורך של הזוג ה- i הוא s_i . n גולשים רוצים לשכור מגלשיים ($m \geq n$). גובהו של הגולש ה- i הוא h_i . במצב אידיאלי, כל גולש רוצה לקבל זוג מגלשיים שאורכם קרוב ככל שרק ניתן לגובהו שלו. הציגו אלגוריתם יעיל המתאים לכל גולש זוג מגלשיים, כך שסכום הערכים המוחלטים של ההפרש בין גובהו של כל גולש לאורך מגלשיו הוא הקטן ביותר האפשרי. על האלגוריתם שלכם להחזיר את הסכום האופטימלי.
- (תכנון דינאמי) הקלט לבעיית "חלוקת הסדרה הממושקלת" הינו סדרה של n משקלי פריטים:

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \quad w_i \in \mathbb{N}$$

ברצוננו לחלק את הסדרה ל- m תתי סדרות רציפות כך שעלות החלוקה תהיה מינימלית. נגדיר את משקלה של כל תת-סדרה בחלוקה להיות סך המשקולות של איבריה, ואת העלות של סך החלוקה להיות משקל החלק "הכבד" ביותר מבין תתי הסדרות המרכיבות אותה.

לדוגמה, עבור הסדרה הבאה:

$$W = (4, 8, 7, 10, 40, 15, 30, 2, 1, 20)$$

ישנן כמה חלוקות אפשריות עבור $m = 4$. למשל:

- $(4, 8, 7), (10, 40), (15, 30), (2, 1, 20)$ - שמשקלה 50.
- $(4, 8, 7, 10), (40), (15, 30), (2, 1, 20)$ - שמשקלה 45.
- $(4, 8, 7), (10, 40), (15, 30, 2, 1, 20)$ - שמשקלה 68 (שימו לב שמותר לבצע חלוקה שבה אחד או יותר מהחלקים ריקים. שאלה למחשבה: האם ייתכן שחלוקה שבה יש חלק ריק תהיה טובה יותר מכל חלוקה של אותה סדרה שבה אין חלק ריק?).

הציגו אלגוריתם לפתרון בעיית "חלוקת הסדרה הממושקלת".