אלגוריתמים - תרגול 5

19 בנובמבר 2017

1 אלגוריתמים דינאמיים

נראה שלוש דוגמאות נוספות אך לא נוכיח את נכונותן באופן פורמלי.

1.1 בעיית מסילת הרכבת

בבעיה זו אנו מרכיבים מסילה באורך L מתוך מלאי חלקים שברשותנו. לכל חלק נתון מחיר, אורך וסוגי חיבור מימין ושמאל אשר קובעים אילו חלקים יכולים להופיע לפניו ואחריו. האופטימיזציה נעשית על מחיר המסילה.

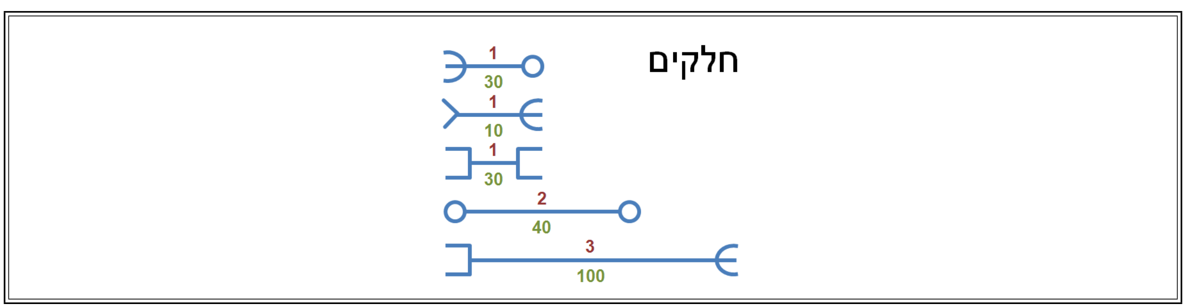
הנחה: המלאי מכיל רק סוגי חלקים מסוימים, אך ישנו מספר בלתי מוגבל של חלקים מכל סוג.

קלט:

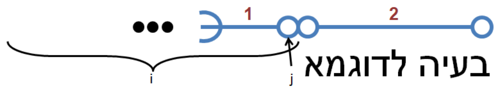
- $L \in \mathbb{N}$ אורך המסילה
- $\{1...K\}$ - סוגי החיבורים
- N סוגי חלקים, ולכל חלק $1 \le i \le N$:
  1. $d_i \in \mathbb{N}$ - אורך החלק
  2. $p_i \in \mathbb{N}$ - מחיר החלק
  3. שני סוגי חיבורים: סוג חיבור בתחילת החלק (משמאל) -$s_i \in \{1, ..., K\}$ וסוג החיבור בסופו (מימין) -$e_i \in \{1, ..., K\}$.

פלט: המחיר המינימלי עבור מסילה חוקית באורך L כאשר מסילה חוקית היא מסילה שבה חלק i מופיע מימין לחלק j אמ"מ $e_j = s_i$. נניח כי רוצים לבנות מסילה באורך $L = 3$ כאשר ישנם $K = 4$ סוגי חיבורים: $\{(\ni, \in), (\circ, \circ), (>, <), (\sqsupset, \sqsubset)\}$, ו-$N = 5$ סוגי חלקים:

$$\{(\ni, \circ, 1, 30), (>, \in, 1, 10), (\sqsupset, \sqsubset, 1, 30), (\circ, \circ, 2, 40), (\sqsupset, \in, 3, 100)\}$$



בעיה לדוגמא



הערה 1.1 גישה נפוצה לעיצוב אלגוריתם דינאמי היא להסתכל על הצעד האחרון בפתרון אופטימלי כלשהו, ולנסות להבין האם כשמורידים צעד זה נשארים עם פתרון אופטימלי עבור משימה כלשהי. אם כן, המשימות האלו מגדירות לנו את תתי הבעיות. הדרך בה מחליטים מה הוא הצעד האחרון על סמך אוסף פתרונות תתי הבעיות תגדיר עבורנו את נוסחת הרקורסיה.

הערה 1.2 בדוגמה הנ"ל, החלק האחרון בפתרון האופטימלי הוא חלק באורך 2 עם חיבור שמאלי $s_i = \circ$. כשנוריד את החלק הזה, נשים לב שאנחנו נשארים עם פתרון לבעיה של בניית מסילה באורך $L-2$ שנגמרת בחיבור $\circ$. אם ננסה להכליל את זה לצעד האחרון בפתרון אופטימלי כלשהו לבניית מסילה, נבין שכאשר מורידים חלק אחרון שהוא בעל אורך d_i וחיבור שמאלי s_i נשארים אם מסילה אופטמלית באורך $L-d_i$ שמסתימת בחיבור ימני $e_j = s_i$.

האלגוריתם

1. אוסף תתי הבעיות: מציאת המחיר המינימלי למסילה באורך l שנגמרת בחיבור ימני מסוג k לכל $0 \le l \le L$ ולכן $1 \le k \le K$.

2. נוסחת הרקורסיה: נסמן $f(l,k)$ - המחיר המינימלי למסילה באורך l שנגמרת בחיבור ימני מסוג k.

$$f(l,k) = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ \min\limits_{1\le i\le N:\, e_i = k \wedge l - d_i \ge 0} \{p_i + f(l-d_i, s_i)\} & l > 0 \end{cases}$$

הערה 1.3 נגדיר min על קבוצה ריקה להיות ∞ בשביל לכסות את המקרה בו אין חלק שמסתיים בסוג חיבור מסוים.

ה־min בנוסחת הרקורסיה בודק מה היא האפשרות הטובה ביותר עבור הצעד האחרון על ידי זה שעבור כל צעד אפשרי (כל חלק שמסתיים בחיבור k), הוא בודק מה הוא המחיר שיתקבל במידה ובנינו את המסילה עד לחלק זה בצורה אופטימלית.

3. נבנה טבלה בגודל $(L+1)\times K$ ונמלא אותה לפי נוסחת הרקורסיה. נתחיל בשורה התחתונה (ניתן למלא אותה לפי בסיס הרקורסיה) ונמשיך כלפי מעלה שורה אחרי שורה. מאחר ומשתמשים רק בשורות שמתחת, אין משמעות לסדר המילוי הפנימי בתוך השורה. בסוף נחזיר את המינימום על השורה העליונה, כלומר $\min\limits_{1\le k\le K}\{M[L,k]\}$.

הערה 1.4 אין צורך לסמן את המסילה עצמה שכן נתבקשנו להחזיר את המחיר ולא את מבנה המסילה.

זמן הריצה: יש לנו $(L+1)K$ תאים כשזמן מילוי תא הוא $O(N)$, לכן זמן הריצה הוא $O(NLK)$.
נריץ את האלגוריתם על הקלט של הדוגמה:

3	100	70	∞	90
2	∞	40	∞	60
1	10	30	∞	30
0	0	0	0	0
	$\exists$	$\circ$	$<$	$\sqsubset$

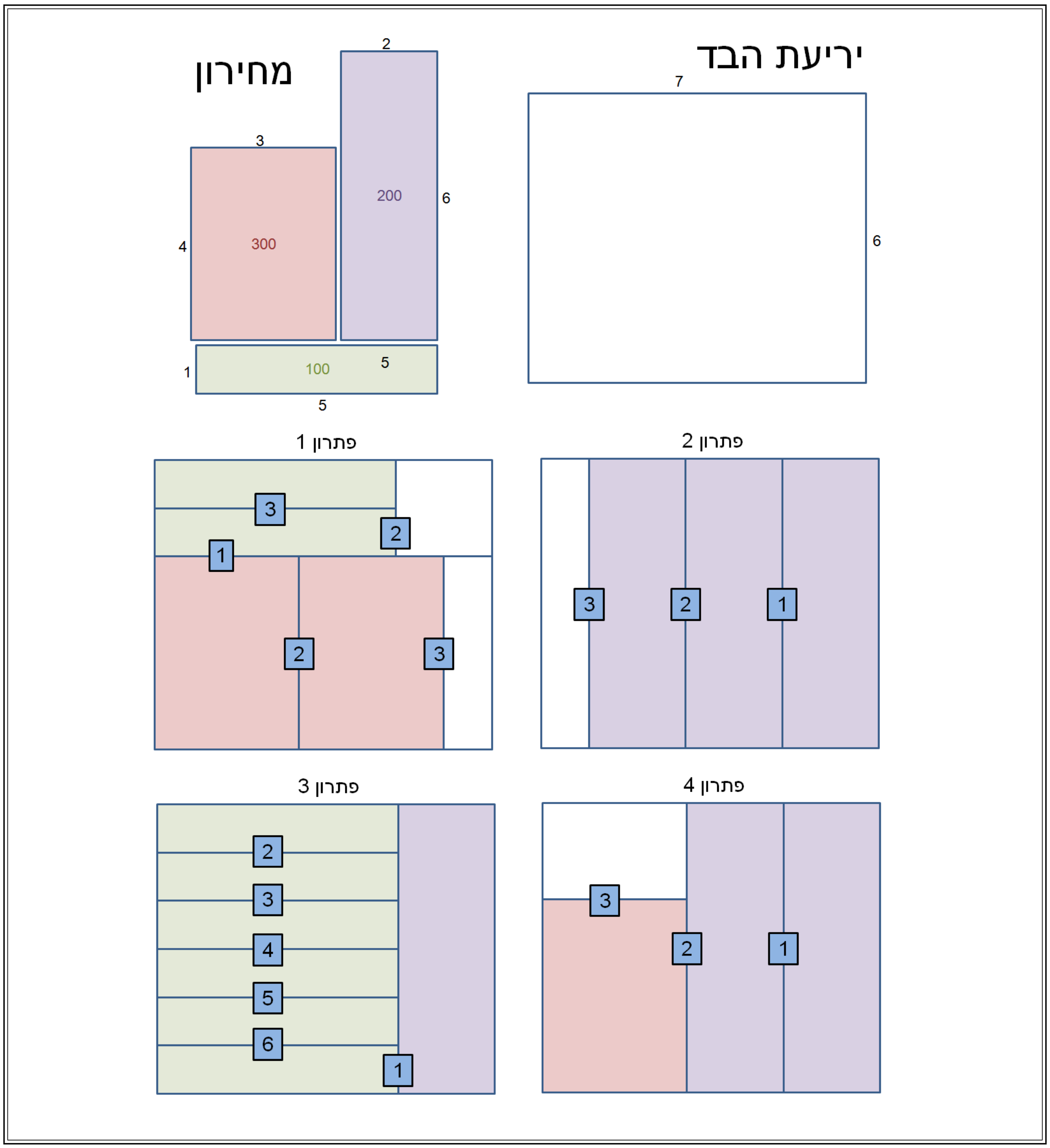
1.2 בעיית חיתוך הבד

קלט:

- חתיכת בד במימדים $n \times m$ כאשר $n, m \in \mathbb{N}$.
- K גדלים של חתיכות בד: $S = \{(n_1, m_1), ..., (n_k, m_k)\}$ ופונקציה $v : S \to \mathbb{R}^+$ שנותנת עבור כל אחד מ־K הגדלים את הערך של חתיכת בד בגודל זה.

פלט: אופן חיתוך הבד כך שסכום מחירי החתיכות המתקבלות בסוף מקסימלי תחת האילוצים הבאים:

1. בכל שלב מותר לבצע חיתוך מלא בלבד - אנכי או אופקי, באינדקסים טבעיים של חתיכות הבד המרכיבות את החתיכה הגדולה.
2. ערכה של חתיכת בד $S \notin (a, b)$ הוא 0.



הערה 1.5 הריבועים הכחולים מציינים את סדר החיתוכים. פתרון 1 ופתרון 3 ממקסמים את הרווח (800). פתרון 2 (600) ופתרון 4 (700) אינם אופטימליים.

האלגוריתם

בעוד שעבור בעית בניית המסילה מצאנו את החלוקה לתת בעיות כאשר בחנו את הורדת הצעד האחרון בפתרון, כאן נגיע אליהן מהוספת הצעד הראשון של פתרון אופטימלי. נשים לב שעבור חתיכת בד בגודל (n,m) הצעד הראשון שנבצע יכול להיות חיתוך אופקי באינדקס k, חיתוך אנכי באינדקס l או השארת את החתיכה כפי שהיא. לאחר ביצוע צעד זה נשאר עם מלבני בד בגודל $(n-k,m),(k,m)$ או $(n,m-l),(n,l)$ או (n,m) בהתאמה. בשביל שהפתרון יהיה אופטימלי צריך שהחיתוך של כל אחד מהמלבנים יהיה אופטימלי בפני עצמו.

סימון: נסמן ב־$v:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ את הפונקציה הבאה:

$$v\left(a,b\right)=\begin{cases}v(a,b) & (a,b)\in S\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

1. <u>אוסף תתי הבעיות:</u> מציאת הרווח המקסימלי מחתיכה בגודל $a\times b$ לכל $1\leq a\leq n$ ולכל $1\leq b\leq m$.

2. <u>נוסחת הרקורסיה:</u> נסמן $f\left(a,b\right)$ ־ הרווח המקסימלי מחתיכת בד בגודל $a\times b$:

$$f\left(a,b\right)=\max\left\{ \underbrace{v\left(a,b\right)}_{\text{no slicing}}\ ,\ \underbrace{\max_{0<l<b}\left\{ f\left(a,l\right)+f\left(a,b-l\right)\right\} }_{\text{best vertical slicing where}_{0<l<b}}\ ,\ \underbrace{\max_{0<a<b}\left\{ f\left(k,b\right)+f\left(a-k,b\right)\right\} }_{\text{best horizontal slicing where }_{0<k<a}}\right\}$$

3. <u>נבנה טבלה</u>, כרגיל. סדר מילוי השורות בטבלה יהיה מהפינה השמאלית התחתונה בכיוון ימינה ואז מעלה. כאשר המילוי של כל תא מסתמך על התאים שכבר מולאו בשורה שלו או בעמודה שלו.

הערה 1.6 נשים לב כי זמן מילוי הטבלה הוא $O\left(n\cdot m\cdot\left(n+m\right)\right)$ מאחר וישנם $n\cdot m$ תאים בטבלה וישנן $O\left(n+m+1\right)$ אופציות למילוי כל תא.

1.3 מציאת תת־סדרה עוקבת עם סכום מקסימלי

נתונים לנו סדרת מספרים $x_1,\ldots,x_n$, חלקם חיוביים וחלקים שליליים. אנו מעוניינים למצוא זוג אינדקסים $i\leq j$ כך שהסכום $\sum_{k=i}^{j}x_k$ יהיה מקסימלי מבין כל תתי הסדרות האפשריות.

ניקח למשל את הסדרה הבאה: $-1,5,3,-2,4,-4,-9,-1,3,2$. סכום מקסימלי יהיה בתת הסדרה $5,3,-2,4$ (האיבר השני עד החמישי).

נראה שני פתרונות תכנון דינאמי לבעיה:

פתרון 1: טבלה דו־מימדית

תתי הבעיות: מציאת הסכום לכל $1 \le i, j \le n$

נוסחת הרקורסיה: נסמן $f(i,j)$ סכום תת הסדרה בין i ל־j. נבחין כי עבור $j < i$ תת הסדרה לא מוגדרת ולכן הסכום יהיה $-\infty$.

$$f\left(i,j\right)=\begin{cases}-\infty & i>j\\ x_i & i=j\\ f(i,j-1)+x_j & i<j\end{cases}$$

נוסחת הרקורסיה מגדירה טבלה דו מימדית, ובכדי למצוא ערך מקסימלי נעבור שנית על כל הטבלה ונמצא תא עם ערך מקסימלי. זמן הריצה יהיה זמן מילוי הטבלה $O(n^2)$.

פתרון 2: טבלה חד־מימדית

באופן מעניין, לבעיה שלפנינו יש פתרון בזמן ריצה ליניארי בקלט. לצורך הבנתו נתבונן בהבחנה הבאה:

הבחנה: התו האחרון x_n יכול להופיע או לא להופיע בתת הסדרה. אם הוא מופיע, אז הסכום חייב להיות לפחות x_n, אחרת תת־הסדרה המכילה את x_n בלבד תהיה גדולה יותר בסתירה למקסימליות. לכן הסרתו תהיה אי שלילית, שכן הקבוצה הריקה סכומה 0.

האלגוריתם

1. תתי הבעיות: לכל $1 \le i \le n$, מציאת סכום מקסימלי של תת סדרה הנגמרת באיבר ה־i.
2. נוסחת הרקורסיה: נסמן ב $g(i)$ את הסכום המקסימלי של תת סדרה הנגמרת באיבר ה־i.

$$f\left(i\right)=\begin{cases}x_1 & i=1\\ \max\{x_i, f(i-1)+x_i\} & i>1\end{cases}$$

3. הטבלה: נבנה טבלה חד מימדית בגודל $n \times 1$ ונמלא אותה מהאיבר הקטן ביותר לגדול. בכל שלב במילוי הטבלה נשמור את האינדקס של האיבר הראשון בתת הסדרה שממנה ניתן להגיע אל סכום מקסימלי. שחזור הפתרון המקסימלי ייעשה על ידי מעבר נוסף על איברי הטבלה. מיקומו של האיבר המקסימלי בטבלה יהיה ערך j והאינדקס המקושר אליו יהיה הערך i. סכום המערך באינדקסים i עד j הוא מקסימלי.
4. זמן ריצה: גודל הטבלה הוא $n \times 1$ ובכל תא אנו מבצעים $O(1)$ פעולות, לכן זמן הריצה הכולל יהיה $O(n)$.

נריץ את האלגוריתם שבנינו על הדוגמה:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-1	5	3	-2	4	-4	-9	-1	3	2
$f(i)$	-1	5	8	6	10	6	-3	-1	3	5
$index$	1	2	2	2	2	2	2	8	9	9

והסכום המקסימלי מתקבל בתא 5, באינדקסים $(2:5)$.