Prove $P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - 2^{1-n} - n2^{-n}$

<u>BC</u>

$P(1): \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ ✓

$P(1): 2 - 2^{1-1} - 1(2^{-1}) = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

<u>I.H.</u>

$P(K): \sum_{j=1}^{K} \frac{j}{2^j} = 2 - 2^{1-K} - K2^{-K}$

<u>I.S</u>

$P(K+1): \sum_{j=1}^{K+1} \frac{j}{2^j} = 2 - 2^{(1-(K+1))} - (K+1)(2^{-(K+1)})$

$2 - 2^{1-K} - K2^{-K} + \frac{K+1}{2^{K+1}} = 2 - 2^{-K} - K2^{-K-1} - 2^{-K-1}$

$2 - 2^{1-K} - K2^{-K} + K2^{-K-1} + 2^{-K-1} = 2 - 2^{-K} - K2^{-K-1} - 2^{-K-1}$

$2 - 2(2^{-K}) - K(2^{-K}) + K2^{-K-1} + 2^{-K-1} =$

$2 - (2+K)2^{-K} + K2^{-K-1} + 2^{-K-1} = 2 - 2^{-K} - (K+1)2^{-K-1}$

$2 - (4+2K)(2^{-K-1}) + K2^{-K-1} + 2^{-K-1} = 2 - 2^{-K} - (K+1)2^{-K-1}$

$= 2 + (-2-K-1)2^{-K-1}$

$2 + (-4-2K+K+1)2^{-K-1} = 2 + (-K-3)2^{-K-1}$

$\boxed{2 + (-K-3)2^{-K-1} = 2 + (-K-3)2^{-K-1}}$

■