Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Procesiranje slik je zelo pomembno in hitro rastoča veja računalništva z obširno uporabo na različnih področjih, recimo avtomatizirano branje dokumentov v poslovnem svetu, avtomatski nadzor kakovosti v proizvodnji, medicinska diagnostika na podlagi radiologije ipd. To delo bo osredotočeno na analizo slik. Za dano sliko hočemo pridobiti njen opis na podlagi objektov in regij na njej in njihovih medsebojnih relacij. Na primer dokument je sestavljen iz znakov na nekem ozadju, krvni razmaz je sestavljen iz krvnih celic na nekem ozadju, rentgenska slika je sestavljena iz različnih organov itd. Prva faza procesiranja je torej ločevanje slike na različne regije – na objekte v ospredju in ozadje. Ta proces imenujemo **segmentacija**.
Segmentacija je postopek dodeljevanja vsakega slikovnega elementa (piksla) v enega ali več razredov. Eden izmed preprostih pristopov je binarna segmentacija, kjer sliko razdelimo na dve regiji, ozadje in ospredje, na podlagi izbranega praga. Če je svetlost piksla večja od tega praga, ga dodelimo v ospredje, sicer pa v ozadje, ali obratno. Obstaja veliko več kompleksnejših metod segmentacije, ki uporabljajo več podatkov kot samo svetlost pikslov. Ko sliko enkrat segmentiramo v manjše regije, lahko začnemo analizirati lastnosti teh regij in njihove medsebojne relacije. Nekatere lastnosti so odvisne od svetlosti pikslov, druge samo od pozicije pikslov. Zelo osnovne so topološke lastnosti regij, ki vključujejo koncepte, kot so povezanost in sose-

dnost, in so neodvisne od velikosti in oblike regij.
Topološke lastnosti so uporabne zaradi različnih razlogov. Po tem, ko smo izbrali neko regijo, na primer ospredje dokumenta, jo ponavadi hočemo še segmentirati v manjše povezane regije. Te predstavljajo posamezne objekte, kot so znaki na dokumentu. Lahko hočemo skrčiti regijo na okostje, ki predstavlja skrčeno obliko regije in ohranja povezanost.

TODO: Še kak primer za uporabo topoloških lastnosti

V večini literature se sliko predstavi kot neke vrste graf. Ponavadi je tak, da so vozlišča piksli, vozlišči pa sta povezani, če sta sosednji (bodisi 4-povezanost bodisi 8-povezanost). Opazovanje topoloških lastnosti slik torej porodi potrebo po raziskovanju topologij na grafih.

1.1 Definicije

Vsi omenjeni grafi bodo neusmerjeni, brez izoliranih vozlišč in preprosti (brez zank in večkratnih povezav med vozlišči). **Graf** $G = (V, E)$ vsebuje množico vozlišč V in množico povezav $E \subseteq \binom{V}{2}$. Povezavo $\{x, y\} \in E,\ x, y \in V$ lahko označimo tudi z xy.
Množico sosednjih vozlišč vozlišča x označujemo z

$$N_x = \{y \in V \mid xy \in E\}.$$

Število sosednjih vozlišč vozlišča x je

$$deg(x) = |N_x|.$$

Če je $deg(x)$ končno za vsak $x \in V$, je graf G **lokalno končen**.
G je **povezan graf**, če za vsak par vozlišč $x, y \in V$ obstaja končno zaporedje različnih vozlišč $v_1,\ \ldots,\ v_n \in V$, da velja

$$xv_1,\ v_1v_2,\ \ldots,\ v_ny \in E.$$

Graf G imenujemo **krog**, če je V končna množica n točk

$$V = \{v_1,\ \ldots,\ v_n\}$$

in

$$E = \{v_1v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}v_n,\ v_nv_1\}.$$

Za vsako množico vozlišč $V' \subseteq V$ definiramo **induciran podgraf**

$$G[V'] = (V', E'),$$

kjer je

$$E' = \{xy \in E \mid x, y \in V'\}.$$

Induciran podgraf potemtakem ohranja vse povezave iz G, ki povezujejo vozlišča iz V'. Če je G' induciran podgraf G, ga označimo z relacijo $G' \sqsubseteq G$. Množico vozlišč grafa G označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Unija grafov $G_1 \cup G_2$ je definirana kot graf, ki ima vozlišča $V(G_1) \cup V(G_2)$ in povezave $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Topologija (ali topološka struktura) na množici X je družina τ podmnožic X, ki zadošča naslednjim zahtevam:

(1) prazna množica in X sta elementa τ;

(2) unija poljubne poddružine τ je element τ;

(3) presek poljubne končne poddružine τ je element τ.

Elemente τ imenujemo **odprte množice** v X. **Topološki prostor** $(X,\ \tau)$ je množica X, opremljena s topologijo τ.

Okolica točke $x \in X$ je vsaka podmnožica $V \subseteq X$, ki vsebuje odprto množico U, ki vsebuje x.

Topološki prostor je **povezan**, če se množice X ne da izraziti kot unije dveh disjunktnih nepraznih odprtih množic.

Topologija Aleksandrova je topologija, v kateri je vsak poljuben presek

odprtih množic odprt (v navadni topologiji to velja samo za končne preseke). Iz tega sledi, da ima vsaka točka v topologiji Aleksandrova najmanjšo okolico, ki je odprta.
Topologija nad množico X je $\mathbf{T_0}$, če za vsaki različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica U, ki vsebuje eno in druge ne.

TODO: Definicija baze topologije

Poglavje 2

Končne topologije, delne urejenosti in celični kompleksi

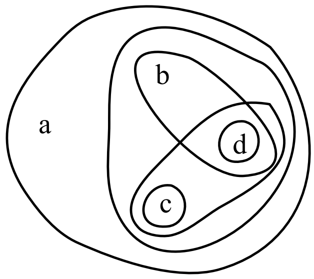
2.1 Povezava končnih topologij in delnih urejenosti

Končna topologija je topologija na končni množici. Šibko urejena množica je množica s tranzitivno in refleksivno relacijo. Končne topologije so isti objekti kot končne šibko urejene množice iz drugega zornega kota. Za končno množico X za vsak $x \in X$ definiramo minimalno odprto množico U_x kot presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo x. Minimalne odprte množice vseh točk tvorijo bazo prostora, saj je vsaka odprta množica $U \subseteq X$ unija minimalnih odprtih množic $U_x,\ x \in U$. Taki bazi pravimo minimalna baza. Vsaka baza prostora vsebuje minimalno bazo, ker če izrazimo U_x kot unijo odprtih množic iz baze, mora ena od teh množic vsebovati x. Tedaj ta množica sovpada z U_x.

Naj bo X topološki prostor z bazo $\{U_x\}_{x \in X}$. Na množici X definiramo naslednjo relacijo:

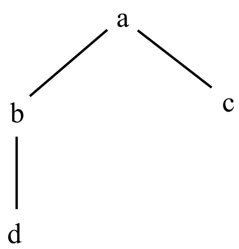
$$x \in U_y \quad \Rightarrow \quad x \leq y$$

Podana relacija je šibka urejenost nad X. Iz šibke urejenosti definiramo topologijo nad X z bazo $\{y \in X \mid x \leq y\}_{x \in X}$. Sedaj lahko pokažemo, da je $y \leq x$, če in samo če $y \in U_x$. Če je $y \leq x$, potem je y v vsaki osnovni množici, ki vsebuje x. Iz tega sledi $y \in U_x$. Tudi obratno, če $y \in U_x$, potem je $y \in \{z \in X \mid z \leq x\}$, zato lahko sklepamo, da je $y \leq x$.
Pogoj T_0 sovpada z antisimetričnostjo na končnih šibko urejenih množicah. To pomeni, da za elementa, za katera velja $a \leq b$ in $b \leq a$, velja $y \in U_x$ in $x \in U_y$. Ker v T_0 prostorih za vsak par točk obstaja odprta množica, ki vsebuje eno točko in ne druge, sledi, da je $x = y$. Končni T_0 prostori so torej ekvivalentni končni delno urejeni množici.



Slika 2.1: Odprte množice na končni množici X iz primera 2.1.1

Primer 2.1.1. Naj bo (X, τ) topološki prostor, pri čemer je $X = \{a, b, c, d\}$ končna množica, odprte množice pa so $\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}$ in $\{c, d\}$. Prostor je T_0, torej je delno urejen. Slika 2.1 prikazuje odprte množice na X z zaprtimi krivuljami. Ker je množica delno urejena, lahko prostor lepše predstavimo s Hassejevim diagramom (Slika 2.2). To lahko naredimo za vse končne T_0 prostore. Hassejev diagram je graf, kjer so vozlišča elementi množice, povezave pa urejeni pari (x, y), kjer je $x < y$ in ne obstaja $z \in X$, da bi veljalo $x < z < y$. V diagramu bomo namesto puščice iz x v y narisali y nad x.



Slika 2.2: Hassejev diagram končne delno urejene množice iz primera 2.1.1

Na delni urejenosti definiramo nekaj izrazov. Element x je **maksimalen**, če $y \geq x$ implicira $y = x$, in je **maksimum** delne urejenosti, če velja $y \leq x$ za vsak $y \in X$. Delna urejenost ima **maksimum**, če in samo če obstaja natanko en maksimalen element. **Minimalen** element in **minimum** sta definirana dualno.

Veriga v delni urejenosti je podmnožica elementov, ki so paroma primerljivi. **Antiveriga** je podmnožica elementov, ki so paroma neprimerljivi.

2.2 Simplicialni kompleksi

Simplicialni kompleks K je sestavljen iz množice V_K in množice S_K, ki je sestavljena iz končnih, nepraznih podmnožic množice V_K. V_K se imenuje množica točk, S_K pa množica simpleksov. Veljati mora, da je vsaka podmnožica V_K moči 1 simpleks in, da je vsaka neprazna podmnožica simpleksov simpleks. Malce lahko izrabimo notacijo in pišemo $v \in K$ namesto $v \in V_K$ in $\sigma \in K$ namesto $\sigma \in S_K$. V večini primerov bomo simplicialni kompleks identificirali samo kot množico njegovih simpleksov.

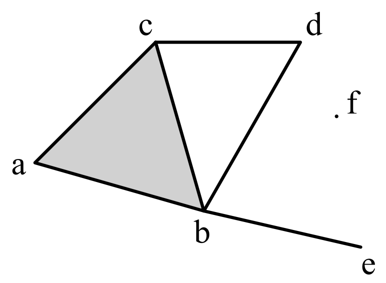
Če je simpleks σ podmnožica simpleksa τ, pravimo, da je σ njegovo **lice**. Simpleks, ki ima $n+1$ točk, imenujemo n**-simpleks** in pravimo, da je **dimenzije** n. Vse točke K predstavljajo 0-simplekse. Dimenzija K je supremum dimenzij vseh simpleksov v K. Če je K prazen, ima dimenzijo -1, če pa ima K

simplekse poljubno velike dimenzije, je dimenzije neskončno.
Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ simpleks dimenzije n. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je množica konveksnih kombinacij točk v σ.

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica vseh takih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in K} \lambda_v v$, $\lambda_v \geq 0$, tako da vsi v, ki imajo neničelno λ_v, tvorijo simpleks v K. $|K|$ je torej unija vseh zaprtih simpleksov K.

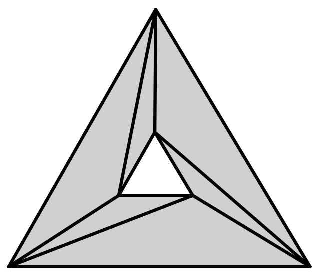
Primer 2.2.1. Naj bo K simplicialni kompleks, ki vsebuje simplekse $\{a, b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e\}$, $\{f\}$ in vse njihove neprazne podmnožice. Geometrijska realizacija $|K|$ je prikazana na sliki 2.3.



Slika 2.3: Geometrijska realizacija simplicialnega kompleksa K

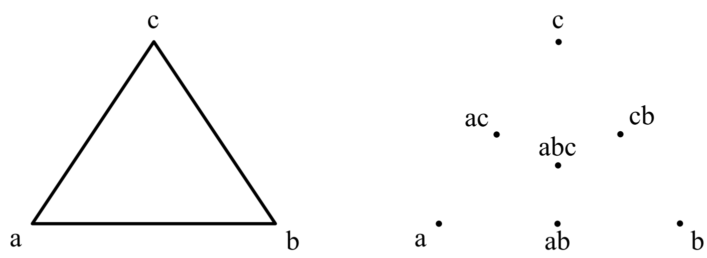
Topološki prostor X je **topološki polieder**, če obstaja simplicialni kompleks K, da je X homeomorfen telesu $|K|$. Simplicialni kompleks K imenujemo **triangulacija** poliedra X.

Primer 2.2.2. Pokažemo lahko, da je kolobar topološki polieder tako, da skiciramo njegovo triangulacijo.

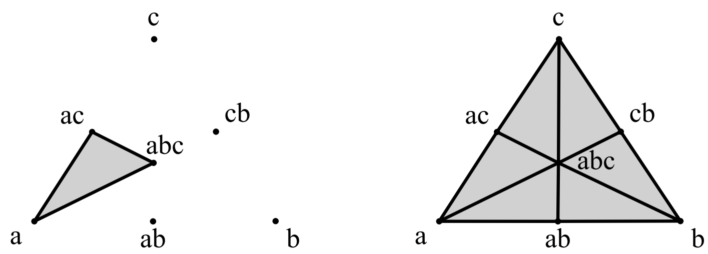


Slika 2.4: Triangulacija kolobarja

Za dan simplicialni kompleks K konstruiramo njegovo **baricentrično subdivizijo** K'. Točke K' so simpleksi K in simpleksi K' so verige simpleksov K. Veriga simpleksov je taka množica $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $\sigma_i \in K$, da velja $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_n$.



Slika 2.5: Prvi korak baricentrične subdivizije



Slika 2.6: Simpleks $\{a, ac, abc\}$ in rezultat baricentrične subdivizije

Primer 2.2.3. Naj bo K 2-simpleks $\{a, b, c\}$. Če hočemo konstruirati baricentrično subdivizijo K, moramo najprej dodati točke za vsak simpleks v K (Slika 2.5). Nato dorišemo še najdaljše verige, saj so v tem primeru vsi ostali simpleksi v K' podmnožice teh. Primer take verige je $\{a, ac, abc\}$, saj velja $a \subsetneq ac \subsetneq abc$ (Slika 2.6).

2.3 Povezava delnih urejenosti in simplicialnih kompleksov

Definicija 2.3.1. Naj bo X končni T_0 topološki prostor. Simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$, asociiran z X, je simplicialni kompleks, katerega množica simpleksov so neprazne verige X.

Definicija 2.3.2. Naj bo K simplicialni kompleks. Asociirana delna urejenost $\mathcal{X}(K)$ je množica simpleksov K urejeni z inkluzijo. Če sta $\sigma, \tau \in K$, je $\sigma \leq \tau$, če je $\sigma \subseteq \tau$.

Poglavje 3

Digitalni prostori

Glavni cilj digitalne topologije in digitalne geometrije je premostiti vrzel med geometrijskimi in topološkimi lastnosti komputacijskih objektov in njihovimi teoretičnimi reprezentacijami v zveznem prostoru $\mathbb{R}^n$. Če hočemo uporabiti topološke pojme v digitalni domeni, moramo najprej definirati prostor, ki je analogen zveznemu prostoru $\mathbb{R}^n$, $(n > 1)$.

Navadno definiramo digitalne prostore na dva načina. Lahko se odločimo, katero vrsto povezanosti ima prostor. Naj bo $x = (x_1, \ \dots, \ x_n)$ točka v $\mathbb{Z}^n, \ n > 1$.

$(3^n - 1)$-sosed točke x je vsaka točka $y = (y_1, \ \dots, \ y_n) \in \mathbb{Z}^n$, za katero velja

$$\max |x_i - y_i| = 1$$

Tak prostor bomo označili kot (d_{inf}, n)-prostor Na primer $(d_{\text{inf}}, 2)$-prostor je 8-povezana mreža.

$2n$-sosed točke x je vsaka točka $y = (y_1, \ \dots, \ y_n) \in \mathbb{Z}^n, \ n > 1$, za katero velja

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1$$

Tak prostor bomo označili kot (d_1, n)-prostor Na primer $(d_1, 2)$-prostor je 4-povezana mreža.

V oddelku 3.4 bomo pokazali, da 8-povezana mreža in s tem tudi (d_{inf}, n)-prostor nima kompatibilne topologije.

3.1 Celični kompleksi

TODO: Laična razlaga celičnih kompleksov in njihove uporabe

3.2 Topologije na grafih

Definicija 3.2.1. Za dan topološki prostor (X, τ) in dano podmnožico $S \subseteq X$, definiramo topologijo, zožano na S

$$\tau|_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$$

Definicija 3.2.2. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naj bo O topologija na V. O imenujemo kompatibilna topologija na G, če velja:

(1) Za vsak povezan $G' \sqsubseteq G$ je $V(G')$ povezan v O.

(2) Za vsako podmnožico $V' \subseteq V$, ki je povezana v O, je $G[V']$ povezan graf.

Izrek 3.2.1. *Naj bo G graf s kompatibilno topologijo O. Za vsak induciran podgraf $H \sqsubseteq G$ je topologija, omejena na $V(H)$, kompatibilna topologija na grafu H. Tako topologijo označimo z $O|_{V(H)}$.*

Dokaz. Za vsak $H' \sqsubseteq H$ imamo $O|_{V(H')} = O|_{V(H)}|_{V(H')}$. Množica $V(H)$ je podmnožica $V(G)$, zato je $O|_{V(H)}$ podmnožica O. Torej vsaka podmnožica $V(H)$ je povezana v $O|_{V(H)}$, če in samo če je povezana v O. $H' \sqsubseteq G$ je povezan, če in samo če je $V(H') \subseteq V(H)$ povezan v O.

$\square$

3.3 Topologija dvodelnih grafov

Naj bo G^b povezan dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča. V je torej unija dveh nepraznih disjunktnih množic V_A in V_B. Vsaka povezava v E povezuje samo vozlišča iz V_A z vozlišči iz V_B.
Definiramo dve kompatibilni topologiji na množici vozlišč V tako, da opišemo

topološko okolico vsake točke $x \in V$. To je najmanjša odprta množica, ki vsebuje x: $U_x \in O$. Ker U_x ni mogoče razdeliti na odprte množice, je U_x in vsaka podmnožica U_x, ki vsebuje x povezana. Poleg tega, je vsaka $U \in O, U \neq \emptyset$ unija določenih U_x.
Naj bo $N_x = \{y \mid yx \in E\}$ množica sosednjih točk točke x.

$$O_1: \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B$$
$$O_2: \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B$$

Kompatibilni topologiji O_1 in O_2 nista ekvivalentni, razen na grafih, ki nimajo povezav; lahko nista niti homeomorfni.

Izrek 3.3.1. *O_1 in O_2 sta kompatibilni topologiji na G^b.*

Dokaz. Naj bo O enak O_1 ali O_2.

(1) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ povezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ povezana v O, torej, da je ne moremo razdeliti na dve disjunktni odprti podmnožici. Za vsaki dve sosednji točki x in y je $U_x \cap U_y$ zmeraj neprazen, saj $y \in U_x$ ali $x \in U_y$. $V(G')$ razdelimo na dve neprazni disjunktni množici V_1 in V_2, $V(G') = V_1 \cup V_2$. Naj bo $A \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_1, in $B \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_2. Tedaj je $A \cap B \neq \emptyset$, torej je $V(G')$ povezan v O.

(2) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ nepovezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ nepovezana v O. Ker je G' nepovezan, lahko G' razdelimo na unijo dveh ne nujno povezanih induciranih podgrafov C in D tako, da nobeno vozlišče iz C ni povezano z nobenim vozliščem iz D. Torej

$$\bigcup_{x \in V(C)} U_x \cap V(D) = \emptyset = V(C) \cap \bigcup_{x \in V(D)} U_x$$

$V(C)$ in $V(D)$ lahko razpišemo:

$$V(C) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(C)} U_x \right)$$

$$V(D) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(D)} U_x \right)$$

Vidimo, da sta $V(C)$ in $V(D)$ disjunktni odprti množici v $O|_{V(G')}$, torej je $V(G')$ nepovezana v O.

□

Naj bo O poljubna kompatibilna topologija na G^b. Naslednje leme držijo za $\forall x \in V$

Lema 3.3.1. $\{x\} \subseteq U_x \subseteq \{x\} \cup N_x$

Dokaz. $\{x\} \subseteq U_x$ sledi iz definicije. Recimo, da obstaja x', da $U_{x'} \nsubseteq \{x'\} \cup N_{x'}$ ne drži, potem obstaja $y \in U_{x'}$, $y \notin (\{x'\} \cup N_{x'})$. Ker je $\{x', y\} \subseteq U_x$, je ta množica povezana v O. Ker je $G^b[\{x', y\}]$ nepovezan graf, je to v protislovju z definicijo kompatibilne topologije na G^b. □

Lema 3.3.2. $U_x = \{x\}$ *ali* $U_x = \{x\} \cup N_x$

Dokaz. Recimo, da lema ne drži. Potem obstaja x', da $U_{x'} \neq \{x'\}$ in $U_{x'} \subsetneq \{x'\} \cup N_{x'}$. Torej obstaja $y \in N_{x'}$, $y \notin U_{x'}$. Ker je $y \in N_{x'}$, sta x in y povezana. Ker sta povezana in je G^b dvodelen graf, velja $N_{x'} \cup N_y = \emptyset$. Ker sta $U_{x'}$ in U_y podmnožici N_x' in N_y, je bodisi $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, bodisi $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, sledi protislovja, ker $\{x', y\}$ je povezana množica v O. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$, potem je $U_{x'} = \{x'\}$, kar je v protislovju z predpostavko $U_{x'} \neq \{x'\}$. □

Lema 3.3.3. *Za vsak* $y \in N_x$ *velja* $U_x = \{x\} \iff U_y = \{y\} \cup N_y$

Dokaz. Če je $U_x = \{x\}, U_y = \{y\}$ za katerikoli y, sledi protislovje, saj je $\{x, y\}$ nepovezana v O, y pa je sosed x. Če velja $U_x = \{x\} \cup N_x, U_y = \{y\} \cup N_y$ za katerikoli y, potem je $U_x \cap U_y = \{x, y\} \in O$ (ker je $y \in N_x \Rightarrow x \in N_y$). Ker je U_x najmanjša odprta množica, ki vsebuje x, je $U_x = \{x, y\}$. Prav tako je tudi $U_y = \{x, y\}$. Zaradi leme 3.3.2, sledi, da je $N_x = \{y\}$ in $N_y = \{x\}$. Ker je graf povezan in je edini sosed x y, sta ti dve točki cel graf $V(G^b) = \{x, y\}$, kar je protislovje s predpostavko, da ima G^b vsaj tri vozlišča. □

Iz zadnje leme sledi:

Izrek 3.3.2. *Vsak povezan, dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča, ima natanko dve kompatibilni topologiji. To sta O_1 in O_2:*

$$O_1 : \quad U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_B$$
$$O_2 : \quad U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_B$$

3.4 Obstoj kompatibilne topologije na grafu

Posledica 3.4.1. *Krog C, ki ima sodo število vozlišč $n > 3$, nima kompatibilne topologije.*

Dokaz. Za vsak $x \in V(C), G^b_x := C[\{x\} \cup N_x]$ je dvodelen graf, ki ima vsaj tri vozlišča. Recimo, da ima C kompatibilno topologijo O na vsakem G^b_x je inducirana kompatibilna topologija O_1 ali O_2. Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja:

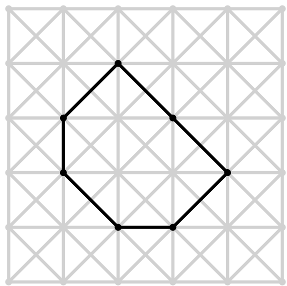
$$O|_{V(G^b_x)} \cong O_1 \iff O|_{V(G^b_y)} \cong O_2$$

sicer, bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana v O in to je v protislovju z predpostavko, da sta x in y povezana. Če si izberemo neko začetno točko $X_0 \in V(C)$, lahko zaporedno izbiramo sosednje točke in opazujemo inducirane kompatibilne topologije.

$$O|_{V(G^b_{X_0})} \cong O_1$$
$$O|_{V(G^b_{X_1})} \cong O_2$$
$$O|_{V(G^b_{X_3})} \cong O_1$$

Ker ima krog sodo število vozlišč, se na x_0 inducira kompatibilna topologija O_2. Torej na podgraf $G^b_{x_0}$ sta inducirani kompatibilni topologiji O_1 in O_2, kar je v protislovju. $\square$

Iz posledice 3.4.1 in iz Izreka 3.2.1 sledi:



Slika 3.1: krog s lihim številom vozlišč kot induciran podgraf 8-povezane mreže

Izrek 3.4.1. *Vsak graf G, ki vsebuje krog C s lihim številom vozlišč, kot induciran podgraf, nima kompatibilne topologije.*

Zaradi izreka lahko sklepamo, da 8-povezana mreža nima kompatibilne topologije, saj vsebuje krog s lihim številom vozlišč kot induciran podgraf (Slika 3.1).

Literatura

[1] Jonathan A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Springer, 8 2011.

[2] Alain Bretto. *Digital Topologies on Graphs*, pages 65–82. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN 978-3-540-68020-8. doi: 10.1007/978-3-540-68020-8_3. URL https://doi.org/10.1007/978-3-540-68020-8_3.

[3] Daniel Nogly and Markus Schladt. Digital Topology on graphs. *Computer vision and image understanding*, Vol. 63(No. 2):394–396, Marec 1996. doi: 10.1006/cviu.1996.0029. URL https://doi.org/10.1006/cviu.1996.0029.

[4] Azriel Rosenfeld. Digital Topology. *The American mathematical monthly*, 86(8):621, 10 1979. doi: 10.2307/2321290. URL https://doi.org/10.2307/2321290.

[5] Aleš Vavpetič. REŠENE NALOGE IZ ALGEBRAIČNE TOPOLOGIJE. Dosegljivo: https://users.fmf.uni-lj.si/vavpetic/AT/AT.pdf, 2011. [Dostopano: 21. 7. 2024].