

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Jakob Drusany

Digitalna topologija na grafih

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: prof. dr. Petar Pavešić

Ljubljana, 2024

COPYRIGHT. Rezultati diplomske naloge so intelektualna lastnina avtorja in matične fakultete Univerze v Ljubljani. Za objavo in koriščenje rezultatov diplomske naloge je potrebno pisno privoljenje avtorja, fakultete ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Kandidat: Jakob Drusany

Naslov: Digitalna topologija na grafih

Vrsta naloge: Diplomaska naloga na interdisciplinarnem univerzitetnem programu prve stopnje Računalništvo in matematika

Mentor: prof. dr. Petar Pavešić

Opis:

V delu obravnavajte vprašanje, ali je mogoče grafe, ki opisujejo digitalizirane slike, opremiti s kompatibilno topologijo v smislu, da se za poljuben del slike povezanost inducirane podgrafa ujema s topološko povezanostjo. Za osnovo vzemite članek “*D. Nogly, M. Schladt. Digital Topology on graphs. Computer vision and image understanding, Vol. 63(No. 2): 394 — 396*”.

Title: Digital topology on graphs

Description:

In your thesis consider the question of whether it is possible to equip graphs describing digital images with a compatible topology in the sense that for any part of the image the connectivity of the induced subgraph matches the topological connectivity. Base your thesis on the article “*D. Nogly, M. Schladt. Digital Topology on graphs. Computer vision and image understanding, Vol. 63(No. 2): 394 — 396*”.

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
1.1	Teoretične osnove	2
2	Končne topologije, delne urejenosti in celični kompleksi	7
2.1	Povezava končnih topologij in delnih urejenosti	7
2.2	Simplicialni kompleksi	9
2.3	Povezava topoloških prostorov in simplicialnih kompleksov . .	14
3	Digitalni prostori	15
3.1	Topologije na grafih	16
3.2	Kompatibilne topologije na dvodelnih grafih	18
3.3	Obstoj kompatibilne topologije na grafu	22
3.4	Celični kompleksi	24
	Literatura	31

Povzetek

Naslov: Digitalna topologija na grafih

Avtor: Jakob Drusany

V tem delu sem predstavil članek z naslovom “*Digital topology on graphs*”. Predstavil bom končne topološke prostore ter njihovo povezavo z delnimi urejenostmi in celičnimi kompleksi. Poleg tega bom razložil, kako je mogoče definirati kompatibilne topologije na grafih za analizo topoloških lastnosti slik. Dotaknil se bom tudi njihovega obstoja in lastnosti.

Ključne besede: procesiranje slik, simplicialni kompleksi, topologija Aleksandrova, teorija grafov.

Abstract

Title: Digital topology on graphs

Author: Jakob Drusany

In this thesis I will present the article “*Digital topology on graphs*”. I will cover finite topological spaces and their connection to partial orders and cell complexes. Additionally, I will present how topological properties of images can be analyzed using compatible topologies on graphs, as well as discuss their existence and properties.

Keywords: Image processing, Simplicial complexes, Alexandrov topology, Graph theory.

Poglavje 1

Uvod

Procesiranje slik je zelo pomembna in hitro rastoča veja računalništva z obširno uporabo na različnih področjih, recimo avtomatizirano branje dokumentov v poslovnem svetu, avtomatski nadzor kakovosti v proizvodnji, medicinska diagnostika na podlagi radiologije ipd. To delo bo osredotočeno na analizo slik. Za dano sliko hočemo pridobiti njen opis na podlagi objektov in regij na njej in njihovih medsebojnih relacij. Recimo dokument je sestavljen iz znakov na nekem ozadju, krvni razmaz je sestavljen iz krvnih celic na nekem ozadju, rentgenska slika je sestavljena iz različnih organov itd. Prva faza procesiranja je torej ločevanje slike na različne regije – na objekte v ospredju in ozadje. Ta proces imenujemo **segmentacija**.

Segmentacija je postopek dodeljevanja vsakega slikovnega elementa (piksla) v enega ali več razredov. Eden izmed preprostih pristopov je binarna segmentacija, kjer sliko razdelimo na dve regiji, ozadje in ospredje, na podlagi izbranega praga. Če je svetlost piksla večja od tega praga, ga dodelimo v ospredje, sicer pa v ozadje, ali obratno. Obstaja veliko več kompleksnejših metod segmentacije, ki uporabljajo več podatkov kot samo svetlost pikslov. Ko sliko enkrat segmentiramo v manjše regije, lahko začnemo analizirati lastnosti teh regij in njihove medsebojne relacije. Nekatere lastnosti so odvisne od svetlosti pikslov, druge samo od pozicije pikslov. Zelo osnovne so topološke lastnosti regij, ki vključujejo koncepte, kot so povezanost in sose-

dnost, in so neodvisne od velikosti in oblike regij.

Topološke lastnosti so uporabne zaradi različnih razlogov. Po tem, ko smo izbrali neko regijo, recimo ospredje dokumenta, jo ponavadi hočemo še segmentirati v manjše povezane regije. Te predstavljajo posamezne objekte, kot so znaki na dokumentu. Lahko hočemo skrčiti regijo na okostje, ki predstavlja skrčeno obliko regije in ohranja povezanost. V večini literature se sliko predstavi kot neke vrste graf. Ponavadi je tak, da so vozlišča piksli, vozlišči pa sta povezani, če sta sosednji (bodisi 4-povezanost bodisi 8-povezanost). Opazovanje topoloških lastnosti slik torej porodi potrebo po raziskovanju topologij na grafih.

1.1 Teoretične osnove

Vsi omenjeni grafi bodo neusmerjeni, brez izoliranih vozlišč in enostavni (brez zank in večkratnih povezav med vozlišči). **Graf** $G = (V, E)$ je določen z množico vozlišč V in množico povezav $E \subseteq \binom{V}{2}$. Povezavo $\{x, y\} \in E$, $x, y \in V$, lahko označimo tudi z xy .

Množico sosednjih vozlišč vozlišča x označujemo z

$$N_x = \{y \in V \mid xy \in E\}.$$

Število sosednjih vozlišč vozlišča x je

$$\deg(x) = |N_x|.$$

Če je $\deg(x)$ končno za vsak $x \in V$, je graf G **lokalno končen**.

G je **povezan graf**, če za vsak par vozlišč $x, y \in V$ obstaja končno zaporedje različnih vozlišč $v_1, \dots, v_n \in V$, da velja

$$xv_1, v_1v_2, \dots, v_ny \in E.$$

Graf G imenujemo **cikel**, če je V končna množica n točk

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

in

$$E = \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}.$$

Za vsako množico vozlišč $V' \subseteq V$ definiramo **induciran podgraf**

$$G[V'] = (V', E'),$$

kjer je

$$E' = \{xy \in E \mid x, y \in V'\}.$$

Induciran podgraf potemtakem ohranja vse povezave iz G , ki povezujejo vozlišča iz V' . Če je G' induciran podgraf G , ga označimo z relacijo $G' \sqsubseteq G$. Množico vozlišč grafa G označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Unija grafov $G_1 \cup G_2$ je definirana kot graf, ki ima vozlišča $V(G_1) \cup V(G_2)$ in povezave $E(G_1) \cup E(G_2)$. **Orientacija** grafa G je taka šibka urejenost (refleksivna in tranzitivna relacija) na množici vozlišč $V(G)$, da velja $xy \in E(G)$, če in samo če je $x < y$ ali $y < x$.

Topologija (ali topološka struktura) na množici X je družina \mathcal{T} podmnožic X , ki zadošča naslednjim zahtevam:

- (1) prazna množica in X sta elementa \mathcal{T} ;
- (2) unija poljubne poddružine \mathcal{T} je element \mathcal{T} ;
- (3) presek poljubne končne poddružine \mathcal{T} je element \mathcal{T} .

Elemente \mathcal{T} imenujemo **odprte množice** v X . **Topološki prostor** (X, \mathcal{T}) je množica X , opremljena s topologijo \mathcal{T} .

Okolica točke $x \in X$ je vsaka podmnožica $V \subseteq X$, ki vsebuje odprto množico U , ki vsebuje x .

Premislimo kaj so ekstremne možnosti za topologijo na X . Najmanj, kar mora vsebovati sta prazna množica in X , torej $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Hitro lahko preverimo, da je to topologija, pravimo ji **trivialna topologija**. Na drugi

strani, lahko vzamemo vse podmnožice X kot odprte množice. To je **diskretna topologija**. Družina odprtih množic je **baza** topologije prostora (X, \mathcal{T}) , če vsak element \mathcal{T} lahko izrazimo kot unijo množic iz baze.

Topološki prostor je **povezan**, če se množice X ne da izraziti kot unije dveh disjunktne nepraznih odprtih množic.

Funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ je **homeomorfizem**, če je $f : X \rightarrow X'$ bijektivna, ter če f inducira bijekcijo med \mathcal{T} in \mathcal{T}' . Torej pravimo, da sta topološka prostora (X, \mathcal{T}) in (X', \mathcal{T}') **homeomorfna**.

Topologija Aleksandrova je topologija, v kateri je vsak presek odprtih množic odprt (v navadni topologiji to velja samo za končne preseke). Presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo točko x je torej **najmanjša odprta okolica** točke x , ki jo označimo z U_x .

Za topologijo \mathcal{T} na množici X pravimo, da **loči** podmnožico $A \subseteq X$ od podmnožice $B \subset X$, če obstaja odprta množica U , ki vsebuje A in ne vsebuje B , torej $A \subseteq U$ in $B \cap U = \emptyset$. Topologija **ostro loči**, če obstajata $U, V \in \mathcal{T}$, da velja $A \subseteq U, B \subseteq V$ in $U \cap V = \emptyset$.

Aksiomi ločljivosti so zahteve za topološki prostor, ki zagotavljajo določeno stopnjo ločljivosti med točkami. Pišemo jih kot zaporedje vedno ostrejših zahtev T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 . Če prostor (X, \mathcal{T}) zadošča pogoju T_i , pravimo, da je X T_i -prostor.

X je T_0 : Za različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica U , ki vsebuje eno in ne drugo točko.

X je T_1 : Za različni točki $x, y \in X$ obstaja okolica točke x , ki jo ostro loči od y in obenem obstaja okolica točke y , ki jo ostro loči od x .

Ostali aksiomi v tem delu niso pomembni, saj se bomo osredotočali na končne topološke prostore. **Končna topologija** je topologija na končni množici. Digitalne slike so končne množice, zato se v tem delu osredotočamo izključno na končne topologije. Izkaže se, da je vsaka končna topologija topologija Aleksandrova in brž ko zahtevamo na takem prostoru T_1 , se nam porodi

diskretna topologija. Torej so za nas zanimivi končni topološki prostori, ki so T_0 in ne T_1 .

Poglavje 2

Končne topologije, delne urejenosti in celični kompleksi

2.1 Povezava končnih topologij in delnih urejenosti

Šibko urejena množica je množica s tranzitivno in refleksivno relacijo. Pokazali bomo, da poljubna končna topologija na X porodi šibko urejenost na X in obratno. Dovolj je že, če je ta topologija topologija Aleksandrova.

Minimalne odprte množice vseh točk tvorijo bazo prostora, saj je vsaka odprta množica $U \subseteq X$ unija minimalnih odprtih množic U_x , $x \in U$. Bazi, ki je sestavljena iz minimalnih odprtih množic pravimo minimalna baza. Vsaka baza prostora vsebuje minimalno bazo, ker če izrazimo U_x kot unijo odprtih množic iz baze, mora ena od teh množic vsebovati x . Tedaj ta množica sovpada z U_x .

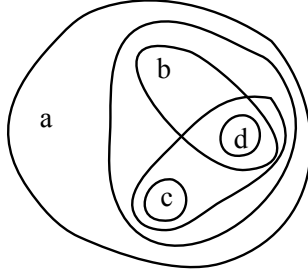
Naj bo X topološki prostor z bazo $\{U_x\}_{x \in X}$. Na množici X definiramo relacijo le s pravilom:

$$x \leq y \iff U_x \subseteq U_y$$

Podana relacija je šibka urejenost nad X . Obratno, iz šibke urejenosti definiramo topologijo nad X z bazo $\bigcup_{x \in X} \{y \in X \mid x \leq y\}$. Sedaj lahko pokažemo,

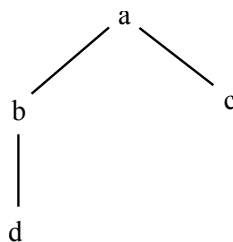
da je $y \leq x$, če in samo če $y \in U_x$. Če je $y \leq x$, potem je y v vsaki osnovni množici, ki vsebuje x . Iz tega sledi $y \in U_x$. Tudi obratno, če $y \in U_x$, potem je $y \in \{z \in X \mid z \leq x\}$, zato lahko sklepamo, da je $y \leq x$.

Pogoj T_0 sovпада z antisimetričnostjo na končnih šibko urejenih množicah. To pomeni, da za elementa, za katera velja $a \leq b$ in $b \leq a$, velja $y \in U_x$ in $x \in U_y$. Ker v T_0 prostorih za vsak par točk obstaja odprta množica, ki vsebuje eno točko in ne druge, sledi, da je $x = y$. Končni T_0 prostori so torej ekvivalentni končni delno urejeni množici.



Slika 2.1: odprte množice na končni množici X iz primera 2.1.1

Primer 2.1.1. Naj bo (X, \mathcal{T}) topološki prostor, pri čemer je $X = \{a, b, c, d\}$ končna množica, odprte množice pa so $\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}$ in $\{c, d\}$. Prostor je T_0 , torej je delno urejen. Slika 2.1 prikazuje odprte množice na X z zaprtimi krivuljami. Ker je množica delno urejena, lahko prostor lepše predstavimo s Hassejevim diagramom (Slika 2.2). To lahko naredimo za vse končne T_0 prostore. Hassejev diagram je graf, kjer so vozlišča elementi množice, povezave pa urejeni pari (x, y) , kjer je $x < y$ in ne obstaja $z \in X$, da bi veljalo $x < z < y$. V diagramu bomo namesto puščice iz x v y narisali y nad x .



Slika 2.2: hassejev diagram končne delno urejene množice iz primera 2.1.1

Na delni urejenosti definiramo nekaj izrazov. Element x je **maksimalen**, če $y \geq x$ implicira $y = x$, in je **maksimum** delne urejenosti, če velja $y \leq x$ za vsak $y \in X$. Delna urejenost ima **maksimum**, če in samo če obstaja natanko en maksimalen element. **Minimalen** element in **minimum** sta definirana dualno.

Veriga v delni urejenosti je podmnožica elementov, ki so paroma primerljivi. **Antiveriga** je podmnožica elementov, ki so paroma neprimerljivi.

2.2 Simplicialni kompleksi

Celični kompleks je abstraktna struktura, ki je sestavljena iz celic in njihovih relacij. Najprej si bomo ogledali tip celičnega kompleksa (simplicialni kompleks), ki je bolj regularen in zaradi tega lažji za uporabo v računalništvu. V zadnjem razdelku 3.4 bomo definirali splošnejši celični kompleks.

Simplicialni kompleks K je sestavljen iz množic V_K in S_K , pri čemer je S_K sestavljena iz končnih, nepraznih podmnožic množice V_K . Množici V_K pravimo množica točk, S_K pa množica simpleksov. Veljati mora, da je vsaka podmnožica V_K moči 1 simpleks in da je vsaka neprazna podmnožica simpleksov simpleks. Malce lahko zlorabimo notacijo in pišemo $v \in K$ namesto $v \in V_K$ in $\sigma \in K$ namesto $\sigma \in S_K$. V večini primerov bomo simplicialni kompleks identificirali samo z množico njegovih simpleksov.

Če je simpleks σ podmnožica simpleksa τ , pravimo, da je σ njegovo **lice**. Simpleks, ki ima $n+1$ točk, imenujemo **n -simpleks** in pravimo, da je **dimenzije** n . Vse točke K predstavljajo 0-simplekse. Dimenzija K je supremum dimenzij vseh simpleksov v K . Če je K prazen, ima dimenzijo -1, če pa vsebuje K simplekse poljubno velike dimenzije, je njegova dimenzija neskončno.

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ simpleks dimenzije n . Konveksna kombinacija točk $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ je definirana kot

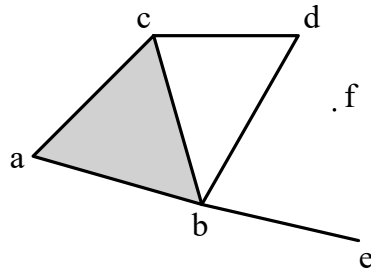
$$\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Zaprta simpleks $\bar{\sigma}$ je množica vseh konveksnih kombinacij točk iz σ . Za konveksno kombinacijo $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ definiramo nosilec konveksne kombinacije kot množica vseh v_i , katerih pripadajoč λ_i je različen od 0.

Primer 2.2.1. Nosilec konveksne kombinacije $0.8v_0 + 0.2v_1 + 0v_3$ je $\{v_0, v_1\}$.

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica vseh takih konveksnih kombinacij, katerih nosilec je simpleks v K . $|K|$ je torej unija vseh zaprtih simpleksov K . Navadno točk ne podamo kot vektorje ampak kot elemente v 'splošni legi' nekega abstraktnega prostora, torej so konveksne kombinacije teh točk tudi abstraktne.

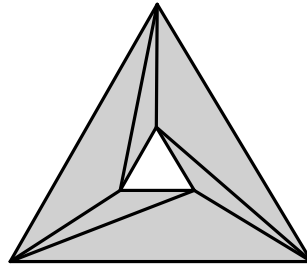
Primer 2.2.2. Naj bo K simplicialni kompleks, ki vsebuje simplekse $\{a, b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e\}$, $\{f\}$ in vse njihove neprazne podmnožice. Geometrijska realizacija $|K|$ je prikazana na sliki 2.3.



Slika 2.3: geometrijska realizacija simplicialnega kompleksa K

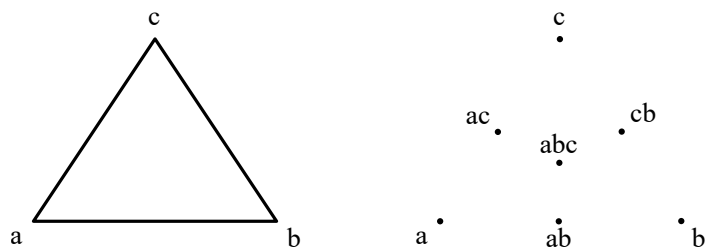
Topološki prostor X je **topološki polieder**, če obstaja simplicialni kompleks K , da je X homeomorfen telesu $|K|$. Simplicialni kompleks K imenujemo **triangulacija** poliedra X .

Primer 2.2.3. Pokažemo lahko, da je kolobar topološki polieder tako, da skiciramo njegovo triangulacijo.

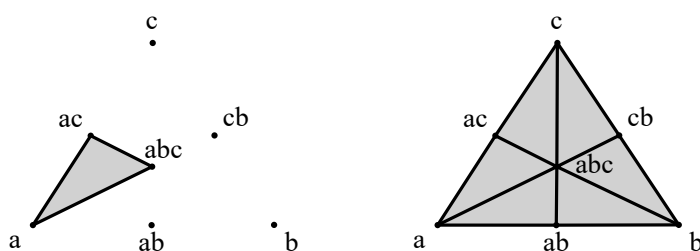


Slika 2.4: triangulacija kolobarja

Za dan simplicialni kompleks K konstruiramo njegovo **baricentrično subdivizijo** K' . Točke K' so simpleksi K in simpleksi K' so verige simpleksov K . Veriga simpleksov je taka množica $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, $\sigma_i \in K$, da velja $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$.



Slika 2.5: prvi korak baricentrične subdivizije

Slika 2.6: simpleks $\{a, ac, abc\}$ in rezultat baricentrične subdivizije

Primer 2.2.4. Naj bo K 2-simpleks $\{a, b, c\}$. Če hočemo konstruirati baricentrično subdivizijo K , moramo najprej dodati točke za vsak simpleks v K (Slika 2.5). Nato dorišemo še najdaljše verige, saj so v tem primeru vsi ostali simpleksi v K' njihove podmnožice. Primer take verige je $\{a, ac, abc\}$, saj velja $a \subsetneq ac \subsetneq abc$ (Slika 2.6).

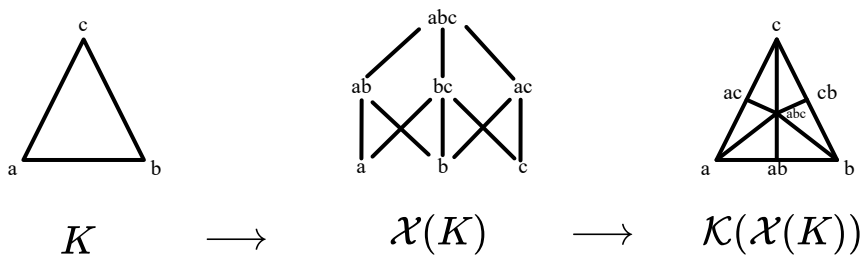
2.3 Povezava topoloških prostorov in simplicialnih kompleksov

Definicija 2.3.1. Naj bo X končni T_0 topološki prostor. Simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$, asociiran z X , je simplicialni kompleks, katerega množica simpleksov so neprazne verige X .

Definicija 2.3.2. Naj bo K simplicialni kompleks. Asociirana delna urejenost $\mathcal{X}(K)$ je množica simpleksov K , urejena z relacijo inkluzije. Če sta $\sigma, \tau \in K$, je $\sigma \leq \tau$, če je $\sigma \subseteq \tau$.

Vidimo lahko tesno povezavo med topološkimi prostori, delnimi urejenostmi in simplicialnimi kompleksi.

Primer 2.3.1. Recimo, da je K 2-simpleks $\{a, b, c\}$. Asociirana delna urejenost $\mathcal{X}(K)$ je množica simpleksov K , urejena z relacijo inkluzije. Na sliki 2.7 je prikazan Hassejev diagram asociirane delne urejenosti. Asociirana delna



Slika 2.7: skica baricentrične subdivizije $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$

urejenost ima tudi svoj simplicialni kompleks $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$, kar je točno baricentrična subdivizija K .

Poglavje 3

Digitalni prostori

Glavni cilj digitalne topologije in digitalne geometrije je premostiti vrzel med geometrijskimi in topološkimi lastnosti komputacijskih objektov in njihovimi teoretičnimi reprezentacijami v zveznem prostoru \mathbb{R}^n . Če hočemo uporabiti topološke pojme v digitalni domeni, moramo najprej definirati prostor, ki je analogen zveznemu prostoru \mathbb{R}^n , ($n > 1$).

Ponavadi definiramo digitalne prostore na dva načina. Lahko se odločimo, katero vrsto povezanosti ima prostor. Naj bo $x = (x_1, \dots, x_n)$ točka v \mathbb{Z}^n , $n > 1$.

$(3^n - 1)$ -sosed točke x je vsaka točka $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$, za katero velja

$$\max |x_i - y_i| = 1.$$

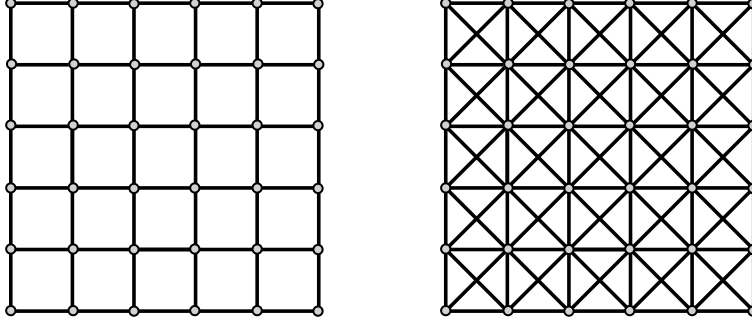
Tak prostor bomo označili z (d_{inf}, n) -prostor. Recimo $(d_{\text{inf}}, 2)$ -prostor je 8-povezana mreža.

$2n$ -sosed točke x je vsaka točka $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$, $n > 1$, za katero velja

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1.$$

Tak prostor bomo označili z (d_1, n) -prostor. Recimo $(d_1, 2)$ -prostor je 4-povezana mreža.

V razdelku 3.3 bomo pokazali, da 8-povezana mreža in s tem tudi (d_{inf}, n) -prostor nima kompatibilne topologije.



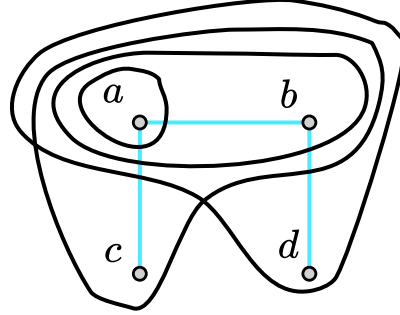
Slika 3.1: izsek 4-povezane in 8-povezane mreže

3.1 Topologije na grafih

Definicija 3.1.1. Za dan topološki prostor (X, \mathcal{T}) in dano podmnožico $S \subseteq X$ definiramo topologijo, zožano na S :

$$\mathcal{T}|_S = \{U \cap S \mid U \in \mathcal{T}\}$$

Definicija 3.1.2. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naj bo \mathcal{T} topologija na V . \mathcal{T} imenujemo **kompatibilna topologija** na G , če velja, da je $V' \subseteq V$ topološko povezan če in samo če je $G[V']$ grafovsko povezan.



Slika 3.2: primer kompatibilne topologije na grafu

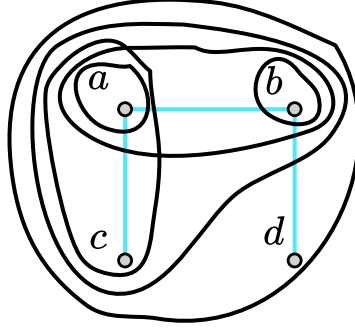
Primer 3.1.1. Naj bo G graf na 4 vozliščih $V = \{a, b, c, d\}$ s povezavami $E = \{ac, ab, bd\}$. Na množici vozlišč V lahko definiramo topologijo

$$\mathcal{T}_k = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Graf in topologija sta prikazana na sliki 3.2. Povezave grafa so prikazane z modrimi daljicami, odprte množice topologije pa s črnimi krivuljami. Topologija je T_0 , saj za vsak par točk obstaja množica, ki vsebuje eno in ne druge. Na primer točki b in d ločujeta množici $\{a, b\}$, $\{a, b, d\}$. Topologija \mathcal{T}_k je tudi kompatibilna z grafom G , saj je $V' \subseteq V$ povezan v \mathcal{T}_k , če in samo če je V' povezan v G . Za primer si oglejmo induciran podgraf $G[\{c, d\}]$. To je graf brez povezav, ki vsebuje točki c in d . Podprostor topologije \mathcal{T}_k na točkah $\{c, d\}$ je $\mathcal{T}_k|_{\{c, d\}} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$. Ta prostor je nepovezan, saj lahko prostor razdelimo na dve disjunktni uniji odprtih množic ($\{c, d\} = \{c\} \cup \{d\}$). To velja za vsak induciran podgraf na vsaki podmnožici točk, torej je topologija kompatibilna z grafom.

Primer 3.1.2. Naj bo G isti graf na 4 vozliščih $V = \{a, b, c, d\}$ kot v prejšnjem primeru, torej $E = \{ac, ab, bd\}$. Sedaj definiramo topologijo

$$\mathcal{T}_n = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}.$$



Slika 3.3: primer topologije na grafu, ki ni kompatibilna

Skica grafa in topologije \mathcal{T}_n je prikazana na sliki 3.3. Ta topologija je prav tako T_0 , ni pa kompatibilna z grafom, saj je $\{a, b\}$ protiprimer pogoja kompatibilnosti. $G[\{a, b\}]$ je povezan graf, vendar je $\{a, b\}$ nepovezana množica v \mathcal{T}_n . Razdelimo ga lahko na dve disjunktni odprti množici $\{a\}$ in $\{b\}$.

Izrek 3.1.1. *Naj bo G graf s kompatibilno topologijo \mathcal{T} . Za vsak induciran podgraf $H \sqsubseteq G$ je topologija, omejena na $V(H)$, kompatibilna topologija na grafu H . To topologijo označimo z $O|_{V(H)}$.*

Dokaz. Za vsak $H' \sqsubseteq H$ imamo $\mathcal{T}|_{V(H)}|_{V(H')} = \mathcal{T}|_{V(H')}$. Vsaka podmnožica $V(H)$ je povezana v $\mathcal{T}|_{V(H)}$, če in samo če je povezana v \mathcal{T} . $H' \sqsubseteq G$ je povezan, če in samo če je $V(H') \subseteq V(H)$ povezan v \mathcal{T} .

□

3.2 Kompatibilne topologije na dvodelnih grafih

Naj bo G^b povezan dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča. V je torej unija dveh nepraznih disjunktnih množic V_A in V_B . Vsaka povezava v E povezuje samo vozlišča iz V_A z vozlišči iz V_B .

Definiramo dve kompatibilni topologiji na množici vozlišč V tako, da opišemo topološko okolico vsake točke $x \in V$. To je najmanjša odprta množica, ki vsebuje x : $U_x \in \mathcal{T}$. Ker U_x ni mogoče razdeliti na odprte množice, je U_x in vsaka podmnožica U_x , ki vsebuje x , povezana. Poleg tega je vsaka $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, unija določenih U_x .

Naj bo $N_x = \{y \mid yx \in E\}$ množica sosednjih točk točke x .

$$\mathcal{T}_1 : U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_B$$

$$\mathcal{T}_2 : U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_B$$

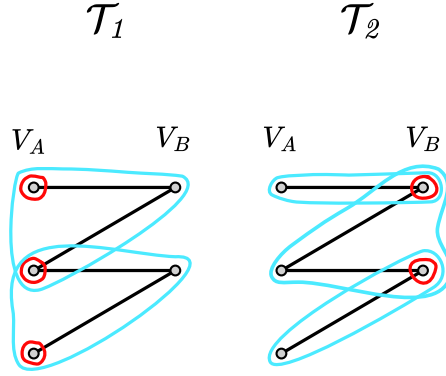
Kompatibilni topologiji \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 nista ekvivalentni, razen na grafih, ki nimajo povezav; lahko nista niti homeomorfni.

Primer 3.2.1. Naj bo G^b dvodelen graf s 5 vozlišči, prikazan na sliki 3.4. Na levem delu slike je skicirana topologija \mathcal{T}_1 . Z rdečo so označene okolice točk iz V_A , torej iz definicije ($U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_A$) so to samo enojci. Z modro so označene okolice točk iz V_B , ki so definirane kot unija točke same in njenih sosedov ($U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_B$). Ne smemo tudi pozabiti, da celotna topologija vsebuje tudi preseke in unije teh okolic, ki na sliki niso prikazane. Na desni strani slike je skicirana topologija \mathcal{T}_2 po enakem postopku. Čeprav sta si topologiji podobni, nista homeomorfni.

Izrek 3.2.1. \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 sta kompatibilni topologiji na G^b .

Dokaz. Naj bo \mathcal{T} enak \mathcal{T}_1 ali \mathcal{T}_2 .

- (1) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ povezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ povezana v \mathcal{T} , torej, da je ne moremo razdeliti na dve disjunktni odprti podmnožici. Za vsaki dve sosednji točki x in y je $U_x \cap U_y$ neprazen, saj $y \in U_x$ ali $x \in U_y$. $V(G')$ razdelimo na dve neprazni disjunktni množici V_1 in V_2 , $V(G') = V_1 \cup V_2$. Naj bo $A \in \mathcal{T}|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_1 , in $B \in \mathcal{T}|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_2 . Tedaj je $A \cap B \neq \emptyset$, torej je $V(G')$ povezan v \mathcal{T} .
- (2) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ nepovezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ nepovezana v \mathcal{T} . Ker je G' nepovezan, lahko G' razdelimo na unijo



Slika 3.4: skica topologij \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 na dvodelnem grafu

dveh ne nujno povezanih induciranih podgrafov C in D tako, da nobeno vozlišče iz C ni povezano z nobenim vozliščem iz D . Torej

$$\bigcup_{x \in V(C)} U_x \cap V(D) = \emptyset = V(C) \cap \bigcup_{x \in V(D)} U_x$$

$V(C)$ in $V(D)$ lahko razpišemo:

$$V(C) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(C)} U_x \right)$$

$$V(D) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(D)} U_x \right)$$

Vidimo, da sta $V(C)$ in $V(D)$ disjunktni odprti množici v $\mathcal{T}|_{V(G')}$, torej je $V(G')$ nepovezana v \mathcal{T} .

□

Naj bo \mathcal{T} poljubna kompatibilna topologija na G^b . Naslednje leme držijo za vsak $x \in V$:

Lema 3.2.1. $\{x\} \subseteq U_x \subseteq \{x\} \cup N_x$.

Dokaz. $\{x\} \subseteq U_x$ sledi iz definicije. Recimo, da obstaja x , za katerega velja $U_x \not\subseteq \{x\} \cup N_x$. Potem obstaja $y \in U_x$, $y \notin \{x\} \cup N_x$. Ker je $\{x, y\} \subseteq U_x$, je ta množica povezana v \mathcal{T} . Ker je $G^b[\{x', y\}]$ nepovezan graf, je to v protislovju z definicijo kompatibilne topologije na G^b . \square

Lema 3.2.2. $U_x = \{x\}$ ali $U_x = \{x\} \cup N_x$.

Dokaz. Recimo, da lema ne drži. Potem obstaja x , da $U_x \neq \{x\}$ in $U_x \subsetneq \{x\} \cup N_x$. Torej obstaja $y \in N_x$, $y \notin U_x$. Ker je $y \in N_x$, sta x in y povezana. Ker sta povezana in je G^b dvodelen graf, velja $N_x \cap N_y = \emptyset$. Ker sta U_x in U_y podmnožici $\{x\} \cup N_x$ in $\{y\} \cup N_y$, je bodisi $U_x \cap U_y = \emptyset$, bodisi $U_x \cap U_y = \{x\}$. Če velja $U_x \cap U_y = \emptyset$, sledi protislovje, saj je $\{x, y\}$ povezana množica v \mathcal{T} . Če velja $U_x \cap U_y = \{x\}$, potem je $U_x = \{x\}$, kar je v protislovju s predpostavko $U_x \neq \{x\}$. \square

Lema 3.2.3. Naj bo $x \in V(G^b)$. Za vsak $y \in N_x$ velja $U_x = \{x\} \iff U_y = \{y\} \cup N_y$.

Dokaz. Obravnavamo dve možnosti:

- (1) Naj bo $U_x = \{x\}$. Če je in $U_y = \{y\}$ za katerikoli $y \in N_x$, pridemo v protislovje, saj je $\{x, y\}$ nepovezana v \mathcal{T} , y pa je sosed x .
- (2) Naj bo $U_x = \{x\} \cup N_x$. Če velja $U_y = \{y\} \cup N_y$ za katerikoli $y \in N_x$, potem je $U_x \cap U_y = \{x, y\} \in \mathcal{T}$ (ker je $y \in N_x \Rightarrow x \in N_y$). Ker je U_x najmanjša odprta množica, ki vsebuje x , je $U_x = \{x, y\}$. Prav tako je tudi $U_y = \{x, y\}$. Iz leme 3.2.2, sledi, da je $N_x = \{y\}$ in $N_y = \{x\}$. Ker je graf povezan in je y edini sosed x , sta ti dve točki cel graf $V(G^b) = \{x, y\}$, kar je v protislovju s predpostavko, da ima G^b vsaj tri vozlišča.

\square

Iz zadnje leme sledi spodnji izrek.

Izrek 3.2.2. Vsak povezan, dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča, ima natanko dve kompatibilni topologiji. To sta \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 : \quad U_x &:= \{x\} \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_B \\ \mathcal{T}_2 : \quad U_x &:= \{x\} \cup N_x \quad \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \quad \forall x \in V_B\end{aligned}$$

3.3 Obstoj kompatibilne topologije na grafu

Posledica 3.3.1. Cikel C , ki ima liho število vozlišč $n > 3$, nima kompatibilne topologije.

Dokaz. Za vsak $x \in V(C)$ je $G_x^b := C[\{x\} \cup N_x]$ dvodelen graf, ki ima vsaj tri vozlišča. Recimo, da ima C kompatibilno topologijo \mathcal{T} . Potem je na vsakem G_x^b inducirana kompatibilna topologija \mathcal{T}_1 ali \mathcal{T}_2 . Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja

$$\mathcal{T}|_{V(G_x^b)} \cong \mathcal{T}_1 \iff \mathcal{T}|_{V(G_y^b)} \cong \mathcal{T}_2.$$

sicer bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana v \mathcal{T} , kar to je v protislovju s predpostavko, da sta x in y povezana. Če si izberemo neko začetno točko $X_0 \in V(C)$, lahko zaporedoma izbiramo sosednje točke in opazujemo inducirane kompatibilne topologije:

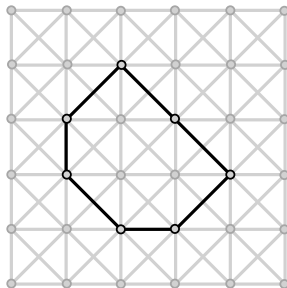
$$\mathcal{T}|_{V(G_{X_0}^b)} \cong \mathcal{T}_1$$

$$\mathcal{T}|_{V(G_{X_1}^b)} \cong \mathcal{T}_2$$

$$\mathcal{T}|_{V(G_{X_3}^b)} \cong \mathcal{T}_1$$

Ker ima cikel liho število vozlišč, se na x_0 inducira kompatibilna topologija \mathcal{T}_2 . Torej sta na podgrafu $G_{x_0}^b$ inducirani tako \mathcal{T}_1 kot \mathcal{T}_2 , kar ni mogoče. \square

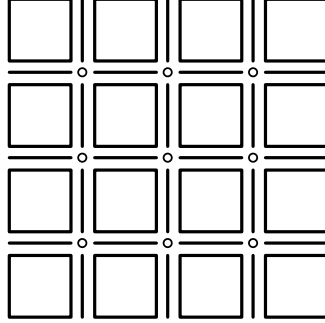
Iz posledice 3.3.1 in iz Izreka 3.1.1 sledi naslednji izrek.



Slika 3.5: cikel lihe dolžine kot induciran podgraf 8-povezane mreže

Izrek 3.3.1. *Naj bo G graf, v katerem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine. Potem G nima kompatibilne topologije.*

Zaradi izreka lahko sklepamo, da 8-povezana mreža nima kompatibilne topologije, saj v njem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine (Slika 3.5). Mrežo lahko s pomočjo celičnih kompleksov malce drugače konstruiramo, tako da bo imela kompatibilno topologijo.



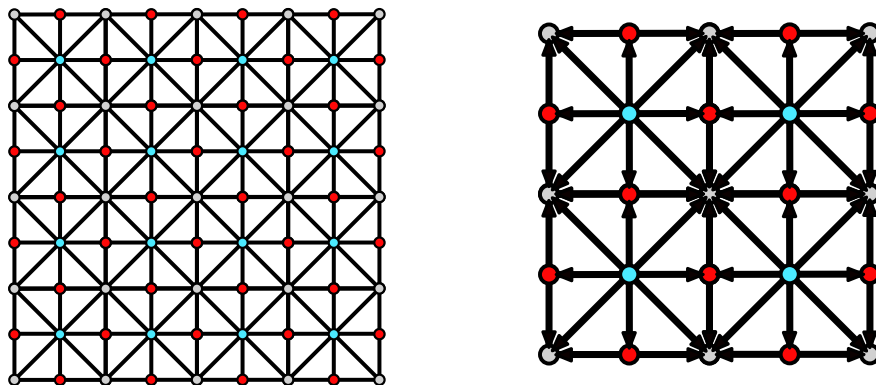
Slika 3.6: primer dela celičnega kompleksa

3.4 Celični kompleksi

Abstraktni celični kompleksi so podobni simplicialnim kompleksom, le da celice poljubne oblike in relacije med njimi bolj splošne. Abstraktni celični kompleks je trojica $C = (E, B, Dim)$, kjer je E množica abstraktnih objektov (celic), $B \subseteq E \times E$ antisimetrična, irefleksivna in tranzitivna relacija in $Dim : E \rightarrow I \subseteq \mathbb{N}$ funkcija za katero velja: $Dim(e) < Dim(e')$ za vsak $(e, e') \subseteq E$. Tej funkciji pravimo dimenzija. Prostor \mathbb{R}^2 lahko predstavimo kot celični kompleks, kjer so celice točke, daljice in ploskve. Relacijo B definiramo kot relacijo, ki povezuje točke in daljice, daljice in ploskve ter točke in ploskve. Dimenzija točke je 0, dimenzija daljice je 1, dimenzija ploskve pa je 2. Skico lahko vidimo na sliki 3.6. Na podoben način, kot smo definirali asociirano delno urejenost s simplicialnim kompleksom (Definicija 2.3.2), lahko definiramo asociiran graf $G(C)$ na sledeč način:

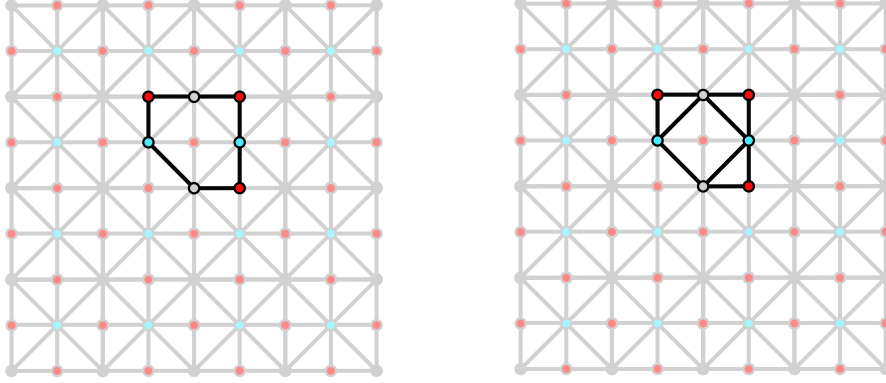
- Vozlišča grafa so celice E .
- Povezava med dvema vozliščema x in y obstaja, če in samo če je $(x, y) \in B$ ali $(y, x) \in B$.

Na levem delu slike 3.7 je predstavljen del grafa, asociiranega s celičnim kompleksom prostora \mathbb{R}^2 . Siva vozlišča predstavljajo celice dimenzije 0, rdeča



Slika 3.7: levi del slike prikazuje induciran podgraf, asociiran s celičnim kompleksom iz slike 3.6, desni del pa predstavlja orientacijo grafa

vozlišča celice dimenzije 1, modra vozlišča pa celice dimenzije 2. Ker je B tranzitivna, je graf $G(C)$ graf primerljivosti. Relacijo lahko lepše prikažemo z orientacijo grafa $G(C)$, tako da za vsak $(x, y) \in B$ narišemo povezavo iz x v y (Slika 3.7).



Slika 3.8: poskus iskanja cikla lihe dolžine v asociiranem grafu celičnega kompleksa

Opomba 3.4.1. Graf $G(C)$ je zelo podoben grafu 8-povezane mreže in zdi se, da vsebuje inducirani podgraf, ki je cikel lihe dolžine, podobno kot na sliki 3.5. Iz tega bi lahko sklepali, da tak kompleks nima kompatibilne topologije. Cikel lihe dolžine na levem delu slike 3.8 je sicer podgraf $G(C)$, vendar ni inducirani. Inducirani podgraf vsebuje vse povezave med vozlišči, ne samo izbrane.

Lema 3.4.1. *Naj bo C celični kompleks prostora \mathbb{R}^2 , in \mathcal{T} T_0 -Aleksandrova topologija, kompatibilna na $G(C)$. Za vsa vozlišča x sive ali modre barve velja*

$$U_x = \{x\} \cup N_x \quad \text{ali} \quad U_x = \{x\}.$$

Ideja dokaza. Če velja $U_x \neq \{x\}$, lahko zaradi lastnosti T_0 pokažemo, da je šest od osmih sosedov x v U_x . Sklepamo lahko, da sta tudi ostala dva soseda v U_x . Torej je $U_x = \{x\} \cup N_x$.

S $H(X)$ označimo horizontalne sosede rdečega vozlišča x , z $V(x)$ pa vertikalne sosede rdečega vozlišča x .

Izrek 3.4.1. *Naj bo C celični kompleks prostora \mathbb{R}^2 . Na grafu $G(C)$ obstajata natanko dve kompatibilni topologiji. To sta \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 :*

- \mathcal{T}_1 :

- Naj bo x vozlišče modre barve. Potem je $U_x = \{x\} \cup N_x$.
- Naj bo x vozlišče rdeče barve. Potem je $U_x = H(x)$.
- Naj bo x vozlišče sive barve. Potem je $U_x = \{x\}$.

- \mathcal{T}_2 :

- Naj bo x vozlišče modre barve. Potem je $U_x = \{x\}$.
- Naj bo x vozlišče rdeče barve. Potem je $U_x = V(x)$.
- Naj bo x vozlišče sive barve. Potem je $U_x = \{x\} \cup N_x$.

Sledi iz izrekov 2-5 v izseku Bretto [2]. Dokaz izreka je izven obsega tega dela.

Izrek 3.4.2. *Topologiji \mathcal{T}_1 in \mathcal{T}_2 sta homeomorfni.*

Dokaz. Graf lahko vložimo v \mathbb{Z}^2 tako, da bo **rdeče vozlišče** na mestu $(0, 0)$ (Slika 3.9). Množico vozlišč sedaj razpišemo v odvisnosti od barve vozlišč:

- Vozlišča sive barve se nahajajo na lihih x in sodih y koordinatah:

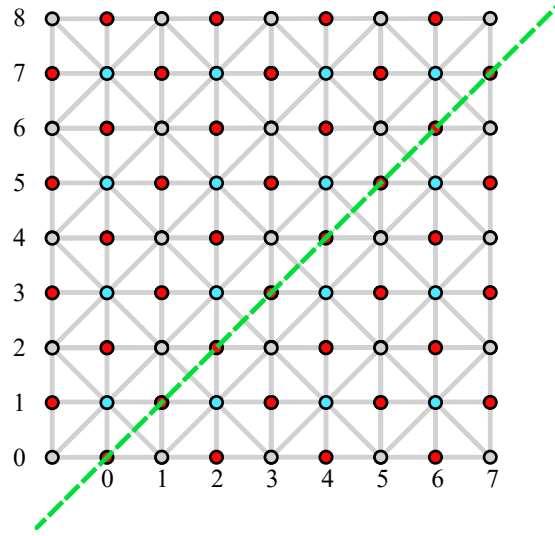
$$W = \{(2n + 1, 2m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

- Vozlišča rdeče barve se nahajajo na afinih premicah s smernim koeficientom 1:

$$R = \{(n, m) \mid n + m = 2k, k \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

- Vozlišča modre barve se nahajajo na sodih x in lihih y koordinatah:

$$M = \{(2n, 2m + 1) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$



Slika 3.9: slika prikazuje simetrijo grafa $G(C)$, vloženega v \mathbb{Z}^2

Sedaj definiramo homeomorfizem:

$$\begin{aligned}\phi : (\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_1) &\rightarrow (\mathbb{Z}^2, \mathcal{T}_2) \\ (x, y) &\mapsto (y, x)\end{aligned}$$

Preslikava je zrcaljenje glede na premico $y = x$ (zelena premica na sliki 3.9). Pokazati moramo, da se okolica točke (x, y) v \mathcal{T}_1 preslika v okolico točke (y, x) v \mathcal{T}_2 . Okolico točke a v \mathcal{T}_1 označimo z $U_{\mathcal{T}_1}(a)$. Dokazati moramo torej

$$\phi(U_{\mathcal{T}_1}(x, y)) = U_{\mathcal{T}_2}((y, x)).$$

- (1) Naj bo $(x, y) \in R$ vozlišče rdeče barve. Ker velja $x + y = 2k = y + x$, hitro vidimo, da je $(y, x) \in R$. Enako velja tudi za točke v okolici:

$$\begin{aligned}\phi(U_{\mathcal{T}_1}((x, y))) &= \phi(H(X)) \\ &= \phi(\{(x + \epsilon, y), \epsilon \in \{-1, 0, 1\}\}) \\ &= \{(y, x + \epsilon), \epsilon \in \{-1, 0, 1\}\} \\ &= U_{\mathcal{T}_2}((y, x))\end{aligned}$$

- (2) Naj bo $(x, y) \in W$ vozlišče sive barve. Ker je $(x, y) = (2n + 1, 2m)$, je $(y, x) = (2m, 2n + 1) \in M$. Okolica točke (x, y) v \mathcal{T}_1 je samo točka (x, y) , okolica točke (y, x) v \mathcal{T}_2 pa je samo točka (y, x) .

$$\phi(U_{\mathcal{T}_1}((x, y))) = \phi(\{(x, y)\}) = \{(y, x)\} = U_{\mathcal{T}_2}((y, x))$$

□

Literatura

- [1] Jonathan A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Springer, 8 2011.
- [2] Alain Bretto. *Digital Topologies on Graphs*, pages 65–82. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN 978-3-540-68020-8. doi: 10.1007/978-3-540-68020-8_3. URL https://doi.org/10.1007/978-3-540-68020-8_3.
- [3] Daniel Nogly and Markus Schladt. Digital Topology on graphs. *Computer vision and image understanding*, Vol. 63(No. 2):394–396, Marec 1996. doi: 10.1006/cviu.1996.0029. URL <https://doi.org/10.1006/cviu.1996.0029>.
- [4] Petar Pavešić. *Splošna topologija*. 1 2008.
- [5] Azriel Rosenfeld. Digital Topology. *The American mathematical monthly*, 86(8):621, 10 1979. doi: 10.2307/2321290. URL <https://doi.org/10.2307/2321290>.
- [6] Aleš Vavpetič. REŠENE NALOGE IZ ALGEBRAIČNE TOPOLOGIJE. Dosegljivo: <https://users.fmf.uni-lj.si/vavpetic/AT/AT.pdf>, 2011. [Dostopano: 21. 7. 2024].