# Poglavje 1

# Uvod

Procesiranje slik je zelo pomembno in hitro rastoče področje računalništva z obširno uporabo na različnih področjih. Lahko je to avtomatizirano branje dokumentov v poslovnem svetu, avtomatski nadzor kakovosti v proizvodnji, medicinska diagnostika na podlagi radiologije in še mnogo drugih načinov uporabe. Večina dela na tem področju se ukvarja z problemom analize slik. To pomeni, da za dano sliko hočemo pridobiti opis slike na podlagi objektov na sliki, regij na sliki in njihovih medsebojnih relacij. Na primer dokument je sestavljen iz znakov na nekem ozadju; krvni razmaz je sestavljen iz krvnih celic na nekem ozadju; rentgenska slika je sestavljena iz različnih organov; itd. Torej prva faza procesiranja je ločevanje slike na različne regije ali na objekte v ospredju in ozadje. Ta proces imenujemo **segmentacija**.
Segmentacija je postopek dodeljevanja vsakega slikovnega elementa (piksla) v eno ali več razredov. Eden izmed preprostih pristopov je binarna segmentacija, kjer sliko razdelimo na dve regiji, ozadje in ospredje na podlagi nekega praga. Če je svetlost piksla večja od praga, ga dodelimo v ospredje, sicer v ozadje ali obratno. Obstaja veliko več kompleksnejših metod segmentacije, ki uporabljajo več podatkov kot samo svetlost pikslov.
Ko sliko enkrat segmentiramo v manjše regije, lahko začnemo analizirati lastnosti teh regij in njihove medsebojne relacije. Nekatere lastnosti so odvisne od svetlosti pikslov, druge so odvisne samo od pozicije pikslov. Zelo osnovne

so topološke lastnosti regij, ki vključujejo koncepte kot so povezanost, sosednost in so neodvisne od velikosti in oblike regij.
Topološke lastnosti so uporabne zaradi različnih razlogov. Po tem ko smo izbrali neko regijo, na primer ospredje dokumenta, jo ponavadi hočemo še segmentirati v manjše povezane regije, ki predstavljajo posamezne objekte kot so znaki. Lahko hočemo skrčiti regijo na okostje, ki predstavlja skrčeno obliko regije in ohranja povezanost.

TODO: Še kak primer za uporabo topoloških lastnosti

V večini literature se sliko predstavi kot neke vrste graf. Ponavadi tak, da so vozlišča piksli, povezave pa so sosednosti med piksli, bodisi 4-sosednost bodisi 8-sosednost. Opazovanje topoloških lastnosti slik torej porodi potrebo po raziskovanju topologij na grafih.

## 1.1 Digitalne topologije

Podatkovne strukture v računalništvu so števne, torej edine množice, ki jih lahko uporabljamo so diskretne ali digitalne množice. Pridevnik digitalno uporabimo kot nasprotje za zvezno. Diskretne topološke prostore, lahko definiramo kot topološke prostore, v katerih velja, da ima vsaka točka najmanjšo okolico. Pri navadni topologiji to lahko ne drži, saj lahko okoli vsake točke najdemo poljubno majhno okolico.

TODO: Lepši uvod v digitalne topologije

## 1.2 Celični kompleksi

TODO: Laična razlaga celičnih kompleksov in njihove uporabe

## 1.3 Definicije

Vsi grafi bodo neusmerjeni, brez izoliranih vozlišč in preprosti torej brez zank in večkratnih povezav med vozlišči. **Graf** $G = (V, E)$ vsebuje množico vozlišč $V$ in množico povezav $E \subseteq \binom{V}{2}$. Povezavo $\{x, y\} \in E; x, y \in V$ lahko označimo tudi z $xy$.
Množica sosednjih vozlišč vozlišča $x$ je $N_x = \{y \in V | xy \in E\}$.
Število sosednjih vozlišč vozlišča $x$ je $deg(x) = |N_x|$. Če je $deg(x)$ končno za vsak $x \in V$, je graf $G$ **lokalno končen**.
$G$ je **povezan graf**, če za vsaki par vozlišč $x, y \in V$ obstaja končno zaporedje različnih vozlišč $v_1, \ldots, v_n \in V$, da velja $xv_1, v_1v_2, \ldots, v_ny \in E$.
Graf $G$ se imenuje **krog**, če je $V$ končna množica $n$ točk $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $E = \{v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$
Za vsako množico vozlišč $V' \subseteq V$ definiramo **induciran podgraf** $G[V'] = (V', E')$ kjer je $E' = \{xy \in E | x, y \in V'\}$. Torej induciran podgraf ohranja vse povezave iz $G$, ki povezujejo vozlišča iz $V'$. Če je $G'$ induciran podgraf $G$, ga označimo z relacijo $G' \sqsubseteq G$.
Množico vozlišč grafa $G$ označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Unija grafov $G_1 \cup G_2$ je definirana kot graf, ki ima vozlišča $V(G_1) \cup V(G_2)$ in povezave $E(G_1) \cup E(G_2)$.
**Topologija** na množici $X$ je neprazna družina podmnožic $\tau$. Elementom topologije pravimo odprte množice, zadoščati morajo naslednji pogoji: Vsaka poljubna unija odprtih množic je odprta, vsak končen presek odprtih množic je odprt in prazna množica ter celotna množica $X$ sta odprti. Množica $X$ skupaj s topologijo je topološki prostor. Označimo ga z $(X, \tau)$.
**Okolica** točke $x \in X$ je vsaka podmnožica $V \subseteq X$, ki vsebuje odprto množico $U$, ki vsebuje $x$.
Topološki prostor je **povezan**, če se množice $X$ ne da izraziti kot unija dveh disjunktnih nepraznih odprtih množic.
**Topologija Aleksandrova** je topologija v kateri je vsak poljuben presek odprtih množic odprt (v navadni topologiji velja samo za končne preseke). Iz tega sledi, da ima vsaka točka v topologiji Aleksandrova najmanjšo okolico,

ki je odprta.

Topologija nad množico $X$ je $\mathbf{T_0}$, če za vsaki različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica $U$, ki vsebuje $x$ in ne $y$ ali obratno

# Poglavje 2

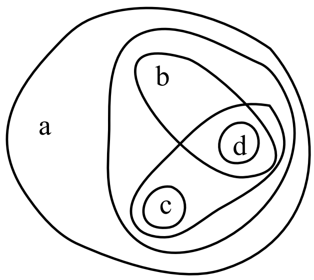
# Končne topologije, delne urejenosti in celični kompleksi

## 2.1 Povezava končnih topologij in delnih urejenosti

Končna topologija je topologija na končni množici. Šibko urejena množica je množica s tranzitivno in refleksivno relacijo. Končne topologije so isti objekti kot končne šibko urejene množice iz drugega zornega kota. Za končno množico $X$ lahko za vsako točko definiramo minimalno odprto množico $U_x$ kot presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo $x$. Minimalne odprte množice vseh točk tvorijo bazo prostora. Taki bazi pravimo minimalna baza. Vsaka baza prostora vsebuje minimalno bazo, ker če je $U_x$ unija odprtih množic, mora biti $x$ vsebovan v eni izmed njih. Tedaj se ta množica sovpada z $U_x$.
Naj bo $X$ topološki prostor z bazo $\{U_x\}_{x \in X}$. Iz topološkega prostora lahko definiramo relacijo $x \leq y$ tako, da sta $x$ in $y$ v relaciji, če velja $x \in U_y$. Podana relacija je šibka urejenost nad $X$. Iz šibke urejenosti lahko definiramo topologijo nad $X$ z bazo $\{y \in X | x \leq y\}_{x \in X}$. Sedaj lahko pokažemo, da je $y \leq x$ če in samo če $y \in U_x$. Če je $y \leq x$, potem je $y$ v vsaki osnovni množici, ki vsebuje $x$, torej je $y \in U_x$. Tudi obratno, če $y \in U_x$, potem je $y \in \{z \in X | z \leq x\}$, torej je $y \leq x$.

Prostor je $T_0$, če za vsaki različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica $U$, ki vsebuje $x$ in ne $y$ ali obratno. Pogoj $T_0$ se sovpada z antisimetričnostjo na končnih šibko urejenih množicah. To pomeni, da če imamo elementa, za katera velja $a \leq b$ in $b \leq a$, pomeni, da $y \in U_x$ in $x \in U_y$. Ker v $T_0$ prostorih za vsak par točk obstaja odprta množica, ki vsebuje eno točko in ne drugo, to pomeni, da je $x = y$. Torej končni $T_0$ prostori so ekvivalentni končni delno urejeni množici.

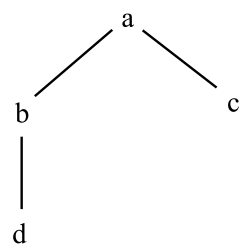
**Primer 2.1.1.** Naj bo $(X, \tau)$ topološki prostor, pri čemer je $X = \{a, b, c, d\}$ končna množica, odprte množice pa so $\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}$ in $\{c, d\}$. Prostor je $T_0$, torej je delno urejen. Slika 2.1.1 prikazuje odprte množice na $X$ z zaprtimi krivuljami. Ker je množica delno urejena, lahko




Slika 2.1: Odprte množice na končni množici $X$ iz primera 2.1.1

prostor predstavimo lepše z Hassejevim diagramom (Slika 2.2). To lahko naredimo za vse končne $T_0$ prostore. Hassejev diagram je graf, kjer so vozlišča elementi množice, povezave pa urejeni pari $(x, y)$, kjer je $x < y$ in ne obstaja $z \in X$, da bi veljalo $x < z < y$. Namesto puščic na povezavah predstavimo elemente višje v diagramu. Torej če je $x < y$, potem je $y$ narisan nad $x$.

Na delni urejenosti lahko definiramo nekaj izrazov. Element $x$ je **maksimalen**, če $y \geq x$ implicira $y = x$ in je **maksimum** delne urejenosti, če velja $y \leq x$ za vsak $y \in X$. Delna urejenost ima **maksimum**, če in samo če obstaja natanko en maksimalen element. **Minimalen** element in **minimum**




Slika 2.2: Hassejev diagram končne delno urejene množice iz primera 2.1.1

sta definirana dualno.
**Veriga** v delni urejenosti je podmnožica elementov, ki so paroma primerljivi.
**Antiveriga** je podmnožica elementov, ki so paroma neprimerljivi.

## 2.2 Simplicialni kompleksi

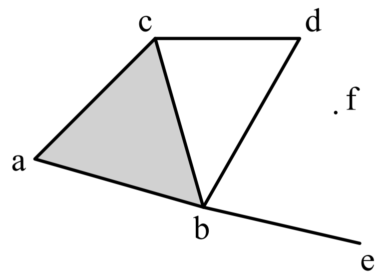
Simplicialni kompleks $K$ je sestavljen iz množice $V_K$ in množice $S_K$, ki je sestavljena iz končnih, nepraznih podmnožic množice $V_K$. $V_K$ se imenuje množica točk, $S_K$ pa množica simpleksov. Veljati mora, da je vsaka podmnožica moči 1 množice $V_K$ simpleks in vsaka neprazna podmnožica simpleksov je simpleks. Lahko malenkost izrabimo notacijo in pišemo $v \in K$ namesto $v \in V_K$ in $\sigma \in K$ namesto $\sigma \in S_K$. V večini primerov bomo simplicialni kompleks identificirali samo kot množico njegovih simpleksov.
Če je simpleks $\sigma$ podmnožica simpleksa $\tau$, pravimo, da je $\sigma$ njegovo **lice**. Simpleks, ki ima $n + 1$ točk, imenujemo $n$-**simpleks** in pravimo, da je **dimenzije** $n$. Torej vse točke $K$ predstavljajo 0-simplekse. Dimenzija $K$ je supremum dimenzij vseh simpleksov v $K$. Če je $K$ prazen, ima dimenzijo -1, če ima $K$ simplekse poljubno velike dimenzije, je dimenzije neskončno.
Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ simpleks dimenzije $n$. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je

množica konveksnih kombinacij točk v $\sigma$.

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa $K$ je množica vseh takih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in K} \lambda_v v, \lambda_v \geq 0$, kjer vsi $v$, ki imajo neničelno $\lambda_v$ tvorijo simpleks v $K$. $|K|$ je torej unija vseh zaprtih simpleksov $K$.

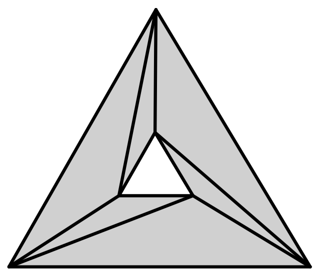
**Primer 2.2.1.** Naj bo $K$ simplicialni kompleks, ki vsebuje simplekse $\{a, b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e\}$, $\{f\}$ in vse njihove neprazne podmnožice. Geometrijska realizacija $|K|$ je prikazana na sliki 2.3.




Slika 2.3: Geometrijska realizacija simplicialnega kompleksa $K$

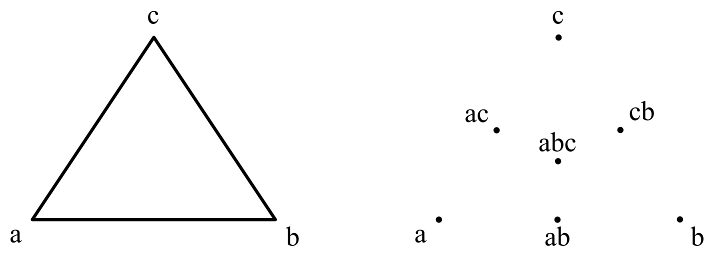
Topološki prostor $X$ je **topološki polieder**,če obstaja simplicialni kompleks $K$, da je $X$ homeomorfen telesu $|K|$. Simplicialni kompleks $K$ imenujemo **triangulacija** poliedra $X$.

**Primer 2.2.2.** Pokažemo lahko, da je kolobar topološki polieder tako, da skiciramo njegovo triangulacijo.

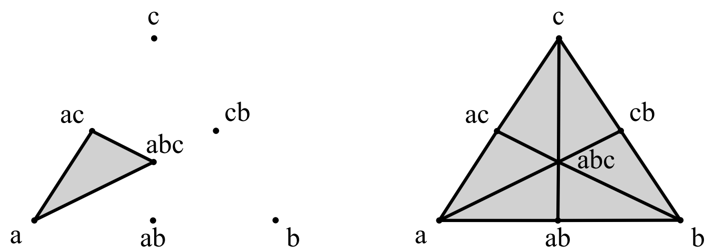


Slika 2.4: Triangulacija kolobarja

Za dan simplicialni kompleks $K$, lahko konstruiramo njegovo **baricentrično subdivizijo** $K'$. Točke $K'$ so simpleksi $K$ in simpleksi $K'$ verige simpleksov $K$. Veriga simpleksov je taka množica $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}, \sigma_i \in K$ , da velja $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_n$.




Slika 2.5: Prvi korak baricentrične subdivizije




Slika 2.6: Simpleks $\{a, ac, abc\}$ in rezultat baricentrične subdivizije

**Primer 2.2.3.** Naj bo $K$ 2-simpleks $\{a, b, c\}$. Če hočemo konstruirati baricentrično subdivizijo $K$, moramo najprej dodati točke za vsak simpleks v $K$ (Slika 2.5). Nato lahko dodamo nove simplekse, ki so verige simpleksov v $K$. Nato dorišemo še najdaljše verige, saj so v tem primeru vsi ostali simpleksi v $K'$ podmnožice teh. Primer take verige je $\{a, ac, abc\}$, saj velja $a \subsetneq ac \subsetneq abc$ (Slika 2.6).

## 2.3 Povezava delnih urejenosti in celičnih kompleksov

# Poglavje 3

# Topologije na grafih

**Definicija 3.0.1.** Za dan topološki prostor $(X, \tau)$ in dano podmnožico $S \subseteq X$, definiramo topologijo, zožano na $S$

$$\tau|_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$$

**Definicija 3.0.2.** Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naj bo $O$ topologija na $V$. $O$ imenujemo topologija na $G$, če velja:

(1) Za vsak povezan $G' \sqsubseteq G$ je $V(G')$ povezan v $O$.

(2) Za vsako podmnožico $V' \subseteq V$, ki je povezana v $O$, je $G[V']$ povezan graf.

**Izrek 3.0.1.** *Naj bo $G$ graf s topologijo $O$. Za vsak induciran podgraf $H \sqsubseteq G$ je topologija, omejena na $V(H)$, topologija na grafu $H$. Tako topologijo označimo z $O|_{V(H)}$.*

*Dokaz.* Za vsak $H' \sqsubseteq H$ imamo $O|_{V(H')} = O|_{V(H)}|_{V(H')}$. Torej vsaka podmnožica $V(H)$ je povezana v $O|_{V(H)}$, če in samo če je povezana v $O$. $H' \sqsubseteq G$ je povezan, če in samo če je $V(H') \subseteq V(H)$ povezan v $O$. Torej so pogoji za topologijo na grafu $H$ izpolnjeni.

□

## 3.1 Topologija dvodelnih grafov

Naj bo $G^b$ povezan dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča. $V$ je torej unija dveh nepraznih disjunktnih množic $V_A$ in $V_B$. Vsaka povezava v $E$ povezuje samo vozlišča iz $V_A$ z vozlišči iz $V_B$.
Definiramo dve topologiji na množici vozlišč $V$ tako, da opišemo topološko okolico vsake točke $x \in V$. To je najmanjša odprta množica, ki vsebuje $x$: $U_x \in O$. Ker $U_x$ ni mogoče razdeliti na odprte množice, je $U_x$ in vsaka podmnožica $U_x$, ki vsebuje $x$ povezana. Poleg tega, je vsaka $U \in O, U \neq \emptyset$ unija določenih $U_x$.
Naj bo $N_x = \{y \mid yx \in E\}$ množica sosednjih točk točke $x$.

$$O_1: \quad U_x := \{x\} \ \ \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \ \ \forall x \in V_B$$
$$O_2: \quad U_x := \{x\} \cup N_x \ \ \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \ \ \forall x \in V_B$$

Topologiji $O_1$ in $O_2$ nista ekvivalentni razen na grafih, ki nimajo povezav. Topologiji lahko nista niti homeomorfni.

**Izrek 3.1.1.** *$O_1$ in $O_2$ sta topologiji na $G^b$.*

*Dokaz.* Naj bo $O$ enak $O_1$ ali $O_2$.

(1) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ povezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ povezana v $O$, torej, da je ne moremo razdeliti na dve disjunktni odprti podmnožici. Za vsaki dve sosednji točki $x$ in $y$ je $U_x \cap U_y$ zmeraj neprazen, saj $y \in U_x$ ali $x \in U_y$. $V(G')$ razdelimo na dve neprazni disjunktni množici $V_1$ in $V_2$, $V(G') = V_1 \cup V_2$. Naj bo $A \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje $V_1$, in $B \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje $V_2$. Tedaj je $A \cap B \neq \emptyset$, torej je $V(G')$ povezan v $O$.

(2) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ nepovezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ nepovezana v $O$. Ker je $G'$ nepovezan, lahko $G'$ razdelimo na unijo dveh ne nujno povezanih induciranih podgrafov $C$ in $D$ tako, da nobeno

vozlišče iz $C$ ni povezano z nobenim vozliščem iz $D$. Torej

$$\bigcup_{x \in V(C)} U_x \cap V(D) = \emptyset = V(C) \cap \bigcup_{x \in V(D)} U_x$$

$V(C)$ in $V(D)$ lahko razpišemo:

$$V(C) = V(G') \cap \left( \bigcup_{x \in V(C)} U_x \right)$$

$$V(D) = V(G') \cap \left( \bigcup_{x \in V(D)} U_x \right)$$

Vidimo, da sta $V(C)$ in $V(D)$ disjunktni odprti množici v $O|_{V(G')}$, torej je $V(G')$ nepovezana v $O$.

□

Naj bo $O$ poljubna topologija na $G^b$. Naslednje leme držijo za $\forall x \in V$

**Lema 3.1.1.** $\{x\} \subseteq U_x \subseteq \{x\} \cup N_x$

*Dokaz.* $\{x\} \subseteq U_x$ sledi iz definicije. Recimo, da obstaja $x'$, da $U_{x'} \nsubseteq \{x'\} \cup N_{x'}$ ne drži, potem obstaja $y \in U_{x'}$, $y \notin (\{x'\} \cup N_{x'})$. Ker je $\{x', y\} \subseteq U_x$, je ta množica povezana v $O$. Ker je $G^b[\{x', y\}]$ nepovezan graf, je to v protislovju z definicijo topologije na $G^b$. □

**Lema 3.1.2.** $U_x = \{x\}$ *ali* $U_x = \{x\} \cup N_x$

*Dokaz.* Recimo, da lema ne drži. Potem obstaja $x'$, da $U_{x'} \neq \{x'\}$ in $U_{x'} \subsetneq \{x'\} \cup N_{x'}$. Torej obstaja $y \in N_{x'}$, $y \notin U_{x'}$. Ker je $y \in N_{x'}$, sta $x$ in $y$ povezana. Ker sta povezana in je $G^b$ dvodelen graf, velja $N_{x'} \cup N_y = \emptyset$. Ker sta $U_{x'}$ in $U_y$ podmnožici $N'_x$ in $N_y$, je bodisi $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, bodisi $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, sledi protislovja, ker $\{x', y\}$ je povezana množica v $O$. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$, potem je $U_{x'} = \{x'\}$, kar je v protislovju z predpostavko $U_{x'} \neq \{x'\}$. □

**Lema 3.1.3.** *Za vsak* $y \in N_x$ *velja* $U_x = \{x\} \iff U_y = \{y\} \cup N_y$

*Dokaz.* Če je $U_x = \{x\}, U_y = \{y\}$ za katerikoli $y$, sledi protislovje, saj je $\{x, y\}$ nepovezana v $O$, $y$ pa je sosed $x$. Če velja $U_x = \{x\} \cup N_x, U_y = \{y\} \cup N_y$ za katerikoli $y$, potem je $U_x \cap U_y = \{x, y\} \in O$ (ker je $y \in N_x \Rightarrow x \in N_y$). Ker je $U_x$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje $x$, je $U_x = \{x, y\}$. Prav tako je tudi $U_y = \{x, y\}$. Zaradi leme 3.1.2, sledi, da je $N_x = \{y\}$ in $N_y = \{x\}$. Ker je graf povezan in je edini sosed $x$ $y$, sta ti dve točki cel graf $V(G^b) = \{x, y\}$, kar je protislovje s predpostavko, da ima $G^b$ vsaj tri vozlišča. □

Iz zadnje leme sledi:

**Izrek 3.1.2.** *Vsak povezan, dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča, ima natanko dve topologiji. To sta $O_1$ in $O_2$:*

$$O_1: \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B$$
$$O_2: \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B$$

## 3.2 Obstoj topologije na grafu

**Posledica 3.2.1.** *Krog $C$, ki ima sodo število vozlišč $n > 3$, nima topologije.*

*Dokaz.* Za vsak $x \in V(C), G^b_x := C[\{x\} \cup N_x]$ je dvodelen graf, ki ima vsaj tri vozlišča. Recimo, da ima $C$ topologijo $O$ na vsakem $G^b_x$ je inducirana topologija $O_1$ ali $O_2$. Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja:

$$O|_{V(G^b_x)} \cong O_1 \iff O|_{V(G^b_y)} \cong O_2$$

sicer, bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana v $O$ in to je v protislovju z predpostavko, da sta $x$ in $y$ povezana. Če si izberemo neko začetno točko $X_0 \in V(C)$, lahko zaporedno izbiramo sosednje točke in opazujemo inducirane topologije.

$$O|_{V(G^b_{X_0})} \cong O_1$$
$$O|_{V(G^b_{X_1})} \cong O_2$$
$$O|_{V(G^b_{X_3})} \cong O_1$$

Ker ima krog sodo število vozlišč, se na $x_0$ inducira topologija $O_2$. Torej na podgraf $G^b_{x_0}$ sta inducirani topologiji $O_1$ in $O_2$, kar je v protislovju. □

Iz posledice 3.2.1 in iz Izreka 3.0.1 sledi:

**Izrek 3.2.1.** *Vsak graf $G$, ki vsebuje krog $C$ s lihim številom vozlišč, kot induciran podgraf, nima topologije.*

# Literatura


[1] Jonathan A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Springer, 8 2011.

[2] Alain Bretto. *Digital Topologies on Graphs*, pages 65–82. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN 978-3-540-68020-8. doi: 10.1007/978-3-540-68020-8_3. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-540-68020-8_3`.

[3] Daniel Nogly and Markus Schladt. Digital Topology on graphs. *Computer vision and image understanding*, Vol. 63(No. 2):394–396, Marec 1996. doi: 10.1006/cviu.1996.0029. URL `https://doi.org/10.1006/cviu.1996.0029`.

[4] Azriel Rosenfeld. Digital Topology. *The American mathematical monthly*, 86(8):621, 10 1979. doi: 10.2307/2321290. URL `https://doi.org/10.2307/2321290`.

[5] Aleš Vavpetič. REŠENE NALOGE IZ ALGEBRAIČNE TOPOLOGIJE. Dosegljivo: `https://users.fmf.uni-lj.si/vavpetic/AT/AT.pdf`, 2011. [Dostopano: 21. 7. 2024].