Digitalna topologija na grafih

Predstavitev diplomskega dela

Jakob Drusany

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

16. september 2024

Mentor: prof. dr. Petar Pavešić

Motivacija

Zakaj hočemo topologije na slikah?

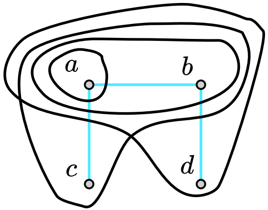
Topologije na grafih

Definicija

Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na V. $\mathcal{T}$ imenujemo kompatibilna topologija na G, če velja, da je $V' \subseteq V$ topološko povezan če in samo če je $G[V']$ grafovsko povezan.

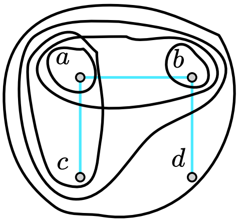
Primer kompatibilne topologije

$$\mathcal{T}_k = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$



Primer topologije na grafu, ki ni kompatibilna

$$\mathcal{T}_n = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}.$$



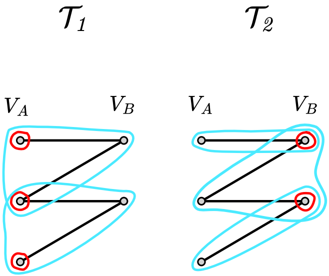
Kompatibilne topologije na dvodelnih grafih

Izrek

Vsak povezan, dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča, ima natanko dve kompatibilni topologiji. To sta $\mathcal{T}_1$ in $\mathcal{T}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 : \quad & U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B \\
\mathcal{T}_2 : \quad & U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B
\end{aligned}$$

Kompatibilne topologije na dvodelnih grafih



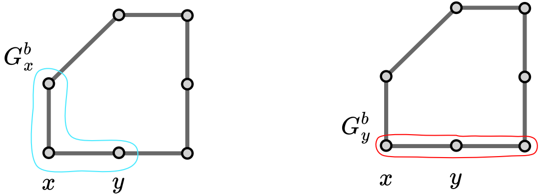
$$\mathcal{T}_1 : \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B$$
$$\mathcal{T}_2 : \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B$$

Kompatibilna topologija na lihem ciklu

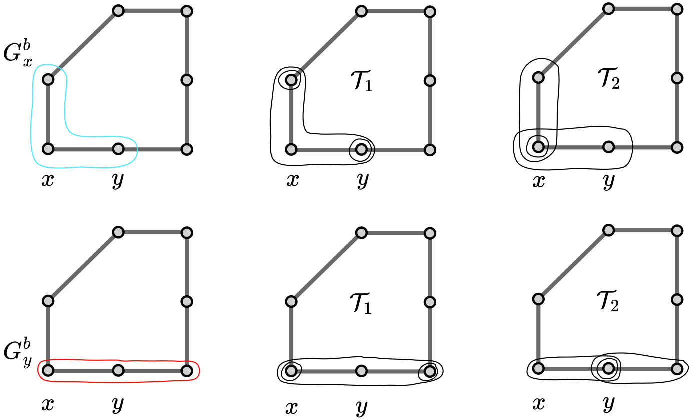
Izrek

Cikel C, ki ima liho število vozlišč $n > 3$, nima kompatibilne topologije.

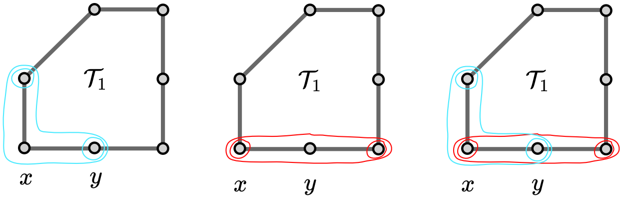
$G_v^b := C[\{v\} \cup N_v]$



Kompatibilna topologija na lihem ciklu



Kompatibilna topologija na lihem ciklu

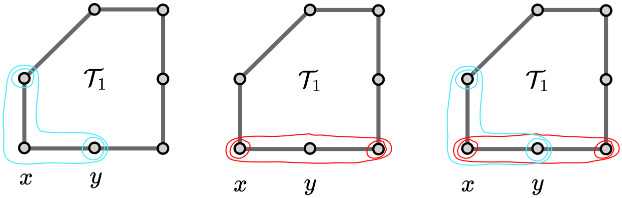


Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja

$$\mathcal{T}|_{V(G_x^b)} \cong \mathcal{T}_1 \iff \mathcal{T}|_{V(G_y^b)} \cong \mathcal{T}_2.$$

sicer bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana.

Kompatibilna topologija na lihem ciklu



Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja

$$\mathcal{T}|_{V(G_x^b)} \cong \mathcal{T}_1 \iff \mathcal{T}|_{V(G_y^b)} \cong \mathcal{T}_2.$$

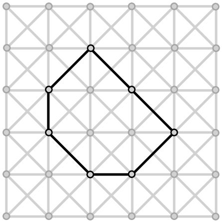
sicer bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana.

Obstoj kompatibilne topologije

Izrek

Naj bo G graf, v katerem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine. Potem G nima kompatibilne topologije.

Zaradi izreka lahko sklepamo, da 8-povezana mreža nima kompatibilne topologije, saj v njem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine.



Obstoj kompatibilne topologije

Izrek

Naj bo G graf, v katerem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine. Potem G nima kompatibilne topologije.

Zaradi izreka lahko sklepamo, da 8-povezana mreža nima kompatibilne topologije, saj v njem obstaja induciran podgraf, ki je cikel lihe dolžine.