Poglavje 1

Uvod

Procesiranje slik je zelo pomembno in hitro rastoče področje računalništva z obširno uporabo na različnih področjih. Lahko je to avtomatizirano branje dokumentov v poslovnem svetu, avtomatski nadzor kakovosti v proizvodnji, medicinska diagnostika na podlagi radiologije in še mnogo drugih načinov uporabe. Večina dela na tem področju se ukvarja z problemom analize slik. To pomeni, da za dano sliko hočemo pridobiti opis slike na podlagi objektov na sliki, regij na sliki in njihovih medsebojnih relacij. Na primer dokument je sestavljen iz znakov na nekem ozadju; krvni razmaz je sestavljen iz krvnih celic na nekem ozadju; rentgenska slika je sestavljena iz različnih organov; itd. Torej prva faza procesiranja je ločevanje slike na različne regije ali na objekte v ospredju in ozadje. Ta proces imenujemo **segmentacija**.
Segmentacija je postopek dodeljevanja vsakega slikovnega elementa (piksla) v eno ali več razredov. Eden izmed preprostih pristopov je binarna segmentacija, kjer sliko razdelimo na dve regiji, ozadje in ospredje na podlagi nekega praga. Če je svetlost piksla večja od praga, ga dodelimo v ospredje, sicer v ozadje ali obratno. Obstaja veliko več kompleksnejših metod segmentacije, ki uporabljajo več podatkov kot samo svetlost pikslov.
Ko sliko enkrat segmentiramo v manjše regije, lahko začnemo analizirati lastnosti teh regij in njihove medsebojne relacije. Nekatere lastnosti so odvisne od svetlosti pikslov, druge so odvisne samo od pozicije pikslov. Zelo osnovne

so topološke lastnosti regij, ki vključujejo koncepte kot so povezanost, sosednost in so neodvisne od velikosti in oblike regij.
Topološke lastnosti so uporabne zaradi različnih razlogov. Po tem ko smo izbrali neko regijo, na primer ospredje dokumenta, jo ponavadi hočemo še segmentirati v manjše povezane regije, ki predstavljajo posamezne objekte kot so znaki. Lahko hočemo skrčiti regijo na okostje, ki predstavlja skrčeno obliko regije in ohranja povezanost.

TODO: Še kak primer za uporabo topoloških lastnosti

V večini literature se sliko predstavi kot neke vrste graf. Ponavadi tak, da so vozlišča piksli, povezave pa so sosednosti med piksli, bodisi 4-sosednost bodisi 8-sosednost. Opazovanje topoloških lastnosti slik torej porodi potrebo po raziskovanju topologij na grafih.

1.1 Digitalne topologije

Podatkovne strukture v računalništvu so števne, torej edine množice, ki jih lahko uporabljamo so diskretne ali digitalne množice. Pridevnik digitalno uporabimo kot nasprotje za zvezno. Diskretne topološke prostore, lahko definiramo kot topološke prostore, v katerih velja, da ima vsaka točka najmanjšo okolico. Pri navadni topologiji to lahko ne drži, saj lahko okoli vsake točke najdemo poljubno majhno okolico.

TODO: Lepši uvod v digitalne topologije

1.2 Definicije

Vsi grafi bodo neusmerjeni, brez izoliranih vozlišč in preprosti torej brez zank in večkratnih povezav med vozlišči. **Graf** $G = (V, E)$ vsebuje množico vozlišč V in množico povezav $E \subseteq \binom{V}{2}$. Povezavo $\{x, y\} \in E; x, y \in V$ lahko označimo tudi z xy.
Množica sosednjih vozlišč vozlišča x je $N_x = \{y \in V | xy \in E\}$.

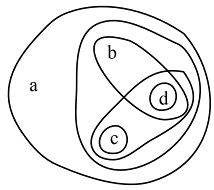
Število sosednjih vozlišč vozlišča x je $deg(x) = |N_x|$. Če je $deg(x)$ končno za vsak $x \in V$, je graf G **lokalno končen**.
G je **povezan graf**, če za vsaki par vozlišč $x, y \in V$ obstaja končno zaporedje različnih vozlišč $v_1, \ldots, v_n \in V$, da velja $xv_1, v_1v_2, \ldots, v_ny \in E$.
Graf G se imenuje **krog**, če je V končna množica n točk $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $E = \{v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$
Za vsako množico vozlišč $V' \subseteq V$ definiramo **induciran podgraf** $G[V'] = (V', E')$ kjer je $E' = \{xy \in E | x, y \in V'\}$. Torej induciran podgraf ohranja vse povezave iz G, ki povezujejo vozlišča iz V'. Če je G' induciran podgraf G, ga označimo z relacijo $G' \sqsubseteq G$.
Množico vozlišč grafa G označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Unija grafov $G_1 \cup G_2$ je definirana kot graf, ki ima vozlišča $V(G_1) \cup V(G_2)$ in povezave $E(G_1) \cup E(G_2)$.
Topologija na množici X je neprazna družina podmnožic τ. Elementom topologije pravimo odprte množice, zadoščati morajo naslednji pogoji: Vsaka poljubna unija odprtih množic je odprta, vsak končen presek odprtih množic je odprt in prazna množica ter celotna množica X sta odprti. Množica X skupaj s topologijo je topološki prostor. Označimo ga z (X, τ).
Okolica točke $x \in X$ je vsaka podmnožica $V \subseteq X$, ki vsebuje odprto množico U, ki vsebuje x.
Topološki prostor je **povezan**, če se množice X ne da izraziti kot unija dveh disjunktnih nepraznih odprtih množic.
Topologija Aleksandrova je topologija v kateri je vsak poljuben presek odprtih množic odprt (v navadni topologiji velja samo za končne preseke). Iz tega sledi, da ima vsaka točka v topologiji Aleksandrova najmanjšo okolico, ki je odprta.
Topologija nad množico X je $\mathbf{T_0}$, če za vsaki različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica U, ki vsebuje x in ne y ali obratno

Poglavje 2

Končne topologije in delne urejenosti

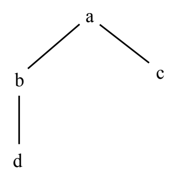
Končna topologija je topologija na končni množici. Šibko urejena množica je množica s tranzitivno in refleksivno relacijo. Končne topologije so isti objekti kot končne šibko urejene množice iz drugega zornega kota. Za končno množico X lahko za vsako točko definiramo minimalno odprto množico U_x kot presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo x. Minimalne odprte množice vseh točk tvorijo bazo prostora. Taki bazi pravimo minimalna baza. Vsaka baza prostora vsebuje minimalno bazo, ker če je U_x unija odprtih množic, mora biti x vsebovan v eni izmed njih. Tedaj se ta množica sovpada z U_x.
Naj bo $x \leq y$, če $x \in U_y$ šibka urejenost nad X. Iz take šibke urejenosti lahko definiramo topologijo nad X z bazo $\{y \in X | x \leq y\}_{x \in X}$. Sedaj lahko pokažemo, da je $y \leq x$ če in samo če $y \in U_x$. Če je $y \leq x$, potem je y v vsaki osnovni množici, ki vsebuje x, torej je $y \in U_x$. Tudi obratno, če $y \in U_x$, potem je $y \in \{z \in X | z \leq x\}$, torej je $y \leq x$.
Prostor je T_0, če za vsaki različni točki $x, y \in X$ obstaja odprta množica U, ki vsebuje x in ne y ali obratno. Aksiom T_0 se sovpada z antisimetričnostjo na končnih šibko urejenih množicah. To pomeni, da če imamo elementa, za katera velja $a \leq b$ in $b \leq a$, se sovpada z $y \in U_x$ in $x \in U_y$. Torej končni T_0 prostori so ekvivalentni končni delno urejeni množici.

Primer 2.0.1. Naj bo (X, τ) topološki prostor, pri čemer je $X = \{a, b, c, d\}$ končna množica, odprte množice pa so $\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}$ in $\{c, d\}$. Prostor je T_0, torej je delno urejen. Slika 2.1 prikazuje odprte množice na X z zaprtimi krivuljami.w Ker je množica delno urejena, lahko



Slika 2.1: Odprte množice na končni množici X iz primera 2.0.1

prostor predstavimo lepše z Hassejevim diagramom. To lahko naredimo za vse končne T_0 prostore. Hassejev diagram je graf, kjer so vozlišča elementi množice, povezave pa urejeni pari (x, y), kjer je $x < y$ in ne obstaja $z \in X$, da bi veljalo $x < z < y$. Namesto puščic na povezavah predstavimo elemente višje v diagramu. Torej če je $x < y$, potem je y narisan nad x.



Slika 2.2: Hassejev diagram končne delno urejene množice iz primera 2.0.1

2.1 topologija Aleksandrova

2.2 Topologija Aleksandrova na slikah

(wikipedia)

> In mathematics, an **abstract** cell complex is an **abstract** set with Alexandrov topology

Abstract cell complexes differ from simplicial cell complexes because the elements of simplicial cell complexes are simplices. Simplices are a generalization of the notion of a triangle or tetrahedron to arbitrary dimensions. The simplex is so-named because it represents the simplest possible polytope in any given dimension. Image recognition works with square pixels.
(wikipedia)

> Abstract complexes allow the introduction of classical topology (Alexandrov-topology) in grids being the basis of digital image processing. This possibility defines the great advantage of abstract cell complexes: It becomes possible to exactly define the notions of connectivity and of the boundary of subsets. The definition of dimension of cells and of complexes is in the general case different from that of simplicial complexes (see below). The notion of an abstract cell complex differs essentially from that of a CW-complex because an abstract cell complex is no Hausdorff space. This is important from the point of view of computer science since it is impossible to explicitly represent a non-discrete Hausdorff space in a computer. (The neighborhood of each point in such a space must have infinitely many points).

Problemi pri uporabi Topologije Aleksandrove za procesiranje slik

Image -¿ Abstract Cell complex -¿ Alexandrov topology
(paper)

> it lacks some essential properties which are desirable for certain applications.

- Topologija Aleksandrova ni invariantna za translacije.
  Cell complexes are not translation invariant because the cells are as-

signed a label that is their coordinate.
(wikipedia)

> A digital image may be represented by a 2D Abstract Cell Complex (ACC) by decomposing the image into its ACC dimensional constituents: points (0-cell), cracks/edges (1-cell), and pixels/faces (2-cell).
>
> This decomposition together with a coordinate assignment rule to unambiguously assign coordinates from the image pixels to the dimensional constituents permit certain image analysis operations to be carried out on the image with elegant algorithms such as crack boundary tracing, digital straight segment subdivision, etc. One such rule maps the points, cracks, and faces to the top left coordinate of the pixel.

- Ne ohranja povezanosti?
  Ne nujno. To je implicirano iz cilja članka:

  > In this paper the following problem is investigated: Is it possible for a given graph G with a set V of vertices to introduce a topology on V, by declaring certain subsets of V as "open,' so that a subset of V is topologically connected if and only if it is connected in G (i.e., if the corresponding subgraph of G is connected)?

Problemi pri uporabi Topologije nad digitalnimi prostori

> It is a generalization of the problem of constructing a topology on a digital space which retains one of the standard notions of digital connectivity (i.e., "4-connectivity', "8-connectivity') In 1970 Marcus and Wyse defined a topology on $\mathbb{Z}^n$ in which any subset is topologically connected if and only if it is 2n-connected. In 1978 Chassery [2] proved this topology to be the only one on

> $\mathbb{Z}^2$ compatible with 4-connectivity. He further proved that there doesn't exist a topology on $\mathbb{Z}^2$ which retains the 8-connectivity. A much simpler proof of this latter fact was given quite recently by Latecki. As a by-product of our investigations, a different proof which is extremely simple can be given for this assertion. At the end of the article, we will mention a further proof in which the Alexandroff Specialization relation is used.

AN ALEXANDROFF TOPOLOGY ON GRAPHS Pravi, da ima digitalna
topologija problem, da ne obstaja na vseh grafih (opisano v glavnem članku) in definira "graphic topology'.

Poglavje 3

Topologije na grafih

Definicija 3.0.1. Za dan topološki prostor (X, τ) in dano podmnožico $S \subseteq X$, definiramo topologijo, zožano na S

$$\tau|_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$$

Definicija 3.0.2. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naj bo O topologija na V. O imenujemo topologija na G, če velja:

(1) Za vsak povezan $G' \sqsubseteq G$ je $V(G')$ povezan v O.

(2) Za vsako podmnožico $V' \subseteq V$, ki je povezana v O, je $G[V']$ povezan graf.

Izrek 3.0.1. *Naj bo G graf s topologijo O. Za vsak induciran podgraf $H \sqsubseteq G$ je topologija, omejena na $V(H)$, topologija na grafu H. Tako topologijo označimo z $O|_{V(H)}$.*

Dokaz. Za vsak $H' \sqsubseteq H$ imamo $O|_{V(H')} = O|_{V(H)}|_{V(H')}$. Torej vsaka podmnožica $V(H)$ je povezana v $O|_{V(H)}$, če in samo če je povezana v O. $H' \sqsubseteq G$ je povezan, če in samo če je $V(H') \subseteq V(H)$ povezan v O. Torej so pogoji za topologijo na grafu H izpolnjeni.

□

3.1 Topologija dvodelnih grafov

Naj bo G^b povezan dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča. V je torej unija dveh nepraznih disjunktnih množic V_A in V_B. Vsaka povezava v E povezuje samo vozlišča iz V_A z vozlišči iz V_B.
Definiramo dve topologiji na množici vozlišč V tako, da opišemo topološko okolico vsake točke $x \in V$. To je najmanjša odprta množica, ki vsebuje x: $U_x \in O$. Ker U_x ni mogoče razdeliti na odprte množice, je U_x in vsaka podmnožica U_x, ki vsebuje x povezana. Poleg tega, je vsaka $U \in O, U \neq \emptyset$ unija določenih U_x.
Naj bo $N_x = \{y \mid yx \in E\}$ množica sosednjih točk točke x.

$$\begin{aligned} O_1 :\quad & U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B \\ O_2 :\quad & U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B \end{aligned}$$

Topologiji O_1 in O_2 nista ekvivalentni razen na grafih, ki nimajo povezav. Topologiji lahko nista niti homeomorfni.

Izrek 3.1.1. *O_1 in O_2 sta topologiji na G^b.*

Dokaz. Naj bo O enak O_1 ali O_2.

(1) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ povezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ povezana v O, torej, da je ne moremo razdeliti na dve disjunktni odprti podmnožici. Za vsaki dve sosednji točki x in y je $U_x \cap U_y$ zmeraj neprazen, saj $y \in U_x$ ali $x \in U_y$. $V(G')$ razdelimo na dve neprazni disjunktni množici V_1 in V_2, $V(G') = V_1 \cup V_2$. Naj bo $A \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_1, in $B \in O|_{V(G')}$ najmanjša odprta množica, ki vsebuje V_2. Tedaj je $A \cap B \neq \emptyset$, torej je $V(G')$ povezan v O.

(2) Naj bo $G' \sqsubseteq G^b$ nepovezan graf. Dokazati želimo, da je množica $V(G')$ nepovezana v O. Ker je G' nepovezan, lahko G' razdelimo na unijo dveh ne nujno povezanih induciranih podgrafov C in D tako, da nobeno

vozlišče iz C ni povezano z nobenim vozliščem iz D. Torej

$$\bigcup_{x \in V(C)} U_x \cap V(D) = \emptyset = V(C) \cap \bigcup_{x \in V(D)} U_x$$

$V(C)$ in $V(D)$ lahko razpišemo:

$$V(C) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(C)} U_x \right)$$

$$V(D) = V(G') \cap \left(\bigcup_{x \in V(D)} U_x \right)$$

Vidimo, da sta $V(C)$ in $V(D)$ disjunktni odprti množici v $O|_{V(G')}$, torej je $V(G')$ nepovezana v O.

$\square$

Naj bo O poljubna topologija na G^b. Naslednje leme držijo za $\forall x \in V$

Lema 3.1.1. $\{x\} \subseteq U_x \subseteq \{x\} \cup N_x$

Dokaz. $\{x\} \subseteq U_x$ sledi iz definicije. Recimo, da obstaja x', da $U_{x'} \nsubseteq \{x'\} \cup N_{x'}$ ne drži, potem obstaja $y \in U_{x'}$, $y \notin (\{x'\} \cup N_{x'})$. Ker je $\{x', y\} \subseteq U_x$, je ta množica povezana v O. Ker je $G^b[\{x', y\}]$ nepovezan graf, je to v protislovju z definicijo topologije na G^b. $\square$

Lema 3.1.2. $U_x = \{x\}$ *ali* $U_x = \{x\} \cup N_x$

Dokaz. Recimo, da lema ne drži. Potem obstaja x', da $U_{x'} \neq \{x'\}$ in $U_{x'} \subsetneq \{x'\} \cup N_{x'}$. Torej obstaja $y \in N_{x'}$, $y \notin U_{x'}$. Ker je $y \in N_{x'}$, sta x in y povezana. Ker sta povezana in je G^b dvodelen graf, velja $N_{x'} \cup N_y = \emptyset$. Ker sta $U_{x'}$ in U_y podmnožici N'_x in N_y, je bodisi $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, bodisi $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \emptyset$, sledi protislovja, ker $\{x', y\}$ je povezana množica v O. Če velja $U_{x'} \cap U_y = \{x'\}$, potem je $U_{x'} = \{x'\}$, kar je v protislovju z predpostavko $U_{x'} \neq \{x'\}$. $\square$

Lema 3.1.3. *Za vsak* $y \in N_x$ *velja* $U_x = \{x\} \iff U_y = \{y\} \cup N_y$

Dokaz. Če je $U_x = \{x\}, U_y = \{y\}$ za katerikoli y, sledi protislovje, saj je $\{x, y\}$ nepovezana v O, y pa je sosed x. Če velja $U_x = \{x\} \cup N_x, U_y = \{y\} \cup N_y$ za katerikoli y, potem je $U_x \cap U_y = \{x, y\} \in O$ (ker je $y \in N_x \Rightarrow x \in N_y$). Ker je U_x najmanjša odprta množica, ki vsebuje x, je $U_x = \{x, y\}$. Prav tako je tudi $U_y = \{x, y\}$. Zaradi leme 3.1.2, sledi, da je $N_x = \{y\}$ in $N_y = \{x\}$. Ker je graf povezan in je edini sosed x y, sta ti dve točki cel graf $V(G^b) = \{x, y\}$, kar je protislovje s predpostavko, da ima G^b vsaj tri vozlišča. □

Iz zadnje leme sledi:

Izrek 3.1.2. *Vsak povezan, dvodelen graf $G^b = (V, E)$, ki ima vsaj tri vozlišča, ima natanko dve topologiji. To sta O_1 in O_2:*

$$O_1: \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_B$$
$$O_2: \quad U_x := \{x\} \cup N_x \;\; \forall x \in V_A, \quad U_x := \{x\} \;\; \forall x \in V_B$$

3.2 Obstoj topologije na grafu

Posledica 3.2.1. *Krog C, ki ima sodo število vozlišč $n > 3$, nima topologije.*

Dokaz. Za vsak $x \in V(C), G_x^b := C[\{x\} \cup N_x]$ je dvodelen graf, ki ima vsaj tri vozlišča. Recimo, da ima C topologijo O na vsakem G_x^b je inducirana topologija O_1 ali O_2. Za vsaki dve sosednji točki $x, y \in V(C)$ velja:

$$O|_{V(G_x^b)} \cong O_1 \iff O|_{V(G_y^b)} \cong O_2$$

sicer, bi $U_x = \{x\}$ in $U_y = \{y\}$, kar bi pomenilo, da je množica $\{x, y\}$ nepovezana v O in to je v protislovju z predpostavko, da sta x in y povezana. Če si izberemo neko začetno točko $X_0 \in V(C)$, lahko zaporedno izbiramo sosednje točke in opazujemo inducirane topologije.

$$O|_{V(G_{X_0}^b)} \cong O_1$$
$$O|_{V(G_{X_1}^b)} \cong O_2$$
$$O|_{V(G_{X_3}^b)} \cong O_1$$

Ker ima krog sodo število vozlišč, se na x_0 inducira topologija O_2. Torej na podgraf $G_{x_0}^b$ sta inducirani topologiji O_1 in O_2, kar je v protislovju. □

Iz posledice 3.2.1 in iz Izreka 3.0.1 sledi:

Izrek 3.2.1. *Vsak graf G, ki vsebuje krog C s lihim številom vozlišč, kot induciran podgraf, nima topologije.*

Literatura