Zadanie 3 RPiS

Jakub Jankowski, 337119

11 maja 2024

1 Wyznaczanie MGF-a rozkładu wykładniczego

Z definicji MGF-a (oraz zauważając, że $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$):

$$\begin{aligned}
M_x(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \int_0^\infty e^{tX} f(x) dx \\
&= \int_0^\infty e^{tX} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{x(t-\lambda)} dx \\
&= [\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}]|_0^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty} [\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)}] = \frac{\lambda}{t-\lambda} [\lim_{x\to\infty} e^{x(t-\lambda)} - 1]
\end{aligned}$$

Dla $t = \lambda$ M_x jest nieoznaczona, a dla $t > \lambda$ M_x dąży do nieskończoności.
Musimy zatem ograniczyć dziedzinę M_x do $t < \lambda$. Zakładając taką dziedzinę otrzymujemy:

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda} [\lim_{x\to\infty} e^{x(t-\lambda)} - 1] = \frac{\lambda}{t-\lambda} [0 - 1] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

2 Oszacowania dla $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda a)$

- Markov

$$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda a} = \frac{M_x'(0)}{\lambda a} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda^2}}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda^2 a}$$

- Chebyshev
(używając $V(X) = M_x''(0) - (M_X'(0))^2 = \frac{2\lambda}{(\lambda-0)^3} - (\frac{\lambda}{(\lambda-0)^2})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$)

$$P(X \geqslant \lambda a) = P(X - E(X) \geqslant \lambda a - E(X)) \leqslant \frac{V(X)}{(\lambda a - E(X))^2} = \frac{1}{\lambda^2(\lambda a - \frac{1}{\lambda})^2}$$

- Chernoff

$$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant e^{-\lambda a t} M_x(t) = e^{-\lambda a t} \frac{\lambda}{\lambda - t} = g(t)$$

Szukamy t dla którego g przyjmuje minimum

$$g'(t) = \frac{e^{-\lambda a t}(-a\lambda^3 + a\lambda^2 t + \lambda)}{(\lambda - t)^2} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 t = a\lambda^3 - \lambda$$

$$t = \frac{a\lambda^2 - 1}{a\lambda}$$

$$t = \lambda - \frac{1}{a\lambda}$$

Dla $t = \lambda - \frac{1}{a\lambda}$ g przyjmuje minimum, więc po podstawieniu mamy

$$P(X \geqslant \lambda a) \leqslant e^{1 - a\lambda^2} a\lambda^2$$

3 Tabela z wartościami

Mając k = 9, m = 1 liczymy $P(X \geqslant \lambda a)$ dla $\lambda = k + m + 1 = 11$

a	Markov	Chebyshev	Chernoff	Dokładna
3	2.75482e-3	7.63102e-6	2.21465e-155	0
4	2.06612e-3	4.28653e-6	8.32934e-208	0
6	1.37741e-3	1.9025e-6	9.94116e-313	0
10	8.26446e-4	6.84144e-7	$\frac{1210}{e^{1}209} \approx 0$	0