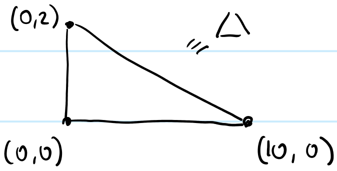
Zad. Egz. 1 (337119)

piątek, 15 marca 2024 17:47

$m = 2$, $n = 10$



Na całym trójkącie (X,Y) ma stałą gęstość C. Skoro $\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} C\,dx\,dy = 1$, to $C = \frac{1}{P_\triangle} = \frac{1}{10}$.

$$\left(f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & (x,y) \in \triangle \\ 0, & \text{wpp} \end{cases} \right)$$

Przejdźmy do nowej zmiennej (S,T), gdzie $S = 2X + 3Y$ i $T = Y$. Odwróćmy to przejście i policzmy Jacobian.

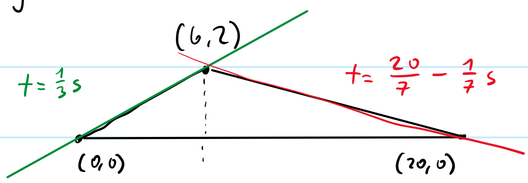
$$\begin{cases} S = 2X + 3Y \\ T = Y \end{cases} \to \begin{cases} 2X = 3Y - S \\ Y = T \end{cases} \to \begin{cases} X = \frac{3T - S}{2} \\ Y = T \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Stąd $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) \cdot |J| = \frac{1}{2} \cdot C = \frac{1}{20}$

Na jakim obszarze $g(s,t)$ jest niezerowe:

(x,y)		(s,t)
$(0,0)$	$S = 2X + 3Y$	$(0,0)$
$(0,2)$	$\longrightarrow$	$(6,2)$
$(10,0)$	$T = Y$	$(20,0)$



Od razu odczytujemy, że dla nast. t przy ustalonych wartościach s $g(s,t) = \frac{1}{20}$: $\begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{1}{3}s, & \text{gdy } s \in [0,6] \\ 0 \leq t \leq \frac{20}{7} - \frac{1}{7}s, & \text{gdy } s \in [6,20] \end{cases}$

Wyznaczmy gęstość brzegową $f_S(s)$ zmiennej (S,T).

$$\begin{cases} s \in [0,6],\ t \in [0, \frac{1}{3}s] & f_S(s) = \int_0^{\frac{s}{3}} \frac{1}{20}\,dt = \frac{1}{20} t \Big|_0^{\frac{s}{3}} = \frac{s}{60} \\ s \in [6,20],\ t \in [0, \underbrace{\tfrac{20}{7} - \tfrac{s}{7}}_{(*)}] & f_S(s) = \int_0^{(*)} \frac{1}{20}\,dt = \frac{1}{20} t \Big|_0^{(*)} = \frac{1}{7} - \frac{s}{140} \\ s \notin [0,20] & f_S(s) = 0 \end{cases}$$

f_S jest gęstością ponieważ $\forall s \in \mathbb{R}\ f_S(s) \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f_S(s)\,ds = \int_0^6 \frac{s}{60}\,ds + \int_6^{20} \frac{1}{7} - \frac{s}{140}\,ds = \frac{36}{120} + \left[\left(\frac{20}{7} - \frac{6}{7} \right) - \left(\frac{400}{280} - \frac{36}{280} \right) \right] = 0{,}3 + 2 - 1{,}3 = 1$$