

V105

Magnetische Momente

Versuchsort: TU Dortmund

Julian Hayduk

Alex Nuss

Durchführung: 13.12.2022, Abgabe: 20.12.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	2
2	Theorie	2
2.1	Bestimmung des magnetischen Moment über die Gravitation	2
2.2	Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer T . .	3
2.3	Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession eines Magneten	3
3	Durchführung	4
3.1	Aufbau	4
3.2	Bestimmung über Gravitation	4
3.3	Bestimmung über Schwingungsdauer	4
3.4	Bestimmung über Präzession	4
4	Auswertung	6
4.1	Bestimmung über Gravitation	6
4.2	Bestimmung über Periodendauer	7
4.3	Bestimmung über Präzession	8
5	Diskussion	10
6	Literaturverzeichnis	11

1 Ziel des Versuches

Es soll das magnetische Moment eines Permamagneten über drei verschiedene Methoden bestimmt werden.

2 Theorie

Neben Permamagneten können auch durch Strom durchflossenen Leiterschleifen Magnetfelder induziert werden, diese Magnetfelder werden charakteristisch durch das magnetische Moment

$$\mu = I \cdot A \quad (1)$$

beschrieben, hierbei beschreibt I den Strom durch die Leiterschleife mit der Querschnittsfläche A . Für einen Permamagneten ist die Berechnung kompliziert weswegen das magnetische Moment experimentell über ein Drehmoment bestimmt wird. Das Drehmoment wird beschrieben durch:

$$D_B = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (2)$$

Aus Gleichung 2 folgt das auf den Dipol solange eine Drehmoment wirkt, bis das gesuchte magnetische Moment μ parallel zum Magnetfeld B ist. Damit das erzeugte Magnetfeld möglichst homogen ist wird meistens ein Helmholtz-Spulenpaar verwendet. Das Spulenpaar besteht aus zwei in gleicher Richtung durchflossenen meist kreisförmigen Spulen, welche so angeordnet sind, dass der Mittelpunkt auf einer Achse senkrecht zum Radialvektor liegt. Außerdem entspricht der Abstand d zwischen den einzelnen Spulen in etwa dem Spulenradius R . Somit kann das Magnetfeld auf der Symmetrieachse durch den Kreismittelpunkt als homogen angesehen werden. Das Magnetfeld kann mit dem Biot-Savart-Gesetz berechnet werden

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

für N -Windungen folgt hier raus

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e_r \cdot N \quad (3)$$

Das Magnetfeld des Spulenpaars ergibt sich zu

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2 N}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

2.1 Bestimmung des magnetischen Moment über die Gravitation

Bei diesem Verfahren wird die Gravitationskraft

$$F_G = mg$$

zur Bestimmung des magnetischen Momentes verwendet. Die Masse m im Abstand r bewirkt dabei folgendes Drehmoment

$$D_G = m(\vec{r} \times \vec{g}) \quad (5)$$

Analog zu Gleichung 2 wird dieses minimal für $r \parallel g$. Entgegengesetzt zu diesem Drehmoment wirkt das Magnetfeld des Helmholtz-Spulenpaars, sodass ein Gleichgewichtszustand zwischen D_G und D_B nur bei einer bestimmten Magnetfeldstärke erreicht wird.

2.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer T

Um das magnetische Moment mithilfe der Schwingungsdauer zu bestimmen muss zunächst ein Körper so in Schwingung versetzt werden dass seine Bewegung im Magnetfeld einem harmonischen Oszillator entspricht. Eine solche Bewegung lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$-|\mu_{Dipol} \times B| = J_K \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6)$$

Die Gleichung 6 wird durch die Schwingungsdauer T gelöst. Unter Verwendung von

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{Dipol} B} \quad (7)$$

lässt sich das magnetische Moment μ_{Dipol} über das Trägheitsmoment J_K des Körpers und der verwendeten Magnetfeldstärke B bestimmen.

2.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession eines Magneten

Wirkt eine äußere Kraft auf die Drehachse eines rotierenden Körpers, dann führt die Figurenachse eine Präzessionsbewegung aus. Die Präzessionsbewegung im Magnetfeld der Helmholtzspulen lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\mu_{Dipol} \times B = \frac{dL_K}{dt} \quad (8)$$

beschreiben, wobei die Präzessionsfrequenz Ω_p

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|} \quad (9)$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist. Den Drehimpuls $L_K = J_K \omega$ der Kugel kann über das Trägheitsmoment J_K der Billiardkugel und deren Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ bestimmt werden. Da sich die Präzessionsfrequenz Ω_p aus der Zeit T_p für einen Umlauf berechnen lässt, lässt sich das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel über

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\mu_{Dipol} B}{2\pi L_K} \quad (10)$$

berechnen.

Durch ein Stroboskop wird die notwendige Konstanz der Rotationsfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ kontrolliert. Wenn die weiße Markierung auf der Kugel stationär unter dem Stroboskop erscheint, dann hat die Kugel die am Gerät eingestellte Frequenz. Da die Frequenz exponentiell mit der Zeit abnimmt, muss direkt nach dem Erreichen der eingestellten Frequenz mit der Messung begonnen und eine geeignete Frequenz gewählt werden, zwischen $\nu = 4 \text{ Hz}$ und $\nu = 6 \text{ Hz}$, weil hier der Abfall der Exponentialkurve bereits hinreichend langsam geschieht (etwa 2 Hz pro Minute).

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Zur Erzeugung des äußeren Magnetfeldes wird ein Helmholtz-Spulenpaar verwendet welches folgende Parameter besitzt: Windungen $N = 195$, Abstand der Spulen zueinander $d = 0.138 \text{ m}$ und Spulenradius $R = 0.109 \text{ m}$. In der Mitte dieses Spulenpaares befindet sich ein Messingpodest auf dem sich eine Kugel der Masse $m_K = 141.65 \text{ g}$ und mit eingegossenem Permamagneten befindet. Das Podest ist mit einem Kompressor verbunden welcher ein Luftkissen erzeugt wodurch die Kugel näherungsweise Reibungsfrei auf dem Podest liegt. Der in der Kugel befindliche Permamagnet ist so ausgerichtet das sein magnetisches Moment in Richtung eines auf der Kugel befindlichen Stieles zeigt. Die Spulen sowie das Luftkissen werden über ein externes Steuergerät bedient.

3.2 Bestimmung über Gravitation

Die Aluminiumstange mit der verstellbaren Masse wird in die Kugel gesteckt, die auf dem Messingzylinder platziert wird. Am Steuergerät wird das Luftkissen eingeschaltet und die Feldrichtung auf „up“ und der Feldgradient auf „off“ gestellt. Für einen vorher festgelegten Abstand r der Hebelmasse wird das \mathbf{B} -Feld über die Stromstärke I so reguliert, dass sich die Kugel im Gleichgewicht befindet. Die Werte für r und I werden notiert und die Messung für verschiedene Abstände r wiederholt.

3.3 Bestimmung über Schwingungsdauer

Die vorherigen Einstellungen am Steuergerät werden beibehalten. Es werden 10 Messungen für unterschiedliche Magnetfeldstärken \mathbf{B} durchgeführt. Die Kugel wird um einen kleinen Winkel ausgelenkt, sodass sie wie ein harmonischer Oszillator schwinkt. Anschließend werden 10 Periodendauern T am Stück gemessen und das Ergebnis gemittelt.

3.4 Bestimmung über Präzession

Am Steuergerät wird jetzt noch zusätzlich das Stroboskop mit einer Frequenz von 5,5 Hertz eingeschaltet. Die Kugel wird in eine möglichst stabile Rotation versetzt, um später eine ungewollte Nutation zu vermeiden. Dabei soll die Drehachse nicht vertikal sein. Mit

Hilfe des Stroboskops wird die Frequenz der Kugel eingestellt. Wenn der weiße Punkt auf der Kugel stationär erscheint, stimmt die Frequenz mit der des Stroboskops überein. Jetzt wird das Magnetfeld eingeschaltet und die Kugel beginnt zu präzedieren. Es wird die Zeit T von 3 Umläufen gemessen und die mittlere Umlaufzeit gebildet. Die Messung wird durchgeführt mit 10 verschiedenen Magnetfeldstärken \boldsymbol{B} .

4 Auswertung

4.1 Bestimmung über Gravitation

Abstand Gewicht zum Stiel / cm	Stromstärke / A	Magnetfeldstärke / mT
4.0	1.1	1.4917
4.5	1.2	1.6273
5.0	1.3	1.7629
5.5	1.4	1.8985
6.0	1.5	2.0341
6.5	1.6	2.1698
7.0	1.7	2.3054
7.5	1.8	2.4410
8.0	1.9	2.5766
8.5	2.0	2.7122

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung über die Gravitation

Durch umschreiben von Gleichung 1 zu

$$\mu_{Dipol} = \frac{mrg}{B} \quad (11)$$

mit m als Masse, g der Erdbeschleunigung und $\frac{r}{B}$ als Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich für das magnetische Moment. In der Tabelle 1 sind die Messdaten und die ausgerechneten Magnetfeldstärken des Spulenpaares zu finden. In der Abbildung 1 wird das Magnetfeld B gegen den Abstand des Gewichts zum Stiel der Kugel aufgetragen. Die Ausgleichsgerade wird mittels Python berechnet und ergibt für die Parameter : Gleichung (1) lässt sich dann zu umstellen und das magnetische Moment kann berechnet werden:

$$\mu_{Dipol} = (0,501 \pm 0,008) \text{ A}^2/\text{m}$$

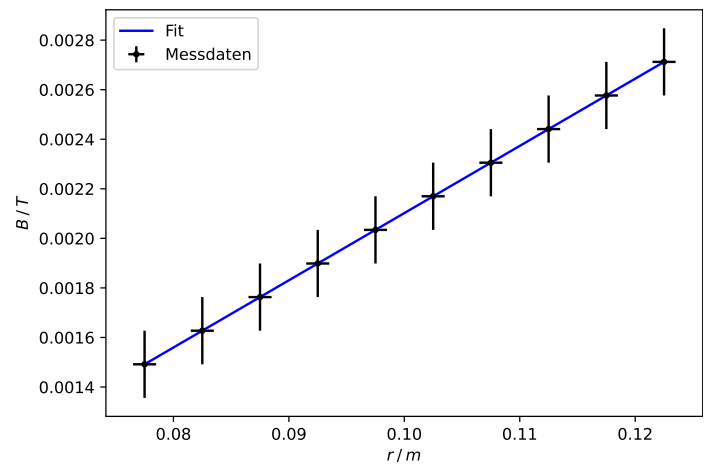


Abbildung 1: Plot zur Bestimmung über Gravitation

4.2 Bestimmung über Periodendauer

Stromstärke / A	Magnetfeldstärke / mT	Dauer von 10 Perioden / s
0.2	0.271	40.2
0.4	0.542	31.0
0.6	0.813	23.3
0.8	1.084	19.5
1.0	1.356	17.2
1.2	1.627	15.5
1.4	1.898	14.2
1.6	2.169	13.0
1.8	2.440	9.0
2.0	2.712	8.5

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung über die Periodendauer

In der Tabelle 2 sind die Messdaten und die ausgerechneten Magnetfeldstärken des Spulenpaares sowie die gemittelte Schwingungsdauer zu finden. In der Abbildung 2 wird die quadrierte Schwingungsdauer T^2 gegen den Kehrwert des Magnetfeldes geplottet. Die Ausgleichsgrade wurde mittels Python berechnet.

Gleichung (7) lässt sich dann umstellen zu

$$\mu_{Dipol} = 4\pi^2 J_K \frac{1}{a} \quad (12)$$

mit $a = T^2 \cdot B$. Das magnetische Moment lässt sich dann einfach berechnen:

$$\mu_{Dipol} = (0,281 \pm 0,018) \text{ A}^2/\text{m}$$

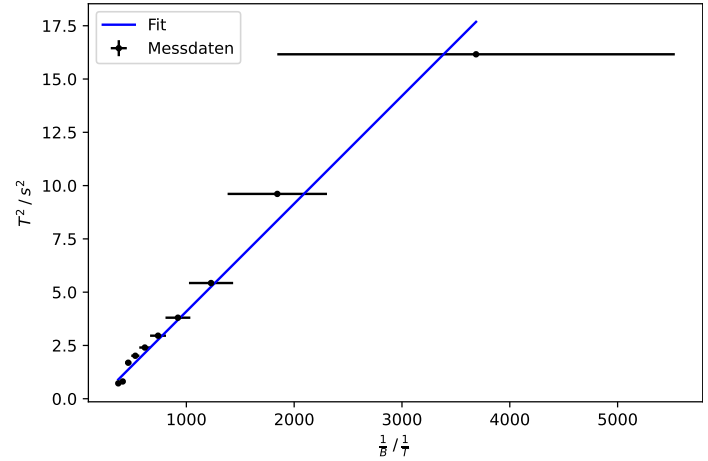


Abbildung 2: Plot zur Bestimmung über die Periodendauer

4.3 Bestimmung über Präzession

Stromstärke / A	Magnetfeldstärke / mT	Periodendauer / s
1.0	1.356	10
1.2	1.627	9.4
1.4	1.898	8.9
1.6	2.169	7.2
1.8	2.440	5.7
2.0	2.712	4.4
2.2	2.983	4.2
2.4	3.254	3.9
2.6	3.525	3.2
2.8	3.797	3.0

Tabelle 3: Messdaten zur Bestimmung über die Präzession

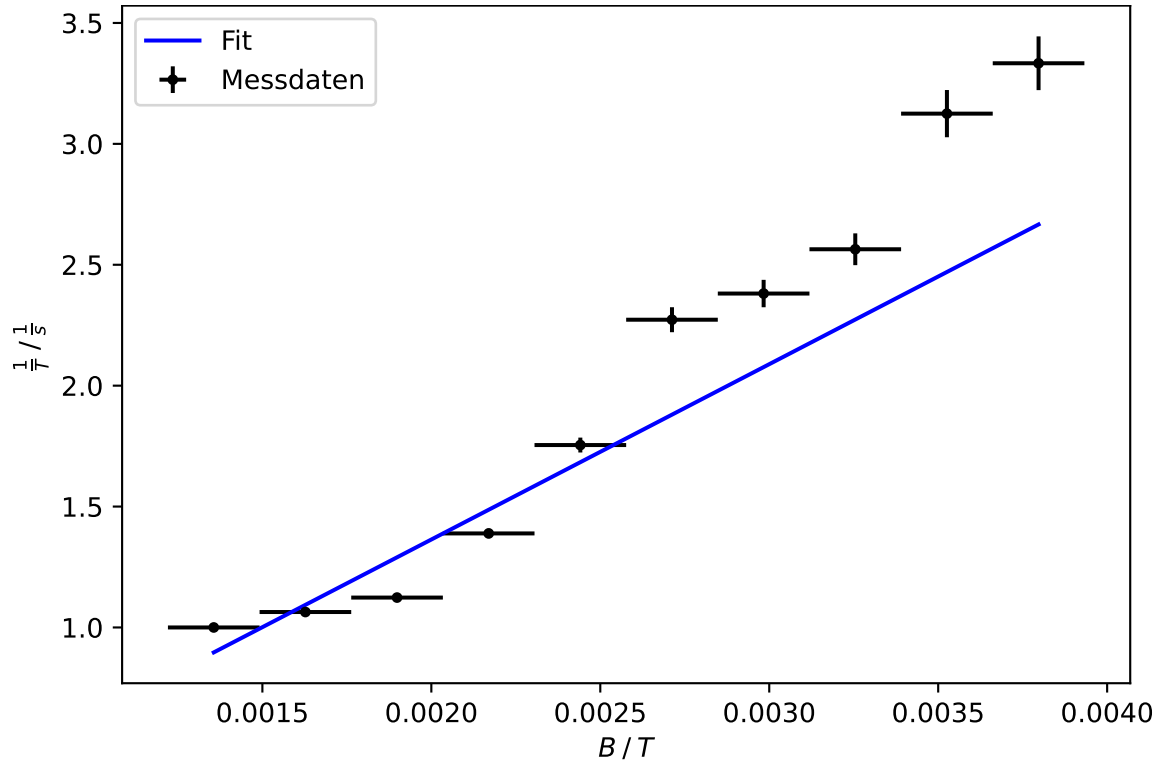


Abbildung 3: Plot zur Bestimmung über die Präzession

In der Tabelle 3 sind die Messdaten zu finden.

In der Abbildung 3 wird B gegen $1/T$ aufgetragen. Die Ausgleichsgrade wurde mittels Python berechnet. Um das magnetische Moment bestimmen zu können muss jetzt noch Gleichung (10) umgeformt werden

$$\mu_{Dipol} = 2\pi L_K a \quad (13)$$

mit $a = 1/(T \cdot B)$ und $L_K = J_K \omega$. Das letzte Verfahren liefert dann für das magnetische Moment den Wert:

$$\mu_{Dipol} = (0,86 \pm 0,03) \text{ A}^2/\text{m}$$

5 Diskussion

Messmethode	Experimentelles Ergebnis für μ_{Dipol}
Gravitation	0.5 Am^2
Periodendauer	0.28 Am^2
Präzession	0.86 Am^2

Tabelle 4: Messergebnisse

Durch einen Vergleich der drei Messmethoden und deren Ergebnissen lassen sich Aussagen über deren Genauigkeit und Aufwand treffen. Den Geringsten Aufwand bei der Durchführung ergibt sich aus dem Messen der Schwingungsdauer. Dort wird lediglich um einen kleinen Winkel ausgelenkt und es ist gut observabel wie die Schwingung zu bestimmen ist. Dagegen liefert die Messung über Präzession den höchsten Aufwand. Durch den hohen Zeitaufwand beim einstellen der richtigen Frequenz durch das Stroboskop und die darauf noch folgende Messung der Umlaufdauer, wird hier am meisten Zeit gebraucht um Messergebnisse zu erhalten. Desweiteren nimmt die Frequenz der Kugel während des Durchlaufens der Präzession ab, welches besonders bei geringem Magnetfeld und somit langer Umlaufdauer zu Fehlern führt. Die besten Messergebnisse mit Hinblick auf den Erwartungswert liefert hingegen das Messen über die Gravitation. Das einstellen des Gleichgewichts ist aufwändiger als die Messung der Schwingungsdauer, jedoch mit hinreichend ruhiger Hand ist diese Methode nur marginal aufwändiger. Mit den erhobenen Messdaten ist zu sehen, dass die Genauigkeit der Methoden des Messens über Schwingung und Präzession gegenüber der Messung über die Gravitation, im Nachteil sind und unpräzisere Ergebnisse liefern. Auf Basis dieser Messergebnisse und dem Vergleich aller Methoden ist die Aussage zu treffen, dass die Methode der Bestimmung des magnetischen Moments über die Gravitation die genaueste und zu bevorzugende Methode ist.

6 Literaturverzeichnis

[1] TU Dortmund. V105: Magnetische Momente. 2022.