IGSFF LOGO TODO

Grünewaldstraße 12a - 38104 Braunschweig - T. 470 5850

Seminarfach:

Facharbeit des Schülers *Jakob Rzeppa*

mit dem Thema:

Numerisches finden von Nullstellen - Implementierung in Java

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

2 Newton-Horner-Methode

2.1 Herleitung und Funktionsweise

2.1.1 Verfahren

2.1.2 Endbedingungen

2.1.3 Startpunkte

2.2 Beweis

2.3 Probleme

2.4 Implementierung

3 Durand-Kerner-Methode

Die Weierstraß-(Durand-Kerner)-Methode ist ein iteratives Verfahren, zur numerischen Bestimmung aller Nullstellen einer Polynomfunktion. Sie wurde zwischen 1859 und 1891 von Karl Weierstrass, als Teil seines Beweises zum Fundamentalsatz der Algebra, entwickelt. E. Durand und Immo Kerner überführten dieses Verfahren in einen Computeralgorythums.

3.1 Herleitung und Funktionsweise

Die Durand-Kerner-Methode kann Nullstellen von univariaten Polynomfunktionen der Form $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ mit Grad $n > 2$ und Koeffizient $a_n = 1$ numerisch approximieren. Dabei werden sich die Eigenschaften einer Polynomfunktion zugunste gemacht.

3.1.1 Difinition

Sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ ein univariates Polynom mit komplexen Koeffizienten und führenden Koeffizienten $a_n = 1$. Nach dem Fundermentalsatz der Algebra hat $f(x)$ genau n Nullstellen $\xi_n; \xi_{n-1}; ...; \xi_1 \in C$ hat und in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Daraus folgt $f(x) = (x-\xi_n)(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)$. Nun kann für ξ_n umgestellt werden:

$$(x-\xi_n)(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1) = f(x)$$
$$\frac{(x-\xi_n)(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)}{(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)} = \frac{f(x)}{(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)}$$
$$x-\xi_n = \frac{f(x)}{(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)}$$
$$-\xi_n = -x + \frac{f(x)}{(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)}$$
$$\xi_n = x - \frac{f(x)}{(x-\xi_{n-1})...(x-\xi_1)}$$

Um ξ_n zu bestimmen müssen zunächst aber Startpunkte für alle ξ definiert werden. Dabei können beliebige Komplexe Zahlen gewählt werden, die

3.2 Beispiel

In dem nächsten Abschnitt wird die Durand-Kerner-Methode auf eine Polynomfunktion vierten Grades angewand.
Sei $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (x-r)(x-s)(x-t)(x-u)$ und die Nullstellen $r; s; t; u \in C$ sind gesucht.
Jetzt kann in die zuvor gezeigte Formel, für die Durand-Kerner-Methode, eingesetzt werden:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{(r_n-s_n)(r_n-t_n)(r_n-u_n)}$$
$$s_{n+1} = r_n - \frac{f(s_n)}{(s_n-r_n)(s_n-t_n)(s_n-u_n)}$$
$$t_{n+1} = r_n - \frac{f(t_n)}{(t_n-r_n)(t_n-s_n)(t_n-u_n)}$$
$$u_{n+1} = r_n - \frac{f(u_n)}{(u_n-r_n)(u_n-s_n)(u_n-t_n)}$$

Nun müssen wir Startpunkte $r_0; s_0; t_0; u_0$ bestimmen. Dabei ist der Radius des Kreises r auf der complexen Ebene $|\frac{na_0}{2a_1}| + |\frac{a_{n-1}}{2na_n}| = |\frac{4*(-4)}{2*3}| + |\frac{4}{2*4*1}|$

Die Genauigkeit liegt bei vier Nachkommastellen
und es kann deswegen zu kleinen Abweichungen kommen.

Iteration	r	s	t	u
0	2,9256 + 1,2118i	-1,2118 + 2,9256i	-2,9256 - 1,2118i	1,2118 - 2,9256i
1	1,2993 + 0,8722i	-1,8873 + 2,0075i	-3,405 - 0,7665i	-0,0069 - 2,1133i
2	1,0806 + 0,5889i	-1,1784 + 0,4767i	-4,1287 + 0,3433i	0,2265 - 1,4089
3	0,7884 + 0,3817i	-0,2138 + 0,7292i	-4,6806 - 0,0989	0,1061 - 1,012i
4	0,6759 - 0,234i	0,0243 + 0,9804i	-4,613 - 0,0021i	-0,0872 - 0,9549i
5	0,8621 + 0,0197i	-0,1294 + 0,9945i	-4,6149	-0,1177 - 1,0141i
6	0,842 + 0,0004i	-0,1134 + 1,0078i	-4,6149	-0,1136 - 1,0082i
7	0,8421	-0,1136 + 1,0081i	-4,6149	-0,1136 - 1,0081
8	0,8421	-0,1136 + 1,0081i	-4,6149	-0,1136 - 1,0081

Da sich zwischen Iteration acht und neun die Werte (Genauigkeit = 4 Nachkommastellen) gleich blieben ist die Durand-Kerner-Methode abgeschlossen. Die Nullstellen der Polynomfunktion $f(x) = x^4+4x^3-2x^2+3x-4$ sind bei ca. $0,8421; -4,6149; -0,1136-1,0081i; -0,1136+1,0081$. Um das zu überpfüfen kann jeder der Werte in $f(x)$ eingesetzt werden. Wenn die Ergebnisse Null oder Zahlen sehr nah an Null sind dann sind die Nullstellen gefunden.

$f(0,8421) \approx 0; f(-4,6149) \approx 0; f(-0,1136 - 1,0081i) \approx 0; f(-0,1136 + 1,0081i) \approx 0$

Daraus kann geschlossen werden, dass alle vier Werte Approximationen der Nullstellen der Polynomfunktion $f(x)$ sind. Außerdem, kann aus dem Fundermentalsatz der Algebra, welcher besagt, dass eine univariate Polynomfunktion genau n (Grad der Funktion) Nullstellen hat, geschlossen werden, dass alle Nullstellen von $f(x)$ gefunden wurden, da n gleich der Anzahl der gefunden Nullstellen ist.

3.2.1 Endbedingungen

3.2.2 Startpunkte

3.3 Beweis

3.4 Probleme

3.5 Implementierung

4 Vergleich und Anwendung

5 Fazit

6 Code