Ausblick

Für die Herleitung der Weierstraß-Iteration werden wir zuerst die Weierstraß-Iteration der normierten Polynomfunktion

$$p(x) := x^3 + 3x^2 + 2x \tag{1}$$

betrachten. Dabei nutzen wir die Startpunkte

$$z_{1,2,3}^{(0)} := -3, -\frac{-3}{2}, 1 \tag{2}$$

. Daraufhin werden wir zu einer allgemeinen Herleitung der Weierstraß-Iteration kommen.

Herleitung

Die Weierstraß-Iteration kann in zwei gleichzeitig agierende Annährungen unterteilt werden: die Annährung der einzelnen Nullstelle über den Korrekturterm (Newton-Annährung) und die Annährung über die Verbesserung des Korrekturterms (Korrektur-Annährung).

1. Einzelne Nullstellen werden genauer 2. Formel wird genauer durch die anderen genaueren Nullstellen

Betrachten einzelnd mit Annahmen dass das andere stimmt

Annährung über den Korrekturterm (Newton-Annährung)

Korrekturterm immer eine Nullstelle bei z_j (weil $p(z) = 0$)
Schräge Asymptote
In der Nähe der Nullstellen biegt die Funktion, so dass die Nullstelle getroffen wird

Newton-Methode Polynom durch Ableitung dividieren, um eine gebrochen Rationale Funktion zu erzeugen, die ihre Nullstellen an den Nullstellen der Funktion hat und ihre Definitionslücken an den Extempunkten. Dabei gibt es bestimmte Gebiete von welchen aus die Startpunkte gegen die zu dem Gebiet gehörende Nullstelle konvergiert.

Newton-Korrektur: Funktion mit den drei Nullstellen der Funktion und schräger Asymptote

Da schräge Asymptote und Nullstellen der Funktion gleich $p(x)$ gibt es Bereiche, für welche mit wiederholender Iteration eine spezifische Nullstelle getroffen wird

Beispiel

1. Annährung der Weierstraß-Iteration genau das gleiche, nur mit einer Anderen Funktion im Divisor, was allerdings keinen unterschied macht, da die Nullstellen der Funktionen gleich sind und eine schräge Asymptote gegeben ist. Nur die beiden Sachen müssen erfüllt sein.

Daher 1. Annährung auch ohne 2. Annährung zur Nullstelle führend, da genau wie Newton-Methode ist.

Annährung über die Verbesserung des Korrekturterms (Korrektur-Annährung)

Mit genaueren Annährungen der anderen Nullstellen wird die schräge Asymptote ähnlicher mit der Funktion $x - z_j$. Daher wird die Korrektur immer Effizienter (konvergiert schneller).

Dabei bedingt die 1. Annährung die 2. Annährung, was bedeutet, dass die 2. Annährung nur als verschnellerung der 1. fungiert.

Die zweite sorgt aber auch dafür, dass alle Nullstellen gefunden werden, da wenn zwei Annährungen zu der gleichen Nullstelle konvergieren greift die 2. Annährung ein, da eine der Annährungen näher an die Nullstelle kommte und somit diese Nullstelle mit einer Definitionslücke bei der Korrektur der anderen Annährung überlappt und somit die andere Annährung sich eine andere Nullstelle zum konvergieren sucht

???

Zuerst Newton-Methode, dann Polynomdivision, dann Newton-Methode, usw.

Jetzt aber ohne die anderen Nullstellen gefunden zu haben schon Dividieren, weil schneller (parallel)

Wieso die Ableitung? Weil man lineare Funktion bzw. gebrochenrationale Funktion mit schräger Asymptote braucht also Funktion mit grad $n-1$ im Nenner, wo die Nullstellen aber noch da sind und man dass dadurch bekommen. Quasi belibige funktion mit grad $n-1$ nutzbar, ableitung aber besonders gut

Jetzt einfach nicht Ableitung, sondern Funktion mit den sonstigen Nullstellen (Polynomdivision direkt dabei)

Gleichzeitig beides machen