

IGSFF LOGO TODO

Grünewaldstraße 12a - 38104 Braunschweig - T. 470 5850

Seminarfach:

Facharbeit des Schülers *Jakob Rzeppa*

mit dem Thema:

Numerisches finden von Nullstellen -
Implementierung in Java

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| I | Einleitung | 1 |
| 0.1 | Problemstellung | 2 |
| 1 | Newton-Horner-Methode | 2 |
| 1.1 | Herleitung und Funktionsweise | 2 |
| 1.1.1 | Verfahren | 2 |
| 1.1.2 | Endbedingungen | 2 |
| 1.1.3 | Startpunkte | 2 |
| 1.2 | Beweis | 2 |
| 1.3 | Probleme | 2 |
| 1.4 | Implementierung | 2 |
| 2 | Durand-Kerner-Methode | 2 |
| 2.1 | Herleitung und Funktionsweise | 2 |
| 2.1.1 | Difinition | 3 |
| 2.2 | Beispiel | 3 |
| 2.2.1 | Endbedingungen | 4 |
| 2.2.2 | Startpunkte | 4 |
| 2.3 | Beweis | 4 |
| 2.4 | Probleme | 4 |
| 2.5 | Implementierung | 4 |
| 3 | Vergleich und Anwendung | 4 |
| 4 | Fazit | 4 |
| 5 | Code | 4 |

Teil I

Einleitung

0.1 Problemstellung

1 Newton-Horner-Methode

1.1 Herleitung und Funktionsweise

1.1.1 Verfahren

1.1.2 Endbedingungen

1.1.3 Startpunkte

1.2 Beweis

1.3 Probleme

1.4 Implementierung

2 Durand-Kerner-Methode

Die Weierstraß-(Durand-Kerner)-Methode ist ein iteratives Verfahren, zur numerischen Bestimmung aller Nullstellen einer Polynomfunktion. Sie wurde zwischen 1859 und 1891 von Karl Weierstrass, als Teil seines Beweises zum Fundamentalsatz der Algebra, entwickelt. E. Durand und Immo Kerner überführten dieses Verfahren in einen Computeralgorithmus.

2.1 Herleitung und Funktionsweise

Die Durand-Kerner-Methode kann Nullstellen von univariaten Polynomfunktionen der Form $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ mit Grad $n > 2$ und Koeffizient $a_n = 1$ numerisch approximieren. Dabei werden sich die Eigenschaften einer Polynomfunktion zugunste gemacht.

2.1.1 Definition

Sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ein univariates Polynom mit komplexen Koeffizienten und führenden Koeffizienten $a_n = 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $f(x)$ genau n Nullstellen $\xi_n; \xi_{n-1}; \dots; \xi_1 \in \mathbb{C}$ hat und in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Daraus folgt, dass $f(x) = (x - \xi_n)(x - \xi_{n-1}) \dots (x - \xi_1)$

2.2 Beispiel

In dem nächsten Abschnitt wird die Durand-Kerner-Methode auf eine Polynomfunktion vierten Grades angewand.

Sei $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (x - r)(x - s)(x - t)(x - u)$ und die Nullstellen $r; s; t; u \in \mathbb{C}$ sind gesucht.

Jetzt kann in die zuvor gezeigte Formel, für die Durand-Kerner-Methode, eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{f(r_n)}{(r_n - s_n)(r_n - t_n)(r_n - u_n)} \\ s_{n+1} &= r_n - \frac{f(s_n)}{(s_n - r_n)(s_n - t_n)(s_n - u_n)} \\ t_{n+1} &= r_n - \frac{f(t_n)}{(t_n - r_n)(t_n - s_n)(t_n - u_n)} \\ u_{n+1} &= r_n - \frac{f(u_n)}{(u_n - r_n)(u_n - s_n)(u_n - t_n)} \end{aligned}$$

Nun müssen wir Startpunkte $r_0; s_0; t_0; u_0$ bestimmen. Dabei ist der Radius $r = \sqrt[4]{}$

Die Genauigkeit liegt bei vier Nachkommastellen
und es kann deswegen zu kleinen Abweichungen kommen.

| Iteration | r | s | t | u |
|-----------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | | | | |
| 1 | 0,8272 - 0,503i | -2,1218 + 0,2944i | -2,5816 - 2,3835i | -0,1237 + 2,5921i |
| 2 | 0,7756 - 0,3774i | -3,0186 - 0,9195i | -1,923 + 0,1716i | -0,1237 + 2,5921i |
| 3 | 0,65 - 0,2003i | -4,1241 + 2,1928i | -0,5909 - 2,8371i | 0,0649 + 0,8445i |
| 4 | 0,7207 - 0,0975i | -3,8755 + 0,3979i | -0,7855 - 1,1372i | -0,0597 + 0,8368i |
| 5 | 0,802 + 0,0141i | -4,6561 - 0,2162i | 0,0545 - 0,7654i | -0,2004 + 0,9675i |
| 6 | 0,8501 - 0,0067i | -4,603 - 0,0028i | -0,1507 - 0,9906i | -0,0964 + 1,0001i |
| 7 | 0,8419 - 0,0002i | -4,615 | -0,1131 - 1,0076i | -0,1138 + 1,0079i |
| 8 | 0,8421 | -4,6149 | -0,1136 - 1,0081i | -0,1136 + 1,0081i |
| 9 | 0,8421 | -4,6149 | -0,1136 - 1,0081i | -0,1136 + 1,0081i |

Da sich zwischen Iteration acht und neun die Werte (Genauigkeit = 4 Nachkommastellen) gleich blieben ist die Durand-Kerner-Methode abgeschlossen. Die Nullstellen der Polynomfunktion $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ sind bei ca. $0,8421$; $-4,6149$; $-0,1136 - 1,0081i$; $-0,1136 + 1,0081i$. Um das zu überprüfen kann jeder der Werte in $f(x)$ eingesetzt werden. Wenn die Ergebnisse Null oder Zahlen sehr nah an Null sind dann sind die Nullstellen gefunden.

$$f(0,8421) \approx 0; f(-4,6149) \approx 0; f(-0,1136 - 1,0081i) \approx 0; f(-0,1136 + 1,0081i) \approx 0$$

Daraus kann geschlossen werden, dass alle vier Werte Nullstellen der Polynomfunktion $f(x)$ sind. Außerdem, da vier Komplexe Nullstellen gefunden wurden und eine Polynomfunktion nach dem Fundamentalsatz der Algebra immer genau so viele Nullstellen wie ihr Grad hat, wurden alle Nullstellen der Polynomfunktion $f(x)$ gefunden.

2.2.1 Endbedingungen

2.2.2 Startpunkte

2.3 Beweis

2.4 Probleme

2.5 Implementierung

3 Vergleich und Anwendung

4 Fazit

5 Code