Ausblick

Für die Herleitung der Weierstraß-Iteration werden wir zuerst die Weierstraß-Iteration der normierten Polynomfunktion

$$p(x) := x^3 + 3x^2 + 2x \tag{1}$$

betrachten. Dabei nutzen wir die Startpunkte

$$z_{1,2,3}^{(0)} := -3, -\frac{-3}{2}, 1 \tag{2}$$

. Daraufhin werden wir zu einer allgemeinen Herleitung der Weierstraß-Iteration kommen.

Grundlagen

Wir haben die allgemeine Form der Weierstraß-Iteration

$$z_k^{(i+1)} = \frac{p(z_k^{(i)})}{\prod_{j=1;j\neq k}^{n}(z_k^{(i)} - z_j^{(i)})} \tag{3}$$

. Aus dieser können wir die drei Weierstraß-Korrekturterme

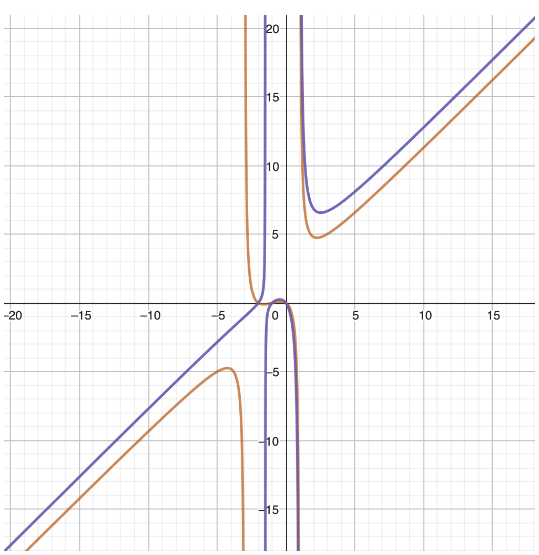
$$z_1^{(i+1)} = \frac{p(z_1^{(i)})}{(z_1^{(i)} - z_2^{(i)})(z_1^{(i)} - z_3^{(i)})}$$
$$z_2^{(i+1)} = \frac{p(z_2^{(i)})}{(z_2^{(i)} - z_1^{(i)})(z_2^{(i)} - z_3^{(i)})}$$
$$z_3^{(i+1)} = \frac{p(z_3^{(i)})}{(z_3^{(i)} - z_1^{(i)})(z_3^{(i)} - z_2^{(i)})}$$

bilden. Daraus können wir die drei Korrekturterme der ersten Iteration bilden.

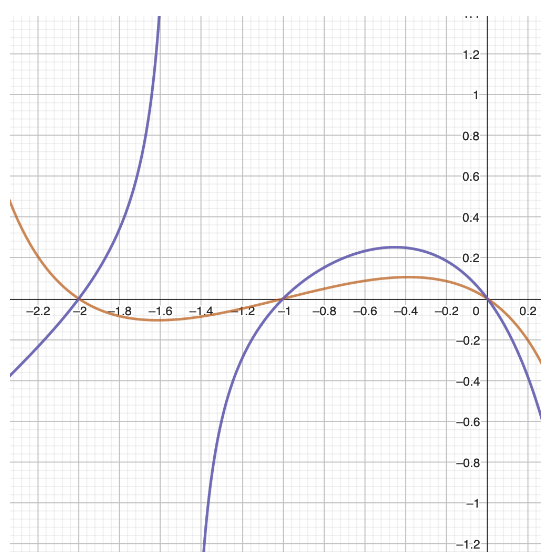
$$z_1^{(1)} = \frac{p(z_1^{(0)})}{(z_1^{(0)} - z_2^{(0)})(z_1^{(0)} - z_3^{(0)})}$$
$$z_2^{(1)} = \frac{p(z_2^{(0)})}{(z_2^{(0)} - z_1^{(0)})(z_2^{(0)} - z_3^{(0)})}$$
$$z_3^{(1)} = \frac{p(z_3^{(0)})}{(z_3^{(0)} - z_1^{(0)})(z_3^{(0)} - z_2^{(0)})}$$

Zunächst werden wir aus diesen Weierstraß-Korrekturen Funktionen bilden, welche den Korrekturwert abhängig von $z_{1,2,3}^{(0)}$ darstellen. Daraufhin werden wir die Weierstraß-Korrekturen in Abhängigkeit von $z_{1,2,3}^{(0)}$ visualisieren.

$$k_1^{(0)}(z_1^{(0)}) = \frac{p(z_1^{(0)})}{(z_1^{(0)} - z_2^{(0)})(z_1^{(0)} - z_3^{(0)})}$$
$$k_2^{(0)}(z_2^{(0)}) = \frac{p(z_2^{(0)})}{(z_2^{(0)} - z_1^{(0)})(z_2^{(0)} - z_3^{(0)})}$$
$$k_3^{(0)}(z_3^{(0)}) = \frac{p(z_3^{(0)})}{(z_3^{(0)} - z_1^{(0)})(z_3^{(0)} - z_2^{(0)})}$$



(a) Weierstraß-Korrekturen in Abhängigkeit von $z_{1,2,3}^{(0)}$



(b) Weierstraß-Korrekturen in Abhängigkeit von $z_{1,2,3}^{(0)}$

Dabei sieht man, dass die Nullstellen der Funktionen $k_{1,2,3}^{(0)}(z_{1,2,3}^{(0)})$ die Nullstellen der Weierstraß-Korrekturen sind. Das lässt sich dadurch erklären, dass der Zähler des Bruches der Weierstraß-Korrektur die Funktion darstellt und auch die gleichen Nullstellen hat. Das bedeutet für die Weierstraß-Iteration, dass der Korrekturterm bei bei den Nullstellen null ist und somit die Iteration bei der Nullstelle bleibt.

Das ist jedoch nicht der Fall, wenn eine der Nullstellen von $p(x)$ unter $z_j^{(i)}$ mit $j = 1, 2, 3, ..., n, j \neq k$ liegt, da in diesem Fall sich auf der Nullstelle eine Definitionslücke befindet.