

Wintersemester 2024/25

Übungen zur Vorlesung Automaten und Formale Sprachen

Blatt 6

Termine: 25. November und 6. Dezember

Berechenbarkeit

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

1. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen (also die Menge aller Brüche) ist abzählbar. Hinweis: Jeder Bruch kann als Verhältnis von zwei ganzen Zahlen dargestellt werden. Definieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die jedem $r \in \mathbb{Q}$ eineindeutig eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zuordnet.
2. Sei Σ ein endliches Alphabet. Geben Sie eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ an, die jedem $w \in \Sigma^*$ eineindeutig eine Zahl zuweist (d.h. Σ^* ist abzählbar). Überprüfen Sie das Verhalten Ihrer Funktion für ein Alphabet mit 3 Zeichen, indem Sie für kurze Wörter den jeweiligen Wert berechnen.
3. In der Vorlesung wurde nachgewiesen, dass die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ überabzählbar ist. Nutzen Sie die Beweisskizze aus dem Foliensatz, um zu zeigen, dass auch die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 2

Schreiben Sie jeweils ein `loop`-Programm für folgende Aufgaben:

1. Setze den Inhalt des Registers A auf den Wert 5. Beachten Sie, dass nur ein Register (und keine Zahl) als Zählvariable in einer Schleife verwendet werden darf. Auch ist es nicht möglich, die Zahl 5 direkt einem Register zuzuweisen.
2. Addiere den Inhalt von Register B auf den Inhalt von Register A.
3. Kopiere den Inhalt von Register A nach B. Beachten Sie, dass der Wert im Register A erhalten bleiben soll.
4. Signum-(Vorzeichen-)Test:

$$B := \text{sgn}(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } A > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5. Vergleichstest:

$$C := A > B := \begin{cases} 1 & \text{falls } A > B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweise: Verwenden Sie nur die von der `loop`-Programmiersprache vorgesehenen Befehle. Geben Sie geeignete Kommentare, um die Arbeitsweise Ihrer Programme zu verdeutlichen.

Aufgabe 3

Schreiben Sie jeweils ein `while`-Programm für folgende Aufgaben:

1. Subtrahiere den Inhalt von Register B vom Inhalt von Register A: $A := A - B$. Ist $B \geq A$, soll das Ergebnis 0 sein.
2. Multipliziere den Inhalt von Register B mit dem Inhalt von Register A: $A := A * B$.
3. Test auf Gleichheit:

$$C := A = B := \begin{cases} 1 & \text{falls } A = B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Abstand:

$$C := |A - B| := \begin{cases} A - B & \text{falls } A \geq B \\ B - A & \text{falls } A < B \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen Funktionen wie etwa $A := B$ und $A := A + B$, für die zuvor `loop`- oder `while`-Programme erstellt wurden, verwenden.

Hinweis zur Abgabe

Erstellen Sie ein pdf-Dokument, das Ihre Lösungen der Aufgaben enthält und legen Sie dieses mit dem Namen `Blatt6_<Nachname1>_<Nachname2>.pdf` bis spätestens **Freitag, 6. Dezember**, in dem Abgabeordner **Blatt 6** ab.