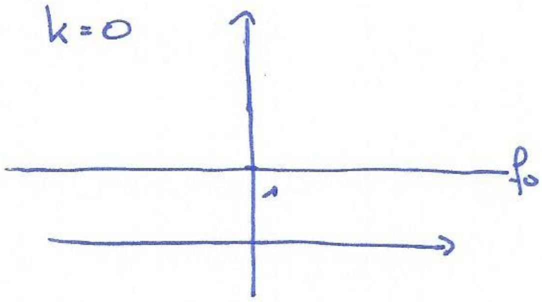
Lösungen Üb 7

7.1 analog zu **6.1**

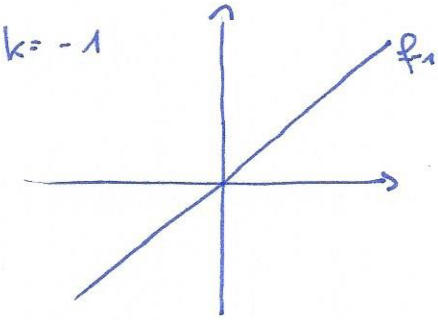
7.2

$$f_k(x) = \frac{1}{x^k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

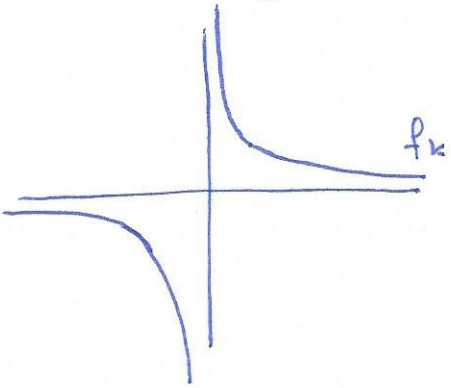
$k = 0$



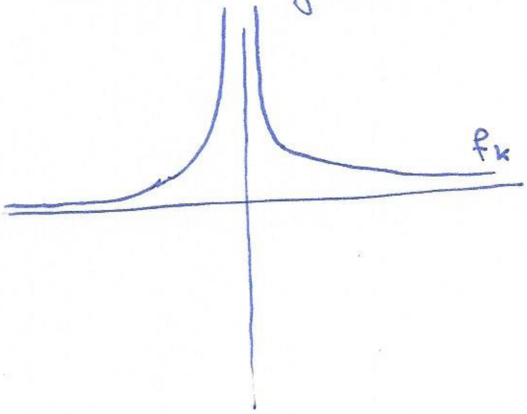
$k = -1$



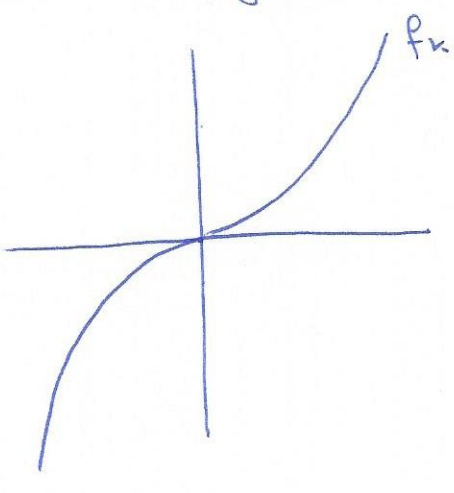
$k > 0$, k ungerade



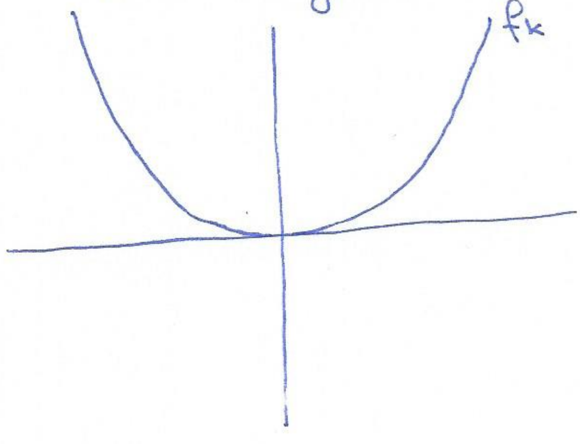
$k > 0$, k gerade



$k < 0$, k ungerade



$k < 0$ k gerade



Monotonie: für $k=0$ ist $f_0(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

somit ist f_0 konstant, also monoton steigend und fallend

für $k=-1$ ist $f_{-1}(x) = x$

Beh: f_{-1} ist str. mon. steigend auf $\mathbb{R}$.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ $\quad f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$

für $k>0$, k ungerade ist f_k in $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$ str. mon fallend

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{R}_-$ $\quad x_1 < x_2$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1^k} > \frac{1}{x_2^k} = f(x_2)$, da $\quad x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1^k < x_2^k$ für k ung

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^k} > \frac{1}{x_2^k}$ für x_1, x_2 dasselb Vorzeichen

für $k>0$, k gerade ist ist f_k in $\mathbb{R}_-$ str. mon ~~fallend~~ st.

und in $\mathbb{R}_+$ str. mon. ~~st.~~ fall.

in $\mathbb{R}_+$ siehe oben

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ $\quad x_1, x_2$: $\quad x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow |x_1| > |x_2|$

$\Leftrightarrow |x_1|^k > |x_2|^k$ gerade k

$\Leftrightarrow x_1^k > x_2^k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_2^k} > \frac{1}{x_1^k}$ weil $x_i^k > 0$.

$\Leftrightarrow f_k(x_2) > f_k(x_1)$

für $k<0$, k ungerade ist f_k str. mon. st.

Argumentation ähnlich zu $k>0$ ung.

für $k<0$, k gerade ist f_k str. mon fall auf $\mathbb{R}_-$, str. mon st auf $\mathbb{R}_+$

Argument. ähnlich zu $k>0$ gerade.

Beschr.:

$k=0$ ist beidseitig durch $M=2$ beschr., da
$|f_0(x)| = |1| = 1 < 2$.

$k=-1$ ist nicht beschr., da für $M>0$ beliebig
für $x = M+1$ $\quad f(x) > M$ und
$x = -M-1$ $\quad f(x) < -M$ ist.

$k>0$, k ug. ist nicht beschr., da für $M>0$ bel.
für $x = \frac{1}{M+1}$ $\quad f(x) = (M+1)^k > M$
für $x = \frac{1}{-M-1}$ $\quad f(x) = (-M-1)^k < -M$ ist.

$k>0$, k ger. ist durch $M_L = 0$ beschränkt, da $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x^k > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^k} > 0$.

$k<0$, k ug. ist nicht beschr., da für $M>0$ bel.
für $x = M+1$: $f(x) = (M+1)^{-k} > M$
für $x = -M-1$: $f(x) = (-M-1)^{-k} < -M$

$k<0$, k ger. ist durch $M_L = -1$ nach unten beschr. da $\forall x \in \mathbb{R}$:
$x^{-k} \geq 0 > -1$.

Injektivität / Surjektivität

$k=0$ nicht inj. da $f(-1) = 1 = f(1)$

nicht surj da $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 1 \neq 2$

$k=-1$ Bijektiv (vgl Beweise des letzten ÜZ)

$k>0$, k ug. Injektiv

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^k} = \frac{1}{x_2^k} \Leftrightarrow x_1^k = x_2^k \overset{k\text{ ug.}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$

nicht surj. da

$\frac{1}{x^k} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

k ger. nicht inj. da

$f_k(-1) = 1 = f_k(1)$

nicht surj da

$\frac{1}{x^k} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$k<0$, k ug Injektiv

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{-k} = x_2^{-k} \overset{(-k)\text{ ug.}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$

~~nicht~~ surjektiv, da $\sqrt[(-k)]{y}$ für $(-k) \in \mathbb{N}$, ungerade für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert ist.

$k<0$ k gerade nicht inj, da $f_k(-1) = 1 = f_k(1)$

nicht surj, da $f_k(x) \geq 0 \neq -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

7.3 $f(x) = 3x+4$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$

Beh: $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$

zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, sodass $\forall x$ mit $0 < |x-0| < \delta : |f(x) - 4| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fix.

wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

für x mit $|x| < \delta$: $|f(x)-4| = |3x+4-4| = |3x| = 3|x| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ✓

Beh: $\lim_{x \to 0} g(x) = 2$

zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, sodass $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x-0| < \delta : |g(x) - 2| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fix.

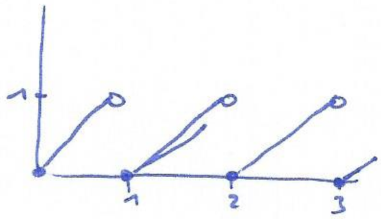
wähle $\delta = \min\{0.5, \frac{\varepsilon}{4}\}$

für x mit $0 < |x| < \delta$: $|f(x) - 2| = \left|\frac{2}{x+1} - 2\right| = \left|\frac{2-2x-2}{x+1}\right| =$

$= \left|-\frac{2x}{x+1}\right| = 2\left|\frac{x}{x+1}\right| \overset{*}{<} 2|2x| = 4|x| < 4\delta \leq 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ ✓

(*) für $x \in (-0.5, 0.5)$ ist $x+1 \in (0.5, 1.5) \Rightarrow \frac{a}{x} < 2a \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7.4 $f: \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto [0,1) \\ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \end{cases}$



In 0 nur rechss. GW:

Beh: $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$.

zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \forall x \in (0, \delta) : |f(x) - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

wähle $\delta = \min\{0.25, \varepsilon\}$

$\forall x \in (0, \delta)$: $\lfloor x \rfloor = 0$

$|f(x)| = |x - \lfloor x \rfloor| = |x| < \delta \leq \varepsilon$ ✓

In 2:

Beh: $\lim_{x \nearrow 2} f(x) = 1$

zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \forall x \in (2-\delta, 2)$:

$|f(x) - 1| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. fix.

wähle $\delta = \min\{0.5, \varepsilon\}$

$\forall x \in (2-\delta, 2)$: $\lfloor x \rfloor = 1$

$|f(x) - 1| = |x - 1 - 1| = |x-2| =$

$= -(x-2) = -x+2 \underset{x > 2-\delta}{<} -(2-\delta)+2 = \delta \leq \varepsilon$ ✓

$\lim_{x \searrow 2} f(x) = 0$

zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \forall x \in (2, 2+\delta)$:

$|f(x) - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. fix.

wähle $\delta = \min\{0.5, \delta\}$

$\forall x \in (2, 2+\delta)$: $\lfloor x \rfloor = 2$

$|f(x)| = |x-2| = x-2 <$

$2+\delta-2 = \delta \leq \varepsilon$

In $x_0 = \frac{1}{2}$

Beh: $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$

zz: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ 0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta \ : |f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. fix. wähle $\delta = \min\{0.25, \varepsilon\}$

für $0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta \quad \lfloor x \rfloor = 0 \quad x \in (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta) \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}| < \delta \leq \varepsilon$ ✓

für $x_0 = \frac{3}{2}$ analog.