Lösung Bsp 3.4

Erklärung.

In der VO haben wir $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ bewiesen. Das nutzt man aus, wenn man $p \Rightarrow q$ nicht zeigen kann, $\neg q \Rightarrow \neg p$ aber leicht zu beweisen ist.

zeige: (a^2 ist gerade) $\Rightarrow$ (a ist gerade)

Hier wäre also $p(a)$ = "a^2 ist gerade" und $q(a)$ = "a ist gerade".

Durch negieren erhält man

$\neg p(a)$ = "a^2 ist ungerade"

$\neg q(a)$ = "a ist ungerade"

werde zeigen: (a ist ungerade) $\Rightarrow$ (a^2 ist ungerade)

a ist ungerade $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ mit

$a = 2k+1 \Rightarrow$

$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$
$= 2(2k^2+2k)+1$

Definiert man $\ell := 2k^2+2k$, ist also $a^2 = 2\ell + 1$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow a^2$ ist ungerade.

Hier wurde somit $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewiesen. Und somit auch $p \Rightarrow q$

$\square$ qed