

Übungszettel 5 — bis 26.09.2017

Beispiel 5.1

Beweise diese Version von Satz 6.7 (Linearfaktorisierung quadratischer Polynome).

($p(x)$ ist ein Polynom der Form $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ und den reellen Nullstellen x_1, x_2) \Leftrightarrow ($p(x)$ hat die Form $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit $a \neq 0$)

Hinweis: Um eine Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ zu beweisen bietet es sich an, beide Richtungen getrennt, also $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$ zu beweisen. Für die Hinrichtung bietet sich hier die Verwendung der quadratischen Lösungsformel an.

Beispiel 5.2

Kürze die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich und bestimme die Definitionsmenge.

- $\frac{x^3 + 7x^2 - 60x}{3x^2 - 27x + 60}$
- $\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 7x + 4}$
- $\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{4x^2 - 12x + 8}$
- $\frac{x^4 - x^3 - 12x^2 + 23x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

Beispiel 5.3

Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

- i) $x^8 + 4x^4 = -6$
- ii) $\frac{2x+1}{x+7} = \frac{1-3x}{x-7} + \frac{7x+21}{x^2-49}$
- iii) $\frac{2x}{x^4+x^3+x^2+3x-6} - \frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-5}{x^2+3}$
- iv) $\frac{1}{x^2-3} + \frac{3x^2-4}{x^4-6x^2+9} = \frac{2}{x^2-2\sqrt{3}+3}$

Beispiel 5.4

Beweise mit Fallunterscheidung:

- i) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a+b| \leq |a| + |b|$ (Dieser Satz wird **Dreiecksungleichung** genannt.)
- ii) $(p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : (p = 4k+1) \vee (p = 4k+3))$
Hinweis: Hier kann es von Vorteil sein, einen Indirekten Beweis (also $\neg q \Rightarrow \neg p$) zu versuchen.

Beispiel 5.5

Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

- i) $|2u-1| \cdot |u+2| = |u-\frac{4}{3}| + 3$
- ii) $\sqrt{3x-21} + 7 = x$
- iii) $\sqrt{9x-5} = 4 - \sqrt{3+x}$
- iv) $|z^2 - 2z - 1| = |z+3|$
- v) $\sqrt{x} + \sqrt{x+16} = 2$

Beispiel 5.6

Finde alle reellen Lösungen zu folgenden Ungleichungen.

i) $3x - 1 < 2(x - 3) - (2 - x)$

ii) $3(x - 2)(x + 5) - 2(x + 9)(x - 1) \geq -18$

iii) $-3x^2 + 18x - 36 < 0$

iv) $|3x - 1| + |x + 2| \leq 3$

v) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{-4}{x^2-1}$