Brückenkurs Mathematik

Skript zur LV 621.030

Finaler Stand Ws 13/14.

Martin GLATZ

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

an der Karl-Franzens-Universität Graz

Inhalt

Vorwort VI

I. Akademische Mathematik 1

1. Was ist Mathematik? 2

1.1. Mögliche schulische Erfahrungen . . . 2
1.2. Der Versuch einer Definition . . . 2
1.3. Konzeptioneller Aufbau akademischer Mathematik . . . 5

2. Tipps zum universitären Mathematiklernen 7

2.1. Einfluss von Vorwissen . . . 7
2.2. Lernen auf Verständnis . . . 8
2.3. Strategien für Vorlesungen (VO) . . . 11
2.4. Strategien für Übungen (UE) . . . 14
2.5. Prüfungsvorbereitung . . . 18
2.6. Lernschwierigkeiten? Was tun? . . . 21

II. Mathematische Grundlagen 26

3. Logik 28

3.1. Aussagen . . . 28
3.2. Prädikatenlogik . . . 29
3.3. Und und Oder . . . 31
3.4. Implikation . . . 32
3.5. Äquivalenz . . . 33

4. Beweise 36

4.1. Beweistechniken . . . 36
4.1.1. Allgemeine Schlussregeln . . . 36
4.1.2. Direkter Beweis . . . 38
4.1.3. Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch, Kontraposition) . . . 39
4.2. Tipps zum Beweisen . . . 39

5. Naive Mengenlehre 41

5.1. Grundlagen . . . 41
5.1.1. Prädikative Definition . . . 42
5.1.2. Grundlegende und richtungsweisende Beispiele . . . 43
5.2. Mengenoperationen . . . 45

6. Verknüpfungen und Algebra 47

6.1. Grundlegende Definitionen . . . 47
6.2. Besondere Elemente . . . 50

7. Die üblichen Zahlenmengen 53
7.1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ . . . 53
7.1.1. anschaulicher Zugang . . . 53
7.1.2. Ausblick: Vollständige Induktion . . . 54
7.1.3. abstrakter Zugang . . . 55
7.2. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ . . . 56
7.2.1. Algebraische Struktur . . . 56
7.2.2. Ausblick: Konstruktion von $\mathbb{Z}$ mit Äquivalenzklassen . . . 57
7.3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . 59
7.3.1. $\mathbb{Q}$ ist ein Körper . . . 59
7.3.2. Ausblick: Lücken in $\mathbb{Q}$ . . . 61
7.4. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ . . . 63
7.4.1. Eigenschaften . . . 63
7.4.2. Ausblick: Ordnung, Ordnungsrelationen und weitere Axiome . . . 64
7.4.3. Ausblick: Konstruktion bzw. Axiomatische Definiton . . . 65
7.5. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ . . . 67
7.5.1. Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 67
7.5.2. Geometrische Anschauung . . . 68
7.5.3. Ausblick: Abstrakte Konstruktion . . . 69

III. Rechenmethoden für reelle Zahlen & Variablen 71

8. Rechnen mit »Brüchen« 73
8.1. Multiplikation und Division . . . 73
8.2. Erweitern und Kürzen . . . 74
8.3. Exkurs: Primfaktorzerlegung . . . 75
8.4. Addition und Subtraktion . . . 76

9. Hochzahlen 77
9.1. Rekursive Definition der n-ten Potenz . . . 77
9.2. Negative, ganzzahlige Hochzahlen . . . 77
9.3. Wurzeln . . . 78
9.4. Rationale Exponenten . . . 79
9.5. Irrationale Exponenten . . . 80

10. Termumwandlungen/Termvereinfachungen 82
10.1. Standardformeln . . . 82
10.2. Exkurs: Binomischer Lehrsatz . . . 83
10.3. Ausblick: Rechnen mit anderen Variablen . . . 85

IV. Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen 86
Einleitung . . . 87

11. Gleichungen 88
11.1. Äquivalenzumformungen . . . 88
11.2. Lineare Gleichungen . . . 90
11.3. Quadratische Gleichungen . . . 90
11.3.1. Satz von Vieta . . . 90
11.3.2. Quadratische Auflösungsformeln . . . 91
11.4. Gleichungen höheren Grades . . . 92
11.4.1. Der Fundamentalsatz der Algebra – Zerlegung in Linearfaktoren . . . 94
11.4.2. Substitution . . . 95
11.5. Bruchgleichungen . . . 95
11.6. »Kompliziertere« Gleichungen . . . 96

12. Gleichungssysteme **100**
12.1. Lineare Gleichungssysteme . . . 100
12.1.1. Anzahl der Lösungen . . . 101
12.1.2. Eliminationsverfahren . . . 102
12.1.3. Geometrische Interpretation . . . 104
12.1.4. Ausblick: Matrizenschreibweise – Gauß-Algorithmus . . . 104
12.2. Nichtlineare Gleichungssysteme . . . 108

13. Ungleichungen **110**
13.1. Lineare & Quadratische Ungleichungen . . . 110
13.2. Betragsungleichungen . . . 112
Zusammenfassung . . . 114

V. Funktionen (Abbildungen) **116**

14. Grundlagen **117**
14.1. Wohldefiniert und Graph . . . 120
14.2. Bild und Urbild . . . 122
14.3. Injektiv, Surjektiv, Bijektiv . . . 123
14.4. Verkettung von Funktionen: Hintereinanderausführung . . . 124
14.5. Summe und Produkt von Funktionen . . . 126
14.6. Ausblick: Mengentheoretische Definition der Funktion . . . 126

15. Eigenschaften von Funktionen **127**
15.1. Monotonie . . . 127
15.2. Symmetrie . . . 128
15.3. Invertierbarkeit und Umkehrfunktion . . . 129

16. Einige Funktionstypen **133**
16.1. Polynome und (gebrochen) rationale Funktionen . . . 133
16.1.1. Affine Funktionen . . . 133
16.1.2. Polynomfunktionen zweiten Grades . . . 134
16.1.3. Polynomfunktionen höheren/beliebigen Grades . . . 134
16.1.4. Gebrochen-Rationale Funktionen . . . 136
16.2. Potenzfunktion und Wurzeln . . . 139
16.3. Betragsfunktion und Signumfunktion . . . 140
16.4. Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion . . . 144
16.4.1. e-Funktion . . . 144
16.4.2. Natürlicher Logarithmus . . . 145
16.4.3. Exponentialfunktionen mit anderen Basen . . . 146
16.4.4. Logarithmen zu anderen Basen . . . 146
16.4.5. Ausblick: Definitionsmöglichkeiten von e-Funktion und ln . . . 147
16.4.5.1 Der Logarithmus als Stammfunktion von $1/x$ . . . 147
16.4.5.2 Exponentialreihe . . . 147
16.5. Sinus-, Kosinus-, Tangens-Funktion . . . 148

17. Grenzwerte und Stetigkeit **150**
17.1. Grenzwerte . . . 150
17.2. Stetigkeit . . . 152
17.3. Rechenregeln für Limiten . . . 152
17.4. Ausblick: Stetigkeit exakt . . . 155
Zusammenfassung . . . 158

VI. Folgen und Reihen 161

18. Folgen 162
18.1. Grundlegende Definitionen und Eigenschaften 162
18.2. Konvergenz 164

19. Reihen 169
19.1. Grundlegende Definitionen 169
19.2. Typische Beispiele 171
19.3. Ausblick : Potenzreihen und Taylorpolynome 173

VII. Differential- und Integralrechnung 175

20. Differenzierbarkeit 177
20.1. Tangentenbestimmung 177
20.2. Graphisches Differenzieren 180
20.3. Linearität der Ableitung 181
20.4. Höhere Ableitungen 183
20.5. Ausblick: Lineare Approximation 183

21. Rechenmethoden beim Differenzieren 185
21.1. Grundlegendes Vorgehen 185
21.2. Produkt und Quotientenregel 185
21.3. Kettenregel für verschachtelte Funktionen 187

22. Der Integralbegriff 190
22.1. Unbestimmtes Integral 190
22.2. Riemann'sches Integral – halbwegs exakt 192
22.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 193
22.4. Ausblick: Andere Integralbegriffe 195

23. Rechenmethoden beim Integrieren 197
23.1. Linearität und weitere Eigenschaften 197
23.2. Partielle Integration 198
23.3. Substitution 199
Zusammenfassung 201

VIII. Vektoren und Vektorrechnung 203

24. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ 205
24.1. Rechenregeln 206
24.2. Geometrische Anschauung 208
24.3. Besondere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ 209
24.4. Norm (Betrag) eines Vektors 210
24.5. Skalares Produkt – Winkel 212
24.6. Vektorielles Produkt (Kreuzprodukt) 215
Zusammenfassung 217

25. Allgemeine (abstrakte) Vektorräume 219
25.1. Definition (Vektorraum) 219
25.2. Linearkombination und Lineare Unabhängigkeit 220
25.3. Lineare Hülle 222
25.4. Lineare Abbildungen 223
Zusammenfassung 225

IX. Anhang **226**

A. Formelsammlung 227

B. Griechisches Alphabet 228

Vorwort

Aller Anfang ist schwer. So könnte auch das Motto im Mathematik-Studium heißen. Wieso Anfang? Wir alle haben doch bereits in der Schule einen Mathematik-Unterricht genießen dürfen, also demnach über mindestens zwölf Jahre unseres Lebens hinweg mehrere Stunden pro Woche mit Mathematik zu tun gehabt. Das ist richtig – aber auch wieder nicht ganz. Man müsste jetzt klären, was man unter »Mathematik« versteht. Das Rechnen mit Zahlen? Das Anwenden von Formeln, um Gleichungen zu lösen? Auf universitärem Niveau müsste man diese Fragen wohl eher mit »Nein« beantworten ...

Die Lehrveranstaltung »Brückenkurs Mathematik« (LV Nr. 621.030) soll helfen, die erfahrungsgemäß vergleichsweise große Hürde des Studieneinstiegs in ein (echtes) Mathematik-Studium angenehmer zu machen. Dieses Skriptum sieht sich als eine Begleitlektüre zur Lehrveranstaltung, deckt viele wesentliche Stoffgebiete der Schulmathematik ab und leitet zur Hochschulmathematik hin. Dieses Skriptum nimmt bereits einige wichtige Charakteristika von Hochschulmathematik und mathematischer Fachliteratur vorweg, was sich im Konzept des Skripts deutlich macht.

Konzept des Skriptums

- Wir verzichten weitgehend auf an den Haaren herbeigezogenen Zahlenbeispielen.
- Häufig wird zuerst die Theorie erarbeitet und erst dann ein Beispiel dazu gebracht, das die Theorie verwendet. Diese Vorgehensweise benötigt auch eine selbstständigere Art des Lernens, da wir die Verknüpfung der (abstrakten) Theorie mit den Beispielen selbst herstellen müssen.
- Als Vorgriff auf die meisten Lehrveranstaltungen im Studium geht auch dieses Skriptum je nach Themengebiet nach dem Schema Definition – Satz – Beweis vor. Selbstverständlich sind wir aber noch weit weg von einer Strenge, wie sie etwa in einer Analysis- oder Lineare Algebra-Vorlesung praktiziert wird.
- Viele Begriffe sind an sich aus der Schule bekannt oder sollten es sein. In diesem Skriptum sind deswegen aufbauend darauf entweder die Schwerpunkte anders gesetzt oder der Grad der Exaktheit, der Allgemeinheit oder Abstraktion erhöht, um adäquat auf das Studium vorzubereiten. Neues Wissen bzw. exaktere Zugänge an vorhandenes Wissen anzuknüpfen, ist eine Notwendigkeit für verständnisvolles Mathematik-Lernen.
- Ich habe mich bemüht, dort, wo es gute geometrische Veranschaulichungen gibt, passende Grafiken und Skizzen anzufertigen. Das Programm, dass ich dafür verwendet habe, ist Inkscape, ein frei verfügbares Vektor-Grafik-Programm: `http://inkscape.org` Das Dokument wurde übrigens mit dem Textsatz-System LaTeX erzeugt, siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/LaTeX` bzw. `http://www.tug.org/texlive/`.
- Dort, wo es relativ leicht möglich ist oder wo interessante Themengebiete lauern, gibt es immer wieder einmal einen Ausblick in die Hochschulmathematik und ihre Teilgebiete. Solche Kapitel sind gewöhnlich mit »Ausblick« betitelt. Es kann und soll natürlich nicht verlangt werden, dass diese Kapitel auf Anhieb verstanden werden. Vielmehr soll es ein kleiner, motivierender Vorgeschmack sein auf das, was im Mathematik-Studium auf uns wartet. In dieser Hinsicht mag es nützlich sein, dieses Skriptum durchaus auch später im ersten Semester hin und wieder in die Hand zu nehmen und zu schmökern.
- Im Vergleich zu anderen Brückenkursen oder Bücher dieser Art ist das vorliegende Skript speziell für angehende Studierende der Mathematik verfasst. Dahingehend ist es etwas abstrakter und wohl auch exakter. Mir ging es darum, ein realistisches Bild von Mathematik in den (echten) Mathematik-Studien zu vermitteln.

Leseanleitung

Ich hab versucht, im Rahmen der technischen Möglichkeiten die Struktur des Konzeptes des Skriptums als auch der Mathematik mit Hilfe des Layouts zu verdeutlichen:

Definition xyz.uvw: (Name der Definition)

Definitionen sind einfach Festlegungen von Begriffen, mit denen wir im Folgenden arbeiten. Ich denke, die Exaktheit der Definitionen sollte für den Beginn des ersten Semesters ausreichend sein.

Satz xyz.uvw: (Name des Satzes)

Sätze sind mathematische Aussagen, deren Wahrheitsgehalt von Mathematik-kundigen Personen als richtig festgestellt wurde. Sätze machen mathematische Aussagen über die in Definitionen festgelegten mathematischen Objekte und Begrifflichkeiten. In der Schule würde man je nach Teilgebiet unter Umständen auch »Rechenregeln« dazu sagen.

Beweis

Beweise sind jene Argumentationsketten und logischen Herleitungen, die uns helfen, die Aussagen der Sätze nachzuweisen bzw. zu bestätigen. Beweise verwenden Aussagen und Sätze, die bereits schon zuvor bewiesen wurden. Mathematik ist (auf universitärem Niveau) eine deduktive Wissenschaft, die aus einfachen Objekten und Aussagen immer komplizierte oder neue Aussagen hervorbringt und nachweist. In der Schule würde man dazu vielleicht »Herleitungen« sagen. □

Auf das Konzept der akademischen Mathematik wird in Teil I des Skripts noch näher eingegangen.

Beispiel xyz.uvw

Zu denverschiedenen Themen werden immer wieder Beispiele mehr oder weniger vollständig vorgezeigt. Ich hoffe, die Mühe hat sich gelohnt.

Sämtliche Nummerierung von Definitionen, Sätzen oder Beispielen sind nach dem Schema Abschnittsnummer.Anzahl aufgebaut. Durch ▶xyz wird auf die Seite xyz verwiesen, an der beispielsweise der entsprechende Satz vorkommt. Verlinkungen sind übrigens interaktiv (»anklickbar«).

- Teil I stellt Charakteristika von akademischer Mathematik und mögliche Lernstrategien vor.
- Teil II behandelt Mathematische Grundlagen, darunter Logik, Beweise, Mengenlehre und algebraische Grundlagen.
- Teil III behandelt Rechenmethoden für (reelle) Zahlen und Variablen.
- Teil IV behandelt Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen.
- Teil V widmet sich dem zentralen Konzept der Funktion.
- Teil VI gibt eine Einführung in Folgen und Reihen.
- Teil VII behandelt die Differenzial- und Integralrechnung in einer Veränderlichen.
- Teil VIII gibt eine Einführung in Vektoren und Vektorräume.

Damit wünsche ich viel Spaß beim Lesen, Schmökern und Tüfteln,

Martin Glatz
September 2013

Teil I.

Akademische Mathematik

1. Was ist Mathematik?

Die Frage, was Mathematik eigentlich ist, ist nur sehr schwer in einfacher Weise zu beantworten. Zunächst ist es wohl einfacher, mögliche Vorstellungen, die man durch den schulischen Unterricht erhält, zu thematisieren. Im Allgemeinen sind diese Vorstellungen nicht direkt passend für Mathematik, wie sie als Wissenschaft betrieben wird bzw. wie sie in Mathematikstudien gelehrt und gelernt wird.

1.1. Mögliche schulische Erfahrungen

- Im schulischen Unterricht gibt es immer wieder Aufgaben, wo durch typische Schlagwörter im Wesentlichen schnell klar wird, welche konkrete Formel zu verwenden ist. Wenn man etwa die Schlagwörter »Winkel zwischen zwei Geraden« hört, so verwendet man bekanntlich die Formel

  $$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|v|\cdot|w|}\,.$$

  Im Studium eine Vielzahl von Aufgaben desselben Typs zu bearbeiten, ist mehr als unüblich, weil dabei kaum eine gedankliche Leistung nötig ist. Im Studium geht es also kaum darum, die richtige Formel zu verwenden. Es geht eher darum, entweder Formeln herzuleiten (im Sinne von selbstständig erarbeiten). Daneben muss begründet bzw. gerechtfertigt werden, warum diese oder jene Formel bei der jeweiligen Fragestellung den gegebenen mathematischen Sachverhalten verwendet werden darf.

- Im schulischen Unterricht gibt es immer wieder Aufgaben, die gänzlich analog »abzuarbeiten« sind. Lieblingsbeispiel sind die Kurvendiskussionen, bei der es im Allgemeinen (leider) reicht, die Rechnungen[1] Schritt für Schritt durchzuführen, ohne dabei zu wiesen, was man eigentlich tut oder warum das Verfahren. Akademische Mathematik setzt den Schwerpunkt diesbezüglich gänzlich anders: Es geht darum, die Theorie hinter solchen Verfahren zu entwickeln und zu entstehen.

- Wer Mathematik-Wettbewerbe wie »Känguru der Mathematik« oder die »Mathematik-Olympiade« kennt, könnte durchaus die Vorstellung haben, dass es im Studium darum geht, knifflige Probleme (in loser Abfolge) zu lösen. Ganz falsch ist diese Vorstellung wohl nicht, ein Aspekt ist dabei jedoch zu beachten: Universitäre Mathematik ist themenmäßig gegliedert und damit in Lehrveranstaltungen aufgeteilt. Viele Aufgaben in einer Lehrveranstaltung sind inhaltlich aufbauend und müssen besonders im Zusammenhang mit der in den jeweiligen Lehrveranstaltungen vorgestellten Theorien gesehen werden.

1.2. Der Versuch einer Definition

Die englischsprachige Wikipedia[2] gibt folgende Definition für Mathematik:

> Mathematik ist das Studium von Größen, Struktur, Raum und Veränderung. Mathematiker suchen nach Mustern, formulieren neue Vermutungen und stellen Wahrheit fest durch systematische Ableitung aus geeignet gewählten Axiomen und Definitionen.

1 Die Gleichungen $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ usw. lösen.
2 Übersetzung aus einem Artikel von Günther M. Ziegler in den Mitteilungen der DMV (19/ 2011; S. 174-178) entnommen.

Für Personen, die noch keine Lehrveranstaltungen in einem Mathematik-Studium besucht haben, ist diese Definition wohl kaum wirklich zu verstehen. Daher erfolgt hier der Versuch, einige Teile dieser Definition ein wenig näher zu erklären:

- Zur Struktur und der Suche nach Mustern: In diesen Bereich fallen Konzepte hinein, die in der Mathematik immer wieder vorkommen. Beispiele dafür sind Funktionen oder Verknüpfungen (Rechenoperationen). Als Beispiel aus der Unterstufe kennt man etwa die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Addition $+$, die verschiedene Rechenregeln erfüllen (z. B. Existenz einer Null, Gegenzahl usw.). Vergleichbare Rechenregeln lassen sich auch auf anderen Mengen finden. Zwar kann die Operation selbst etwas grundlegend anderes darstellen, allerdings bleiben die Gesetze (weitgehend) gleich. Man spricht dann von einer sogenannten Gruppe. Andere Beispiele mit analoger Struktur sind etwa die Menge der Permutationen (Vertauschungen) der natürlichen Zahlen von 1 bis n oder die Menge der (euklidischen) Bewegungen (Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen) bzgl. der Hintereinaderausführung. Lehrveranstaltungen wie die »Einführung in die Algebra« beschäftigen sich mit diesen abstrakten Strukturen.

- Die Wahrheit durch systematische Ableitung festzustellen bedeutet, ausgehend von bereits als wahr erkannten Aussagen weitere Aussagen herzuleiten. Dieser Vorgang nennt sich beweisen. Dabei bedarf es einer exakt festgelegten Logik, die die erlaubten und nicht erlaubten Schlüsse und Herleitungsschritte festlegt. Der »Hausverstand« oder die gängige Alltagslogik stimmt zwar großteils mit der wissenschaftlich verwendeten mathematischen Logik großteils überein. Kleinere Abweichungen werden in Kapitel 3 vorgestellt.

- Beweise leiten aus alten bereits bewiesenen Aussagen neue her. Verfolgt man diesen Ablauf zurück, so ist klar, dass man de facto dadurch nicht zum völligen Anfang kommen kann. Gäbe es einen Anfang, den man beweisen kann, so könnte man ja wieder einen Schritt zurückgehen. Demnach kann der Anfang nicht bewiesen werden. Unbewiesene Aussagen, die man an den Anfang einer mathematischen Theorie stellt und die als wahr und gültig angenommen werden (beweisen kann man sie ja nicht), nennt man Axiome. Beispielsweise garantieren Axiome, dass es die Menge der natürlichen Zahlen mit ihren üblichen Eigenschaften (z. B. jede Zahl hat einen Nachfolger) gibt.

  Neben diesen Grundlagenfragen definiert man auch oft Axiome aus Bequemlichkeitsgründen: Anstatt die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mühsam aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ herzuleiten (zu konstruieren), kann man auch den Zugang wählen, dass man die Eigenschaften und gängigen Rechenregeln (z. B. Distributivgesetz) von $\mathbb{R}$ axiomatisch festlegt.

  Es stellt sich natürlich die Frage, warum man diesen Aufbau anstrebt. In der Schule gibt man sich sehr oft mit der mehr oder weniger losen Aneinanderreihung von Inhalten zufrieden. Mit einem wissenschaftlichen Anspruch führt kein Weg am strengen, systematischen Aufbau vorbei. Woher kann man sich sonst sicher sein, dass Erkenntnisse wirklich stimmen? Woher kann man sich sonst sicher sein, dass z. B. bei Herleitungen von Formeln keine Fehler gemacht wurden? Es liegt auf der Hand, dass die Nachvollziehbarkeit, wie Erkenntnisse erlangt wurden, gegeben sein muss, wenn man seriös Wissenschaft betreiben möchte. Diesbezüglich nimmt die Mathematik in den Wissenschaften durchaus die führende Rolle ein. Diese besondere Rolle schätzen zu können, erfordert allerdings ein Mindestmaß an Fähigkeiten.[3] Da (mathematische) Logik und Beweisen im schulischen Alltag bei weitem nicht den Stellenwert einnehmen, den sie in der Wissenschaft bzw. der universitären Mathematik haben, werden die jeweiligen Grundlagen in den nachfolgenden Kapiteln dargestellt.[4]

- Noch einige Bemerkungen zu Definitionen: Definitionen sind Festlegungen von mathematischen Begriffen und Objekten ausgehend von bereits festgelegten Objekten. Definitionen müssen einerseits unmissverständlich, andererseits auch mathematisch brauchbar sein. Es stellt sich heraus, dass

3 Ähnlich wie man ein gutes englisches Buch im Original erst dann genießen kann, wenn man die englische Grammatik und das Vokabular ausreichend beherrscht.

4 In den Wochen des ersten Semesters werden diese Inhalte zwar auch thematisiert, allerdings wird von den Studierenden eine steile Lernkurve erwartet. Je nach Vorwissen und Begabung kann diesem Anspruch seitens der Studierenden nachgekommen werden oder auch nicht. Im Allgemeinen fällt dem Großteil der Studierenden das Beweisen im ersten Semester bzw. Studienjahr eher schwer.

man viele der Begriffe, die man aus der Schule kennt, nachträglich weiter exaktifizieren muss, damit man wissenschaftlich damit arbeiten kann. Bei einigen Begriffen kann es durchaus größere Unterschiede geben.[5]

Neben diesen Aspekten von (wissenschaftlicher) Mathematik muss man noch zwischen Mathematik als Forschungsgegenstand (Was gibt es Neues zu entwickeln?) und Mathematik als Lerngegenstand (Was muss man lernen?) an der Universität unterscheiden. Während es bei der ersteren Mathematik darum geht, selbst kreativ zu sein, seine Gedanken zu systematisieren und letztendlich in Form von Definitionen, Aussagen und Beweisen in eine sattelfeste Form zu bringen, geht es bei der Mathematik als Lerngegenstand darum, erste wissenschaftliche Grundkenntnisse zu erlangen. Dabei ist es nicht nötig, selbst Theorien zu entwickeln – es reicht, ein Verständnis für bereits entwickelte Theorien zu erlangen. In der Forschung ist man also im Entwicklungsprozess drinnen, beim Lernen wird man eher vor fertig entwickelte Tatsachen gestellt (Mathematik als Produkt) . Es liegt auf der Hand, dass forschende Mathematik die anspruchsvollere ist – das wird im allgemeinen eher erst gegen Studienende verlangt (Abschlussarbeiten, Seminare).

Abschließend sind noch zwei Schwerpunkte von akademischer Mathematik angeführt, an die man sich gewöhnen sollte:

- Abstraktion und Allgemeinheit erwünscht

  Hochschulmathematik versucht, Begriffe und Objekte möglichst allgemein zu definieren, damit sie eine möglichst breite Gültigkeit haben. Zwar wird dieser Anspruch in Erstsemestrigen (mittlerweile) nicht bis zum Exzess betrieben, stellt aber im Vergleich zur Schule doch eine beträchtliche Steigerung dar. Vektorräume bieten sich an, um das zu verdeutlichen: Während in der Schule nur der $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ behandelt werden, beschäftigt man sich an der Universitäten gleich mit dem $\mathbb{R}^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, das nicht näher spezifiziert wird (Verallgemeinerung). Noch einen Schritt weiter geht man, wenn man einen Vektorraum gleich als eine abstrakte Menge V mit passenden, axiomatisch definierten Rechenoperationen untersucht. Ein weiteres Beispiel: In der Schule untersucht man Polynome zweiten oder dritten Grades auf Nullstellen. Das ist vergleichsweise langweilig und einfach. Im Studium dagegen ist man daran interessiert, ein Polynom n-ten Grades (mit $n \in \mathbb{N}$) auf Nullstellen zu untersuchen. Bekanntlich[6] ist bei komplexen Polynomen das Resultat dieser Untersuchungen der Fundamentalsatz der Algebra.[7]

- *Beweise und Begründungen verpflichtend*

  Im Studium ist es im Allgemeinen notwendig, jeden Rechenschritt, jede Folgerung und jede verwendete Aussage zu begründen bzw. zu beweisen. Grundsätzlich sind keine mathematischen Aussagen selbstverständlich oder offensichtlich, sondern sind beweisbedürftig. Es kann in den ersten Wochen etwas dauern, bis man diese Beweisbedürftigkeit im Rahmen einer Theorie erkennt. Dieses kleinschrittige, spitzfindige Denken mag am Beginn lästig sein, sobald das Auge aber diesbezüglich geschult ist, kommt man viel besser damit zurecht und erlebt es nicht mehr als lästig oder negativ.

Weitere Informationen findet man z. B. unter `http://www.spektrum.de/sixcms/media.php/1062/Mathematik.pdf`.

5 Paradebeispiel dafür ist die Stetigkeit von Funktionen, die in der Schule häufig als »Bleistiftstetigkeit« einführt: Eine Funktion ist stetig, wenn sich ihr Graph zeichnen lässt, ohne den Stift abzusetzen. Im universitären Kontext mit dem Anspruch, gemeinsame Strukturen und Muster erkennen zu wollen (vgl. oben), ist es vergleichsweise naheliegend, dass diese Definition nur mühsam übertragen werden kann. Was ist, wenn Funktionen so abstrakt oder unanschaulich sind, dass man sie nicht zeichnen kann? Was ist, wenn man es mit höheren Dimensionen zu tun hat, wo sich der Graph nicht mehr als Linie zeichnen lässt, sondern als Fläche z. B. im $\mathbb{R}^2$ zeichnen müsste? Oder was ist bei Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$? Die Veranschaulichung des Graphen müsste ja vierdimensional sein. Es zeigt sich also, dass die Definition eines Begriffes über die graphische Veranschaulichung nur begrenzt verwendbar ist. Um diese Probleme zu vermeiden, führt man formale Definitionen ein, die zwar durch die Anschauung motiviert sind, aber diese letztendlich nicht benötigt.

6 Zumindest, wenn es nach dem Lehrplan der AHS geht.

7 Ein komplexes, nicht konstantes Polynom hat mindestens eine komplexe Nullstelle. Oder anders formuliert: Jedes komplexe, nicht konstante Polynom n-ten Grades zerfällt in n Linearfaktoren.

1.3. Konzeptioneller Aufbau akademischer Mathematik

Der konzeptionelle Aufbau akademischer Mathematik hat in den rigorosen (= strengen, exakten) Lehrveranstaltungen wie der Analysis oder der Linearen Algebra einen großen Stellenwert. Da die Aufbereitung bzw. Entwicklung einer mathematischen Theorie vergleichsweise streng vorgegeben ist, werden hier die wichtigsten Elemente (und ihre optische Gestaltung in diesem Skript) hervorgehoben. Der grundlegende Aufbau geht nach dem Schema Definition – Satz – Beweis (usw.) vor.

- Axiom:

  Am Beginn einer mathematischen Theorie stehen nicht beweisbare, aber als gültig angenommene Aussagen bzw. Definitionen. Unter Umständen kann es sein, dass die Rolle der Axiome in den Lehrveranstaltungen etwas untergeht. Typische Beispiele dafür sind die Axiome der reellen und natürlichen Zahlen (Analysis) oder die Vektorraum-Axiome (Lineare Algebra).

- Definition:

  Eine Definition ist die Festlegung neuer mathematischer Begriffe und Objekte aufbauend auf vorangegangenen Definitionen und evtl. Aussagen (Sätzen). Wie die Definitionen gewählt werden, ist im Allgemeinen ein historisch langwieriger Prozess. Beispielsweise hat es bis ins 19. Jahrhundert gedauert, bis man es geschafft hat, die reellen Zahlen zufriedenstellend zu definieren. Der Begriff der »Funktion« hat sich im Verlauf der Jahrhunderte mehrfach verfeinert, um letztendlich in seiner allgemeinsten Form ohne Funktionsvorschrift auszukommen.[8] Auch bei der Differentialrechnung, die im 17. Jhdt entwickelt wurde, mussten die Definitionen im Lauf der Jahrhunderte angepasst werden, um die Differentialrechnung konsistent in das mathematische Gebiet der Analysis anzupassen. Allgemein muss gesagt werden, dass sich der Anspruch der Wissenschaftlichkeit nach Exaktheit, Strenge und Allgemeinheit erst im 19. Jhdt. in der heute ausgeprägten Form durchgesetzt hat.

- Satz:

  Ein Satz ist eine als wahr festgestellte mathematische Aussage. Sätze bauen auf Definitionen auf und machen Aussagen über verschiedene Objekte und ihren Zusammenhang. Ein Beispiel: »Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.« ist ein mathematischer Satz. Um den Wahrheitsgehalt zu bestätigten, müssen Sätze nach den Regeln der (mathematischen) Logik bewiesen werden.

- Beweis:

  Beweise sind der Nachweis, dass (und warum) mathematische Sätze gelten. Für einen Beweis dürfen nur Aussagen verwendet werden, die im Rahmen einer Theorie bereits bewiesen wurde. Wichtig für die Beweise ist es, die Voraussetzungen für einen Satz zu erkennen. Im obigen Differenzierbarkeits-Stetigkeitsbeispiel sind die Voraussetzungen, die im Beweis verwendet werden dürfen, dass f differenzierbar ist.

Zusätzlich zu diesem Kern von deduktiver Mathematik gibt es Ausdrücke, die in Vorlesungen und einschlägigen Büchern immer wieder auftauchen. Dabei handelt es sich vor allem um nähere Unterscheidungen von Sätzen grundsätzlich technischer Natur und (subjektiver) Wichtigkeit.

- Lemma:

  Ein Lemma (Mehrzahl: Lemmata) ist ein kleiner Hilfssatz, der für den Beweis eines größeren, wichtigen Satz benötigt wird. Sätze sind meist zentrale Aussagen in einer Theorie, während Lemmata eher technische Hilfsmittel für Sätze darstellen.

8 Üblicherweise wird diese allgemeinste Definition nicht im schulischen Unterricht gebracht. Stattdessen wird mit einer strukturell einfacheren Definition (Zuordnungsvorschrift) gearbeitet, die bei schulischen Aufgaben die selben Ergebnisse liefert.

- **Korollar:**

  Ein Korollar ist eine relativ einfache Folgerung aus einem Satz, die z. B. durch Einsetzen von konkreten Voraussetzungen oder als Spezialfall eines Satzes erhalten wird. Ein Beispiel:

  > Satz: Stetige Funktionen bilden kompakte Mengen wieder auf kompakte Mengen ab.[a]
  > Korollar: Stetige Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nehmen Maximum und Minimum an.[b]
  >
  > *a* Kompaktheit ist ein Begriff, der im Allgemeinen im $\mathbb{R}^n$ definiert wird. Mehr dazu lernt man in der Analysis.
  > *b* Kompakte Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind abgeschlossene Intervalle $[a, b]$. Da nun dieses Intervall laut dem Satz wieder auf ein Intervall $[c, d]$ abgebildet werden, wird von f auch das Minimum c und das Maximum d angenommen.

Abgesehen davon wird der begleitende und umrahmende Text besonders in der Fachliteratur häufig eher kurz und bündig gehalten. Das hat vor allem wirtschaftliche Gründe (mehr Papier kostet mehr), ist aber natürlich auch eine Stil- bzw. Wissenschaftsfrage, da Wissenschaft bestrebt ist, so knapp als möglich zu formulieren.[9] Je nach Autor bzw. Autorin wird dieser umrahmende Text auch gerne strenger durchstrukturiert:

- **Bemerkungen:**

  Bemerkungen sind üblicherweise Kommentare und Hinweise der Lehrenden bzw. der AutorInnen (bei Büchern), die die erhaltenen Resultate oder die gemachten Definitionen näher erklären oder Hintergrundinformationen darstellen.

Besonders als AnfängerIn mit wenig Vorwissen vom jeweiligen Fachgebiet, akademischer Mathematik oder einschlägiger Literatur sollte man folgende Hinweise befolgen:

i) Man liest zuerst den Text am Buchrücken, um einen ersten Überblick zu erhalten.

ii) Man liest unbedingt das Vorwort, da dort meist die Charakteristika des jeweiligen Buches vorgestellt wird. Die Erwartungshaltung wird dadurch abgeklärt. Gleichzeitig sind im Vorwort bzw. der Einleitung üblicherweise Hinweise zum Lesen angeführt, die die üblicherweise Lektüre erleichtern.

iii) Bei jedem Kapitel sollte man unbedingt den einleitenden Text lesen. Dieser gibt gewöhnlich die Motivation für eine Theorie und ordnet diese oft in einen größeren Zusammenhang ein. Weiters werden oft die Ziele festgehalten, die durch ein Kapitel bzw. eine Theorie erreicht werden sollen.

9 Hintergedanke ist der, dass man länger braucht, um viel Text zu lesen. Und niemand verschwendet gerne viel Zeit, etwas zu lesen, was man auch auf der halben Seitenanzahl sagen könnte.

2. Tipps zum universitären Mathematiklernen

Das universitäre Mathematiklernen ist vor allem am Beginn oft eine gehörige Umstellung vom typischen Mathematik-Schulalltag. Hauptgrund dafür ist vor allem die Verantwortungsverschiebung für den Lernerfolg. Während in der Schule die jeweilige Lehrkraft für alle Probleme usw. verantwortlich ist oder gemacht wird, ist an der Universität primär jeder selbst seines Glückes Schmied. Je früher man begreift, dass man selbst das Hauptinteresse am eigenen Lernerfolg hat, desto angenehmer wird das Studium. Diese Verantwortungsverschiebung zeigt sich besonders im veränderten Ausmaß der Selbstständigkeit und dem eigenverantwortlichen Lernen außerhalb der Lehrveranstaltungszeit. Die folgenden Kapitel versuchen, einerseits allgemeine Aspekte zum Mathematiklernen zu thematisieren, andererseits sinnvolle Strategien für die verschiedenen Lehrveranstaltungstypen anzubieten. Trotzdem bleibt das Lernen erstens ein individueller Prozess, der zweitens selten problemlos und fehlerfrei ist. Da (kleinere) Probleme nicht immer vermeidbar sind, ist vor allem der konstruktive Umgang damit ein Kriterium für Erfolg oder Misserfolg. Hoffentlich kann das vorliegende Skript dazu einen kleinen Beitrag leisten.

2.1. Einfluss von Vorwissen

Es ist lernwissenschaftlich bestätigt, dass Vorwissen ein mitentscheidender Faktor für Lernerfolg ist. Das betrifft einerseits das Schulwissen, andererseits auch das Wissen, das man sich im Lauf des ersten Semesters aneignet und als Vorwissen für weitere Themengebiete und Lehrveranstaltungen dient. Die mathematischen Stoffgebiete sind allesamt sehr aufbauend, es zahlt sich dementsprechend für das restliche Studium aus, besonders am Studienbeginn viel Zeit und Anstrengung in Lehrveranstaltungen wie die Analysis 1 oder die Lineare Algebra 1 zu investieren. Diese beiden Themenbereich sind im Wesentlichen das Basiswissen für alles Weitere.

Leider oder Gott sei Dank (?) ist das schulische Vorwissen in Mathematik deutlich weniger tragfähig als in anderen Wissenschaften. (In Kap. 1 wurden Unterschiede so gut wie möglich thematisiert.) Dadurch hat auch jemand mit »schlechtem« schulischen Unterricht eine realistische Chance, Lernerfolge zu machen.[1] Außerdem soll der Brückenkurs helfen, sich eine tragfähige mathematische Ausgangsbasis zu erarbeiten.

Das Gefühl, in der Schule kaum etwas gelernt zu haben, ist zunächst vor allem ein subjektives Gefühl, das nachvollziehbarerweise verunsichert und an den eigenen Fähigkeiten zweifeln lässt. Die gute Nachricht dabei: Dem Großteil der Studierenden geht es so, das ist im momentanen System »normal« (und wohl kaum völlig zu vermeiden).[2] Wie schnell sich der Lernerfolg bei ausreichend intensiver Beschäftigung wächst, merkt man für gewöhnlich am Ende des ersten Studienjahres, wenn man sich noch einmal die Lehrveranstaltungsunterlagen und Übungsaufgaben des ersten Semesters durchsieht und feststellt, dass man jetzt viel mehr und deutlich schneller versteht. Zwar bleiben viele (neue) Inhalte nach wie vor fordernd (und dadurch spannend und interessant), der Eingewöhnungsprozess ist aber im Allgemeinen der am schwersten verdaulichste.

1 Im letzten Jahrhundert hieß es am Beginn des Mathematikstudiums sinngemäß oft: »Vergessen Sie alles, was Sie in der Schule gelernt haben – erst im Studium lernen Sie alles richtig«. Vor allem erst in den letzten 10 Jahren macht man sich Gedanken, wie man Studierenden diesen Sprung verringern kann.

2 Man hält sich dann einfach vor Augen, dass die eigene Mathematik-Lehrkraft auch das Studium geschafft hat. Im Allgemeinen sind Lehrkräfte (auch) keine Genies :-) – manche mehr, manche weniger.

Andererseits bietet sich durch den Wechsel von der Schul- zur Hochschulmathematik die Chance, vieles neu zu überdenken und dadurch erst ein wirkliches Verständnis zu erhalten. Aussagen von schulischen Lehrkräften wie »Das ist halt so!« gibt es an der Universität nicht. Dabei muss angemerkt werden, dass sich vermeintlich grundlegende Aussagen erst mit höherer Mathematik klären lassen.[3]

Die angehenden Lehrkräfte erhalten so auch die Chance, Abstand von ihrem mathematischen Schulunterricht zu bekommen und dadurch Konzepte und Aspekte von Mathematik kennen zu lernen, die im eigenen Unterricht möglicherweise zu kurz gekommen sind. Man erkennt die Zusammenhänge der Hochschulmathematik mit der Schulmathematik sowie den Gewinn der hochschulmathematischen Ausbildung für die eigene Lehrkraftkarriere erst dann, wenn man fachlich wirklich sattelfest ist. Erst dann stellt man fest, wie sich die Schulmathematik eingliedert oder warum diese und jene Inhalte (nur) in einer »reduzierten« Form im schulischen Unterricht behandelt werden.[4]

2.2. Lernen auf Verständnis

Um im Mathematikunterricht in der Schule bestehen zu können (und zum Teil sogar gute Noten zu erhalten), reicht es oft, die Lösung typischer Aufgaben reproduzieren zu können. Gute Noten in der Schule sagen im Allgemeinen wenig über die mathematischen Fähigkeiten und die Qualität des eigenen Mathematiklernens aus. In der akademischen Mathematik ist es dagegen umso wichtiger, Zusammenhänge zwischen einzelnen Aussagen zu verstehen und verschiedene Teile einer Theorie einordnen zu können. Dabei ist es notwendig, sich Inhalte nicht nur zu merken und wiedergeben zu können, sondern Inhalte tatsächlich grundlegend zu verstehen. Dabei stellt sich die Frage, wie man feststellt, dass man etwas wirklich verstanden hat. Nachfolgend einige Überlegungen. Das Themengebiet der Stetigkeit dient dabei zur Illustration.

Wenn man ein Themengebiet wirklich verstanden hat, ...

i) kann man bereits behandelte Aufgaben in jedem Schritt nachvollziehen und begründen, warum die jeweiligen Schritte gesetzt werden.

> Man kann nachvollziehen, wie man beweist, dass eine Funktion wie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ stetig ist. Man kann die zu zeigende Aussage in eine umgangssprachliche Form übersetzen, die einzelnen Beweisschritte begründen und die grundlegende Beweisstrategie erklären.

ii) kann man Mitstudierenden die Inhalte von Null weg erklären.

> Bei der Stetigkeit kann man beispielsweise eine exakte Definition geben, die einzelnen Ausdrücke in dieser Definition erklären und anhand einer Skizze klar machen.

iii) kann man Beispiele und Gegenbeispiele zu den jeweiligen Sachverhalten angeben.

> Man kann typische unstetige Funktionen (Vorzeichen-Funktion, andere Treppenfunktionen), aber auch typische stetige Funktionen (z. B. Polynome) angeben und begründen, warum sie die jeweilige Eigenschaft besitzen oder nicht.

---

3 Kreis und Kugel bieten sich dafür an: Welchen Grund hat es beispielsweise, dass die selbe (!) Zahl π sowohl bei Formeln vom Kreis als auch bei Formeln einer Kugel auftaucht? Wie kommt man zur Flächenformel vom Kreis? Wie zur Oberflächenformel einer Kugel?

4 Versuche in den 60er und 70ern, Schulmathematik auch formal korrekt einzuführen – wie der Anspruch an Hochschulmathematik ist –, sind praktisch gänzlich gescheitert. Die nötigen kognitiven Fähigkeiten (Abstraktionsvermögen usw.) sowie motivationalen Voraussetzungen sind beim Großteil der SchülerInnen (und leider auch nicht bei allen momentanen Studierenden) de facto nicht vorhanden. Aus diesen Gründen wurde die versuchten Reformen der »Neuen Mathematik« fast gänzlich wieder zurückgenommen.

iv) kann man Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu ähnlichen Konzepten und Inhalten erkennen und ausdrücken.

> Man kann die Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 davon abgrenzen, dass der Grenzwert an dieser Stelle existiert. Man erkennt, dass die Existenz eines Grenzwertes eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung für Stetigkeit ist usw.

v) kann man zwischen verschiedenen Darstellungsebenen (formale Definition, verschiedene Schreibweisen, graphische Veranschaulichung usw.) wechseln.

> Bei der Stetigkeit kann man beispielsweise die formale ϵ-δ-Definition in eine Grafik übersetzen und umkehrt, ausgehend von einem gegebenen Graphen Ideen für formale Beweise usw. finden.

vi) kann man neue, unbekannte Aufgaben des Themengebietes zielführend bearbeiten.

> Ausgehend vom bisherigen Wissen kann man neuartige Aufgabentypen zum Thema Stetigkeit bearbeiten: Man versteht zunächst, worum es geht, man erkennt, worin sich die neuartige Aufgabe von anderen Aufgaben unterscheidet und man entwickelt ein Gefühl, mit welcher Strategie und welcher Idee man an eine Aufgabe herangeht. Beispielsweise kann man Funktionen wie $f : D := (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in D \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{wenn } x \in D \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$
>
> auf Stetigkeit an $x_0 \in D$ untersuchen.

vii) kann man auch Zusammenhänge mit anderen Themengebieten herstellen.

> Bei der Stetigkeit kann man beispielsweise Definitionen und Sätze ohne Grenzwerte von Funktionen, sondern durch Grenzwerte von Folgen beschreiben. Man kann begründen, warum beide Darstellungen gleichwertig sind.

Es bleibt (abgesehen von Klausuren) grundsätzlich in der eigenen Verantwortungen, abzuklären, ob man über die jeweiligen Fähigkeiten bereits verfügt oder nicht. Wenn man sich dieser Verantwortung bewusst ist, fällt es relativ leicht, den eigenen Lernerfolg zu kontrollieren. Folgende naheliegenden Möglichkeiten bieten sich an, die weitgehend ohne zusätzlichen Zeitaufwand durchgeführt werden können:

- Weiß ich noch, was in den letzten Lehrveranstaltungen behandelt wurde? Welche Definitionen und Sätze sind vorgekommen? Gab es typische Beweismuster, an die ich mich erinnern kann?
- Habe ich alle Aufgaben des letzten Übungszettels verstanden? Könnte ich die Bespiele erneut und ohne Hilfe lösen? Kann ich mir Schritte, die ich mir nicht gemerkt[5] habe, selbst zusammenreimen? Diese Fragen stellt man sich automatisch häufig beim aktuellen Übungszettel, da viele Inhalte und Aufgaben stark aufbauend sind.

---

5 Da man sich für gewöhnlich intensiv mit einem Beispiel beschäftigt, merkt man sich einzelne Schritte auch zu einem gewissen Teil. Allerdings: Ein Beispiel aus dem Gedächtnis wiedergeben zu können, ist noch kein Kriterium für ausreichendes Verständnis und zu erwartenden Erfolg bei Prüfungen!

- Erkenne ich in Lehrveranstaltungen, dass (und wie) neue Inhalte mit dem bisher Gelernten zusammenhängen oder aufbauen? Schaffe ich es, neue Inhalte weitgehend auf Anhieb zu verstehen? Ein Hinweis, dass man das nicht schafft, ist, wenn man am Ende einer Lehrveranstaltung keine Ahnung mehr hat, warum man diese Inhalte jetzt gelernt hat und worauf der oder die Vortragende überhaupt hinaus will.
- Kann ich jemandem, der eine Lehrveranstaltungseinheit versäumt hat und sich daher meine Mitschrift kopiert hat, sämtliche Fragen dazu beantworten?
- Kann ich einem fachlichen Gespräch unter Mitstudierenden folgen, das sich beispielsweise um eine der aktuellen Übungsaufgaben dreht oder verstehe ich deren Argumente und Ideen nicht?[6]

Sich zu bemühen, Mathematik auf Verständnis zu lernen und sich nicht mit dem Wiedergeben von Fakten zufrieden zu geben, ist wohl die beste Haltung, die im ersten Semester hilft. Nichtsdestotrotz besteht Mathematik zu einem gewissen Teil aus Merk- und Erfahrungswissen, das man schnell zur Verfügung haben muss. Je nach Begabung und Lerntempo kann man Mathematiklernen auch als zweischrittigen Prozess auffassen. Vor allem für Studierende, die zunächst Probleme mit dem verständnisvollen Lernen haben, können sich möglicherweise dadurch von diesem zunächst vielleicht noch unerfüllbaren Anspruch entlasten:

i) Im ersten Durchlauf ist man bestrebt, sich Definitionen und Sätze einfach nur einzuprägen und diese formal korrekt wiedergeben zu können.[7]

ii) Im zweiten Durchlauf (z. B. bei der mehrfachen Nachbereitung von Vorlesungseinheiten und Übungsaufgaben) konzentriert man sich darauf, die Zusammenhänge zu verstehen und sich sein Gedächtnis durch inhaltliches Merken bzw. Verständnis entlasten zu können. Es geht darum, ein geeignetes »Bild« im Kopf zu haben. Auf Dauer ist es nämlich kaum möglich (und auf gar keinen Fall sinnvoll!!!!), sich alle Einzelheiten auf Punkt und Beistrich zu merken.[8]

Natürlich ist Lernen ein individueller Prozess, bei dem es kein Allheilmittel gibt. Man muss für sich selbst eine gute Strategie finden, mit der man zurecht kommt. Die oben genannten Tipps und die noch folgenden Vorschläge können dabei als Ausgangsbasis dienen, wenn man eben nach zwei, drei Wochen merkt, dass es mit der bisherigen (schulischen) Strategie nicht funktioniert. Man muss es freilich nicht so machen – das liegt selbstverständlich in der studentischen Eigenverantwortung.

6 Das kann natürlich auch an der schlechten Qualität der Erklärung der Mitstudierenden liefern. Zwar studieren viele Mathematikstudierende Lehramt – das ist aber noch kein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Person erklären kann. Im Allgemeinen bedarf es dazu eines gut strukturierten Denkens, einer grundlegenden sprachlichen Ausdrucksfähigkeit und eines gutes fachlichen Verständnisses. »Naturtalente« sind eher selten. Erklären kann und sollte man trainieren.

7 Normalerweise beschäftigt man sich sowieso so intensiv mit den Definitionen und Sätzen, dass man die meisten davon automatisch ohne bewusstes Auswendiglernen wiedergeben kann.

8 In der Hochschulmathematik ist meistens jedes einzelne Zeichen und seine Position unverzichtbar. Kleine Abweichungen in der Syntax können sehr große Auswirkungen haben. Den Lehrenden (und auch allen fortgeschrittenen Studierenden) fallen diese Fehler selbstverständlich auf. Aussagen wie »Das ist ja praktisch das Gleiche!« zeigen, dass man vom Verständnis noch (zu) weit weg ist.

2.3. Strategien für Vorlesungen (VO)

Vorlesungen sind Lehrveranstaltungen, in denen die Inhalte in Form von Frontalunterricht (Vortrag) präsentiert werden. In wie weit die gebrachten Inhalte auch bei den Studierenden ankommen, bleibt weitgehend in der Verantwortung der Studierenden. Nichtsdestotrotz ist das Stellen von Fragen je nach Vortragenden erlaubt oder sogar erwünscht.[9] Meist findet der Frontalunterricht in Form von klassischem Tafelvortrag statt. Präsentationen per Beamer und PC oder tablet-PC sind eher selten. Meist ist das Schreibtempo der Vortragenden sehr hoch. Unterbrechungen des Vortrags sind eher selten, wodurch die Stoffmenge pro Lehrveranstaltungseinheit sehr groß wird. Mengenmäßig kann man sich vorstellen, dass in einer Lehrveranstaltung mit 4×45 min pro Woche in einem Semester etwa so viel Stoff gemacht wird wie im schulischen Mathematik-Unterricht eines gesamten Schuljahres.

Durch die große Stoffmenge, die oft herausfordernde Theorie sowie die höhere notwendige Eigenverantwortlichkeit kommt es immer wieder zu kleineren und größeren Schwierigkeiten. Nachfolgend sind einige Empfehlungen angeführt, wie man Probleme im besten Fall von vornherein vermeiden kann oder im Nachhinein verringern kann.

- Problem: »Das Tempo des Vortrags ist sehr hoch, ich komme beim Mitschreiben nur schlecht mit.«

  Triviale, aber nicht sofort umsetzbare Maßnahme: Schneller schreiben! Je schneller man schreibt, desto mehr Zeit bleibt zum Mitdenken und desto mehr profitiert man von Vorlesungen.

  Oft empfiehlt es sich nicht, direkt von der Tafel abzuschreiben. Das hat nämlich den Nachteil, dass man warten muss, bis der/die Vortragende den Blick freimacht. Da für gewöhnlich das gesprochen wird, was an der Tafel notiert wird, ist man so gezwungenermaßen hinterher. Mit etwas Übung und einem grundlegenden mathematischen Wortschatz bietet es sich an, nach Möglichkeit nach Gehör[10] mitzuschreiben. Besonders wenn ein Themengebiet schon länger behandelt wird, kennt man die üblichen Sprechweisen und Notationen.[11] Regelmäßige Kontrollblicke auf die Tafel sollte man trotzdem machen.

  Je nach Dauer einer Lehrveranstaltungseinheit und der Anzahl und Größe der Tafeln müssen die Vortragenden auch ab und zu die Tafel löschen. Diese Zeit kann manchmal auch genützt werden, um aufzuholen. Pünktliches Erscheinen in der Vorlesung ist selbstverständlich – fünf Minuten zu spät kann bereits eine halbe Tafel[12] Rückstand bedeuteten.

  Was das schnelle Schreiben ebenso erschweren kann, ist das mühsame Entziffern der Tafelschrift. Gründe dafür können sein: zu große Entfernung zur Tafel (wer sich ganz hinten in den Hörsaal setzt, ist selbst Schuld), zu schwache Sehkraft (mittlerweile gilt praktisch alles als modische Brille :-)), schlechte Lichtverhältnisse (auf jene Seite hinsetzen, wo die Tafel nicht spiegelt oder die Lehrenden bitten, die Rollos zu schließen; die Vortragenden bitten, das Tafellicht einzuschalten) oder auch eine schlampige oder zu kleine Schrift der Vortragenden. Der letzte Grund ist nur schwer zu entschärfen. Fast alle Lehrenden haben eine »voreingestellte« Schriftgröße, die sie kaum bewusst über einen längeren Zeitraum verändern können. Auch die allgemeine Lesbarkeit einer Schrift ist kaum zu beeinflussen – manchen Lehrenden ist das Schreibtempo wichtiger als die Leserlichkeit. In diesem Fall empfiehlt es sich umso mehr, nach Gehör zu schreiben.

- Problem: »Der/die Vortragende schreibt kaum ausführliche Erklärungen an die Tafel, sondern verwendet fast nur mathematische Kurznotationen.«

  Im Allgemeinen wird nur das Nötigste an die Tafel geschrieben, um das Tempo hoch zu halten (und die Tafel nicht unnötig oft löschen zu müssen). Zwar werden durchaus verbalen Erklärungen gegeben, diese aber nicht (vollständig) auf der Tafel notiert. Da sich beim Durcharbeiten der

9 Oft scheitert es eher am Lernstand der Studierenden, dass Fragen gestellt werden (können). Nur wer über ein bestimmtes Ausgangswissen verfügt und dementsprechend mitgelernt hat, erkennt konkrete Verständnisprobleme und kann sinnvolle Fragen stellen.

10 Man schreibt mit, was der/die Vortragende spricht, da das weitgehend ident mit dem Tafelbild ist.

11 Wenn der/die Vortragende sagt: »Sei a_n eine reelle Folge«, so schreibt man dann schon fast automatisch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hin.

12 Die Tafeln in Hörsälen sind ca. viermal so groß wie Schultafeln im Klassenzimmer.

Inhalte sehr oft kleine Fragen stellen, warum jetzt dieser Schritt so und so gemacht wird, zahlt es sich aus, nach Möglichkeit so viele Zusatznotizen zu machen wie möglich. Falls man sich über die Richtigkeit der Notizen unsicher ist, kann man zweifarbig arbeiten: Tafelbild mit Kugelschreiber, Zusatznotizen mit Bleistift. Auch beim Nachbereiten gemachte Ergänzungen sollte man mit einer anderen Farbe machen, um bei Missverständnissen nachvollziehen zu können, was jetzt ursprünglich dort gestanden ist und was nicht.[13] Um Ergänzungen machen zu können, ist ausreichend Platz nötig – bei kariertem Papier bietet es sich an, nur jede zweite Zeile zu besetzen.[14]

Eine gute Gliederung kann ebenso helfen: Da gewöhnlich nach dem Schema Definition – Satz – Beweis vorgegangen wird, ist es relativ leicht möglich, eine gute Struktur bei der Mitschrift zu erhalten: Größere vertikale Abstände z. B. zwischen einer Definition und einem nachfolgenden Satz, aber auch Einrückungen am Seitenrand (»hängender Einzug«). Innerhalb eines Beweises können Unterpunkte helfen, die einzelnen Schritte zu verdeutlichen.

- Problem: »Es wird kaum Stoff wiederholt – ich komme nicht mit.«

  Entgegen der anderen Probleme ist dieses Probleme recht leicht zu lösen: Man muss einfach selbst den Stoff regelmäßig wiederholen, wenn bzw. weil das die Lehrenden in den Lehrveranstaltungen nicht übernehmen. Beispielsweise kann man bereits einige Minuten vor dem Beginn der jeweiligen Lehrveranstaltungen die Mitschrift der vorigen Einheiten durchblättern und wiederholen, um dadurch einen besseren Einstieg in die aktuelle Lehrveranstaltungseinheit zu erhalten. Daneben bietet es sich an, alle zwei, drei Wochen den kompletten Stoff einer Lehrveranstaltung zu wiederholen. Wer die Übungsaufgaben selbstständig macht, kommt normalerweise nicht daran vorbei, sich regelmäßig mit den Inhalten zu beschäftigen und z. B. Definitionen nachzuschlagen.

  Je nach Lehrveranstaltungen gibt es auch Inhalte, die sehr zentral sind und immer wieder vorkommen. In der Analysis sind das: Funktionen und Grenzwerte verschiedenster Art, in der Linearen Algebra sind das die Linearität von Funktionen sowie die lineare Unabhängigkeit.

- Problem: »Ich habe eine Lehrveranstaltungseinheit versäumt. Was kann ich machen?«

  Auch das ist einfach: Man kopiert sich zunächst die Mitschrift von Mitstudierenden und überträgt sie anschließend in sein eigenes Skript. Warum man sich nicht mit der Kopie zufrieden gibt, ist klar: Durch das langsame Übertragen (und Mitdenken!) ist man gezwungen, sich mit den Inhalten auch tatsächlich zu beschäftigen und aktiv durchzuarbeiten. Nach Möglichkeit holt man den versäumten Stoff bereits vor der nächsten Lehrveranstaltungseinheit nach.

  Damit man von der Mitschrift von Mitstudierenden profitiert, sollte diese natürlich vollständig und auch leserlich sein (siehe Tipps oben). Es ist sehr ratsam, auf jede Seite eine Datum und eine fortlaufende Seitenzahl zu schreiben – das erleichtert den Austausch und das Vergleichen (z. B. bei vermeintlichen Abschreibfehlern usw.) ungemein.

- Problem: »Ich habe während der Lehrveranstaltung nicht alles verstanden.«

  Dieses Problem tritt für gewöhnlich früher oder später einmal bei allen Mathematik-Studierenden ein.[15] Das ist überhaupt kein Grund zum Verzweifeln – es ist Nachbereitung angesagt. Nach Möglichkeit sollten die Unklarheiten und Verständnisschwierigkeiten noch vor der nächsten Vorlesungseinheit und vor allem noch vor dem nächsten Übungsblatt behandelt werden. Da kaum Stoff wiederholt wird und stattdessen zügig mit aufbauendem Stoff weitergemacht wird, ist die Chance eher gering, dass sich die Verständnisschwierigkeiten »von allein« in der nächsten Lehrveranstaltungseinheit klären. Dagegen ist die Gefahr eher größer, dass man noch weniger versteht als beim letzten Mal. Dadurch kann es gut möglich sein, dass man vor allem bei abstrakteren Lehrveranstaltungen wie der Linearen Algebra nach einigen Wochen gar nichts mehr (durch

13 Es gibt immer wieder Situationen, wo man denkt, man hat falsch mitgeschrieben, bessert dann aus – und nach einiger Zeit und einem Gedankenblitz kommt man doch zum Schluss, dass das Ursprüngliche richtig war.

14 Natürlich gibt es auch Gründe, die Inhalte möglichst kompakt darzustellen. Beim Erstellen von Zusammenfassungen vor dem Prüfungslernen konzentriert man sich auf das Wesentliche, um möglichst viel Stoff in wenig Zeit zu wiederholen zu können.

15 Hochbegabte ausgenommen, d. h. vielleicht 2 von 200 Studierenden verstehen immer alles :-)

Hausverstand) versteht und in der Lehrveranstaltung nur mehr die Buchstaben von der Tafel abschreibt.

Wenn man das Gefühl hat, dass die eigene Mitschrift (oder das jeweilige Skript) nicht ausreicht, um die Verständnisschwierigkeiten zu lösen, besorgt man sich logischerweise selbst ausreichend Literatur. Das ist an der Uni Graz[16] sehr einfach: Mit der Uni-Graz-Card hat man gleichzeitig einen Bibliotheksausweis. Daneben gibt es viele Bücher, die als eBooks im pdf-Format über die Bibliothek der Uni Graz kostenlos erhältlich sind.

Falls in der Lehrveranstaltung Bücher empfohlen wurde, sollte man zunächst versuchen, mit diesen Büchern zu arbeiten. Nicht alle Bücher bauen mathematische Theorien gleich auf, wodurch man zusätzlich verwirrt werden könnte. Je nachdem, welche Art von Schwierigkeiten es gibt, sind auch Mathematikbücher für Naturwissenschaftler und Ingenieure nicht zu verachten. Diese Bücher beinhalten zwar oft keine (strengen) Beweise, aber behandeln viele Inhalte meist anschaulicher. Damit sind sie meist deutlich leichter für Erstsemestrige zugänglich und können durchaus helfen, sich einen Überblick sowie ein grobes Verständnis für die verschiedenen Inhalte zu verschaffen. Daneben gibt es auch Beispielsammlungen (mit zum Teil durchgerechneten Aufgaben), in die sich ein Blick im Allgemeinen lohnt. Durch die Anwendung von Theorie wird deutlich, wofür die Inhalte gut sind und was man mit ihnen machen kann.

Abgesehen von Büchern kann man den Stoff auch in Kleingruppen durch besprechen. Wenn die Gruppenmitglieder bzw. LernpartnerInnen annähernd ähnlich leistungsstark sind, ist die Ausgangslage am besten. So werden nämlich alle Beteiligten gezwungen, sich aktiv mit dem Stoff zu beschäftigen und es verkommt nicht zu einem einseitigen Vortrag der allwissenden Person. Gegenseitig kritisch zu hinterfragen kann helfen, dass man sich wirklich gut mit den Inhalten beschäftigt – dadurch gewöhnt man sich auch an Verständnisfragen der Prüfenden bei mündlichen Vorlesungen.

- Problem »Ich tu mir schwer, einzuschätzen, was wichtig ist. Was muss man auf jeden Fall können und wissen?«

  Diese Unsicherheit ist am Beginn eines neuen Stoffgebietes nicht ungewöhnlich, weil man ja noch nicht abschätzen kann, wofür man diese und jene Definitionen oder diesen und jenen Satz braucht. Allerdings helfen diesbezüglich zwei Faustregeln:

  i) Alle Sätze, die einen Namen haben, sind wichtig – zumindest aus innermathematischer Sicht in einem Themengebiet. Ein Beispiel dafür ist der »Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung«.

  ii) Alle Definitionen, die im Folgenden ständig auftauchen, sind wichtig. Zum Beispiel eine kleine Auswahl: In der Analysis muss man wissen, was eine konvergente Folge ist oder was eine differenzierbare Funktion ist – in der Linearen Algebra muss man den Begriff der Linearkombination und der linearen Unabhängigkeit können.

  Um sich zu veranschaulichen, wie die Theorie aufgebaut ist und wie was vorausgesetzt ist, kann man sich beispielsweise eine Mind-Map (oder ähnliche Veranschaulichungen[17]) machen. So kommt deutlich heraus, was die Voraussetzungen sind und welcher Satz bei welchem Beweis angewandt wird usw. Sich zuerst einen Überblick zu verschaffen, bevor man ins Detail geht, ist immer gut.

Letztendlich bleibt also festzuhalten: Je schneller man mitschreibt, desto mehr Zeit bleibt zum Mitdenken. Je besser man mitlernt, desto leichter fällt das Verstehen von neuen Inhalten.

16 Weiterführende Infos gibt es unter `http://ub.uni-graz.at`
17 Siehe beispielsweise `http://de.wikipedia.org/wiki/Mind-Map`

2.4. Strategien für Übungen (UE)

Lehrveranstaltungen des Typs »Übung« haben für gewöhnlich folgenden Ablauf: Eine Woche vor der jeweiligen Übungseinheit wird ein Aufgabenzettel veröffentlicht, der bis zur Übungseinheit von den Studierenden selbstständig zu bearbeiten ist. In der jeweiligen Übungseinheit präsentieren Studierende (freiwillig oder aufgerufen) ihre Lösungen. Damit ergeben sich Gemeinsamkeiten zu schulischen Hausübungen, bei der die SchülerInnen ebenfalls selbstständig Aufgaben lösen müssen. Der große Unterschied zwischen schulischen Hausübungen und universitären Aufgabenzetteln ist der Anspruch, welche Aufgabentypen behandelt werden können müssen: Während in der Schule primär[18] Analogiebeispiele geübt und wiederholt werden, bekommt man an der Universität primär mehr oder weniger völlig unbekannte[19] Aufgabentypen – im Allgemeinen auch Beweis-Aufgaben. Die meisten der Aufgabenstellung sind daher ungewohnt und neu. Dadurch ist meist viel gedankliche Arbeit nötig, da man die in der Vorlesung präsentierte Theorie selbstständig auf die Aufgaben übertragen können muss. Das bereitet am Studienbeginn erfahrungsgemäß dem Großteil der Studierenden Probleme, weil man es aus der Schule meist nicht in diesem Ausmaß gewohnt ist. Übung macht jedoch den Meister, wie es so schön heißt. Damit die Umstellung nicht ganz so groß ist und man für sich selbst eine passende Herangehensweise finden kann, wird nachfolgend ein mögliches Vorgehen zum Bearbeiten eines Übungszettels vorgestellt:

i) Ein neues Aufgabenblatt in Angriff nehmen.

Da das neue Aufgabenblatt grundsätzlich auf den Inhalten des vorangegangen Übungszettel und den bisherigen Vorlesungseinheiten aufbaut, sollte man so gut wie möglich die bisherigen Stoffgebiete verstanden und verinnerlicht[20] haben. Falls das noch nicht der Fall ist, kann man den neuen Zettel zunächst thematisch überfliegen, um die jeweiligen Themenschwerpunkt herauszufinden. Allgemein sollte man das Aufgabenblatt ausdrucken und zumindest überfliegen, sobald es verfügbar ist. Die Logik dahinter ist einfach: Je früher man sich den Zettel ausdruckt, desto länger hat man Zeit zur Bearbeitung. Im Gegensatz zu schulischen 5-Minuten-Aufgaben ist zur Bearbeitung von Übungsaufgaben an der Uni im Allgemeinen deutlich mehr Zeit nötig. Es wird immer wieder Situationen geben, wo man auch nach 3 Tagen noch keine Idee hat, wie man den Beweis schafft – aber vielleicht bringt ja der 4. Tag die Erleuchtung. Das ist allerdings nur dann hilfreich, wenn man sich ausreichend früh mit den Aufgaben beschäftigt – und die Übungseinheit nicht schon am 3. Tag stattfindet.

ii) Verstehen der Aufgabenstellungen

Ein erstes Überfliegen des Aufgabenblattes befähigt im Allgemeinen noch nicht, die Aufgaben auch wirklich lösen zu können. Im Gegensatz zum schulischen Unterricht gibt es weniger Schlagwörter, bei denen sofort klar ist, was zu tun ist (z. B. »Führe eine Kurvendiskussion durch«). Vielmehr kann jede kleine Formulierung und jedes einzelne Zeichen einen wichtigen Beitrag liefern, was tatsächlich verlangt ist.

Falls man Formulierungen und Definitionen nicht parat hat, schlägt man diese nach und notiert sie beispielsweise gesammelt zu jeder Aufgabe. Ziel ist es, die Aufgabenstellungen so gut zu verstehen, dass man weiß, was genau bei der Aufgabe verlangt ist, ohne dass man den Aufgabentext vor sich liegen hat. Dadurch besteht die Chance, dass man auch Ideen zur Lösung findet, wenn man nicht direkt mit Papier und Bleistift arbeitet (beispielsweise im Bus oder im Zug, in der Dusche, beim Mittagessen usw.).

18 Zumindest war das in den letzten Jahren wohl eher noch der Fall. Vielleicht verschiebt sich mittlerweile durch die Kompetenzorientierung der Schwerpunkt etwas.

19 In der zugehörigen Vorlesung werden manchmal weniger, manchmal mehr Aufgaben zu Themengebieten vorgerechnet. Meistens eher weniger.

20 »Verinnerlichtet« meint, dass man die Inhalte nicht nur nachvollziehen kann, sondern tatsächlich wiedergeben kann und sie auch wirklich parat hat.

iii) Bearbeiten der Aufgaben

Die sinnvolle, intensive Bearbeitung einer Aufgabe ist erst möglich, wenn man die Aufgabenstellung wirklich verstanden hat. Um den Arbeitsaufwand grob einzuschätzen, kann folgende Faustregel dienen: Pro Aufgabe braucht man eine Stunde. Bei 6 Beispielen pro Blatt macht das 6 Stunden, d. h. einen langen Halbtag. Allgemein sollte man nicht davon ausgehen, dass man eine Aufgabe bereits im ersten Anlauf schafft. Es wird immer wieder Stellen geben, an denen man auch nach langem Grübeln einfach nicht weiterkommt. Dann kann man sich etwas Abstand genehmigen und z. B. am nächsten Tag wieder daran arbeiten. Unter Umständen helfen auch Gespräche mit Mitstudierenden. Allerdings sollte man sich immer nur so viel Hilfe holen, wie unbedingt nötig ist. Ziel ist es nicht, letztendlich eine Lösung für eine Aufgabe zu *haben*, sondern selbst auf die Lösung zu *kommen*. Je intensiver und je länger man sich mit der Bearbeitung von Übungsaufgaben beschäftigt, desto besser wird die Problemlösekompetenz entwickelt.

Falls man jedoch merkt, dass man noch zu große, grundlegende Defizite hat, um konstruktiv arbeiten zu können, muss man sich passende Unterstützung suchen. Zu bevorzugen sind dabei Methoden, die die eigene Arbeit *nicht* ersetzen. Selbst etwas in Büchern nachzulesen ist meist sinnvoller als sich eine Aufgabe von Mitstudierenden zu kopieren. Bücher, die vorgerechnete, ähnliche Übungsaufgaben beinhalten, können helfen, typische Herangehensweisen an Aufgaben zu erlernen. Bis zu einem gewissen Grad ist Problemlösen natürlich erfahrungsabhängig – je mehr man gesehen hat, desto mehr »Werkzeug« und Strategien steht im Allgemeinen zur Verfügung. Neben Büchern können auch universitäre Unterstützungsangebote (Tutorien, falls angeboten) sowie Lerngruppen helfen – zusätzlich zur eigenen Arbeit.

iv) Feinschliff der Lösung

Hat man sich (endlich) eine (vermeintliche) Lösung erarbeitet, so ist diese meist oft noch in einer Rohform, die nicht den akademischen Ansprüchen genügt. Manche Schritte sind vielleicht noch schlampig argumentiert, mitunter haben sich kleinere Fehler eingeschlichen, anderes ist vielleicht unnötig kompliziert und aufwändig und lässt sich noch besser und klarer formulieren. Selbstverständlich ist man froh, dass man zumindest eine Lösung hat – man sollte sich aber noch nicht (zumindest nicht am Studienbeginn) damit zufrieden geben. Solche Schlampigkeiten können bei Klausuren wertvolle Punkte kosten, weswegen es sich auszahlt, sich im Vorfeld bei den Übungsaufgaben damit zu befassen. Falls die eigene innere Stimme noch wenig kritisch ist, kann man auch Mitstudierende bitten, kritisch Fragen zu stellen, während man die eigene Lösung erklärt: »Warum gilt diese Aussage? Woher weißt du, dass es so ein Element gibt? Warum darfst du das so schreiben?« Am Beginn mag das zwar lästig erscheinen, aber es hilft ungemein, einen scharfen Blick für (vermeintliche) Kleinigkeiten zu bekommen.[21] Lerngruppenbesprechungen bieten sich also auf jeden Fall an, um Lösungen zu vergleichen und letzte Verbesserungen vorzunehmen.

Gleichzeitig kann man sich dadurch auf das Vorrechnen in der nächsten Übungseinheit vorbereiten. Es ist besonders am Studienbeginn eine große Entlastung, wenn man im Vorfeld seine Lösung einmal durcherklärt hat. Dadurch hat man bereits Formulierungen parat und kann sich dann während des Tafelvortrags z. B. auf das Tafelbild konzentrieren und kommt bei Zwischenfragen der Lehrenden oder der Mitstudierenden weniger leicht aus dem Konzept. Als Vorbereitung darauf können wieder Mitstudierende der Lerngruppe kritisch nachfragen oder nähere Begründungen einfordern.

Es gibt immer wieder Studierende, die die (eher seltenen) Zahlen-Beispiele nicht im Vorfeld vollständig durchrechnen. Das führt oft dazu, dass man sich an der Tafel verrechnet oder sich irgendwo verhaspelt. Man muss bedenken, dass man nur etwa einen halben Meter vor der Tafel steht. Das kann sich anfühlen, als ob man ein Brett vor dem Kopf hätte. Zudem ist man vielleicht auch nervös. Letztendlich leidet also fast immer die Qualität des Vortrags stark darunter, wenn man im Vorfeld Beispiele nicht vollständig durchrechnet. Es wird daher dringend empfohlen, auch Zahlenaufgaben vollständig durchzurechnen.

21 Später im Studium, wenn alle Studierenden über diesen scharfen Blick verfügen, muss von den Lehrenden in den Übungen nicht mehr ständig darauf bestanden werden. Man lernt einzuschätzen, wann man »übergenau« und kleinschrittig sein muss und wann nicht.

v) Vorrechnen in der Übung

Das Vorrechnen der Übung empfinden viele (leider) eine Prüfungssituation, weswegen Nervosität nicht ungewöhnlich ist. Je besser man fachlich vorbereitet ist, desto mehr Druck nimmt man sich im Vorfeld. Prüfungsangst tritt vor allem dann auf, wenn man Lösungen entweder nur unzureichend verstanden hat oder sie gänzlich von Mitstudierenden kopiert hat, ohne sie zu verstehen. Das selbstständige Bearbeiten der Übungsaufgaben ist daher eine erste gute Vorbereitung auf das Vorrechnen.

Man sollte von folgender Situation ausgehen: Rund die Hälfte der Mitstudierenden hat die Aufgabe, die man vorzeigt, nicht vollständig lösen können. Besonders bei Beweis-Aufgaben ist die Lösungshäufigkeit eher noch geringer. Damit hat man als vorrechnende Person die verantwortungsvolle Aufgabe (und Chance!!!), seinen Mitstudierenden im Studium zu helfen.[22]

a) *Tafel löschen, Platz zum Schreiben suchen*

Zum Tafellöschen verwendet man (falls vorhanden) einen Wischer, wie man ihn sonst zum Fensterputzen verwendet. Man befeuchtet den Stoffteil unter dem Wasserhahn und fährt dann horizontal von einem Tafelende zum anderen, indem man einfach von einem Tafelende zum anderen geht. Zum Trocknen der Tafel verwendet man einen Abzieher mit Gummilippe und fährt wieder horizontal von oben beginnend die Tafel ab.[23] Dadurch kann man auch große Tafeln flott löschen.

Zum Schreiben beginnt man nach Möglichkeit links oben. Man fängt grundsätzlich nicht in der Tafelmittel (horizontal, vertikal) an. Bei Spiegelungen: Vorhänge und Rollos schließen. Falls die Tafel noch feucht ist: Nur sanft mit der Kreide aufdrücken, da sie sonst sehr schwer zu löschen ist.

b) *Aufgabenstellung zumindest kurz erklären*

Bevor man mit der Lösung beginnt, erklärt man zumindest verbal kurz die Aufgabenstellung. Es ist von den Lehrenden (und der bereits in der Lehrveranstaltungseinheit verbrauchten Zeit) abhängig, ob man die Angabe komplett aufschreiben soll oder nicht – einfach nachfragen.

c) *bei Beweisen: aufschreiben, was zu zeigen ist*

Da Beweisaufgaben durchaus auch in einer weitgehend verbalen Form gestellt sein können, empfiehlt es sich, den zu zeigenden Sachverhalt so hinzuschreiben, wie man in danach mathematisch behandelt. Man übersetzt also die Angabe in eine zu zeigende, formalisierte Aussage (Kurzschreibweisen). Das hilft zu erkennen, was das grundlegende Vorgehen beim Beweisen ist und gibt Orientierung für die restliche Aufgabe.

Bsp. 2.1

Angabe am Übungsblatt: »Zeigen Sie, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 stetig ist.« Man schreibt dann beispielsweise folgende Übersetzung der zu zeigende Aussage an die Tafel:

$$\text{z. z.: } \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(»z. z.« steht dabei natürlich für »zu zeigen«.)

d) *grundlegende Beweisstrategie bzw. Herangehensweise erklären*

Um die Mitstudierenden in der Übungsgruppe darauf vorzubereiten, wie der weitere Lösungsweg aussieht, gibt man einen kurzen Überblick über die verwendete Idee. Allgemeine Regel: Vom Großen ins Kleine, da man sonst den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht. Phrasen wie

22 Für angehende Lehrkräfte muss es sowieso zum Anspruch gehören, den Mitstudierenden etwas beibringen zu wollen und zu können.

23 Vertikale Bewegungen von oben nach dauern viel länger, weil man den Abzieher dadurch mehrfach absetzen muss.

»Die Idee ist, …«, »Wir verwenden hier im Wesentlichen den Satz …« oder »Wir führen einen Induktionsbeweis, bei dem letztlich nur eine Formelumformung nötig ist …« können dabei helfen.

e) *einzelne Schritte ausführen*

Da die grobe Idee bereits vorgestellt wurde, führt man nun die einzelnen Schritt so detailliert aus, dass auch Personen, die die Aufgabe nicht lösen konnten, eine möglichst vollständige, lückenlose Lösung haben. Falls man Angst hat, zu sehr ins Detail zu gehen, kann man die Lehrenden oder die Mitstudierenden fragen, ob man den Schritt im Detail ausführen soll oder ob die Argumentation reicht. Ein Blick zu den Mitstudierenden kann helfen: Wenn alle besonders gut aufpassen oder mitschreiben, kann das ein Zeichen dafür sein, dass sie das Beispiel nicht lösen konnten, was eine ausführliche Lösung sinnvoll macht. Eine Lösung ausführlich zu präsentieren heißt nicht, dass man vollständige deutsche Sätze schreiben muss. Im Allgemeinen schreibt man in mathematischer Kurzschreibweise mit Hilfswörtern wie »daher«, »da«, »weil« usw., da man ohnehin ausführliche verbale Erklärungen (im besten Fall vollständige, deutsche Sätze) gibt. Falls man es schafft, ist es sinnvoll, das mitzuschreiben, was man spricht, während man schreibt. Das spart Zeit. Am Ende eines wichtigen Schrittes oder größeren Gedankens sollte man sich trotzdem zum Publikum umdrehen, die Sicht frei auf das Tafelbild machen und den Gedanken kurz wiederholen und den nächsten Gedanken bzw. Lösungsschritt vorbereiten.

Da es erfahrungsgemäß nicht alle SchülerInnen aus dem Unterricht gewohnt sind, an der Tafel zu stehen und zu schreiben, noch einige Tipps: Die Tafelschrift sollte so groß sein, dass man sie auch noch weiter hinten im Raum lesen kann. Man kann einfach die Mitstudierenden fragen, ob die Größe ausreichend ist. Falls die Gefahr zu groß ist, dass die Schrift wieder zu klein wird, kann man seine andere Hand als »Lineal« verwenden ((z. B. eine Handbreite groß schreiben). Meist gibt es Farbkreide in den Räumen. Diese darf auch verwendet werden. Über den Einsatz, falls sinnvoll und gewünscht, kann man sich bereits im Vorfeld Gedanken machen. Man schreibt so sauber und leserlich wie möglich, ohne jedoch Buchstaben im Zeitlupentempo hin zu malen.

Echte Blockbuchstaben sind meist sehr schlecht zu lesen, Druckbuchstaben sind sehr gut leserlich, dauern aber recht lang. Falls man eine gut leserliche Schreibschrift hat, verwendet man diese (aus Zeitgründen). Folgende Buchstaben bzw. Zeichen sollte man klar unterscheiden können: $i \leftrightarrow j$, $a \leftrightarrow o$, $r \leftrightarrow n \leftrightarrow m$, $u \leftrightarrow v \leftrightarrow \nu$ (»Nü«), $\sigma \leftrightarrow \delta$, $+ \leftrightarrow t \leftrightarrow \tau$, $g \leftrightarrow q \leftrightarrow 9$, $x \leftrightarrow \times$ oder auch $0 \leftrightarrow O$. Es zahlt sich auf jeden Fall aus, das griechische Alphabet schreiben und sprechen zu lernen (zumindest die Kleinbuchstaben). Auch Groß- und Kleinbuchstaben[24] ($x \leftrightarrow X$, $y \leftrightarrow Y$, $s \leftrightarrow S$ usw.) sollte man jeweils unterscheiden können, um das Erfassen der Inhalte zu erleichtern. Also: Leserlich schreiben! (Bei den Lehrenden ärgert man sich ja auch, wenn man nichts lesen kann.)

Zur Verwendung von Unterlagen beim Vorrechnen: Je nach Übungsmodalitäten ist es erlaubt, Unterlagen (d. h. seine eigene Lösung) zur Unterstützung mit an die Tafel zu nehmen. Das sollte jedoch nicht dazu verleiten, dass man sich hinter seinem Zettel versteckt und alles direkt vom Zettel abschreibt. Das macht nämlich einen fragwürdigen Eindruck, ob man die Aufgabe selbst gemacht hat oder ob man die Aufgabe wirklich verstanden hat. Lehrende werden dadurch mehr oder weniger direkt gezwungen, bei den Schritten näher nachzufragen oder aufzufordern, den Zettel wegzulegen. Man sollte eine Aufgabe daher zumindest so gut vorbereiten, dass man zumindest die wichtigsten Teilschritte im Kopf parat hat. Kleine Rechnungen (z. B. einfache Termumformungen) sollte man ohnehin auch spontan an der Tafel schaffen. Weitgehend ohne Zettel auszukommen, ohne einstudiert zu klingen, macht dagegen einen sehr professionellen und kompetenten Eindruck.

24 Diese haben sehr oft Konnotationen (Nebenbedeutungen). Kleinbuchstaben sind oft Elemente von Mengen, Großbuchstaben die Mengen selbst. Elemente einer Menge werden oft mit dem selben Buchstaben bezeichnet, z. B. $s \in S$.

Ab und zu kann es passieren, dass man trotz gewissenhafter Vorbereitung Fehler macht – entweder spontan an der Tafel oder schon beim Vorbereiten der Aufgabe. Meist weisen die Lehrenden rechtzeitig darauf hin. Dass man dadurch aus dem Konzept geworfen wird, ist naheliegend. Man kann dann z. B. ein, zwei Schritte zurücktreten, damit man mehr Überblick über das an der Tafel Geschriebene erhält.

f) *Resümee oder Zusammenfassung (nach zeitlicher Möglichkeit)*

Falls die Aufgabe sehr lang war und ausreichend Zeit zur Verfügung steht, spricht nichts dagegen, die wichtigsten Punkte und Überlegungen zusammenzufassen. Bei Beweisen sollte man deutlich machen, dass der Beweis mit dem letzten Schritt fertig ist und wieder den Zusammenhang mit der zu zeigenden Aussage verdeutlichen.

Es ist wohl für alle nachvollziehbar, dass gute Tafelpräsentationen eine hervorragende Vorbereitung auf die Unterrichtspraxis in Schulen sind. Von daher sollte man als angehende Lehrkraft bestrebt sein, Beispiele an der Tafel zu präsentieren. Aber auch für Bachelor-Studierende sind gute Präsentationsfähigkeiten notwendig, da sie oft die angehenden Lehrenden an der Universität sind.

vi) Nachbereitung der Übung

Ähnlich wie bei Vorlesungen ist auch bei Übungen das Nachbereiten sinnvoll. Das trifft neben Beispielen, die man selbst gar nicht gelöst hat bzw. lösen konnte, auch auf Beispiele zu, bei der sich die in der Übung vorgezeigte Lösung von der eigenen unterscheiden. Es gilt herauszufinden, ob die eigene Lösung falsch ist oder ob man eine korrekte, alternative Lösung gefunden hat.

Weitere Hilfestellungen, wie man Übungsblätter bearbeitet, findet man beispielsweise unter `http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt`

2.5. Prüfungsvorbereitung

Das Besuchen von Übungen und Vorlesungen allein reicht noch nicht, um eine Lehrveranstaltung positiv abschließen zu können. Bei Vorlesungen ist dazu eine Prüfung nötig, bei Übungen gibt es Klausuren (meist Zwischen- und Endklausuren). Eine gute Vorbereitung auf die Prüfungen nimmt viel Druck im Vorfeld der Prüfung – Black Out's und Panik-Attacken sind weniger wahrscheinlich. Nur wer einen halbwegs klaren Kopf bewahrt, schafft anspruchsvolle gedankliche Leistungen und darf mit guten Noten rechnen. Um sich auf Prüfungen vorbereiten zu können, muss man eine Vorstellung davon haben, wie was abgeprüft wird.

- Was bei Vorlesungen geprüft wird:

  Bei Vorlesungen liegt das Hauptaugemerk bei Prüfung für gewöhnlich eher auf der theoretischen Seite und weniger auf der praktischen Bearbeitung von Übungsaufgaben mit Zahlen. Beispielsweise sollte man Definitionen und Sätze exakt wiedergeben können und zumindest Beweisskizzen und die groben Ideen kennen. Bei schriftlichen Prüfungen sollte man diesbezüglich genauer lernen, weil man sich ja nicht von den Prüfenden helfen lassen kann. Zum Teil werden auch einfachere unbekannte Aufgaben gegeben, die einen engen Bezug zur Theorie haben. Argumentieren, Begründen und Beweisen sind dabei wesentliche Fähigkeiten, die man beherrschen sollte.

  Bei Lehrveranstaltungen an der TU Graz ist es zum Teil üblich, dass man zuerst einen schriftlichen Teil hat und nur, wenn dieser ausreichend gut bearbeitet wurde, (ein oder zwei Wochen später) zu einem mündlichen Prüfungsgespräch eingeladen wird. Das Gespräch behandelt oft etwaige Fehler beim schriftlichen Teil oder weiterführende Verständnisfragen. Bei mündlichen Prüfungen ist es sehr wichtig, dass man die Inhalte auch wirklich verstanden hat. Die Lehrenden merken es, wenn man Unverstandenes auswendig wiedergibt.

- Was bei Übungen geprüft wird:

  Bei Übungsklausuren werden Aufgaben ähnlich zu den Aufgabenstellungen und Themengebieten der Übungsblätter gestellt. Es sind meist nicht völlige Analogie-Aufgaben (d. h. z. B. ident bis auf konkrete Zahlen). Zum Teil sind ähnliche Ideen aber auch kleinere neue Gedankenleistungen nötig. Meist werden sowohl Beweis- als auch Rechenaufgaben gestellt. Bei den rigorosen Lehrveranstaltungen (Analysis, Lineare Algebra etc.) können durchaus die Beweisaufgaben überwiegen. Oft sind etwa 6 Aufgaben in 1,5 Stunden zu bearbeiten. Damit ist es notwendig, gut vorbereitet zu sein. Routine-Tätigkeiten und Definitionen etc. sollten wirklich sitzen, weil man nicht die Zeit hat, bei allen Aufgaben zu tüfteln. Besonders in der Linearen Algebra sind gute Kopfrechen-Fertigkeiten hilfreich (z. B. Lösen von Gleichungssystemen erfordert oft Bruchrechnung). Taschenrechner und andere Geräte sind meist nicht erlaubt (und helfen bei Beweis-Aufgabe natürlich auch nicht).

Angaben zu Klausuren vergangener Semester findet man beispielsweise auf der Homepage http://mathematik.oehunigraz.at der Studienvertretung Mathematik an der KFU Graz (»ig-mathe«) unter Studierende → Skripten/Beispielsammlungen: http://mathematik.oehunigraz.at/studierende/fachliches/ Diese können als Vorbereitung auf eine Klausur selbstverständlich durchgearbeitet werden.

Die kurzen Beschreibungen von typischen Prüfungsmethoden machen hoffentlich deutlich, dass sich eine Vorbereitung auszahlt. Abhängig von den schulischen Vorerfahrungen, wie man für Schularbeiten etc »gelernt«[25] hat, kann es notwendig sein, sich etwas umzugewöhnen. Das gesamte Semester nichts zu tun und zwei Tage vor der Prüfung das Heft durchzulesen ist – vielleicht im Gegensatz zur Schule – keine ausreichende Vorbereitung. Es ist völlig unrealistisch, so Lehrveranstaltungen positiv zu absolvieren. Umso wichtiger ist es, langfristig zu arbeiten. Es folgen nun einige Tipps und Überlegungen zur Prüfungsvorbereitung:

- mitlernen statt kurzfristig »reinstopfen«

  Die wohl wichtigste Strategie ist es, ständig mitzulernen und mitzuarbeiten. Besonders wichtig ist dabei der Beginn des Semesters – hier hat man noch viel Energie und Zeit. Gegen Ende des Semesters wird es meist immer stressig (Abgabetermine, Vorlesungsprüfungen, Klausuren), weswegen man sich die Lernzeiten gut auf das ganze Semester auf- und einteilen sollte.[26]

  Aufgrund der üblichen Prüfungsmethoden und der Fragestellungen ist es im Mathematikstudium nicht zielführend, sich zwei Tage vor der Prüfung Wissen in das Gehirn prügeln zu wollen. Das mag in anderen Studien funktionieren, bei denen nur Faktenwissen reproduziert werden muss, aber für das Mathematikstudium reicht es nicht.

  Besonders wichtig für den Erfolg in Übungen ist das vernünftige Abschneiden bei den Zwischenklausuren. Eine gute Zwischenklausur nimmt sehr viel Druck von den Schultern und man geht mit einer positiven Ausgangsbasis auf die Endklausur zu. Zu viele Studierende verlieren ihre realistische Chance auf einen positive Lehrveranstaltungsabschluss bereits durch ein zu schwaches Ergebnis bei den Zwischenklausuren. Das sollte vermieden werden.

  Was heißt nun »mitlernen«? Mitlernen bei Vorlesungen heißt, dass man die Lehrveranstaltungseinheiten regelmäßig nachbereitet, man die grundlegenden Definitionen und Sätze kennt sowie immer einen Überblick über die bisherigen Inhalte geben kann. Bei Übungen heißt mitlernen, dass man selbstständig immer alle Übungsaufgaben bearbeitet (und im optimalen Fall auch löst).

25 Das Lernen sollte eigentlich schon vorher während der Lehrveranstaltung passieren. Die Vorbereitung sollte eher aus Wiederholen und Üben bestehen.

26 Wer möchte, kann sich einen Lernplan erstellen, bei dem man Zeiten für Lehrveranstaltungsvor- und Nachbereitung, Bearbeitung von Übungsaufgaben usw. reserviert, falls man die Befürchtung hat, dass man sonst nicht zum Lernen kommt. Zeitmanagement ist ein wesentlicher Faktor, der zum Studienerfolg beiträgt. Nicht umsonst gibt es »ewige Studierende«, die es kaum schaffen, sich Ziele für Prüfungen zu setzen oder ihre Prüfungstermine passend koordinieren. Das man daran am Studieren scheitert, scheint vermeidbar zu sein.

- aktiv bearbeiten statt nachvollziehen

  Die Art der Aufgabenstellungen besonders in Übungen macht es notwendig, dass man in relativ kurzer Zeit an neue Aufgaben konstruktiv herangeht und über die Fähigkeit verfügt, selbstständig Lösungen zu erarbeiten und formal korrekt nieder zu schreiben. Man muss also Mathematik aktiv betreiben können – simples Nachvollziehen von Lösungen usw. reicht nicht aus.

  Sich auf eine Übungsklausur vorzubereiten, indem man nur die Lösungen der Beispiele von den Übungszetteln nachvollzieht, reicht daher grundsätzlich nicht aus. Das garantiert bei Weitem nicht, dass man sich dann in der Prüfungssituation eine Lösung erarbeiten kann – unmittelbare Analogie-Aufgaben sind sehr selten. Man sollte/muss sich daher im Vorfeld einer Prüfung mit noch nicht gelösten Aufgaben beschäftigen, die im Themengebiet des Prüfungsstoffes liegen. Falls in den Lehrveranstaltungen keine zusätzlichen Trainingsaufgabe bereitgestellt werden, ist die studentische Selbstständigkeit gefordert: Man besorgt sich passende Bücher. Ziel ist es, die Aufgaben ohne Hilfe lösen zu können. Man wird feststellen, dass es immer wieder »Standard-Aufgaben« gibt (z. B. berechne den Grenzwert der Folge . . .). Auch Rechen-Schemata oder Algorithmen (z. B. Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme) fallen in diese Kategorie. Zumindest diese sollte man halbwegs flott lösen können, ohne Definitionen usw. nachschlagen zu müssen. Zum Teil bieten Bücher auch Musterlösungen zu den Aufgaben. Diese sollte man in jedem Fall erst durchlesen, wenn man die Aufgabe bearbeitet hat – ansonsten beraubt man sich nämlich der gedanklichen Leistungen und damit des Lern- und Trainingseffekts. Falls man sich unsicher ist, ob die eigene Lösung richtig ist, empfiehlt sich wieder das Bilden von Lerngruppen.

  Auch bei Vorlesungsprüfungen reicht es nicht, die Mitschrift durchzublättern und festzustellen, dass man die Inhalte schon einmal gesehen hat. Wiedererkennen ist die unterste Stufe beim Lernen, die nicht für Prüfungserfolg ausreicht. Man braucht ausreichend Wissen, um die Inhalte aktiv darstellen zu können. Kontrollmöglichkeit: Mitschrift bzw. Skript schließen und zum jeweiligen Schlagwort (z. B. Stetigkeit) die Definitionen und wichtigsten Sätze geben. Auch Überblicksfragen wie »Die wesentlichen Schritte bis zur Differenzierbarkeit ausgehend vom Grenzwertbegriff« sollte man ohne Unterlagen beantworten können. Man kann sich auch selbst Zusammenfassungen zu den einzelnen Themen schreiben. Bei mündlichen Prüfungen sollte man sich im Vorfeld zu jeder Definition und Satz ein Beispiel (nach Möglichkeit mit grafischer Veranschaulichung) überlegen – das bereitet auf mögliche Zwischenfragen vor (Zumindest wird die Gefahr geringer, dass man eine Frage bekommt, zu der man sich vorher gar keine Gedanken gemacht hat).

- Basiswissen festigen und Ideen merken

  Da man kaum ständig alle Details eines Beweises im Kopf haben wird, sollte man zumindest sicherstellen, dass das Basiswissen vorhanden ist und man die entsprechenden Ideen kennt. Grafische Veranschaulichungen (wo möglich) können hier helfen. Durch die regelmäßige Bearbeitung der Übungsaufgaben sollte man sich ohnehin fast automatisch ein Basiswissen erarbeiten. Sätze, die einen Namen haben, sollte man für Vorlesungsprüfungen können. Bei den Beweisen sollte man sich zumindest die grundlegende Idee sowie die wichtigsten Meilensteine merken – eben so viel, dass man sich den Rest im Notfall selbst zusammenreimen kann. Manche Beweise haben Kniffe, bei denen man das Gefühl hat, als »NormalsterblicheR« nicht selbst darauf kommen zu können – diese muss man sich eben merken. Wer sich das Basiswissen festigt, hat zudem eine bessere Ausgangsbasis für die Folge-Lehrveranstaltungen (z. B. Analysis 2 oder Lineare Algebra 2) und das restliche Studium. Es lohnt sich also wirklich, im ersten Semester viel Zeit zu investieren.

Wichtig bei Prüfungen ist also, dass man sich erstens über die Prüfung und die zu erwartenden Fragestellungen informiert und sich zweitens aktiv längerfristig darauf vorbereitet.

2.6. Lernschwierigkeiten? Was tun?

Es wird vermutlich immer wieder Situationen geben, in denen es mathematisch nicht so gut läuft, wie man es gern hätte. Folgende immer wieder – besonders in den niederen Semestern – vorkommende, schlechte Strategien erhöhen die Chance, dass Probleme auftreten:

- nicht aufgepasst in Lehrveranstaltungen

  Klingt zwar fast lächerlich selbstverständlich, ist es aber leider nicht immer: Wer in den Lehrveranstaltungen nicht aufmerksam zuhört und konzentriert mitarbeitet, ist selbst Schuld, wenn man nichts versteht. Es gehört einfach zum erwachsenen Verhalten, dass man in Vorlesungen keine Nebengespräche führt und seinen Mitstudierenden nicht erzählt, was man heute zum Frühstück gegessen hat oder wie lange man gestern fortgegangen ist, egal wie spannend das sein mag. Zwischen Lehrveranstaltungen gibt es Pausen für solche Gespräche. Die Lehrenden erklären grundsätzlich nicht alles zweimal – wer sich beim ersten Mal die Chance, die Inhalte zu verstehen, verbaut hat, weil er/sie nicht zugehört hat, kann Inhalte gar nicht verstehen. Falls man selbst unfreiwillig Opfer störender Nebengespräche wird, darf man seine Mitstudierenden ohne schlechtes Gewissen auffordern, die Gespräche einzustellen. Wir alle sind erwachsen, wir alle studieren (hoffentlich) aus freiem Willen und aus Interesse – wer in den Lehrveranstaltungen nichts lernen will, hat im Hörsaal nichts verloren.

- zu wenig aktiv mit Stoffgebieten beschäftigt

  Aus dem schulischen Unterricht ist man es vielleicht noch gewohnt, alle Hausübungen abzuschreiben. Vielleicht ist die Verlockung dazu auch am Studienbeginn groß, da es deutlich weniger anstrengend ist, eine Lösung abzuschreiben als selbst zu erarbeiten.[27] Allerdings ist dieses Verhalten sehr kontraproduktiv: Man raubt sich selbst die Lernerfahrungen – es wird dadurch umso schwieriger, bei Klausuren selbstständig auf Lösungen zu kommen. Je länger man diese schlechte Strategie fährt, desto größer wird der Rückstand, den man aufholen muss. Vor allem bei den Beweistechniken lässt sich kurzfristig kaum etwas aufholen. Dessen sollte man sich bewusst sein – nichts kann die selbstständige, aktive Auseinandersetzung mit den Inhalten und Übungsaufgaben ersetzen.

- auswendig gelernt statt auf Verständnis gelernt

  Möglicherweise auch noch ein Relikt vom schulischen Lernen: Übungsaufgaben und Inhalte auswendig zu lernen und zu hoffen, dass gleiche Beispiele (mit möglicherweise anderen Zahlen) zu den Klausuren kommen, ist eine sehr schlechte Idee. Daneben ist die Stoffmenge sehr viel größer, sodass das Auswendiglernen wirklich mühsam wird (man müsste sich bei Definitionen, Sätzen und Beweisen jedes einzelne Zeichen merken, da jedes Zeichen einen Bedeutungsunterschied machen kann). Zwar mag die Umstellung auf verständnisvolles Lernen am Beginn fordernd sein, aber auch hier muss man wieder den mittel- und langfristigen Nutzen sehen. Man hat es dadurch bei aufbauenden Inhalten und Lehrveranstaltungen deutlich leichter.

- vor Prüfungen zu kurzfristig gelernt

  Wer erst zwei, drei Tagen vor Übungsklausuren oder Vorlesungsklausuren beginnt, sich in das Stoffgebiet einzulesen, wird es sehr schwer haben, alles so gut zu verstehen, dass man positive Noten zu erwarten hat. Die Gefahr, dass man dadurch Inhalte nur kurz im Kopf behält, ist sehr groß (»Bulimie-Lernen«[28]). Dadurch hat man kaum eine Chance, Inhalte wirklich zu verstehen.

27 Als angehende Lehrkraft sollte man mit so einer Vorstellung von Lernen seine Berufswahl bzw. sein Lernverhalten allgemein überdenken und sich fragen, ob man schon reif für ein Studium ist. Im Lauf des Studiums muss man ja den Perspektivenwechsel vom Schüler bzw. von der Schülerin zur Lehrkraft schaffen.

28 Man stopft sich das Wissen schnell rein, um es nach der Prüfung sofort wieder aus dem Körper zu entfernen.

Man sollte also versuchen, diese schlechten Strategien zu vermeiden und durch bessere Methoden zu ersetzen (vgl. Abschnitt davor). Negativ-Erscheinungen wie Panik vor Prüfungen oder das Gefühl, eh alles zu können (= auswendig gelernt zu haben), aber bei Prüfungen trotzdem (unverständlicherweise) sehr schlecht abzuschneiden, verlieren dadurch an Gewicht. Folgende Überlegungen können helfen, Probleme und Lernschwierigkeiten zu vermeiden bzw. zu lösen:

- Vorbeugen ist besser als ausbessern.

  Das ist wohl der wichtigste Tipp, den man geben kann. Leider hilft er kurzfristig recht wenig. Kurzfristig große Lücken oder über Wochen angestaute Verständnisschwierigkeiten auszubessern, ist praktisch unmöglich. Hat man etwas in einer Vorlesung nicht verstanden, so beschäftigt man sich so schnell wie möglich damit (selbst nachdenken, Literaturrecherche, Mitstudierende fragen etc.) Übungsbeispiele, die man nicht selbst lösen konnte, sollte man nach der jeweiligen Übungseinheit so lange durcharbeiten, bis man sie wirklich versteht und jede Kleinigkeit beseitigt ist.

- Das Basiswissen muss sitzen.

  Ohne die Grundlagen der jeweiligen Fachgebiete sicher zu beherrschen, ist verständnisvolles Lernen kaum möglich. Wenn man also irgendwo Verständnisschwierigkeiten hat, so beginnt man zunächst ganz am Anfang und stellt sicher, dass man den Beginn noch verstanden hat. Danach arbeitet man sich langsam bis zu den letzten Schwierigkeiten vor. Hat man beispielsweise Probleme, den Differentialquotienten zu verstehen, so muss man sicherstellen, dass man den Begriff »Grenzwert« wirklich verstanden hat und ihn vom Begriff der »Stetigkeit« auch wirklich unterscheiden kann.

- Geeignete Motivation suchen.

  Da das Lernen von (akademischer) Mathematik (besonders am Beginn) mit vergleichsweise großen Anstrengungen verbunden ist, benötigt man eine passende Antriebskraft. Nicht immer ist die schulische Motivation für Mathematik ohne Weiteres auch für Hochschulmathematik geeignet. Man muss sich also nach Möglichkeit eine passende Motivation suchen:

  - Bereits kleine Erfolgserlebnisse sollten als solche wahrgenommen werden. Wenn man 30 Minuten investiert hat, um einen Beweis aus der Vorlesung zu verstehen, und diesen letztendlich verstanden hat, so darf man stolz über seine Hartnäckigkeit sein und sich über seinen Lernerfolg freuen. Wichtigster Aspekt dabei ist, dass man wirklich so hartnäckig daran arbeitet, bis sich Erfolgserlebnisse einstellen.

  - Eine Motivation kann sein, dass man fähig sein will, seinen Freunden und Freundinnen im Mathematikstudium unterstützen zu können. Dafür muss man selbst einerseits fachlich gut sein, andererseits auch gut erklären können. Beides sind Fähigkeiten, die sowohl von Lehramts- als auch Bachelor-Studierenden in Studium und Beruf gefordert werden.[29]

  - Natürlich findet man auch Motivation und Interesse an den mathematischen Inhalte und den Zusammenhängen selbst. Hat man erst einmal ein Fundament, so wird man feststellen, wie genial und durchdacht die Strukturen sind – und wie viel man sich dadurch zusammenreimen kann. Das ist faszinierend und erleichtert zukünftiges Lernen.

  - Der spätere Berufswunsch (z. B. Lehrkraft) kann selbstverständlich auch eine Antriebskraft sein. Falls sie allerdings die einzige ist und man nicht wirklich auch an den (wissenschaftlichen) Inhalten interessiert ist, wird das Studium sehr mühsam. Der Sinn des Studiums und der fachmathematischen Lehrveranstaltungen werden erst deutlich, wenn man die Inhalte wirklich versteht und es dadurch schafft, Zusammenhänge zum späteren Beruf herzustellen. Wer das nicht schafft, wird das Studium wohl immer als fachliche Belästigung empfinden und nicht als wertvollen Lebensabschnitt, der aus fachlicher und fachdidaktischer Sicht wesentlich zur Entwicklung als Lehrkraft beiträgt. Bei 5 Jahren Mindeststudienzeit ist das sehr mühsam.

29 Die Vorstellung, dass man als BerufsmathematikerIn allein im stillen Kämmerlein sitzt, ist nicht zeitgemäß. Man ist praktisch immer in (sehr oft interdisziplinären) Arbeitsgruppen eingebunden, in denen man beispielsweise mit TechnikerInnen oder BetriebswirtInnen zusammenarbeiten und kommunizieren muss.

Bei Bachelor-Studierenden liegt das Niveau der späteren Arbeit oder des anschließenden Masterstudiums ohnehin nicht unter dem des Studiums. Wer es also im Verlauf des gesamten Studiums mit dem Niveau und den Anforderungen kämpft, wird wohl kaum glücklich werden. Man merkt normalerweise innerhalb der ersten drei Semester[30], ob man mathematikstudientauglich ist oder eben nicht.

- Anwendungsbezug kann besonders im Bachelorstudium und im Hinblick auf vermutete Berufsfelder selbstverständlich ein Motivationsfaktor sein. Bis man allerdings fachlich so weit ist, mit brauchbaren Anwendungen in Berührung zu kommen, wird es dauern. Praktisch alle Anwendungsfelder benötigen ein fachliches Fundament (Analysis und Lineare Algebra), das primär eher theoretischen Charakter hat. Erst Lehrveranstaltungen wie »Differentialgleichungen« oder »Numerische Mathematik« schaffen es im Allgemeinen, gute Anwendungsbezüge herzustellen.

In wie weit welche Motivationen relevant sind, ist sehr individuell. Man stellt für gewöhnlich im Lauf des ersten Semesters fest, ob man sich für (akademische) Mathematik motivieren kann oder nicht. Eine Offenheit gegenüber neuen Inhalten, Konzepten und Schwerpunkten ist dafür hilfreich.

- Lerngruppen und Gleichgesinnte suchen

Man sollte universitäres Mathematiklernen nicht als langweilige, verbitterte Tätigkeit empfinden. Das Bilden von passenden Lerngruppen und das Finden von Gleichgesinnten lässt den Spaß nicht zu kurz kommen. Durch die große Anzahl an Studierenden findet man auf jeden Fall Mitstudierende auf der »selben Wellenlänge«. Die Chance, dass man eine gute, angenehme und konstruktive Lerngruppe findet[31], ist recht groß.

Lerngruppen, in denen die Leistungsunterschiede der Mitglieder nicht gar zu groß sind, sind üblicherweise am sinnvollsten. Falls die Gruppen sehr groß sind, so kann man auch auf Partnerarbeit ausweichen. Wichtig: Das Lernen in Gruppen sollte nicht das selbstständige Lernen ersetzen. Es ist sinnvoll, sich zuerst alleine mit den Aufgaben zu beschäftigen und die Gruppe eher als Tipp-Quelle oder als Kontrollinstrument zu nützen. Natürlich muss das selbstständige Lernen nicht räumlich getrennt stattfinden. Man sucht sich einfach einen großen Tisch und alle arbeiten parallel an ihren Aufgaben. Bei Unklarheiten unterbricht man das stille Arbeiten und kommuniziert mit seinen Mitstudierenden.

Wer die Befürchtung hat, alleine nicht die Motivation zu finden, sich Zeit zu nehmen und die Aufgaben zu bearbeiten, weil beispielsweise Internet oder Fernseher ablenken, kann sich mit seiner Lerngruppe regelmäßige bzw. feste Lernzeiten ausmachen. Dadurch ist ein Zeitraum reserviert, der durch die Arbeit in der Gruppe verbindlicher wird und dadurch leichter in Anspruch genommen werden kann.

Wer das Gefühl hat, dass die Gruppenarbeit zu unkonstruktiv ist, weil Gruppenmitglieder sehr laut sind oder (zu) gerne herumblödeln, kann auf Zweier-Teams ausweichen und den Lernplatz wechseln: Man wählt einen kleineren Tisch, setzt sich nebeneinander hin und sucht Abstand zu Lärmquellen (im Mathematik-Gebäude gibt es dafür einen Gangbereich mit Tischen direkt vor der Bibliothek im 3. Stock, wo man relativ ungestört arbeiten kann). Ab und zu kann man dann wieder mit der Großgruppe vergleichen und kontrollieren.

30 Die Regelungen der Familienbeihilfe begünstigen einen Studienwechsel mit Beginn des 3. Semesters. Wer schon nach dem ersten Semester merkt, dass Mathematik nicht das Richtige ist, kann im Sommersemester bereits Lehrveranstaltungen des neuen Wunschstudiums (falls vorhanden) besuchen. Dadurch hat man sich einen Vorsprung im neuen Studium herausgearbeitet, wenn man es im 3. Semester offiziell beginnt. Die Studienvertretungen an der Österreichischen HochschülerInnenschaft (ÖH) `http://oehunigraz.at` bzw. die Studienvertretung Mathematik `http://mathematik.oehunigraz.at` hilft bei Fragen und Problemen gerne weiter.

31 Neben dem Brückenkurs bieten sich dafür auch sogenannte Erstsemestrigentutorien an, die von Mtigleidern der Studienvertretungen veranstaltet werden an. Ansonsten kann man auch einfach Kontakte mit Mitstudierenden in den Lehrveranstaltungen knüpfen.

- bei Rückschlägen nicht gleich aufgeben

  Kleinere Rückschläge und Probleme sind normal und für viele eher die Regel, als die Ausnahme. Man sollte sich dadurch nicht selbst fertig machen (lassen). Mathematik-Lernen ist ein herausfordernder Prozess, der eben nicht immer glatt verläuft.[32] Um Erfolgserlebnisse zu haben und größere Lernfortschritte zu machen, ist es notwendig, den »mühsamen« Bereich zu überstehen. Bildlich gesprochen muss man den ersten Anstieg des Berges erklimmen, um die erste schöne Aussicht genießen zu können. Je früher man das schafft, desto angenehmer wird das Studium werden. Die meisten der Studierenden, die das Studium erfolgreich abschließen, haben sich am Beginn schwer getan. Diese Herausforderung sollten als große Chance des eigenen (mathematischen) Entwicklungsprozesses wahrgenommen werden – also positiv sehen.

Man merkt: Zum Mathematik-Lernen sollte man sich besonders am Beginn ausreichend Zeit einplanen und diese auch nehmen. Die ECTS-Regelungen[33] gehen davon aus, dass Studieren ein Vollzeitjob (40 Echtstunden-Arbeitswoche) ist. 30 ECTS-Punkte sind für ein durchschnittliches Semester vorgesehen. Jeder Lehrveranstaltung ist ein bestimmtes Punkte-Ausmaß zugeordnet. Diesen Zeitaufwand müssen durchschnittliche Studierende[34] investieren, um die jeweilige Lehrveranstaltung positiv absolvieren zu können. In diesem ECTS-Aufwand ist nicht nur die Zeit eingerechnet, die man direkt in der Lehrveranstaltung absitzt, sonder auch Zeit zur Vor- und Nachbereitung, zum Prüfungslernen usw. Im Allgemeinen ist die Zeit in der Lehrveranstaltung nicht der überwiegende Teil.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Analysis 1 Vorlesung (VO) mit 7,5 ECTS und 5 SSt[a] aus dem ersten Semester vom Bachelor- und Lehramtsstudium:

vorgesehene Zeit: 7,5 ECTS (7,5 $\times$ 25 h)	187,5	h
Zeit in der VO (5 $\times$ 45 min $\times$ 15 Wochen)	56,25	h
gleiche Zeit zur Vor- bzw. Nachbereitung	56,25	h
bleiben zur Prüfungsvorbereitung	75	h

Zur abschließenden Prüfungsvorbereitung kann man beispielsweise von folgender Aufteilung ausgehen (um zu realisieren, wie viel 75 Stunden wirklich sind!): 5 Wochen lang ca. 3 Stunden an 5 Tagen die Woche zusätzlich zur Vor- und Nachbereitung.

a 5 Semesterwochenstunden bedeutet, dass die Lehrveranstaltung jede Woche im Semester (ca. 15 Wochen) 5 Uni-Stunden (1 Uni-Stunde = 45 Minuten) dauert.

Nach Möglichkeit sollte man den Zeitaufwand im ersten Semester wirklich ernst nehmen und andere zeitliche Zusatzbelastungen, die nicht unbedingt notwendig sind (freie Wahlfächer, zweites Studium), vermeiden. Auch Nebenjobs und andere Zeitfresser sollte man im ersten Semester versuchen zu minimieren. Hauptgrund dafür ist, dass man durch den schulischen Unterricht kaum seine eigene universitäre mathematische Leistungsfähigkeit wirklich realistisch einschätzen kann. Das erste Semester stellt im Wesentlichen bereits die Weichen für das restliche Studium (und die zu erwartende Studiendauer), weswegen man sich »reinhängen« sollte. Nach dem ersten Semester (und möglichen Erfolgen oder Misserfolgen) wird man seine Leistungsfähigkeit deutlich besser einschätzen können und ein Gefühl dafür entwickeln, wie viel man sich zumuten kann und möchte. Als grobe Faustregel kann gelten: Pro Vorlesung-Übung.Themenblock sollte man einen bis zwei Tage Zeitaufwand einrechnen. Es ist recht unrealistisch, dass man 7 Übungen, 5 Mathematik-Vorlesungen sowie weitere 5 Lehrveranstaltungen seines Zweitfaches so locker nebenbei schafft.

32 Angehenden Lehrkräften hilft das vielleicht, sich in zukünftige SchülerInnen einzufühlen, die nicht immer alles verstehen.
33 European Credit Transfer System
34 Was immer genau »durchschnittlich« heißen mag.

Resümee

Letztendlich bleibt Mathematiklernen und der nötige Arbeitsaufwand eine sehr individuelle Sache. Nichtsdestotrotz gibt es Lernstrategien, die vielen Studierenden helfen können und als Ausgangsbasis für das eigene Lernen dienen können, um sich selbst passende Methoden zurecht zu legen. Mit passenden Strategien und einem guten Basiswissen werden die weiteren Semester üblicherweise natürlich nicht anspruchslos, aber gut schaffbar. Nebenbei gewöhnt man sich auch an das geforderte Niveau und läuft so zu persönlichen Höchstleistungen auf, was wohl auch ein Ziel eines universitären Studiums sein muss bzw. sollte. Also: Ausreichend Zeit investieren und nicht gleich aufgeben, dann steigt die Chance, dass im Lauf des ersten Studienjahres der sprichwörtliche Knopf aufgeht.

Teil II.

Mathematische Grundlagen

Dieser Teil des Skripts beschäftigt sich mit jenen Grundbegriffen der Mathematik, die im Wesentlichen ab dem ersten Tag in den Lehrveranstaltungen explizit oder implizit verwendet werden. Zudem soll dieser Teile eine Ausgangsbasis für die weiteren Teile dieses Skripts sein.

Als ersten Teil der Ausgangsbasis der mathematischen Sprache wird im folgenden Kapitel festgehalten, was mathematische Aussagen sind und was Logik bedeutet. Zwar hat man aus den Alltagserfahrungen und dem bisherigen Mathematikunterricht eine Vorstellung davon, was »logisch« ist, jedoch bedarf die wissenschaftliche Mathematik einer näheren Festlegung der erlaubten Schlüsse und der verwendeten Schreibweise. Auch ohne Vorwissen sollte dieser Abschnitt einen guten Einblick geben. (Die Lehrveranstaltungen des ersten Semesters sollten dieses Thema zumindest implizit vertiefen.)

Mit der Logik (und einem anschaulichen Verständnis von Mengenlehre) hat man nun im Wesentlichen die Ausgangsbasis für die mathematische Sprache festgelegt. Damit ist es nun möglich, mathematische Aussagen zu formulieren und sich im Anschluss daran Gedanken über den Wahrheitsgehalt zu machen. Das Kapitel »Beweise« gibt einen etwas systematischeren Überblick über dieses Thema und stellt kurz typische Strategien vor. Weitere Beispiele werden im Lauf des Skripts themenbezogen gegeben.

Danach wird der typische Zugang zur Mengenlehre gewählt: Die Begriffe Menge sowie Element und darauf aufbauende Objekte und Definitionen werden intuitiv eingeführt, d. h. es werden keine Axiome dafür verwendet. Diese Grundbegriffe der Mengenlehre sind der zweite Teil der Ausgangsbasis für die mathematische Sprache.

Im Anschluss an diese Grundlagen wird der Begriff der »Verknüpfung« (Rechenoperation) geklärt. Er ist der Ausgangspunkt für sogenannte algebraische Strukturen. Erst durch Verknüpfungen lassen sich Terme und Variablen sinnvoll einsetzen. Zudem sollte der Nutzen abstrakter Mathematik deutlich werden. Gleichzeitig dient dieses Kapitel als Ausgangspunkt, um Zahlenmengen von einem etwas höheren Niveau zu betrachten.

Die üblichen Zahlenmengen von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{C}$ sind üblicherweise aus der Schule mehr oder weniger bekannt. Das Kapitel gibt einen Überblick über Motivationen, Eigenschaften und zum Teil auch kleinere weiterführende Einsichten zu diesen Themen.

3. Logik

Logik beschäftigt sich mit dem Wahrheitsgehalt von Aussagen. Logik legt die erlaubten und nicht erlaubten Schlussregeln fest. Was die Grammatik für die Sprachen sind, ist die Logik für die Mathematik. Die Vokabeln der Sprache sind die Definitionen der Mathematik. Auch die Rechtschreibung hat eine Entsprechung: nämlich die formalen Notationen und die Konventionen, wie man Begriffe und Schreibwesen verwendet.

Wie bereits erwähnt deckt sich die mathematische Logik nicht völlig mit der umgangssprachlich verwendeten.

3.1. Aussagen

Man geht in der Logik davon aus, dass man einer (mathematischen) Aussage p auf jeden Fall einen der beiden folgenden Werte zuordnen kann: Entweder ist p wahr (W) (also richtig), oder p ist falsch (F) (also nicht richtig). Aussagen, bei denen der Wahrheitsgehalt von subjektiven Faktoren abhängt oder deren Wahrheitsgehalt prinzipiell nicht festgestellt werden kann, werden nicht behandelt. Aussagen wie »Vanille ist die beste Eis-Geschmacksrichtung« werden nicht zugelassen. Meist verwendet man in der Logik Kleinbuchstaben wie p oder q für die mathematischen Aussagen. Statt p ist wahr, sagt man auch: p gilt.

Bsp. 3.1

Die Aussage p : »-3 ist eine natürliche Zahl« ist eine falsche Aussage, da -3 negativ ist und damit keine natürliche Zahl sein kann. Dagegen ist die Aussage q : »Zu jeder ungeraden Zahl lässt sich eine größere, gerade Zahl finden.« wahr, weil wir zu einer beliebigen ungeraden Zahl n die Zahl $n+1$ (den Nachfolger) finden können, die gerade und größer ist.

Aussagen, deren Wahrheitsgehalt zwar unbekannt ist, sich aber prinzipiell bestimmen lässt, werden als mathematische Aussagen zugelassen. Die Aussage »Die $10^{(10^{200})}$-te Stelle der Dezimalzahldarstellung der Kreiszahl π ist 5« ist demnach eine mathematische Aussage, weil die Ziffer entweder eine 5 ist oder eben nicht.

Definition 3.1: Negation

Wenn p eine mathematische Aussage ist, dann bezeichnen wir mit $\neg p$ die sogenannte Negation von p, also jene Aussage, die wahr ist, wenn p falsch ist und falsch ist, wenn p wahr ist. Das kann man in Form einer Wahrheitstafel festhalten:

p	$\neg p$
W	F
F	W

Das Zeichen $\neg$ wird als »nicht« oder »non« gelesen. Die Einführung dieser Begrifflichkeit erleichtert das Arbeiten in der Praxis deutlich und wird verschiedenen Beweisstrategien verwendet. Man kann sich schnell überlegen, dass $\neg(\neg p))$ gleichwertig mit p ist.

3.2. Prädikatenlogik

Neben diesen einfachen Aussagen gibt es auch Ausdrücke, in denen (freie) Variablen vorkommen. Nach dem Wahrheitsgehalt von $x \geq 0$ zu fragen, macht wenig Sinn, weil nichts über die Variable x gesagt wird. Um daraus Aussagen zu erhalten, gibt es zwei Möglichkeiten:

i) Die Variablen mit konkrete Werte zu belegen, oder

ii) sogenannte Quantoren ($\exists$, $\forall$) zu verwenden.

Bsp. 3.2

Es sei $P(x)$ gegeben durch $x \geq 0$. Dann sind beispielsweise $P(2)$ und $P(0)$ wahre Aussagen, aber $P(-\frac{3}{2})$ ist dagegen falsch.

Die zweite Möglichkeit ist das Voranstellen sogenannter Quantoren. Dazu wird jeweils noch eine Ausgangsmenge benötigt (Allgemein zur Mengenlehre vgl. Kapitel 5, die Zahlenengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ finden sich in Kapitel 7). Man kann sich fragen, ob eine Aussage $P(x)$ für alle Elemente x einer Menge M erfüllt ist.

Definition 3.2: All-Aussage

Wenn eine Aussageform $P(x)$ für alle Elemente x einer Menge M gilt, so schreibt man dafür formal

$$\forall x \in M : P(x)$$

Man spricht: »Für alle x aus M gilt P von x.«. Der Doppelpunkt wird also als »gilt« gelesen. Das Symbol $\forall$ heißt »All-Quantor«.

Anschaulich kann man sich vorstellen, dass die Variable x alle Elemente von M durchläuft – oder anders gesagt: x ist ein beliebiges Element von M. Der Wahrheitsgehalt dieser Aussagen hängt im Allgemeinen natürlich von der Menge M und der Aussageform $P(x)$ ab.

Bsp. 3.3

Es sei $P(x)$: »$x \geq 0$«. Die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$$

ist dann wahr, die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \geq 0$$

ist dagegen falsch.

Um den Wahrheitswert »wahr« von Aussagen dieser Form nachzuweisen, muss man zeigen, dass $P(x)$ wahr ist für jedes $x \in M$, und zwar unabhängig vom konkreten Wert von x. Man sagt auch, man muss $P(x)$ für ein beliebiges x in M nachweisen. Um dagegen den Wahrheitswert »falsch« nachzuweisen, reicht es, ein einziges Gegenbeispiel zu bringen, dass $P(x)$ eben nicht erfüllt.

Bsp. 3.4

Wir betrachten die Aussage, ob das Quadrat jeder rationalen Zahl wieder eine rationale Zahl[a] ist, also

$$\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \in \mathbb{Q} \,.$$

Sei x nun einem beliebige rationale Zahl. Dann muss es ein $p \in \mathbb{Z}$ und ein $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geben, sodass

$$x = \frac{p}{q}$$

ist. Dann ist aber

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2} = \frac{r}{s}$$

mit $r = p^2 \in \mathbb{Z}$ und $s = q^2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D. h. wenn wir eine beliebige rationale Zahl quadrieren, so lässt sich diese wieder als Bruch schreiben. Also ist dann $x^2 \in \mathbb{Q}$. Damit ist die obige Aussage wahr.

[a] Umgekehrt stimmt das ja nicht: Nicht jede rationale Zahl hat eine rationale Wurzel!

In einer Aussage dürfen auch mehrere Quantoren vorkommen. Falls dabei nur Quantoren einer Art vorkommen (also z. B. nur $\forall$), so spielt dabei die Reihenfolge der Quantoren keine Rolle.

Bsp. 3.5

Es sei P die Menge aller Primzahlen.[a] Wir untersuchen nun die Gültigkeit folgender Aussage:

$$(\forall p \in P)(\forall q \in P) : (p + q) \in P \,.$$

Falls Missverständnisse möglich sind, klammert man Quantoren und zugehörige Variablen. Zu untersuchen ist also, ob die Summe zweier Primzahlen wieder eine Primzahl ist. Man benötigt zunächst eine Vermutung, etwa, dass die Aussage falsch ist. D. h. für müssen zwei Primzahlen p und q finden, deren Summe keine Primzahl ist. Zwei Vorgangsmöglichkeiten: Probieren mit konkreten Zahlen oder überlegen (Zur Illustration sind beide Verfahren vorgestellt).

Zunächst das Probieren: Die ersten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11 \ldots$. Bereits mit $p = 2$ und $q = 7$ erhalten wir $p + q = 9$, eine Zahl, die durch $1, 3, 9$ teilbar ist und daher keine Primzahl ist.

Mit Überlegen: Sei $p \in P$ eine beliebige Primzahl. Wähle $q = p$. Dann ist $p + q = p + p = 2p$. Diese Zahl ist aber durch $1, 2, p$ teilbar und kann damit für $p > 2$ keine Primzahl sein. Es gibt in diesem Fall also nicht nur ein Gegenbeispiel, sondern unendlich viele Gegenbeispiele (da die Menge der Primzahlen unendlich viele Zahlen beinhaltet).

[a] Die natürliche Zahl p ist genau dann eine Primzahl, wenn $p > 1$ und nur 1 und die Zahl p Teiler von p sind.

Einerseits kann man also danach fragen, ob alle Elemente eine bestimmte Eigenschaft $P(x)$ erfüllen, andererseits kann man auch danach fragen, ob es zumindest ein Element gibt, auf das eine Eigenschaft zutrifft.

Definition 3.3: Existenz-Aussage

Wenn es (zumindest) ein Element x einer Menge M gibt, für die $P(x)$ erfüllt ist, so schreibt man das formal als

$$\exists x \in M : P(x) \,.$$

Man spricht: »Es gibt ein x aus M, für das $P(x)$ gilt.« Das Symbol $\exists$ heißt Existenz-Quantor.

Das Wort »ein« ist dabei kein Zahlwort, sondern ein unbestimmter Artikel. Es muss also nicht genau ein Element geben, sondern zumindest ein Element! Im folgenden Text wird das Wort »zumindest« meist nicht mehr geschrieben. Dass es genau ein Element mit einer Eigenschaft gibt, wird häufig mit $\exists!$ oder $\exists_1$ abgekürzt.

Wie kann man nun den Wahrheitsgehalt einer Existenzaussage überprüfen: Um den Wahrheitswert »wahr« zu bestätigen, muss nachgewiesen werden, dass es ein Element mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Falls es direkt möglich[1] ist, gibt man einfach ein Element konkret an.

Bsp. 3.6

Wir betrachten die Aussage

$$\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = \frac{16}{9} \,.$$

Lässt sich ein passendes r finden? Ja, etwa $r = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ oder $r = -\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$. Wichtig ist dabei, dass der Kandidat mit der gewünschten Eigenschaft tatsächlich in der gewünschten Menge enthalten ist. Die Aussage

$$\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$$

ist dagegen falsch, da die einzige Lösung in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{2}$, keine rationale Zahl ist (vgl. Kapitel xxx). Noch ein Beispiel:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0 \,.$$

Die Vermutung ist, dass es kein solches x gibt. Wir unterscheiden drei Fälle[a]: Wenn $x > 0$ ist, dann ist auch $x^2 > 0$. D. h. ein echt positives $x \in \mathbb{R}$ kann die Eigenschaft nicht erfüllen. Andererseits erhält man auch für $x < 0$, dass $x^2 > 0$ ist. Und für $x = 0$ ist $x^2 = 0$ und damit die gewünschte Eigenschaft wieder nicht erfüllt. Es lässt sich also keine reelle Zahl finden, deren Quadrat negativ ist. Damit ist diese Aussage falsch.

a Zum Rechnen mit Ungleichungen vgl. xxx.

Insgesamt merkt man bei den obigen Beispielen, dass es im Allgemeinen sehr hilfreich ist, die formalen Notationen in Worte zu übersetzen, um eine inhaltliche Vorstellung von der jeweiligen Aufgabe zu bekommen. Das weitere Vorgehen war, dass man danach eine Vermutung über den Wahrheitswert braucht. Einfachster Zugang ist zunächst das Probieren mit konkreten Elementen, wodurch man oft eine bessere Einsicht in eine Aufgabe bekommt – die Systematik dahinter sollte dadurch deutlicher heraustreten. Letztendlich müssen dann konkrete Gegenbeispiele angegeben werden oder eben eine Begründung, ohne auf konkrete Elemente, sondern nur auf deren gemeinsame Eigenschaften zurückzugreifen.

3.3. Und und Oder

Mit unserem bisherigen logischen Wortschatz lassen sich noch nicht alle Aussagen formalisieren, auf die man im mathematischen Alltag trifft. Aussagen wie »-1 ist eine ganze Zahl und -1 ist keine natürliche Zahl« und »Jede reelle Zahl ist größer gleich 0 oder kleiner gleich 0.« lassen sich bis jetzt noch nicht formalisieren. Wir brauchen also Möglichkeiten, wie man Aussagen miteinander in Verbindung bringt, d. h. das »und« und das »oder« formal festlegt.

Definition 3.4: Und und Oder

Es seien p und q zwei Aussagen:

- Die Aussage $p \wedge q$ (gesprochen: »p und q«) ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q (gleichzeitig) wahr sind. Das Symbol $\wedge$ ist also als »und (gleichzeitig)« zu lesen. Das logische Und wird auch als Konjunktion bezeichnet.

1 Das muss wie gesagt nicht möglich sein. Man kann dann zwar nachweisen, dass es so ein Element gegeben muss, weiß aber nicht genau, wie es wirklich aussieht.

- Die Aussage $p \lor q$ (gesprochen: »p oder q«) ist genau dann wahr, wenn (zumindest) eine der beiden Aussagen wahr ist. Das Zeichen $\lor$ wird als »oder« gelesen. Achtung: Es handelt sich dabei um kein ausschließendes Oder (d. h. kein »entweder-oder«). Das logische Oder wird auch als Disjunktion bezeichnet.

Um den Überblick über den Wahrheitsgehalt von verbundenen Aussagen zu bewahren, ist es (zumindest am Beginn) üblich, die Wahrheitswerte in einer tabellarischen Übersicht festzuhalten – in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von p und q. Man spricht dann von »Wahrheitstafeln« oder »Wahrheitstabellen«:

p	q	$p \land q$	$p \lor q$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

Diese Tabelle ist zeilenweise zu lesen. Wir betrachten die Zeile, in der p den Wert W hat und q den Wert F. Dann ist $p \land q$ falsch, da p und q nicht beide den Wert W haben. Dagegen ist $p \lor q$ wahr, da dafür ausreichend ist, dass zumindest eine Aussage wahr ist, was bei p der Fall ist. Die Aussage p und q bzw. $p \land q$ ist also nur genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. p oder q bzw. $p \lor q$ ist genau dann wahr, wenn p oder q (oder beide) wahr sind. Zur Erinnerung: Das Wort »oder« wird in der Mathematik für gewöhnlich nicht im Sinn von ausschließend verwendet.

Aussagen, die mit $\land$ oder $\lor$ verbunden sind, lassen sich sehr systematisch abarbeiten. Es reicht, die Wahrheitswerte der Einzelbestandteile zu kennen – danach kann man Schritt für Schritt Wahrheitstabellen aufstellen, um den Wahrheitsgehalt von verbundenen Aussagen zu erhalten.

3.4. Implikation

Viele mathematische Aussagen (Sätze) haben eine Struktur der Form »(Schon) wenn die Voraussetzung p erfüllt ist, dann gilt zwingend die Aussage q.« Formal wird dieses Konstrukt durch eine sogenannte Implikation notiert:

$$p \Rightarrow q\,.$$

Die Aussage p heißt »Voraussetzung« oder »Prämisse«, q heißt »Conclusio« (oder »Folgerung«).

Implikationen sagen zunächst nichts über kausale Zusammenhänge aus. Die Implikation sagt zunächst nur aus, dass q eintritt, wenn p bereits eingetreten ist. Der Fall, dass q nicht eintritt, falls p eingetreten ist, wird dagegen nicht zugelassen. Betrachten wir dazu ein konkreteres Beispiel.[2] Die Aussage: »Wenn es heute regnet, gehen wir morgen ins Kino« hat die Gestalt einer Implikation $p \Rightarrow q$. p ist die Aussage »Es regnet.«, q die Aussage »Ich gehe ins Kino.«.

Implikationen sagen nichts über den Wahrheitswert der einzelnen Aussagen aus. Wenn wir sagen, dass diese obige Aussage wahr ist, sagen wir nicht, dass es heute wirklich regnet oder dass wir morgen auf jeden Fall ins Kino gehen. Wir sagen nur, dass wir ins Kino gehen, falls es eintritt, dass es heute noch regnet. Einzig der Fall, dass es heute regnet, wir aber trotzdem nicht ins Kino gehen, wird nicht zugelassen. Allerdings: Wenn es heute nicht regnet, dann wissen wir nicht, was morgen zu tun ist. Man setzt dann fest, dass bei nicht erfüllter Voraussetzung die Implikation wahr bleibt, egal, welchen Wahrheitswert die Conclusio hat.[3] D. h. der Fall, dass wir morgen nicht ins Kino gehen, falls es heute nicht regnet, widerspricht der Implikation »Wenn es heute regnet, gehen wir morgen ins Kino« nicht.[4] Dieses Verständnis vom Wahrheitsgehalt der Implikation wird als Definition festgehalten:

2 Entnommen vom Skriptum Grundbegriffe der Mathematik, Clason, xxx
3 In der Logik der Philosophen würde man sagen: Aus Falschem folgt Beliebiges: »Ex falso quodlibet.«
4 Man musste für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von p und q auch den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ festlegen. Eine Motivation dabei war auch, $p \Rightarrow q$ mithilfe der Negativion $\neg$ und dem Disjunktion $\lor$ zu definieren. $p \Rightarrow q$ wird dann definiert als $q \lor \neg p$.

Definition 3.5: Implikation

Die Implikation $p \Rightarrow q$ wird durch folgende Wahrheitstafel festgelegt:

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

p heißt Voraussetzung, q heißt Conclusio. Zusammenfassend: Wenn p wahr ist, so muss auch q zwingend wahr sein, damit $p \Rightarrow q$ wahr ist. Wenn p falsch ist, dann ist es egal, welchen Wahrheitswert q hat – die Implikation $p \Rightarrow q$ ist dann nach wie vor wahr (»Aus Falschem folgt Beliebiges«).

Um also den Wahrheitsgehalt von $p \Rightarrow q$ zu überprüfen, reicht es zu zeigen, dass q gezwungenermaßen gilt, wenn p als wahr vorausgesetzt wird.

Da die Implikation $p \Rightarrow q$ mathematisch von großer Bedeutung ist, haben sich dafür verschiedene Sprechweisen eingebürgert:

- Aus p folgt (zwingend) q.
- p impliziert q.
- p ist hinreichend für q. (Es ist ausreichend, dass p gilt, damit q gelten muss.)
- q ist notwendig für p. Das heißt, wenn q nicht gilt, so kann p nicht gelten. $(\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Bsp. 3.7

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen den Wahrheitsgehalt der Implikation: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

Falls ein konkret vorgegebenes x die Ungleichung $x > 2$ nicht erfüllt, ist nichts zu untersuchen, weil die Implikation laut der obigen Wahrheitstafel auf jeden Fall richtig ist. Es bleibt nun noch der Fall, dass $x > 2$ als wahr vorausgesetzt wird. Da dann $x > 0$ ist, bleibt bei Multiplikation der Ungleichung $x > 2$ mit x das Ungleichzeichen erhalten und wir bekommen $x \cdot x > 2 \cdot x$. Multiplizieren wir die Ungleichung $x > 2$ dagegen mit 2, so erhalten wir $x \cdot 2 > 2 \cdot 2$. Wir haben also die Aussage

$$x^2 > 2x \quad \wedge \quad 2x > 2^2$$

erhalten. Damit ist aber auch $x^2 > 2^2$. Wir haben also hergeleitet, dass $x^2 > 4$ ist, falls $x > 2$ ist.

3.5. Äquivalenz

Eine Implikation drückt zwar einen gewissen Zusammenhang zwischen zwei Aussagen aus, allerdings keine Gleichwertigkeit. Um also logische Gleichwertigkeit zu beschreiben, führt man einen weiteren Begriff ein, nämlich die Äquivalenz (logische Gleichwertigkeit) $\Leftrightarrow$.

Definition 3.6: Äquivalenz

Sind p und q zwei mathematische Aussagen, dann meint

$$p \Leftrightarrow q$$

das Folgende: p und q haben immer die selben Wahrheitswerte. Das heißt p und q sind entweder gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch.

Ist die Aussage p wahr (erfüllt), so auch die Aussage q – und umgekehrt: Ist q wahr, so auch p. Ist weiters die Aussage p falsch, so auch q – und umgekehrt: Ist q falsch, so auch p. Damit ergibt sich: Die Aussage $p \Leftrightarrow q$ ist gleichbedeutend mit

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) .$$

Die dazugehörige Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	W	F	F
F	F	W	W	W

Um eine Äquivalenz von p und q zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass die beiden Implikationen $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$ gelten. Die Äquivalenz hat den Gewinn, komplizierte Aussagen durch gleichwertige, aber anschaulich einfachere zu ersetzen. Daneben können auch andere Formulierungen von logischen Aussagen gefunden werden, die im jeweiligen Kontext möglicherweise leichter im Rahmen von Beweisen verwendet werden können.

Bsp. 3.8

Sind die Aussagen $p \Rightarrow q$ und $\neg q \Rightarrow \neg p$ äquivalent? Wir erstellen eine Wahrheitstafel und vergleichen:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

Die $p \Rightarrow q$ und $\neg q \Rightarrow \neg p$ haben jeweils die selben Wahrheitswerte und sind damit logisch äquivalent:

$$p \Rightarrow q \qquad \Leftrightarrow \qquad \neg q \Rightarrow \neg p .$$

So wie es beim Rechnen mit Zahlen Vorrangregeln gibt, um sich viele Klammern zu ersparen, gibt es auch in der Logik Vorrangregeln. Zunächst werden wie üblich Klammerausdrücke behandelt, danach folgende Priorität:

$$\neg \quad \text{vor} \quad \wedge, \vee \quad \text{vor} \quad \Rightarrow \quad \text{vor} \quad \Leftrightarrow$$

Größere Priorität bedeutet, dass das Zeichen »enger« gebunden ist. $\wedge$ und $\vee$ werden gleichwertig in der Reihenfolge abgefertigt, wie sie von links nach rechts stehen.

Bsp. 3.9
Die Aussagen $a \wedge b \vee c$ bedeutet $(a \wedge b) \vee c$, die Aussage $a \vee b \wedge c$ analog $(a \vee b) \wedge c$.

$$a \vee \neg b \wedge c \Rightarrow \neg d \wedge e \Leftrightarrow f$$

ist gleichbedeutend mit

$$\Big[\big[(a \vee (\neg b)) \wedge c\big] \Rightarrow ((\neg d) \wedge e)\Big] \Leftrightarrow f\ .$$

Zwar sind durch diese Regeln an sich keine Missverständnisse möglich, zur Verbesserung des Leseflusses und zur Verdeutlichung der Struktur empfiehlt es sich trotzdem, Klammern zu setzen und/oder größere Abstände zu machen, also statt

$$a \wedge b \Rightarrow c \vee d$$

eher

$$(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee d) \qquad \text{oder} \qquad a \wedge b \quad \Rightarrow \quad c \vee d$$

zu schreiben.

Abschließend sei erwähnt: Diese (mathematische) Logik muss anhand von mathematischen Aussagen bzw. Beweisen trainiert werden. Wer viel übt und immer wieder versucht, Beweise zu führen, wird im Laufe der Zeit lernen, wie mit diesen Symbolen umzugehen ist. Wir werden durch viele Beispiele und häufiges Thematisieren von Argumentationsketten all das im Laufe der Zeit lernen.

4. Beweise

Beweise sind das entscheidende Instrument, um den Wahrheitsgehalt von mathematischen Aussagen nachzuweisen. Erst wenn ein Beweis zu einer Aussage geliefert wird, kann mich ihrer Gültigkeit sicher sein. Beweisen nimmt daher in der akademischen Mathematik eine viel wichtigere Rolle als in der Schule ein, um dem wissenschaftlichen Anspruch zu entsprechen. Da man erfahrungsgemäß nicht davon ausgehen kann, dass man Erfahrungen mit Beweise (oder Herleitungen) in der Schule gemacht hat, lohnt es sich zunächst, einige grundlegende Techniken (aufbauend auf der Logik) zu thematisieren. In diesem Abschnitt werden daher allgemeine Schlussregeln, die man immer wieder verwendet, sowie globale Beweisstrategien (direkter/indirekter Beweis) vorgestellt. Anschließend werden noch einige Tipps rund um das Beweisen gegeben.

4.1. Beweistechniken

Nachdem nun die logischen Grundlagen halbwegs formal geklärt sind, können wir mathematische Aussagen und die damit verbundenen Beweistechniken betrachten. Im Wesentlichen haben die meisten mathematischen Aussagen die Form einer Implikation. Ausgehend von Voraussetzungen wird etwas über daraus folgende Aussagen ausgesagt.

Typische Formulierungen sind beispielsweise:

- Wenn f differenzierbar ist, dann ist f auch stetig.
- Es sei f eine differenzierbare Funktion. Dann ist f stetig.
- Jede differenzierbare Funktion f ist stetig.

Ist p die Aussage »f ist differenzierbar« und q die Aussage »f ist stetig«, so sind die obigen Aussagen gleichwertig[a] zu $p \Rightarrow q$.

a Der Bequemlichkeit wird oft nicht genau zwischen Aussagen und Aussageform unterschieden. Ist M die Menge aller Funktionen, so könnte man die obigen Aussagen auch als

$$\forall f \in M : P(f) \Rightarrow Q(f)$$

schreiben. Im Wesentlichen ergibt sich beim Vorgang des Beweisens kaum ein Unterschied.

4.1.1. Allgemeine Schlussregeln[1]

Noch bevor wir uns Beweisstrategien im Großen anschauen, werden wir im nächsten Kapitel kurz auf die typischen Schlussregeln eingehen, die man vielleicht ohnedies schon unbewusst verwendet. Im Wesentlichen bleiben diese Schlussregeln im mathematischen Alltag eher auf einer unbewussten Ebene – es ist klar, dass die Schlussregeln so sind und nicht anders sein können.

1 Die folgenden Tipps orientieren sich wieder am Aufbau des Skriptes Grundbegriffe der Mathematik von C. Clason

- $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

  Wenn p gilt und die Implikation $p \Rightarrow q$ gilt, dann muss auch q gelten. Typisches Beispiel dafür ist, auszunützen, dass ein Objekt die Voraussetzungen eines Satzes erfüllt. Die Anwendung dieses Satzes führt dann evtl. zum gewünschten Resultat.

  > Wir konnten beweisen, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ eine differenzierbare Funktion ist. Laut dem obigen Satz ist jede differenzierbare Funktion stetig. Dieses f erfüllt die Voraussetzung des Satzes und ist daher auch stetig.

- $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$

  Wenn q nicht erfüllt ist, die Implikation $p \Rightarrow q$ aber gilt, so kann p nicht gelten.

  > Wir konnten zeigen, dass eine Funktion f nicht stetig ist. Da jede differenzierbare Funktion stetig ist, heißt das, dass unser f nicht differenzierbar sein kann.

- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

  Wenn r aus q folgt und q aus p folgt, dann folgt auch r aus p.

  > Wenn eine Funktion zweimal differenzierbar ist, dann ist sich auch differenzierbar. Und wenn eine Funktion differenzierbar ist, dann ist sie auch stetig. Also ist dann eine zweimal differenzierbare Funktion auch stetig.

- $(\neg p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow q$.

  Wenn p nicht gilt, aber $q \vee p$ gilt, dann muss zwingend q gelten.

  > Der Produkt-Null-Satz[a] in $\mathbb{R}$ ist dafür ein Beispiel: Es gilt $x \cdot y = 0$ und damit $x = 0$ oder $y = 0$. Ist nun $x = 2$, so muss $y = 0$ sein.
  >
  > *a* Ist $x \cdot y = 0$, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$ (oder beide sind 0).

Weitere Techniken und Schlussweisen werden in den jeweiligen Beweisen auf den folgenden Seiten dargestellt. Den Umgang mit Quantoren haben wir in Kapitel 3 kennengelernt, es folgt hier nur kurz die Zusammenfassung der gängigen Strategien:

- Die Aussage $\forall x \in M : P(x)$ soll bewiesen werden:

  Man wählt sich ein »beliebiges« Element aus der Menge M. Beliebig heißt, dass es kein konkretes Element sein darf. Übliche Formulierungen sind: »Sei x aus M ein beliebiges Element. Laut Definition von M hat dann x die Eigenschaft, dass ...«.

  > Es sei nun $M = \mathbb{Q}$ und weiters $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ und ein $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass sich x schreiben lässt als $x = p/q$ ...

- Die Aussage $\forall x \in M : P(x)$ soll widerlegt werden:

  Hier reicht es, ein Element $x \in M$ angeben zu können, sodass $P(x)$ falsch ist. Das ist gleichwertig damit, zu zeigen, dass $\exists x \in M : \neg P(x)$ gilt, was die Verneinung von $\forall x \in M : P(x)$ darstellt.

  Man sucht also ein (konkretes) Element x, das sowohl in M enthalten ist, aber $P(x)$ nicht erfüllt.

Wir halten folgende Regel fest:

$$\neg(\forall x \in M : P(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists x \in M : \underbrace{\neg P(x)}_{:=Q(x)}$$

Umgekehrt ist dann logischerweise für eine beliebige Aussageform $Q(x)$

$$\neg(\exists x \in M : Q(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists x \in M : \neg Q(x)$$

Damit haben wir die Rechenregeln fürs sogenannte »Negieren« (Verneinen) von Existenz- bzw. All-Aussagen festgehalten.

4.1.2. Direkter Beweis

Kommen wir nun zu den klassischen Beweisstrategien. Beim direkten Beweis geht es darum, eine Aussage der Form $p \Rightarrow q$ direkt durch schrittweises Schließen der Conclusio q aus der Voraussetzung p zu erhalten.

Bsp. 4.1

Wir zeigen: Die Summe zweier gerader natürlicher Zahlen ist wieder gerade. Formalisiert bedeutet das:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : \qquad \underbrace{x \text{ gerade} \wedge y \text{ gerade}}_{p} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x + y \text{ ist gerade}}_{q} .$$

Zur Erinnerung: Eine natürliche Zahl n heißt gerade, wenn sie ein Vielfaches von 2 ist. Das heißt, es muss ein $m \in \mathbb{N}$ geben, sodass $n = 2m$ ist.

Nun zum Beweis: Da wir die Implikation zeigen müssen, ist nur jener Fall interessant, bei dem die Voraussetzung tatsächlich erfüllt ist. Dieses Vorgehen ist sehr systematisch und kommt ganz analog bei vielen Aufgaben zur Anwendung.

i) Seien nun also x und y zwei natürliche Zahlen.

ii) Damit die Voraussetzung erfüllt ist, müssen sowohl x als auch y gerade Zahlen sein. (Ein logisches Und ist genau dann erfüllt, wenn beide damit verbundenen Aussagen erfüllt sind.)

iii) Wir verwenden nun die Definition, was eine gerade Zahl kennzeichnet. Es gibt also zwei natürliche Zahlen m und n, sodass die Gleichungen

$$x = 2m \qquad \text{und} \qquad y = 2n$$

erfüllt sind.

iv) Meist ist es hilfreich, sich im Hinterkopf zu behalten, was letztlich zu zeigen ist: Wir müssen eine Aussage über die Summe von $x + y$ verifizieren. Daher ist es naheliegend, diese Summe zu betrachten und die bisherigen Erkenntnisse zu verwenden:

$$x + y = 2m + 2n .$$

v) Damit $x + y$ eine gerade Zahl ist, muss es eine natürliche Zahl k gegeben, sodass $x + y = 2k$ gilt. Herausheben liefert uns das gewünschte Resultat

$$x + y = 2m + 2n = 2 \cdot \underbrace{(m + n)}_{=:k} .$$

Insgesamt hat man gesehen, dass dieser Beweis sehr systematisch war: Man startet mit den Voraussetzungen, verwendet die entsprechenden Definitionen und arbeitet sich Schritt für Schritt zum gewünschten Resultat.

4.1.3. Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch, Kontraposition)

Auch beim indirekten Beweis will man eine Aussage der Form $p \Rightarrow q$ zeigen. Allerdings macht man das nicht in dieser Form, sondern durch die äquivalente Darstellung $\neg q \Rightarrow \neg p$. Dieses Vorgehen nennt sich Kontraposition. Einen ähnlichen Weg geht man, wenn man $p \wedge \neg q$ annimmt (also annimmt, dass die Implikation $p \Rightarrow q$ eben nicht gilt), und dadurch zu einem Widerspruch kommt. Mögliche Widersprüche ergeben sich, wenn man $\neg p$ zeigen kann, wenn man q zeigen kann, oder wenn man einen anderen Widerspruch zu einem bereits bewiesen Sachverhalt erhält (etwa $0 = 1$).

Bsp. 4.2

Ist das Quadrat einer natürlicher Zahl gerade, so ist die Zahl selbst gerade. Formalisiert bedeutet das:

$$\forall x \in \mathbb{N}: \quad \underbrace{x^2 \text{ gerade}}_{p} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x \text{ gerade}}_{q}.$$

Für führen einen Beweis per Kontraposition und zeigen daher die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{N}: \quad \underbrace{x \text{ ungerade}}_{\neg q} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 \text{ ungerade}}_{\neg p}.$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Negation von »gerade« die Eigenschaft »ungerade« ist. Nun gehen wir wieder systematisch vor:

- Es sei x eine ungerade Zahl. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x = 2n + 1$ ist. ($2n$ ist eine gerade Zahl, damit ist der Nachfolger $2n + 1$ ungerade.)
- Wir berechnen nun das Quadrat von x:

$$x^2 = (2n+1)^2 = (2n)^2 + 2n + 1 = 4n^2 + 2n + 1 = 2\underbrace{(2n^2 + n)}_{=:k} + 1$$

Also ist $x^2 = 2k + 1$ und damit ungerade.

Der Vorteil bei diesen Beweistechniken kann sein, dass manche Aussagen dadurch deutlich einfacher zu beweisen sind. Das ist oft von vornherein nicht offensichtlich. Daher ist ausreichend Ausdauer beim Beweisen notwendig. Wenn man zunächst einen direkten Beweis versucht, das Problem aber nicht in den Griff bekommt, ist es naheliegend, die Kontraposition zu verwenden oder auf Widersprüche hin zu arbeiten.

4.2. Tipps zum Beweisen

Die Frage, wann ein Beweisversuch tatsächlich ein Beweis einer Aussage ist, ist am Studienbeginn von den Studierenden nicht ganz leicht zu beantworten. Es braucht im Allgemeinen Erfahrung und ein gutes Verständnis, um sich sicher sein zu können, dass ein eigener Beweis richtig ist. Es kann durchaus das gesamte erste Semester dauern, bis man eine realistische Einschätzung bekommt. Wichtig ist, dass man sich intensiv damit beschäftigt und sich nicht sofort zufrieden gibt, wenn man einen Beweisversuch gestartet hat. Nachfolgend werden einige Anhaltspunkte gegeben, die man sich bei jedem Beweis selbst fragen sollte bzw. kann:

- Welche Beweistechnik wurde verwendet? Wurde die Beweistechnik korrekt verwendet? Kann man sich z. B. sicher sein, dass die Negationen bei der Kontraposition korrekt durchgeführt wurden?
- Werden nur Annahmen getroffen, die aufgrund der Voraussetzungen einer Aussage auch gerechtfertigt sind? Kann man sicher sein, dass die Existenz neu eingeführter Variablen gesichert ist? Die

Existenz einer eingeführten Variablen a mit der Eigenschaft $P(x)$ ist dann gesichert, wenn die Aussage $\exists x \in M : P(x)$ oder die Aussage $\forall x \in M : P(x)$ gilt. Die Benennung der Variablen ist relativ frei.[2]

- Wurde jeder Schritt logisch korrekt begründet? Kann man jede Überlegung, die man aus Platzgründen nicht ausführlich hinschreiben wollte, vollständig hinschreiben? Am Beginn empfiehlt es sich, jeden noch so kleinen Schritt ausführlich hin zu schreiben. Mit der Zeit erhält man eine Routine, mit der man einschätzen kann, was im Detail ausgeschrieben werden sollte und was nicht.

Allgemein sollte man sich selbst sein größter Kritiker sein. Das ist erfahrungsgemäß am Beginn ungewohnt und schwer. Man sollte also nicht jeden Beweisschritt einfach »abnicken«, sondern sich fragen, warum dieser und jener Schritt nicht anders sein kann. Wenn das zu ungewohnt ist, kann man seinen Beweisversuch auch seinen Mitstudierenden vorstellen und sie auffordern, jeden Schritt mit der Frage »Warum?« zu hinterfragen. In der Arbeitsphase bietet es sich an, seine innere Stimme dieses Hinterfragen übernehmen zu lassen.

Viele Beweise in den Übungen der ersten Semester lassen sich weitgehend systematisch durchführen. Man startet zunächst mit den Voraussetzungen und setzt die jeweiligen Definitionen ein. Danach hangelt man sich Stück für Stück weiter, wobei man die üblichen Schlussregeln verwendet. Je nach Schwierigkeit und Länge des Beweises, bietet es sich an, sich zunächst ausführlich hinzuschreiben, was überhaupt zu zeigen ist. Dabei kann es einerseits nützlich sein, die formalen Aussagen verbal zu beschreiben. Andererseits kann man sich bei Implikationen die Conclusio im Detail aufschreiben. Dadurch erhält man auch die Chance, rückwärts zu arbeiten, um dadurch Zwischenziele zu erhalten: Wenn die Aussage $p \Rightarrow q$ zu zeigen ist, und man recht einfach eine Aussage $r \Rightarrow q$ zeigen kann, empfiehlt es sich zu versuchen, ob man $p \Rightarrow r$ zeigen kann:

1)	p	$\Rightarrow$	q	verbal hinschreiben
2)			q	ausführlich ausformulieren und Voraussetzungen r suchen.
3)			$r \Rightarrow q$	formulieren.
4)	$p \Rightarrow r$			zu zeigen versuchen.
5)	$p \Rightarrow r$	$\wedge$	$r \Rightarrow q$	liefert dann den Beweis für
6)	p	$\Rightarrow$	q	

2 Bei Aussagen wie $\exists x \in M \ldots$ sollte man die Variable in ihrer weiterer Verwendung natürlich so nennen, wie sie beim Quantor heißt, um Missverständnisse zu vermeiden.

5. Naive Mengenlehre

5.1. Grundlagen

Definition 5.1: Menge
Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.

Diese Definition geht auf GEORG CANTOR (1845 – 1918) zurück, einem Begründer der Mengentheorie bzw. Mengenlehre, und wird häufig genutzt, um den Begriff Menge festzulegen. Also ist eine Menge eine Zusammenfassung von Objekten, die sich unterscheiden lassen. Zudem muss bei jedem Objekt feststellbar sein, ob es zur Menge gehört, oder nicht. Gehört ein Objekt zu einer Menge, so heißt es Element der Menge. Im Prinzip gibt es nun zwei Möglichkeiten, eine konkrete Menge festzulegen: 1.) nämlich durch Aufzählung sämtlicher Elemente oder 2.) durch Festlegung einer charakterisierenden Eigenschaft $P(x)$.

Bei der 1.) Möglichkeit werden sämtliche Elemente aufgezählt und mit geschwungenen Klammern zusammengefasst. Beistriche trennen die Elemente:

Bsp. 5.1
Wir definieren $M := \{1, 2, a, x_1\}$. Dann ist M die Menge, die die Zahlen 1, 2 sowie die Buchstaben a und x_1 enthält.

Bemerkung: Das Zeichen $:=$ bedeutet übrigens »per Definition gleich« und wird verwendet, um (neue) mathematische Objekte (ausgehend von vorhandenen) festzulegen. Der tiefgestellte Einser im Zeichen x_1 heißt Index und wird oft zum Durchnummerieren von Objekten verwendet.

Üblich ist auch noch die Schreibweise mit Auslassungspunkten, wenn klar ist, wie es weitergeht:

Bsp. 5.2
Die Menge der ganzen Zahlen zwischen 1 und 20 können wir schreiben als $\{1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20\}$. Wir schreiben die natürlichen Zahlen▶53 als $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ und die ganzen Zahlen▶56 als $\mathbb{Z} : \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Zwei Mengen sind per Definition gleich, wenn sie die selben Elemente beinhalten. Ist ein Element x in einer Menge M enthalten, so sagen wir auch »x in M« oder »x Element von M« und schreiben dafür

$$x \in M$$

oder auch $M \ni x$. Gilt sowohl $x \in M$ und $y \in M$, so schreiben wir $x, y \in M$. Analoges machen wir z. B. für $x, y, z \in M$. Ist dagegen ein Objekt y nicht in M enthalten (»y nicht in M«), so schreiben wir

$$y \notin M\,.$$

Bsp. 5.3

Durch diese Definition der Mengengleichheit sind die Mengen $\{1, 1\}$ und $\{1\}$ ident, weil sie jeweils nur das Element 1 beinhalten.

Außerdem sind die Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ gleich, da sie jeweils nur die Elemente a und b beinhalten. Es kommt also nicht auf die Reihenfolge an, wie wir die Elemente aufzählen.

Mit Hilfe der Unterscheidung »Element von« und »kein Element von« definieren wir den Begriff Teilmenge:

Definition 5.2: Teilmenge

Die Menge A heißt Teilmenge der Menge B (geschrieben $A \subset B$), wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. In mathematischer Kurzschreibweise schreiben wir diese Aussage als

$$\forall a \in A : a \in B \,.$$

Gesprochen: »Für jedes Element a aus A gilt: a ist auch Element von B« oder »Für alle a in A gilt: a ist auch in B«. (Der Doppelpunkt ist also das Wort »gilt«). Ist A Teilmenge von B, so sagen wir auch, dass B eine Obermenge von A ist und schreiben dafür $B \supset A$.

A heißt eine echte Teilmenge von B ($A \subsetneqq B$), wenn es (zumindest) ein* Element von B gibt, das nicht in A enthalten ist, also in mathematischer Kurzschreibweise

$$\exists b \in B : b \notin A \,.$$

Anmerkung zu *: Das Wort »ein« in der Mathematik meint für gewöhnlich »mindestens ein«. Ansonsten sagen wir »genau ein«. Das Zeichen $\exists$ heißt Existenzquantor und drückt es, dass es zumindest ein Objekt mit der folgenden Eigenschaft gibt. Mit $\exists!$ oder $\exists_1$ drücken wir aus, dass es genau ein Objekt gibt.

Noch eine Bemerkung zu den Teilmengen: Bedauerlicherweise ist die Symbol-Schreibweise für »Teilmenge« bzw. »echte Teilmenge« nicht immer einheitlich. Manchmal schreibt man auch $\subset$ für echte Teilmenge. Dann verwendet man $\subseteq$ oder $\subseteqq$, wenn Gleichheit erlaubt ist. Für gewöhnlich wird aus dem Zusammenhang klar, welche der Schreibweisen verwendet wird. In Büchern werden solche Details normalerweise am Beginn geklärt, weswegen man Vorwort und Einleitung lesen sollte.

Bsp. 5.4

Die Menge $A = \{1, 3, -10000\}$ sowie die Menge $B = \{1, 1\}$ sind jeweils Teilmengen der Menge $C = \{3, 1, -10000, x\}$. Wir schreiben daher $A \subset C$ und $B \subset C$.

Dagegen ist $D := \{1, 0\}$ keine Teilmenge von C, weil $0 \notin C$. Aber umgekehrt ist auch C keine Teilmenge von D.

5.1.1. Prädikative Definition

Die Angabe von Mengen durch Aufschreiben sämtlicher Elemente kann auch sehr mühsam sein. Insbesondere wenn unendlich[1] viele Elemente einer der Menge enthalten sind, können Auslassungspunkte missverständlich sein. Deswegen macht es Sinn – jetzt kommt die 2.) Möglichkeit –, die Elemente einer Menge durch ihre Eigenschaften zu charakterisieren:

1 Der Begriff der Unendlichkeit ist mathematisch vergleichsweise mühsam zu fassen. Man unterscheidet dabei sogar zwischen »abzählbar unendlich« und »überabzählbar unendlich«.

Definition 5.3
Ist x genau dann ein Element einer Menge M, wenn es die Eigenschaft (bzw. Aussage) P erfüllt, kurz
$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \text{ ist wahr },$$
so schreiben wir
$$M := \{x \mid P(x)\} = \{x : P(x)\}$$
und sagen: »M ist die Menge aller x, für die $P(x)$ erfüllt ist.«

Bsp. 5.5
Die Eigenschaft $P(x)$ sei definiert durch: »x ist eine ganze Zahl größer gleich 3 und kleiner gleich 6«. Wir können das auch schreiben als $P(x)\,:\, x \in \mathbb{Z} \;\wedge\; 3 \leq x \leq 6$. Dann ist die Menge $M := \{x \mid P(x)\}$ nichts anderes als
$$M = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Häufig macht es auch Sinn, eine Grundmenge bzw. Grundgesamtheit $\mathbb{G}$ anzugeben, in der die Element-Kandidaten liegen. Üblicherweise geschieht das dann in der Form
$$M := \{x \in \mathbb{G} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{G} : P(x)\}$$
Verschiedene Grundmengen liefern dabei oft bei Angabe der selben Eigenschaft $P(x)$ verschiedene Mengen M, wie auch das nächste Beispiel zeigt:

Bsp. 5.6
Dadurch können wir die Menge M aus dem vorigen Beispiel auch schreiben als
$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 6\} \quad \neq \quad \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}.$$

Bis auf wenige naheliegende Ausnahmen werden wir meist die Notation mit Angabe einer Eigenschaft $P(x)$ bevorzugen, weil diese mathematisch exakter ist und keine Missverständnisse zulässt. Zugleich lassen sich dadurch sehr abstrakte Mengen definieren. Zudem werden wir nach Möglichkeit einen Grundmenge $\mathbb{G}$ angeben. Außerdem wird so das Hauptaugenmerk auf die Eigenschaften gelenkt, die die betreffende Menge jeweils auszeichnet.

5.1.2. Grundlegende und richtungsweisende Beispiele

Es folgen nun einige Beispiele, die entweder aus der Schule bekannt sind oder aus mathematischer Sicht für das erste Studienjahr relevant sind bzw. sein werden. Der vollständige Sinn mancher der Mengen wird unter Umständen auch erst im Laufe des Studiums offensichtlich. Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sowie $\mathbb{C}$ (natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen) werden im Kapitel 7 gesondert betrachtet.

Definition 5.4: Leere Menge
Die Menge, die keine Elemente enthält, wird »leere Menge« genannt und als $\{\}$ oder $\emptyset$ geschrieben. Es gilt für jede beliebige Menge M die Beziehung $\emptyset \subset M$.

Die leere Menge einzuführen, hat hauptsächlich technische Gründe. Viele Aussagen bzw. Voraussetzungen lassen sich dadurch einfacher formulieren.

Definition 5.5: Intervall

Für einige Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$▶63 haben wir Sonderbezeichnungen: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

»offenes Intervall« mit den Randpunkten a und b. Die Randpunkte sind beim offenen Intervall nicht in der Menge enthalten. Die in der Schule zum Teil übliche Schreibweise $]a, b[$ wird in der Hochschulmathematik grundsätzlich wenig bis gar nicht verwendet.

Halboffene Intervalle definieren wir durch

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{und} \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} .$$

Die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

heißt abgeschlossenes Intervall. Abgeschlossene Intervalle werden eine schöne Rolle bei (stetigen) Funktionen spielen – das Schlagwort dazu heißt »kompakt« ...

Außerdem definieren wir z. B.

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

sowie

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} .$$

Das Symbol ∞ wird als »unendlich« bezeichnet und drückt einen beliebig großes Wert, sogenannte Unbeschränktheit, aus. Das Symbol $-\infty$ wird als »minus unendlich« bezeichnet und drückt Unbeschränktheit »nach unten« aus. Die beiden Symbole stellen an sich keine reellen Zahlen dar. Trotzdem wird sich im Laufe des Studiums zeigen, wie man sinnvoll damit hantieren kann. Man spricht dann auch von den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ ...

Bsp. 5.7

Wir können sämtliche Folgen▶162 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit reellen Folgengliedern $a_n \in \mathbb{R}$ zu einer Menge zusammenfassen. Diese Menge aller reellen Folgen ist dann

$$\omega := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

und mit geeigneten Rechenregeln sogar ein Vektorraum▶219. Mehr dazu lernt man in der Analysis oder der Linearen Algebra. Folgen werden noch eine wesentliche Rolle bei Begriffen wie Abzählbarkeit, Intervallschachtelungen, Konvergenz▶162, Stetigkeit usw. spielen.

Bsp. 5.8

Wir können weiters alle reellen Folgen, die den Grenzwert 0 haben, zu einer Menge zusammenfassen

$$c_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \omega \mid \lim_{n \to \infty} a_n = 0\} .$$

Diese Menge der sogenannten »Nullfolgen« ist dann eine echte Teilmenge der Menge aller reellen Folgen. Solche Folgenräume wie c_0 werden beispielsweise in einem Teilgebiet der Mathematik, das sich Funktionalanalysis nennt, behandelt...

Bsp. 5.9

Mit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die differenzierbar▶178 sind und deren erste Ableitung stetig▶152 ist:

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ und } f' \text{ sind stetig}\} .$$

Mit den Definitionen für die Summen- und Produktfunktion▶126 ist auch diese Menge wieder ein reeller Vektorraum.

Bsp. 5.10

Sei M eine Menge mit n Elementen ($n \in \mathbb{N}$). Dann können wir alle invertierbaren▶129 (= umkehrbaren Funktionen von M nach M zu einer Menge zusammenfassen:

$$S(n) := \{f : M \to M \mid f \text{ ist umkehrbar}\} .$$

Anschaulich gesehen handelt es sich bei solchen Funktionen um Permutationen (also um Vertauschungen der Elemente). Permutationen finden sowohl in der Kombinatorik, als auch in der Linearen Algebra (Determinanten und Matrizen) sowie in der Algebra (Symmetrische Gruppe) eine wichtige Rolle.

5.2. Mengenoperationen

Ausgehend von bereits vorhandenen/definierten Mengen lassen sich daraus neue Mengen bilden. Das geschieht mit sogenannten Mengenoperationen.

Definition 5.6: Durchschnitt, Vereinigung, Differenz

Sind A und B zwei Mengen, so definieren wir den Durchschnitt von A und B, geschrieben als $A \cap B$, als die Menge aller Elemente, die sowohl in A, also auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} .$$

Die Vereinigung von A mit B, geschrieben als $A \cup B$, definieren wir als die Menge aller Elemente, die in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} .$$

Wesentlich für das Thema »Terme und Gleichungen« ist noch die Menge $A \setminus B$ (»A ohne B«). In dieser Menge (»Mengendifferenz«) sind nur genau jene Elemente von A, die nicht in B sind, also

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} .$$

Zur Erinnerung: Das Zeichen $\wedge$ verbindet zwei mathematische Aussagen und bedeutet »und«, das Zeichen $\vee$ bedeutet »oder« (nicht ausschließend).

Der Durchschnitt, die Vereinigung und Differenz von A und B bleiben von der Struktur sehr ähnlich zu A und B. Nichtsdestotrotz können wir aus A und B auch eine Menge basteln, die von der Struktur her »größer« bzw. »höherdimensionaler« wird:

Definition 5.7: Kartesisches Produkt

Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Dann definieren wir als das kartesische Produkt von A mit B ($A \times B$, sprich: »A kreuz B«) die folgende Menge:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} .$$

In der Menge $A \times B$ sind also sämtliche (geordneten) Paare aus Elementen enthalten, bei denen der erste »Eintrag« (Komponente) ein Element aus A ist, der zweite aus B. Die Reihenfolge der Einträge ist also wichtig.

Vorsicht: Paare $(a, b) \in A \times B$ dürfen nicht mit Intervallen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ verwechselt werden. Aus dem Kontext und den jeweiligen Symbolen wird klar, um welches Objekt es sich handelt. Ein Intervall (a, b) ist nie Element einer Menge von Zahlen, und ein Paar (a, b) ist als Element nie Teilmenge einer Zahlenmenge.

Veranschaulichungen des kartesischen Produkts sind oft in einem (zweidimensionalen, rechtwinkeligen Koordinatensystem gut möglich (vgl. auch **?? ??** ▶**??**). Ist ein Koordinatensystem rechtwinkelig, so nennen wir es »kartesisches Koordinatensystem«, benannt nach dem Mathematiker und Philosophen RENÉ DESCARTES[2], der ein wichtiger Begründer der Analytischen Geometrie war.

Bsp. 5.11

Sei $A := \{0, 1, 2\}$ und $B := \{x, y\}$. Dann ist $A \times B := \{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$.

Bsp. 5.12

Ein Beispiel mit einer Sondernotation ist evtl. aus der Schule bekannt, nämlich: $A := \mathbb{R}$ und $B := \mathbb{R}$, so ist

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2 ,$$

der sogenannte zweidimensionale, reelle Standardvektorraum▶**??** (sprich: »r zwei«).

Zudem wird sich (in der abstrakteren Mathematik) herausstellen, dass das kartesische Produkt zweier Mengen für Rechenoperationen in Mengen (sogenannte Verknüpfungen), wie etwa das Bilden der Summe zweier Zahlen, eine entscheidende Rolle spielt …

2 Latinisierter Name: CARTESIUS, 1596 – 1650: Cogito ergo sum. »Ich denke, also bin ich«

6. Verknüpfungen und Algebra

Eine Verknüpfung verbindet anschaulich gesagt zwei Elemente einer Menge und erzeugt ein neues Element dieser Menge aus ihnen. Diesen Vorgang will man im besten Fall für alle möglichen Elementkombinationen durchführen können. Beispiele kennen wir alle aus der Volksschule: Wir können die Zahlen 1 und 2 mit einem $+$ verknüpfen und erhalten als sogenanntes Verknüpfungsergebnis (»Summe«) die Zahl 3. Etwas mathematischer geschrieben:

$$+(1,2) = 3 \qquad \text{oder} \qquad 1+2=3\,.$$

Grundsätzlich ist zunächst einmal die Reihenfolge der Elemente (hier: Summanden) von Bedeutung. Weiters soll/muss das Verknüpfungsergebnis eindeutig bestimmt sein. Es hätte wenig Sinn, wenn $1+2=3$ und $1+2=4$ wäre. Andere Verknüpfungen sind etwa die Multiplikation oder (passend interpretiert) der Durchschnitt bei Mengen.

Die Algebra ist jenes Themengebiet der Mathematik, das sich mit Verknüpfungen und deren Strukturen und Eigenschaften beschäftigt. Letztendlich ist man auch daran interessiert, Aussagen über die Lösbarkeit von Gleichungen in Abhängigkeit von den algebraischen Strukturen usw. zu erhalten.

6.1. Grundlegende Definitionen

Den Begriff der Verknüpfung führt man meist abstrakt mit einem Platzhalterzeichen $\circ$ (gesprochen: »ring«)[1] ein, der dann je nach Anwendung durch $+$ oder $\cdot$ ersetzt wird.

Definition 6.1: Verknüpfung (Rechenoperation)

Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge M muss folgende Aussage erfüllen:

$$\forall x,y \in M\ \exists! z \in M:\ x \circ y = z\,.$$

In Worten: Für zwei beliebige Elemente x und y aus der Menge M muss es jeweils genau ein Element $z \in M$ geben[a], das das Verknüpfungsergebnis von x und y ist, als Gleichung geschrieben als $x \circ y = z$. Die Reihenfolge der zu verknüpfenden Elemente spielt (zunächst) eine Rolle: $x \circ y$ sowie $y \circ x$ sind verschiedene Rechenoperationen, falls keine weiteren Rechenregeln (Kommutativgesetz) erfüllt sind.

a Es ist zunächst nicht ausgeschlossen, dass sich z von x oder y unterscheiden muss. Beispielsweise ist ja auch mit $M = \mathbb{R}$, $x = 0 = y$ auch $x + y = 0$ und damit $z = 0$.

Damit eine Verknüpfung wohldefiniert ist, muss jedes Verknüpfungsergebnis wieder ein Element der Menge sein. Beispielsweise ist die Rechenoperation $-$ keine wohldefinierte Verknüpfung in diesem Sinne der Definition auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, da beispielsweise der übliche Verknüpfungskandidat von $1-2$ keine natürliche Zahl ist.

1 Vorsicht: Dieses Zeichen hat eine Sonderbedeutung bei Funktionen, wo es die Hintereinanderausführung zweier Funktion f und g beschreibt: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Da die üblichen Zahlenmenge mit den Rechenoperationen $+$ und $\circ$ noch weitere Rechenregeln (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz) erfüllen, geben wir dafür noch allgemeine Definitionen:

Definition 6.2: Kommutativität und Assoziativität

Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge M heißt kommutativ, falls die Reihenfolge der verknüpften Elemente keine Rolle spielt:

$$\forall x, y \in M: \ x \circ y = y \circ x \ .$$

Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge M heißt assoziativ, falls die »Rechenreihenfolge« (durch Klammern festgelegt) keine Auswirkung auf das Verknüpfungsergebnis hat:

$$\forall x, y, z \in M: \ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ .$$

Es ist also egal, ob zuerst $x \circ y$ verknüpft wird und das Ergebnis mit z, oder ob x mit dem Ergebnis von $y \circ z$ verknüpft wird.

Die Assoziativität verdient einige Bemerkungen:

- Falls eine Verknüpfung assoziativ ist, lässt man Klammern gerne weg – beim Berechnen des Verknüpfungsergebnisses darf man sich dann selbst Klammern setzen. Das sei am Beispiel der der Multiplikation
$$3 \cdot 2 \cdot 4 := (3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4)$$
vorgeführt. Bei diesem Beispiel erscheint die Berechnung lächerlich einfach, weil man dieses Vorgehen seit Jahren intus hat. Man sucht sich eine Darstellung aus und berechnet schrittweise:
$$3 \cdot 2 \cdot 4 = (3 \cdot 2) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \ .$$
Falls die Verknüpfung jedoch weniger anschaulich ist oder nicht mit so viel Erfahrungswissen verbunden ist, sollte man wirklich bei jedem Schritt überlegen, ob dieser und jener Schritt jetzt gerechtfertigt ist oder nicht.
- Das Assoziativ-Gesetz erlaubt zunächst nur ein Umklammern bei drei Elementen. Werden mehr Elemente miteinander verknüpft, so liefert aber die schrittweise, mehrfache Anwendung die Erlaubnis, die Klammern wegzulassen. So ist es beispielsweise erlaubt, für $n \in \mathbb{N}$ die Summe Zahlen von 1 bis n ohne Klammern zu schreiben:
$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n := \Bigg(\bigg(\cdots \big((1+2) + 3 \big) + \cdots \bigg) + (n-1) \Bigg) + n \ .$$
- Achtung: Nur weil eine Verknüpfung assoziativ ist, ist die Kommutativität nicht automatisch erfüllt. Das heißt, es gibt auch Verknüpfungen, die assoziativ sind, aber nicht kommutativ. Wichtigstes Beispiel einer nicht-kommutativen Verknüpfung ist die Verkettung (Hintereinanderausführung) von Funktionen.

Wir versuchen nun, den Begriff der Verknüpfung von den Automatismen der üblichen Rechenregeln (z. B. bei den reellen Zahlen) zu lösen.

Einerseits sind diese Automatismen sind sehr nützlich. Sie erlauben, die gedankliche Leistung bzw. das kognitive Hauptaugenmerk auf andere Aspekte von Mathematik bzw. Inhalten zu legen. Beispielsweise muss man sich beim Umgang mit Grenzwerten bei der ϵ-δ-Definition als AnfängerIn auf die logische Struktur konzentrieren, wenn man einen Beweis machen möchte. Die rechnerischen Fähigkeiten müssen dabei von alleine sein, weil man sich im Allgemeinen nicht auf alles gleichzeitig konzentrieren kann. Erst wenn eine Ebene automatisiert ist, kann man sich aktiv mit der darüberliegenden kognitiven Ebene beschäftigen.

Andererseits sind diese Automatismen auch hinderlich. Das ist vor allem dann der Fall, wenn man sich ihrer nicht bewusst ist und sie nicht bewusst »abschalten« kann. Das Problem dabei ist nämlich, dass in den jeweiligen Lehrveranstaltung erst erarbeitet wird, dass die gängigen Rechenregeln überhaupt gelten. Es ist beispielsweise zunächst überhaupt nicht klar, dass in $\mathbb{R}$ die Rechenregel

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

gilt. Um diese Rechenregel zu beweisen, dürfen nur bereits bewiesene Aussagen verwendet werden, was bedeutet, dass man eben ausblenden muss, was man aus dem schulischen Unterricht zwar weiß, aber im Rahmen der Lehrveranstaltung noch nicht wissen darf bzw. kann. Dieser Vorgang des bewussten Abschaltens ist zunächst vergleichsweise schwierig, weil man sich eben die gesamte Schulzeit lang darum bemüht hat, diese Automatismen zu entwickeln. Besonders davon betroffen sind in der Analysis etwa das Rechnen mit reellen Zahlen, der Grenzwert-Begriff sowie das Berechnen von Ableitungen, in der Linearen Algebra die gängigen Rechenregeln für Vektoren.[2]

Bsp. 6.1

Wir betrachten eine Verknüpfung $\diamondsuit$ auf einer Menge $M := \{a, b, c\}$. Die Elemente von M sind nicht näher spezifiziert, d. h. sie müssen keine Zahlen oder Ähnliches darstellen.

Damit die Verknüpfung $\diamondsuit$ wohldefiniert ist, müssen wir für alle möglichen Verknüpfungen zweier Elemente das Verknüpfungsergebnis kennen. Da wir diese noch nicht kennen, müssen wir sie definieren. Das geschieht bei (endlichen) Mengen am einfachsten in Form einer sogenannten Verknüpfungstabelle. Ein Eintrag in einer Zelle ist dabei das Verknüpfungsergebnis aus »Zeile« mit »Spalte« (in dieser Reihenfolge!).

$\diamondsuit$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	b	c

Beispielsweise ist $b \diamondsuit c = a$, aber $c \diamondsuit b = b$. Da daher nicht für alle x und y aus M gilt, dass $x \diamondsuit y = y \diamondsuit x$ ist, ist die Verknüpfung nicht kommutativ. Die Reihenfolge der Elemente spielt beim Verknüpfungsergebnis eine Rolle, wir müssen daher die Reihenfolge beachten.

Da $(b \diamondsuit b) \diamondsuit c = a \diamondsuit c = c$, aber $b \diamondsuit (b \diamondsuit c) = b \diamondsuit a = b$, ist das Assoziativgesetz nicht erfüllt. Wir dürfen daher die Klammern nicht weglassen. Auch Umklammern ist nicht erlaubt.

- Was ist das Verknüpfungsergebnis von

$$(a \diamondsuit b) \diamondsuit \Big(c \diamondsuit ((b \diamondsuit c) \diamondsuit a)\Big)\ ?$$

Da weder das Assoziativgesetz, noch das Kommutativgesetz gilt, müssen wir schrittweise berechnen. Die jeweiligen Verknüpfungsergebnisse müssen wir der Tabelle oben entnehmen:

$$\begin{aligned}\overbrace{(a \diamondsuit b)}^{b} \diamondsuit \Big(c \diamondsuit \big(\overbrace{(b \diamondsuit c)}^{a} \diamondsuit a\big)\Big) &= b \diamondsuit \Big(c \diamondsuit (a \diamondsuit a)\Big) \\ &= b \diamondsuit \Big(c \diamondsuit a\Big) \\ &= b \diamondsuit c = a\ .\end{aligned}$$

Man merkt: Hat man nicht die üblichen Rechenregeln zur Verfügung, ist das Berechnen von Termen im Allgemeinen sehr mühsam. Jeder einzelne Schritt muss dabei überlegt werden.

2 Bei allen anderen wesentlichen Inhalte der Linearen Algebra 1 (im ersten Semester) hat man kaum schulischen Vorwissen. Innere Produkte (Skalarprodukt) wird gewöhnlich erst in der Linearen Algebra 2 behandelt.)

- Bestimme alle Lösungen von $c\diamondsuit x = b$. Wir können c nicht auf die andere Seite bringen, weil wir diese Rechenregel nicht zur Verfügung haben. Wir müssen daher wieder in der Verknüpfungstabelle nachschauen und erhalten die Lösung $x = b$.
- Wir lösen die Gleichung $c\diamondsuit x = a$. Durch die Verknüpfungstabelle stellen wir fest, dass es offenbar keine Lösung gibt. Diese Gleichung lässt sich in M also nicht lösen.
- Wir lösen die Gleichung $x\diamondsuit b = b$. Die Verknüpfungstabelle ergibt, dass sowohl a also auch c Lösungen sind.

Es fällt auf: Wenn eine Verknüpfung nicht die üblichen Rechenregeln erfüllt, so kommt es zu seltsamen Situationen, dass bereits bei einfachen Gleichungen interessante Ergebnisse auftauchen, die man nicht gewohnt ist. Das zeigt umso mehr den Nutzen von den üblichen, vorhandenen Strukturen.

Wir machen noch eine weitere Feststellung in der Tabelle: Das Element a hat offenbar eine Sonderrolle: Egal mit welchem Element es verknüpft wird (und egal von welcher Seite), lässt es das andere Element unverändert. In formaler Notation

$$\forall x \in M : a\diamondsuit x = x\diamondsuit a = x \, .$$

Diese Eigenschaft ist so wichtig, dass man dafür einen eigenen Namen einführt.

6.2. Besondere Elemente

Bei Verknüpfungen interessiert man sich für algebraische Strukturen, die das Berechnen von Termen oder das Lösen vno Gleichungen einfacher machen. Wir können in diesem Rahmen natürlich nur einen kleinen Einblick geben. Für weiterführende Inhalte ist der Begriff der Äquivalenzrelation notwendig.

Definition 6.3: Neutrales Element

Es sei $\circ$ eine Verknüpfung auf M. Ein Element $e \in M$ heißt »neutrales Element«, wenn gilt:

$$\forall x \in M : \; e \circ x = x \circ e = x \, .$$

Ein neutrales Element hat also die Eigenschaft, dass es beim Verknüpfen das jeweils andere Element unverändert lässt.

Eine interessante Frage ist nun, ob es mehrere neutrale Element in einer Menge geben kann. Interessanterweise ist das nicht der Fall. Wir führen einen typischen Eindeutigkeitsbeweis: Wir nehmen an, dass es zwei Elemente mit dieser Eigenschaft gibt, und folgern dann, dass diese beiden Elemente gleich sein müssen. Abstrakt hingeschrieben zeigen wir:

$$P(a) \wedge P(b) \quad \Rightarrow \quad a = b \, .$$

Beweis

Nun zum eigentlichen Beweis. Es seien e und f neutrale Elemente, d. h. es gelten:

$$\forall x \in M : \; e \circ x = x \circ e = x \quad \text{und} \quad \forall x \in M : \; f \circ x = x \circ f = x$$

Wir rechnen nun

$$e \overset{1.)}{=} e \circ f \overset{2.)}{=} f \, .$$

Im Schritt 1.) haben wir verwendet, dass f ein neutrales Element ist, im Schritt 2.) nützen wir aus, dass e ein neutrales Element ist.

□

Damit ist es gerechtfertigt, ab jetzt von »dem« neutralen Element zu sprechen, falls es existiert.

Bsp. 6.2

Man kennt aus seiner bisherigen schulischen Erfahrung zumindest zwei Beispiele für neutrale Elemente: Mit der Verknüpfung $+$ auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist das neutrale Element die Null. Mit der Verknüpfung $\cdot$ (Multiplikation) auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist das neutrale Element die Eins.

Wer Vektorrechnung behandelt hat, kennt den Nullvektor, der ebenfalls die Rolle des neutralen Elements bzgl. der Vektor-Addition einnimmt.

Mit Hilfe des neutralen Elements lassen sich nun weitere Definitionen machen, die es letztendlich erlauben, zielführende Äquivalenzumformungen zu machen und demnach das Gleichungslösen wesentlich vereinfachen.

Definition 6.4: Inverses Element

Sei $\circ$ eine Verknüpfung auf M mit neutralem Element e. Sei nun $a \in M$. Falls es ein Element $b \in M$ mit

$$a \circ b = b \circ a = e$$

gibt, so heißt b »inverses Element zu a«. Im Allgemeinen muss es nicht zu jedem a ein inverses Element geben.

Ähnlich wie beim neutralen Element kann man sich fragen, ob es gerechtfertigt ist, »das« inverse Element zu sagen.[3]

Beweis

Wir zeigen: Falls eine Verknüpfung assoziativ ist, dann ist das inverse Element eindeutig existiert, falls es existiert.

Sei e das neutrale Element und seien b und c inverse Elemente zum Element a. Wie bereits beim Beweis von der Eindeutigkeit des neutralen Elements wollen wir auf die Gleichung $b = c$ hinaus. Wir dürfen dabei nur die Assoziativität sowie die Eigenschaften des neutralen Elements ausnützen. Das Ziel muss es also sein, dass wir eine Gleichung mit c und b finden, und unter Umklammern und Ausnützen des neutralen Elements diese Gleichung zu $b = c$ vereinfachen können.

Wir probieren den Ansatz

$$(b \circ a) \circ c = b \circ (a \circ c) .$$

Da sowohl b als auch c inverse Elemente zu a sind, ergibt sich daraus

$$e \circ c = (b \circ a) \circ c = b \circ (a \circ c) = b \circ e$$

und unter Ausnützung der Eigenschaften von e weiters

$$c = e \circ c = (b \circ a) \circ c = b \circ (a \circ c) = b \circ e = b .$$

Damit konnten wir zeigen, dass $b = c$ sein muss.

$\square$

Aus der Schule kennt man wieder Beispiele und Notationen: Bzgl. der Addition in $\mathbb{R}$ bezeichnet das additiv Inverse Element zu x mit $-x$ und kürzt den Term $y + (-x)$ mit $y - x$ ab. Bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichnet man das multiplikativ inverse Element von x mit x^{-1}, der Term $y \cdot x^{-1}$ wird mit $y : x$, y/x oder $\frac{y}{x}$ abgekürzt.

3 Bei der Verkettung (Hintereinanderausführung) von Funktionen ist das Ganze etwas komplizierter, da die Kommutativität nicht erfüllt ist, und es dadurch notwendig ist, näher darauf einzugehen, ob von links oder rechts verknüpft wird, um das (jeweilige) neutrale Element zu erhalten. Im Lauf des ersten Semesters sollte diese Fußnote hoffentlich Sinn ergeben.

Mit Hilfe der Definitionen von neutralem Element und inversem Element halten wir nun eine erste wichtige Definition fest, die in der Mathematik sehr häufig vorkommt.

Definition 6.5: Gruppe

Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe, falls gilt:

- Die Verknüpfung ist assoziativ.
- Es gibt eine neutrales Element $e \in M$: $\forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$.
- Jedes Element besitzt ein inverses Element in M: $\forall a \in M\ \exists b \in M : a \circ b = b \circ a = e$.

Falls die Verknüpfung $\circ$ zusätzlich kommutativ ist, so heißt die Gruppe »abelsch«, benannt nach dem Mathematiker NIELS HENRIK ABEL.

Auch dieses Mal kennt man wieder Beispiele aus der Schule, etwa $\mathbb{Z}$ mit $+$ oder $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation. Letztendlich sieht man also, dass man viele der aus der Schule bekannten Rechenregeln und Operationen in der Hochschulmathematik wiederfindet, aber auf einem abstrakteren, allgemeineren Niveau behandelt. Für das Lernen kann es immer wieder helfen, sich Aussagen mit diesen konkreten Beispielen (»Repräsentanten«) vorzustellen. Wichtig ist es allerdings, dass man dabei bedenkt, dass die meisten Schulbeispiele über weitere Eigenschaften verfügen. Es ist also notwendig, sein Augenmerk auf die jeweilige Struktur zu legen und die anderen Eigenschaften auszublenden. Es macht vor allem am Beginn Sinn, sich immer wieder die automatisch verwendeten Rechenregeln bewusst vor Augen zu halten, auch wenn es sich vielleicht lästig oder unnötig anfühlen mag.[4] Das abstrakte Verständnis wird dadurch gefordert.

4 Wie gesagt, Mathematiklernen fällt umso leichter, je besser man sich vor Augen hält, dass Sachverhalte nicht einfach von Haus aus so sind. Stattdessen muss jeder Schritt und jede Aussage begründet werden können, auch wenn man längst seit Jahren weiß, *dass* sie gelten – ohne sich vielleicht jemals wirklich die Frage gestellt zu haben, *warum* sie gelten.

7. Die üblichen Zahlenmengen

7.1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ haben eine sehr anschauliche Bedeutung – sie werden z. B. zum Zählen oder zum Durchnummerieren verwendet – auch in der Höheren Mathematik. Vom exakteren mathematischen Standpunkt aus ist das Ganze aber nicht mehr so simpel, wenn es etwa um die Existenz dieser Zahlen oder ihren Rechenregeln geht. Wie zuvor erwähnt gibt es zuerst die intuitive Variante. Die abstraktere aber noch lesenswertere Version gibt es (in Ansätzen) im übernächsten Unterkapitel ...

7.1.1. anschaulicher Zugang

Unter der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ verstehen wir die unendliche Zahlenmenge

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} .$$

Zum Teil ist auch üblich, dass die 0 keine natürliche Zahl ist und die natürlichen Zahlen bei 1 beginnen. Dann schreibt man $\mathbb{N}_0$, wenn die 0 doch enthalten sein soll. Oft macht es wenig Unterschied, ob die 0 enthalten ist, oder nicht – die Menge bleibt ja auch ohne die 0 unendlich. In diesem Skriptum ist die 0 für gewöhnlich enthalten – wir sind hier allerdings nicht so exakt bzw. konsequent. Wer aufmerksam liest (und mitdenkt), sollte merken, wann die 0 zugelassen/sinnvoll bzw. enthalten ist und wann nicht.

Mit den natürlichen Zahlen können wir auch Rechenvorgänge (Verknüpfungen) vollziehen: Wir können sie immer addieren und multiplizieren, allerdings nicht immer subtrahieren oder dividieren, ohne dass wir auf andere Zahlbegriffe (negative Zahlen, Brüche) ausweichen müssen.

Satz 7.1

Seien m, n und k drei beliebige natürliche Zahlen. Dann gelten folgende Gesetze:

- Kommutativ-Gesetze: $m + n = n + m$ und $m \cdot n = n \cdot m$.
- Assoziativ-Gesetze: $(m + n) + k = m + (n + k)$ und $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$
- Distributiv-Gesetz: $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$

Daneben gibt es zwei Zahlen mit besonderen Eigenschaften, nämlich die 0 und die 1.Wir sagen: 0 ist das additiv neutrale Element, 1 das multiplikativ neutrale Element. Denn: Addition von 0 zu einer beliebigen Zahl n »ändert« diese Zahl nicht

$$n + 0 = n$$

und auch die Multiplikation mit 1 ebenfalls nicht:

$$n \cdot 1 = n .$$

Außerdem sind die natürlichen Zahlen geordnet d. h. immer genau eine der drei folgenden Aussagen ist für zwei natürliche Zahlen m und n gültig:

$$m < n$$
$$m = n$$
$$m > n$$

Zudem ist 0 (bzw. 1) die kleinste natürliche Zahl. Allerdings gibt es keine größte natürliche Zahl, da ja zu jeder Zahl n die Zahl $n + 1$ (»Nachfolger« von n) auch eine natürliche Zahl ist, die eben größer ist.

7.1.2. Ausblick: Vollständige Induktion

Ein wichtiges Konzept der natürlichen Zahlen ist die sogenannte vollständige Induktion. Sie ist nützlich, um logische Aussagen $P(n)$, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängen, zu beweisen. Die Formel

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

könnte etwa so eine Aussage $P(n)$ sein. Es geht jetzt darum, die Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Das Prinzip dahinter: Wenn wir die Aussage für $n=1$ beweisen können und dann zeigen können, dass die Aussage für $n+1$ gilt, wenn wir annehmen, dass sie schon für n gegolten hat, dann haben wir gezeigt, dass sie für alle natürlichen Zahlen gilt. Das heißt, wir haben mit Hilfe dieser Schritte gezeigt, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Das ist das Prinzip der vollständigen Induktion (vgl. auch 7.1.3 abstrakter Zugang ▶55). Wir müssen also zeigen:

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Diese Beweismethode wird im Laufe des ersten Semester auf jeden Fall eine Rolle spielen. Eine schöne Metapher für die vollständige Induktion wäre: Stellen wir uns eine Leiter vor, die in den Himmel ragt. Wenn wir wissen, dass die erste Sprosse der Leiter hält, und wir außerdem wissen, dass jede Sprosse hält, wenn die vorige Sprosse gehalten hat, so können wir damit beliebig hoch in den Himmel steigen.

Bsp. 7.1

Als Beispiel beweisen wir die berühmte Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen (vgl. oben):

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) : \qquad 1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

i) Zuerst zeigen wir, dass $P(1)$ gilt: Also für $n=1$ erhalten wir

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2},$$

was offensichtlich gilt. Also haben wir gezeigt, dass die Aussage $P(1)$ gilt.

ii) Nun nehmen wir an, für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist $P(n)$ erfüllt, also es gelte

$$P(n) : \qquad 1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir müssen nun daraus folgern, dass $P(n+1)$ ebenfalls gilt. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\ &\overset{*}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Beim Schritt $*$ haben wir verwendet, dass die Formel für n schon gilt. Damit ist also

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

und wir haben die Aussage $P(n+1)$ erhalten/bewiesen.

Somit gilt die Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7.1.3. abstrakter Zugang

Damit man es einmal gesehen hat und ein wenig ins Nachdenken kommt, dass doch nicht alles so selbstverständlich ist, was man in der Schule gelernt hat, gibt es hier die (berühmte) axiomatische Definition der natürlichen Zahlen, benannt nach dem italienischen Mathematiker GUISEPPE PEANO:

Definition 7.1: Natürliche Zahlen mit Peano-Axiome

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind durch folgende 5 Axiome (Forderungen/Festsetzungen) eindeutig festgelegt bzw. charakterisiert:

- 1 ist eine natürliche Zahl.
- Jeder natürlichen Zahl n ist genau eine natürliche Zahl n' zugeordnet, die der Nachfolger von n genannt wird. In Formeln: $N(n) = n'$.
- 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl. Also $\nexists x \in \mathbb{N} : N(x) = 1$.
- Sind die natürlichen Zahlen n, m verschieden, so sind auch ihre Nachfolger n' und m' verschieden. (Kurz: $n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$). (Wir können auch sagen: Die Nachfolger-Funktion N ist injektiv.▶123)
- Enthält eine (Teil-)Menge M natürlicher Zahlen die Zahl 1 und folgt aus $n \in M$ stets $n' \in M$, so besteht M aus allen natürlichen Zahlen. D. h. $M = \mathbb{N}$. (Prinzip der vollständigen Induktion).

Man beachte: Mit diesen Eigenschaften haben wir erst die Menge der natürlichen Zahlen durch ihre Eigenschaften gefordert, aber noch nicht, ob sie überhaupt existiert und wie man in ihr rechnet! Kurz sei hier die Existenz angeschnitten, die auf der Existenz der leeren Menge $\emptyset$ aufbaut. Wir definieren

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= 0' = \{\emptyset\} \\
2 &:= 1' = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n' = \{0, \dots, n\} = n \cup \{n\}
\end{aligned}$$

In der (modernen) Mathematik ist es so, dass man irgendwo einmal anfangen muss. D. h. wir suchen uns ein (möglichst tiefgehendes) Stoffgebiet und beginnen, grundlegende Definitionen, Charakterisierungen und Forderungen zu machen. Oben haben wir etwa festgesetzt bzw. gefordert, was die natürlichen Zahlen im mathematischen Sinn ausmacht. Man beachte: Diese Eigenschaften haben wir festgelegt, nicht hergeleitet. Wichtig bei Axiomen ist, dass sie einerseits widerspruchsfrei sind, es bei abgeleiteten Aussagen also nicht zu Widersprüchen kommen kann (Also nicht plötzlich bei einer Aussage die Aussage selbst und ihr Gegenteil gleichzeitig wahr sind). Andererseits geht es darum, dass wirklich jedes Axiom notwendig ist und gebraucht, also dass das Axiomensystem minimal ist.

In der Bachelor-Lehrveranstaltung »Grundlagen der Mathematik« wird dieses Thema ausführlicher behandelt. Daneben gibt es für Interessierte (hoffentlich auch angehende Lehrkräfte) auch geeignete Literatur: Üblicherweise heißen die Themengebiete »Grundlagen der Mathematik« (eher philosophisch, logisch angehaucht) bzw. »Zahlentheorie« (eher in Richtung Eigenschaften der Zahlen).

7.2. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Praktische Probleme (Lösbarkeit von Gleichungen, Schulden, Temperaturen, ...) motivieren uns, die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sinnvoll so zu erweitern, sodass die bereits vorhanden Rechenregeln erhalten bleiben (und sich auch auf die neuen Elemente übertragen).

7.2.1. Algebraische Struktur

Mathematische Hauptmotivation ist die uneingeschränkte Lösbarkeit von Gleichungen mit der Unbekannten x der Form

$$a + x = 0$$

für alle natürlichen Zahlen a. So hat etwa die Gleichung

$$3 + x = 0$$

bekanntlich keine Lösung in $\mathbb{N}$.

Definition 7.2: Gegenzahl (Additiv Inverses)
Sei a in $\mathbb{N}$ beliebig. Die eindeutige Lösung x der Gleichung

$$a + x = 0$$

soll es in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ geben. Wir nennen x dann »die Gegenzahl von a« und schreiben dafür $-a$. Insbesondere ist dann die Gegenzahl von x, also $-(-a)$, wieder a selbst, da die Addition kommutativ ist. Als Konvention vereinbaren wir:

$$b - a := b + (-a)\ .$$

Die Subtraktion mit a ist daher nichts anderes als Addition der Gegenzahl. Ist $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so nennen wir a eine positive Zahl und $-a$ eine negative Zahl.

Durch diese Forderung der Existenz einer Lösung zu $a \in \mathbb{N}$ erhalten wir auch die Existenz einer Lösung, wenn a negativ ist. Daher hat eine Gleichung der Form

$$a + x = 0$$

(genau) eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$. Somit können wir auch schreiben

$$\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N}\ \wedge\ -z \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\ .$$

Bemerkung: Statt dem Begriff »Gegenzahl« verwendet man in der abstrakteren Mathematik den Begriff »additiv inverses Element«. Diese Begriffe werden uns im Laufe dieses Skriptums noch öfters begegnen.

Wir müssen nun die Addition noch mit der Multiplikation passen verknüpfen. Intuitiv ist klar, dass $1 \cdot a = a$ und $0 \cdot a = 0$ ist. Da das Distributivgesetz weiterhin erhalten bleiben soll, erhalten wir mit der Gleichungskette

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0\ .$$

Da die Gegenzahl zu a eindeutig ist, erhalten wir den Zusammenhang

$$(-1) \cdot a = -a\ .$$

Anders gesagt: Multiplikation mit (-1) liefert uns die Gegenzahl. Somit ist klar, dass $-$ mal $-$ eine positive Zahl liefert.

Auch die Ordnung (also größer-kleiner-Relationen) bleibt erhalten und mit der der natürlichen Zahlen konsistent. Allerdings verlieren wir die Existenz einer kleinsten Zahl.

7.2.2. Ausblick: Konstruktion von $\mathbb{Z}$ mit Äquivalenzklassen

Exakterweise müssen wir die ganzen Zahlen ausgehend von den natürlichen Zahlen konstruieren. Diese Konstruktion geschieht dabei mit sogenannten Äquivalenzklassen, einem Konzept, das vor allem in der Algebra eine wesentliche Rolle spielt. Um das Ganze halbwegs verständlich bringen zu können, müssen wir etwas ausholen:

Definition 7.3

Wir legen fest: Ein (geordnetes) Paar (a, b) zweier natürlicher Zahlen (wir schreiben auch $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) steht in Relation $\sim$ zu einem zweiten Paar (c, d) natürlicher Zahlen, wenn die Gleichung

$$a + d = c + b$$

erfüllt ist. Wir schreiben dann einfach $(a, b) \sim (c, d)$.

Man beachte, dass wir hier die Gleichung

$$a - b = c - d$$

im Hinterkopf haben, die aber nur für die wenigsten natürlichen Zahlen in $\mathbb{N}$ wirklich Sinn macht. Das Minus-Zeichen ist ja eigentlich noch nicht definiert. Zum Verständnis: Wir betrachten also im Prinzip Zahlenpaare, die die selbe Differenz haben.

Nehmen wir ein paar »konkrete« Zahlenpaare, um das Ganze zu verdeutlichen. Sei $a \geq 1$ und $b \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt

$$(a, 0) \sim (a + b, b) ,$$

da die Gleichung

$$a + b = (a + b) + 0$$

wahr ist. Außerdem gilt mit $b \geq 1$ und $a \in \mathbb{N}$ beliebig: $(0, b) \sim (a, a + b)$, da

$$0 + (a + b) = a + b .$$

Weiters steht $(0, 0)$ in Relation zu (a, a) für beliebiges $a \in \mathbb{N}$, da

$$0 + a = a + 0 .$$

Definition 7.4

Durch die Relation $\sim$ können wir nun zu jedem Paar (a, b) andere Paare finden, die in Relation zu (a, b) stehen. Wir fassen diese Paare zu einer Menge zusammen, schreiben dafür

$$[(a, b)]_\sim := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (a, b) \sim (x, y)\}$$

und nennen diese Menge die Äquivalenzklasse von (a, b).

Es stellt sich heraus, dass wir schon durch die wenigen Äquivalenzklassen

$$\ldots, [(0, 3)]_\sim, [(0, 2)]_\sim, [(0, 1)]_\sim, [(0, 0)]_\sim, [(1, 0)]_\sim, [(2, 0)]_\sim, [(3, 0)]_\sim, \ldots$$

alle denkbaren, verschiedenen Mengen (Äquivalenzklassen) abdecken. Man kann sich nämlich überlegen, dass die Äquivalenzklassen von äquivalenten Paaren die gleiche Menge darstellt, also dass z. B. $[(1, 0)]_\sim = [(2, 1)]_\sim$ ist. Allgemeiner hingeschrieben: Ist $(a, b) \sim (c, d)$, so gilt

$$[(a, b)]_\sim = [(c, d)]_\sim .$$

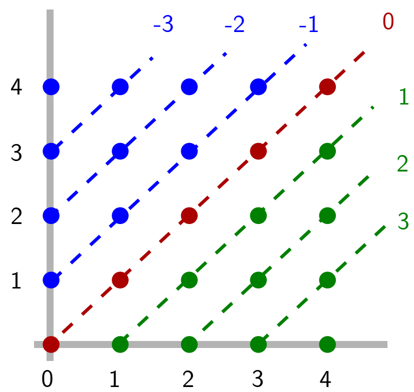
Wir sagen dann: Die Elemente (a, b) und (c, d) sind Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[(c, d)]_\sim$.

Für $a, b \in \mathbb{N}$ führen wir nun für die Äquivalenzklassen folgende Schreibweisen ein: Die Menge $[(a, 0)]_\sim$ schreiben wir vereinfacht als $\tilde{a}$. Die Menge$[(0, b)]_\sim$ schreiben wir vereinfacht als $-\tilde{b}$. Die Menge $[(0, 0)]_\sim$ schreiben wir als $\tilde{0}$. Damit erhalten wir für die obigen Äquivalenzklassen die Schreibweisen

$$\dots, -\tilde{3}, -\tilde{2}, -\tilde{1}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \dots$$

Und weil es mühsam ist z. B. $\tilde{3}$ zu schreiben, schreiben wir einfach nur 3 und haben damit $\mathbb{Z}$ konstruiert!

Skizziert man sich diese Paare in einem zweidimensionalen Koordinatensystem, in dem wir jeweils die Zahlenpaare eintragen – die waagrechte Achse ist für den ersten Eintrag des Paares (n, m), die senkrechte Achse für den zweiten Eintrag –, so erhalten wir folgende Grafik:



Eine ganze Zahl ist dann eine (diskrete) Punktemenge auf einer der $45°$-Geraden. Links oberhalb der ersten Mediane finden wir die negativen Zahlen, rechts davon die positiven Zahlen. Die Punkte auf der ersten Mediane stellt die 0 dar.

Als nächste Schritte müsste man die Addition und Multiplikation aufbauend auf den jeweiligen Operation der natürlichen Zahlen definieren und auf die Paare übertragen. Außerdem müssten wir zeigen, dass die Rechenregeln für die natürlichen Zahlen erhalten bleiben, wenn wir n mit $(n, 0)$ identifizieren ...

7.3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die ganzen Zahlen waren notwendig, um Gleichungen in x der Form $a + x = 0$ lösen zu können. Allerdings reichen diese Zahlen noch nicht aus, um alle Gleichungen in x der Form $q \cdot x = 1$ mit $q \neq 0$ zu lösen. Dafür müssen wir weitere Zahlen hinzufügen:

Definition 7.5: Bruch

Für $q \neq 0$ schreiben wir die Lösung x der Gleichung

$$q \cdot x = 1$$

als q^{-1} oder auch $\frac{1}{q}$ und nennen sie multiplikativ inverses Element von q. Statt dem Produkt $p \cdot q^{-1}$ bzw. $p : q$ schreiben wir auch den Ausdruck $\frac{p}{q}$ und nennen ihn »Bruch« (oder rationale Zahl) mit Zähler p und Nenner q.

Insgesamt wollen wir aber nach wie vor die Verträglichkeit sämtlicher bisherigen Rechenregeln sowie die Ordnung (größer-kleiner) behalten.

Definition 7.6: Menge der rationalen Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Brüche, nämlich

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} .$$

Das Vorzeichen des Bruches ist nach unserer Definition grundsätzlich im Zähler enthalten.

Ein Bruch der Form $\frac{p}{0}$ ist also nicht in den rationalen Zahlen enthalten, weil es die Zahl $\frac{1}{0}$ bzw. 0^{-1} nicht gibt, denn die Gleichung $0 \cdot x = 1$ hat keine Lösung, da $0 \cdot x = 0$ ist für alle x. Aus der Gleichung $1 \cdot 1 = 1$ folgt, dass 1^{-1} bzw. $\frac{1}{1}$ gleich 1 ist. Insbesondere ist dann $p \cdot 1^{-1} =: \frac{p}{1}$ nichts anderes als $p \cdot 1 = p$.

7.3.1. $\mathbb{Q}$ ist ein Körper

Wir versuchen nun ausgehend von den gültigen Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ eine abstrakte Struktur zu definieren, die wir »Körper« $\mathbb{K}$ nennen. Warum macht man diesen Abstraktionsschritt von den Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ zu einem sogenannten Körper? Was bringt das, wenn wir plötzlich nicht mehr über konkrete Elemente, sondern nur mehr über abstrakte Eigenschaften sprechen?

Nun, ein wesentlicher Aspekt der Mathematik ist es, gemeinsame Strukturen und Eigenschaften sichtbar zu machen, weil sich dadurch viele Aussagen und Resultate (oft recht einfach) auf an sich verschiedenartig aussehende Objekte übertragen lassen. Man kann sich durch die Abstraktion häufig auf das Wesentlich konzentrieren und kommt oft weg von mühsamen Strukturen. Man führt den Beweis also allgemein nur anhand der Rechenregeln in Körper und erhält das Resultat dann für alle Mengen, in denen die selben Rechenregeln gelten. Dieses Skriptum wird immer wieder Themen und Beispiele bringen, die verallgemeinerungsfähig sind.

Auf der nächsten Seite sind nun die Rechenregeln angeführt, die einen Körper charakterisieren. Um die in $\mathbb{Q}$ gültigen Rechenregeln zu erhalten, ersetzt man in der folgenden Definition $\mathbb{K}$ durch $\mathbb{Q}$.

Definition 7.7: Körper

Eine nichtleere Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (Addition und Multiplikation) heißt Körper, wenn folgende Rechengesetze erfüllt sind:

- Die Rechengesetze der Addition:

$$\begin{array}{llrcl} (A1) \text{ Assoziativgesetz:} & \forall x,y,z \in \mathbb{K}: & (x+y)+z & = & x+(y+z) \\ (A2) \text{ Kommutativgesetz:} & \forall x,y \in \mathbb{K}: & x+y & = & y+x \\ (A3) \text{ additives neutrales Element:} & \exists 0 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}: & x+0 & = & x \\ (A4) \text{ additives inverses Element:} & \forall x \in \mathbb{K}\ \exists y \in \mathbb{K}: & x+y & = & 0 \end{array}$$

- Die Rechengesetze der Multiplikation:

$$\begin{array}{llrcl} (M1) \text{ Assoziativgesetz:} & \forall x,y,z \in \mathbb{K}: & (x\cdot y)\cdot z & = & x\cdot(y\cdot z) \\ (M2) \text{ Kommutativgesetz:} & \forall x,y \in \mathbb{K}: & x\cdot y & = & y\cdot x \\ (M3) \text{ multiplikativ neutrales Element:} & \exists 1 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbb{K}: & x\cdot 1 & = & x \\ (M4) \text{ multiplikativ inverses Element:} & \forall x \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\ \exists y \in \mathbb{K}: & x\cdot y & = & 1 \end{array}$$

- Der Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation:

$$\begin{array}{llrcl} (D) \text{ Distributivgesetz} & \forall x,y,z \in \mathbb{K}: & x\cdot(y+z) & = & x\cdot y + x\cdot z \end{array}$$

Anmerkung: Für einen Körper muss $0 \neq 1$ sein. Der Körper muss also insgesamt zwei Elemente beinhalten!

Selbstverständlich gibt es außer $\mathbb{Q}$ noch andere Körper. Die Menge $\{0,1\}$ mit passenden Verknüpfungen, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der $\mathbb{R}^2$ mit passenden Verknüpfungen wären Beispiele dafür.

Wir überlegen uns nun anhand der in $\mathbb{Q}$ gültigen Rechenregeln folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcll} \frac{p}{q} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} & \Leftrightarrow & | & \text{Def. 7.5 ▶59} \\ p\cdot q^{-1} = x\cdot y^{-1} & \overset{*}{\Leftrightarrow} & | & \text{(siehe unten)} \\ (p\cdot q^{-1})\cdot q = (x\cdot y^{-1})\cdot q & \Leftrightarrow & | & (M1) \\ p\cdot(q^{-1}\cdot q) = x\cdot(y^{-1}\cdot q) & \Leftrightarrow & | & (M4) \\ p\cdot 1 = x\cdot(q\cdot y^{-1}) & \Leftrightarrow & | & (M3) \\ p = (x\cdot q)\cdot y^{-1} & \overset{*}{\Leftrightarrow} & | & \text{(siehe unten)} \\ p\cdot y = ((x\cdot q)\cdot y^{-1})\cdot y & \Leftrightarrow & | & (M1) \\ p\cdot y = (x\cdot q)\cdot(y^{-1}\cdot y) & \Leftrightarrow & | & (M4) \\ p\cdot y = (x\cdot q)\cdot 1 & \Leftrightarrow & | & (M3) \\ p\cdot y = x\cdot q & & & \end{array}$$

Noch ein Hinweis zum Schritt *: Die Richtung $\Rightarrow$ ist unmittelbar aus der Definition der Gleichheit klar, vgl. auch 11.1 Äquivalenzumformungen ▶88

$$\forall x,y,q: x=y \ \Rightarrow qx = qy\,.$$

Für $\Leftarrow$ haben wir die sogenannte Kürzungsregel verwendet, da $q \neq 0$ ist, also dass gilt:

$$\forall x,y\ \forall q \neq 0: qx = qy \ \Rightarrow x = y\,.$$

Zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{x}{y}$ stellen also genau dann die selbe rationale Zahl dar, wenn die Gleichung

$$p\cdot y = x\cdot q$$

erfüllt ist.[1] Die Rechenmethoden für Brüche gibt es in Abschnitt 8 Rechnen mit »Brüchen« ▶73.

1 Übrigens nimmt man genau diese Gleichung als Ausgangspunkt, um die rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von ganzen Zahlen zu konstruieren. Vgl. 7.2.2 Ausblick: Konstruktion von $\mathbb{Z}$ mit Äquivalenzklassen ▶57

7.3.2. Ausblick: Lücken in $\mathbb{Q}$

Warum macht es trotzdem Sinn, sich nicht mit den rationalen Zahlen zufrieden zu geben? Sie sind geordnet, wir haben hervorragende Recheneigenschaften – was will man mehr? Der Sachverhalt, der uns stört, ist folgender:

$\mathbb{Q}$ hat anschaulich gesprochen »Lücken« in der Zahlengeraden. Wir können zwar zwischen zwei Zahlen a und b immer eine dritte rationale Zahl dazwischen finden, etwa $\frac{a+b}{2}$. Aber auch, wenn wir diesen Vorgang immer und immer wieder ausführen, finden wir Stellen, die nicht »aufgefüllt« sind, also an denen keine rationale Zahl liegen. Anders gesagt: Wir kommen zu Stellen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen, auch wenn wir uns diesen durch Brüche beliebig nahe annähern können. Wir sagen: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, obwohl $\mathbb{Q}$ dicht ist.

Diese Lücken zeigen sich beispielsweise, indem wir versuchen, bestimmte Gleichungen zu lösen:

Bsp. 7.2

Einer der Klassiker dafür ist die Gleichung

$$x^2 = 2\,,$$

deren positive Lösung wir (in $\mathbb{R}$) mit $\sqrt{2}$ bezeichnen. Wie können wir uns nun sicher sein, dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar ist? Es folgt ein Argumentationsprinzip, das als »Beweis durch Widerspruch« bezeichnet wird. Diesen Widerspruchsbeweis haben bereits die Alten Griechen (Aristoteles, Euklid) gekannt, die als Begründer der deduktiven, beweisenden Mathematik gelten. Vielleicht kennt der eine oder die andere dieses Beispiel auch aus den eigenen Schulbüchern ...

Wir wollen zeigen: $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.

Wir nehmen an: $\sqrt{2}$ ließe sich doch als Bruch darstellen. Daraus wollen wir dann auf einen logischen Widerspruch kommen.

Sei also

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

derart, dass der Bruch schon gekürzt ist. Dann können p und q nicht gleichzeitig gerade sein, sonst könnte man ja noch einmal kürzen.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \sqrt{2} && \Rightarrow \\ \left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 2 && \Rightarrow \\ p^2 &= q^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Damit muss aber p^2 eine gerade Zahl, da durch 2 teilbar. Damit das möglich ist, muss p selbst eine gerade Zahl sein, etwa $p = 2n$. Damit erhalten wir aber

$$\begin{aligned} (2n)^2 &= q^2 \cdot 2 && \Rightarrow \\ 2n^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Also ist auch q^2 eine gerade Zahl, weswegen auch q selbst gerade sein muss.

Wir haben also herausgefunden, dass sowohl p als auch q gerade sein müssen, wir sie also noch kürzen können. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass p und q gekürzt waren. Also kann $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar sein.

Eine dieser Auswirkungen der Lücken ist, dass Folgen von rationalen Zahlen keinen rationalen Grenzwert haben müssen, auch wenn die Folgenglieder immer näher und näher zusammenrücken. Anders gesagt: Nicht jede rationale Folge hat ihren Grenzwert(kanditaten) in $\mathbb{Q}$.

Bsp. 7.3

Eine Zahlenfolge▶162 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abfolge von Zahlen in einer vorgegebenen Reihenfolge . Wir schreiben dafür auch noch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \ .$$

Wir betrachten die rekursive Zahlenfolge mit $a_0 := 2$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \ .$$

So eine Vorschrift nennen sich Bildungsgesetz der Folge. Dann ist

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{17}{12}, \ldots) \ .$$

Man kann zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, also dass

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Weiters lässt sich zeigen, dass die Folge nach unten beschränkt ist: Es gibt also eine (reelle bzw. rationale) Zahl $M > 0$, sodass

$$M < a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton (fallend) ist, hat sie – laut Satz 18.2 ▶168 – auf jeden Fall einen Grenzwert in $a \in \mathbb{R}$. Anschaulich können wir durch die Monotonie und Beschränktheit argumentieren, dass unendlich viele Folgenglieder nur wenig Platz haben und sich in einem bestimmten Bereich häufen müssen. In jeder beliebig kleinen Umgebung einer besonderen Stelle, dem Grenzwert(kandidaten), (größer als M) müssen unendlich viele Folgenglieder beliebig nahe beieinander sein. Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert a hat, so schreiben wir dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Anschaulich klar ist, dass die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ den selben Grenzwert haben muss, also dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a \ .$$

Setzen wird das ins Bildungsgesetz von ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \qquad \Leftrightarrow \\ a^2 &= 2 \end{aligned}$$

Eine negative Lösung können wir ignorieren, da alle Folgenglieder positiv waren und wir nur addiert und durch positive Zahlen dividiert haben, wodurch der Grenzwert ≥ 0 sein muss.

Der Grenzwert-Kandidat wäre also $\sqrt{2}$, was aber keine reelle Zahl ist, wie wir festgestellt haben. D. h. eigentlich hätten wir eine Zahl gefunden, die als Grenzwert passen würde, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Das ist ein sinnvoller Grund, neue (irrationale) Zahlen zu $\mathbb{Q}$ hinzuzufügen.

Nachsatz: Diese Formel nennt sich Heron'sche Formel. Schon die alten Griechen haben damit durch Iteration (Wiederholung) Wurzeln wie die Zahl $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen angenähert. Interessanterweise ist dieser Algorithmus eng verwandt mit dem Newtonverfahren▶98 ...

7.4. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Im letzten Ausblick haben wir festgestellt, dass $\mathbb{Q}$ zwar alle Eigenschaften und Rechenregeln eines sogenannten Körpers▶60 erfüllt, aber trotzdem noch Lücken auf der Zahlengeraden bleiben. Diese letzten Lücken wollen wir noch beseitigen – die Ordnung soll aber erhalten. Die Menge, die dabei entsteht bzw. die wir dafür brauchen, nennen wir die Menge der »reellen Zahlen« $\mathbb{R}$. Das Kapitel 7.4.3 Ausblick: Konstruktion bzw. Axiomatische Definiton ▶65 gibt einige vergleichsweise schwierigen Ideen, wie wir für das Auffüllen der Lücken aus mathematischer Sicht vorgehen können ...

7.4.1. Eigenschaften

Satz 7.2

Die Menge reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper▶60. Außerdem ist $\mathbb{R}$ vollständig, d. h. vereinfacht gesagt, $\mathbb{R}$ hat keine Lücken mehr.

Zudem lässt sich die Menge der reellen Zahlen nicht mehr gewinnbringend erweitern, ohne die Ordnung zu verlieren.

Um zu verdeutlichen, wie die Eigenschaften der reellen Zahlen genützt werden, um neue Erkenntnisse zu erhalten, beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 7.3: Produkt-Null-Satz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und es gelte $a \cdot b = 0$. Dann git: $a = 0 \vee b = 0$.

Beweis

Wir führen folgenden Beweis mittels Fallunterscheidung durch. Folgende Möglichkeiten für a und b wären denkbar:

i) $a = 0$ und $b = 0$.
ii) $a = 0$ und $b \neq 0$.
iii) $a \neq 0$ und $b = 0$.
iv) $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Es ist klar, dass immer einer dieser Fälle eintreten muss – es muss natürlich in Abhängigkeit von a und b nicht immer der selbe sein. Falls die Fälle **i)** bis **iii)** eintreten, widerspricht das dem obigen Satz nicht, sondern sie erfüllen seine Aussage. Wir zeigen nun, dass Fall **iv)** nicht eintreten kann:

Wir starten mit $a \cdot b = 0$ und multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Element $a^{-1} \in \mathbb{R}$, dass es gibt, da $a \neq 0$ ist. Die Gleichung bleibt dadurch wahr:

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$$

Aufgrund des Assoziativgesetzes dürfen wir umklammern, durch die Eigenschaft der 0 erhalten wir

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \,.$$

Da a^{-1} das multiplikativ Inverse zum Element a ist (und damit $a^{-1} \cdot a = 1$ gilt), erhalten wir

$$1 \cdot b = 0$$

und wegen der Eigenschaft der 1 als multiplikativ neutrales Element die Gleichung

$$b = 0 \,.$$

Wir konnten also zeigen, dass $b = 0$ ist. Die Voraussetzung war allerdings, dass $b \neq 0$ ist. Somit haben wir einen Widerspruch erhalten und müssen die Annahme fallen lassen, dass sowohl $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gleichzeitig eintreten kann. Dieser Fall ist somit unmöglich, daher muss immer zwingend einer der anderen drei Fälle eintreten, was die Aussage des Satzes ist. □

Weitere Rechenregeln, die auf den grundlegenden Rechenregeln der reellen Zahlen wie Addition und Multiplikation (→ Körper) aufbauen, werden wir im Abschnitt III Rechenmethoden für reelle Zahlen & Variablen ▶72 näher betrachten.

7.4.2. Ausblick: Ordnung, Ordnungsrelationen und weitere Axiome

Bisher haben wir von Ordnung immer in einem sehr anschaulichen Sinn (→ Zahlengerade) gesprochen, der intuitiv klar war. In diesem Abschnitt soll das Bisherige exaktifiziert festgehalten werden:

Definition 7.8: Ordnungsrelation

Sei M eine Menge. Eine (totale) Ordnung (bzw. Ordungsrelation) $\leq$ bringt je zwei Elemente $x, y \in M$ in Beziehung zueinander. Es gilt also $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Eine Ordnungsrelation erfüllt (per Definition) folgende Eigenschaften (Ordnungsaxiome):

$(O1)$	Reflexivität	$\forall x, y \in M:$	x	$\leq$	x
$(O2)$	Anti-Symmetrie	$\forall x, y \in M:$	$x \leq y \wedge y \leq x$	$\Rightarrow$	$x = y$
$(O3)$	Transitivität	$\forall x, y, z \in M:$	$x \leq y \wedge y \leq z$	$\Rightarrow$	$x \leq z$

Auf den reellen Zahlen haben wir so eine Ordnung $\leq$, die sogar mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad & x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad & x \leq y \wedge 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz \end{aligned}$$

Außerdem hat $\mathbb{R}$ eine Eigenschaft[2], die sich »archimedisch geordnet« nennt:

$$\forall a, b, \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : na > b$$

Eine wichtige Folgerung davon ist, dass es zu jedem reellen $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \, .$$

Darüber hinaus gilt folgender Satz:

Satz 7.4

Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der folgenden Eigenschaft

$$\forall \epsilon > 0 : x < \epsilon$$

Dann gilt: $x = 0$.

Dieser merkwürdig anmutende Satz sagt aus: Es gibt keine unendlich kleinen Zahlen. Wann immer wir eine nicht negative Zahl x haben, die kleiner ist als alle beliebigen anderen positiven Zahlen, so muss $x = 0$ sein. Dieser Satz ist auch historisch gesehen interessant, wenn man bedenkt, dass lange um den Begriff der Unendlichkeit bzw. des Unendlich-Kleinen gerungen wurde. Insbesondere bei der Eindeutigkeit von Grenzwerten etc. geht dieser Satz wesentlich in die Beweise ein. Mehr dazu lernt man in den Analysis-Lehrerveranstaltungen.

2 Falls $\mathbb{R}$ axiomatisch definiert ist, legt man diese Eigenschaft als »archimedisches Axiom« fest.

7.4.3. Ausblick: Konstruktion bzw. Axiomatische Definiton

Im Folgenden werden wir einige mathematischen Methoden anschneiden, die zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ führen. Andererseits halten wir auch eine Vorgehensweise fest, die nicht auf Konstruktion beruht, sondern auf Axiomen, also auf Forderungen bzw. Festlegungen.

Cauchy-Folgen

Eine Cauchy-Folge ist eine Folge▶162, deren Folgenglieder immer näher zusammenwandern. Wir betrachten nun eine rationale[3] Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$. Dann gilt per Definition:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{1}{k}\ .$$

D. h. zu jeder noch so kleinen Zahl $\frac{1}{k}$ gibt es einen Index N, sodass alle hinteren Folgenglieder jeweils näher zusammenliegen als $\frac{1}{k}$. Die Folge, die im Kapitel 7.3.2 Ausblick: Lücken in $\mathbb{Q}$ ▶61 betrachtet wurde, wäre z. B. so eine Folge.

Wir sagen nun: Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentieren nun die selbe reelle Zahl, wenn die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge darstellt, also $a_n - b_n \to 0$ geht. Im Endeffekt arbeiten wir also wieder mit Äquivalenzklassen▶57. Eine rationalen Zahl q ist dann ebenfalls in den reelle Zahlen enthalten, weil wir die Äquivalenzklassen der Form

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$$

mit $a_n = q \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (also konstante Folgen) mit der Zahl q identifizieren. Darüber hinaus können wir nun festlegen:

$$\sqrt{2} := [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$$

mit $a_0 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

und wir haben damit eine irrationale Zahl definiert.

Dedekind'sche Schnitte

Eine andere (vereinfacht gebrachte) Variante ist: Ausgehend von der Idee, dass es Lücken in $\mathbb{Q}$ gibt, können wir die (rationale) Zahlengerade immer teilen in einen linken Teil und einen rechten Teil (= Schnitte). Und jedem Paar von Schnitten ordnen wir nun jene (reelle) Zahl zu, die zwischen diesen Mengen liegt.

Beispielsweise ist

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 \geq 2\}$$

und

$$M_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \vee x \leq 0\}$$

das Paar von Schnitten, dass die Zahl $\sqrt{2}$ darstellt.

3 Die Definition einer reeller Cauchy-Folgen darf ja bereits reelle Zahlen verwenden und wir legen daher fest: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$.

Axiomatische Definition der reellen Zahlen

Neben diesen konstruktiven Zugängen, in den die Reellen Zahlen ausgehend von den wenigen Axiomen der natürlichen Zahlen Stück für Stück gebastelt werden, kann man auch den umgekehrten Weg gehen. Man kann die reellen Zahlen axiomatisch einführen, indem man die sie charakterisierenden Rechenregeln und Gesetze ($\rightarrow$ Körper, Ordnung, Vollständigkeit) von vornherein fordert (also axiomatisch festlegt). Die (strukturuell) eindeutige Menge, die dann diese Axiome erfüllt, nennt man $\mathbb{R}$. Zusätzlich benötigt man dann noch die (axiomatische) Definition der natürlichen Zahlen (als besondere Teilmenge von $\mathbb{R}$) und kann Schritt für Schritt die anderen Zahlenmengen einführen. Die jeweiligen Verknüpfungen und Rechenregeln braucht man dann z. B. für $\mathbb{Q}$ nicht mehr herzuleiten, da sich diese einfach auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ übertragen.

In den meisten Vorlesungen der Analysis wird dieser Zugang gewählt, da er sowohl kürzer, als auch einfach von seiner Struktur her ist.

7.5. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Eigentlich sind wir mit den reellen Zahlen weitgehend zufrieden: Sie sind ein Körper ($\longrightarrow$ übliche Rechenregeln), sie sind vollständig (lückenlos) und sie lassen sich allesamt ordnen. Warum macht es also Sinn, zu den reellen Zahlen noch weitere Zahlen hinzu zu fügen? Wieder haben wir eine algebraische Motivation ...

Betrachten wir die vergleichsweise simple Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Schon diese einfache Gleichung hat in $\mathbb{R}$ bekanntlich keine Lösung. Will man solche einfachen (polynomialen) Gleichungen lösen können, so müssen wir zwingend neue Zahlen zulassen bzw. hinzufügen. Insgesamt wollen wir also eine Menge, die »algebraisch vollständig« ist.[4] Es wird sich zeigen, dass das aber auf Kosten der Ordnung geht.

Definition 7.9

Wir definieren die Zahl i (imaginäre Einheit) als eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0\,.$$

Damit gilt also $i^2 = -1$. Dann definieren wir die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \supsetneqq \mathbb{R}\,.$$

Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ heißt a der Realteil von z (auch $\mathrm{Re}(z)$), b der Imaginärteil ($\mathrm{Im}(z)$). Statt $0 + ib$ schreiben wir einfach ib, statt $a + i0$ einfach a.

7.5.1. Rechnen mit komplexen Zahlen

Da wir die üblichen Rechenregeln und die Eigenschaft eines Körpers▶60 (Distributivgesetz etc.) erhalten wollen, ergeben sich für die Addition und Multiplikation folgende Rechenregeln, die die Rechnungen in $\mathbb{R}$ respektieren (also unverändert lassen):

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + ib$ und $z_2 = u + iv$ mit $a, b, u, v \in \mathbb{R}$.

Die Summe von z_1 und z_2 ist

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (u + iv) = (a + u) + i(b + v)$$

Das Produkt von z_1 mit z_2 ist

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (u + iv) = au + iav + ibu + i^2 bv = (au - bv) + i(av + bu)\,.$$

Bsp. 7.4

Seien für $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = -2 + 2i$ gegeben. Dann ist

$$z_1 + z_2 = (3 - i) + (-2 + 2i) = (3 - 2) + i(-1 + 2) = 1 - i\,.$$

Das Produkt ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 - i) \cdot (-2 + 2i) = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 2i - i \cdot (-2) - i \cdot 2i = \\ &= -6 + 6i + 2i - 2i^2 = -6 + 2 + 8i = -4 + 8i\,. \end{aligned}$$

Und der Quotient von z_1 und z_2 vereinfacht sich zu

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{-2 + 2i} = \frac{(3 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} = \frac{1 - i}{(-2)^2 - (2i)^2} = \frac{1 - i}{4 + 4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i\,.$$

4 Mehr dazu unter 11.4.1 Der Fundamentalsatz der Algebra – Zerlegung in Linearfaktoren ▶94 und 11.7

Satz 7.5

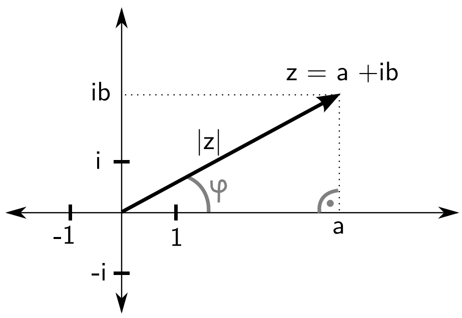
Das additiv neutrale Element in $\mathbb{C}$ ist die Zahl $0 + i0$ bzw. 0, das multiplikativ neutrales Element die Zahl $1 + i0$ bzw. 1.

Zur Zahl $z = a + ib$ ist das additive inverse Element (also $-z$ bzw. $-(a + ib)$) die Zahl $(-a) + i(-b)$ sowie für $z \neq 0$ ist das multiplikativ inverse Element die Zahl

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \, .$$

7.5.2. Geometrische Anschauung

CARL FRIEDRICH GAUSS, dem »Fürst der Mathematik«, dürfen wir für eine geometrische Interpretationen der komplexen Zahlen danken. Diese lassen sich nämlich als Ebene interpretieren (»Gauß'sche Zahlenebene« oder komplexe Zahlenebene), in der die x-Achse die reelle Zahlengerade darstellt, wo der Realteil aufgetragen wird. Auf der y-Achse, die rechtwinkelig auf die x-Achse steht, wird der Imaginärteil aufgetragen (imaginäre Achse). Wir haben also ein Koordinatensystem für die Zahlen $a + ib$ bekommen, in das wir die Punkte (a, b)eintragen:



Des Weiteren lassen sich auch die Rechenvorgänge wie die Addition geometrisch interpretieren – wir können die Menge der komplexen Zahlen mit dem Vektorraum▶205 $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Demnach entspricht jede komplexe Zahl einem Pfeil in der Ebene. Dahingehend lässt sich auch die Länge eines solchen Pfeiles messen. Für die Zahl $z = a + ib$ definieren wir den Betrag von z als die geometrische Länge durch den Satz des Pythagoras als

$$|z| := r = \sqrt{a^2 + b^2} \, .$$

Fixieren wir zudem die positive x-Achse, so können wir auch den Winkel zwischen diesem Strahl und der Zahl z erhalten. Ein Winkel ist positiv (mathematisch positive Orientierung), wenn wir gegen den Uhrzeigersinn vorgehen. Der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ heißt dann Argument von z ($\arg(z)$). Die Zahl $z = a + ib$ lässt sich dadurch auch durch das Paar (r, φ) charakterisieren. Wir sprechen dann von Polarkoordinaten. Außerdem gilt dann

$$z = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{a} + i \cdot \underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_{b} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \, ,$$

was durch die Skizze auf der vorigen Seite und die Definition von sin und cos (am Einheitskreis▶148) anschaulich nachvollziehbar ist.

7.5.3. Ausblick: Abstrakte Konstruktion

Auch wie für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ gibt es wieder einen kleinen Ausblick, wie $\mathbb{C}$ konstruktiv eingeführt werden kann. Dafür betrachten wir die Menge

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\} ,$$

den (vielleicht aus der Schule bekannten) zweidimensionalen Standard-Vektorraum▶205. Auf dieser Menge definieren wir nun folgende Rechenoperationen:

Definition 7.10

Wir führen eine Addition ein: Die Summe von z_1 und z_2 legen wir fest durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

und wir definieren auch eine Multiplikation, nämlich: Das Produkt von z_1 mit z_2 definieren wir durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xa - by \\ xb + ya \end{pmatrix} .$$

Wir stellen fest:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a \\ 0 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d. h., dieser Vektor übernimmt die Rolle des additiv neutralen Elements. Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a - 0 \cdot b \\ 1 \cdot b + 0 \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Dieser Vektor übernimmt also die Rolle des multiplikativ neutralen Elements. Interessanterweise ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Weiters gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} .$$

Nun führen wir noch folgende Schreibweisen ein:

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} =: a$$

Diese »Identifikation« macht Sinn, weil Operationen mit Elementen dieser Gestalt diese Gestalt erhalten (Nachrechnen!). Vom algebraischen Standpunkt her (Rechenregeln etc.) unterscheiden sich die obigen beiden Ausdrücke (links der Vektor, rechts die reelle Zahl) nicht, weswegen diese Notation Sinn macht. Damit erhalten wir

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nun definieren wir noch

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist für alle $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \cdot i$$

und insbesondere bekommen wir für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + i \cdot b$$

und es gilt mit den bisherigen Notationen

$$i^2 = -1$$

Damit haben wir also ausgehend vom $\mathbb{R}^2$ die komplexen Zahlen konstruiert und am Ende passende (konsistente) Schreibweisen eingeführt, um die übliche, gängige Darstellung zu erhalten.

Teil III.

Rechenmethoden für reelle Zahlen & Variablen

Dieser Abschnitt ist im Gegensatz zum vorigen Abschnitt weniger abstrakt, dafür um Einiges angewandter. Während im vorigen Kapitel auch ein grundlegender, vergleichsweise strenger und abstrakter Zugang zu den verschiedenen Zahlenmengen und Rechenregeln gewählt wurde, steht in diesem Abschnitt auch das handwerkliche »Rechnen« im Zentrum. Es geht also darum – wie wir es aus der Schule gewohnt sind – mit Brüchen zu rechnen, Terme zu vereinfachen oder bekannte (binomische) Formeln anzuwenden. Mängel oder Defizite bezüglich dieser Thematiken haben für (angehende) Mathematik-Studierende keine Berechtigung und müssen/sollten vor Studienbeginn behoben werden. Für die meisten sollte dieser Abschnitt wenig Neues beinhalten. Manches mag eingerostet sein – die Chance zum Auffrischen soll wahrgenommen werden. Gleich vorweg: Wer Mathematik studieren möchte, muss Bruchrechnung und den Umgang mit Hochzahlen beherrschen! Taschenrechner, Dezimalschreibweise und Runden sind definitiv kein adäquater Ersatz – vor allem nicht im Hinblick auf Klausuren und Prüfungen, bei denen häufig keine Taschenrechner (egal welcher Art) erlaubt sind!

Daneben mag das Kapitel mit den Hochzahlen für manche doch ein wenig aufbauender und konsequenter sein als aus der Schule gewohnt. Durch das Vorwissen aus der Schule sollte es dennoch unproblematisch sein. Wir versuchen dadurch, ein erstes Bewusstsein über einen schrittweisen Aufbau vieler mathematischer Sachverhalte (und Definitionen) zu geben, was das Wesen der (wissenschaftlichen) Mathematik prägt. Bei den Hochzahlen mit irrationalen Exponenten zeigt sich (wieder einmal), wie vergleichsweise anspruchsvoll der Umgang die reellen Zahlen eigentlich ist.

Noch eine Vorbemerkung. Es wird vorausgesetzt, dass das Distributivgesetz, Assoziativgesetz (Rechenregeln für Klammern) sowie das Kommutativgesetz beherrscht werden. Diese Rechengesetze sind in Def. 7.7 ▶60 zusammengefasst.

8. Rechnen mit »Brüchen«

Die folgenden Rechenregeln betreffen nicht nur (rationale) Brüche wie $\frac{2}{3}$, sondern auch allgemeinere Zahlen wie $\frac{\sqrt{2}}{-0.5}$ und gelten auch für (reelle) Ausdrücke mit Variablen. Um den Zusammenhang mit dem vorigen Kapitel herzustellen:

Definition 8.1: (reeller) Bruch

Mit dem Ausdruck $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ meinen wir die Zahl ab^{-1}, also das Produkt von a mit dem multiplikativ inversen Element von b, das eben mit b^{-1} bezeichnet wird.

Falls es nur um rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geht, wird das explizit thematisiert.

Aus Zeit- und Platzgründen verzichten wir weitgehend auf lange Begründungen oder Herleitungen. Die daran Interessierten können diese zumindest für rationale Zahlen in den Mathematik-Schulbüchern aus ihrer Hauptschulzeit oder der Gymnasium-Unterstufe nachlesen – für reelle Zahlen werden die Rechenregeln für gewöhnlich in einer Analysis-Vorlesung bewiesen. Des Weiteren verzichten wir auf an den Haaren herbeigezogenen Textbeispiele a lá Schulbuch und beschränken uns auf rein mathematische Angaben und den Rechenweg an sich.

8.1. Multiplikation und Division

Satz 8.1: Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden multipliziert, indem Zähler mit Zähler ($\rightarrow$ Zähler des Produkts) multipliziert und Nenner mit Nenner ($\rightarrow$ Nenner des Produkts) multipliziert werden:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ab}{cd} \,.$$

Exemplarisch wird hier gezeigt, wie sich solche Formeln mit den vorhanden Definitionen (siehe Def. 8.1 ▶73) und den Rechenregeln in einem Körper▶60 beweisen lassen:

Beweis

Wir verwenden im folgenden das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz und wenden die oben eingeführte Definition der Schreibweise für Brüche an. Nach $(M4)$ und der üblichen Schreibweise für das multiplikativ Inverse Element ist bekanntlich $(bd)(bd)^{-1} = 1$. Andererseits gilt durch $(M1)$, $(M2)$, $(M3)$ und $(M4)$:

$$(bd)(b^{-1}d^{-1}) = bb^{-1}dd^{-1} = 1 \cdot 1 = 1 \,.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des inversen Elements gilt daher die Beziehung

$$(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1} \,.$$

Daraus folgt, dass

$$(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)((bd)^{-1}) \,.$$

Umgeschrieben auf Bruchschreibweise erhalten wir damit die zu zeigende Behauptung, nämlich

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \,.$$

□

Ein »Spezialfall« ist der folgende: $a \in \mathbb{R}$ und $b = 1$:

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} \,.$$

Bsp. 8.1

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{3x}{2y} \cdot \frac{\sqrt{7}}{-4} = \frac{3x \cdot \sqrt{7}}{2y \cdot (-4)} = \frac{3x \cdot \sqrt{7}}{-8y} \,.$$

Bemerkung: Ein negatives Vorzeichen in einem Bruch darf (bekanntlich) »verschoben« werden:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \,.$$

Auch die Herleitung dieser Rechenregel geschieht ähnlich zu dem vorigen Beweis.

Satz 8.2: Division von Brüchen

Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit seinem Kehrwert multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \,.$$

Der Kehrwert eines Bruches $\frac{a}{b}$ ist dabei der Bruch $\frac{b}{a}$, also sein multiplikativ Inverses (vgl. Def. 7.7 ►60), denn:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1 \,.$$

Da das Divisionszeichen : synonym für den Bruchstrich verwendet wird, lösen sich sogenannte Doppelbrüche dadurch wie folgt auf:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ac}{bd} \,.$$

Der bekannte Spruch dazu: »Außen mal Außen (→ Zähler), Innen mal Innen (→ Nenner))«.

8.2. Erweitern und Kürzen

Satz 8.3: Erweitern

Für $c \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc} \,.$$

Diese Rechenregel nennt sich »Erweitern«. Die Rechenschritte in der Mitte schreibt man häufig nicht hin. Auch die »Umkehrung« des Erweiterns ist ein gängiger Rechenschritt und wird »Kürzen« genannt. Wichtig dabei ist, dass Zähler und Nenner des Bruches jeweils als Faktoren vorliegen:

Satz 8.4: Kürzen

Für $c \neq 0$ gilt:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} .$$

Auch hier führt man die Überlegungen in der Mitte häufig nicht schriftlich aus, sondern gibt gleich das gekürzte Ergebnis wider. Der gängige Spruch »Durch Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen« spiegelt nicht wirklich gut wieder, wann kürzen erlaubt ist. Besser wäre etwas wie: »Der gleiche Faktor im Zähler und Nenner? Weg mit ihm, denn so kürzen Könner!«

Bsp. 8.2

$$\frac{6}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} .$$

$$\frac{2uvw(x-y)}{(x-y)3(x+y)v} = \frac{2uw \cdot v(x-y)}{3(x+y) \cdot v(x-y)} = \frac{2uw}{3(x+y)} .$$

(Für gewöhnlich wird nicht umgeordnet. Hier wurde es nur gemacht, um den Zusammenhang zur Rechenregel oben zu verdeutlichen, mit $a = 2uw$, $b = 3(x+y)$ und $c = v(x-y)$.

Anmerkung: Um Kürzen zu können (bzw. um es einfacher zu sehen), ist es eine brauchbare Strategie, Zähler und Nenner in Faktoren zu zerlegen: Für natürliche bzw. ganze Zahlen kann das mittels Primfaktorzerlegung (siehe unten) geschehen. Für Ausdrücke mit Variablen ist Herausheben (also die rückwärtige Anwendung des Distributivgesetzes) das passende Vorgehen.

8.3. Exkurs: Primfaktorzerlegung

Satz 8.5: Primfaktorzerlegung

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl echt größer als 0. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und (paarweise verschiedene) Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$, sodass

$$n = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{h_{m-1}} \cdot p_m^{h_m} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{h_j}$$

mit $h_1, \ldots h_m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Diese Darstellung von n nennt sich Primfaktorzerlegung und ist eindeutig.

Das Zeichen $\prod$ ist ein großes π und steht für »Produkt«. Die Notation ist vergleichbar mit dem Summenzeichen▶134. Falls nicht (oder nicht mehr bekannt):

Definition 8.2: Primzahl

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. 1 ist also keine Primzahl, 2 ist demnach die kleinste.

Bsp. 8.3

Die Primfaktordarstellung von 8 erhält man durch

$$8 = 2^3 .$$

Also ist $m = 1$ mit $p_1 = 2$ und $h_1 = 3$.

Die Primfaktordarstellung von 12 erhält man durch

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1 .$$

Also ist $m = 2$ mit $p_1 = 2$, $h_1 = 2$ und $p_2 = 3$ und $h_1 = 1$.

In der Praxis kann man systematisch die Primzahlen beginnend mit 2 durchgehen. Man dividiert mit einer Primzahl solange, bis kein ganzzahliges Ergebnis mehr herauskommt. Dann probiert man die nächste Primzahl.

8.4. Addition und Subtraktion

Satz 8.6: Addition/Subtraktion von Brüchen

Brüche werden nach der folgenden Rechenregel addiert bzw. subtrahiert:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

Merkregel: Beim Addieren und Subtrahieren muss auf gemeinsamen Nenner gebracht werden. Dieser muss aber nicht unbedingt das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner sein.

Bsp. 8.4

Zur Illustration zeigen wir den gesamten Rechengang:

$$\frac{-2}{5} + \frac{7}{8} = \frac{(-2) \cdot 8}{5 \cdot 8} + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{(-2) \cdot 8 + 7 \cdot 5}{5 \cdot 8} == \frac{-16 + 35}{40} = \frac{19}{40}$$

Bsp. 8.5

$$\frac{\sqrt{2}}{-4} - \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot (-4)}{(-4) \cdot 3} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 28}{-12} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 28}{12}$$

9. Hochzahlen

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit sogenannten Hochzahlen (Exponenten) und ihren Rechenregeln. Wir werden die Rechenregeln für Hochzahlen halbwegs systematisch aufbauen. Es wird sich zeigen, dass dieser vergleichsweise aufwendig ist, will man schlüssig vorgehen. Dies wird für gewöhnlich in einer Analysis-Vorlesung gemacht.

9.1. Rekursive Definition der n-ten Potenz

Definition 9.1

Die n-te Potenz von a, kurz a^n wird wie folgt definiert:

$$a^0 := 1, \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad n \in \mathbb{N}$$

a heißt Basis, n nennt sich Exponent (Hochzahl).

Bei dieser Definition wird ein sogenanntes rekursives Bildungsgesetz verwendet. Die $n+1$-te Potenz von a errechnet sich aus der n-ten Potenz, indem diese mit a multipliziert wird. Insgesamt ergibt sich also:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a\,.$$

Anschaulich aufgeschrieben ist einfach $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$.

9.2. Negative, ganzzahlige Hochzahlen

Aus der Definition von der n-ten Potenz von a mit natürlichen Exponenten basteln wir uns im nächsten Schritt eine Definition für negative, ganzzahlige Exponenten:

Definition 9.2

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} := (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Es wird also zuerst potenziert und erst dann davon der Kehrwert (bzw. das multiplikativ Inverse) gebildet. Durch folgende Rechnung stellt es sich heraus, dass die Reihenfolge dabei egal ist:

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ mal}}} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n\text{ mal}} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (a^{-1})^n\,.$$

Insgesamt gelten des Weiteren folgende Rechenregeln für ganzzahlige Exponenten:

Satz 9.1

Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Beweis

Ein strenger Beweis dieses Satzes würde sogenannte vollständige Induktion▶54 benötigen. Zum momentanen Zeitpunkt werden dadurch Inhalte nur komplizierter, aber nicht klarer oder anschaulicher. Es wird daher nicht näher darauf eingegangen. Schultauglich argumentieren lassen sich die Rechenregeln für negative Hochzahlen durch

$$a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ mal}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ mal}}} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{(-n)+(-m)}$$

□

9.3. Wurzeln

Definition 9.3: Wurzel

Es seien $n \in \mathbb{N}$ gerade und $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann definiert $\sqrt[n]{a}$ (in Worten: n-te Wurzel von a) die (in $\mathbb{R}_{>0}$ eindeutige) Lösung der Gleichung

$$x^n = a \, .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $a \in \mathbb{R}$ definiert $\sqrt[n]{a}$ die (in $\mathbb{R}$ eindeutige) Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Es gilt also: $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Führt man zusätzlich die Bezeichnung $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ ein, so ergibt sich der Zusammenhang

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \, .$$

Umgekehrt ist a eine Lösung der Gleichung $x^n = a^n$, also ist $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Wurzelziehen stellt somit die Umkehroperation zum Potenzieren (mit natürlchen Exponenten) dar. Ist $a > 0$ und n gerade, so ist $-\sqrt[n]{a}$ die zweite Lösung der Gleichung $x^n = a$. Bedauerlicherweise ist die Definition der Wurzel nicht einheitlich in der Mathematik. Oft werden nur $a \geq 0$ zugelassen. Vielleicht überraschend, da für uns selbstverständlich, ist, dass die Existenz der n-ten Wurzel einer reellen Zahl vergleichsweise mühsam zu beweisen ist. Insbesondere muss dabei auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zurückgegriffen werden. Denn schon die die Gleichung $x^2 = 2$ hat bekanntlich in $\mathbb{Q}$ keine Lösung (vgl. 7.3.2 Ausblick: Lücken in $\mathbb{Q}$ ▶61)!

Ausgehend von dieser Definition ergeben sich Rechenregeln für Wurzeln. Man beachte dabei aber die Vorzeichen der Zahlen unter der Wurzel.

Satz 9.2

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Beweis
Wir beweisen beispielsweise die zweite Gleichung (unter Verwendung der bisherigen Rechenregeln):

$$((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{nm} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$$

Also ist $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. Es kommt also nicht auf die Reihenfolge an. □

Diese Rechenregeln können benutzt werden, um Wurzelausdrücke zu vereinfachen:

Bsp. 9.1
Eine Anwendung ist das sogenannte partielle Wurzelziehen:

$$\sqrt{48a^6} = \sqrt{16 \cdot 3 \cdot a^6} = \sqrt{3 \cdot (4 \cdot a^3)^2} = \sqrt{3} \cdot 4a^3$$

9.4. Rationale Exponenten

Ausgehend von der Definition und den Schreibweisen von Wurzeln definieren wir Potenzen mit rationalen Exponenten:

Definition 9.4
Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ (also $p, q \in \mathbb{N}$) definieren wir

$$\begin{aligned} a^r = a^{\frac{p}{q}} &:= (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p \\ a^{-r} &:= \frac{1}{a^r} \end{aligned}$$

Zudem setzen wir $0^r := 0$.

Damit ergeben sich folgende Rechenregeln:

Satz 9.3
Für $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ \frac{a^s}{a^r} &= a^{s-r} \\ (a^r)^s &= a^{(r \cdot s)} \\ (a \cdot b)^s &= a^s \cdot b^s \\ \frac{a^s}{b^s} &= \left(\frac{a}{b}\right)^s \qquad (b \neq 0) \end{aligned}$$

Beweis
Wir beweisen beispielsweise die erste Aussage: Wir setzen $x = a^{\frac{p}{q}}$ und $y = a^{\frac{m}{n}}$. Dann ist

$$x^q = (a^{\frac{p}{q}})^q = (a^{\frac{1}{q}})^{pq} = (a^{\frac{1}{q}})^q)^p = a^p$$

und (analoge Argumentation) $y^n = a^m$. Wir berechnen nun

$$(xy)^{qn} = x^{qn} \cdot y^{qn} = (x^q)^n \cdot (y^n)q = (a^p)^n \cdot (a^m)^q = a^{pn} \cdot a^{mq} = a^{pn+mq}$$

Daraus erhalten wir die Gleichungskette

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = xy = \sqrt[qn]{a^{pn+mq}} = a^{\frac{pn+mq}{qn}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$$

□

Wir hier, dass r und s noch rationale Zahlen sind. Für irrationale Hochzahlen haben wir die Potenzen noch nicht definiert ...

9.5. Irrationale Exponenten

Um für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ den Ausdruck a^ξ sinnvoll definieren zu können, sind andere Argumente und Vorgehensweisen nötig als bisher. Insbesondere muss die Vollständigkeit der reellen Zahlen genutzt werden. Dabei kommen Konzepte wie Grenzwerte▶150 ins Spiel. Es ist zunächst also nicht klar, wie wir (oder der Taschenrechner) z. B.

$$3^{\sqrt{2}}$$

berechnen sollen. Eine der Möglichkeiten, irrationale Exponenten sinnvoll zu definieren, soll kurz gezeigt werden. Wir wissen bereits:

Satz 9.4

Die rationalen Zahlen liegen »dicht« in den reellen Zahlen. Das heißt, dass wir jede reelle Zahl (also auch irrationale) durch eine Folge rationaler Zahlen beliebig genau approximieren können.

In anderen Worten (vereinfacht gesagt): Für jede reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge▶162 rationaler Zahlen, $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ mit $r_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die Differenz

$$\xi - r_n$$

für große n (betragsmäßig) beliebig klein wird. Wir sagen dann, der Grenzwert der Folge $(r_1, r_2, r_3, \ldots) = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Zahl ξ, die Kurzschreibweise dafür lautet

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \xi\ .$$

bzw.

$$r_n \to \xi \qquad \text{für } n \to \infty$$

Unter Verwendung dieser Eigenschaft können wir nun auch Potenzen mit irrationalen Exponenten definieren, nämlich

Definition 9.5

Für $\xi \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer rationalen Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$ definieren wir

$$a^\xi := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Für $\xi > 0$ setzen wir wie zuvor $0^\xi := 0$.

Wir führen also (irrationale) Exponenten auf eine Folge von rationalen Potenzen zurück, nämlich

$$(a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots)$$

und nehmen dann davon den Grenzwert, (der auf jeden Fall existiert!) als Ergebnis. Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, irrationale Exponenten einzuführen, z. B. unter Verwendung des Logarithmus und der Exponentialfunktion ...

Die Rechenregeln für reelle Hochzahlen sind dann die selben wie für rationale Hochzahlen. Wir verzichten hier also darauf, Satz 9.3 ►79 nocheinmalmit $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Q}$ wiederzugeben.

10. Termumwandlungen/Termvereinfachungen

Unter einem Term in der Variablen x wollen wir einen Ausdruck T bzw. $T(x)$ verstehen, in dem die Variable x und (reelle) Zahlen durch Rechenoperationen (sinnvoll und wohldefiniert) verknüpft sind und gegebenenfalls durch Klammerungen strukturiert sind. So ist etwa

$$\Big((3x^2-5)\cdot(-3+x)\Big)^{\sqrt{2}}$$

ein Term. Nicht immer dürfen oder wollen wir jede beliebige Zahl für die Variable (Platzhalter) einsetzen, was es sinnvoll macht, eine Grundmenge ($\rightarrow$ »wollen«) bzw. eine Definitionsmenge ($\rightarrow$ »dürfen«) zu bestimmen, aus der die »verbotenen Werte« ausgeschlossen wurden:

Bsp. 10.1

Der Ausdruck

$$\frac{1}{x-1}$$

macht genau dann keinen Sinn, wenn der Nenner gleich 0 ist, also wenn $x=1$ ist. Somit nehmen wir als Grundmenge die Menge

$$\mathbb{G} := \mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

(Zur Erinnerung: Wir sprechen »$\mathbb{R}$ ohne Eins«, vgl. 5.2 Mengenoperationen ▶45)

Es wird sich vor allem später bei den Gleichungen oder bei Funktionen die Sinnhaftigkeit (und Wichtigkeit) dieser Überlegungen zeigen. Oft ist es aber nicht einmal sinnvoll, die Variable dabei besonders zu betonen – vor allem dann nicht, wenn mehrere »Buchstaben« bzw. Platzhalter auftauchen, etwa in

$$(x-y)^3+(2z)^{-1}-200$$

Es wird von angehenden Mathematik-Studierenden erwartet, dass sie gängige Termumformungen bzw. Termvereinfachungen selbstständig und fehlerfrei durchführen können (addieren und subtrahieren, Rechnen mit Klammern, ...). Wer hier Probleme hat, möge die Schulbücher der 3. und 4. Klasse Hauptschule/Unterstufe sowie die Schulbücher des 9. Schuljahres durcharbeiten. In diesem Skriptum kann aus Platzgründen darauf nicht im Detail eingegangen werden.

10.1. Standardformeln

Aus der Hauptschule/Unterstufe bekannt sind folgende Formeln:

Satz 10.1: Binomische Formeln

Für $a,b\in\mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Die »Herleitung« verdient ihren Namen fast nicht, da es sich dabei nur um Ausmultiplizieren ($\rightarrow$ Verwendung des Distributivgesetzes) und Zusammenfassen (inkl. Kommutativgesetz) handelt. Beispielsweise:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ .$$

Die zweite Formel erhält man auch, indem man die erste Formel verwendet und b durch $-b$ ersetzt:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Die zweite Formel ist also nur ein Spezialfall der ersten Formel. Diese Vorgehensweise wurde hier gewählt, weil sie für höhere Potenzen als 2 verallgemeinerungsfähig ist. Auch folgende Formel kann nützlich sein und findet sich in jeder Formelsammlung aus der Oberstufe:

Satz 10.2

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Auch hier erkennen wir durch Ausmultiplizieren (der rechten Seite) die Richtigkeit:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Die oben gebrachten Formeln gelten klarerweise in beide »Richtungen«. So kann etwa ein passender Ausdruck in Faktoren zerlegt werden:

Bsp. 10.2

$$\underbrace{16x^2y^4}_{a^2} - \underbrace{40xy^3z}_{2ab} + \underbrace{25y^2z^2}_{b^2} = \underbrace{(4xy^2)^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{(4xy^2)}_{a} \cdot \underbrace{(5zy)}_{b} + \underbrace{(5yz)^2}_{b^2} = \underbrace{(4xy^2 - 5yz)^2}_{(a+b)^2}$$

Es ist für angehenden Mathematik-Studierenden (bzw. zukünftige Lehrkräften) vorteilhaft, dass die Quadrate der Zahlen 1 bis 15 zu kennen, um halbwegs zügiges Rechnen zu ermöglichen. Unter anderem sind bei Klausuren nicht immer Taschenrechner erlaubt.

10.2. Exkurs: Binomischer Lehrsatz

Die binomische Formel für den Ausdruck der Form $(a+b)^2$ lässt sich verallgemeinern. So lässt sich eine geschlossene Formel für den Ausdruck $(a+b)^n$ mit einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ (und sogar $n \in \mathbb{R}$) angeben, nämlich:

Satz 10.3: Binomischer Lehrsatz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

mit

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad ,$$

wobei $0! := 1$ und

$$(k+1)! := (k)! \cdot (k+1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \ .$$

Die detaillierte Erklärung zum Zeichen $\sum$ und seiner Bedeutung finden sich im Abschnitt 16.1.3 Polynomfunktionen höheren/beliebigen Grades ▶134.

Einige Bemerkungen dazu: $k!$ nennt sich »k-Faktorielle« oder »Fakultät«, der Ausdruck $\binom{n}{k}$ nennt sich »Binomialkoeffizient« und wird auch »n über k« gesprochen. In den gängigen Formelsammlungen finden sich häufig Tabellen mit den jeweiligen Werten.

Wie ist die binomische Formel zu verstehen? Das Zeichen $\sum$ ist ein sogenanntes Summenzeichen – »ausgeschrieben« steht dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^{k} &= \binom{n}{0}\cdot a^{n-0}\cdot b^{0}+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^{1}+\\ &\qquad +\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^{n-(n-1)}\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^{n-n}\cdot b^{n}=\\ &= \binom{n}{0}\cdot a^{n}+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot b^{n}\,.\end{aligned}$$

Mit einigen Eigenschaften des Binomialkoeffizienten, etwa

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

und

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

vereinfacht sich die Summe weiter und wir erhalten

$$(a+b)^{n}=a^{n}+n\cdot a^{n-1}\cdot b+\ldots+n\cdot a\cdot b^{n-1}+b^{n}\,.$$

Für $n=3$ kommen wir so auf die bekannte Formel

$$(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$$

Noch ein Hinweis zu einer möglichen Herleitung bzw. einem Beweis: Dies passiert z. B. unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion▶54 (für das Summenzeichen) und dem Zusammenhang

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}\,.$$

10.3. Ausblick: Rechnen mit anderen Variablen

Die Rechenregeln für reelle Zahlen sind wir durch jahrelanges »Training« in der Schule gewohnt – sie sind für uns absolut selbstverständlich. Dass diese Rechenregeln aber doch nicht so trivial sind, haben wir durch die letzten beiden Kapitel erfahren. Diese Selbstverständlichkeit ist ein Vorteil beim Rechnen, weil wir uns dadurch auf andere (inhaltliche) Aspekte konzentrieren können. Sie birgt aber eine Gefahr: Was ist, wenn wir mit Variablen rechnen sollen, die keine reellen Zahlen sind? Dann müssen wir die Rechenregeln ausblenden, die für uns so selbstverständlich sind, und im Gegenzug genau darauf achten, welche Regeln wir wirklich verwenden dürfen. Vor allem für die Lineare Algebra (und später für die Algebra) wird das ein notwendiger, aber vergleichsweise ungewohnter gedanklicher Schritt sein. Ein paar Beispiele sollen das illustrieren.

Bsp. 10.3

In der Linearen Algebra werden Vektoren meist nicht wie in der Schule üblich mit Vektorpfeilen bezeichnet, sondern nur mit lateinischen Kleinbuchstaben. Wir schreiben also x statt $\vec{x}$. Und entgegen der natürlichen Zahlen können wir können wir Vektoren nicht so einfach multiplizieren, wenn wieder ein Vektor entstehen soll.

Sind x, y, z Vektoren, so macht eine Gleichung

$$x \cdot y = z$$

zunächst keinen Sinn und kann daher auch nicht einfach zu

$$x = \frac{z}{y}$$

umgeformt werden.

Auch das nächste Beispiel stammt aus der Linearen Algebra.

Bsp. 10.4

Matrizen▶223 sind sehr vereinfacht gesagt so etwas Ähnliches wie Vektoren▶205 und werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet. Entscheidend ist, dass wir Matrizen addieren und subtrahieren können. Auch eine Multiplikation gibt es, die grundsätzlich ohne Malpunkt geschrieben wird. Das »Problem«: Die Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ. D. h. die Gleichung

$$AB = BA$$

ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Eine Auswirkung davon ist, dass die binomischen Formeln im Allgemeinen nicht gelten, da

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2$$

nicht das Selbe ist wie

$$A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

für die meisten Matrizen A und B. Gott sei Dank gibt es einige Matrizen besonderer Form, wo sie dann doch wieder gelten. Solcher »Kleinigkeiten« sollte man sich bewusst werden.

Bekannte Rechenregeln und Erkenntnisse auszublenden ist vor allem am Studienbeginn ungewohnt, wird durch die Beschäftigung mit Mathematik im Lauf der ersten »echten« Mathematik-Lehrveranstaltungen wie der Linearen Algebra oder der Analysis aber trainiert. Insbesondere beim Beweisen muss darauf geachtet werden, nur Erkenntnisse zu verwenden, die wirklich bekannt sind – in dem Sinn bekannt, dass sie in der Lehrveranstaltung hergeleitet oder bewiesen wurden.

Teil IV.

Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen

Einleitung

Dieser Abschnitt fast Ergebnisse und Rechenmethoden zum Thema Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen in kompakter Form zusammen. Es soll einerseits als Nachschlagwerk dienen, andererseits doch auch wieder einen Ausblick in die Hochschulmathematik geben.

Eingestiegen wird mit einer vergleichsweise theoretischen Zusammenfassung von Eigenschaften des Gleichheitszeichens sowie der Klärung des Grundvokabulars, das für Gleichungen relevant ist. Für gewöhnlich werden sogenannte Äquivalenzumformungen automatisiert durchgeführt, trotzdem schadet ein Überblick nicht.

Fortgesetzt wird mit einer kurzen Überblick über lineare Gleichungen. Danach werden quadratische Gleichungen sowie die gängigen Lösungsmethoden behandelt. Insbesondere wird die quadratische Lösungsformel bewiesen, was jede angehende Lehrkraft einfach können muss.

Aus mathematischer Sicht ungleich interessanter sind (Polynom)Gleichungen höherer Grade: Es gibt nämlich keine allgemein gültigen Lösungsformeln dafür, wenn der Grad größer gleich 5 ist. Trotzdem gibt es in $\mathbb{C}$ Aussagen über die Existenz von Lösungen – der Fundamentalsatz der Algebra (Satz 11.7 ▶94) ist die zentrale Aussage dafür. Dieser Satz zeigt, dass es die Mathematik schafft festzustellen bzw. versichern, dass es Lösungen gibt, ohne im Konkreten zu wissen, wie diese Lösungen aussehen bzw. welchen exakten Wert sie haben. Solche Einsichten werden in der Schule eher selten vermittelt, steht doch oft das letztendliche Ergebnis in Form einer konkreten Zahl im Vordergrund.

Ausgehend von linearen Gleichungen in einer Unbekannten lassen sich mehrere lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten, sogenannte (lineare) Gleichungssysteme untersuchen. In der Schule betreffen sie häufig geometrische Fragestellungen (Schnittpunk zweier Geraden etc), aber auch bei Umkehraufgaben (im Zusammenhang mit Kurvendiskussionen) finden sie eine Anwendung. Wir werden auch hier wieder versuchen, einen etwas allgemeineren Zugang zu finden. Münden wird das Ganze dann in einer Matrizenschreibweise und dem Gauß-Algorithmus, einem Verfahren, mit dem man systematisch und mit wenig Schreibarbeit die Lösung(en) findet. Dem einen oder der anderen ist dieses Verfahren vielleicht schon aus der Schule bekannt. Schlußendlich gibt es noch ein interessantes Beispiel eines nichtlinearen Gleichungssystems, das vor allem aus theoretischer Sicht ein wesentliches Ergebnis liefert.

Daneben werfen wir noch eine Blick auf Ungleichungen, da diese Thematik in der Schule für gewöhnlich entweder lange zurückliegt oder vergleichsweise oberflächlich behandelt wurde. Obwohl Ungleichungen bis zu dieser Stelle im Skriptum schon des Öfteren vorgekommen sind, fassen wir an dieser Stelle noch einmal die üblichen Rechenregeln zusammen und sehen uns einige Standard-Beispiele an. Ungleichungen (insbesondere mit Beträgen, sogenannte Betragsungleichungen) spielen vor allem in der Analysis eine sehr zentrale Rolle. Ein grundlegendes, rechentechnisches Rüstzeug hilft hoffentlich diesbezüglich, Probleme zu minimieren.

11. Gleichungen

11.1. Äquivalenzumformungen

In diesem Abschnitt beleuchten wir kurz einige theoretische Hintergründe vom Gleichheitszeichen, sogenannte Äquivalenzumformungen sowie dem Begriff einer Gleichung an sich.

Satz 11.1

Das Gleichheitszeichen $=$ setzt zwei Variablen bzw. Größen in Beziehung zueinander und wird daher Relation genannt. Die Relation $=$ ist eine sogenannte Äquivalenzrelation, d. h. es gelten folgende Rechenregeln:

- $=$ ist reflexiv, das heißt, es gilt immer $x = x$.
- $=$ ist symmetrisch, das heißt, aus $x = y$ folgt auch, dass $y = x$ gilt
- $=$ ist transitiv, das heißt, aus $x = y$ und $y = z$ folgt, dass $x = z$ ist.

Darüber hinaus gelten folgende Rechenregeln (im Zusammenhang mit für reelle Zahlen):

Satz 11.2

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

- $x = y$ ist gleichwertig zu $x + z = y + z$. Wir schreiben auch

$$x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x + z = y + z$$

- Für $z \neq 0$ ist $x = y$ gleichwertig zu $xz = yz$, also

$$x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad xz = yz$$

Gleichwertig heißt jeweils, dass der Wahrheitswert der linken Gleichung jeweils mit der rechten Gleichung übereinstimmt (vgl. **?? ??** ▶**??**).

Bsp. 11.1

Wir überprüfen die Richtigkeit der zweiten Aussage oben an einem konkreten Beispiel: Bekanntlich ist $3 = 2$ eine falsche Aussage. Genauso ist $15 = 10$, was nichts anderes ist als $3 \cdot 5 = 2 \cdot 5$, ebenso falsch.

Definition 11.1

Ein Ausdruck der Form

$$T_L = T_R$$

heißt Gleichung. T_L und T_R sind dabei Terme (vgl. ▶82), in denen auch Variablen vorkommen können bzw. dürfen.

Wenn keine Variablen vorkommen, liegt eine sogenannte Aussage vor, und wir können uns fragen, ob die Aussage gültig (wahr) ist oder nicht (falsch).

Bsp. 11.2

Die Gleichung $4^2 + 9 = -2012$ ist eine falsche Aussage, weil auf der linken Seite eine positive Zahl steht und auf der rechten Seite eine negative.

Kommt dagegen eine Variable vor, so können wir uns fragen, für welche Werte für diese Variable (oft ein x) die Aussage(form) richtig ist. Dafür legen wir für gewöhnlich zuerst eine Grundmenge G fest, die dann unseren grundlegenden (Zahl)Bereich darstellt. Da es unter Umständen trotzdem noch Werte geben kann, deren Einsetzen Probleme macht, müssen wir diese »verbotenen« Werte aus unserer Grundmenge entfernen und erhalten dadurch die sogenannte Definitionsmenge $\mathcal{D}$. Ist nun die Gleichung für einen konkreten Wert von x erfüllt, so heißt dieser Wert (eine) Lösung der Gleichung. Die Menge aller möglichen Werte, die Lösungen sind, heißt Lösungsmenge $\mathbb{L}$. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\emptyset \subset \mathbb{L} \subset \mathcal{D} \subset G$$

(Die Teilmengen müssen allerdings nicht echt sein – es kann auch Gleichheit gelten.) Eine Gleichung heißt (über einer Grundmenge G) allgemein gültig, wenn $\mathbb{L} = G$ ist, also insbesondere auch $\mathcal{D} = G$ ist. Eine Gleichung heißt unlösbar, wenn $\mathbb{L} = \emptyset$.

Bsp. 11.3

Die Gleichung $x^2 = 2$ sei gegeben.

- Für $G = \mathbb{R}$ oder $G = \mathbb{C}$ ist dann $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- Für $G = \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{L} = \emptyset$, da die Kandidaten für die Lösung irrationale Zahlen sind, also unlösbar.
- Für $G = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ist die Gleichung allgemein gültig.

Entscheidend für die Praxis sind Umformungsschritte, die uns helfen, Gleichungen zu vereinfachen, ohne jedoch die Lösungsmenge zu verändern. Das geschieht mit sogenannten Äquvialenzumformungen (für Gleichungen). Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie die selbe Lösungsmenge haben.

Satz 11.3

Äquivalenzumformungen für (reelle bzw. komplexe) Gleichungen. T sei dabei ein beliebiger Term.

$$T_L = T_R \qquad \Leftrightarrow \qquad T_L \pm T = T_R \pm T$$

sowie, falls T bzw. $T(x)$ ungleich 0 ist:

$$T_L = T_R \qquad \Leftrightarrow \qquad T_L \cdot T = T_R \cdot T$$

Insbesondere gelten die obigen Aussagen für $T = k \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) bzw. $k \neq 0$ für die zweite Äquivalenz. Äquivalenzumformungen mit Divisionen werden als Spezialfälle der Multiplikation aufgefasst und sind daher ebenfalls abgedeckt.

Das Folgende kann man gar nicht oft genug betonen: Eine Äquivalenz $\Leftrightarrow$ besteht immer aus zwei Richtungen. So muss aus der linken Aussage zwingend die rechte folgen und aus der rechten zwingend die linke (vgl. **?? ??** ▶**??**). Ein Beispiel dazu ...

Bsp. 11.4

Ist $x = -2$, so folgt mit der Anwendung des Betrag $|\cdot|$ daraus, dass $|x| = 2$ ist, also gilt:

$$x = -2 \qquad \Rightarrow \qquad |x| = 2\,.$$

Umgekehrt folgt aber aus $|x| = 2$ nicht zwingend, dass $x = -2$ ist, denn x könnte ja auch 2 sein:

$$|x| = 2 \qquad \not\Rightarrow \qquad x = -2\,.$$

Insgesamt gilt die Äquivalenz der beiden Gleichungen nicht und wir schreiben dafür

$$|x| = 2 \qquad \not\Leftrightarrow \qquad x = -2\,.$$

11.2. Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind (für reelle) Zahlen sehr einfach. Wir werden sie hier nur der Vollständigkeit halber angeben.

Definition 11.2

Unter einer linearen (reellen) Gleichung verstehen wir eine Gleichung der Form:

$$ax = b \qquad \text{bzw.} \qquad ax + c = 0\,.$$

Es ist $a \neq 0$ und es sind $a, b, c \in \mathbb{R}$. Lösungen für x sind oft in $\mathbb{R}$ gesucht, andere Grundmengen wären auch denkbar.

Diese Gleichungen heißen linear, weil die Unbekannte x nur als x^1 vorkommt (und sonst nur konstante Terme enthalten sind). Die Lösbarkeit dieser Gleichungen ist von der Grundmenge abhängig. Für $G = \mathbb{R}$ haben solche Gleichungen mit $a \neq 0$ immer eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{b}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad x = -\frac{c}{a}\,.$$

Lineare Gleichungen lassen sich vergleichsweise gut auf andere Mengen (Vektoren, Funktionen, etc) verallgemeinern.

11.3. Quadratische Gleichungen

Im Gegensatz zu linearen Gleichungen sind sogenannte quadratische Gleichungen nicht mehr so einfach. Insbesondere kann es für reelle Zahlen passieren, dass sie gar nicht lösbar sind. Wir nennen den Ausdruck

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine quadratische Gleichung. Anders formuliert suchen wir Nullstellen eines quadratischen Polynoms (vgl. ▶134). Im Folgenden sollen einige Aspekte diskutiert werden.

11.3.1. Satz von Vieta

Der Satz von Vieta liefert uns Zusammenhänge zwischen den Linearfaktoren eines quadratischen Polynoms, seiner ausmultiplizierten Form sowie seinen Nullstellen.

Satz 11.4

Lässt sich das Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ in der Form

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

schreiben, so sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Weiters gilt:

$$p = -(x_1 + x_2) \qquad \text{und} \qquad q = x_1 x_2$$

Dahinter steht nämlich der sogenannte Produkt-Null-Satz, der besagt, dass ein (reelles) Produkt genau dann 0 ist, wenn zumindest einer der (beiden) Faktoren gleich 0 ist. (Dieser Satz gilt nicht in beliebigen Mengen!). Insbesondere sieht man die Nullstellen sofort, wenn das Polynom in Linearfaktoren vorliegt – es macht wenig Sinn, die Linearfaktoren auszumultiplizieren und danach quadratische Lösungsformel anzuwenden. Das ist nur unnötige Rechnerei. Häufig kann der Satz von Vieta bei einfachen Polynomen angewandt werden, wo man x_1 und x_2 als Faktoren von q erraten kann.

Bsp. 11.5

Finde alle Lösungen der folgenden Gleichung unter Verwendung des Satzes von Vieta:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Da $x_1 x_2 = 6$, müssen x_1 und x_2 das selbe Vorzeichen haben. Wir versuchen es mit ganzzahligen Teilern von 6, das sind $1, 2, 3, 6$ und ihre Gegenzahlen. Da p positiv sind, muss $x_1 + x_2$ eine negative Zahl ergeben. Zusätzlich ist $q > 0$, also müssen x_1 und x_2 beide das selbe Vorzeichen haben, also negativ sein. $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$ erfüllt die Gleichung $q = -(x_1 + x_2)$. Somit gilt

$$x^2 + 5x + 6 = (x - (-2)) \cdot (x - (-3))$$

(Auch das Rechnen der Probe bestätigt das.) Somit sind -2 sowie -3 die einzigen Lösungen der zu lösenden Gleichung.

Natürlich gibt es auch systematische Methoden, um quadratische Gleichungen zu lösen, nämlich die sogenannten Auflösungsformeln:

11.3.2. Quadratische Auflösungsformeln

Die Auflösungformeln finden sich in jedem Schulbuch (ab der Oberstufe). Es wird von angehenden Mathematik-Studierenden erwartet, dass sie diese anwenden können, ohne (!) sich dabei zu verrechnen.

Satz 11.5: Quadratische Auflösungformel

Für Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ bzw.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt es die bekannten quadratischen Lösungsformeln, nämlich

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bzw.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Insbesondere hängt die Anzahl der Lösungen vom Ausdruck unter der Wurzel (»Diskriminante«) ab. Ist dieser echt negativ, so hat die Gleichung keine Lösung, ist dieser gleich 0, so gibt es genau eine Lösung. Zwei (verschiedene Lösungen) gibt es nur, falls die Diskriminante echt positiv ist.

Exemplarisch soll hier die Herleitung der ersten Formel (oft die »kleine« Auflösungsformel genannt) gezeigt werden. Wir werden dabei das quadratische Ergänzen verwenden. Wer sich nicht mehr daran erinnert, möge sein Wissen auffrischen, ab ▶134.

$$\begin{aligned} x2 + px + q &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\ x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\ (x + \frac{p}{2})^2 &= \frac{p^2}{4} - q \end{aligned}$$

Nun haben wir eine Gleichung der Art $z^2 = d$. Lösungen (falls sie existieren) dieser Gleichung sind $\pm\sqrt{d}$. Verwenden wir unsere ursprüngliche Notation, so erhalten wir

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Schließlich ist dann

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Die »große« Auflösungsformel lässt sich z. B. als Spezialfall der »kleinen« herleiten:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\ .$$

11.4. Gleichungen höheren Grades

Bei Gleichungen höheren Grades kommen statt polynomialer Ausdrücke 1. oder 2. Grades (Exponenten von x sind kleiner gleich 2) auch höhere ganzzahlige Exponenten vor. Es geht also darum, Lösungen einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zu finden. Anders formuliert: Wir suchen Nullstellen von Polynomfunktionen▶134. Für gewöhnlich sind $a_j \in \mathbb{R}$ für alle j und für oft werden nur reelle Lösungen gesucht. Bereits ab Grad 3 kann es äußerst mühsam sein, die Nullstellen zu finden – bei Polynomfunktionen 2. Grades verwendet man einfach die quadratische Auflösungsformel. Bei 3. Grades gibt es zwar noch eine Lösungsformel (nämlich die sogenannten Formeln von CARDANO), allerdings ist diese äußerst kompliziert, verwendet Substitutionen bzw. Fallunterscheidungen und muss unter Umständen sogar zwischenzeitlich auf komplexe Zahlen ausweichen. Auch für Grad 4 gibt es noch sehr mühsame Lösungsformeln, die aber so gut wie nie verwendet werden. Für Gleichungen höheren Grades wurde sogar bewiesen, dass es keine allgemein gültigen Lösungsformeln mehr geben kann – dort werden dann in der Praxis numerische Methoden eingesetzt, vgl. ab ▶98.

Bei Schul- oder Klausurbeispielen lässt sich oft eine Nullstelle »erraten«, nämlich nach folgendem Satz:

Satz 11.6

Hat das Polynom nur ganzzahlige Koeffizienten, so sind sämtliche ganzzahligen Nullstellen auf jeden Fall Teiler des sogenannten Konstanten Terms, sprich a_0.

Hat das Polynom nur rationale Koeffizienten und kein irrationalen, so multiplizieren wir die Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner der Koeffizienten , wodurch wir ganzzahlige Koeffizienten erhalten.

Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms p, also $p(x_1) = 0$ so so können wir einen Linearfaktor herausheben:

$$p(x) = (x - x_1)q(x) \; .$$

$p(x)$ ist genau dann Null, wenn $x = x_1$ ist oder wenn x eine Nullstelle von $q(x)$ ist. Also versuchen wir nun die Gleichung

$$q(x) = 0$$

zu lösen.

In der Praxis geht man so vor, dass man

$$q(x) = p(x) : (x - x_1) = ?$$

durch Polynomdivision berechnet. Bleibt kein Rest, so hat man richtig gerechnet und $q(x)$ gefunden. Nullstellen können auch mehrfach vorkommen, weswegen man probehalber eine Nullstelle noch einmal testet. Wir sehen und das Verfahren anhand eines Beispiels an. Im Prinzip funktioniert es völlig analog zur schriftlichen Division mit normalen Zahlen.

Bsp. 11.6

Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 5 \; .$$

Wir versuchen ganzzahlige Nullstellen zu finden und probieren deshalb die ganzzahligen Teiler von 5. Es stellt sich heraus, dass $p(-1) = 0$ ist. Somit haben wir eine Nullstelle $x_1 = -1$ gefunden. Wir spalten nun den Linearfaktor $(x - (-1))$ von $p(x)$ ab:

$$\begin{array}{l}
(\;\; x^3 + 5x^2 + 9x + 5) : (x+1) = x^2 + 4x + 5 \\
\underline{-x^3 \;\; -x^2} \\
\qquad\quad 4x^2 + 9x \\
\qquad\; \underline{-4x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 5x + 5 \\
\qquad\qquad\; \underline{-5x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Also ist dann

$$\underbrace{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}_{p(x)} = \underbrace{(x - (-1))}_{x - x_0} \cdot \underbrace{(x^2 + 4x - 5)}_{q(x)}$$

Das Polynom $q(x)$ »bearbeitet« man nun mit der quadratischen Auflösungsformel ...

Damit man es einmal gesehen hat, zeigen wir ein Beispiel einer Polynomdivision, bei der ein Rest bleibt:

Bsp. 11.7

$$\begin{array}{l}
(\;\; x^3 + 6x^2 + 9x + 5) : (x^2+1) = x + 6 + \dfrac{8x-1}{x^2+1} \\
\underline{-x^3 \qquad\quad -x} \\
\qquad\quad 6x^2 + 8x + 5 \\
\qquad\; \underline{-6x^2 \qquad -6} \\
\qquad\qquad\quad 8x - 1
\end{array}$$

Umgekehrt heißt das

$$\underbrace{x^3 + 6x^2 + 9x + 5}_{p(x)} = (x^2 + 1)\underbrace{(x + 6)}_{q(x)} + \underbrace{(8x - 1)}_{r(x)}$$

11.4.1. Der Fundamentalsatz der Algebra – Zerlegung in Linearfaktoren

Ein sehr wichtiger Satz über die Nullstellen von Polynomen und somit über die Lösbarkeit von Gleichungen ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Schon der berühmte deutsche Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) hat seine Aussage gekannt. Es existieren mittlerweile etliche Beweise für diesen Satz. Das bemerkenswerte daran ist, dass diese oft Disziplinen-übergreifend sind, also dass ein ein sich algebraischer Beweis auch Mittel der Analysis benötigt. Ob man im Laufe des Studiums überhaupt in den Genuss (s)eines vollständigen Beweises kommt, sei hier offen gelassen. Interessierte sollten Lehrveranstaltungen zum Thema »Komplexe Analysis« besuchen, den mit Mitteln der Funktionentheorie ist sein Beweis vergleichsweise kurz. Wir zitieren nun endlich den angekündigten Satz:

Satz 11.7: Fundamentalsatz der Algebra

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots n$. Dann hat die Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

immer eine Lösung in $\mathbb{C}$, falls $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$ ist. Anders formuliert: Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Die Auswirkungen dieses Satzes sind weitreichend: Durch iterative Anwendung dieses Satzes können wir immer weitere Linearfaktoren »herausziehen«:

$$p(x) = (x - x_1) q(x)$$

wobei der Grad vom Polynom q um 1 kleiner ist als der von p. Insgesamt erhalten wir damit

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

mit den n (komplexen) Nullstellen x_1 bis x_n. Selbstverständlich ist dabei nicht ausgeschlossen, dass auch reelle Nullstellen dabei sind oder dass eine Nullstelle mehrfach vorkommt, also dass z. B. $x_3 = x_7$ ist.

Ein Hinweis zur Notion: Das Zeichen $\prod$ ist ein großes π und steht für »Produkt«. Die Notation ist vergleichbar mit dem Summenzeichen (vgl. ▶134)). Es ist also

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \,.$$

Der Fundamentalsatz der Algebra lässt auch Aussagen über reelle Polynome zu, nämlich:

Satz 11.8

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots n$. Dann hat das reelle Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

auf jeden Fall eine reelle Nullstelle, falls n ungerade ist. Außerdem gilt die Gleichung

$$p(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot (x^2 + b_1 x + c_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_l x + c_l)$$

Dabei sind $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ die Nullstellen von p und es gilt $k + 2l = n$, wobei auch k oder l gleich 0 sein kann. Die reellen Polynome $x^2 + b_j x + c_j$ haben keine reellen Nullstellen mehr.

Anders gesagt: Das Polynom p lässt sich zerlegen in Linearfaktoren und in quadratische, nullstellenlose Faktoren.

11.4.2. Substitution

Ein weiteres Konzept, Gleichungen zu lösen, ist, diese durch Substitution zu vereinfachen:

Bsp. 11.8
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0\ .$$

Wenn wir $z := x^2$ setzen, erhalten wir folgende quadratische Gleichung in z:

$$z^2 - 5z - 36 = 0\ .$$

Hier können wir die quadratische Lösungsformel anwenden und erhalten so

$$z_1 = 9 \qquad \text{und} \qquad z_2 = -4$$

Aus dem Zusammenhang $z = x^2$ erhalten wir die Bedingung, dass z als Quadratzahl größer gleich 0 sein muss. Es kommen daher nur positive Lösungen von z in Frage. Für die Lösungen von x erhalten wir dadurch

$$x = \pm\sqrt{z_1} = \pm 3$$

Insgesamt erhalten wir

$$x^4 - 5x^2 - 36 = (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 4) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 4)$$

Vergleiche das Ergebnis mit dem Hauptsatz der Algebra!

Substitutionen dieser Art lassen sich auch auf höhere Grade verallgemeinern. Bei Gleichungen der Form

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

machen wir die Substitution $z = x^n$ und kommen dadurch auf die Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0\ ,$$

die sich mit der quadratischen Lösungsformel lösen lässt. Aus der Lösungen können wir durch Rücksubstitution Lösungen für x erhalten, nämlich

$$x = \sqrt[n]{z}\ .$$

Man achte dabei darauf, ob n gerade oder ungerade ist ($\to$ erlaubtes Vorzeichen von z).

11.5. Bruchgleichungen

Noch nicht behandelt haben wir sogenannte Bruchgleichungen (vgl. 16.1.4 Gebrochen-Rationale Funktionen ▶136), also Gleichungen, in denen die Unbekannte auch im Nenner auftauchen. Wesentlich bei diesen Fragestellungen ist, welche Grundmenge und Definitionsmenge sinnvoll sind. Da eine Division durch 0 keinen Sinn macht bzw. nicht erlaubt ist, müssen wir alle Nullstellen der Nenner aus der Grundmenge entfernen, um eine sinnvolle Definitionsmenge zu erhalten. Auch das weitere Vorgehen ist an sich Schulstoff und bekannt: Auf gemeinsamen Nenner bringen, mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren und wir erhalten eine gewöhnliche (Polynom)Gleichung höheren Grades und gehen dann wie in 11.4 Gleichungen höheren Grades ▶92 beschrieben vor.

Bsp. 11.9

Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\underbrace{\frac{x-1}{2x-6}}_{N_1} - \underbrace{\frac{6x+11}{6x^2+18x}}_{N_2} = \underbrace{\frac{x^2-1}{2x^2-18}}_{N_3}\,.$$

Zunächst untersuchen wir die Nenner, zerlegen diese in Linearfaktoren. Dadurch finden wir leicht die verbotenen Werte, wodurch wir die Definitionsmenge festlegen können:

$$\begin{aligned} N_1 &= 2\cdot(x-3) \\ N_2 &= 2\cdot 3\cdot x\cdot(x+3) \\ N_3 &= 2\cdot(x-3)\cdot(x+3) \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0,3,-3\}$. Außerdem erhalten wir als gemeinsamen Nenner

$$N = 2\cdot 3\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+3)\,.$$

Wir erweitern nun auf gemeinsamen Nenner und erhalten

$$\frac{(x-1)\cdot 3\cdot x\cdot(x+3)}{2\cdot(x-3)\cdot 3\cdot x\cdot(x+3)} - \frac{(6x+11)\cdot(x-3)}{2\cdot 3\cdot x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{(x^2-1)\cdot 3\cdot x}{2\cdot(x-3)\cdot(x+3)\cdot 3\cdot x}$$

und vereinfachen zu

$$\frac{3x(x-1)(x+3)-(6x+11)(x-3)}{N} = \frac{3x(x^2-1)}{N}\,.$$

Danach multiplizeren wir mit N. Man beachte, dass das für $x\in\mathcal{D}$ eine Äquivalenzumformung darstellt, da für diese x der Nenner $N(x)\neq 0$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 3x^3-3x^2+9x^2-9x-(6x^2+11x-18x-33) &= 3x^3-3x && \Leftrightarrow \\ -2x+33 &= -3x && \Leftrightarrow \\ x &= 33 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{33\}$.

11.6. »Kompliziertere« Gleichungen

Die bisherigen Gleichungen waren eigentlich alle von der Struktur her vergleichsweise einfach – wir hatten es mit Polynomen (und ihren Verknüpfungen) zu tun. Was aber, wenn wir nun keine Polynom-artigen Gleichungen vor uns haben? Dann ist mehr Kreativität bzw. Erfahrung gefordert! Sehen wir uns einige Beispiele an:

Bsp. 11.10

Wir betrachten die Gleichung (eine sogenannte Wurzelgleichung)

$$\sqrt{6x+4} = 2-x \qquad (W1)$$

und suchen alle reellen Lösungen davon. Wir erinnern uns: Das Argument der Wurzelgleichung darf nicht negativ sein. $6x+4\geq 0$ muss erfüllt sein, also erhalten wir den Definitionsbereich

$\mathcal{D} = [-\frac{2}{2}, \infty)$. Um die Wurzel wegzubringen, quadrieren wir die Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} 6x + 4 &= (2 - x)^2 \quad &\Leftrightarrow \\ 6x + 4 &= 4 - 4x + x^2 \quad &\Leftrightarrow \\ x^2 - 10x &= 0 \, . \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Produkt-Null-Satz erhalten wir aus

$$x(x - 10) = 0 \tag{W2}$$

die beiden Lösungskandidaten $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 10$. Warum nur »Lösungskandidaten« und nicht »Lösungen«? Weil das Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist! Ist x eine Lösung der Gleichung ($W1$), so ist x auch eine Lösung der Gleichung ($W2$). Somit ist die Lösungsmenge von Gleichung ($W1$) eine Teilmenge der Lösung von Gleichung ($W2$). Umgekehrt sind alle Lösungen von Gleichung ($W1$) unter den Lösungen von Gleichung ($W2$) zu suchen.

Wir machen die Probe: Für $x = 0$ erhalten wir $\sqrt{4} = 2$, aber für $x = 10$ erhalten wir $\sqrt{64} = -8$, was ein Widerspruch ist, da die Wurzel einer reellen Zahl immer größer gleich 0 ist. Somit ist

$$\mathbb{L} = \{0\} \, .$$

Bsp. 11.11

Wir betrachten die Gleichung

$$\ln(4x) - \ln(x - 1) = \ln(2) + \ln(x) \, .$$

Da die Unbekannte x als Argument des (natürlichen) Logarithmus (siehe ▶145) vorkommen, sprechen wir von einer logarithmischen Gleichung. Wir suchen die größtmögliche Definitionsmenge. Der Logarithmus ist genau dann wohldefiniert, wenn sein Argument positiv ist. Die strengste Bedingung erhalten wir z. B. durch $\ln(4x)$, daher ist $\mathcal{D} = (0, \infty)$. Mit den Rechenregeln des Logarithmus können wir die Gleichung umformen zu

$$\ln\left(\frac{4x}{x - 1}\right) = \ln(2x) \, .$$

Aufgrund der Injektivität des Logarithmus (bzw. der strengen Monotonie) folgt daraus (Äquivalenz haben wir nur für positive Zahlen!), dass

$$\frac{4x}{(x - 1)} = 2x \, .$$

Manchmal sagt man auch, dass man die Potenz zur Basis e bildet. Wir vereinfachen weiter zu

$$0 = 2x(x - 1) - 4x$$

und letztlich zu

$$0 = 2x(x - 3) \, .$$

Aufgrund des Produkt-Nullsatzes erhalten wir als mögliche Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Unter diesen Lösungskandidaten sind nun die Lösungen der ersten Gleichung zu finden. $x_1 = 0$ ist dabei ein verbotener Wert. $x_2 = 3$ ist dagegen eine Lösung ($\rightarrow$ Probe) und wir erhalten

$$\mathbb{L} = \{3\} \, .$$

Bsp. 11.12
Wir betrachten die Gleichung

$$3^{x+3} - 2 \cdot 5^x = 5^{x+1} + 2(3^x + 5^x)$$

Die Unbekannte kommt dabei im Exponenten vor, wir sprechen daher von einer sogenannten Exponentialgleichung. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, da es hier keine Einschränkungen gibt. Wir ordnen die Ausdrücke zuerst nach Basis und erhalten

$$3^{x+3} - 2 \cdot 3^x = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x \, .$$

Danach versuchen wir, gemeinsame Faktoren herauszuheben (Rechenregeln für Potenzen) und alle Terme mit der Unbekannten auf eine Seite zu bringen:

$$3^x \cdot (3^3 - 2) = 5^x \cdot (5 + 4)$$

also

$$3^x \cdot 25 = 5^x \cdot 9$$

und schließlich

$$\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^x$$

Diesen Ausdruck können wir nun umformen zu

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^x \, .$$

Aufgrund der Monotonie bzw. Injektivität der Exponentialfunktion (mit Basis $\frac{5}{3}$) (bzw. durch Anwendung des Logarithmus zur Basis $\frac{5}{3}$) erhalten wir als Lösung $x = 2$, also

$$\mathbb{L} = \{2\} \, .$$

Die bisherigen Beispiele waren alle analytisch lösbar, d. h. durch geeignete Umformungen und Anwendung gültiger Rechenregeln (z. B. für Logarithmen) konnte ein geschlossener Ausdruck für die Lösung in Form eines »schönen«, exakten Zahlenergebnisses erhalten werden.

Bei vielen scheinbar einfachen Gleichungen gibt es aber keine analytische Lösung. Wir kommen also nicht auf eine einfache (endliche) Vorschrift, wie die Lösung zu berechnen ist, oder auf eine geschlossenen, exakten Zahlenwert. Bei solchen Fragestellungen muss man auf numerische Methoden zurückgreifen. Diese liefern uns aber nur Näherungswerte für die tatsächlichen Lösungen:

Bsp. 11.13

Die Gleichung

$$\cos(x) = x$$

bzw.

$$\cos(x) - x = 0$$

hat keine analytische Lösung. Aus einer Skizze wird klar, dass es aber eine Lösung geben muss! Wir benötigen numerische Verfahren für solche Gleichungen.

Das Newton-Verfahren ist beispielsweise ein solches Verfahren, das rekursiv immer bessere Approximationen für die Lösung liefert (Schlagwort: Konvergenz), ausgehend von einem (fast) frei wählbaren

Startwert. Das Newton-Verfahren findet Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 ,$$

wenn f zweimal differenzierbar sein muss. Durch die rekursive Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

erhält man ausgehend von einem Startwert x_0 eine Folge von Werten $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, wobei

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

eine Nullstelle ist, also $f(x^*) = 0$ ist. Für die Details an dieser Stelle bleibt kein Platz – wir geben einen motivierenden Ausblick:

- Das Newton-Verfahren funktioniert erstaunlicherweise immer, sofern der Startwert nur nahe genug an der Lösung liegt.
- Das Newtonverfahren konvergiert sehr schnell (Schlagwort: Quadratische Konvergenz).
- Das Newton-Verfahren hängt eng mit dem (Banach'schen) Fixpunktsatz zusammen. Dieser Satz wird uns beispielsweise auch beim Thema der Differentialgleichungen begegnen ...
- Das Newton-Verfahren ist auf Gleichungssysteme verallgemeinerbar und arbeitet dann mit Vektoren und Matrizen▶223.

Abschließend sei noch erwähnt, dass das Newton-Verfahren eines der zentralen numerischen Lösungsverfahren ist. Die Numerische Mathematik beschäftigt sich mit solchen Fragen, also ob, warum, wie gut Verfahren funktionieren ...

12. Gleichungssysteme

12.1. Lineare Gleichungssysteme

Ausgehend von linearen Gleichungen können wir uns die Frage stellen, ob wir auch Ansammlungen linearer Gleichungen mit mehreren Variablen, also sogenannte lineare Gleichungssysteme, lösen können.

Definition 12.1

Unter einen linearen Gleichungssystem (LGS) bzw. einem System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten verstehen wir eine Ansammlung von Gleichungen folgender Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

n und m sind dabei selbstverständlich natürliche Zahlen. Die Faktoren a_{ij} mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ heißen Koeffizienten des LGS. Gesucht sind Lösungen für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n$, die alle m Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Manchmal schreib man die Lösung auch in einen Vektor (vgl. 24 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ ▶205) und spricht dann von einem Lösungsvektor, also

$$(x_1, \dots, x_n)^T \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};.$$

Das Lineare Gleichungssystem heißt homogen, wenn die rechte Seite jeweils gleich 0 ist, also $b_1 = \ldots = b_m = 0$ bzw. $(b_1, \dots, b_m)^T = \vec{0}$.

Die Koeffizienten werden wie folgt beschriftet (indiziert): Zuerst die Zeilennummer, in der sie stehen – erst dann die »Spaltennummer«, in dem sich der Koeffizient befindet. Merke: »Zeile vor Spalte«.

Spezialfälle sind aus der Schule bekannt: Für $m = n = 2$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Ist n maximal 3, so schreiben wir häufig x, y, z statt x_1, x_2, x_3, um die Beziehung zum $\mathbb{R}^3$ (ab ▶205), also dem dreidimensionalen reellen Standardvektorraum herauszustreichen, in dem die Komponenten der Vektoren oft mit x, y, z bezeichnet werden.

Wie können wir lineare Gleichungssysteme lösen? Für zwei Variablen ist das sogenannte Gleichsetzungsverfahren eine mögliche Variante:

Bsp. 12.1

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccl} 2x & + & y & = & 3 & \quad (I) \\ x & + & y & = & 6 & \quad (II) \end{array}$$

Dann ist nach Gleichung (I) $y = -2x + 3$, laut Gleichung (II) dagegen $y = 6 - x$. Da $y = y$ ist, erhalten wir dadurch eine Gleichung nur mit der Variablen x, nämlich

$$-2x + 3 = -x + 6$$

und als Lösung $x = -3$. Nun setzen wir diese Lösung für x in eine der (Ausgangs)-Gleichungen ein. Der Einfachheit halber verwenden wir die Gleichung $y = 6 - x = 6 - (-3) = 9$. Somit erhalten wir genau eine Lösung bzw. Lösungsvektor, nämlich $(x, y)^T = (-3, 9)^T$, also ist $\mathbb{L} = \{(-3, 9)^T\}$.

12.1.1. Anzahl der Lösungen

Anhand dieses ersten Beispiels wurde deutlich, dass wir versuchen, Variablen wegzubringen, um letztendlich nach Möglichkeit Gleichungen in einer Variablen zu erhalten. Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Bsp. 12.2

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & 1 & \quad (I) \\ 2x & + & 3y & = & 1 & \quad (II) \end{array}$$

hat ebenfalls genau eine Lösung, wie sich zeigen wird. Wir multiplizieren die Gleichung (I) mit 3, Gleichung (II) mit (-2) und erhalten dadurch das gleichwertige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 9x & + & 6y & = & 3 & \quad (III) = 3 \cdot (I) \\ -4x & - & 6y & = & -2 & \quad (IV) = (-2) \cdot (II) \end{array}$$

Nun addieren wir Gleichung (III) zu Gleichung (IV) und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrl} 9x & + & 6y & = & 3 & \quad (III) \\ 5x & & & = & 1 & \quad (V) = (IV) + (III) \end{array}$$

und damit erhalten wir $x = 1/5$. Rückeingesetzt beispielsweise in Gleichung (I) und umgeformt erhalten wir

$$y = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{5}) = \frac{1}{5}\,.$$

(Aufgrund der Symmetrie der beiden Gleichungen war das Ergebnis für x eigentlich ohne Rechnung zu bekommen). Somit ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \right\}\,.$$

Wir haben bisher Gleichungssysteme vorgefunden, die genau eine Lösung (x, y) hatten. Das muss nicht immer so sein. Es gibt nämlich drei mögliche Fälle: Keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen. Sehen wir uns wieder Beispiele dazu an:

Bsp. 12.3

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & 4 & \quad (I) \\ 6x & + & 4y & = & 6 & \quad (II) \end{array}$$

hat keine Lösung, denn wir können die Gleichung (II) multiplizieren mit $1/2$ und erhalten dann das gleichwertige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & 4 & (I) \\ 3x & + & 2y & = & 3 & (III) = \frac{1}{2} \cdot (II) \end{array}$$

Subtraktion der Gleichung (III) von Gleichung (I) liefert

$$\begin{array}{rcrcrl} & & 0 & = & 1 & (IV) = (I) - (III) \\ 3x & + & 2y & = & 3 & (III) \end{array}$$

Gleichung (IV) ist aber offensichtlich unlösbar ($\longrightarrow$ Widerspruch), wesewegen das gesamte Gleichungssystem unlösbar ist.

Bsp. 12.4

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & 10 & (I) \\ -6x & - & 4y & = & -20 & (II) \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen, wie sich herausstellen wird. Gleichung (II) ist nämlich das (-2)-Fache von Gleichung (I). Durch diese Äquivalenz (vgl. Satz 11.3 ▶89) lösen alle jene $(x,y)^T$ das Gleichungssystem, die eine der beiden Gleichungen lösen. Manchmal formt man auch um zu

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & = & 10 & (I) \\ & & 0 & = & 0 & (III) = (II) + 2 \cdot (I) \end{array}$$

Wir haben somit unendlich viele Lösungen. Geometrisch interpretiert (vgl. ▶104) handelt es sich um ein und die selbe Gerade. Wird beispielsweise das x frei gewählt ($\longrightarrow$ Parameter), so können wir ein passendes y immer durch die Vorschrift

$$y = 5 - \frac{3}{2}x$$

erhalten. Oft schreibt man auch $x = \lambda$ und man erhält

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 5 - \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

wenn man Rechenregeln für Vektoren (vgl. ▶205) verwendet. Damit können wir die Lösungsmenge schreiben als

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

12.1.2. Eliminationsverfahren

Auch für größere Gleichungssysteme geeignet ist das sogenannte Eliminationsverfahren (manchmal auch Additionsverfahren genannt), bei dem man Schritt für Schritt systematisch Variablen durch Addition/Subtraktion von Gleichungen wegbringt (eliminiert). Das schöne daran: Dieses Verfahren finden wir im Studium wieder, nämlich unter dem Namen Gauß-Algorithmus (siehe ▶104). Es folgt ein einfaches Beispiel, in dem wir das Eliminationsverfahren verwenden:

Bsp. 12.5

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl l} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 & (I) \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & (II) \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 & (III) \end{array}$$

Wir versuchen nun, in Gleichung (II) und (III) die Variable x_1 zu eliminieren, indem wir passende Vielfache von Gleichung (I) addieren (bzw. subtrahieren). Die Umformungsschritte schreiben wir mit:

$$\begin{array}{rrcrcrl} x_1 & & + & 2x_3 & = & 2 & (I) \\ & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & (IV) = (II) + (-1) \cdot (I) \\ & x_2 & - & 4x_3 & = & -3 & (V) = (III) + (-2) \cdot (I) \end{array}$$

Jetzt verwenden wir mit Gleichung (IV), um in Gleichung (V) die Unbekannte x_2 zu eliminieren:

$$\begin{array}{rrcrcrl} x_1 & & + & 2x_3 & = & 2 & (I) \\ & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & (IV) \\ & & & 9x_3 & = & 9 & (VI) = ((IV) + (-2) \cdot (V) \end{array}$$

Wir haben eine sogenannte Stufenform und damit $x_3 = 1$ erhalten und können nun durch sogenannte Rücksubstitution in Gleichung (IV) den Wert für x_2 berechnen, nämlich

$$x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_3) = 1$$

und durch Gleichung (I) erhalten wir $x_1 = 2 - 2x_3 = 0$ Damit ist $\mathbb{L} = \{(0, 1, 1)^T\}$.

Noch eine wichtige Anmerkung zum Lösen von (linearen) Gleichungssystem: An der Hochschule wird immer das gesamte Gleichungssystem angeschrieben. Wir »verlieren« also Gleichungen, mit denen wir momentan nicht arbeiten, grundsätzlich nicht, so wie es in der Schule üblich ist. Damit sich die Lösungsmenge eines Gleichungssystems nicht ändert, darf sich die Anzahl der Gleichungen nicht ändern. Wir halten das allgemeine Vorgehen einmal fest:

Satz 12.1

Allgemeines Vorgehen zum Lösen eines linearen Gleichungssystems:

i) Verwende die Glg. 1 (nach Möglichkeit), um x_1 in den Gleichungen 2 bis m zu eliminieren.

ii) Verwende die 2. Gleichung, um x_2 in den Gleichung 3 bis m zu eliminieren.

iii) Wiederhole diese Verfahren, bis man in Gleichung m angelangt ist. Kommt in der Gleichung k die Unbekannte x_k nicht vor, so vertausche diese Gleichung mit einer Gleichung weiter unten, die die Unbekannte x_k noch enthält.

Bleiben in der m-ten Gleichung mehr als eine Unbekannte übrig – sagen wir $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ –, so können wir $x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ als Parameter frei bzw. beliebig wählen und wir erhalten unendlich viele Lösungen. Erhalten wir in der m-ten Gleichung (oder schon vorher) einen Widerspruch wie beispielsweise $0 = 3$, so ist das Gleichungssystem unlösbar.

12.1.3. Geometrische Interpretation

Für zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten ist auch die geometrische Interpretation üblich. So wird jeweils eine Gleichung als Gerade (vgl. ►209) in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) interpretiert:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \qquad (1)$$

Diese Gleichung entspricht dann jeweils einer sogenannten Normalform einer Geraden. Wir erhalten also durch Gleichung (1) die Gerade g_1 als die Menge

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \right\}$$

Die Geraden g_1 und g_2 haben dann genau eine der folgenden drei Lagebeziehungen zueinander:

- $g_1 = g_2$ (die Geraden sind ident)
- $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$ (die Geraden sind parallel, aber nicht ident)
- $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ mit $S \in \mathbb{R}^2$ (die Geraden haben genau einen Schnittpunkt)

Diese Sachverhalte lassen sich im Wesentlichen auch auf den Raum ($\mathbb{R}^3$) übertragen, wobei eine weitere Lagebeziehung (windschief) notwendig wird.

12.1.4. Ausblick: Matrizenschreibweise – Gauß-Algorithmus

Wir wollen uns nun eine effektive, Notations-sparsame Methode überlegen, mit der wir systematisch lineare Gleichungssysteme lösen können. Fassen wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

als Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

auf, so können wir mit Hilfe der Schreibweise als Linearkombination►220 der Spalten folgende Gleichung finden:

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{A_1} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b} .$$

Da x_1 nur mit der ersten Spalte zusammenhängt, x_2 mit der zweiten, $\dots$, x_n mit der n-ten – und wir die Reihenfolge nicht ändern wollen, – reicht es doch, wenn wir nur die einzelnen Koeffizienten geordnet zusammenschreiben. Wir erhalten dadurch eine Matrix►223 A, in der wir die Koeffizienten geordnet notieren – die sogenannte Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_1 & \dots & A_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Klar ist: Wenn wir die üblichen Umformungen im Rahmen des Eliminationsverfahrens mit den Gleichungen machen – also etwas die erste Gleichung zur zweiten addieren –, so hat das auch Auswirkungen auf die rechte Seite b. Wir müssen also den Vektor b berücksichtigen und schreiben daher die sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & & | & | \\ A_1 & \dots & A_n & b \\ | & & | & | \end{array}\right).$$

Wir werden uns nun überlegen, wie sich gewöhnliche Rechenschritte, die man beim Lösen von Gleichungssystemen mit dem Eliminationsverfahren benötigt, auf diese erweiterte Koeffizientenmatrix auswirkt. Diese Rechenschritte werden übrigens elementare Zeilenumformungen genannt, da sie die Zeilen der Matrix betreffen. Der Name des Verfahrens ist »Gauß-Algorithmus«

Das Praktische am Gauß-Algorithmus ist: Diese Methode lässt sich recht einfach programmieren, wodurch der Computereinsatz sehr einfach möglich ist. Gängige Mathematik-Programme wie Mathematica oder MatLab haben diesen Algorithmus implementiert. Noch als kleiner Ausblick: Damit wir dieses Gleichungssystem lösen konnten, war eine bestimmte Anzahl an Schritten (Rechenoperationen) nötig. In der Numerischen Mathematik fragt man sich beispielsweise, ob es diesbezüglich nicht noch effektivere Methoden gibt, die im Allgemeinen mit weniger Aufwand Lösungen finden ...

Auf den folgenden beiden Seiten ist der Algorithmus mitsamt eines Beispiels beschrieben:

Satz 12.2

Wir können Gleichungssysteme mit sogenannten Matrizen in Verbindung bringen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Wichtig: Alle folgenden Schritte verändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht.

- Das Multiplizieren der j-ten Gleichung mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entspricht dem Multiplizieren der j-ten Zeile mit λ. Wir erhalten also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \dots & \lambda a_{jm} & \lambda b_j \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_m \end{array}\right).$$

- Das Vertauschen von Gleichung i mit Gleichung j verändert die Lösung des Gleichungssystems klarerweise nicht und entspricht einem Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile. Wir erhalten also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} & b_j \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_m \end{array}\right).$$

- Addieren wir die i-te Gleichung zur j-ten Gleichung, so entspricht das der Addition von Zeile i zu Zeile j:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \dots & a_{jm}+a_{im} & b_j+b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_m \end{array}\right).$$

Wir werden nun den Gauß-Algorithmus (Gauß'sche Eliminationsverfahren) anhand eines Beispiels demonstrieren.

Bsp. 12.6

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 & (I) \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 & (II) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 8 & (III) \end{array}$$

und schreiben es auf die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems um:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Wir eliminieren x_1 in der Gleichung (II). Umgelegt auf die Matrix bedeutet das, dass wir a_{21} (also den Eintrag in der zweiten Zeile und ersten Spalte) zu 0 machen wollen. Dafür addieren die erste Zeile zur zweiten und erhalten

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Nun machen wir a_{31} zu 0. Dafür subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile zur dritten und erhalten

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Nun addieren wir noch Zeile zwei zu Zeile drei und erhalten eine Nullzeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Manchmal ist es üblich, die Matrix noch einfach zu machen, indem wir beispielsweise die zweite Zeile durch 2 dividieren. Die führenden Koeffizienten (also jene ersten Einträge in einer Zeile, die ungleich 0 sind) sind damit also 1. Die Nullen lässt man auch gerne weg und wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & & \end{array}\right).$$

Diese Form der (erweiterten) Koeffizientenmatrix nennt sich übrigens Zeilenstufenform.

Wir können nun $x_3 = \lambda$ als Parameter wählen. Rückinterpretiert als Gleichungen ist dann $x_2 + x_3 = 2$ bzw. $x_2 = 2 - \lambda$ und mit der ersten Zeile $x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$ ist dann $x_1 = 7 - (2 - \lambda) - 2\lambda = 5 - \lambda$. Damit erhalten wir als Lösungsvektor(en)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \lambda \\ 2 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot (-1 - 11)^T \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

12.2. Nichtlineare Gleichungssysteme

Während wir bei linearen Gleichungssystem systematisch durch passende Algorithmen nach Lösungen suchen können, ist das bei nichtlinearen Gleichungen deutlich schwieriger. Gerade deswegen hat man lineare Gleichungssysteme lieber. In der Praxis geht man sogar so weit, durch sogenannte Linearisierungen »hässliche« Gleichungssysteme durch lineare zu approximieren bzw. zu ersetzen. Trotzdem gibt es in diesem Abschnitt ein Beispiel für eine interessante Fragestellung, die auf eine nichtlineares Gleichungssystem in 2 Unbekannten führt ...

Bsp. 12.7

Seien $u, v \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen, die nicht Gleichzeitig 0 sind. Wir basteln uns daraus die komplexe Zahl $u + iv \neq 0$. Wir stellen uns die Frage, ob es dann auf jeden Fall eine komplexe Zahl z gibt, sodass die Gleichung

$$z_1^2 = z_2^2 = u + iv$$

erfüllt ist. Anders gefragt: Hat jede komplexe Zahl eine Wurzel?

Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir versuchen nun Bedingungen für x und y zu finden, falls z eine Lösung ist:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) = u + iv$$

Also muss eine Lösung z das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = u \qquad (A_1)$$
$$2xy = v\,. \qquad (A_2)$$

erfüllen. Wir haben also zwei (nichtlineare) Gleichungen in zwei Unbekannten erhalten und versuchen nun, $x, y \in \mathbb{R}$ konkret aus u und v zu berechnen. Dafür überlegen wir uns

$$\begin{aligned}
(x^2 + y^2)^2 &= \left((x^2 - y^2) + 2y^2\right)^2 \\
&= \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u}{}^2 + 2(x^2 - y^2)2y^2 + (2y^2)^2 \\
&= u^2 + 4x^2y^2 - 4y^4 + 4y^4 \\
&= u^2 + 4x^2y^2 \\
&= u^2 + v^2\,.
\end{aligned}$$

Da $u^2 \geq 0$ und $v^2 \geq 0$ sind, können wir die Wurzel ziehen und mit Gleichung (A_1) erhalten wir das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = u \qquad (B_1)$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}\,. \qquad (B_2)$$

Mit $\frac{1}{2}\left((B_1) + (B_2)\right)$ bzw. $\frac{1}{2}\left((B_1) - (B_2)\right)$ bzw. erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} + u\right) \\
y^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2 + v^2} - u\right)\,.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind jeweils nicht negativ, da

$$\sqrt{u^2 + v^2} \geq 0$$

ist und wir können die Wurzel ziehen und erhalten jeweils zwei reelle Lösungen, von denen jeweils eine negativ ist

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}+u\right)}$$
$$y_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)} \ .$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung für v durch:

Fall $v = 0$ Dann erhalten wir

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2}+u\right) = \frac{1}{2}\left(|u|+u\right)$$
$$y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2}-u\right) = \frac{1}{2}\left(|u|-u\right) \ .$$

und je nachdem, ob $u > 0$ oder $u < 0$ ist, erhalten wir $y = 0$ oder $x = 0$ und damit ist

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{u} \qquad \text{bzw.} \qquad z_{1,2} = \pm i\sqrt{u} \ .$$

Fall $v \neq 0$ Wir müssen uns noch überlegen, welche Vorzeichenkombinationen von x und y tatsächlich Lösungen unserer Gleichungen (A_1) und (A_2) sind. Dafür schreiben wir

$$x = \operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}+u\right)} \qquad \text{bzw.} \qquad y = \operatorname{sgn}(y)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)}$$

wobei $\operatorname{sgn}(x)$ bzw. $\operatorname{sgn}(y)$ das Vorzeichen (also ± 1) von x bzw. y beinhaltet, vgl. Def. 16.7 ▶143. Wir stellen fest: Die Gleichung (A_1) ist immer erfüllt, da beim Quadrieren die Vorzeichen verloren gehen. Dagegen ist (A_2) nicht immer erfüllt, denn

$$\begin{aligned}
2xy &= 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}+u\right)}\cdot\operatorname{sgn}(y)\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)}\\
&= \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\sqrt{\left(\sqrt{u^2+v^2}+u\right)\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)}\\
&= \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\sqrt{u^2+v^2-u^2} = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\sqrt{v^2}\\
&= \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\cdot|v| \overset{!}{=} v
\end{aligned}$$

Es kommt also auf das Vorzeichen von v an, welcher der beiden Lösungskandidaten tatsächlich Lösungen sind: Ist $\operatorname{sgn}(v) = 1$, so liefert die Bedingung $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$ genau 2 Lösungen, nämlich x_1, y_1 und x_2, y_2, also

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 = x_2 + iy_2 \ .$$

Ist dagegen $\operatorname{sgn}(v) = -1$, so liefert die Bedingung $\operatorname{sgn}(x) = -\operatorname{sgn}(y)$ genau 2 Lösungen, nämlich x_1, y_2 und x_2, y_1, also

$$z_1 = x_1 + iy_2 \qquad \text{und} \qquad z_2 = x_1 + iy_2 \ .$$

Insgesamt haben wir also festgestellt: Jede komplexe Zahl $u + iv \neq 0$ hat genau zwei Lösungen in $\mathbb{C}$, die immer verschieden sind, und es gilt

$$z_1 = -z_2 \ .$$

13. Ungleichungen

13.1. Lineare & Quadratische Ungleichungen

Ähnlich wie wir Gleichungen auf Lösbarkeit untersuchen können, können wir auch Ungleichungen versuchen zu lösen. Ähnlich wie für Gleichungen gibt es sogenannte »Äquivalenzumformungen«:

Für alle $x, y, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad x + c \leq y + c$$

Analoges für »Größer gleich«, da wir einfach nur die Seiten vertauschen:

$$x \geq y \qquad \Leftrightarrow \qquad x + c \geq y + c$$

Diese Umformungen gelten sinngemäß auch für das Subtrahieren (als Spezialfall der Addition). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ gilt:

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad cx \leq cy\ ,$$

aber für $c < 0$:

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad cx \geq cy\ .$$

Bei Multiplikation mit negativen Zahlen (und demnach auch bei Division durch negative Zahlen) dreht sich das Kleiner-Zeichen um. Das ist gilt es beim Lösen von Ungleichungen zu beachten. Entscheidend ist dabei nicht das scheinbare Vorzeichen eines Faktors, sondern sein tatsächliche Vorzeichen »insgesamt«: Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$ und damit ist

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad -cx \leq -cy\ .$$

Alle weiteren Umformungen lassen sich auf diese Rechenregeln zurückführen:

Bsp. 13.1

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt:

$$x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{1}{x} \geq y \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq y \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot \frac{1}{y} \geq y \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$$

Bsp. 13.2

Gesucht sind alle (reellen) Lösungen der Ungleichung

$$-\frac{3x}{2} + 2 > \frac{4}{5}\ .$$

Wir bringen schultypisch die Zahlen auf eine Seite und die Variable auf die andere, erhalten also

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{5} &> \frac{3x}{2} && \Leftrightarrow \\ \frac{6}{5} &> \frac{3x}{2} && \Leftrightarrow \\ \frac{4}{5} &> x \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} = (-\infty, \frac{4}{5})$. $\frac{4}{5}$ ist damit nicht mehr in der Lösungsmenge enthalten.

Bsp. 13.3

Gesuch sind alle (klarerweise reellen) Lösungen der Ungleichung

$$\frac{x+2}{3x-2} \geq 3 \,.$$

Grundmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, damit der Nenner immer ungleich 0 ist. Jetzt eine wichtige Überlegung: Je nachdem, welchen Wert bzw. Größe x hat, kann das Vorzeichen des Nenners $3x-2$ positiv oder auch negativ sein, was sich auf das Multiplizeren mit dem Nenner auswirkt. Somit benötigen wir eine Fallunterscheidung:

- Fall $3x-2>0$ bzw. $x>\frac{2}{3}$:

  Dann erhalten wir

  $$\begin{aligned} x+2 &\geq 3\cdot(3x-2) && \Leftrightarrow \\ x+2 &\geq 9x-6 && \Leftrightarrow \\ 8 &\geq 8x && \Leftrightarrow \\ 1 &\geq x && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

  Somit muss x sowohl die Ungleichung $x \leq 1$ und $x > \frac{2}{3}$ erfüllen. Anders gesagt: Wir suchen den Durchschnitt der Intervalle $(-\infty, 1]$ und $(\frac{2}{3}, \infty)$. Eine Skizze auf der Zahlengeraden hilft! Somit ist

  $$\mathbb{L}_1 = (-\infty, 1] \cap (\frac{2}{3}, \infty) = (\frac{2}{3}, 1] \,.$$

- Fall $3x-2<0$ bzw. $x<\frac{2}{3}$: Dann erhalten wir

  $$\begin{aligned} x+2 &\leq 3\cdot(3x-2) && \Leftrightarrow \\ x+2 &\leq 9x-6 && \Leftrightarrow \\ 8 &\leq 8x && \Leftrightarrow \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$

  Die Rechenschritte sind natürlich die selben, nur das Ungleich-Zeichen hat sich umgedreht. Wir suchen also all jene x, die sowohl die Ungleichung $1 \leq x$ und auch $x < \frac{2}{3}$ erfüllen, in Intervallschreibweise $x \in [1, \infty)$ und $x \in (-\infty, \frac{2}{3})$, also

  $$\mathbb{L}_2 = \{\} = \emptyset \,.$$

Insgesamt sind all jene x Lösungen, die entweder Lösungen von Fall 1 oder Lösungen von Fall 2 sind. Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (\frac{2}{3}, 1] \cup \emptyset = (\frac{2}{3}, 1] \,.$$

Bsp. 13.4

Gesucht sind alle (reellen) Lösungen der Ungleichung

$$(x-3)(6-3x) \geq 0 \ .$$

Zuerst vereinfachen wir soweit als möglich:

$$\begin{aligned} (x-3)(x-2)\cdot(-3) \geq 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ (x-3)(x-2) \leq 0 \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber machen wir eine Fallunterscheidung, nämlich für < 0 und $= 0$: Laut dem Produkt-Null-Satz ist ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann gleich 0, wenn (zumindest) einer der Faktoren 0 ist. Also sind $x = 2$ bzw. $x = 3$ Lösungen unserer Ungleichungen, damit ist $\mathbb{L}_0 = \{2,3\}$. Jetzt bleiben noch die Lösungen für < 0 zu finden. Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann negativ, wenn die Faktoren verschiedene Vorzeichen haben:

- Fall $+-$: $x-3 > 0$ und $x-2 < 0$:

  Das ist erfüllt für alle $x \in (3,\infty)$, die gleichzeitig auch im Intervall $(-\infty,2)$ liegen:

  $$\mathbb{L}_1 = (-\infty,2) \cap (3,\infty) = \emptyset \ .$$

- Fall $-+$: $x-3 < 0$ und $x-2 > 0$:

  Das ist erfüllt für alle $x \in (-\infty 3)$, die gleichzeitig auch im Intervall $(2,\infty)$ liegen:

  $$\mathbb{L}_2 = (-\infty 3) \cap (2,\infty) = (2,3) \ .$$

Insgesamt ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \cup \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [2,3]$.

Dieses Beispiel hat auch eine einfache geometrische Interpretation: Wir untersuchen, an welchen Stellen die Parabel $f(x) = (x-3)(x-2)$ negative Bild-Werte hat. 2 und 3 sind die Nullstellen, die Parabel ist nach oben offen, also haben alle $x \in [2,3]$ einen negativen Funktionswert.

13.2. Betragsungleichungen

Ungleichungen, in den Beträge▶140 vorkommen, nennen wir Betragsungleichungen. Zum Auflösen dieser Ungleichungen müssen wir die Definition des Betrags einer Zahl kennen und benützen, um die Betragsstriche aufzulösen.

Bsp. 13.5

Gesucht sind alle Lösungen der Ungleichung

$$|-3x+24| \leq 3$$

Sinnvoll bei Aufgabenstellungen dieser Art ist es, zuerst mit Hilfe der Rechenregeln für Beträge die Ungleichung zu vereinfachen

$$\begin{aligned} |(-3)\cdot(x-8)| \leq 3 \qquad &\Leftrightarrow \\ |-3|\cdot|x-8| \leq 3 \qquad &\Leftrightarrow \\ 3\cdot|x-8| \leq 3 \qquad &\Leftrightarrow \\ |x-8| \leq 1 \end{aligned}$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch (eine einfachere geometrische Interpretation für dieses Beispiel folgt am Ende):

- Fall 1: Argument des Betrags ≥ 0: $x-8 \geq 0$ (also $x \geq 8$):

  Dann löst sich die Ungleichung auf zu

  $$\begin{aligned} x-8 &\leq 1 \qquad \Leftrightarrow \\ x &\leq 9 \end{aligned}$$

  Somit ist $\mathbb{L}_1 = [8,\infty) \cap (-\infty, 9] = [8,9]$.

- Fall 2: Argument des Betrags < 0: $x-8 < 0$ (also $x < 8$):

  Dann löst sich die Ungleichung auf zu

  $$\begin{aligned} -(x-8) &\leq 1 \qquad \Leftrightarrow \\ 7 &\leq x \end{aligned}$$

  Somit erhalten wir $\mathbb{L}_2 = (-\infty 8) \cap [7,\infty) = [7,8)$.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [7,8) \cup [8,9] = [7,9] \ .$$

Jetzt die in diesem Beispiel einfache geometrische Interpretation: Wir suchen alle jene x, die von 8 einen Abstand kleiner oder gleich 1 haben. Das sind natürlich alle Zahlen zwischen 7 und 9.

Bsp. 13.6

Wir betrachten die Ungleichung

$$\left| \frac{x-3}{x+2} \right| \geq 3$$

Durch die Rechenregeln für Beträge erhalten wir

$$\frac{|x-3|}{|x+2|} \geq 3$$

Es empfiehlt sich, die Beträge jetzt noch nicht aufzulösen ($\rightarrow$ verleitet zu Fehlern), sondern zuerst denn Nenner auf die rechte Seite zu bringen. Für $x \neq -2$ ist $|x+2| > 0$, wodurch wir die gleichwertige Ungleichung

$$|x-3| \geq 3\,|x+2|$$

erhalten. Nun wären wieder Fallunterscheidungen zum Auflösungen der Beträge notwendig ...

Zusammenfassung

Folgende Äquivalenzumformungen gelten für reelle (bzw. komplexe) Gleichungen (T sei dabei ein beliebiger Term):

$$T_L = T_R \quad \Leftrightarrow \quad T_L \pm T = T_R \pm T$$

sowie, falls T bzw. $T(x)$ ungleich 0 ist:

$$T_L = T_R \quad \Leftrightarrow \quad T_L \cdot T = T_R \cdot T$$

Äquivalente Gleichungen haben die selben Lösungen bzw. Lösungsmengen.

Für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ haben die Lösungen (Nullstellen) (sofern es sie gibt) die Form

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Das Polynom zerfällt dann in sogenannte Linearfaktoren: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Für Gleichungen höheren Grades der Form

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

kann man für gewöhnlich (bei den gängigen Übungsbeispielen) eine Nullstelle x_0 als Teiler von a_0 erraten. Danach spaltet man den Linearfaktor $(x - x_0)$ durch Polynomdivision ab und erhält dadurch ein um ein Grad niedrigeres Polynom.

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt: Sind $a_j \in \mathbb{C}$, so zerfällt jedes nicht konstante Polynom in (komplexe) Linearfaktoren. Sind $a_j \in \mathbb{R}$, so zerfällt jedes nichtkonstante Polynom in reelle Linearfaktoren oder/und in quadratische Linearfaktoren ohne reelle Nullstellen.

Ein Lineares Gleichungssystem ist eine Ansammlung von m linearen Gleichungen in n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme können keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben. Für kleine Gleichungssysteme verwendet man das gewöhnliche Eliminationsverfahren, wo wir immer zwei Gleichungen verwenden, um fortlaufend eine Variable zu eliminieren. Für größere Gleichungssysteme verwenden wir bevorzugt die gleichwertige Matrizenschreibweise:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} | & & | & | \\ A_1 & \ldots & A_n & b \\ | & & | & | \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Für diese erweiterte Koeffizientenmatrix führen wir den sogenannten Gauß-Algorithmus durch, d. h. wir schaffen systematisch unter den führenden Koeffizienten 0 und gelangen zu einer Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{a}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right).$$

Erlaubte Schritte, die die Lösungsmenge unverändert lassen, sind das Vertauschen zweier Zeilen, dass Multiplizieren einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ sowie das Addieren einer Zeile zu einer anderen. Letztendlich wird die Koeffizientenmatrix wieder in Gleichungen rückübersetzt und wenn nötig Parameter gewählt.

Ungleichungen sind Ausdrücke der Form $T_L < T_R$ bzw. $T_L \leq T_R$. Meist gibt es mehr als eine Zahl, die die Ungleichung löst. Ist T ein beliebiger Term, so gilt

$$T_L < T_R \qquad \Leftrightarrow \qquad T_L + T < T_R + T$$

Ist T bzw. $T(x) > 0$, so ist

$$T_L < T_R \qquad \Leftrightarrow \qquad T_L \cdot T < T_R \cdot T$$

ist dagegen T bzw. $T(x) < 0$, so gilt

$$T_L < T_R \qquad \Leftrightarrow \qquad T_L \cdot T > T_R \cdot T$$

In Worten: Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert (oder dividiert), so dreht sich das Kleiner-Zeichen um. Analoge Aussagen gelten für $\leq$.

Teil V.

Funktionen (Abbildungen)

14. Grundlagen

In vielen Schulen wird der Funktionsbegriff vergleichsweise schlampig genutzt. So schreib man etwa $y = x^2$ und nennt diese »Gleichung« eine Funktion. Unter Umständen ist man es gewohnt, noch unreflektiert einen Zusatz wie $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ hinzuzufügen, ohne genau zu wissen oder sich genau zu überlegen, was denn das bedeutet. Bei einfachen (Schul-)Beispielen mag das noch ausreichend sein, weil sowieso nur bestimmte Funktionen in Frage kommen. In der (abstrakten) Hochschulmathematik reicht das dagegen nicht – eine Exaktifizierung des Funktionsbegriffes ist nötig.

Definition 14.1: Funktion (Abbildung)

Um das mathematische Objekt, das wir Funktion nennen, festlegen zu können, brauchen wir zuerst einmal zwei nichtleere Mengen, die häufig mit $\mathcal{D}$ (dem Definitionsbereich bzw. Definitionsmenge) und Y (dem Wertevorrat bzw. Zielmenge) bezeichnet werden. Eine Funktion f beschreibt nun einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Mengen, der bestimmte Eigenschaften erfüllt, nämlich:

Die Funktion f ordnet jedem Element $x \in \mathcal{D}$ genau ein zugehöriges Element $y \in Y$ zu. Da dieses zu x zugehörige Element y eindeutig bestimmt ist (und von x abhängt), schreibt man häufig $f(x)$ dafür. In Symbolschreibweise erhalten wir

$$\forall x \in \mathcal{D}\ \exists! y \in Y\ :\ y = f(x)$$

also in Worten: Zu jedem $x \in D$ gibt es genau ein $y \in Y$ sodass die Gleichung $y = f(x)$ erfüllt ist. y heißt dann auch »*das* Bild von x unter f« oder auch nur »Funktionswert an der Stelle x«. Umgekehrt sagen wir, x ist *ein* Urbild von y unter f.

Eine gebräuchliche Schreibweise für eine Funktion ist die folgende:

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad f : \begin{cases} \mathcal{D} \to Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Wir sagen: »Die Funktion f geht von der Menge $\mathcal{D}$ in die Menge Y und jedes $x \in \mathcal{D}$ wird abgebildet auf $f(x) \in Y$.« Man beachte dabei die verschiedenen Pfeile, der erste steht zwischen zwei Mengen, der zweite zwischen zwei Elementen dieser Mengen. Die Zuordung $x \mapsto f(x)$ nennt sich Zuordnungsvorschrift oder Abbildungsvorschrift.

In der Hochschulmathematik wird statt dem Begriff »Funktion« auch gerne der Begriff »Abbildung«[1] verwendet. Den Begriff Funktion verwendet man auf jeden Fall, wenn $Y \subset \mathbb{R}$ bzw. $Y \subset \mathbb{C}$ ist.[2]

Das Konzept der Funktion (Abbildung) (engl.: map, mapping) laut unserer Definition ist äußerst allgemein. Wir benötigen nur (nichtleere) Mengen, die selbstverständlich auch verschieden sein dürfen, sowie eben eine Zuordnung(svorschrift). Es ist weder gefordert, dass man in den Mengen (egal nach welchen Regeln) Rechnen können muss, noch werden weitere Einschränkungen oder Konkretisierungen der Mengen gefordert. Damit ist diese Definition sehr grundlegend, erlaubt eine hohe Abstraktion und ist gerade dadurch in der Mathematik so fruchtbar.

1 Das ist vor allem in der Linearen Algebra der Fall, wenn man Funktionen zwischen zwei Vektorräumen betrachtet und die Funktionen zusätzlich noch bestimmte Eigenschaften besitzen, die unter dem Begriff »Linearität« zusammengefasst werden. Mehr dazu weiter unter 16.1.1 Affine Funktionen ▶133 und 25.4 Lineare Abbildungen ▶223

2 Für die Komplexe Analysis, die Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ untersucht, ist daher auch die Bezeichnung »Funktionentheorie« gebräuchlich.

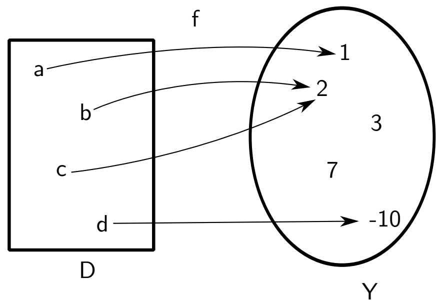
Tipp: Für den Anfang ist es sehr häufig sinnvoll und äußerst hilfreich, möglichst einfache Funktionen zu betrachten, um sich die Definitionen und Eigenschaften, die auf den nächsten Seiten folgen werden, zu überlegen. Wichtig ist dabei zunächst, nicht unbewusst Spezialfälle zu verwenden, sondern möglichst allgemein zu bleiben.

Ein typisches Beispiel für eine Funktion, anhand dessen man sich vergleichsweise viel überlegen kann ...

Bsp. 14.1

Wir definieren $\mathcal{D} := \{a, b, c, d\}$ und $Y := \{1, 2, 3, 7, -10\}$. Dann legen wir $f : \mathcal{D} \to Y$ durch eine Wertetabelle (links) fest und können auch noch ein sogenanntes Pfeildiagramm (rechts) zeichnen:

x	$f(x)$
a	1
b	2
c	2
d	10



Dieses Beispiel lässt gleich einige Erkenntnisse zu: $\mathcal{D}$ und Y müssen nicht gleich viele Elemente beinhalten, nicht alle Elemente in Y müssen »getroffen« werden, Elemente in Y dürfen auch mehrfach getroffen werden ...

Bsp. 14.2

Es sei $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann definieren wir $f : \mathcal{D} \to Y$ durch $x \mapsto f(x) := x^2$. Das ist die sogenannte Standard-Parabel.

Bsp. 14.3

Sei $\mathcal{D} = Y := \mathbb{N}$. Dann sei $f : \mathcal{D} \to Y$ definiert durch $n \mapsto f(n) := n + 1$. f heißt dann übrigens Nachfolger-Funktion▶55.

Bsp. 14.4

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 2 \\ 4 & \text{für } x = 3 \\ x+2 & \text{für } x > 3 \end{cases} .$$

Wir stellen fest: Die Funktionsvorschrift darf Fallunterscheidungen beinhalten – muss also kein geschlossener Ausdruck sein.

Bsp. 14.5

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

Die beiden Mengen $\mathcal{D}$ und Y müssen also grundsätzlich nicht die selbe Struktur haben, sondern dürfen auch verschiedene »Dimensionen« haben.

Bsp. 14.6

Sei $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ und sei Y die Menge aller quadratischen, reellen (2×2)-Matrizen▶223, also

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dann sei $f : \mathcal{D} \to Y$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} .$$

Bsp. 14.7

Sei $\mathcal{D} = Y = \mathbb{C}$. Dann definieren wir $f : \mathcal{D} \to Y$ durch $x + iy \mapsto x - iy$. Diese Abbildung ordnet einer komplexen Zahl z die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ zu, also $f(z) = \bar{z}$.

Bsp. 14.8

$\mathcal{D} = Y$ sei die Potenzmenge von $\mathbb{N}$, d. h. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, also

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \ldots\} .$$

Dann definieren wir $f : \mathcal{D} \to Y$ durch

$$A \mapsto A \cup \{1\}$$

für $A \in \mathcal{D}$. Wir stellen fest: Der Definitionsbereich muss nicht immer eine einfache Zahlenmenge sein, sondern darf auch komplizierte Elemente (in diesem Fall selbst Mengen) beinhalten.

Bsp. 14.9

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix} .$$

Funktionen können also auch auf verschieden-dimensionalen Vektorräumen▶205 definiert sein. Dieses f ist sogar linear▶223.

Bsp. 14.10

Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller Funktionen von einer nichtleeren Menge M in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, also

$$\mathcal{D} := \{g : M \to \mathbb{R} | \; g \text{ ist eine wohldefinierte Funktion}\} .$$

Dann sei ein beliebiges $m \in M$ fix gewählt. Wir definieren dann $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ durch

$$g \mapsto f(g) := g(m)$$

für $g \in \mathcal{D}$. f heißt dann »Auswerungsabbildung an der Stelle m«.

Anhand dieser vielseitigen Beispiele sollte man einen Eindruck erhalten haben, wie umfassend und vielseitig das Konzept der Funktion ist. Manche dieser Beispiele oder ähnliche Beispiele werden uns im Laufe des Studiums wieder begegnen ...

14.1. Wohldefiniert und Graph ...

Wie zuvor bereits angeführt, nennen wir die Menge $\mathcal{D}$ »Definitionsbereich« oder »Definitionsmenge«, die Menge Y wollen wir »Wertevorrat« oder »Zielmenge«[3] taufen. Falls mehrere Funktionen im Spiel sind, bezeichnet man den Defintionsbereich von f auch mit $\mathcal{D}(f)$ oder $\mathcal{D}_f$.

Damit eine Funktion wohldefiniert ist, darf der Definitionsbereich nur Elemente umfassen, für die die Abbildungsvorschrift 1.) sinnvoll definiert ist und 2.) das zugehörige Element $f(x)$ auch tatsächlich im Wertevorrat enthalten ist. Zudem muss es für *jedes* Element x aus dem Definitionsbereich auch ein zugehöriges Element $f(x)$ aus dem Wertevorrat geben.

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt – also wenn nicht jedes x ein zugehöriges $f(x)$ hat, das $f(x)$ nicht in Y enthalten ist oder es mehrere zugehörige $f(x)$-Werte gibt, – so sagen wir: »Die Funktion ist nicht wohldefiniert«.

Bsp. 14.11

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ ist keine wohldefinierte Funktion, weil für $x = 0$ der Ausdruck $\frac{1}{0}$ bekanntlich nicht definiert ist, da das nicht sinnvoll möglich ist. Aber z. B. mit der Vorschrift

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wäre f eine wohldefinierte Funktion. Problematische x-Werte können wir also durch Fallunterscheidungen umgehen.

Bsp. 14.12

$f : \mathbb{R} \to (0, \infty$ mit $f(x) = x^2$ ist keine wohldefinierte Funktion, weil $f(0) = 0$ kein Element des Wertevorrates ist, also $0 \notin (0, \infty)$.

Bsp. 14.13

Mit $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ und $Y = \{0, 10\}$ ist durch die Zuordnung

$$\begin{array}{rcr} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 10 \\ 0 & \mapsto & 10 \end{array}$$

keine Funktion definiert.

Hinweis: Erst durch die Angabe von Definitionsbereich, Wertevorrat und Abbildungsvorschrift ist eine Funktion definiert. Nur den Definitionsbereich, etwa $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, und die Abbildungsvorschrift, z. B. $f(x) = \sqrt{x^2}$, anzugeben, reicht nicht aus, um eine Funktion festzulegen. Zwei Funktionen f und g sind genau dann gleich, wenn sowohl die Definitionsbereiche als auch die Wertevorräte jeweils übereinstimmen und zusätzlich für alle Elemente aus dem Definitionsbereich die Gleichung $f(x) = g(x)$ erfüllt ist.

Manchmal schreibt man den Definitionsbereich auch explizit als Teilmenge einer (größeren) Menge, üblich ist $\mathcal{D} \subset X$. Das geschieht meist, wenn man besonders betonen möchte, dass die Funktion grundsätzlich von der Menge X ausgeht und diese Menge X eine besondere Struktur hat, etwa bestimmte Rechenregeln gelten, – aber insgesamt bestimmte Einschränkungen nötig sind, um eine wohldefinierte Funktion zu erhalten. Ein typisches Beispiel soll das illustrieren:

3 Unter Umständen werden auch die Begriffe »Wertemenge« oder »Wertebereich« verwendet. Mit diesen Begriffen besteht aber unter Umständen Verwechslungsgefahr, weswegen wir üblicherweise das Wort »Wertevorrat« verwenden.

Bsp. 14.14

Sei $X := \mathbb{R}$ und $Y := (0,\infty)$. Gesucht ist der größtmögliche Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset X$, sodass die Funktion $f : \mathcal{D} \to Y$ mit der Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 \cdot (x-2)^2}$$

wohldefiniert ist.

Was ist zu untersuchen? 1.) Wir müssen uns überlegen, für welche $x \in X$ die Abbildungsvorschrift überhaupt Sinn macht. 2.) Danach müssen wir noch untersuchen, für welche dieser in Frage kommenden x das Element $f(x)$ tatsächlich auch in Y landet.

1.) $f(x)$ ist genau dann nicht wohldefiniert, wenn durch 0 dividiert wird. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn $x = 1$ oder $x = 2$ ist. Somit kommt grundsätzlich einmal die Menge $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ als Definitionsbereich in Frage.

2.) Welche dieser x liefert nun ein $f(x) \in (0,\infty)$? Zunächst schreiben wir $f(x)$ ein wenig unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für reelle Zahlen ($X = \mathbb{R}$) um:

$$f(x) = \left(\frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)}\right)^2$$

$f(x)$ ist somit das Quadrat einer reellen Zahl, die nicht 0 ist, da der Zähler ungleich 0 ist. All diese Quadratzahlen sind positiv, also $f(x) > 0$.

Somit ist $D := \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \subset \mathbb{R}$ der größtmögliche, reelle Definitionsbereich von f.

Daneben wollen wir auch noch etwas definieren, was vor allem der Anschauung dienlich sein wird und insbesondere bei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bekannt sein dürfte, nämlich der Graph einer Funktion:

Definition 14.2: Graph

Sei $f : \mathcal{D} \subset X \to Y$ eine wohldefinierte Funktion. Dann ist der Graph von f definiert durch

$$graph(f) = G_f := \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D} \wedge y = f(x)\} \ \subset X \times Y.$$

Wir fassen also Urbild und zugehöriges Bild als (geordnetes) Paar $(x, f(x))$ auf. Diese Paare sind im sogenannten Kartesischen Produkt▶46 von X und Y enthalten.

Bsp. 14.15

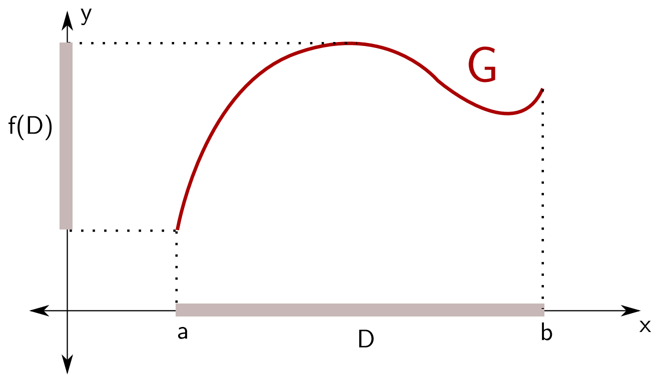
Für $\mathcal{D} = \{0,1,2,3\}$ und $Y = \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = x^3$ folgender Graph gegeben:

$$G_f = \{(0,0),(1,1),(2,8),(3,27)\}\,.$$

Insbesondere besteht der Graph von f nur aus endlich vielen Punkten und ist keine durchgehende Linie bzw. Kurve.

Bsp. 14.16

Es sei $\mathcal{D} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ gegeben und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = Y$. Dann veranschaulicht man üblicherweise Funktionen folgendermaßen:



Das, was auf der y-Achse bereits mit $f(\mathcal{D})$ bezeichnet ist, werden wir im nächsten Kapitel als Bild von f bezeichnen.

14.2. Bild und Urbild

Ausgehend von den bisherigen Definitionen ist man nun daran interessiert, diejenigen Elemente aus dem Wertevorrat anzugeben, die tatsächlich als Bildelemente der Funktion auftreten.

Definition 14.3: Bild von f

Unter dem Bild von f (Kurzbezeichnung: $f(\mathcal{D})$) verstehen wir die Menge

$$f(\mathcal{D}) := \{y \in Y \mid \exists x \in \mathcal{D} \ : y = f(x)\} ,$$

also die Menge aller Bilder von f. In der Menge $f(\mathcal{D}) \subset Y$ sind also all jene Elemente y enthalten, für die es (zumindest) ein passendes $x \in \mathcal{D}$ gibt, sodass die Gleichung $y = f(x)$ erfüllt ist. Im Allgemeinen muss $f(\mathcal{D})$ nicht gleich der Menge Y sein. Gleichheit gilt dann, wenn jedes $y \in Y$ zumindest ein Urbild hat. Diesen Sachverhalt werden wir später mit Surjektivität (siehe ▶123) bezeichnen.

Analog dazu bezeichnet man für eine Teilmenge $M \subset \mathcal{D}$ mit $f(M)$ das Bild von M unter f, das durch

$$f(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M \ : y = f(x)\} ,$$

definiert ist.

Ist $M = \{x\}$, so ist $f(M) = f(\{x\})$, nämlich $f(M) = \{f(x)\}$, wieder eine Menge und sollte nicht mit dem Element bzw. Funktionswert $f(x)$ verwechselt werden.

Bsp. 14.17

Sei $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ definiert durch

x	0	1	2	3
$f(x)$	a	b	b	d

Dann ist $f(\{0, 1\}) = f(\{0, 1, 2\} = \{a, b\}$ und $f(\mathcal{D}) = \{a, b, d\}$

Umgekehrt möchte man nun ausgehend von einem $y \in Y$ wissen, ob es sogenannte »Urbilder« gibt, also Elemente $x \in \mathcal{D}$, für die die Gleichung $f(x) = y$ erfüllt ist. Urbilder sind im Allgemeinen nicht eindeutig, wie das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

mit $x = 2$ bzw. $x = -2$ zu $y = 4$ zeigt.

Definition 14.4

Für einen Teilmenge $N \subset Y$ nennen wir die Menge

$$f^{-1}(N) := \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \in N\}$$

das Urbild von N unter der Abbildung f. Diese Menge ist immer eine Teilmenge von $\mathcal{D}$, kann aber auch leer sein!

Auch hier betrachten wir wieder den ein-elementigen Spezialfall $N = \{y\} \subset Y$. Im Gegensatz zum Bild lässt sich die Menge $f^{-1}(\{y\})$ nicht allgemein angegeben. Insbesondere muss sie kein Element enthalten, kann aber auch mehrere Elemente enthalten.

Bsp. 14.18

Wir setzen das letzte Beispiel fort: Klarerweise ist $f^{-1}(Y) = \mathcal{D}$. Außerdem ist $f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$ und $f^{-1}(\{a, b\}) = \{0, 1, 2\}$ sowie $f^{-1}(\{a\}) = \{0\}$.

14.3. Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Um sich schneller an die hochschulmathematischen Schreibweisen, deren Interpretation sowie die Umsetzung auf konkrete Beispiele zu gewöhnen, definieren und untersuchen wir nachfolgend einige wichtige Eigenschaften, die bei vielen Themen z. B. in der Analysis oder der Linearen Algebra vorkommen und dort oft eine wesentliche Rolle spielen:

Definition 14.5

Sei $f : \mathcal{D} \to Y$ eine wohldefinierte Funktion.

$$\begin{array}{lllll} f \text{ heißt injektiv} & :\Leftrightarrow & \forall y \in f(\mathcal{D}) & \exists! x \in \mathcal{D}: & y = f(x) \\ f \text{ heißt surjektiv} & :\Leftrightarrow & \forall y \in Y & \exists x \in \mathcal{D}: & y = f(x) \\ f \text{ heißt bijektiv} & :\Leftrightarrow & \forall y \in Y & \exists! x \in \mathcal{D}: & y = f(x) \end{array}$$

f heißt also bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Anmerkung: $:\Leftrightarrow$ bedeutet: »per Definition genau dann, wenn«. Vergleiche hierzu auch den **?? ??** ▶**??**. Sehe wir uns die Definitionen nach der Reihe an:

- Bei der Injektivität ist zu beachten, dass nur Aussagen für Elemente aus Y gemacht werden, die auch tatsächlich getroffen werden! Es kommt ja $f(\mathcal{D})$ in der Aussage vor. f heißt injektiv, wenn jedes Bild genau ein Urbild hat.

  Die Definition von injektiv ist auch gleichbedeutend mit: Ist $y \in f(\mathcal{D})$ und ist $y = f(x) = f(a)$ mit $x, a \in \mathcal{D}$, so folgt, dass $x = a$. In Worten: Wenn die Bilder gleich sind, müssen auch die Urbilder gleich sein. Äquivalent dazu ist: Verschiedene Urbilder liefern verschiedene Bilder.
- Surjektivität bedeutet, dass jedes Element aus dem Wertevorrat (zumindest) ein Urbild hat. Es kann auch mehrere geben. In einer einfachen Gleichung geschrieben heißt das $f(\mathcal{D}) = Y$
- Bijektivität bedeutet: Jedes Element aus dem Wertevorrat hat genau ein Urbild. Mit Hilfe der Bijektivität lässt sich auch der Begriff Invertierbarkeit beschreiben, was in 15.3 Invertierbarkeit und Umkehrfunktion ▶129 passieren wird.

Bsp. 14.19

Die Funktionen $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g : \{a, b, cd\} \to \{1, 2, 3, \}$ und $h : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$, die durch folgende Wertetabellen gegeben sind:

x	$f(x)$
a	3
b	1
c	4

x	$g(x)$
a	3
b	1
c	4
d	3

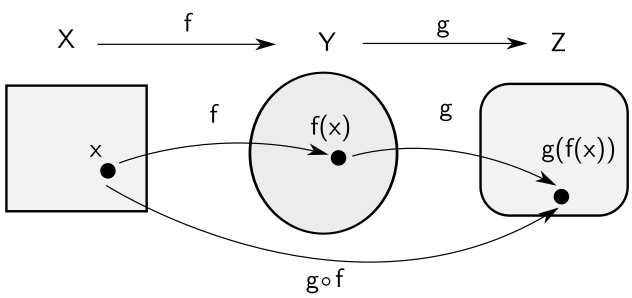
x	$h(x)$
a	3
b	1
c	2

Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv; g surjektiv, aber nicht injektiv und h bijektiv.

14.4. Verkettung von Funktionen: Hintereinanderausführung

Wesentlich für viele Anwendungen (und auch für viele theoretische Überlegungen) im Zusammenhang mit Funktionen ist das Bestreben, Funktionen zu verketten bzw. hintereinander auszuführen. In der Schule wird diese Thematik selten explizit thematisiert (zumindest mit dem hier angestrebten Abstraktionsgrad), aber für gewöhnlich sehr wohl angewandt, etwa bei der Kettenregel▶187 zum Differenzieren von Funktionen. In der Hochschulmathematik ist dieses Konzept häufig in der Form des Zerlegens einer komplizierteren Funktion in einfachere Bestandteile praktisch. Beispiele sind die Hintereinanderausführung stetiger (oder differenzierbarer) Funktionen in der Analysis oder die Mehrfachanwendung von Matrizen auf einen Vektor.

Die Grafik, die man sich bei der Verkettung von Funktionen merken sollte, ist



Definition 14.6: Hintereinanderausführung von Funktionen

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei wohldefinierte Funktionen. Dann definieren wir die Hintereinanderausführung von g nach f ($g \circ f$ »g ring f«) durch

$$g \circ f : \begin{cases} X & \to \quad Z \\ x & \mapsto \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{cases} .$$

Die Merkregel ist: Die Funktion näher am x (also die innere Funktion) wird zuerst ausgeführt. Man beachte, dass die Hintereinanderausführung laut unserer Definition wohldefiniert ist, weil $f(x)$ für alle $x \in X$ auf jeden Fall im Definitionsbereich von g enthalten ist. Zudem sind dann alle $g(y)$ in Y enthalten.

Bsp. 14.20

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x - 1$ und $g(x) = x^2$ definiert. Dann ist

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 \end{cases}$$

und

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1 \end{cases}$$

Insbesondere ist also $f \circ g \neq g \circ f$, da es x-Werte gibt, an denen sich die Bilder unterscheiden. Das heißt, die Hintereinanderausführung von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

In der »Praxis« hat man des Öfteren den Fall, dass die Mengen X, Y, Z nicht von Haus aus passend gegeben sind. Dann müssen diese Mengen häufig passend eingeschränkt werden, damit die Hintereinanderausführung wohldefiniert ist.

Bsp. 14.21

Um das zu erläutern, betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$ und $g : [1, \to \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Wir können hier nicht direkt die Hintereinanderausführung $g \circ f$ von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden, da z. B. für $f(1) = 0$ ist und g an der Stelle 0 nicht definiert ist. Um hier die Hintereinanderausführung $g \circ f$ bilden zu können, müssen wir also sicherstellen, dass $f(x)$ für die in Frage kommenden x sicher im Definitionsbereich von g ist. Im konkreten Beispiel: $f(x) \geq 1$ für alle $x \in D_{g \circ f}$, d. h. wir müssen den Definitionsbereich von f einschränken. Die Beziehung $f(x) \geq 1$ ist gleichbedeutend mit $x^2 \leq 2$, also $x \leq -\sqrt{2}$ oder $x \geq \sqrt{2}$, wie z. B. eine Skizze anschaulich zeigt.

Also ist $g \circ f : (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2 - 1) - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

eine wohldefinierte Hintereinanderausführung.

Vor allem für Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Konzept der Hintereinanderausführung nützlich, wenn Skizzen der Graphen zu erstellen sind. Häufig ist es vergleichsweise einfach, komplizierte Funktionen passend in leicht skizzierbare Funtkionen zu zerlegen. Ausgehend von einer (noch zeichenbaren) »inneren« Funktionen bastelt man dann Stück für Stück weitere Funktionen dazu, bis man auf die gewünschte Funktion kommt.

Bsp. 14.22

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ skizziert man beispielsweise dadurch, indem man eine Zerlegung durchführt, etwa $f = h \circ g$ mit $g(x) = x^2 + 1$ und $h(x) = \frac{1}{x}$. Es gilt: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Einsetzen zeigt, dass unsere Hintereinanderausführung wirklich wohldefiniert ist.

Manchmal ist aber eine Zerlegung in Hintereinanderausführungen nicht sinnvoll, wenn etwa »Funktionsteile« durch Malpunkte oder $+$ und $-$ verbunden sind. Das führt uns zum nächsten Kapitel, wo wir versuchen, mit Funktionen ähnlich wie mit Zahlen zu rechnen, also zu addieren oder zu multiplizieren.

14.5. Summe und Produkt von Funktionen

Definition 14.7

Seien zwei Funktionen $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ gegeben.

Die Funktion $h_1 := f + g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ heißt Summe von f und g (Summenfunktion) und ist definiert durch

$$h_1(x) = (f+g)(x) := f(x) + g(x) \ .$$

Die Funktion $h_2 := f \cdot g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ heißt Produkt von f und g (Produktfunktion) und ist definiert durch

$$h_2(x) = (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \ .$$

Analog werden Differenz und Quotient zweier Funktionen definiert.

Noch ein abstrakter Hinweis, mit der Hoffnung, dass seine Bedeutung im Laufe des Studiums verstanden wird: In der Gleichung $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ wird zwar sowohl auf der linken Seite als auch auf der rechten Seite ein Pluszeichen verwendet. Mathematisch gesehen ist dieses aber von der Struktur her nicht das Gleiche. Während das Plus links zwischen zwei Funktionen steht, verbindet das Plus rechts zwei gewöhnliche (reelle) Zahlen. Das ist ein großer Unterschied, der z. B. in der Linearen Algebra tragend werden wird, wenn wir etwa Vektorräume mit Funktionen als Vektoren untersuchen.

Viele Funktionen lassen sich mit Hilfe dieser Konzepte (Summe, Produkt, Hintereinanderausführung) aus recht elementaren Funktionen zusammenbasteln. Der mathematische Wert ist auch hier wieder sehr groß, wie wir im Kapitel 17 Grenzwerte und Stetigkeit ▶150 feststellen werden.

14.6. Ausblick: Mengentheoretische Definition der Funktion

Es gibt auch einen mathematisch grundlegenderen Zugang zu Funktionen, der nur auf Mengen bzw. Relationen aufbaut. Dafür benötigen wir zuerst einmal den Begriff einer Relation (vgl. 7.2.2 Ausblick: Konstruktion von $\mathbb{Z}$ mit Äquivalenzklassen ▶57).

Definition 14.8

Seien $\mathcal{D}$ und Y zwei nichtleere Mengen. Dann ist bekanntlich $\mathcal{D} \times Y$ das kartesische Produkt▶46 mit

$$\mathcal{D} \times Y := \{(x,y) \mid x \in \mathcal{D} \wedge y \in Y\} ,$$

also die Menge aller Paare (x,y). Unter einer Relation R verstehen wir dann eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{D} \times Y$, also

$$R \subset \mathcal{D} \times Y \ .$$

Wir sagen nun: x steht in Relation zu y (auch xRy geschrieben), wenn das Paar $(x,y) \in R$ ist.

Definition 14.9

Unter einer Funktion f von $\mathcal{D}$ nach Y verstehen wir eine Menge f mit folgenden Eigenschaften:

- f ist eine Relation, d. h. $f \subset \mathcal{D} \times Y$.
- f ist linkstotal, d. h. zu jedem $x \in \mathcal{D}$ existiert zumindest ein Element $y \in Y$, sodass das Paar $(x,y) \in f$ ist.
- f ist rechtseindeutig, d. h. sind (x,y_1) und (x,y_2) jeweils Elemente der Relation f, so gilt $y_1 = y_2$.

15. Eigenschaften von Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns etwas näher mit Eigenschaften von Funktionen beschäftigen. Hauptsächlich werden wir dabei reelle Funktionen im Hinterkopf haben, weil die reellen Zahlen durch ihre Vollständigkeit und ihre Ordnung vergleichsweise viele Betrachtungen zulassen. Allerdings werden wir bei der Definition der Eigenschaften nicht allzu genau sein. Spätestens bei der Anwendung bzw. Überprüfung der Eigenschaften wird sich herausstellen, welche Voraussetzungen an die jeweilige Funktion, ihren Definitionsbereich oder Wertevorrat gestellt werden.

Einige der Konzepte (wie etwa die Invertierbarkeit▶129) sind selbstverständlich auch auf Funktionen mit anderen Mengen (ohne besondere Strukturen/Rechenregeln) übertragbar.

15.1. Monotonie

Bei der Monotonie von Funktionen gehen wir von der Anschauung reeller Funktionen aus.

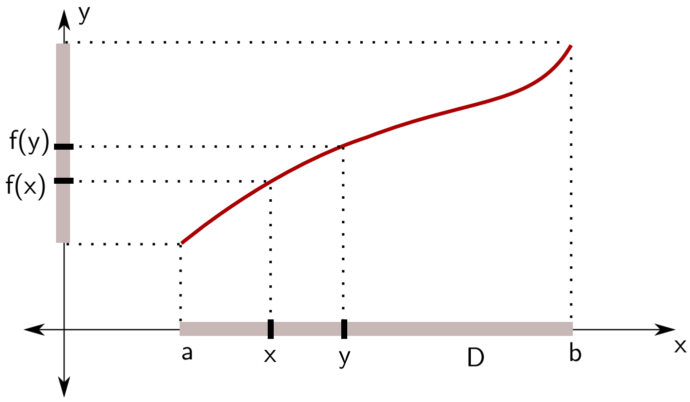
Definition 15.1

Eine Funktion heißt monoton steigend, wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. streng monoton steigend : $f(x) < f(y)$).

In Kurzschreibweise:

$$\forall x, y \in \mathcal{D} : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \, .$$

Anschaulich gesprochen heißt das: weiter rechts sind die Funktionswerte höher.



Für den Nachweis der Monotonie sind zwei Aspekte zu beachten. Der erste ist logischer Natur, denn wir haben hier wieder eine »wenn-dann-Beziehung«, also eine sogenannte Implikation▶**??**. Der zweite Aspekt, den es zu beachten gibt, ist: Für Ungleichungen gelten nicht die selben »Rechenregeln« wie für das Zeichen $=$. Wer Ungleichungen in der Schule nie behandelt hat oder bereits wieder vergessen hat, möge kurz selbst nachlesen: 13.1 Lineare & Quadratische Ungleichungen ▶110.

Bsp. 15.1

f mit $\mathcal{D} := [0,2), Y := \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist (streng) monoton steigend, denn: Aus $0 \leq x < y$ folgen (mit Multiplikation von $x \geq 0$ bzw. $y > 0$)

$$0 \cdot x \leq x \cdot x \leq x \cdot y$$
$$0 \cdot y \leq y \cdot x < y \cdot y$$

also $x^2 \leq xy$ und $xy < y^2$ und damit $0 \leq x^2 < y^2$, also $f(x) < f(y)$, was auch die Skizze anschaulich zeigt.

Definition 15.2

Eine Funktion heißt monoton fallend, wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}$ gilt: Aus $x < y$ folgt $f(x) \geq f(y)$ (bzw. streng monoton steigend : $f(x) > f(y)$).

Bsp. 15.2

Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$. Seien nun $x, y > 0$.

$$\begin{aligned}
x < y \quad &\Rightarrow \qquad\qquad & | \ : x \\
1 < \frac{y}{x} \quad &\Rightarrow \qquad\qquad & | \ : y \\
\frac{1}{y} < \frac{1}{x} &
\end{aligned}$$

was nichts anderer heißt als. Aus $x < y$ folgt $f(y) < f(x)$. Also ist f monoton steigend.

15.2. Symmetrie

Ist f eine Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so lassen sich Symmetrien untersuchen. Je nachdem, bezüglich welcher Achsen oder Punkte Symmetrien bestehen, nennen wir eine Funktion gerade oder ungerade.

Definition 15.3

f heißt gerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$.

f heißt ungerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

15.3. Invertierbarkeit und Umkehrfunktion

Der Begriff der Invertierbarkeit ist eng mit dem Begriff der Bijektivität verbunden. Anschaulich geht es darum, ob wir zu einer gegebenen Funktion f die Umkehrung finden können – also ob wir von einem Element y aus dem Wertevorrat auf das eindeutige Urbild x schließen können. Das ist nicht bei jeder Funktion möglich. Die Definition erfordert etwas mehr Exaktheit und baut auf der Hintereinanderausführung▶124 von Funktionen auf.

Definition 15.4: Umkehrfunktion

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ zwei Funktionen. g heißt Umkehrfunktion von f, wenn gelten: $g \circ f : X \to X$ und $f \circ g : Y \to Y$ sind Funktionen mit den Eigenschaften

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = x \qquad \text{und } \forall y \in Y : (f \circ g)(x) = x\,.$$

Existiert zu f die Umkehrfunktion, so heißt f invertierbar. Eine andere Schreibweise greift dabei auf die sogenannte identische Funktion zurück:

$$id_X : X \to X \text{ mit } x \mapsto x$$

id_X heißt auch »Identität auf X«. Mit dieser Notation ergibt sich $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Statt g wird häufig auch f^{-1} geschrieben – das Hoch-Minus-Eins bezieht sich auf das Invertieren der Verknüpfung »Hintereinanderausführung«.

Bemerkung: Ist $f : \mathcal{D} \to Y$ nicht surjektiv, aber injektiv, so kann man zu der Funktion $f : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$ die Umkehrfunktion finden. Nicht immer ist man dabei sprachlich so genau. Aus dem Zusammenhang wird meist klar, was mit Umkehrfunktion von f gemeint ist.

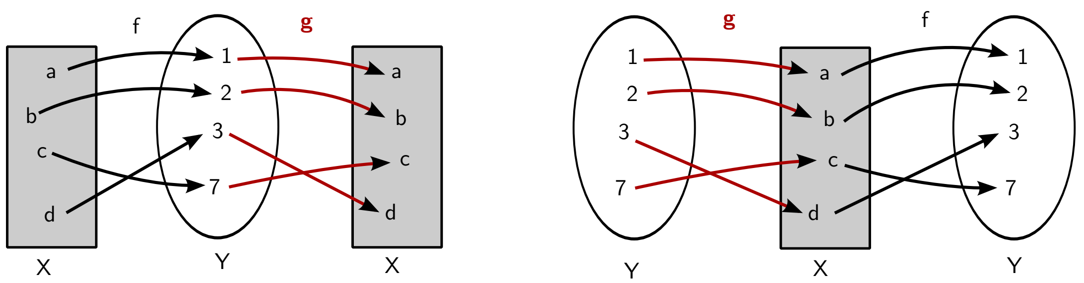
Inhaltlich heißt das: Wir können für jedes x den Weg $x \mapsto f(x) = y \mapsto g(y) = x$ gehen und für jedes y den Weg $y \mapsto g(y) = x \mapsto f(x) = y$. Damit das möglich ist, muss es für jedes $y \in Y$ das eindeutige Urbild x unter f geben.

Vorsicht: f^{-1} darf nicht mit der Funktion $1/f$ mit $(1/f)(x) = 1/x$ verwechselt werden. Zudem macht es einen Unterschied, ob wir $f^{-1}(y)$ oder $f^{-1}(\{y\})$ schreiben. Während das erste die Umkehrfunktion meint, beschreibt das zweite die Menge aller Urbilder zum Wert y. Das erste ist nicht immer ein wohldefinierter, sinnvoller Ausdruck, das zweite dagegen kann immer gebildet werden.

Es stellt sich heraus, dass es für die Invertierbarkeit weitere Charakterisierungen (also gleichwertige Beschreibungen bzw. Definitionen) gibt. f ist invertierbar, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv (also insgesamt bijektiv) ist. Anders ausgedrückt: Das Urbild ist eindeutig und es gilt $f(X) = Y$. Oder: Zu jedem Element $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ sodass gilt: $f(x) = y$.

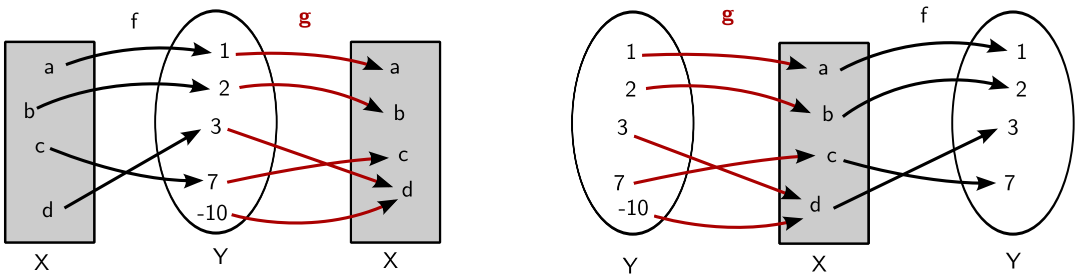
Bsp. 15.3

Wir betrachten die Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$, die durch folgende Pfeildarstellungen gegeben sind. Links sehen wir dann die Hintereinanderausführung $g \circ f$, rechts $f \circ g$. Man beachte, dass bei beiden Hintereinanderausführungen jedes Element wieder auf sich selbst abgebildet wird. Also ist f invertierbar und $f^{-1} = g$.



Bsp. 15.4

Wir betrachten ein weiteres Beispiel: Es ist zwar $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$, aber $f(g(-10)) = f(d) = 3$. Damit ist g keine Umkehrfunktion von f. In anderen Worten: f ist nicht surjektiv, also nicht bijektiv und kann daher keine Umkehrfunktion haben.



Intuitiver wird das Konzept bei reellen Funktionen $f : \mathcal{D} \to Y$ mit $\mathcal{D}, Y \subset \mathbb{R}$. Um die Umkehrfunktion von f zu finden, betrachten wir die Gleichung $f(x) = y$. Wir wollen nun zu einem gegebenen, aber beliebigen $y \in Y$ das eindeutige, zugehörige x berechnen, d. h. diese Gleichung nach x auflösen. Ist das für alle $y \in Y$ möglich – und der Kandidat für das Urbild x sowohl eindeutig, als auch Element des Definitionsbereich –, so ist unsere Funktion f invertierbar und unsere Umkehrfunktion wird definiert als $f^{-1} : Y \to \mathcal{D}$ mit $f^{-1}(y) = x$.

Bsp. 15.5

Sei : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$. Dann können wir die Gleichung

$$y = 3x - 2$$

für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}$ (ohne Einschränkung) umformen zu

$$x = \frac{y+2}{3} \, .$$

Dabei waren keine anderen Lösungen bzw. Varianten möglich. Insgesamt ist also $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3} \, .$$

Bsp. 15.6

Sei $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ definiert durch $f(x) = x^2 + 1$. Die Gleichung $y = x^2 + 1$ lässt sich zunächst einmal umformen zu

$$x^2 = y - 1$$

Nun ist nachdenken angesagt: Für $y = 1$ erhalten wir die Gleichung $x^2 = 0$, also ist nur $x = 0$ die einzige Lösung (=Urbild). Ist aber $y > 1$, so ist $y - 1 > 0$, d. h. es gibt zunächst einmal zwei Kandidaten für die Urbilder, nämlich

$$x_1 = +\sqrt{y-1} > 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{y-1} < 0 \, .$$

Da $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, sind tatsächlich x_1 und x_2 Urbilder von y, die aber verschieden sind. Anders gesagt: Die Gleichung

$$x^2 = y - 1$$

ist für $y > 1$ nicht eindeutig lösbar. Das bedeutet, unsere Funktion f ist zumindest mit diesem Definitionsbereich keine injektive Funktion, da $f(x_1) = f(x_2)$, aber $x_1 \neq x_2$. Also ist f nicht invertierbar.

Bsp. 15.7

Wir betrachten die einfache Funktion $f : (2, \infty) \to (0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$. Da alle $x > 0$ können wir die Gleichung

$$y = x^2$$

eindeutig auflösen zu

$$x = +\sqrt{y}\,.$$

Das Problem dabei: Für $0 < y < 4$ ist

$$0 < x < \sqrt{4} = 2$$

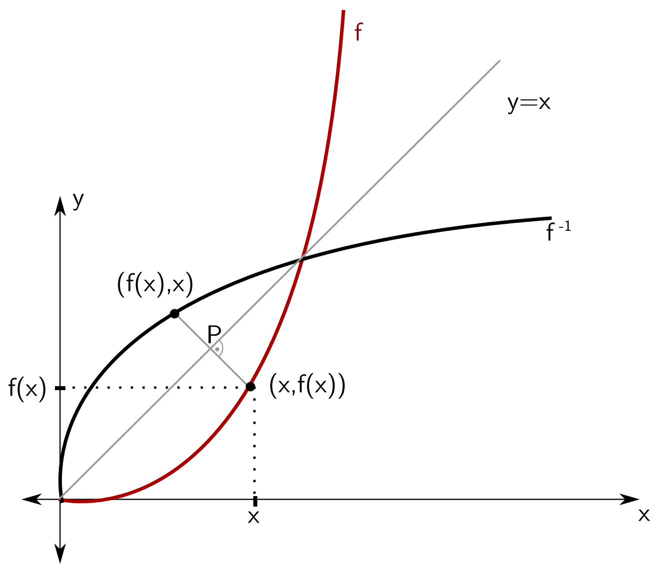
d. h. wir hätten zwar einen eindeutigen Kandidaten für das Urbild, aber bedauerlicherweise liegt dieser nicht im Definitionsbereich. Anders gesagt: f ist nicht surjektiv und folglich auch nicht invertierbar. Zum Verständnis: Die Funktion $f : (2, \infty) \to (4, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ wäre invertierbar.

Für eine bijektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es einen einen interessanten Zusammenhang zwischen dem Graph von f und dem Graph von f^{-1}, wenn man beide in dasselbe Koordinatensystem zeichnet, also wenn auf der x-Achse jeweils die Urbilder aufgetragen werden und auf der y-Achse die Bilder.

Dazu überlegen wir uns: Wenn das Paar $(x, y) \in G_f$ liegt, so ist das Paar $(y, x) \in G_{f^{-1}}$. Dieser Zusammenhang stellt eine Spiegelung an der ersten Mediane (Gerade mit $y = x$) dar, wenn wir f und f^{-1} in das selbe Koordinatensystem zeichnen:

Bsp. 15.8

Für $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ ist die Umkehrfunktion gegeben durch $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Dann skizzieren wir die Graphen und erhalten



Noch ein Nachsatz: Manchmal ist es gewünscht, eine Funktion so einzuschränken, dass sie invertierbar wird. Dafür gibt es zwei Strategien:

i) Wir machen den Definitionsbereich kleiner, um die Eindeutigkeit des Urbilds zu garantieren.

ii) Wir machen den Wertevorrat kleiner, damit wir sicherstellen, dass wir wirklich immer ein Urbild haben. Üblich ist etwa den Wertevorrat auf $f(\mathcal{D})$ zu beschränken.

Bsp. 15.9

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 1$ ist offensichtlich nicht invertierbar, da z. B. 0 kein Urbild hat, 2 dagegen zu viele, nämlich ± 1. Somit müssen wir sowohl den Definitionsbereich als auch den Wertevorrat einschränken, damit wir eine invertierbare Funktion erhalten. Da x^2 immer größer gleich 0 ist, sind sämtliche $f(x) \leq 1$. Daher müssen wir Y auf das Intervall $[1, \infty)$ einschränken. Nun müssen wir noch den Definitionsbereich verkleinern, damit das jeweilige Urbild eindeutig wird. Für ein beliebiges y aus unserem neuen Wertevorrat gilt:

$$1 \leq y = x^2 + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq y - 1 = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{y-1}\,.$$

Für $y > 1$ hätten wir also immer ein Urbilder, nämlich ein positives und ein negatives. Einfachste Lösung: Schränke den Definitionsbereich auf das Intervall $[0, \infty)$ ein. Dann ist garantiert, dass für für jedes $y \leq 1$ genau ein Urbild $x \leq 0$ haben. Die Einschränkungen sind also $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ mit $f(x) = x^2 + 1$. Die Umkehrfunktion ist dann gegeben durch $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f^{-1}(y) = +\sqrt{y-1}$.

16. Einige Funktionstypen

Da die Vorlesung Analysis 1 viele Funktionstypen (auf einem höheren Niveau) behandelt und typische Vorstellungen im Wesentlichen voraussetzt, stellt dieses Kapitel typische »Grundfunktionen« dar, die man großteils aus dem Schulunterricht kennt: Polynome, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus usw. Es zahlt sich aus, zumindest den groben Verlauf der Graphen zu lernen (d. h. parat zu haben). Es wird sich in der Analysis 1 zeigen, dass kompliziertere Funktionen wie e-Funktion oder ln, aber auch sin und cos anders als in der Schule üblich definiert werden müssen. Das ändert zwar nicht deren Eigenschaften, aber den grundlegenden Zugang dazu. Selbstverständlich kann man trotzdem mental die alten Vorstellungen weiter verwenden – formal muss man sich jedoch an die neuen Definitionen gewöhnen bzw. halten.

16.1. Polynome und (gebrochen) rationale Funktionen

Beginnend mit diesem Abschnitt wollen wir nun einige (reelle) Funktionen näher unter die Lupe nehmen bzw. sie zumindest definieren. Vieles sollte grundsätzlich aus der Schulzeit bekannt sein – vielleicht liegen die Schwerpunkte hier etwas anders. So wie üblich wollen wir auch hier versuchen, eine etwas mathematisch exaktere, kürzere Sprache zu bemühen und auf eine (abstraktere) mathematische Schreibweise etwas mehr Wert legen. Daneben wird erwartet, dass für die verschiedenen Funktionen auch ein anschauliches Verständnis (Skizzen etc) vorhanden ist bzw. entwickelt wird.

Die erste Kategorie von Funktionen wollen wir rationale Funktionen nennen, darunter Polynome[1] sowie gebrochen rationale Funktionen. Diese sind vergleichsweise unproblematisch bzw. einfach von ihrer Struktur her. Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden grundsätzlich erfüllt. Im Folgenden werden wir sukzessive aus recht elementaren Bestandteilen etwas aufwendigere Funktionen »basteln«.

16.1.1. Affine Funktionen

Was in der Hochschulmathematik affine Funktion genannt wird, wird in der Schulmathematik üblicherweise als lineare Funktion bezeichnet. Es handelt sich um Funktionen der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = k \cdot x + d$$

mit gegebenen $k, d \in \mathbb{R}$. Der Graph dieser Funktion ist dann (k, d nicht gleichzeitig 0) immer eine Gerade, nämlich:

$$G_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \, : \, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \right\} .$$

k gibt bekanntlich die Steigung an: So viele Einheiten wächst die Funktion, wenn ein beliebiger x-Wert um 1 erhöht wird. d gibt dagegen die y-Koordinate des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse an (oder kürzer: den y-Achsen-Abschnitt).

In der Hochschulmathematik f heißt »linear« nur dann, wenn $d = 0$. Dann erfüllt f nämlich für alle $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ folgende Rechenregeln:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{sowie} \qquad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \, .$$

1 In diesem Skript wird nicht streng zwischen Polynom und der zugehörigen Polynomfunktion unterschieden.

16.1.2. Polynomfunktionen zweiten Grades

Die nächste Stufe der Polynomfunktionen wäre dann die mit Grad zwei, d. h. die höchste vorkommende Potenz von x ist 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und zusätzlich $a \neq 0$. Interessanterweise ergibt so eine Funktionsvorschrift immer eine Parabel als Graphen. Im Vergleich zu linearen Funktionen wächst eine quadratische Funktion für große x schneller, d. h. die Kurve ist/wird steiler. Es folgt ein Beispiel, das ein Verfahren demonstriert, wie man quadratische Funktionen vergleichsweise einfach skizzieren kann – und das bestätigt, dass der Graph wirklich immer eine Parabel ist.

Bsp. 16.1

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 6x + 7$ gegeben.

Da $a = 1$ (also insbesondere positiv ist), öffnet sich die Parabel nach oben. Ihr Scheitel ist somit der niedrigste Punkt. Ziel ist es nun, den Funktionsterm so umzuschreiben, dass wir den Scheitel direkt ablesen können. Die Idee dahinter nennt sich »Quadratisches Ergänzen«. Wir wollen ausnutzen, dass der Beginn $x^2 - 6x$ Teil einer binomischen Formel $(x + y)^2$ ist, nämlich $(x - 3)^2$. Wir schreiben nun

$$f(x) = x^2 - 6x + \underbrace{9 - 9}_{=0} + 7 = (x^2 - 6x + 9) - 2 = (x - 3)^2 - 2$$

Der Zahlenwert von $f(x)$ hängt somit nur mehr vom Ausdruck $(x - 3)^2$ ab. Der Funktionswert ist dann am kleinsten, wenn der binomische Teil gleich 0 ist, also $x = 3$. Dann ist $f(3) = -2$ der zugehörige y-Wert. Somit erhalten für für den Scheitel die Koordinaten $S(3, -2)$. Unsere Parabel ist also aus der Standardparabel entstanden, indem sie um 3 nach rechts und um 2 nach unten verschoben wurde.

Daneben lässt sich in der Scheitelpunktsform auch ablesen, wie viele Nullstellen die Parabel hat. Ist der Rest (in unserem Fall -2) (echt) positiv, so gibt es keine Nullstelle, bei 0 genau eine (nämlich den Scheitel). Ist der Rest dagegen (echt) negativ, so gibt es zwei Nullstellen. In unserem Fall ist $f(x) = 0$, wenn $(x - 3)^2 = 2$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ sind die Nullstellen. Daneben gibt es momentan nicht viel zu sagen: Die Monotonie ist offensichtlich, der Wechsel von steigend nach fallend (bzw. umgekehrt) findet am Scheitel statt.

16.1.3. Polynomfunktionen höheren/beliebigen Grades

Analog zu einer Polynomfunktion 2. Grades lässt sich auch eine Polynomfunktion 3. Grades definieren, nämlich als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 ,$$

wobei $a_3, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_3 \neq 0$. Der höchste Koeffizient ungleich 0 ist also bei einer Polynomfunktion dritten Grades genau der, der beim Term x^3 steht. Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern:

Definition 16.1: Polynomfunktion

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$. Zusätzlich sei noch $a_n \neq 0$. Dann heißt die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

reelle Polynomfunktion n-ten Grades (sprich: »enten Grades«). Die a_j nennen sich Koeffizienten, a_n heißt führender Koeffizient.

Bemerkung zu den Schreibweisen: Die Aussage

$$a_j \in \mathbb{R} \text{ für alle } j \in \{0, \ldots, n\}$$

lässt sich auch anders schreiben, nämlich:

$$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

oder

$$a_j \in \mathbb{R} \text{ für alle } j = 0, \ldots, n \; .$$

Alle drei Schreibweisen sind üblich.

An dieser Stelle wollen wir auch noch als abgekürzte Schreibweise (bzw. zur Exaktifizierung) das (große) Summenzeichen $\sum$ einführen: Nach der obigen Definition unserer Polynomfunktion können wir $f(x)$ auch noch schreiben als:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Per Konvention vereinbaren wir noch $x^0 := 1$ (vgl. 9 Hochzahlen ►77) und erinnern uns, dass wir statt x^1 üblicherweise nur x schreiben. Wie diese Kurzschreibweise per Summenzeichen zu lesen ist, wollen wir uns auf der nächsten Seite näher anschauen:

Exkurs: Summenzeichen – Summenschreibweise

Statt einer (endlichen) Summe von Zahlen, etwa $a_1 + a_2 + a_3$, können wir abgekürzt auch schreiben

$$\sum_{j=1}^{3} a_j \; .$$

Das j nennt sich dabei (Summations-)Index und wird zur Nummerierung der einzelnen Summanden verwendet. Pro »Schritt« bzw. Summand wird j um 1 erhöht. Der Summationsindex kann auch verwendet werden, um die Summanden zu »berechnen«:

$$1 + 4 + 9 + 16 = \sum_{k=1}^{4} k^2$$

Anders gesagt darf a_j von j abhängen, also praktisch eine Funktion von j sein. Die Bezeichnung des Summationsindex ist dabei relativ frei, sollte aber zu keinen Missverständnissen führen. Wenn etwa komplexe Zahlen in Frage kommen, ist i eine schlechte Wahl.

Zusätzlich gibt es noch Rechenregeln für Summen, wenn über gleiche Indizes und Grenzen aufsummiert wird:

$$\sum_{j=1}^{n} a_n + \sum_{j=1}^{n} b_n = \sum_{j=1}^{n} (a_n + b_n)$$
$$c \cdot \sum_{j=1}^{n} a_n = \sum_{j=1}^{n} (c \cdot a_n) \; .$$

Diese Rechenregeln lassen sich dadurch nachvollziehen, indem man auf die – unmathematisch ausgedrückt – »Punkterl-Schreibweise« ausweicht:

$$\sum_{j=1}^{n} a_n + \sum_{j=1}^{n} b_n = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) =$$
$$= a_1 + b_1 + \cdots a_n + b_n = \sum_{j=1}^{n} (a_n + b_n) \,.$$

Auf die Nullstellenproblematik bei Polynomfunktionen höheren Grades gehen wir im Kapitel 11.4 Gleichungen höheren Grades ▶92 näher ein.

16.1.4. Gebrochen-Rationale Funktionen

Der Name ist Programm: Ausgehend von zwei Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ basteln wir uns nun den Quotienten $\frac{p}{q}$ zusammen. Allerdings: Damit wir keine Probleme bekommen, müssen wir jene Stellen x ausschließen, bei den $q(x) = 0$ ist.

Definition 16.2

Die Funktion $f := \frac{p}{q} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ heißt (gebrochen-)rationale Funktion und ist durch

$$x \mapsto f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

definiert. Wir sagen, f ist eine echt gebrochen rationale Funktion, wenn der Grad von q echt größer ist als der Grad von p. Ansonsten heißt f unecht gebrochen rationale Funktion.

Ist eine gebrochen rationale Funktion nicht »echt«, so ist Polynomdivision▶92 möglich und wir können f mit passenden Polynomen p_1 und r darstellen als

$$f = p_1 + \frac{r}{q} \,,$$

wobei der Grad vom Polynom r echt kleiner ist als der Grad von q und zusätzlich die Gleichung

$$p = p_1 \cdot q + r$$

erfüllt ist. Es wird sich herausstellen, dass dieses Umschreiben sowohl beim Skizzieren (Asymptoten) als auch beim Integrieren zweckdienlich ist. Es folgen nun einige Beispiele, um auch das Konzept der Asymptoten (anschaulich) zu verdeutlichen.

Bsp. 16.2

Wir betrachten $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = 1$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $q(x) = x$. Dann ist $f = p/q : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ almit $f(x) = 1/x$ definiert.

- Aufgrund der Rechenregeln für Ungleichungen gilt, dass $0 < x \Rightarrow 0 < 1/x = f(x)$. Also ist liefert f auf $(0, \infty)$ nur positive Funktionswerte. Zusätzlich gilt

  $$0 < x < y \qquad \Rightarrow \qquad x/y < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1/y < 1/x$$

  Also ist f auf dem Intervall $(0, \infty)$ monoton fallend.
- Es gilt: $0 > x \Rightarrow 0 > 1/x = f(x)$, was bedeutet, dass f auf $(-\infty 0)$ nur negative Funktionswerte liefert. Weiters gilt

  $$x < y < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x/y > 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1/y < 1/x \,.$$

Also ist f auch auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ monoton fallend.

Nun noch weitere Überlegungen: Wenn $x > 0$ sehr groß wird, wird logischerweise $f(x)$ sehr klein. Genauer: Mit ausreichend großem x wird $f(x)$ beliebig klein, geht also gegen 0. Noch genauer: Wir können zu jedem $\epsilon > 0$ eine passende Zahl $L > 0$ finden, sodass für alle $x > L$ gilt: $f(x) < \epsilon$. Wir sagen: Die Funktion f hat für x gegen ∞ den Grenzwert 0, Kurzschreibweise

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die (nicht sehr mathematische) Faustregel besagt: »1 durch Unendlich ist 0«.

Für $x < 0$ und wenn x eine sehr negative Zahl ist (also sehr weit links auf der Zahlengeraden), dann ist $f(x)$ zwar negativ, aber trotzdem sehr nahe an 0. Anders formuliert:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Anders gesagt: Die Gerade $y = 0$ (also die x-Achse) ist eine Asymptote der Funktion $\frac{1}{x}$, weil sich die Funktion für sehr große x (bzw. sehr negative x) beliebig nahe an diese Gerade annähert.

Was ist mit der Stelle, die wir aus dem Definitionsbereich ausschließen mussten, nämlich $c = 0$? Können wir auch hier das Verhalten von $f(x)$ untersuchen, wenn sich x an $c = 0$ annähert? Ja, wir können!

Sei x zunächst echt positiv, also $x > 0$. Wenn x sehr klein wird, wird der Kehrwert sehr groß. Ist x Beispielsweise gleich $1/10000$, so ist $f(x) = 10000$. Dieser Gedankengang lässt sich weiterführen. Egal wie groß wir uns eine positive Zahl $M \in \mathbb{R}$ vorgebe, wir können dazu immer ein $\delta > 0$ finden, sodass für alle x mit $0 < x < \delta$ gilt: $f(x) > M$. Wir sagen dazu: f ist unbeschränkt und wenn wir uns mit x von rechts an 0 annähern, so geht $f(x)$ gegen ∞. Kurzschreibweisen:

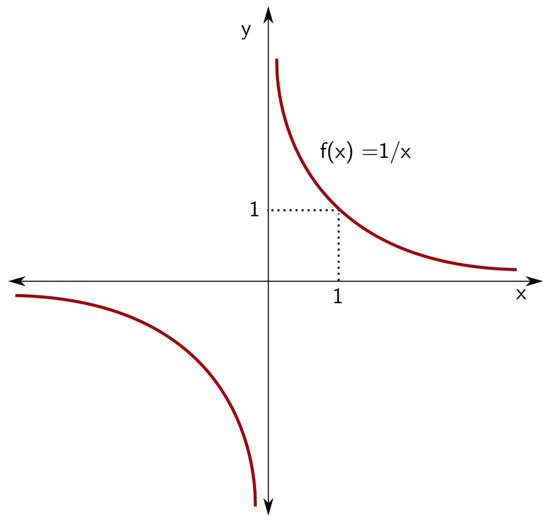
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$$

Üblich ist auch noch die Bezeichnung rechtsseitiger Grenzwert. f hat an der Stelle 0 den rechtsseitigen Grenzwert ∞, manchmal kommt noch der Zusatz uneigentlicher Grenzwert hinzu, da ∞ keine reelle Zahl ist.

Ganz analog kommt man zum Ergebnis: Für negative x nahe bei 0 wird $f(x)$ sehr negativ. Wir sagen auch, f hat an der Stelle 0 den linksseitigen Grenzwert $-\infty$. Kurzschreibweisen:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \infty$$

In Anlehnung zur waagrechten Asymptoten können wir somit sagen, dass auch die Gerade $x = 0$ (also die y-Achse) eine Asymptote von f Funktion ist. Zusätzlich sei noch kurz erwähnt, dass der Graph von f eine Hyperbel ist. Hier noch die Skizze:



Das war eigentlich das elementarste Beispiel einer echt gebrochen rationalen Funktion, das wir vergleichsweise genau untersucht haben. Auf die Grenzwert-Überlegungen wollen wir im Folgenden nicht mehr so exakt eingehen, da das in der Höheren Mathematik bzw. in der Analysis noch grundlegender und umfassender gemacht wird. Das nächste Beispiel soll nun ein mögliches Vorgehen zeigen, wie man bei unecht gebrochen-rationalen Funktionen vorgeht.

Bsp. 16.3

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

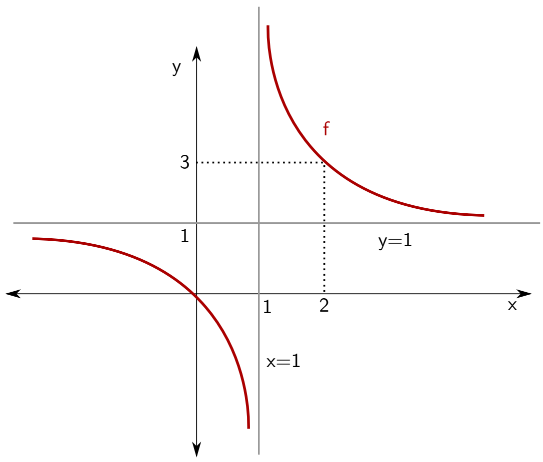
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

gegeben. Da der Grad der Polynome $p(x) = x+1$ und $q(x) = x-1$ gleich groß ist, nämlich 1, können wir die Funktion f umschreiben. Die eine Möglichkeit wäre eben Polynomdivision ▶92 (mit Rest), die andere Möglichkeit verwendet so etwas wie einen mathematischen »Trick«, der des Öfteren nützlich sein kann:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+0+1}{x-1} = \frac{x+\overbrace{(-1+1)}^{0}+1}{x-1} = \frac{(x-1)+(1+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Durch das Addieren von 0 lassen sich gewünschte Terme einschleusen, in unserem Fall mit der Absicht, dass wir auf einen Ausdruck kommen, den wir kürzen können.

Die senkrechte Asymptote ist jetzt die Gerade $x = 1$, dort, wo der Definitionsbereich die Lücke hat. Achtung, das muss nicht immer so sein – es kann sich auch nur um eine Lücke handeln (Betrachte z. B. $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$).
Das vordere Polynom, das wir mit p_1 bezeichnet haben und in unserem Fall $p_1(x) = 1$ ist, liefert ebenfalls eine Asymptote, nämlich die Gerade $y = 1$.
Für die Skizze dienen die Asymptoten als Hilfslinien, den Rest stückelt man sich mit Hilfe von Summen und Produkten von Funktionen zusammen (vgl. ▶126). Somit erhalten wir den Graphen (nicht maßstabsgetreu):



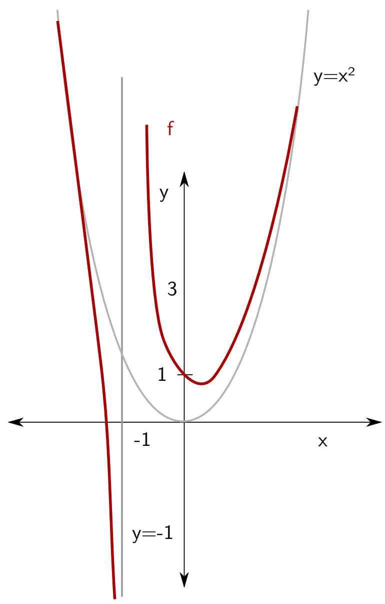
Abschließend noch ein Beispiel, bei dem wir es mit einer Asymptote zu tun haben, die keine Gerade ist:

Bsp. 16.4

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$$

gegeben. Der Funktionsterm ist bereits in der gewünschten Form.
Die Gerade $x = -1$ liefert uns wieder eine senkrechte Asymptote (da $x = -1$ eine Polstelle ist). Andererseits wird für betragsmäßig sehr große x der Ausdruck $1/(x+1)$ vernachlässigbar klein. D. h. für betragsmäßig große x verhält sich unsere Funktion f wie x^2. Genau gesagt: Für große x nähert sich $f(x)$ beliebig nahe an x^2 an.
Also ist die Parabel $y = x^2$ eine Asymptote unserer Funktion.



16.2. Potenzfunktion und Wurzeln

Bei Polynomen waren die Exponenten der Variablen x jeweils natürliche Zahlen. Bei Potenzfunktionen wird diese Einschränkung aufgehoben:

Definition 16.3

Die Funktion $p_r : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto p_r(x) := x^r$$

heißt Potenzfunktion mit Exponent r.

Der größtmögliche Definitionsbereich $\mathcal{D}$ hängt davon ab, aus welcher Zahlenmenge r stammt. Das ergibt sich aus den Definitionen für Hochzahlen, siehe Kapitel 9 Hochzahlen ▶77:

- Ist $r = n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ist $r = z \in \mathbb{Z}$, so ist $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Ist $r \in \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Nützlich, um die Verläufe von Potenzfunktionen miteinander vergleichen zu können, sind folgende Zusammenhänge, die sich aus den Rechenregeln für Ungleichungen ergeben: Für $x > 1$ gilt

$$1 < a < b \qquad \Rightarrow \qquad x < p_a(x) < p_b(x) \,,$$

$$0 < a < b < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < p_a(x) < p_b(x) < x$$

Für $0 < x < 1$ drehen sich die Ungleichungen um.

Einen »Spezialfall« der Potenzfunktion erhält man, wenn die Exponenten sogenannte Stammbrüche sind:

Definition 16.4: Wurzelfunktion

Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $r = \frac{1}{n}$

$$f(x) := x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

heißt (n-te) Wurzelfunktion. Es gilt: $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist f streng monoton steigend, also auch injektiv.

16.3. Betragsfunktion und Signumfunktion

Die bisherigen Polynome bzw. rationalen Funktionen hatte eine angenehme Besonderheit – es waren nämlich anschaulich gesprochen keine Ecken bzw. Spitzen im Graphen enthalten. Nicht alle denkbaren Funktionen haben diese vorteilhafte Eigenschaft.

Definition 16.5

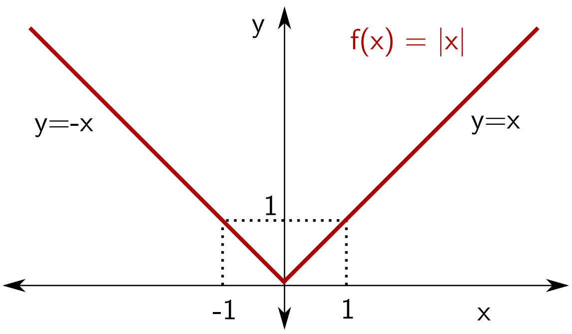
Wir definieren die (reelle) Betragsfunktion (oder oft auch nur »Betrag« genannt) durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$$

mit

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

In Worten: Die Betragsfunktion macht jede Zahl positiv (0 bleibt 0).



Stellen wir uns nun geometrisch gesehen die Zahlengerade vor. Dort misst die Betragsfunktion den Abstand (also eine positive Länge) einer Zahl x zum Ursprung, also zur Zahl 0. Durch diese Interpretation der Längen-Messung liegt es auf der Hand, dass nur positive Bildwerte entstehen können. Es gilt $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$. (Für die komplexe Betragsfunktion siehe 7.5.2 Geometrische Anschauung ▶68.) Gleich vorweg: Es wird sich (später) zeigen, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist – eine lästige Eigenschaft.

Da es eine häufige Fehlerquelle ist, möchte ich an dieser Stelle besonders herausstreichen: Nur weil der Betrag für $x < 0$ mit $-x$ aufgelöst wird und dabei ein Minuszeichen vorkommt, heißt das nicht, dass $-x$ eine negative Zahl ist. Vielmehr wird durch das Minus die Zahl x positiv gemacht ($\to$ Gegenzahl). Beispielsweise ist $|-2| := -(-2) = 2$. Mithilfe solcher konkreter Beispiele sollten solche »Vorzeichenfehler« vermieden werden können. Diese können sich nämlich besonders bei Ungleichungen unangenehm auswirken (vgl. 13.2 Betragsungleichungen ▶112).

Bsp. 16.5

Für die Betragsfunktion gibt es noch eine weiteren Funktionsterm, der das selbe Ergebnis liefert:

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty) \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \sqrt{x^2}\ .$$

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass das Wurzelzeichen wirklich die Wurzelfunktion meint, also für jedes einzusetzende Element genau den Funktionswert liefert, der größer oder gleich 0 ist. Auf jeden Fall merken sollte man sich den Zusammenhang

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

da so doch immer wieder Fehler vermieden werden können. Kurz gesagt geht also das Vorzeichen einer Zahl durch Quadrieren und anschließendes Wurzelziehen verloren. Die Gleichung $\sqrt{x^2} = x$ stimmt nämlich nur für positive x.

Als Ausblick auf die Analysis halten wir folgende Aussagen fest:

Satz 16.1: Rechenregeln für Beträge

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| \geq 0$ und es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Diese Eigenschaft nennt sich »Definitheit«.
- Außerdem gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. Dieser Zusammenhang nennt sich »Homogenität«.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Dieser Zusammenhang nennt sich »Dreiecksungleichung« und wird sowohl in der Analysis, als auch in der Linearen Algebra eine wichtige Rolle spielen.

Durch diese drei Eigenschaften bezeichnen wir die Betragsfunktion auch als sogenannte »Norm«. Anschaulich steckt hinter dem Konzept einer Norm der Sachverhalt, dass wir die Länge von Zahlen (bzw. Vektoren) messen können. Diese Konzept ist auch auf deutlich abstraktere Mengen bzw. (Vektor-)Räume übertragbar, was es so wertvoll macht.

Vielleicht noch ein paar Worte zu diesem Aussagen. Eigentlich muss man diese Aussagen erst beweisen – also mittels einfachster, logischer Argumentationen und Schritte nachweisen, dass sie wirklich gelten. Zur Illustration wird das hier gezeigt. Die Beweise sind an sich nicht schwer, aber trotzdem vergleichsweise mühsam, weil man eben genau überlegen muss, welche bekannten Regeln man verwenden darf. Verwenden dürfen wir eigentlich nur die Definition der Betragsfunktion (sowie Rechenregeln für Ungleichungen):

Beweis

- Ist $x \geq 0$, so folgt $|x| = x \geq 0$. Ist umgekehrt $x < 0$, so ist $|x| = -x > 0$.

  Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ist (dieses »genau dann, wenn« bedeutet eben »äquivalent«, also $\Leftrightarrow$, vergleiche auch **?? ??** ▶**??**). Ist $x = 0$, so ist $|x| = x$ und daher $|x| = 0$.

  Umgekehrt: Wir müssen nun die Gegenrichtung sicherstellen, also dass aus $|x| = 0$ die Aussage $x = 0$ zwingend folgt. Diese Aussage ist logisch gleichwertig mit

  $$x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad |x| \neq 0$$

  die offensichtlich richtig ist.

- Nun zum Beweis der zweiten Eigenschaft: Damit wir die Beträge auflösen können, sind Fallunterscheidungen nötig:

  Fall 1: $x, y \geq 0$. Dann ist auch das Produkt $x \cdot y \geq 0$. Dann gilt

  $$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y| \ .$$

  Fall 2: $x, y \leq 0$. Dann ist das Produkt $x \cdot y \geq 0$ (»Minus mal Minus ergibt Plus«). Dann:

  $$|x \cdot y| = x \cdot y = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$$

  Fall 3: $x \geq 0$ und $y \leq 0$. Dann ist das Produkt $x \cdot y \leq 0$ …

  $$|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$$

  Fall 4: Siehe Fall 3 mit vertauschten Rollen.

  Somit haben wir alle möglichen Vorzeichenkombinationen von x und y abgedeckt. Nach Möglichkeit versucht man bei Beweisen, Fallunterscheidungen zu vermeiden.

- Beim dritten Punkt wollen wir etwas schlampiger sein und die folgende Aussagen bereits als bekannt voraussetzen: Für $b \geq 0$ und ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad -b \leq x \leq b \tag{$*$}$$

und weiters ist

$$-|x| \leq x \leq |x| \ .$$

Dann gelten für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $-|x| \leq x \leq |x|$ sowie $-|y| \leq y \leq |y|$. Addiert man diese Ungleichungen, so erhält man

$$\begin{array}{rcccl} -|x|-|y| & \leq & x+y & \leq & |x|+|y| \qquad \Leftrightarrow \\ -(|x|+|y|) & \leq & x+y & \leq & |x|+|y| \ . \end{array}$$

Laut $(*)$ heißt das aber (mit $b = |x|+|y| \geq 0$), dass

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

ist, was zu zeigen war.

□

Im alltäglichen mathematischen Leben erspart man sich oft die verbalen Formulierungen und verwendet stattdessen nur mathematische Kurzschreibweisen – also in unserem Beispiel würde man sich damit begnügen, (fast) nur die Variablen bzw. Gleichungen hinzuschreiben.

So können also Beweise aussehen, wie sie in der Linearen Algebra, der Analysis oder den meisten anderen mathematischen Lehrveranstaltungen gebraucht, gelernt und gekonnt werden müssen. Selbstverständlich macht »Übung den Meister«.

Neben diesen Rechenregeln ist ein weiterer rechnerischer Aspekt, der den Betrag für die reellen Zahlen so praktisch macht, derjenige, dass man mit dem Betrag Abstände zwischen Zahlen messen kann. Das ist vergleichsweise simpel und entspricht der Anschauung:

Definition 16.6: Abstand (Metrik)

Sind x und y zwei reelle Zahlen, so wird durch die Zahl $|x-y|$ der Abstand zwischen x und y bzw. der Abstand von x zu y definiert. Auch die Notation

$$d(x,y) = |x-y|$$

ist üblich. d steht dabei für Distanz.

Hat man das Kapitel mit der Stetigkeit gelesen (ab ▶150), so sollte auffallen, dass dieser Abstandbegriff dort in den Definitionen herangezogen wurde. Wir können auf der nächsten Seite als Ausblick noch einige Eigenschaften von d festhalten.

Satz 16.2: Rechenregeln für Metriken

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten:

- Der Abstand ist nie negativ, und der Abstand ist 0 genau dann, wenn die beiden Zahlen gleich sind.
$$d(x,y) \geq 0 \qquad \text{und} \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \; .$$
- x hat zu y den selben Abstand wie y zu x, also
$$d(x,y) = d(y,x) \; .$$
- Dreiecksungleichung für den Abstand: Ein »Umweg« über einen dritten Punkt bzw. Zahl ist nie eine Wegersparnis, in Formelschreibweise
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \; .$$

Ist M eine nichtleere, beliebige Menge, so heißt Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$, die die obigen Eigenschaften erfüllt, dann ebenfalls »Metrik« bzw. »Abstand«.

Es bleibt noch die sogenannte Vorzeichen-Funktion oder Signum-Funktion zu definieren:

Definition 16.7: Vorzeichenfunktion (Signum)

Die Funktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

heißt Signum-Funktion und liefert das Vorzeichen von x, wobei $-$ den Wert -1 zugewiesen bekommt, $+$ den Wert $+1$ und die Zahl 0 vorzeichenlos ist und den Wert 0 zugewiesen bekommt.

Die Signum-Funktion ist also eine treppenförmige Funktion mit einem Sprung bei $x = 0$ und somit nicht stetig.

16.4. Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

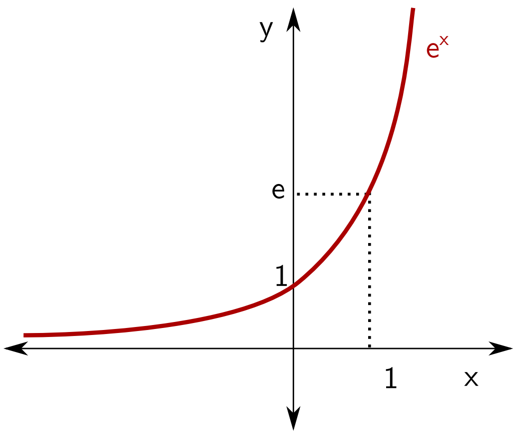
16.4.1. e-Funktion

Verglichen mit den Potenzfunktionen oder den gebrochen-rationalen Funktionen sind die Exponentialfunktion (auch e-Funktion genannt) und die Logarithmusfunktion (auch nur Logarithmus oder ln) komplizierter zu definieren. Für den qualitativen bzw. rechnerischen Aspekt ist das zunächst nicht entscheidend. Deshalb erfolgt hier nur eine anschauliche Einführung mit einigen wichtigen Eigenschaften (das Wort »Definition« ist dafür schon fast zu viel):

Definition 16.8: e-Funktion
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$x \mapsto \exp(x) = e^x$$

wird e-Funktion genannt. Der Buchstabe bzw. die Zahl e in dieser Notation ist die berühmte Euler'sche Zahl, benannt nach dem Mathematik LEONHARD EULER (1707 – 1783).



Wir halten einige wichtige Eigenschaften und Rechenregeln fest:

Satz 16.3

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x) > 0$
- Die Exponentialfunktion ist (streng) monoton steigend (und damit injektiv).
- Für $x < 0$ ist $\exp(x) < 1$, weiters ist $\exp(0) = 1$ und für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$.
- Darüber hinaus ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, d. h. jede positive Zahl tritt als Funktionswert der Exponentialfunktion auf. Mit dem obigen Wertevorrat ist die Funktion also auch surjektiv und somit bijektiv. Daher ist die Exponentialfunktion invertierbar, besitzt also eine Umkehrfunktion ▶129.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $exp(x \cdot y) = \exp(x)^y$.
- Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Polynomfunktion p noch so hohen Grades, d. h. für ausreichend große x ist $\exp(x) > p(x)$.

Die Eigenschaften bzgl. Differenzieren und Integrieren werden später behandelt, vgl. Anhang A Formelsammlung ▶227.

16.4.2. Natürlicher Logarithmus

Wie oben erwähnt, besitzt die e-Funktion von $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine Umkehrfunktion. Mit dieser wollen wir die Logarithumsfunktion einführen:

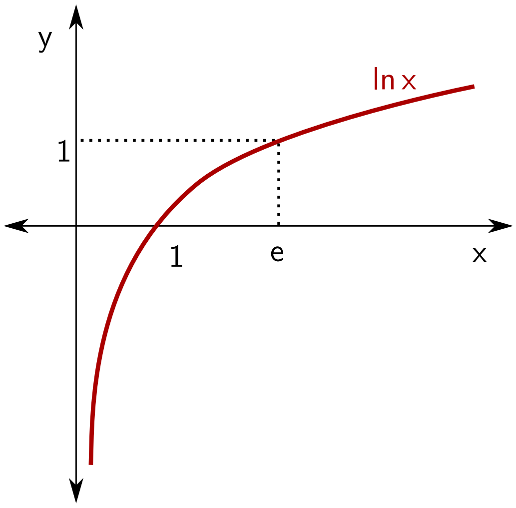
Definition 16.9: natürlicher Logarithmus

Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln(x)$ heißt Logarithmusfunktion oder auch nur (natürlicher) Logarithmus und ist die Umkehrfunktion (inverse Funktion) zur e-Funktion. Daher gilt

$$e^{\ln(x)} = x \qquad \forall x \in (0, \infty)$$

und

$$\ln(e^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$



Aus den Eigenschaften der e-Funktion ergeben sich folgende Eigenschaften des Logarithmus:

Satz 16.4

- Für $0 < x < 1$ ist $\ln(x) < 0$, es ist $\ln(1) = 0$ und für $x > 1$ ist $\ln(x) > 0$,
- Der Logarithmus ist (streng) monoton steigend (und damit injektiv).
- Darüber hinaus ist $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, d. h. jede reelle Zahl tritt als Funktionswert des Logarithmus auf. Mit dem obigen Wertevorrat ist die Funktion also surjektiv und somit bijektiv. Die Umkehrfunktion zum ln ist dann die e-Funktion.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Für $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$.

Die Eigenschaften bzgl. Differenzieren und Integrieren werden später behandelt, vgl. Anhang A Formelsammlung ▶227.

16.4.3. Exponentialfunktionen mit anderen Basen

Auch zu anderen Basen lassen sich Exponentialfunktionen definieren:

Definition 16.10
Die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zur Basis $a \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir durch

$$x \mapsto \exp_a(x) := a^x .$$

Für $a > 1$ entspricht der qualitative Verlauf des Graphen dem der e-Funktion, für $0 < a < 1$ in etwa der an der y-Achse gespiegelten e-Funktion. Das ergibt sich aus den Rechenregeln für Hochzahlen und den Zusammenhängen mit dem Logarithmus.

Es gilt nämlich

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$$

und

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

Anschaulich gesagt: Die Potenzfunktion $\exp_{1/a}$ ist $\exp_a$ gespiegelt an der y-Achse. Vor allem der erstere Zusammenhang mit der e-Funktion wird sehr hilfreich beim Differenzieren und Integrieren sein.

16.4.4. Logarithmen zu anderen Basen

Bis jetzt haben wir den Logarithmus nur zu einer speziellen Basis definiert, nämlich zur Basis e. Denn die Gleichung

$$\ln x = y$$

ist gleichwertig mit dem Zusammenhang

$$x = e^y$$

Analog zu dieser Definition definieren wir den Logarithmus zu einer beliebigen (positiven) Basis:

Definition 16.11
Sei $a > 0$, $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Erfüllt y die Gleichung

$$x = a^y ,$$

so heißt die Zahl y »Logarithmus von x zur Basis a« und wir schreiben

$$\log_a(x) = y \qquad \text{oder} \qquad {}^a\log(x) = y .$$

Durch diese Definition ergibt sich mit der obigen Schreibweise der Zusammenhang

$$a^{\log_a(x)} = a^y = x$$

und umgekehrt

$$\log_a(a^x) = x ,$$

d. h. $\log_a$ und $\exp_a$ sind zueinander inverse Funktionen.

Insbesondere gelten $log_a(a) = 1$ und $log_a(1) = 0$. Die Rechenregeln des natürlichen Logarithmus übertragen sich auf $\log_a$.

16.4.5. Ausblick: Definitionsmöglichkeiten von e-Funktion und ln

Wir haben in diesem Abschnitt die e-Funktion und den Logarithmus über die Exponentialfunktion zur Basis e eingeführt. Daneben gibt es mehrere Möglichkeiten, von der die eine oder andere sicher im Laufe des Studiums behandelt wird. Die Interessierten können sich schon einmal einen kleinen Vorgeschmack holen ...

16.4.5.1. Der Logarithmus als Stammfunktion von $1/x$

Eine Möglichkeit, den Logarithmus einzuführen, ist, ihn als eine konkrete Stammfunktion (vgl. Def. 22.1 ▶190) bzw. Integralfunktion (vgl. 22.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ▶193) von $f(x) = 1/x$ zu definieren. Da die zu integrierende Funktion und die Grenzen nicht die selbe Variable enthalten dürfen, weichen wir im Integranden auf t aus, und definieren

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Einige Bemerkungen dazu: Der Integrand $1/x$ ist immer positiv, das (endliche) Integral für alle $x \in (0, \infty)$ wohldefiniert. Ist $x < 1$, so ist die Obergrenze kleiner als die Untergrenze und wir vertauschen die Grenzen und bekommen daher ein negatives Vorzeichen (vgl. $\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$). Monotonie und die weiteren Eigenschaften ergeben sich ebenfalls auch aus der Definition.

Mit Hilfe dieser Definition lässt sich weiters die Euler'sche Zahl e definieren, nämlich als eindeutige Lösung der Gleichung

$$\ln(x) = 1\ .$$

Die (natürliche) Exponentialfunktion bzw. e-Funktion wird dann als Exponentialfunktion mit Basis e definiert, also als $\exp_e$.

16.4.5.2. Exponentialreihe

Häufig wird die Exponentialfunktion durch sogenannte Potenzreihen (vgl. Anhang 19 Reihen ▶169) eingeführt. Diese Definition macht dann sogar für beliebige komplexe Zahlen z Sinn, also $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\ .$$

Potenzreihen kann man sich vereinfacht als unendliche Summen vorstellen (Diese Vereinfachung ist nicht ganz treffend, reicht an dieser Stelle aber aus).

Faszinierenderweise stellt man fest, dass sämtliche Definitionen auch wirklich die selbe Funktion darstellen, also dass die Reihendefinition mit der e^x-Definition und mit der Defintion als Stammfunkton von $1/x$ und $\ln(e) = 1$ übereinstimmen, und für gleiches (reelles) x gleichen $f(x)$-Wert liefern.

16.5. Sinus-, Kosinus-, Tangens-Funktion

Sinus, Kosinus sowie e-Funktion und auch der Logarithmus gehören zu einer Klasse von Funktionen, die sich »transzendet« nennen. Sie können nämlich nicht aus Wurzeln oder rationalen Funktionen zusammengebastelt werden.

Auch Sinus und Kosinus werden für gewöhnlich über Potenzreihen (vgl. 16.4.5.2 bzw. Anhang 19 Reihen ▶169) eingeführt. Wir verzichten hier darauf und wählen den anschaulichen, geometrischen Zugang über den Einheitskreis:

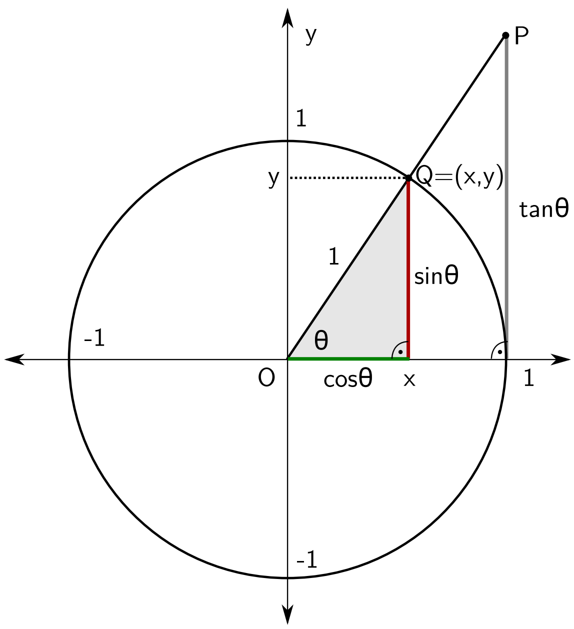
Definition 16.12

Sei der Einheitskreis mit $r = 1$ und Mittelpunkt $(0/0)$ im $\mathbb{R}^2$, also dem normalen Koordinatensystem, gegeben. Zu jedem Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ können wir den Radius zeichnen. Für den zugehörigen Punkt $Q = (x, y)$ am Einheitskreis definieren wir

$$\cos(\theta) := x \qquad \text{und} \qquad \sin(\theta) := y\ .$$

Den Tanges von θ, also $\tan(\theta)$, definieren wir als die x Koordinate des Punktes P, der auf der Verlängerung des Radius durch Q liegt, was nur für $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ und $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$ sinnvoll ist. Durch ähnliche Dreiecke erhält man folgende Beziehung

$$\tan(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{1} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

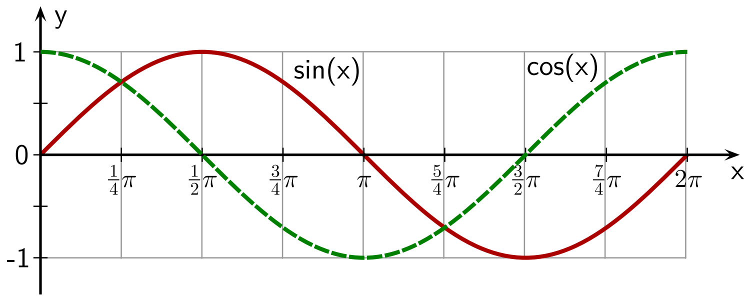


In anderen Worten: Der Kosinus ist der Abschnitt auf der x-Achse, Sinus der Abschnitt auf der y-Achse. Das Vorzeichen ist dabei zu beachten. Dadurch, dass wir für $\theta \leq 2\pi$ einmal (oder mehrmals) um den Kreis herumgehen, erhalten wir wieder bereits vorgekommene Werte. Dieses Verhalten wird Periodizität genannt, Periode ist 2π:

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi) \qquad \text{und} \qquad \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)\ .$$

Dadurch erhalten wir sowohl für Sinus als auch Kosinus den Definitionsbereich $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Wenn keine Missverständnisse möglich sind, schreiben wir $\sin(x) = \sin x$ und $\cos(x) = \cos x$. Außerdem meinen wir beweispielsweise mit $\sin^2 x = (\sin(x))^2$.

Im Kopf behalten sollte man zudem die Graphen von Sinus und Kosinus



Wir halten einige wichtige Eigenschaften von Sinus und Kosinus fest. Für gewöhnlich finden sich viele dieser Zusammenhänge auch in der Formelsammlung der Oberstufe.

Satz 16.5

Einige Eigenschaften:

- $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Das ergibt sich durch die maximalen Werte für x und y am Einheitskreis.
- Es gilt
$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$
Dazu betrachtet man das rechtwinkelige Dreieck im Einheitskreis mit Eckpunkt $(0/0)$ und Winkel x und verwendet den Pythagoräischen Lehrsatz.
- Der Sinus ist ungerade, d. h. $\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Der Kosinus ist gerade, d. h. $\cos(-x) = \cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Folgende Werte sollte man sich merken:

  Maxima: $\cos(0) = 1 = \sin(\frac{\pi}{2})$

  Minima: $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(3\frac{\pi}{2}) = 1 = \sin(0) = \sin(\pi)$

  Nullstellen: $\cos(\pi) = -1 = \sin(3\frac{\pi}{2})$
- Zudem gelten die Additionstheoreme:
$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$
$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$
Daraus ergeben sich weitere Formeln, etwa für den halben oder doppelten Winkel.
- Der Graph von Sinus und Kosinus hat dieselbe Gestalt, ist aber horizontal verschoben:
$$\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$
- Die Nullstellen des Tangens stimmen mit denen des Sinus überein. Außerdem gilt
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \,.$$
(Der Tangens ist also unbeschränkt. Wir sprechen hier auch von uneigentlichen Limiten).

17. Grenzwerte und Stetigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die überaus wichtigen Begriffe »Grenzwert« (Limes) und »Stetigkeit« zumindest anschaulich verständlich machen, die Limes-Schreibweise einführen und einige Aussagen über Limiten bzw. stetige Funktionen festhalten. Für eine der möglichen exakten Definitionen (ϵ-δ-Definition) sei als Ausblick auf das erste Semester auf den Abschnitt 17.4 Ausblick: Stetigkeit exakt ▶155 verwiesen. Zum Teil findet sich diese Definition auch in Schulbüchern

17.1. Grenzwerte

Definition 17.1: Grenzwert (Limes)

Die Zahl $L \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert an der Stelle x_0 der Funktion f, wenn sich $f(x)$ beliebig nahe an die Zahl L annähert, wenn x ausreichend nahe bei x_0 ist. Die Nähe bzw. den Abstand können mir mit Hilfe des Betrages (vgl. ▶140) messen: Ist $|x - x_0|$ ausreichend klein, so ist auch $|f(x) - L|$ ausreichend klein. Wir schreiben dafür $f(x) \to L$ für $x \to x_0$ oder

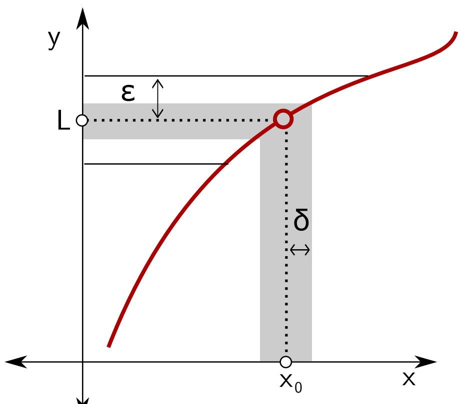
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} .$$

Wichtig: x_0 braucht dabei nicht im Definitionsbereich von f zu liegen, $\mathcal{D} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ reicht als Definitionsbereich aus.

Exakter können/müssen wir das so formulieren: f hat in x_0 den Grenzwert L, per Defintion genau dann, wenn: Zu jedem $\epsilon > 0$ lässt sich ein passendes $\delta > 0$ finden, sodass aus $0 < |x - x_0| < \delta$, folgt, dass auch

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

gilt. Liegt also x ausreichend nahe an x_0, so liegt auch $f(x)$ ausreichend nahe an L. Vergleiche hierzu auch mit 17.2 17.4 Ausblick: Stetigkeit exakt ▶155.



Bsp. 17.1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} .$$

Dann können wir untersuchen, ob f einen Grenzwert an der Stelle 2 hat, also ob $\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert. $f(x)$ ist für $x = 2$ nicht definiert. Das macht aber nichts, weil uns $f(x)$ nur interessiert, wenn wir uns mit x gegen 2 annähern – das stellen wir uns als dynamischen Prozess vor. x erreicht 2 ja nie direkt, also ist $x \neq 0$. Für $x \neq 0$ gilt aber

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2 .$$

Also ist

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+2) \stackrel{*}{=} 2 + 2 = 4\,.$$

Die Richtigkeit von $\stackrel{*}{=}$ ist anschaulich klar, wenn man sich die Gerade $y = x + 2$ skizziert und die Stelle $x = 2$ betrachtet.

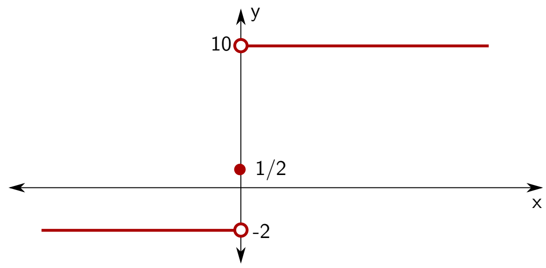
Und jetzt noch ein Beispiel, wo der Grenzwert nicht existiert.

Bsp. 17.2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 10 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Zeichnen wir uns eine Skizze, so fällt die Stufe bei $x_0 = 0$ auf:



Gibt es den Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$? Anschaulich ist klar: Wenn wir uns von x rechts von 0 annähern, so ist der Funktionswert stets 10, weswegen sich $f(x)$ beliebig nahe an 10 annähert. Wir sagen auch: Der rechtsseitige Limes für $f(x)$ mit x gegen 0 ist 10 und schreiben dafür

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 10\,.$$

Umkehrt erhalten wir bei einer Annäherung an 0 von links immer den Funktionswert -2, nähern uns also beliebig nahe an -2 an. Also schreiben wir dafür den linksseitigen Limes

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2\,.$$

Insgesamt ist also nachvollziehbar, dass es keine Zahl L geben kann, an die sich $f(x)$ für x gegen 0 annähert. Wir sagen auch noch: Es kann keinen Limes gegeben, weil die beiden einseitigen Limiten nicht übereinstimmen.

Man beachte, dass $f(0)$ nirgends in die Argumentation für die Existenz eines Grenzwert eingegangen ist. $f(x_0)$ spielt nur bei der Überprüfung von Stetigkeit eine Rolle! (vgl. ▶152)

Die Nichtexistenz eines Grenzwertes lässt sich verbal wie folgt ausdrücken: Egal, welchen Grenzwertkandidaten $L \in \mathbb{R}$ wir wählen: Auch wenn x noch so nahe an x_0 liegt, gibt es immer wieder Ausreißer $f(x)$, die nicht beliebig nahe an L liegen, sondern einen fest vorgegeben Abstand überschreiten. Für eine exaktere ϵ-δ-Definition▶155 besteht an dieser Stelle keine Notwendigkeit. Diese Thematik sollte in der Höheren Mathematik VO und in der Analysis VO ausreichend behandelt werden.

17.2. Stetigkeit

Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{D} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Für einen inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$ können wir dann definieren:

Definition 17.2: Stetigkeit

f heißt stetig in x_0, wenn sich der Wert $f(x)$ beliebig nahe an den Funktionswert $f(x_0)$ annähert, wenn nur x ausreichend nahe bei x_0 liegt. Wir schreiben dafür

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

uns sagen: Für x gegen x_0 geht $f(x)$ gegen $f(x_0)$. Oder: f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert (Limes) $f(x_0)$. Anders formuliert: Der Grenzwert von f an der Stelle x_0 ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0.

Wir können die obige Gleichung auch noch anders deuten, nämlich als

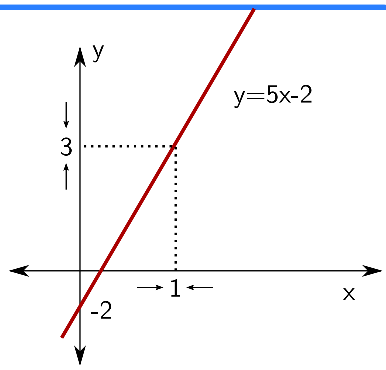
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$$

und wir sagen: Bei stetigen Funktionen dürfen wir die Funktion und den Limes vertauschen. Wir sagen außerdem, f ist stetig, wenn f in allen $x_0 \in \mathcal{D}$ stetig ist.

Bsp. 17.3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x - 2$. Dann ist f beispielsweise an $x_0 = 1$ stetig:
Wenn sich x in Ausdruck $5x - 2$ immer näher an 1 annähert, so bleibt $f(x)$ nichts anderes übrig, als sich an $5 \cdot 1 - 2$ anzunähern. Es gilt:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (5x - 2) = 5 \cdot 1 - 2 = 3 = f(1)\ .$$



17.3. Rechenregeln für Limiten

Ohne Beweis wollen wir noch wichtige Rechenregeln für Limiten angeben, da wir diese Rechenregeln im Folgenden noch öfters brauchen. Insbesondere in der Differentialrechnung spielen sie bei den Herleitungen eine Rolle. Auf Beweise wird verzichtet, da diese auf die ϵ-δ-Definition von Grenzwerten zurückgehen – die Thematik sollte im ersten Semester ausreichend behandelt werden.

Satz 17.1

Es seien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$$

Dann existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 \in \mathbb{R}$$

In Worten: Der Limes der Summe ist gleich der Summe der Limiten. Ersetzt man $+$ durch $-$, so gilt die analoge Rechnung auch für die Differenz von Limiten.

→

Des weiteren existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2 \in \mathbb{R}$$

In Worten: Der Limes des Produkts ist gleich dem Produkt der Limiten.

Ist $g(x) \neq 0$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, so existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \in \mathbb{R}$$

In der Praxis führt man mit Hilfe dieser intuitiven Regeln komplizierte Ausdrücke auf leichter einsehbare Limiten zurück.

Bsp. 17.4

Seien $f(x) = x$ und $g(x) = 2$. Dann ist

$$\lim_{x \to 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 1} f(x) + \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2 = 1 + 2 = 3\,.$$

Bsp. 17.5

Sei $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachte $f(x) = 1$ und $g(x) = x$. Wir fragen uns: Existiert nun

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}\ ?$$

Wir dürfen den obigen Satz nicht anwenden, da zwar $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D}$, aber

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0\,.$$

Somit können wir mit den obigen Begriffen/Mitteln keine Aussage darüber machen. Mit einer Skizze ist natürlich klar, das es keinen reellen Grenzwert geben kann.

Aufbauend auf den Rechenregeln für Limiten ergeben sich Rechenregeln für stetige Funktionen:

Satz 17.2

Sind $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in \mathcal{D}$, so sind auch $f + g, f - g, f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Ist zudem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D}$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

In Worten: Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetig.

Beweis

Sind f und g in x_0 stetig, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Damit bekommen wir:

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) \overset{1)}{=} \lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) \overset{2)}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \overset{3)}{=} f(x_0)+g(x_0) \overset{4)}{=} (f+g)(x_0)$$

Dabei haben wir bei 1) die Definition der Summenfunktion▶126 verwendet, bei 2)die Rechenregeln für Limiten (Satz 17.1 ▶152), bei 3) die Stetigkeit von f und g in x_0 und in 4) wieder die Definition der Summenfunktion.

□

Noch eine Aussage zur Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen:

Satz 17.3

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben. Ist nun f stetig in $x_0 \in X$ und ist g stetig in $y_0 = f(x_0) \in Y$, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig in x_0. Das heißt:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) \; .$$

17.4. Ausblick: Stetigkeit exakt

Der Begriff »Stetigkeit« wird in der Schule für gewöhnlich recht anschaulich verwendet. Üblicherweise lernt man, dass eine Funktion stetig ist, wenn sich den Graph zeichnen lässt, ohne den Bleistift absetzen zu müssen. Dabei wird weder thematisiert, welchen Definitionsbereich oder Wertevorrat wir haben, noch wird definiert, was »Stetigkeit in einem Punkt« bedeutet. Vielleicht etwas überraschend stellt sich heraus, dass dieses intuitiv-anschauliche Konzept der Stetigkeit mathematisch-exakt von der Logik her vergleichsweise schwer fassbar ist und wesentliche Eigenschaften von Zahlenmengen oder anderen Räumen genutzt werden. Dieser Ausblick soll nur kurz eine Definition der Stetigkeit für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ geben und dann als Motivation kurz die dafür nötigen Strukturen herausstreichen ($\rightarrow$ Möglichkeit zur Verallgemeinerung).

Definition 17.3

Sei $\mathcal{D} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ (also ein offenes Intervall) und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Sei nun $c \in \mathcal{D}$. Dann sagen wir: f ist stetig im Punkt c per Definition genau dann, wenn

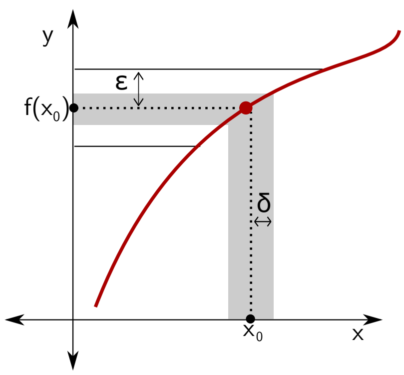
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_{(c,\epsilon)} > 0 \; \forall x \in \mathcal{D} \; : \; |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

In Worten: f ist stetig im Punkt c per Definition genau dann, wenn es zu jeder auch noch so kleinen, echt positiven reellen Zahl ϵ zumindest eine ebenfalls reelle, echt positive Zahl δ gibt (die im Allgemeinen sowohl von ϵ als auch von der Stelle c abhängt), sodass für alle weiteren Stellen x aus dem Definitionsbereich gilt: Wenn x einen kleineren Abstand von c hat als δ, so hat auch $f(x)$ einen kleineren Abstand von $f(c)$ als ϵ.

Zunächst: Nicht vor dieser Definition erschrecken, man wird sie im ersten Semester noch oft genug hören. Dann: Ja, sie ist von der Handhabung und Logik vergleichsweise mühsam.

Was heißt diese Definition inhaltlich? Sie bedeutet Folgendes: Wenn wir uns entlang der x-Achse immer näher an c annähern, so nähert sich der zugehörige Funktionswert immer näher an $f(c)$ an. Eine andere Formulierung wäre: Zu jeder ϵ-Umgebung[1] von $f(c)$ lässt sich eine δ-Umgebung von c finden, sodass alle Funktionswerte mit Elementen aus dieser δ-Umgebung in der $epsilon$-Umgebung von $f(c)$ landen.

Die Skizze, das man in diesem Zusammenhang im Kopf haben sollte ist Folgendes:



Das Ausmaß der Schwierigkeit dieser Definition zeigt sich vor allem dann, wenn man über Definition nachprüfen soll, ob eine Funktion an einer Stelle c stetig ist oder nicht. Neben der logischen Schwierigkeit, was überhaupt zu tun ist, kommt eine zweite dazu, nämlich das Rechnen mit und das Abschätzen von Beträgen (vgl. 16.3 bzw. 13.2). Damit man es einmal gesehen hat und damit man evtl. später im ersten Semester darauf zurückgreifen kann, folgen nun Beispiele zur Stetigkeit:

1 Wir benutzen hier das Wort »Umgebung« ganz intuitiv, ohne mathematisch exakte Definition.

Bsp. 17.6

Es sei $f:(0,3)\to\mathbb{R}$ durch $f(x)=4x+2$ definiert. Ist f stetig in $x_0=1$?

Zunächst die sogenannte Suchphase: Wir wollen ja sicherstellen, dass aus den kleinen Abständen der Urbilder die kleinen Abstände der Bilder folgen, daher versuchen wir, diese beiden Beträge in eine Beziehung zu bringen:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f(2)| = |4x+2-(8+2)| = |4x-8| = 4\,|x-2| = 4\,|x-x_0|$$

Wir stellen fest: Ist $|x-x_0|<\delta$, so ist $|f(x)-f(x_0)|<4\delta \underbrace{<\epsilon}_{\text{wollen wir haben!}}$. Also reicht es, wenn

$$\delta < \frac{\epsilon}{4}$$

ist, also beispielsweise

$$\delta = \frac{\epsilon}{5}\,.$$

Nun der fertige, schöne Beweis: Sei $\epsilon>0$ beliebig vorgegeben. Dann wähle $\delta=\frac{\epsilon}{5}>0$. Wenn $|x-x_0|<\delta$ ist, so gilt für diese x, dass

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f(2)| = \ldots = 4\,|x-2| = 4\,|x-x_0| < 4\delta = 4\frac{\epsilon}{5} = \frac{4}{5}\epsilon < \epsilon$$

Also haben wir gezeigt, dass es für alle $\epsilon>0$ ein passendes $\delta>0$ gibt, sodass für alle $x\in\mathcal{D}$ die Implikation

$$|x-x_0|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

erfüllt ist. f ist somit stetig in $x_0=2$.

Wir halten fest: In der Suchphase versuchen wir, $|f(x)-f(x_0)|$ in einen möglichst einfachen Zusammenhang mit $|x-x_0|$ zu bringen. Dadurch erhalten wir eine möglichst einfache Abhängigkeit von δ zu ϵ. Beim eigentlichen Beweis geht es dann vor allem darum, mit diesem gefundenen δ das Ganze logisch schlüssig/korrekt hinzuschreiben.

Bsp. 17.7

Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2+2x-3$. Ist f an einer beliebigen Stelle $x_0\in\mathbb{R}$ stetig? Wie zuvor starten wir mit der Suchphase:

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= \left|(x^2+2x-3)-(x_0^2+2x_0-3)\right| = \left|x^2-x_0^2+2(x-x_0)\right| = \\
&\overset{1)}{=} \left|((x-x_0)+x_0)^2-x_0^2+2(x-x_0)\right| = \\
&= \left|(x-x_0)^2+2(x-x_0)x_0+x_0^2-x_0^2+2(x-x_0)\right| = \\
&= \left|(x-x_0)^2+(x-x_0)(2x_0+2)\right| = \\
&= \left|(x-x_0)^2+2(x_0+1)(x-x_0)\right| \le \\
&\overset{2)}{\le} \left|(x-x_0)^2\right| + |2(x_0+1)(x-x_0| = \\
&= (|x-x_0|)^2+2\,|x_0+1|\,|x-x_0| \le \\
&\overset{3)}{\le} (|x-x_0|)^2+2(|x_0|+|1|)\cdot|x-x_0| = \\
&= (|x-x_0|)^2+2(|x_0|+1)\cdot|x-x_0| = \ldots
\end{aligned}$$

Zu Schritt 1): Den »Trick« mit $x=x-x_0+x_0$ darf man sich durchaus merken. Zu Schritt 2) und 3): Hier wurde die Dreiecksungleichung verwendet (vgl. Satz 16.1 ▶141).

Setzen wir nun voraus, dass $|x - x_0| < 1$, so ist $|x - x_0|^2 < |x - x_0|$ und daher

$$\ldots \leq |x - x_0| + 2(|x_0| + 1) \cdot |x - x_0| = (2\,|x_0| + 3)\,|x - x_0|$$

Wir sind also auf einen Zusammenhang von $|f(x) - f(x_0)|$ mit $|x - x_0|$ gekommen. Und wir wollen haben

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (2\,|x_0| + 3)\,|x - x_0| < \underbrace{(2\,|x_0| + 3)\delta < \epsilon}_{\text{ist gewünscht!}}$$

Umgeformt bedeutet das

$$\delta < \frac{\epsilon}{2\,|x_0| + 3}\,.$$

Dieses Mal hängt δ also sowohl von ϵ, als auch von x_0 ab. Also wählen wir beispielsweise

$$\delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon}{2(2\,|x_0| + 3)} < \epsilon$$

Noch ein Zusatz: Wir erinnern uns, dass wir oben verwendet habe, dass $|x - x_0| < 1$ war. Damit dies auf jeden Fall gewährleistet ist, wählen wir δ auch noch kleiner 1. Somit wählen wir

$$\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{2(2\,|x_0| + 3)}\}\,,$$

also die kleinere dieser beiden Zahlen. Die Suchphase ist damit beendet und wir schreiben den fertigen Beweis auf:

Sei $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann wählen wir

$$\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{2(2\,|x_0| + 3)}\} > 0$$

und somit gilt dann für alle $x \in \mathcal{D}$ mit $|x - x_0| < \delta < 1$, dass auch

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| = \ldots = (|x - x_0|)^2 + 2(|x_0| + 1) \cdot |x - x_0| &\leq \\
&\leq |x - x_0| + 2(|x_0| + 1) \cdot |x - x_0| = \\
&= (2\,|x_0| + 3)\,|x - x_0| < (2\,|x_0| + 3)\delta \leq \\
&\leq (2\,|x_0| + 3) \cdot \frac{\epsilon}{2(2\,|x_0| + 3)} = \frac{\epsilon}{2} < \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Also ist f stetig in jedem $x_0 \in \mathcal{D}$.

Noch einmal der Hinweis, was die Stetigkeit trotz (zunächst) mühsamer Definition in der mathematischen Theorie so angenehm macht: Sie ist an sich eine »schöne« Eigenschaft. So sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient sowie Hintereinanderausführung stetiger Funktionen wieder stetig (vgl. ▶152 bzw. Satz 17.2 ▶153), Intervalle werden wieder auf Intervalle abgebildet, Grenzwerte und Funktion lassen sich vertauschen und und und.

Noch ein kleine Warnung: Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind nicht äquivalent, wie man zunächst vermuten könnte, wenn man nur schöne Schulbeispiele betrachtet. Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar. Umgekehrt gilt aber: Differenzierbar Funktionen sind stetig.

Und nun noch eine echte mathematische Motivation: Das Konzept der Stetigkeit ist nicht auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Im Prinzip erhält man in jeder Menge, in der man Abstände messen kann (also man eine sogenannte Metrik definieren kann, vgl. ▶143) und die anschaulich gesprochen keine Lücken hat (»vollständig« ist), vergleichbare Ergebnisse.

Zusammenfassung

Unter einer Funktion f verstehen wir eine Abbildung, die jedem Element $x \in \mathcal{D}$ (dem Definitionsbereich) genau ein $y \in Y$ (dem Wertevorrat) zuordnet. y heißt dann Bild vom Argument x unter f und wird auch gerne mit $f(x)$ bezeichnet. Umgekehrt heißt dann x (ein) Urbild von y. Eine übliche Schreibweise ist

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} \to Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases} \quad .$$

- Der Graph von f ist dann die Menge $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}, f(x) \in Y\}$.
- Ist $M \subset \mathcal{D}$, so ist $f(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M : f(x) = y\}$. $f(\mathcal{D})$ heißt Bild von f, $f(M)$ Bild von M unter f.
- Ist $N \subset Y$, so ist $f^{-1}(N) := \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \in N\}$ und heißt Urbild von N unter f.
- f heißt injektiv, wenn es zu jedem Element aus dem Bild von f genau ein Urbild gibt.
- f heißt surjektiv, wenn es zu jedem Element aus dem Wertevorrat (zumindest) ein Urbild gibt.
- f heißt bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Gleichbedeutend: Jedes Element aus dem Wertevorrat hat genau ein Urbild.

Sind $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen, dann können wir folgende Funktionen definieren:

- $f + g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt Summe (Summenfunktion) von f und g und wird definiert durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.
- $f - g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt Differenz und wird definiert durch $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$.
- $f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt Produkt (Produktfunktion) und wird definiert durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.
- $\frac{f}{g} : \mathcal{D} \setminus \{x \in \mathcal{D} \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ heißt Quotient (Quotientenfunktion) und wird definiert durch $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ gegeben, so können wir $g \circ f : X \to Z$ als die Hintereinanderausführung »g nach f« definieren und wir legen fest:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Ist $Z = X$, so heißt f invertierbar, wenn es eine Funktion g gibt, die $g(f(x) = x$ für alle $x \in X$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$ erfüllt. g heißt dann Umkehrfunktion von f und wird gewöhnlich mit f^{-1} bezeichnet.

Sei $f : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in x_0 den Grenzwert (Limes) $L \in \mathbb{R}$, wenn $f(x)$ beliebig nahe an L liegt, solange x nur ausreichend nahe an x_0 ist. Wir schreiben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,.$$

Es gelten folgende Rechenregeln für Grenzwerte (Limiten), wenn die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sowie $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Ist $g(x) \neq 0$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, so ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

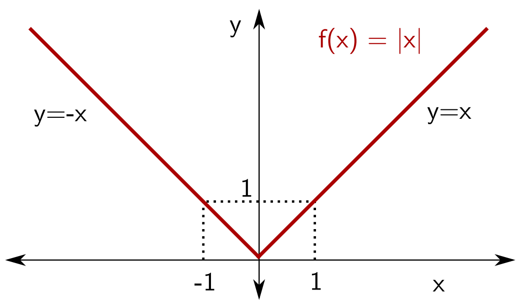
Der Begriff des Grenzwertes ist eng mit dem Begriff der Stetigkeit verbunden: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben und ist $x_0 \in \mathcal{D}$ enthalten, so heißt f stetig in x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \; ,$$

d. h. der Grenzwert an dieser Stelle stimmt mit dem Funktionswert überein. Ist f stetig in allen $x_0 \in \mathcal{D}$, so heißt f stetig. Beispiele für stetige Funktionen sind Polynome, Wurzel- und Potenzfunktion, Betragsfunktion, Exponential und Logarithmusfunktionen. Beispiele für unstetige Funktionen sind sogenannte Treppenfunktionen (nomen est omen).

Und hier noch einmal einige wichtige Funktionen im Überblick:

- Unter einer (reellen) Polynomfunktionen n-ten Grades verstehen wir eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$
wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ sind. Die a_k heißen Koeffizienten.
- Unter einer Wurzelfunktion verstehen wir eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Unter einer Potenzfunktion verstehen wir eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$. Je nachdem, aus welcher Zahlenmenge r stammt, kann der Definitionsbereich auch größer gewählt werden.
- Die Betragsfunktion (bzw. der Betrag) $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist definiert durch
$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$
Der Betrag löscht also das negative Vorzeichen und machte jede Zahl positiv. Somit ist $|x| \geq 0$.



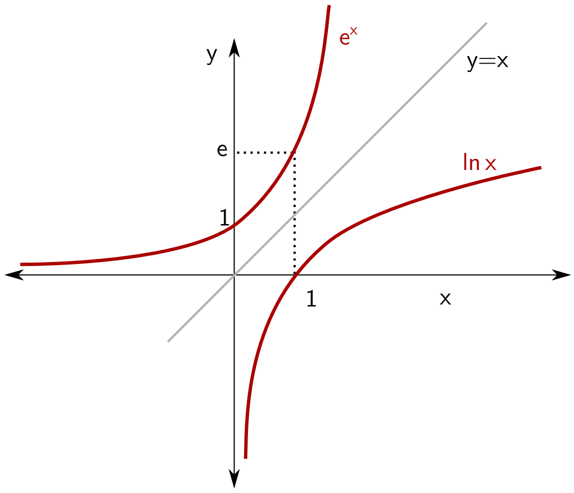
Anschaulich liefert der Betrag den Abstand der Zahl x von 0 auf der Zahlengeraden. Insbesondere liefert $|x - a|$ den Abstand von x zu a.

- Die e-Funktion bzw. Exponentialfunktion (mit Basis e) $exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist definiert durch $\exp(x) = e^x$. Die Basis e heißt Euler'sche Zahl. Aus den Rechenregeln für Potenzen ergeben sich einige schöne Eigenschaften, etwa $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.
- Der (natürliche) Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln x$ ist die Umkehrfunktion zur e-Funktion. Es ist also

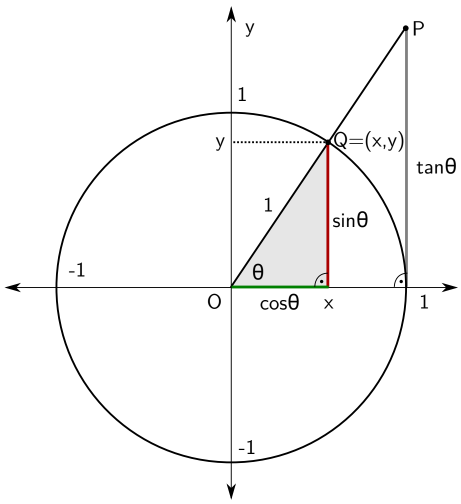
$$e^{\ln x} = x \qquad \forall x \in (0, \infty)$$

und

$$\ln(e^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$



- Zu einem Winkel φ gibt es genau einen Punkt (x, y) am Einheitskreis. Dann definieren wir $\sin(\varphi) := y$ und $\cos(\varphi) = x$. Mathematisch unexakt, aber anschaulich gesagt: sin ist die Gegenkathete, cos die Ankathete. Es gilt: $\tan \varphi = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$.



Insbesondere ist $\cos(0) = 1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Weiters sind Sinus und Kosinus periodisch mit Periode 2π, es gelten also

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \text{sowie} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \, .$$

Für Sinus und Kosinus gibt es einige wichtige Formeln (Additionstheorme etc.), die in jeder Formelsammlung für die Oberstufe zu finden sind.

Teil VI.

Folgen und Reihen

18. Folgen

Folgen spielen eine wesentliche Rolle in der reellen (und auch komplexen) Analysis. Die Analysis ist das Themengebiet, das sich im Wesentlichen mit Grenzwertprozessen (Approximationsprozessen) beschäftigt. Wir haben in Kapitel 17 Grenzwerte und Stetigkeit ▶150 bereits kennengelernt, wie man Grenzwerte bei Funktionen durch den Begriff des Abstands und δ- sowie ϵ-Umgebungen ausdrücken kann. Die Vorstellung, die wir dazu im Kopf hatten, war das der kontinuierlichen Annäherung. Die Vollständigkeit der reellen (bzw. komplexen) Zahlen (mit dem üblichen Abstandsbegriff) liefert uns die Möglichkeit, diesen kontinuierlichen Annäherungsprozess durch einen diskreten Prozess äquivalent zu beschreiben. Je nach Themengebiet bzw. Anwendung ist der kontinuierliche Zugang oder der diskrete Zugang zu bevorzugen.

In diesem Kapitel definieren wir den Begriff einer (Zahlen-)Folge, lernen erste wichtige Eigenschaften und Definitionen kennen. Um einen ersten Vorgeschmack auf die Analysis zu geben, behandeln wir in Ansätzen auch die Konvergenz von Folgen und die Bestimmung von Grenzwerten (falls vorhanden).

18.1. Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Definition 18.1: Reelle Folge

Unter einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen verstehen wir eine Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ n & \mapsto f(n) = a_n \ . \end{cases}$$

Es geht also darum, den natürlichen Zahlen jeweils eine eindeutige Zahl zuzuordnen. Der Funktionswert $f(n)$ heißt n-tes Folgenglied und wird für gewöhnlich mit a_n bezeichnet.

Dadurch, dass Folgen als spezielle Funktionen eingeführt werden, ist ihre Existenz gesichert und damit im Rahmen der deduktiven Mathematik wohldefiniert. Da diese Funktionsschreibweise recht aufwendig ist und wir Bilder $f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$ durch die natürliche Zahlen de facto durchnummerieren, wird für gewöhnlich die Schreibweise als »unendlicher Vektor« verwendet, also

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \ .$$

Folgende Notationen sind für Folgen üblich:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\geq 0} = (a_n) \ .$$

Die letzte Schreibweise ist sehr schlampig – man verwendet sie nur, wenn keine Missverständnisse möglich sind. Um anzudeuten, aus welcher Menge die jeweiligen Folgenglieder sind, schreibt man beispielsweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (reelle Folgenglieder) oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ (komplexe Folgenglieder). Manchmal ist es praktisch, dass die Folgenglieder erst mit $n = 1$ beginnen. Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$(a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots) \ ,$$

d. h. die Folge beginnt mit dem Index k.

Veranschaulichungen von Folgen sind durch ihre Definition über Funktionen sehr gut möglich. Für reelle Folgen bietet es sich, die Folge durch ihren Graph in einem n-a_n-Koordinatensystem zu machen. Der

Graph der Folge ist dann natürlich eine (diskrete) Punktemenge und keine kontinuierliche Linie. Für komplexe Folgen ist das etwas unanschaulicher und wird weniger verwendet.

Die zweite Möglichkeit ist, nur die Werte a_n im jeweiligen Wertvorrat (reelle Zahlengerade oder komplexe Zahlen) als Punkte einzuzeichnen und in Abhängigkeit ihres Indexes zu beschriften.

In der Praxis werden Folgen bevorzugt durch ein sogenanntes Bildungsgesetz beschrieben (d. h. Funktionsvorschrift), wodurch sich die Folgenglieder tatsächlich in Abhängigkeit des Index n berechnen lassen:

Bsp. 18.1

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

und berechnen die ersten paar Folgenglieder:

$$(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{1000}{1001}, \frac{1001}{1002}, \ldots)$$

Es fällt auf: Die Folgenglieder werden immer größer und nähern sich offenbar der Zahl 1 an.

Genauso, wie man an Eigenschaften von Funktionen interessiert ist, um sie charakterisieren zu können, möchte man das für Folgen tun. Dabei übertragen sich durchaus die entsprechenden Definitionen und Eigenschaften der Funktionen vergleichsweise naheliegend auf Folgen. Monotonie und Beschränktheit bieten sich dafür besonders an:

Definition 18.2: Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn es eine positive Zahl $M \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \leq M \, .$$

Die Zahl M heißt dann Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Für reelle Folgen: Alle Folgenglieder sind dann entweder kleiner als M und größer als $-M$. Beim Graph befinden sich eben alle Punkte zwischen $-M$ und M. Man führt für reelle Folgen zusätzlich oft noch den Begriff einer oberen bzw. unteren Schranke ein:

- Eine Zahl $O \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke, wenn alle Folgenglieder kleiner oder gleich sind:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq O \, .$$

- Eine Zahl $U \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke, wenn alle Folgenglieder größer oder gleich sind:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U \leq a_n \, .$$

Es ist anschaulich klar, dass dann $U \leq O$ gelten muss. Man überlege sich noch, dass bei komplexen Folgen die Beschränktheit eine etwas andere Rolle spielt, da die komplexen Zahlen nicht durch $\leq$ geordnet werden können.

Definition 18.3: Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt monoton steigend (oder monoton wachsend), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \, ,$$

also die Folgenglieder nicht kleiner werden. Von streng monoton steigend spricht man, wenn $a_n < a_{n+1}$ gilt, d. h. die Folgenglieder tatsächlich wachsen. Analog wird (streng) monoton fallend definiert.

Man beachte, dass diese Definition für komplexe Zahlen keinen Sinn macht, da sich diese nicht der Größe nach ordnen lassen und daher nur für reelle Folgen gilt. Wir untersuchen nun eine gegebene Folge auf Monotonie bzw. Beschränktheit

Bsp. 18.2

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

ist durch 1 beschränkt, da

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &\leq 1 && \Leftrightarrow \\ \frac{n}{n+1} &\leq 1 && \Leftrightarrow \\ n &\leq n+1 \end{aligned}$$

gilt. Weiters ist diese Folge streng monoton steigend, da

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} && \Leftrightarrow \\ \frac{n}{n+1} &< \frac{n+1}{(n+1)+1} && \Leftrightarrow \\ n(n+2) &< (n+1)(n+1) && \Leftrightarrow \\ n^2+2n &< n^2+2n+1 && \Leftrightarrow \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

18.2. Konvergenz

Um diesen Sachverhalt der beliebig genauen Annäherung an einen Wert zu beschreiben, führen wir für Folgen den Begriff des Grenzwertes ein.

Definition 18.4: Grenzwert (Folge)

Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Zu jeder noch so beliebig kleinen, positiven reellen Zahl ϵ gibt es einen Folgenindex N, sodass alle späteren Folgenglieder a_n näher an L liegen als ϵ. In Kurzschreibweise:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |a_n - L| < \epsilon$$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} L\,.$$

Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Diese Definition verdient noch einige Bemerkungen:

- Man kann ausgehend von dieser Definition zeigen, dass der Grenzwert eindeutig ist, falls es ihn gibt. Man nimmt an, dass es zwei unterschiedliche Grenzwert gibt. Diese liegen dann um einen bestimmten Abstand d auseinander. Wählt man nun $\epsilon < d/2$, so gilt per Definition des Grenzwertes, dass die Folgenglieder jeweils maximal ϵ-weit von den beiden Grenzwert gleichzeitig entfernt sein können. Das ist ein Widerspruch, wie eine Skizze auch anschaulich zeigt.
- Wie ist diese Definition zu lesen: Zu jedem (auch noch zu kleinen) $\epsilon > 0$ gibt es einen (ausreichend) großen Index N, sodass für alle Folgenglieder a_n, deren Index größer gleich N ist, gilt, dass sie näher am Grenzwert L liegen als ϵ. Anders formuliert: Ab einem gewissen Index N liegen alle Folgenglieder in einer ϵ-Umgebung um L. Im Allgemeinen wird N von ϵ abhängen (geschrieben als $N(\epsilon)$).
- Ein Grenzwert muss nie wirklich von der Folge erreicht werden, kann es aber natürlich. Es kann unendlich viele Folgenglieder geben, die größer als L sind, es kann aber gleichzeitig auch unendlich viele Folgenglieder geben, die kleiner als L sind. Letztlich kann es auch unendlich viele Folgenglieder geben, die gleich L sind. Ein Grenzwert kann also erreicht werden, muss es aber nicht. Ein Grenzwert kann über- und unterschritten werden, muss es aber nicht.
- Sie ist direkt auf komplexe Folgen übertragbar, statt des reellen Betrages $|\cdot|$ nimmt man dann selbstverständlichen den komplexen Betrag (d. h. $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$).
- Wächst seine Folge unbeschränkt, d. h. überschreiten ihre Folgenglieder irgendwann einmal jede vorgegebene Schranke, so schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

und sagt, die Folge ist »bestimmt divergent«. Analoges bei $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bsp. 18.3

Wir zeigen: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = 1/n$ hat den Grenzwert 0.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann wählen[a] wir N als die nächstgrößere natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\epsilon}$, also

$$N > \frac{1}{\epsilon}\,.$$

Für ein beliebiges $n \geq N$ ist dann ebenfalls

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

bzw.

$$\epsilon > \frac{1}{n}$$

und wir erhalten dann

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon\,.$$

a Dass das überhaupt immer geht, garantiert das Archimedische Axiom bei den reellen Zahlen: $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : 0 < x < y \Rightarrow nx > y$. Man braucht also x nur oft genug zu sich selbst addieren, damit man mit dem kleineren x das größere y irgendwann einmal übertrifft. Mit $y = 1$ und $x = \epsilon$ erhält man die verwendete Beziehung.

Bsp. 18.4

Wir untersuchen die Folge

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

auf Existenz eines Grenzwertes. Eine Skizze legt die Vermutung nahe, dass sich die Folgenglieder immer näher an 1 annähern, die Gleichung

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

verdeutlicht dass, da für sehr große n der Term $1/n$ sehr klein wird und damit für sehr große n der Wert von a_n sehr nahe an 1 liegt, aber noch immer etwas darunter. Im »Unendlichen« wird dann der Wert 1 erreicht.

Wir starten zunächst mit der **Suchphase:** Wir wollen einen Index N finden, der in Abhängigkeit von ϵ so groß ist, dass für alle größeren n die Ungleichung $|a_n - L| < \epsilon$ erfüllt ist. Wir benötigen dafür zuerst einen Zusammenhang von n mit ϵ und nehmen dann N als (z. B. das kleinste) n, für das diese Ungleichung noch stimmt:

$$|a_n - L| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1(n+1)}{n+1}\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \overset{!}{<} \epsilon$$

Das Rufzeichen bedeutet, dass wir diesen Zusammenhang haben wollen (also dass das gelten soll). Welche n erfüllen nun die Ungleichung $1/(n+1) < \epsilon$ (in Abhängigkeit von ϵ)? Äquivalentes Umformen liefert, dass alle n mit

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

die erstere Ungleichung erfüllen. Somit können wir N festsetzen als eine natürliche Zahl, die größer ist als $1/\epsilon - 1$. Konkret kann man sich vorstellen, dass man die Zahl $1/\epsilon - 1$ berechnet (im Allgemeinen eine Komma-Zahl), 1 addiert und dann die Dezimalstellen streicht.

> Mit $\lfloor x \rfloor$ wird die Abrundungsfunktion (»Gaußklammer«) bezeichnet – sie liefert also die größte ganze Zahl, die kleiner gleich x ist.

Man kann also

$$N := \lfloor \left(\tfrac{1}{\epsilon}\right) + 1 \rfloor = \lfloor \tfrac{1}{\epsilon} \rfloor$$

setzen, wenn man sich ein konkretes N berechnen möchte. (Für den restlichen Beweis reicht die Existenz eines passenden N, es muss nicht ganz konkret gegeben sein.)

Nur zur **Beweisphase:**

i) Sei $\epsilon > 0$ beliebig (aber fest) vorgegeben.

ii) Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ derart, dass die Ungleichung $N > \frac{1}{\epsilon} - 1$ erfüllt ist. (Dass das geht, liefert wieder das Archimedische Axiom.)

iii) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig mit $n \geq N$ gegeben. Wir müssen nun zeigen, dass dann zwingend $|a_n - 1| < \epsilon$ erfüllt ist. Dazu berechnen wir

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \ldots = \frac{1}{n+1} \overset{a)}{\leq} \frac{1}{N+1} \overset{b)}{<} \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + 1} = \epsilon$$

Schritt $a)$ war gerechtfertigt, weil wir den Nenner kleiner gemacht haben, Schritt $b)$ ebenso (vgl. mit den Voraussetzungen in Schritt ii) und iii).

Damit haben wir die zu zeigende Aussage bewiesen und gezeigt, dass 1 der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Bsp. 18.5

Es sei für $n \geq 1$ die Folge

$$a_n = \frac{n^2+n}{3n^2+1}$$

gegeben. Zeige, dass der Grenzwert dieser Folge $1/3$ ist.

Suchphase: Wir schätzen den Ausdruck $|a_n - 1/3|$ wieder nach oben ab und suchen einen möglichst einfachen Zusammenhang mit ϵ:

$$\left|\frac{n^2+n}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(n^2+n)-(3n^2+1)}{3(3n^2+1)}\right| = \left|\frac{3n-1}{9n^2+3}\right| = \frac{3n-1}{9n^2+3}\,.$$

Dieser Ausdruck ist noch sehr kompliziert, weswegen wir schauen, ober wir den Nenner nicht kleiner und den Zähler nicht größer machen können. Das geht in diesem Fall recht leicht:

$$\frac{3n-1}{9n^2+3} < \frac{3n}{9n^2+3} < \frac{3n}{9n^2} = \frac{1}{3n} \overset{!}{<} \epsilon$$

Wir wählen N also letztlich so groß, dass

$$N > \frac{1}{3\epsilon}$$

ist, die gewünschte (!) Ungleichung erfüllt ist.

Beweisphase:

i) Sei $\epsilon > 0$ beliebig (aber fest) vorgegeben.

ii) Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ derart, dass die Ungleichung $N > \frac{1}{3\epsilon}$ erfüllt ist. (Dass das geht, liefert wieder das Archimedische Axiom.)

iii) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig mit $n \geq N$ gegeben. Wir müssen nun zeigen, dass dann zwingend $|a_n - 1/3| < \epsilon$ erfüllt ist. Dazu berechnen wir

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2+n}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| = \ldots = \frac{3n-1}{9n^2+3} < \frac{1}{3n} \overset{a)}{\leq} \frac{1}{3N} \overset{b)}{<} \frac{1}{3\cdot\frac{1}{3\epsilon}} = \epsilon$$

Schritt $a)$ war gerechtfertigt, weil wir den Nenner kleiner gemacht haben, Schritt $b)$ ebenso (vgl. mit den Voraussetzungen in Schritt ii) und iii)).

Damit haben wir die zu zeigende Aussage bewiesen und gezeigt, dass $1/3$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Man stellt (leider) fest: Das Arbeiten mit der Definition ist wieder sehr mühsam. Man versucht nun, den zu untersuchenden Grenzwert einer Folge auf bekannten Grenzwerte von »Bauteilen« dieser Folge zurückzuführen. Das geschieht ähnlich wie bei Funktionen, wo man Rechenregeln für Grenzwerte an einer Stelle x_0 hat. Der folgende Satz legt die erlaubten Rechenregeln für konvergente Folgen dar:

Satz 18.1: Rechenregeln für konvergente Folgen

Es seien die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = L_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Dann existieren für die Folgen $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls die Grenzwerte und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2\,.$$

Ist weiter $b_n \neq 0$ für alle n und $L_2 \neq 0$, so existiert auch der Grenzwert der Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L_1}{L_2}\,.$$

Analog zu den Grenzwerten von Funktionen verwendet man auch bei Folgen diese Rechenregeln für Grenzwerte, um kompliziertere Folgen auf einfachere Bestandteile zurückzuführen.

Bsp. 18.6: Rechnen mit den Rechenregeln für konvergente Folgen

Wir bestimmen den Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{-2n^3 - n + 2}{3n^2 + n + 6}$$

durch Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte. Bei rationalen Folgen wie diesen erweitert man mit passenden Potenzen von n bzw. $1/n$, sodass wir die Nullfolgen-Eigenschaft von $1/n$ ausnützen können:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3 - n + 2}{3n^3 + n^2 + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2n^3 - n + 2)\cdot(\frac{1}{n^3})}{(3n^3 + n^2 + 6)\cdot(\frac{1}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^3}}$$

Nun können wir mit den Rechenregeln für konvergente Folgen argumentieren und den Limes jeweils Schritt für Schritt über die einzelnen Bestandteile ziehen:

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-2) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n^3}\right)} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}\,.$$

Wir haben dabei noch jeweils verwendet, dass z. B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0\,,$$

da bekanntlich $1/n$ gegen 0 konvergiert (d. h. Grenzwert 0 hat).

Satz 18.2

Ist eine Folge beschränkt und monoton (steigend oder fallend), so ist sie auf jeden Fall konvergent. Der Grenzwert ist dann die kleinste obere Schranke (monoton fallend) bzw. die größte untere Schranke (monoton steigend).

19. Reihen

Reihen kann man sich zunächst ganz intuitiv als unendliche Summen $\sum$ vorstellen, bei denen jedes Summenglied (Summand) durch eine Vorschrift berechnet werden kann – analoges gab es ja auch bei den Folgen mit dem Bildungsgesetz. Ähnlich wie bei den Folgen benötigt es auch bei den Reihen eine Exaktifizierung, was man wirklich exakt darunter versteht – und was man unter Konvergenz verstehen will. Konvergenz meint auch bei den Reihen eine beliebig nahe Annäherung an einen Grenzwert, sofern nur ausreichend viele Summanden zur Berechnung herangezogen werden.

Der Nutzen der Reihen ist zunächst wenig klar – interessant wird das ganze, wenn die Summanden von der Variablen x abhängen. Damit hängt auch die Reihe von x ab und ist damit eine Funktion von x (»Potenzreihen«). Es wird sich letztendlich zeigen, dass sich (unendlich) differenzierbare Funktionen relativ gut durch endliche Polynomfunktionen (»Taylor-Polynom« annähern lassen. Reihen als deren Grenzwert liefern dann (unter gewissen Bedingungen) sogar Gleichheit. Man erhält dadurch letztendlich Vorschriften, wie man Funktionen wie Funktionen wie $\cos$ oder $\sin$ oder auch e^x berechnen kann.

Wir starten zunächst also mit einer exakteren Definition des Begriffs »Reihe«, danach werden einige Beispiele gebracht. Letztlich gibt es noch einen Ausblick auf Potenzreihen und Taylorpolynome, um einen ersten Eindruck von den typischen Fragestellungen und Denkweisen zu erhalten.

19.1. Grundlegende Definitionen

Der Begriff der Reihe baut direkt auf dem Begriff der Folge auf. Eine Reihe ist zwar anschaulich gesehen eine »unendliche Summe«, für die exakte Definition betrachtet man aber nur jeweils endliche Summen:

Definition 19.1: Reihe

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine (reelle) Folge, so verstehen wir unter dem Symbol

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

jene Folge $(S_N)_{N\geq 0}$, für die gilt

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N$$

und nennen sie »Folge der Partialsummen« oder »Reihe«. Hat die Folge $(S_N)_{N\geq 0}$ einen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, also $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = L$. so schreiben wir auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$$

und sagen, die Reihe konvergiert. Hat die Folge keinen Grenzwert, so sagen wir, die Reihe divergiert.

Zunächst noch eine Bemerkung zur Definition: Wie auch schon bei den »normalen« Folgen sind bei den Reihen ebenfalls nur endliche Grenzwerte zugelassen. Falls die Folge $(S_N)_{n\geq 0}$ unbeschränkt wächst (also beliebig groß wird), so schreibt man dafür $S_N \to \infty$ oder insbesondere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \,.$$

Eine weitere Notation für Reihen kommt vor: Manchmal schreibt man auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \,.$$

Bedauerlicherweise verleitet diese Notation zu Fehlern, weil dabei suggeriert wird, dass es sich nur um gewöhnliche Additionen handelt, bei der die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz) gelten. Das ist aber im Allgemeinen nicht so, da durch die unendlich vielen Summanden interessante Probleme auftauchen können. Beispielsweise ist das vertauschen von Summanden ist im Allgemeinen nicht erlaubt. Das nächste Beispiel soll verdeutlichen:

Bsp. 19.1

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = (-1)^n$. Diese Folge wechselt immer ihr Vorzeichen (ist alternierend) und springt zwischen den Werten 1 und -1 hin und her. Wir betrachten nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Wenn wir die (gefährliche) Notation als unendliche Summe verwenden, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \underbrace{1 + (-1)}_{=0} + \underbrace{1 + (-1)}_{=0} + \underbrace{1 + (-1)}_{=0} + \dots = 0\,,$$

so würden wir den Grenzwert 0 erwarten. Andererseits ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + \underbrace{(-1) + 1}_{=0} + \underbrace{(-1) + 1}_{=0} + \underbrace{(-1) + 1}_{=0} + \dots = 1$$

und 1 wäre der Grenzwert. Das (scheinbare) Problem löst sich, wenn wir auf die Definition der Reihe zurückgehen und die Partialsummen S_N betrachten. Man kann sich überlegen:

$$S_N = \begin{cases} 1 & \text{wenn } N \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{wenn } N \text{ ungerade ist}\,. \end{cases}$$

Die Folge der Partialsummen springt also immer zwischen 0 und 1 hin und her, hat also keinen Grenzwert. Somit divergiert die Reihe.

Wir zitieren ein erstes »Konvergenzkritierium«, dass uns hilft, zu bestimmen, ob eine Reihe überhaupt konvergieren kann:

Satz 19.1: Nullfolgen-Kriterium

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine sogenannte Nullfolge, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Beweis
Wir setzen voraus, dass die Reihe gegen den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L\,.$$

Wir berechnen nun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0\,.$$

Dabei haben wir die gängigen Rechenregeln für Limiten bzw. konvergente Folgen verwendet. □

Dieser Satz liefert also eine sogenannte notwendig Bedingung, damit eine Reihe überhaupt konvergieren kann. Allerdings ist die Eigenschaft, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist, nicht hinreichend dafür. Das heißt, es gibt Reihen, die divergieren, obwohl$a_n \to 0$ geht. Betrachten wir einige typische Beispiele:

19.2. Typische Beispiele

Bsp. 19.2: Harmonische Reihe

Es sei $a_n = 1/n$. Die Reihe $\sum_n^\infty a_n = \sum_n^\infty \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe. Obwohl die Summanden immer kleiner werden und Grenzwert Null haben ((a_n) also eine Nullfolge ist), hat die Reihe keinen (endlichen) Grenzwert. Das Addieren »unendlich« vieler (wenn auch sehr kleiner) Summanden lässt die Reihe unbeschränkt wachsen:

$$\sum_n^\infty \frac{1}{n} = \infty\,.$$

Das kann man sich anschaulich so überlegen:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots &>\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots &=\\
1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots &=\\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots &= \infty
\end{aligned}$$

Wir können unsere Reihe durch eine größere Reihe abschätzen, bei der wir zeigen konnten, dass man durch Zusammenziehen von ausreichend vielen Summanden immer den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht. Da das beliebig oft durchführbar ist und dadurch $\frac{1}{2}$ beliebig oft addiert werden muss, ist dieser Ausdruck unbeschränkt (überschreitet also jede vorgegebene endliche Zahl).

Die harmonische Reihe ist das klassische Beispiel für eine divergente Reihe. Die sogenannte geometrische Reihe ist das Standardbeispiel für eine konvergente Reihe, von der man den Grenzwert relativ leicht explizit berechnen kann. Im Allgemeinen ist das sehr schwer – oft kann man nur entscheiden, ob die Reihe überhaupt konvergiert oder nicht.

Bsp. 19.3: geometrische Reihe

Es sei $q \in \mathbb{R}$ und $a_n = q^n$. Die Reihe

$$\sum_n^{\infty} q^n$$

heißt dann geometrische Reihe. Wir überlegen uns nun, wie und unter welchen Bedingungen man ihren Grenzwert berechnen kann. Es ist über die Definition einer Reihe klar, dass zunächst

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} = S_N + q^{N+1}$$

ist. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} S_{N+1} = \sum_n^{N+1} q^n &= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^N + q^{N+1} = \\ &= 1 + q \cdot (1 + q^1 + q^2 + + \ldots + q^{N-1} + q^N) = 1 + q \cdot S_N \,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 + q \cdot S_N &= S_N + q^{N+1} && \Leftrightarrow \\ 1 - q^{N+1} &= S_N - q \cdot S_N && \Leftrightarrow \\ 1 - q^{N+1} &= S_N (1 - q) && \Leftrightarrow \\ S_N &= \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Wir haben also eine geschlossene Formel für die N-te Partialsumme gefunden. Dieses Ausdruck ist für alle $N \in \mathbb{N}$ wohldefiniert, falls $q \neq 0$ ist. Wann ist nun

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

endlich? Dieser Grenzwert ist endlich, wenn der Zähler nicht unbeschränkt wächst. Das ist der Fall, wenn $|q| < 1$, weil dann

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

ist. (Beispielsweise ist für $q = \frac{1}{2}$ nämlich $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot > \ldots$). Somit können wir für $|q| < 1$ berechnen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \,.$$

19.3. Ausblick : Potenzreihen und Taylorpolynome

Bei Potenzreihen kommen in den Summanden a_n der Reihe zusätzlich steigende Potenzen von x vor.

Definition 19.2: Potenzreihe

Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei (reelle) Folgen mit $a_n = b_n \cdot x^n$. Dann heißt die Reihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

Potenzreihe.

Die Konvergenz dieser Reihe hängt dann unter Umständen von der Stelle x ab. An jenen Stellen x, an denen die Potenzreihe konvergiert, kann sie somit als Funktion

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

aufgefasst werden. Interessant wird die Frage, wie Potenzreihen mit (bekannten) Funktionen zusammenhängen, also ob sich bekannte Funktionen (zumindest in kleinen Umgebungen) durch Potenzreihen beschreiben lassen. Das ist für viele Funktionen der Fall, beispielsweise ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

oder

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots$$

Je nach Lehrveranstaltungsaufbau werden diese Darstellungen sogar als Definitionen der jeweiligen Funktionen herangezogen.

Taylorpolynome (falls endliche Summen) bzw. Taylorreihen (falls Reihen) gehen den umgekehrten Weg. Ausgehend von einer bekannten Funktion versucht man eine Potenzreihendarstellung zu finden, vorausgesetzt die jeweilige Funktion ist ausreichend (bzw. beliebig) oft differenzierbar.

Wir versuchen einen Ansatz

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + R(x)$$

mit passenden a_j und einem Rest $R(x)$, den man sich am besten als den Rest der Potenzreihe vorstellt – er enthält also alle höheren Potenzen von x. Wir leiten die Gleichung nun mehrmals ab und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} f'(x) &= \quad + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + R'(x) \\ f''(x) &= \qquad\quad + 2a_2 + 6a_3 x + R''(x) \\ f'''(x) &= \qquad\qquad\quad + 6a_3 + R'''(x) \,. \end{aligned}$$

Die Reste haben vorher höhere Potenzen von x als 3 enthalten, nach dem mehrmaligen Ableiten beinhaltet auch noch jeder Summand eine Potenz von x. Damit ist $R(0) = R'(0) = R''(0) = R'''(0) = 0$. Wir setzten nun $x = 0$ in die Gleichungen ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= a_1 \\ f''(0) &= 2a_2 \\ f'''(0) &= 6a_3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eingesetzt in unseren Ansatz

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + R(x)$$

oder allgemein hingeschrieben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ ,$$

wobei $f^{(0)} := f$ ist. Das heißt, wir können eine differenzierbare Funktion unter passenden Bedingungen dadurch approximieren, dass wir die Ableitung an einer festen Stelle, dem Entwicklungspunkt (hier: $x = 0$), auswerten.

Teil VII.

Differential- und Integralrechnung

Die Differentialrechnung befasst sich vereinfacht gesagt mit der Untersuchung des Änderungsverhaltens von Funktionen. Durch diese Betrachtungen im »Kleinen« lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten der Funktionen im »Großen« (Monotonie, Extrema, ...) ziehen. Ausgangslage bzw. Grundvoraussetzung für den Begriff der Differenzierbarkeit ist der Begriff des Grenzwertes (Limes▶150), auf dem sämtliche Definitionen (auch die der Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit auf höhere Dimensionen) aufbauen.

Der Begriff der Differenzierbarkeit wird hier durch jenen Sachverhalt eingeführt, wie es einst GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) getan hat, nämlich über die Problemstellung, eine Tangente an einen Funktionsgraphen zu finden. Der (physikalisch motivierte) Zugang über die Momentangeschwindigkeit bzw. Beschleunigung, wie es einst ISAAC NEWTON (1642 – 1726) anging, sparen wir uns evtl. für den Übungsteil des Kurses auf.

Neben dieser vergleichsweise anschaulichen Ebene versuchen wir auch einen abstrakteren Zugang, in der Hoffnung, dass seine Inhalte für angehende Erstsemestrige zumindest in Ansätzen erahnbar sind. Vor allem die Linearität der Ableitung bzw. des Differentialoperators ▶181 soll die Studierenden zu neuen, abstrakten Höchstleistungen motivieren – im Prinzip werden die dort gemachten Aussagen für gewöhnlich wie selbstverständlich in der Schule angewandt. Vielleicht wird das Interesse des einen oder der anderen im Bezug auf dieses Themengebiet geweckt – mehr dazu gehört zum Stoffgebiet der Funktionalanalysis.

Die Thematik der höheren Ableitungen $f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ wird aus zwei Gründen nur vergleichsweise kurz angesprochen: Einerseits ist dieses Konzept auf höhere Dimensionen (z. B. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) vergleichsweise mühsam zu übertragen, andererseits – und das ist entscheidender – sind Kenntnisse der sogenannten Kurvendiskussion (in der Schule meist ein Schema F) für das erste Semester in den Mathematik-Studien keine notwendige Voraussetzung.

Deutlich interessanter im Hinblick auf Strukturen-erkennendes Denken sowie bewusste Anwendung von Rechenregeln sind die Rechenmethoden, die es im Zusammenhang mit der Differentialrechnung gibt. Warum beispielsweise die Kettenregel oder die Produkt- bzw. Quotientenregel gelten, begründen wir durch Herleitungen bzw. Beweise. Im Wesentlichen bauen diese auf Rechenregeln für Limiten auf. Angehende Mathematik-Studierende sollten sich daran gewöhnen – und auch verstehen – dass Vieles, was aus mathematischer Sicht in der Schule hingenommen wird bzw. »einfach so ist«, an der Hochschule genauer unter die Lupe genommen werden muss und eines (strengen) Beweises bedarf.

Eng verwandt mit dem Begriff der Ableitung ist der Begriff der Stammfunktion F (unbestimmtes Integral), die de facto die Umkehrung des Differenzierens darstellt. Während die Ableitung geometrisch interpretiert die Steigung der Tangente liefert, stellt sich heraus, dass sich durch $F(b) - F(a)$ (bestimmtes Integral) die Fläche unter dem Funktionsgraphen bestimmen lässt. Der Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung (Fundamentalsatz der Analysis) hält diesen Zusammenhang fest. Im Wesentlichen werden wir mit dem Riemann-Integral (vergleichbar mit dem Schulzugang mit seinen Ober- und Untersummen) arbeiten.

Abstrahiert gesagt geht es beim Integrieren darum, Funktionen (bzw. deren Graph) ein bestimmtes Maß zuzuordnen. Was im Zweidimensionalen die Fläche ist, ist im Dreidimensionalen das Volumen. Andere, breiter gefasste Integraldefinitionen münden dann in der sogenannten Maßtheorie, in der darüber hinaus versucht wird, bestimmten Mengen ein (sinnvolles) Maß zuzuordnen. Mehr dazu gibt es in Lehrveranstaltungen mit Titeln wie »Maßtheorie«.

Auch den rechnerischen Aspekt im Umgang mit Integralen werden wir beleuchten: Neben einigen grundlegenden Rechenregeln (Linearität etc.) und ihren meist systematischen Beweisen über Stammfunktionen nehmen wir auch die Rechenmethoden der Integration durch Substitution sowie partielle Integration unter die Lupe – zumindest so intensiv, dass wir damit auf einer operativen Ebene umgehen können.

20. Differenzierbarkeit

Es gibt verschiedene Motivationen, sich mit dem zu beschäftigen, was wir in der Mathematik »Differenzierbarkeit« oder »Ableitungen« nennen. Im Folgenden werden einige Zugänge sowie interessante Aspekte davon beleuchtet.

20.1. Tangentenbestimmung

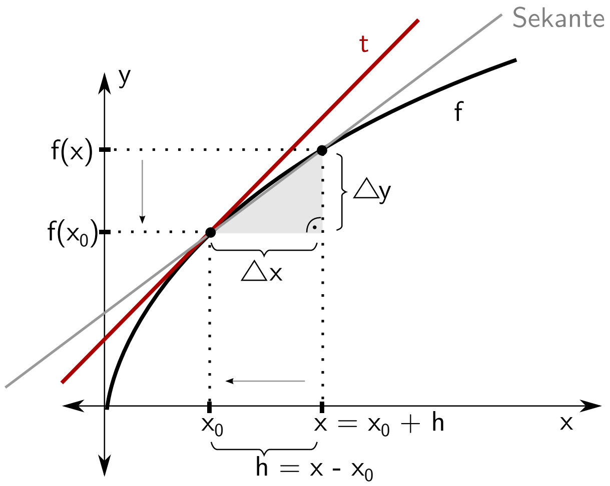
Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion. Dann lässt sich der Graph von f

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}\}$$

als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ zeichnen und beschreibt anschaulich eine Kurve. Wir stellen uns nun die Frage, wie wir eine Gleichung der Tangente in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen finden können:

$$t \quad \ldots \quad y(x) = kx + d\ .$$

Es sind also zwei Unbekannte zu bestimmen, nämlich die Steigung k der Tangente und der Wert d. Den Wert d können wir mit Hilfe des Punktes $(x_0, f(x_0))$ berechnen, wenn k bekannt ist (Warum?). Somit vereinfacht sich unsere Fragestellung zu: Welchen Wert muss k haben, damit sich die Tangente schön an die Kurve anschmiegt, wenn sie diese im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt?



Wenn $h \neq 0$, können wir durch die Punkte $(x_0, f(x_0)$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ eine Sekante zeichnen – also eine Gerade, die die Kurve schneidet. Durch das sogenannte Steigungsdreieck erhalten wir für die Steigung der Sekante

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\ .$$

Diesen Ausdruck nennen wir Differenzenquotient. Alternativ können wir statt $x_0 + h$ auch einfach x schreiben und wir erhalten dann

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Anschaulich ist klar: Je kleiner h wird, desto besser nähert sich unser Differenzenquotient der Steigung an, die unsere Tangente haben muss: Wir sagen: Wenn h gegen 0 geht, dann entsteht im Grenzübergang aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} .$$

Mit der alternativen Schreibweise: Wenn x gegen x_0 geht, so gelangen wir ebenfalls zur Steigung der Tangente

$$k = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} .$$

k ist also jene Zahl, an die sich der Ausdruck

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

beliebig nahe annähert, sofern nur h sehr klein ist.Diesen Grenzwert (Limes) muss es aber nicht immer geben – bei den meisten Schulbeispielen gibt es ihn jedoch.

Mit Hilfe der Steigung einer Tangente definieren wir nun die sogenannte (erste) Ableitung f' einer Funktion f:

Definition 20.1: Differenzierbarkeit & 1. Ableitung

Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x_0 \in \mathcal{D}$ liefert der Ausdruck (genannt Differentialquotient an der Stelle x_0)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

die Steigung der Tangente, falls dieser Wert existiert. Dann Definieren wir eine Funktion $f' : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$x_0 \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} ,$$

nennen diese Funktion f' die »erste Ableitung von f«. $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ sei dabei die größtmögliche Menge, für die der Differentialquotient existiert.

f heißt differenzierbar an einer Stelle x_0 per Definition genau dann, wenn $f'(x_0)$ existiert. Ist f differenzierbar für alle $x_0 \in \mathcal{D}$, so heißt f differenzierbar.

Definition 20.2

Ist $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und in $x_0 \in \mathcal{D}$ differenzierbar, so heißt die durch folgende Gleichung definierte Gerade »Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$«:

$$y(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{=k} \cdot x + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0)}_{=d} \qquad \text{bzw.}$$
$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Noch ein Satz, der vor allem von theoretischem Interesse ist:

Satz 20.1

Ist f differenzierbar, so ist f stetig.

Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.

Es folgen nun drei Beispiele, die uns helfen sollen, die zuvor gebrachten Definitionen zu verarbeiten.

Bsp. 20.1

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=3x-2$. Gesucht ist die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0)$ mit $x_0\in\mathbb{R}$. Wir gehen nach der Definition vor und berechnen zuerst die Steigung der Tangente. Es ist dann

$$\begin{aligned} k := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(3(x_0+h)-2)-(3x_0-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} 3 = 3 = f'(x_0)\ . \end{aligned}$$

Laut der Formel oben ist dann die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0)$ gegeben durch

$$t \quad \ldots \quad y(x) = \underbrace{f(x_0)}_{3x_0-2} + \underbrace{f'(x_0)}_{3}(x-x_0) = 3x_0-2+3(x-x_0) = 3x-2\ .$$

Bsp. 20.2

Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $f(x)=x^2+x-2$ gegeben. Wir bestimmen die erste Ableitung, also die Funktion f'. Sei $x_0\in\mathbb{R}$ gegeben. Dann untersuchen wir, für welche x_0 der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert und welchen Wert er (in Abhängigkeit von x_0) hat. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x^2+x-2)-(x_0^2+x_0-2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2+x-x_0}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)+x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0+1)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} x+x_0+1 = x_0+x_0+1 = \\ &= 2x_0+1 =: f'(x_0) \end{aligned}$$

Wir haben also festgestellt: Der Differentialquotient ist für alle $x_0\in\mathbb{R}$ wohldefiniert, also ist $D_1=\mathbb{R}$ und es gilt $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$x_0 \mapsto f'(x_0) = 2x_0+1\ .$$

Üblicherweise führt man eine Variablenumbenennung durch und wir schreiben

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f'(x) = 2x+1 \end{cases}$$

Bsp. 20.3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x|$ definiert. Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Wir müssen also untersuchen, ob

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existiert, also mit der Definition des Betrages (siehe ▶140) eingesetzt ($f(0) = 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Wir überlegen uns: Wenn sich x von rechts an 0 annähert, also $x > 0$ ist, so ist

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1\,,$$

auch wenn x noch so nahe an 0 ist. Andererseits: Nähert sich x von links an 0 an, so ist $x < 0$ und es ist

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1\,.$$

Wir können für diese beiden Sachverhalte schreiben (vgl. mit dem Beispiel auf ▶151):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1\,.$$

Es macht also einen Unterschied, ob wir uns bei der Limes-Überlegung von links oder rechts annähern. Da für den sogenannten linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert verschiedene Werte herauskommen, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

nicht, weswegen f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

20.2. Graphisches Differenzieren

Eine Art von Aufgabenstellung, die vor allem für angehende Lehrkräfte (→ Zentralmatura, Bildungsstandards) von großer Bedeutung ist, ist das sogenannte Graphische Differenzieren: Die Funktion f sei nur durch ihren Graphen gegeben. Gesucht ist der qualitative Verlauf des Graphen von f'.

Das Vorgehen liegt laut dem Zusammenhang von Steigung der Tangente und der ersten Ableitung auf der Hand: Wir denken uns Tangenten an einen Punkt $(x_0, f(x_0))$ und erhalten mit ihrer Steigung den Wert für $f'(x_0)$. Insbesondere erhalten wir bei waagrechten Tangenten $f'(x_0) = 0$. Zudem ist eine Unterscheidung in positive Steigung und negative Steigung anschaulich leicht möglich. Damit wissen wir also, wo $f' < 0$ und wo $f' > 0$ ist.

20.3. Linearität der Ableitung

Wenn wir eine (differenzierbare) Funktion f gegeben haben, dann können wir daraus bekanntlich ihre Ableitung berechnen. Anders ausgedrückt: Wir nehmen eine Funktion f, differenzieren diese und erhalten als Ergebnis ihre Ableitung f'. Das klingt doch stark nach dem Prinzip einer Funktion, oder? Diese Funktion, die uns die Ableitung liefert, nennen wir Differentialoperator

$$\frac{d}{dx} : \begin{cases} X \to Y \\ f \mapsto \frac{df}{dx} := f' \end{cases} .$$

Als Definitionsbereich X können wir beispielsweise die Menge

$$X := \{f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$$

wählen, also eine Menge, in der differenzierbare Funktionen als Elemente enthalten sind. Als Wertevorrat passt z. B. die Menge aller Funktionen von $\mathcal{D}$ nach $\mathbb{R}$, also

$$Y := \{f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}\} .$$

Nur noch einmal zum Verständnis: Der Differentialoperator ist eine Abbildung (Funktion), die aus Funktionen eine neue Funktion macht. Anders gesagt: Die Argumente von $\frac{d}{dx}$ sind selbst Funktionen, ebenso wie das jeweilige Bild $\frac{df}{dx}$ an einer Stelle f. Das Bemerkenswerte am Differentialoperator: Diese Funktion verfügt über schöne Eigenschaften, die einen Satz verdienen:

Satz 20.2: Lineartität des Differentialoperators

Für den Differentialoperator gelten folgende Eigenschaften:

Homogenität:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall f \in X : \frac{d(\lambda \cdot f)}{dx} = \lambda \cdot \frac{df}{dx}$$

Addititivät:

$$\forall f, g \in X : \frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Also ist der Differentialoperator eine lineare Abbildung (vgl. ▶133 bzw. ▶223).

Dieser Satz verdient einige Kommentare: Anders aufgeschrieben sagt der Satz aus:

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$$
$$(f+g)' = f' + g'$$

Man beachte, dass das Gleichungen mit Funktionen sind! Auf Ebene der Elemente bzw. Funktionswerte bedeutet das (vgl. 14.5 Summe und Produkt von Funktionen ▶126):

$$\forall x \in \mathcal{D} : (\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$$
$$\forall x \in \mathcal{D} : (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ein Beispiel soll helfen, diese abstrakteren Formulierungen mit dem in der Schule Gelernten zu verknüpfen

Bsp. 20.4

Seien die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 3x$ gegeben. Dann ist $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f+g)(x) = x^2 + 3$. Bekanntlich ist $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = 3$. Laut dem Satz oben ist dann

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Anwendung dieser Regeln geschieht für gewöhnlich automatisiert. Es fehlen noch die Begründungen für Satz 20.2 ▶181, warum der Differentialoperator diese Rechengesetze erfüllt. Wir argumentieren über Rechenregeln für Limiten (Satz 17.1 ▶152), die wir als bekannt und gültig voraussetzen und sehen uns nur den zweiten Teil des Satzes an:

Beweis
Wir rechnen nach:

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' \ .$$

Zu zeigen ist also für alle $x \in \mathcal{D}$, dass die Bilder jeweils gleich sind:

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x) \ .$$

Dafür gehen wir auf die Definition des Differentialquotienten zurück:

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot f)'(x) &\overset{1)}{:=} \lim_{h \to 0} \frac{(\alpha \cdot f)(x+h) - (\alpha \cdot f)(x)}{h} \\
&\overset{2)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \cdot f(x+h) - \alpha \cdot f(x)}{h} \\
&\overset{3)}{=} \lim_{h \to 0} \alpha \cdot \frac{f(x+h) - \cdot f(x)}{h} \\
&\overset{4)}{=} \alpha \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - \cdot f(x)}{h} \overset{5)}{=:} \alpha \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Im Schritt 1) haben wir die Definition der Ableitung für die Funktion $\alpha \cdot f$ verwendet, im Schritt 2) die Definition des Produkts zweier Funktion (▶126), im Schritt 3) nur herausgehoben, im Schritt 4) haben wir eine Rechenregeln für Limiten benutzt, nämliche einen Spezialfall von Satz 17.1 ▶152 mit $g(x) = \alpha$, und im Schritt 5) haben wir die Definition der Ableitung von f benutzt. Analog beweist man die Additivität und verwendet dabei wieder die Rechenregeln für Grenzwerte.

□

Noch einige Bemerkung zu den Schreibweisen: Auch die Schreibweisen

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad \text{oder} \qquad f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

sind üblich. Die zweite Zeile wird gesprochen als »f abgeleitet nach x, ausgewertet an der Stelle x_0«. Es handelt sich dabei mathematisch gesehen nicht um eine Division, sondern nur um eine Symbolik – auch wenn in der Physik schlampigerweise gerne damit herumjongliert und gerechnet wird.

Die Schreibweise mit $\frac{d}{dx}$ nennt sich Leibniz-Schreibweise, benannt nach dem deutschen Mathematiker GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, der neben dem Engländer ISAAC NEWTON einer der großen Begründer der Differentialrechnung war. Newtons übliche Schreibweisen finden sich oft noch in der Physik, wenn wir z. B. eine Funktion Weg-Zeit-Funktion $x(t)$ haben und ihre Ableitung, die (Momentan-)Gewschindigkeit, statt $x'(t)$ schreiben als $\dot{x}(t)$, gesprochen: »x Punkt«. Die Schreibweise f' (»f Strich«, engl. »f prime«) geht dagegen auf JOESPH-LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813) zurück. Auf die Leibniz-Schreibweisen für höhere Ableitungen (oder auch für partielle Ableitungen) gehen wir an dieser Stelle nicht ein. Das wird in den entsprechenden Vorlesungen in ausreichender Form gemacht und ist momentan nicht von Bedeutung.

20.4. Höhere Ableitungen

Ausgehend von der Definition der 1. Ableitung einer Funktion f können wir auch höhere Ableitungen definieren. Wir setzen dann einfach

$$f'' := (f')'$$

also f'' (sprich »f zweistrich«) wird definiert als die Ableitung von f'. Es wird sich herausstellen, dass die 2. Ableitung einer Funktion einen Zusammenhang mit der Krümmung von f hat. Interessierte dürfen sich auf die Themengebiete wie parametrisierte Kurven, Bogenlänge, Krümmungskreise freuen …

Bis zu f''' werden die Striche noch ausgeschrieben, noch höhere Ableitungen werden dann mit

$$f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \ldots, f^{(n)}$$

bezeichnet, für $n \in \mathbb{N}$ analog dazu mit

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \,.$$

Manchmal werden auch römische Hochzahlen verwendet, also f^V statt $f^{(5)}$.

20.5. Ausblick: Lineare Approximation

Noch als kleinen Vorgeschmack und als echte (mathematische) Motivation für die Sinnhaftigkeit des Begriffes Differenzierbarkeit gibt es hier noch jenen Zugang zu diesem Thema, der für viele Anwendungen in der Physik und in anderen Aufgabenfeldern durch seine Verallgemeinerung eine wichtige Bedeutung hat.

Können wir zu einer Funktion von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Vektorräume!!! vgl. 24 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ ▶205) eine lineare Funktion $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (vgl. ▶223) finden, sodass für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{1}{\|\vec{h}\|} \left\| f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - l(\vec{h}) \right\| = 0$$

erfüllt ist? Umgeformt heißt das, wir können $f(\vec{x}_0 + \vec{h}$ sehr gut durch $f(\vec{x}_0) + l(\vec{h})$ annähern und schreiben dafür

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) \doteq f(\vec{x}_0) + l(\vec{h})$$

bzw. mit $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$

$$f(\vec{x}) \doteq f(\vec{x}_0) + l(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

wenn $\vec{x} - \vec{x}_0$ klein ist, sprich, annähernd der Nullvektor $\vec{0}$ ist. Für $\vec{x} = \vec{x}_0$ gilt sogar Gleichheit. Das Zeichen $\doteq$ bedeutet »fast gleich« und betont die sehr gute Approximation, ist also mehr als $\approx$ (»gerundet« oder »annähernd«).

Zur Erinnerung: Mit dem Symbol $\|\cdot\|$ (z. B. $\|\vec{x}\|$ ist die sogenannte Norm eines Vektors (bzw. Betrag eines Vektors, ▶210) gemeint. Damit kann man die Länge von Vektoren bzw. den Abstand zwischen zwei Vektoren messen. Die Norm eines Vektors ist also das Analoge zum Betrag einer (reellen) Zahl. Manchmal schreibt man auch $|\cdot|$ statt $\|\cdot\|$, wenn aus dem Zusammenhang ohnehin klar wird, dass es sich dabei nur um die Norm handeln kann.

Man beachte den Spezialfall $n = m = 1$: Dann bildet die Funktion l von $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}$ ab. Da sie linear ist, muss sie die Darstellung

$$l(x) = c \cdot x$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$ haben. In $\mathbb{R}$ schreiben wir statt $\|\cdot\|$ einfach nur $|\cdot|$, also den üblichen Betrag. Dann vereinfacht sich auch der obige Limes-Ausdruck zu

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{1}{|h|} |f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h| = 0$$

bzw. zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) + h) - f(x_0) - c \cdot h}{h} .$$

Mit

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

erhalten wir, dass dann

$$c = f'(x_0)$$

ist. Die Lineare Approximation wird dann zu

$$f(x) \doteq f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$$

bzw.

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

wobei nun auf der rechten Seite ein lineares Polynom (Grad 1) in x steht. Wir haben es also geschafft, unsere möglicherweise komplizierte Funktion f durch ein einfaches Polynom anzunähern. Dieses Vorgehen lässt sich fortsetzen: Wir erhalten eine bessere Annäherung in einer Umgebung von x_0, wenn wir ein passendes Polynom höheren Grades in x mit bestimmten Eigenschaften wählen:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Dieses Polynom wird Taylor-Polynom genannt und wird noch in vielen Anwendungen und Teilgebieten der Mathematik eine wichtige Rolle spielen.

21. Rechenmethoden beim Differenzieren

21.1. Grundlegendes Vorgehen

Da man sich nicht für jede Funktion die Ableitung merken kann, verwenden wir die Linearität des Differentialoperators (Satz 20.2 ▶181), wodurch wir Summen bzw. Differenzen von Funktionen auf ihre Einzelbestandteile zurückführen können:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \,.$$

Außerdem lassen sich Vielfache von Funktionen mit $\lambda \in \mathbb{R}$ durch die Regel

$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$$

berechnen. Einen gewissen Grundstock an Ableitungen muss man trotzdem beherrschen. Es sei an dieser Stelle auf den Anhang A Formelsammlung ▶227 verwiesen.

Daneben gibt es noch einige weitere Ableitungsregeln, die wir uns in den folgenden Kapiteln erarbeiten wollen. Diese betreffen verschachtelte Funktionen (Hintereinanderausführungen) sowie Produkte oder Quotienten von Funktionen.

21.2. Produkt und Quotientenregel

Satz 21.1

Sind $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch ist auch $f \cdot g$ differenzierbar und es gilt die Produktregel, also

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

bzw. für alle $x \in \mathcal{D}$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x);.$$

Ist zudem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{D}$, so ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar und es gilt die Quotientenregel, also

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

bzw. für alle $x \in \mathcal{D}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \,.$$

Bsp. 21.1

Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$. Dann lässt sich h schreiben als $f \cdot g$ mit $f(x) = x^2 - x$ und $g(x) = e^x$. Weiters ist dann $f'(x) = 2x - 1$ und $g'(x) = e^x$. Somit erhalten wir die Ableitung von h mit der Produktregel: $h'(x) = (2x-1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + x - 1)$.

Bsp. 21.2

Es sei $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{3\ln(x)}{x^2}$. Dann lässt sich h schreiben als $\frac{f}{g}$ mit $f(x) = 3\ln(x)$ und $g(x) = x^2$. Weiters ist $f'(x) = (3\ln(x))' = 3 \cdot (\ln(x))' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ sowie $g'(x) = 2x$. Mit der Quotientenregel erhalten wir dann die Ableitung von h durch

$$h'(x) = \frac{\frac{3}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot 3\ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{3x - 6x \cdot \ln(x)}{x^4} = \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3}$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns den Beweis zur sogenannten Produktregel dazu ansehen. Dieser wird für gewöhnlich auch im ersten Semester in einer der Vorlesungen gebracht:

Beweis
Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} = f'(x)\cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

ist, wobei

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

sind. Dafür überlegen wir uns:

$$\begin{aligned}
\frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = \\
&= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= f(x+h) \cdot \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) + g(x) \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Nun führen wir den Grenzübergang für $h \to 0$ durch (»wenden also den Limes an«). Da f in x differenzierbar ist, ist f auch stetig in x und es gilt:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(\lim_{x\to h} x+h) = f(x)$$

da wir bei stetigen Funktionen die Funktion und den Limes vertauschen dürfen (vgl. Def. 17.2 ▶152). Damit herhalten wir unter Verwendung weiterer Rechenregeln für Limiten (Satz 17.1 ▶152)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \cdot \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) + g(x) \cdot \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\right] = \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \cdot \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x) \cdot \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\right] = \\
&= \left(\lim_{h\to 0} f(x+h)\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) + g(x) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\
&= f(x)\cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

□

Für die Quotientenregel geben wir zumindest einen möglichen Ansatz. Für $g(x) \neq 0$ gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Dafür überlegen wir uns (analog zu oben), dass

$$\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \ldots = -\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

Die Quotientenregel für $\frac{f}{g}$ lässt sich dann auf die Produktregel zurückführen mit

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Selbstverständlich gibt es für die Quotientenregel auch andere Beweise.

21.3. Kettenregel für verschachtelte Funktionen

Wir haben uns im Kapitel 14.4 Verkettung von Funktionen: Hintereinanderausführung ▶124 bereits mit der Hintereinanderausführung zweier Funktionen beschäftigt: Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ mit $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ definieren wir bekanntlich

$$g \circ f : \begin{cases} X \to Z \\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{cases} .$$

Wir können uns weiters fragen, ob auch $g \circ f$ differenzierbar ist, wenn es f und g sind. Wenn ja, gibt es einen Zusammenhang zwischen $(g \circ f)'$ und f' sowie g'? Ja, den gibt es!

Satz 21.2

Sind f und g differenzierbar, so auch $g \circ f$ und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) .$$

$g'(y)$ mit $f(x) = y$ heißt äußere Ableitung, $f'(x)$ heißt innere Ableitung – in Analogie zur äußeren Funktion g und zur inneren Funktion f.

Bevor wir uns die Herleitung kurz ansehen, folgt ein Beispiel:

Bsp. 21.3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und es gilt:

$$(g \circ f)(x) = (4x-2)^3$$

Gesucht ist nun die Ableitung von $g \circ f$. Dafür berechnen wir die Ableitungen von f und g, nämlich $g'(y) = 3 \cdot y^2$und $f'(x) = 4$. Wir haben die Variable in g nur umbenannt, damit die Zusammenhänge leichter ersichtlich werden. Laut dem Satz oben ist dann

$$(g \circ f)'(x) = g'(\underbrace{f(x)}_{y}) \cdot f'(x) =$$

$$= 3 \cdot (\underbrace{4x-2}_{y})^2 \cdot 4 = 12 \cdot (4x-2)^2$$

In der Praxis geht man häufig die andere Richtung: Eine gegebene Funktion muss passend in ihre Einzelteile zerlegt werden, um sie differenzieren zu können.

Bsp. 21.4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot e^{x^2-3x+2}$ lässt sich beispielsweise in $h \circ g$ zerlegen mit $g(x) = x^2 - 3x + 2$ und $h(x) = 3e^x$. Dann ist $g'(x) = 2x - 3$ und $h'(x) = 3 \cdot e^x$. Somit ist

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = h'(x^2 - 3x + 2) \cdot (2x - 3) = 3 \cdot e^{x^2-3x+2} \cdot (2x - 3) .$$

Nun zu (einer) (exakten) Herleitung der Kettenregel:

Beweis

Eine (mögliche) Herleitung der Kettenregel verwendet ein Konzept, das in der Mathematik des Öfteren vorkommt: Mit der Definition einer geeigneten Hilfsfunktion lassen sich so manche Beweise in einfachere Teile zerlegen.

Wir müssen zeigen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0) \qquad \text{bzw.}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0) .$$

Wir führen nun eine Hilfsfunktion h ein:

$$h(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$$

Dann ist h wohldefiniert und es gilt

$$\lim_{y \to y_0} h(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = h(y_0) .$$

Also ist h in y_0 stetig. Zusätzlich gilt für alle y die Gleichung

$$g(y) - g(y_0) = h(y) \cdot (y - y_0) , \tag{G_1}$$

denn für $y = y_0$ steht beiderseits die Zahl 0, für $y \neq 0$ dürfen wir auch der rechten Seite kürzen und die Gleichung stimmt ebenfalls. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \\ \overset{1)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{g(y)) - g(y_0)}{x - x_0} & \\ \overset{2)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{h(y) \cdot (y - y_0)}{x - x_0} & \\ = \lim_{x \to x_0} \frac{h(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} & \\ \overset{3)}{=} \lim_{x \to x_0} h(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \\ \overset{4)}{=} g'(f(x_0)) \cdot g'(x_0) & \end{aligned}$$

Im Schritt 1) haben wir die Notation $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ verwendet, im Schritt 2) Gleichung G_1, in Schritt 3) Rechenregeln für Limiten (Satz 17.1 ▶152). Im Schritt 4) haben wir beim linken Limes verwendet, dass f stetig in x_0 ist und dass h stetig in $f(x_0)$ ist, was laut Rechenregeln für stetige Funktionen (Satz 17.3 ▶154) folgende Gleichung liefert:

$$\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x\to x_0} f(x)) = h(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) = g'(\underbrace{f(x_0)}_{y})$$

□

Anmerkung: Ein Einfaches Erweitern im Term

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

mit $g(x) - g(x_0)$ zu

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ist deshalb nicht möglich, weil $g(x) - g(x_0)$ den Wert 0 haben könnte. Trotzdem liefert das eine plausible Erklärung für die obige Formel, dann unter Bildung des Grenzwertes würde man

$$\underbrace{\left(\lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}\right)}_{g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)}_{f'(x_0)}$$

erhalten.

Auch für die Kettenregel gibt es andere Beweise ...

22. Der Integralbegriff

Bis jetzt haben wir uns die Frage gestellt, wie man zu einer Funktion f ihre Ableitung f' findet. Nun werden wir uns umgekehrt die Frage stellen, wie wir ausgehend von der Ableitung auf die/eine Funktion rückschließen können. Ausgehend vom Begriff des Unbestimmten Integrals bzw. der (besser: einer) Stammfunktion werden wir uns dem geometrischen Zusammenhang widmen: dem Messen von Flächen. Das Messinstrument wird dabei das sogenannte Riemann'sche Integral sein, das die Fläche vereinfacht gesagt durch Aufsummieren immer schmälere Rechtecke misst. Den Zusammenhang zwischen der Fläche und den Stammfunktionen werden wir im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Fundamentalsatz der Analysis) festhalten.

Danach folgen – wie auch schon bei der Differentialrechnung einige Rechenregeln und Rechenmethoden im Zusammenhang mit Integralen.

22.1. Unbestimmtes Integral

Wir beginnen zunächst mit der Definition einer Stammfunktion (bzw. des unbestimmten Integrals):

Definition 22.1: Stammfunktion

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt $F : I \to \mathbb{R}$ (eine) Stammfunktion oder auch unbestimmtes Integral von f, falls

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Wir betrachten hier nur den einfachen Fall, dass f stetig ist. In der exakteren Theorie muss f nicht so »schön« sein – der Integralbegriff kann auch für unhandlichere Funktionen sinnvoll definiert werden. Bei den meisten (Schul- bzw. Übungs-)Beispielen liegen stetige Funktionen vor, weswegen wir uns hier darauf beschränken.

Bsp. 22.1

Sei $f : (2,5) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 6x^2 + 2$ gegeben. Dann ist $F : (2,5) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = 2x^3 + 2x$$

eine Stammfunktion von f, denn

$$F'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} + 2 = 6x^2 + 2 = f(x)$$

für alle $x \in (2,5)$.

Nun ein erstes Resultat:

Satz 22.1

Zwei Stammfunktionen F und G von f unterscheiden sich nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, also

$$G(x) = F(x) + c$$

Beweis
Ist F eine Stammfunktion, so ist G mit $G(x) = F(x) + c$ ebenfalls eine Stammfunktion, denn

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Umkehrt: Sind F und G zwei Stammfunktionen, so gilt:

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Die Ableitung von $F(x) - G(x)$ ist also immer 0, das heißt, $F - G$ muss eine konstante Funktion. Also gibt es ein $d \in \mathbb{R}$ sodass gilt:

$$F(x) - G(x) = d \qquad \text{bzw.} \qquad G(x) = F(x) - d$$

□

Bemerkung zur Schreibweise: Wir schreiben auch das Symbol

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

für eine Stammfunktion bzw.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

für die Menge aller Stammfunktionen mit $c \in \mathbb{R}$. Die Notation ist in der Literatur nicht immer ganz einheitlich, sollte aber aus dem Zusammenhang klar werden.

Bsp. 22.2

$$\int 2x^3 - 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + c$$

Aufbauend auf dieser Definition des Symbols für die Stammfunktion erhalten wir folgende Rechenregeln:

Satz 22.2: Linearität des unbestimmten Integrals

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \alpha \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Die Beweise dazu sind eigentlich sehr systematisch. Das heißt, wir gehen von den grundlegenden Definitionen der Stammfunktionen aus und bringen wie beim vorigen Beweis das Differenzieren ins Spiel:

Beweis
Sei also F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g. Dann ist $F \pm G$ eine Stammfunktion von $f \pm g$, denn aufgrund der Rechenregeln für das Differenzieren gilt:

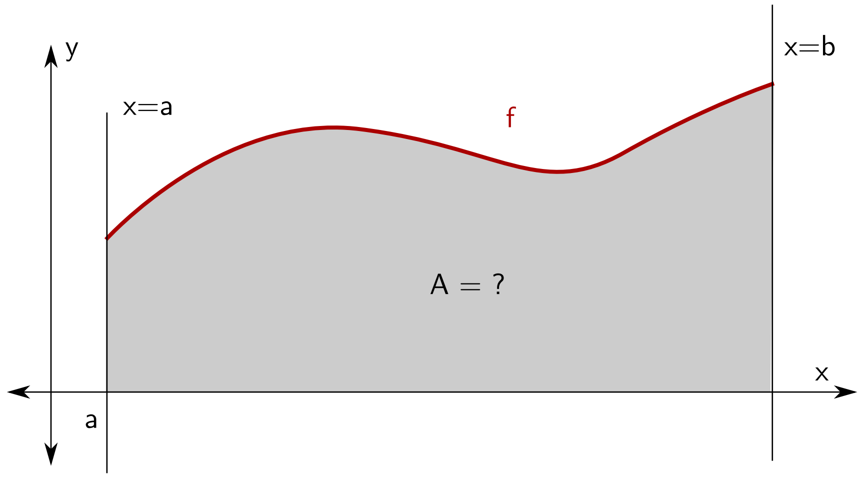
$$(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$$

Mit der Integralschreibweise erhalten wir nun die obige Aussage. Analog geht man für die zweite Gleichung vor.

□

22.2. Riemann'sches Integral – halbwegs exakt

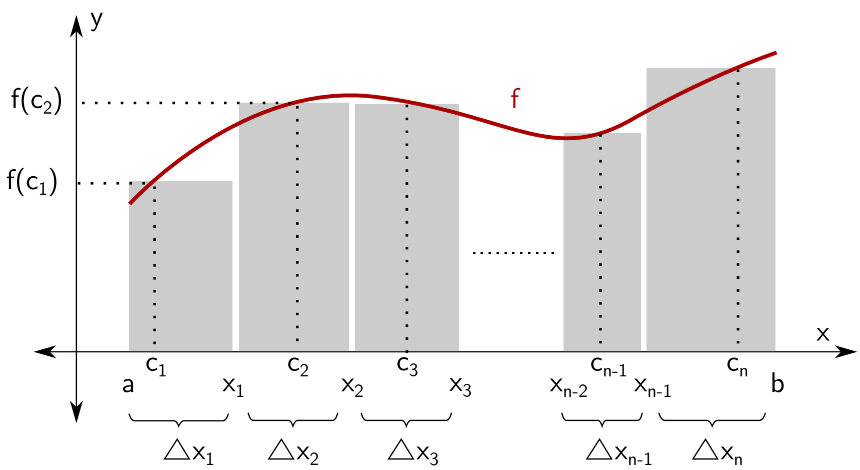
Wir können uns die Frage stellen, wie wir die Fläche[1] unter einer Kurve, die durch eine Funktion bestimmt ist, messen können, genauer: Die Fläche zwischen x-Achse, dem Graphen von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$:



Anders gefragt: Wie finden wir ein sinnvolles Maß bzw. Berechnungsmethode für solche Flächen? oder: Wie können wir ein sinnvolles Maß für solche Flächen festlegen. Der Flächenbegriff ist aus mathematischer Sicht vergleichsweise problematisch. Schon für Rechtecke ist zunächst nicht klar, wie wir die Flächen messen. Das System mit dem Einheitsquadrate-Auslegen funktioniert beispielsweise nicht mehr, wenn eine Seitenlängen irrational ist, die andere aber nicht (Schlagwort: kommensurabel). Man müsste eher sagen, wir definieren die Fläche eines Rechtecks durch $A :=$ Länge $\cdot$ Breite. Aufbauend auf dem Begriff der Fläche eines Rechtecks basteln wir uns nun einen Flächenbegriff für kompliziertere Begrenzungen.

Das Instrument dafür ist das Riemann'sche Integral, das zwar von der Idee her vergleichsweise anschaulich ist, aber doch recht mühsam zu handhaben ist, wenn man exakt vorgehen möchte. Trotzdem ist dieses Integral aufgrund seiner Anschaulichkeit (im Prinzip ebenfalls für die Schule) meist die erste Wahl – auch wenn es dort vereinfacht vorkommt. Anschaulich gesprochen wird die Fläche unter einer Kurve einer stetige Funktion f in Rechtecke unterteilt, indem das Intervall $[a, b]$ auf der x-Achse durch Stellen x_1 bis x_n unterteilt wird:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$



1 Da es sprachlich vergleichsweise mühsam ist, werden wir nicht immer exakt zwischen dem Begriff »Fläche« und »Flächeninhalt« unterscheiden. Man möge mir das nachsehen.

Die Höhe des k-ten Rechtecks ist dann immer $f(c_k)$, die Breite $\Delta_k := x_k - x_{k-1}$. Nun summiert man die einzelnen Rechteckflächen auf und erhält einen Näherungswert für den Flächeninhalt

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta_k$$

Dieser Ausdruck heißt Riemann Summe. Die Unterteilung von $[a, b]$ in Teilintervalle heißt Partition Δ. Der Ausdruck

$$\|\Delta\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$$

heißt Norm der Partition und liefert die Länge des längsten Intervalls. Wir erhöhen nun die Anzahl der Rechtecke und machen gleichzeitig die Breite aller Rechtecke immer kleiner. Wir betrachten also eine Folge von immer feineren Partitionen und schreiben dafür einfach $\|\Delta\| \to 0$. Dadurch wird der tatsächliche Flächeninhalt immer besser approximiert, wir erhalten einen Grenzwert und schreiben dafür

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{nn} f(c_k) \cdot \Delta_k$$

Und statt A schreiben wir dann auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Genau genommen müssen wir noch sagen, was wir unter dem Grenzwert einer Summe (Schlagwort: Reihe) verstehen wollen. Außerdem müssten wir uns überlegen, dass die Summe wirklich einen Grenzwert hat, wenn f stetig ist – und dieser Unabhängig von den jeweils gewählten c_k ist. Beides überlassen wir den Vorlesungen der ersten Semester.

22.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

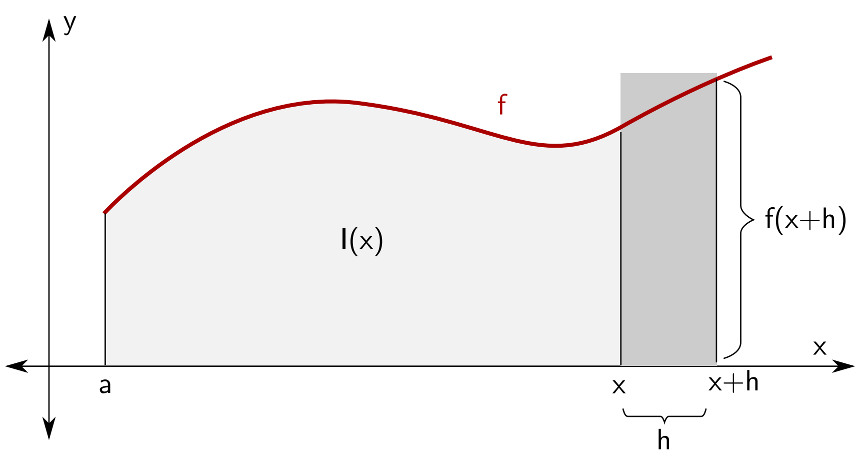
Durch das Riemann'sche Integral können wir also die Fläche unter dem Graphen messen. Anders formuliert: Durch den Ausdruck (als Funktion aufgefasst)

$$I(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

messen wir die (orientierte) Fläche unter dem Graphen von f zwischen den Randpunkten a und x. Die Funktion I misst also den Flächeninhalt, beginnend bei a. Der Buchstabe I steht dabei für »Integralfunktion«. Insbesondere ist $I(a) = 0$ (anschaulich klar) und

$$I(b) - I(a) = I(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Wenn $I(x)$ die Fläche bis zum Wert x beschreibt, so entspricht $I(x+h)$ etwa dem Flächeninhalt $I(x)$ sowie dem Rechteck mit den Seitenlängen h und $f(x)$, was aus der Skizze klar wird:



Es gilt also

$$I(x+h) \approx I(x) + h \cdot f(x)\ .$$

Umgekehrt gilt dann

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} \approx f(x)$$

Und für $h \to 0$ steht links dann der Differentialquotient, also ist

$$I'(x) = f(x)\ .$$

Es hat sich also gezeigt: Unsere Funktion I, die die Fläche (Riemann-Integral) misst, ist eine Stammfunktion von f. Da sich aber umgekehrt Stammfunktionen immer nur um eine Konstante unterscheiden, lässt sich mit einer bekannten Stammfunktion F auch die Fläche berechnen:

$$A = I(b) = I(b) - I(a) = F(b) - F(a)$$

da aus $F(x) = I(x) + c$ folgt, dass

$$F(b) - F(a) = (I(b) + c) - (I(a) + c)) = I(b) - I(a)$$

gilt. Wir gelangen somit zum sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (für das Riemann-Integral):

Satz 22.3: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f stetig auf $[a,b]$ und sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

(Auf der linken Seite der Gleichung steht dabei das Riemannsche Integral, das die Fläche misst). Dieser Satz verbinden also die geometrische Deutung des Integral als Flächen-Messinstrument mit dem Begriff der Stammfunktion.

Für exaktere Beweise als die Herleitung oben muss man mehr Aufwand betreiben. Beispielsweise kann man den Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) verwenden. Noch ein Nachsatz: Für die Analysis wird das Riemann-Integral selten gewählt, weil es relativ unhandlich und wenig allgemein ist.

Es bleibt abschließend noch ein wichtiger Begriff zu festzuhalten:

Definition 22.2

Sei $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann heißt für $a, b \in (r,s)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b. Üblich ist auch noch die Schreibweise

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Aus der Definition des Riemann-Integrals ist klar, dass das Integral ein negatives Vorzeichen bekommt, wenn der Graph unterhalb der x-Achse ist, als $f(x) < 0$ ist. Das Vorzeichen der Fläche ist positiv, wenn der Graph oberhalb der x-Achse verläuft. Man sagt, das bestimmte Integral liefert die orientierte Fläche.

Bsp. 22.3
Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ sowie dem Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ eingeschlossen ist.

Wir müssen also

$$A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Da $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist, erhalten wir

$$A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3} \cdot (27 - 1) = \frac{26}{3}\,.$$

22.4. Ausblick: Andere Integralbegriffe

Neben dem Riemann'schen Integral gibt es noch weitere Integralbegriffe, mit denen sich Flächen (bzw. Volumina) messen lassen. Wir geben einen Ausblick auf das Cauchy-Integral ...

Es ist beispielsweise möglich, einen elementaren Integralbegriff ausgehend von vergleichsweise simplen Funktionen durch Approximation auf komplizierte Funktionen zu übertragen.

Definition 22.3
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es $a < x_1 < \ldots < x_n < b$ und $c_0, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = c_j \qquad \forall x \in (x_j, x_j + 1) \qquad \text{für } j = 1, \ldots n - 1$$

und

$$f(x) = c_0 \qquad \forall x \in (a, x_1)$$

und

$$f(x) = c_{n+1} \qquad \forall x \in (x_n, b)$$

Treppenfunktionen sind also abschnittsweise konstant. Was an den x_j (darin sind alle Sprungstellen enthalten) passiert, ist irrelevant.

Ausgehend von der Definition einer Treppenfunktion legen wir nun fest, was davon das Integral sein soll.

Definition 22.4
Für eine Treppenfunktion definieren wir als Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := c_0 \cdot (x_1 - a) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (x_{j+1} - x_j) + c_{n+1} \cdot (b - x_n)$$

Anschaulich gesprochen werden einfach die Rechteckflächen der Treppe aufsummiert.

Auf der nächsten Seite findet sich dazu ein Beispiel ...

Bsp. 22.4

$f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 2 \\ 5 & \text{für } x = 2 \\ 3 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

ist eine Treppenfunktion und es gilt

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = c_0 \cdot (x_1 - a) + c_1 \cdot (b - x_1) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$$

Wie lässt sich nun dieser Integralbegriff auf komplizierte Funktion übertragen? Dadurch, dass sich zeigen lässt, dass komplizierte (beispielsweise beliebige stetige oder monotone) Funktionen durch Treppenfunktion beliebig genau approximieren lassen. Es bleibt selbstverständlich noch zu klären, was im Zusammenhang mit Funktionen ($\neq$ Funktionswerte) der Begriff »Approximieren« heißt. Es wird sich herausstellen, dass das vergleichsweise trickreich ist und zum Teil zu Ergebnissen führt, die entgegen der Anschauung sind und daher überraschen …

23. Rechenmethoden beim Integrieren

Es hat sich also gezeigt, dass das Integrieren die Umkehroperation zum Integrieren darstellt. Insbesondere suchen wir Antworten auf die Frage, wie wir zu einer vorgegebenen Funktion eine Stammfunktion finden können. Es liegt auf der Hand, dass wir ausgehend vom Differenzieren ähnliche Rechenregeln finden werden. Im Anhang A Formelsammlung ▶227 findet sich eine kurze Übersicht von Stammfunktionen, die man sowohl für das Studium als auch als angehende Lehrkraft kennen sollte.

Wie auch beim Differenzieren lassen sich komplizierte Funktionen auf einfachere zurückführen. in den nächsten Abschnitten werden wir uns das etwas genauer ansehen. Man beachte noch den Unterschied der Ausdrücke

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

also den Unterschied zwischen Stammfunktion und bestimmtes Integral.

23.1. Linearität und weitere Eigenschaften

Das bestimmte Integral ist linear (vgl. mit der Linearität des Differentialoperators, Satz 20.2 ▶181):

Satz 23.1

Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Man vergleiche diese Rechenregeln mit den Rechenregeln des unbestimmten Integrals (Satz 22.2 ▶191). Außerdem gibt es einige Rechenregeln, die mit den Integrationsgrenzen zu tun haben:

Satz 23.2

Für $a, b, c \in \mathcal{D}$ gilt:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vertauscht man die Grenzen, so ändert sich also das Vorzeichen des Integrals

Beweis
Wir verwenden den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 22.3 ▶194). Die erste Gleichung ist somit gleichbedeutend mit

$$F(c) - F(a) = (F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) .$$

Die Zweite Aussage erhält man, da

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0 .$$

Die dritte Aussage ist auf Stammfunktionen übersetzt einfach

$$F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) .$$

□

23.2. Partielle Integration

Die Methode der partiellen Integration ergibt sich aus der Produktregel beim Differenzieren:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg' \qquad \Leftrightarrow \\ f'g &= (fg)' - fg' . \end{aligned}$$

Es liegt auf der Hand, dass

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b .$$

Mit $F = fg$ erhalten wir

Satz 23.3

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x .$$

Diese Regel kann nützlich sein, um Produkte zu integrieren. Weil es ein häufiger Fehler ist: Die Gleichung

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot G(x)$$

stimmt praktisch *nie*. Produkte zu integrieren ist also im Allgemeinen keine einfache Aufgabenstellung! Sehen wir uns einige Beispiele an:

Bsp. 23.1

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Wir rechnen

$$\int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x .$$

Bsp. 23.2

$$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = ?$$

Wir berechnen

$$\int \underbrace{e^x}_{f'} \cdot \underbrace{x}_{g} \,\mathrm{d}x = \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x - \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x - e^x = e^x \cdot (x-1)\,.$$

Merkregel: Die kompliziertere Funktion wird abgeleitete, die einfachere integriert (»aufgeleitet«). Ausnahmen sind Funktionen wie e^x oder $\ln(x)$. e^x kann sehr einfach integriert werden, $\ln(x)$ hat eine sehr schöne Ableitung, wo sich hoffen lässt, dass sich insgesamt eine Potenz von x kürzt!

Wie man an den letzten Beispielen wahrscheinlich gesehen hat, ist Integrieren längst nicht so systematisch wie Differenzieren – leider. Es braucht viel Übung, Weitblick und ein gewissen Grundwissen, wie man Funktionen bestimmten Typs am besten angeht.

23.3. Substitution

Ein anderes Konzept, mit dem sich häufig auch systematisch verschachtelte Ausdrücke integrieren lassen, ist die sogenannte Integration durch Substitution. Worum geht es dabei?

Wir erinnern uns: Hat man eine verschachtelte Funktion, etwa der Form $(F \circ \varphi)(t)$ so ergibt sich beim Ableiten eine innere Ableitung und wir erhalten

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,.$$

Umkehrt ist dann

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + c = F(\varphi(t)) + c\,.$$

Wir wollen an dieser Stellen nicht zu exakt sein und interessieren uns mehr für den rechnerischen Aspekt: Für die systematischen Rechenschritte verwenden wir die Schreibweise mit dem Differentialoperator und erhalten damit eine »Umformung« (»Techniker-Regel«):

$$\varphi(t) = x$$

Dann ist

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$$

bzw. »umgeformt«

$$\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\,.$$

Damit erhalten wir

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t\,.$$

Substitution funktioniert sehr gut, wenn wir einen Ausdruck haben, dessen innerer Ausdruck ebenfalls als (heraushebbarer) Faktor vorkommt. Es folgen wie gewohnt einige Beispiele.

Bsp. 23.3

$$\int x(x^2-3)^5 \,\mathrm{d}x = ?$$

Wir stellen fest: x können wir als Teil der inneren Ableitung von $(x^2-3)^5$ auffassen. Wir formen um

$$\int x(x^2-3)^5 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{\varphi'(x)}(\underbrace{x^2-3}_{\varphi(x)})^5 \,\mathrm{d}x =$$

Dann ist also $\varphi(x) = x^2-3$ und $f(x) = x^5$. Demnach ist $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ und damit

$$= \frac{1}{2}F(x^2-3) = \frac{1}{12}(x^2-3)^6$$

Ein zweites Beispiel soll mit der »Technikerregel« gezeigt werden.

Bsp. 23.4

$$\int 3xe^{x^2+3} \,\mathrm{d}x = ?$$

Wir versuchen: $\varphi(x) = x^2+3$, dann ist

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 2x$$

und weiter

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\varphi$$

Also ist

$$\int 3xe^{x^2+3} \,\mathrm{d}x = \int 3xe^{\varphi}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{3}{2}e^{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2}e^{\varphi} = \frac{3}{2}e^{x^2+3} .$$

Noch ein Schlagwort zum Selber-Weiterlesen am Ende des Kapitels: Wurzeln und quadratische, verschachtelte Ausdrücke sind sehr mühsam zu integrieren. Einige schlaue Köpfe haben sich hierfür aber ein allgemeines Schema überlegt, dass sich Generalsubstitution nennt . . .

Zusammenfassung

Differenzieren

Eine Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in \mathcal{D}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. Die erste Ableitung f' ist dann an jenen Stellen von $\mathcal{D}$ definiert, an denen dieser Grenzwert existiert. Anschaulich gesehen liefert $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Umgekehrt gilt

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

d. h. ein Funktionswert in der Nähe von x_0 lässt sich durch $f(x_0)$ und der ersten Ableitung an x_0 (vergleichsweise) gut approximieren.

f heißt differenzierbar, wenn f für alle $x_0 \in \mathcal{D}$ differenzierbar ist. Ist f differenzierbar, so ist f automatisch stetig. Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar, wie die Betragsfunktion zeigt.

Sind $f, g : \mathcal{D} \to mR$ differenzierbar, so sind auch $\lambda \cdot f$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g (für $g(x) \neq 0$) differenzierbar und es gilt:

$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g' \,.$$

Wir sagen auch, differenzieren ist eine lineare Operation.

Weiters gilt die Produktregel

$$(fg)' = f'g + g'f$$

sowie die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \,.$$

Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ jeweils differenzierbar, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ differenzierbar und es gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \forall x \in X$$

Mit Hilfe dieser Rechenregeln lassen sich ausgehend von den Ableitungen der üblichen Grundfunktionen praktisch sämtliche Ableitungen von komplizierteren/verschachtelten Funktionen berechnen. Eine Übersicht der Ableitungen der gängigen Grundfunktionen findet sich im Anhang A Formelsammlung ►227.

Integrieren

Die Umkehroperation zum Differenzieren ist das Integrieren. F heißt Stammfunktion (oder Unbestimmtes Integral) von $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, wenn

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{D}$$

ist. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich immer nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Zumindest zu jeder stetigen Funktion lässt sich eine Stammfunktion finden. Eine Beliebige Stammfunktion von f schreiben wir häufig in der Form

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,.$$

Ist F eine (beliebige) Stammfunktion von f, so lässt sich die (orientierte) Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b darstellen als

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F|_a^b = F(b) - F(a)$$

Dieser Ausdruck heißt dann das bestimmtes Integral, x heißt Integrationsvariable, $f(x)$ Integrand, a Untergrenze und b Obergrenze. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert uns diese Formel.

Anschaulich gesehen können wir die Fläche unter einer Kurve bestimmen, indem wir passende Rechtecke bilden und aufsummieren. Wenn wir die Rechtecke immer schmäler machen, erhalten wir im Grenzübergang den tatsächlichen Flächeninhalt. Das Riemann-Integral ist durch dieses Verfahren (bzw. Grenzwert) definiert.

Als Umkehrung vom Differential ist das Integral ebenfalls linear:

$$\int (f \pm g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x \pm \int g\,\mathrm{d}x$$

$$\int \lambda \cdot f\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int f\,\mathrm{d}x$$

Die Aussagen gelten auch für bestimmte Integrale. Darüber hinaus gelten folgende Rechenregeln:

$$\int\limits_a^c f\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f\,\mathrm{d}x$$

b muss nicht zwingend $a < b < c$ gelten, es reicht $b \in \mathcal{D}_f$.

Als besondere Rechentechnik für Integrale können wir partiell integrieren:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Auch Integration durch Substitution ist möglich, F ist dabei eine Stammfunktion von f:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + c$$

Teil VIII.

Vektoren und Vektorrechnung

Das Thema Vektoren und Vektorräume wird grundsätzlich in jenem Teilgebiet der Mathematik behandelt, das sich »Lineare Algebra« nennt. Im Prinzip geht es darum, Mengen zu untersuchen, die eine bestimmte Struktur bzw. Rechenregeln zur Verfügung haben. Insbesondere will man Funktionen auf solchen Mengen untersuchen, die die Eigenschaften der »Linearität« erfüllen (vgl. 16.1.1 Affine Funktionen ▶133). Vor allem in der Physik und in der Anwendung (etwa bei linearen Gleichungssystemen), aber auch für die Funktionalanalysis ist diese Theorie sehr wertvoll.

Es wird sich (im Laufe des Studiums) herausstellen, dass nicht nur Mengen, die wir vielleicht in der Schule als $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ kennen gelernt haben, diesbezüglich interessant sind. Vielmehr lässt sich das Konzept eines Vektorraumes weitreichend verallgemeinern, etwa auf Funktionsmengen, Folgen oder Polynome ...

In diesem Skriptum beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sowie der Verallgemeinerung, dem $\mathbb{R}^n$, weil es für den Beginn völlig ausreicht, diese Vorstellung von einem (endlichdimensionalen) Vektorraum zu haben. Anhand des $\mathbb{R}^n$ werden wir uns die Rechenregeln, die einen Vektorraum charakterisieren, erarbeiten. Nichtsdestotrotz wird uns die Anschauung im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ immer wieder helfen, die verschiedensten Definitionen zu verstehen.

Außerdem werden wir uns geometrisch motivierten Inhalten wie »Länge« eines Vektors oder Orthogonalität widmen. Den Schul-Schwerpunkt, der für gewöhnlich auf der Analytischen Geometrie (Lage von Geraden, Gerade und Ebene schneiden etc.) liegt, werden wir hier nicht verfolgen, da er für ein Mathematik-Studium in erster Linie nicht notwendig ist.

Auch dieses Kapitel ist wieder eher abstrakt. Wir gehen dabei häufig vom allgemeineren Fall zum konkreteren, um die Fähigkeit der Abstraktion weiter zu trainieren und um auf den in der Hochschulmathematik üblichen Zugang vorzubereiten.

Im Folgenden schreiben wir Vektoren wie in der Schule üblich mit einem Vektorpfeil, also etwa $\vec{v}$. Das ist in einschlägigen Lehrveranstaltungen oft nicht der Fall, dort werden gerne auch fette Buchstaben **v** oder einfach nur lateinische Buchstaben v verwendet. Zur Abgrenzung schreiben wir Variablen für (reelle) Zahlen (»Skalare«) des Öfteren als kleine, griechische Buchstaben, etwa λ. Eine Übersicht des griechischen Alphabets findet sich im Anhang B Griechisches Alphabet ▶228.

24. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$

Definition 24.1
Als zweidimensionalen, reellen Standardvektorraum bezeichnen wir die Menge

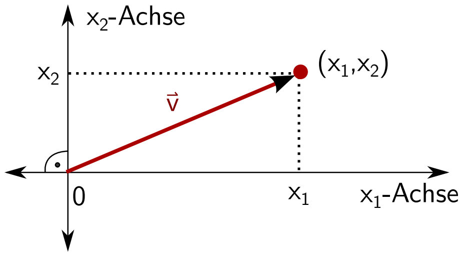
$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Darin sind sogenannte Spaltenvektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } (x_1, x_2)^T$$

enthalten. Das T steht dabei für transponiert. x_1 ist die erste Komponente des Vektors, x_2 seine zweite. Vektoren sind also nicht mit Brüchen zu verwechseln!

Für gewöhnlich stellt man sich den $\mathbb{R}^2$ in einem zweidimensionalen Koordinatensystem vor. Jedem Punkt mit den Koordinaten x_1 und x_2 können wir einen Vektor $(x_1, x_2)^T$ zuordnen: Nämlich den Pfeil vom Ursprung bis zum Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_2). Auf unserem Niveau werden wir selten zwischen Punkt und Vektor unterscheiden. Sich den Vektor als Pfeil vorzustellen, ist im Hinblick auf die Rechenregeln die sinnvollere Variante.



Definition 24.2
Analog ist der dreidimensionale, reelle Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert, nämlich als

$$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3)^T | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} .$$

Was wäre die Mathematik ohne ihre Verallgemeinerungen? Zumindest nicht das, was sie ist.

Definition 24.3
Wir definieren für eine beliebige natürliche Zahl $n > 0$ den n-dimensionalen, reellen Standardvektorraum als die Menge

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)^T | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} .$$

Allerdings verstehen wir unter einem Vektorraum nicht alleine die Menge seiner Vektoren an sich, sondern brauchen auch noch Verknüpfungen ($\rightarrow$ Addition), die gewissen Regeln genügen, also geeignete Rechenregeln. Diese werden wir uns im Folgenden näher anschauen.

24.1. Rechenregeln

Definition 24.4: Vektoraddition

Sind $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$, so definieren wir

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Wir sagen: Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ werden komponentenweise addiert.

Man beachte, dass links das $+$ zwischen zwei Vektoren steht, rechts in den Einträgen (Komponenten bzw. Koordinaten) dagegen zwischen zwei reellen Zahlen. Obwohl dieses $+$ mathematisch gesehen nicht gleich ist, schreiben wir der Einfachheit halber doch das selbe Zeichen dafür.

Bsp. 24.1

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 + (-5) \\ -4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Satz 24.1

Sind $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, so gilt das Kommutativgesetz

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

sowie das Assoziativgesetz:

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}\,.$$

Beweis

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{y} + \vec{x}$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Addition von reellen Zahlen kommutativ ist. Analog geht man beim Assoziativgesetz vor.

□

Satz 24.2

Wir definieren den Nullvektor $\vec{0}$ durch

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

$\vec{0}$ ist also jener Vektor, dessen Komponenten jeweils 0 sind. Damit erhalten wir für jeden beliebigen Vektor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}\,.$$

Außerdem erfüllt dann der Vektor $\vec{y} := (-x_1, \ldots, -x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}\,.$$

Statt $\vec{y}$ schreiben wir für gewöhnlich auch $-\vec{x}$ und für ein beliebiges $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir die Rechnung $\vec{z} + (-\vec{x})$ als

$$\vec{z} - \vec{x}$$

Der Vektor $-\vec{x}$ heißt dann Gegenvektor von $\vec{x}$ und ist sein additiv inverses Element.

Beweis

$$\vec{x} + \vec{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ \vdots \\ x_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$$

Den zweiten Teil der ersten Aussage erhält man mit dem Kommutativgesetz. Die weiteren Aussagen beweist man analog über die Definitionen.

□

Neben der Addition zweier Vektoren ist eine weitere Rechenoperation gewünscht, nämlich eine Multiplikation, die einen Vektor mit einem Skalar, also einer gewöhnlichen (reellen) Zahl verknüpft. Das Verknüpfungsergebnis ist dabei wieder ein Vektor:

Definition 24.5: Multiplikation mit einem Skalar

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Der Mal-Punkt wird gerne weggelassen. Wir schreiben also oft λx statt $\lambda \cdot x$.

Auch hier ist die Struktur der Verknüpfungen zu beachten: Auf der linken Seite verbindet der Mal-Punkt eine Zahl mit einem Vektor, auf der rechten Seite in den Komponenten zwei reelle Zahlen.

Bsp. 24.2

$$(-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Satz 24.3

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$$

Es gilt also etwas Vergleichbares wie das Assoziativgesetz. Weiters gelten

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$
$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}\,.$$

Mit Hilfe des Produkts eines Vektors mit einem Skalar und der Addition von Vektoren ergeben sich einige weitere schöne Rechenregeln

Satz 24.4

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten die beiden folgenden Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot\vec{x} &= \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}\\ \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y}) &= \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}\end{aligned}$$

Man beachte wieder die verschiedenen Rollen des $+$ bzw. $\cdots$.

Beweis

Exemplarisch beweisen wir nur die erste Aussage. Seien also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = (\lambda+\mu)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\cdot x_1\\ \vdots\\ (\lambda+\mu)\cdot x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cdot x_1+\mu\cdot x_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot x_n+\mu\cdot x_n\end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix}\lambda\cdot x_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu\cdot x_1\\ \vdots\\ \mu\cdot x_n\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}\end{aligned}$$

$\square$

Mit diesen Rechenregeln lassen sich (auch eine Ebene abstrakter) einige weitere Eigenschaften herleiten. So ist etwa

$$\vec{x}+(-1)\cdot\vec{x} = 1\cdot x+(-1)\cdot\vec{x} = (1+(-1))\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x} = \vec{0}\,.$$

Wir haben also nachgerechnet, dass $(-1)\cdot\vec{x}$ das additiv inverse Element von $\vec{x}$ ist, anders formuliert

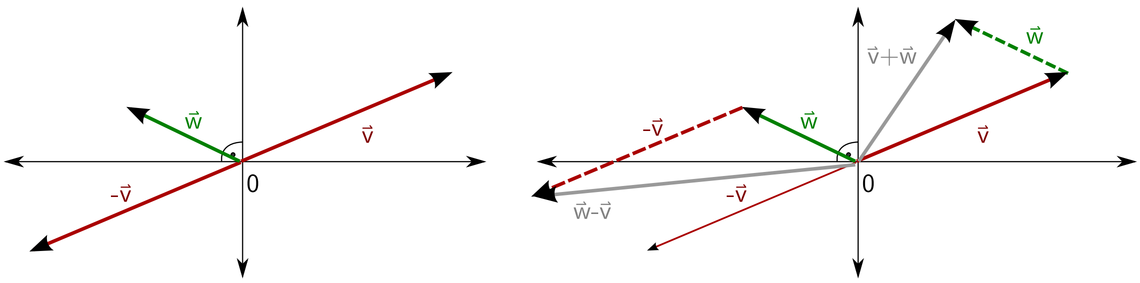
$$(-1)\cdot\vec{x} = -\vec{x}\,.$$

Man beachte, dass wir dabei nicht mehr auf die komponentenweise Definitionen zurückgehen mussten. Solche schönen Eigenschaften haben wir später bei der Definition eines beliebigen (abstrakten) Vektorraums im Hinterkopf (ab ▶219). Es erspart mathematisch gesehen sehr viel Arbeit, wenn man nicht mehr auf die ersten, grundlegenden Definitionen der Verknüpfungen zurückgehen muss, sonder gleich mit (bewiesenen bzw. geforderten) Rechenregeln arbeiten kann. Hier entfaltet die abstrakte Struktur ihre volle Wirkung.

24.2. Geometrische Anschauung

Glücklicherweise haben die beiden Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ eine schöne geometrische Veranschaulichung, wie wir am Beginn festgestellt haben. Während für den $\mathbb{R}^2$ zwei Koordinaten-Achsen reichen, benötigt der $\mathbb{R}^3$ drei Achsen zur Veranschaulichung. Der $\mathbb{R}^3$ beschreibt als den dreidimensionalen Raum. Für gewöhnlich werden die Koordinatensysteme rechtwinkelig gezeichnet, was für spätere Begriffe wie die Orthogonalität (siehe Def. 24.12 ▶214) sinnvoll ist.

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden geometrisch addiert, indem $\vec{w}$ an das Ende des Pfeils $\vec{v}$ angehängt wird. $\vec{v}+\vec{w}$ ist dann der Pfeil, der vom Ursprung bis zum neuen Endpunkt geht. Auch die Rechnung $\vec{w}-\vec{v} := \vec{w}+(-\vec{v})$ ist in der rechten Zeichnung dargestellt:



Die Multiplikation mit einem Skalar λ stellt dagegen eine Streckung bzw. Stauchung dar (d. h. die Richtung des Vektors ändert sich nicht). Ist $|\lambda| > 1$, so wird der Vektor anschaulich gesehen länger, ist $0 < |\lambda| < 1$, so handelt es sich um eine Stauchung. Ist $\lambda < 0$, so ändert sich seine Orientierung: Schlampig gesagt: »Der Pfeil ist parallel, zeigt aber in die Gegenrichtung«

24.3. Besondere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Nachfolgend werden wir einige wesentliche Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$untersuchen, die auch in der Schule (zumindest im bisherigen Lehrplan) viele Anwendungen haben. Es wird um die Begriffe »Gerade« und »Ebene« gehen, sowie um die Verallgemeinerung (im $\mathbb{R}^n$) davon, was dann unter dem Namen »(affiner) linearer Unterraum« zusammengefasst wird.

Definition 24.6: Gerade

Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und ein $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann heißt die Menge

$$g := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

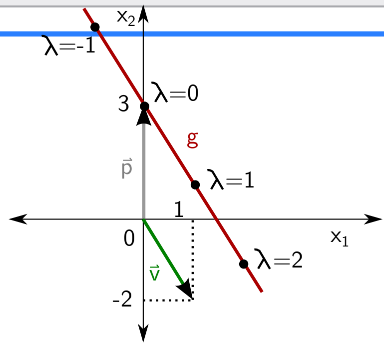
die Gerade g durch den Punkt $\vec{p}$ mit Richtung $\vec{v}$. Der Vektor $\vec{v}$ nennt sich auch ein Richtungsvektor der Gerade g, λ heißt Parameter. Eine Gerade ist also eine (unendliche) (Punkt-)Menge, die durch eine Parameter-Gleichung definiert wird.

Bsp. 24.3

Rechts ist die Gerade g mit

$$g = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

skizziert.



Definition 24.7: Ebene

Unter einer Ebene ϵ im $\mathbb{R}^3$ verstehen wir eine Menge der Form

$$\epsilon := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ nennn wir Richtungsvektoren der Ebene. $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Punkt der Ebene.

Bsp. 24.4

$$\epsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

ist eine Ebene parallel zur x-y-Ebene und schneidet die z-Achse auf einer Höhe von 3.

Definition 24.8

Seien $\vec{p}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Menge

$$W = \{x \in V | x = p + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

heißt affiner linearer Unterraum. Ist $\vec{p} = \vec{0}$, so sprechen wir von einem linearen Unterraum, der von den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ aufgespannt wird.

Man beachte: Gerade und Ebene sind nach unserer Definition zwei Spezialfälle eines (affinen) linearen Unterraums.

24.4. Norm (Betrag) eines Vektors

Die geometrische Interpretation von Vektoren legt nahe, einen Längenbegriff für Vektoren ähnlich wie dem der Reellen Zahlen (vgl. 16.3 Betragsfunktion und Signumfunktion ▶140) festzulegen.

Definition 24.9: Norm (Betrag)

Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir die (euklidische) Norm (bzw. Betrag) des Vektors $\vec{x}$ durch

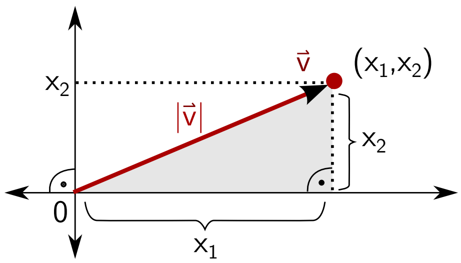
$$\|\vec{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Statt $\|\vec{x}\|$ schreibt man in der Schule meist $|\vec{x}|$. Für die euklidische Norm verwendet man auch die Schreibweise $\|\vec{x}\|_2$ (sprich: »zwei-Norm«).

Bsp. 24.5

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Für $x \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) entspricht $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ exakt der geometrischen Anschauung, also die Länge des Pfeils in der Ebene (bzw. im Raum). Das ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras, wie die nebenstehende Grafik zeigt.



Es gelten mit der obigen Definition der (euklidischen) Norm (bzw. Betrag) folgende Rechenregeln:

Satz 24.5: Rechenregeln der Norm

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten

i) Definitheit: Die Norm eines Vektors ist nie eine negative Zahl, also

$$\|\vec{x}\| \geq 0 \,.$$

Darüber hinaus ist

$$\|\vec{x}\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \vec{0}\,,$$

Die Norm ist genau dann 0, wenn $\vec{x}$ der Nullvektor ist.

ii) Homogenität: Skalare (also Zahlen) können unter Verwendung des Betrages herausgezogen werden. Es gilt

$$\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \ .$$

iii) Dreiecksungleichung: Auch für die Norm gilt

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \ .$$

Der Einfachheit halber beweisen wir exemplarisch nur für $n = 2$:

Beweis

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir beweisen die ersten beiden Aussagen.

i) Dann ist

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0\,,$$

weil die Quadrate von Zahlen ≥ 0 sind, die Summe davon ≥ 0 ist und die Wurzel ebenfalls ein Ergebnis ≥ 0 liefert.

Ist $\|\vec{x}\| = 0$, so ist $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Die Summe zweier nicht negativer Zahlen kann nur dann 0 sein, wenn die einzelnen Summanden 0 sind, also ist $x_1^2 = x_2^2 = 0$. Bekanntlich ist 0 die einzige Zahl, deren Quadrat 0 ist, also folgt daraus, dass $x_1 = x_2 = 0$ ist. Somit muss $\vec{x}$ der Vektor $(0,0)^T$ sein.

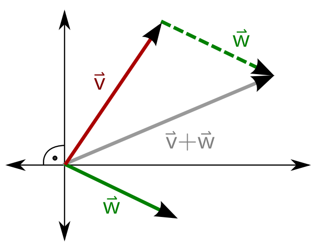
Umgekehrt: Ist $\vec{x} = (0,0)^T$, so ist $\|\vec{x}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

ii)

$$\|\lambda \cdot \vec{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2} =$$
$$\sqrt{\lambda^2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \ .$$

□

Noch ein Hinweis zur Dreiecksungleichung, warum diese ihren Namen auch verdient: Wir betrachten die Skizze rechts.
Dann ist anschaulich klar, dass die Länge der beiden kürzeren Seiten addiert größer sein muss, als die Länge der längsten Seite, damit ein Dreieck zustandekommen kann. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die selbe Richtung haben.



Wer die obigen Rechenregeln aufmerksam gelesen hat und sich auch die Eigenschaften der Betragsfunktion (siehe Satz 16.1 ▶141) gemerkt hat, wird auffällige Parallelen feststellen. Die Norm ist dasjenige für Vektoren, was der Betrag für reelle Zahlen ist. Interessanterweise gibt es (für den $\mathbb{R}^n$) nicht nur eine einzige Norm, die obigen Eigenschaften (Definitheit, Homogenität, Dreiecksungleichung) erfüllt. In anderen Vektorräumen wie etwa in Funktionenräumen ($\approx$ Menge aller Funktionen) können Normen ganz anders aussehen bzw. definiert sein. Mehr dazu lernt man in der Linearen Algebra oder der Funktionalanalysis.

Definition 24.10

Der Vektor $\vec{e}_j := (x_1, \ldots, x_n)^T$ mit

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq 0 \end{cases}$$

heißt j-ter kanonischer Einheitsvektor. Er hat also den Eintrag 1 an der Stelle j und 0 an allen anderen Stellen. e_j heißt »Einheit«svektor, weil er die Länge 1 hat, also $\|\vec{e}_j\| = 1$.

Satz 24.6

Ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $a \neq 0$, so erhalten wir durch die Vorschrift

$$\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$$

einen Vektor der Länge 1 mit Richtung $\vec{a}$.

24.5. Skalares Produkt – Winkel

Neben der Länge von Vektoren liefert die Anschauung (im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$) noch eine weitere Motivation, Eigenschaften von Vektoren zu definieren, nämlich den Begriff des Winkels. Zunächst erarbeiten wir uns aber eine grundlegendere, allgemeinere Eigenschaft, nämlich den Begriff der Orthogonalität.

Dafür benötigen wir eine Rechenvorschrift, die feststellt bzw. misst, ob zwei Vektoren orthogonal aufeinander stehen oder nicht. Was Orthogonalität (Rechtwinkeligkeit) im $\mathbb{R}^2$ bedeutet, ist anschaulich klar. Was wir aber darunter im $\mathbb{R}^n$ verstehen wollen, müssen wir festlegen. Wir definieren zunächst unser Messinstrument:

Definition 24.11: Inneres Produkt

Seien $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann definieren wir das skalare Produkt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (oft auch euklidisches inneres Produkt genannt) durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$$

Statt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ schreibt man gewöhnlich in der Schule $\vec{x} \cdot \vec{y}$. Diese Schreibweise ist in der Höheren Mathematik nicht besonders üblich.

Bsp. 24.6

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 2$$

Ähnlich wie die Norm hat auch das innere Produkt einige schöne Eigenschaften, die sich auch hervorragend auf abstrakteren Vektorräumen verallgemeinern lassen.

Satz 24.7

Für das euklidische innere Produkt gelten folgende Rechenregeln: Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

i) Das innere Produkt eines Vektors mit sich selbst ist nie negativ, also

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \,,$$

und nur genau dann 0, wenn der Vektor der Nullvektor ist, also

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{x} = \vec{0}\,.$$

ii) Wir können Skalare aus dem inneren Produkt herausziehen, das heißt

$$\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \ .$$

iii) Darüber hinaus können wir Summen auseinanderziehen, also

$$\langle \vec{x}, y \vec{+} z \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \ .$$

Aussage 2 und 3 zusammen nennen sich »Linearität im 2. Argument«.

iv) Abschließend sei noch erwähnt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \ .$$

Daneben gäbe es noch weitere Eigenschaften, die auf diesen aufbauen.

Beweis

Wir sehen uns exemplarisch nur die zweite Aussage an:

$$\langle \lambda \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot x_k) \cdot y_k =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

□

Durch Aussage 2, 3 und 4 gilt auch die Linearität im 1. Argument, also beispielsweise

$$\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \ .$$

Es bleibt noch zu klären, warum laut der obigen Definition unser inneres Produkt »euklidisch« heißt: Es gibt einen Zusammenhang zwischen der euklidischen Norm und diesem inneren Produkt, nämlich

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \ .$$

Wir sage auch, die Norm wird durch das innere Produkt indiziert. Das innere Produkt ist also üblicherweise die grundlegendere Eigenschaft.

Ausgehend vom inneren Produkt können wir nun den Begriff »Orthogonalität« definieren.

Definition 24.12

Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ des $\mathbb{R}^n$ stehen orthogonal aufeinander genau dann, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \,.$$

Die Kurzschreibweise für diesen Sachverhalt ist $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Bsp. 24.7

Ist $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\left\langle \vec{x}, \vec{0} \right\rangle = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 = 0$$

Also steht $\vec{0}$ orthogonal auf alle Vektoren. Außerdem ist

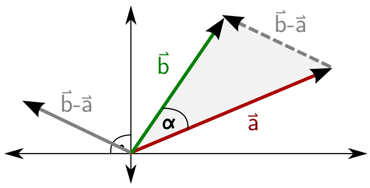
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot (-x_1) = 0$$

Im $\mathbb{R}^2$ ist dann $(x_2, -x_1)^T$ ein Normalvektor auf $\vec{x}$.

Bsp. 24.8

Ist $i \neq j$, so ist $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Die kanonischen Einheitsvektoren stehen also paarweise orthogonal aufeinander.

Nun noch zum Begriff des Winkels: Dieser macht de facto nur im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ Sinn: Durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sowie $\vec{b} - a$ wird ein Dreieck (im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) aufgespannt.



Es gilt dann bekanntlich der Kosinussatz, den man in jeder Formelsammlung findet:

$$\left\| \vec{b} - \vec{a} \right\|^2 = \|\vec{a}\| + \left\| \vec{b} \right\| - 2 \left\| \vec{b} \right\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \,.$$

Andererseits erhalten wir durch die Identität $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ und durch die Rechenregeln für das innere Produkt folgende Umformung

$$\begin{aligned} \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\|^2 &= \left\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} \right\rangle - \left\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = \\ &= \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle - \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle - \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle - \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle - 2 \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \,. \end{aligned}$$

Durch $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$ und $\left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = \left\| \vec{b} \right\|^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \left\| \vec{b} \right\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) = 2 \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \qquad &\Leftrightarrow \\ \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\| \vec{b} \right\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man dann die bekannte Formel für den Winkel (die rechte Schreibweise ist die Schulschreibweise) im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$:

Satz 24.8

Durch das innere Produkt bzw. die Norm erhalten wir den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|} .$$

Ausgehend vom Zusammenhang des inneren Produkts und dem Kosinus können wir uns folgendes überlegen. Ist $\|\vec{a}\| = 1$, so ist der Vektor

$$\vec{a}_{\|} = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \cdot \vec{a}$$

die Projektion von $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$, denn $\vec{a}_{\|}$ hat die selbe Richtung $\vec{a}$ und zudem die aus geometrischer Sicht nötige Länge, da

$$\left\|\vec{a}_{\|}\right\| = \left|\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle\right| \cdot \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{a}\| = \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos(\alpha) .$$

24.6. Vektorielles Produkt (Kreuzprodukt)

Unter anderem für physikalische Anwendungen nützlich ist das sogenannte Kreuzprodukt zweier Vektoren (oder auch vektorielles Produkt) des $\mathbb{R}^3$:

Definition 24.13: Kreuzprodukt

Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, so definieren wir das Kreuzprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Der Name »vektoriell« kommt daher, dass im Gegensatz zum »skalaren« Produkt keine Zahl (Skalar), sondern ein Vektor entsteht.

Bsp. 24.9

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \\ -(1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-4)) \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Eine Motivation, das Kreuzprodukt gerade durch diese Vorschrift einzuführen, ist die folgende Eigenschaft, die auch in vielen Schulaufgaben ($\rightarrow$ Ebenen aufstellen ...) Verwendung findet:

Satz 24.9

Es gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$$
$$\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y} .$$

Durch direktes Nachrechnen kann man sich davon überzeugen. Weiters gelten folgende Eigenschaften:

Satz 24.10

Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= -(\vec{y} \times \vec{x}) \\ (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} &= (\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} \times \vec{z}) \\ \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) &= (\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda\vec{y}) \end{aligned}$$

Auch diese Aussagen lassen sich durch direktes Einsetzen in die Definition des Kreuzprodukts herleiten.

Als eine wichtige (geometrische) Anwendung führen wir folgende Formel an:

Satz 24.11

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\alpha) \,.$$

α ist dabei der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In Worten: Der Betrag des Kreuzprodukts liefert den Flächeninhalt eines Parallelogramms, dass durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Die Herleitung ist vergleichsweise langwierig, wir geben hier die wesentlichen Schritte an:

Beweis

Der Flächeninhalt eines Dreieck ist bekanntlich

$$A_\triangle = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\alpha)$$

Mit dem Zusammenhang $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$ und Satz 24.8 ▶215 erhalten wir

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle - (\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle)^2} \,.$$

Und nun zeigt man über die Definitionen (aufwendige Rechnerei durch die drei Komponenten ...), dass

$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle - (\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle)^2} = 2 \cdot A_\triangle = A \,,$$

also

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle - (\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle)^2 \,.$$

□

Zusammenfassung

Vektorräume sind Mengen mit zwei Verknüpfungen: Einerseits können zwei Vektoren addiert (bzw. subtrahiert) werden, andererseits können wir einen Vektor mit einer Zahl (Skalar) multiplizieren. In beiden Fällen erhalten wir wieder einen Vektor als Verknüpfungsergebnis.

Der n-dimensionale, reelle Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$ (auch reeller Standardraum genannt) mit $n \in \mathbb{N}$ enthält Spaltenvektoren der Form $(x_1, \ldots, x_n)^T$ (das T steht für »transponiert«) mit Komponenten $x_i \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir können uns die Vektoren am besten als Pfeile (montiert am Ursprung bzw. Nullpunkt) vorstellen. Spezialfälle des $\mathbb{R}^n$ mit einer anschaulichen, geometrischen Bedeutung sind der $\mathbb{R}^2$ (zweidimensionale Ebene) sowie der $\mathbb{R}^3$ (dreidimensionaler Raum).

- Zwei Vektoren werden addiert, indem die Einträge zeilenweise (=komponentenweise) addiert werden:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$
- Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem jede Komponenten mit diesem Skalar multipliziert wird:
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$
- Der Nullvektor $\vec{0}$ ist jener Vektor, der nur Nullen als Einträge hat: $\vec{0} := (0, \ldots, 0)^T$.

Den Betrag (Norm) eines Vektors definieren wir als $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ liefert uns das die anschauliche Länge des Vektor-Pfeils.

Das innere Produkt (skalare Produkt) zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist definiert durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, d. h. die Komponenten werden jeweils multipliziert und dann aufsummiert. In der Schule schreibt man auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ dafür.

Mit dem inneren Produkt definieren wir den Begriff der Orthogonalität: $\vec{x}$ steht orthogonal auf $\vec{y}$ genau dann, wenn $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ist. Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ erhalten wir wieder eine anschauliche Interpretation, nämlich den Zusammenhang

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \cos(\varphi) \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}s\|$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Im $\mathbb{R}^3$ können wir das sogenannte Kreuzprodukt (vektorielles Produkt) bilden:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wir erhalten dadurch einen Vektor, der sowohl orthogonal auf $\vec{x}$ als auch auf $\vec{y}$ steht.

Für $\vec{v}, \vec{w} \neq 0$ und $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ stellt die Menge

$$g := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade dar, die Menge

$$\epsilon := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u}s \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

eine Ebene.

25. Allgemeine (abstrakte) Vektorräume

Im Wesentlichen haben wir bereits viele Eigenschaften und Strukturen, die Vektorräume kennzeichnen, kennen gelernt. Es gilt diese nur mehr zu sammeln und geordnet aufzuschreiben. Im Anschluss daran werden wir einige wesentliche Definitionen machen, die sich zum Teil sehr anschaulich auf den $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^n$ übertragen lassen.

25.1. Definition (Vektorraum)

Sei V einen nichtleere Menge. Unter einem Vektorraum verstehen wir nun diese Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die bestimmte Eigenschaften erfüllen:

- V ist mit der Addition $+$ einen kommutative Gruppe, d. h.

Kommutativgesetz:	$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V:$	$\vec{x}+\vec{y}$	$=$	$\vec{y}+\vec{x} \in V$
Assoziativgesetz:	$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V:$	$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$	$=$	$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
Existenz des Nullvektor	$\exists \vec{0} \in V\ \forall \vec{x} \in V:$	$\vec{x}+\vec{0}$	$=$	$\vec{x}$
Existenz des Gegenvektor	$\forall \vec{x} \in V\ \exists \vec{y} \in V:$	$\vec{x}+\vec{y}$	$=$	$\vec{0}$

  Wie üblich wird dann der Gegenvektor (additives inverses Element) zu $\vec{x}$ mit $-\vec{x}$ bezeichnet.

- Des Weiteren ist eine Verknüpfung von Elementen eines Körper $\mathbb{K}$ (vgl. Def. 7.7 ▶60) mit einem Vektor gefordert. Diese Operation nennen wir Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:

  $$\forall \lambda \in K \forall \vec{x} \in V : \lambda \cdot \vec{x} \in V\ .$$

  Darüber hinaus müssen die Addition von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar folgende Rechenregeln erfüllen:

Assoziativgesetz:	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall \vec{x} \in V:$	$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$	$=$	$(\lambda\mu) \cdot \vec{x}$
erstes Distributivgesetz:	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall \vec{x} \in V:$	$(\lambda+\mu) \cdot \vec{x}$	$=$	$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
zweites Distributivgesetz:	$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V:$	$\lambda \cdot (\vec{x}+\vec{y})$	$=$	$\lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$

- Und letztendlich muss noch eine der beiden folgenden Rechenregeln gefordert werden (die andere folgt dann aus der geforderten):

  $$\forall \vec{x} \in V:\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \qquad \text{oder} \qquad \forall \vec{x} \in V:\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Diese Rechenregeln und Gesetze werden gefordert, wenn wir von einem »Vektorraum« sprechen. Wie die Menge V im Konkreten aussieht und wie die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wirklich definiert sind, darüber werden keine Aussagen gemacht. Dies ist nur für konkrete Anwendungen interessant und hängt stark davon ab, in welchem Teilgebiet der Mathematik wir uns befinden. Insgesamt aber auf jeden Fall ein spannendes Thema . . .

25.2. Linearkombination und Lineare Unabhängigkeit

Definition 25.1

Sind $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k, \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gegeben, so heißt der Vektor $\vec{v}$

$$\vec{v} := \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{v}_j$$

eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ heißen Koeffizienten.

Bsp. 25.1

Der Vektor $\vec{v} = (2,3)^T$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0,-2)^T$ darstellen, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Somit ist $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -3/2$.

Die Frage, ob sich ein (vorgegebener) Vektor als Linearkombination andere Vektoren darstellen lässt, ist eine der zentralen Themen der Linearen Algebra. Es stellt sich nämlich (im endlich-dimensionalen Fall) heraus, dass es dadurch reicht, sich bei vielen Überlegungen auf einige wenige Vektoren zu beschränken. Soviel als geheimnisvollen Ausblick dazu. Geometrisch interpretiert stellt man sich also die Frage, ob sich ein gegeben Vektor (bzw. Punkt) durch passende Skalierung und Addition von anderen Vektoren (ausgehend vom Ursprung $\vec{0}$) erreichen lässt.

Bsp. 25.2

Lässt sich der Vektor $\vec{v} = (3,4)^T$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{v}_1 = (1,2)^T$ und $\vec{v}_2 = (-1,3)^T$ darstellen? Gesucht sind als λ_1 und λ_2, sodass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Durch die Rechenregeln für Vektoren ist diese Gleichung nichts anderes als

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (-1) \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 \end{pmatrix} .$$

Zwei Vektoren sind klarerweise genau dann gleich, wenn die beiden Komponenten jeweils gleich sind. Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten (vgl. 12.1 Lineare Gleichungssysteme ▶100):

$$\begin{array}{rcrcrl} 3 & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & (I) \\ 4 & = & 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & (II) \end{array}$$

Dieses ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrl} 3 & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & (I) \\ -2 & = & -\lambda_1 & - & \frac{3}{2}\lambda_2 & (III) \end{array}$$

und weiter zu

$$\begin{array}{rcrcrl} 3 & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & (I) \\ 1 & = & & & -\frac{5}{2}\lambda_2 & (IV) \end{array}$$

Also ist

$$\lambda_2 = -\frac{2}{5}$$

und damit ist

$$\lambda_1 = 3 + \lambda_2 = \frac{13}{5}$$

Also lässt sich $\vec{v}$ tatsächlich als Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darstellen, nämlich

$$\vec{v} = \frac{13}{5} \cdot \vec{v}_1 - \frac{2}{5} \cdot \vec{v}_2 \,.$$

Es folgt nun als Ausblick eine sehr zentrale, wenn auch vergleichsweise (logisch) schwierige Definition:

Definition 25.2: Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig genau dann, wenn aus der Gleichung

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{v}_j$$

folgt, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ sein muss. Sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig.

Klar ist: Wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ ist, dann gilt immer die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{k} 0 \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{k} \vec{0} = \vec{0} \,.$$

Diese logische Richtung ist aber in der obigen Definition nicht angesprochen! Sehen wir uns ein einfaches Beispiel an, das einen Vorgeschmack des Inhaltes der linearen Unabhängigkeit macht:

Bsp. 25.3

Wir untersuchen, ob die Vektoren $\vec{v}_1 = (-2, 0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0, 5)^T$ linear unabhängig sind. Dazu müssen wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

betrachten und versuchen, Lösungen für λ_1 und λ_2 zu erhalten. Wir erhalten (vgl. oben) das gleichwertige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 0 & = & -2\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & \quad (I) \\ 0 & = & 0\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & \quad (II) \end{array}$$

Aus Gleichung (I) erhalten wir zwingend $\lambda_1 = 0$, aus Gleichung (II) erhalten wir $\lambda_2 = 0$. Somit sind Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig.

Bsp. 25.4

Wir untersuchen, ob die drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)^T, \vec{v}_2 = (2, 8, 8)^T, \vec{v}_3 = (3, 10, 11)^T$ linear unabhängig sind. Die Gleichung

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 8\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & +8\lambda_2 & + & 11\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Durch Addition bzw Subtraktion mit der ersten Gleichung erhalten wir das gleichwertige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & & 4\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcrcrcll} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 & (I) \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & (II) \\ & & & & 0 & = & 0 & (III) \end{array}$$

Wir stellen fest: Gleichung (III) ist immer erfüllt (allgemein gültig), Gleichung (II) hat unendlich viele Lösungen. Wir können beispielsweise λ_3 als Parameter verwenden. Manchmal schreibt man einen anderen Buchstaben dafür, also $\lambda_3 = t$. Dann ist $\lambda_2 = -t$ (in Gleichung 2) und aus Gleichung (I) bekommen wir $\lambda_1 = 2t + 3t = 5t$.

Also erhalten wir nicht zwingend $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wir können beispielsweise $t = 1$ wählen, dann ist $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda = 5$. Somit erhalten wir

$$\vec{0} = 5\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Also sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ nicht linear unabhängig und daher linear abhängig.

25.3. Lineare Hülle

Aufbauend auf dem Begriff der Linearkombination können wir den Begriff der Linearen Hülle definieren:

Definition 25.3

Sind $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so verstehen wir unter der Linearen Hülle von $M := \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ die Menge aller Linearkombinationen, die aus diesen Vektoren gemacht werden können, und schreiben $\mathcal{L}(M)$ dafür:

$$\mathcal{L}(M) := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n | \vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j \text{ , mit } \alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Bsp. 25.5

Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben, $M := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Dann ist

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ , mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Anschaulich gesehen ist $\mathcal{L}(M)$ die x-y-Ebene im Raum.

Wer das Kapitel über Vektoren aufmerksam gelesen hat, stellt den engen Zusammenhang zwischen der Definition eines linearen Unterraums und der Definition der Linearen Hülle fest.

25.4. Lineare Abbildungen

Im Prinzip sind viele verschiedenartige Funktionen bzw. Abbildungen von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W möglich. Da wir aber in Vektorräumen rechnen können, sind wir besonders an Abbildungen interessiert, die die algebraische Struktur (Rechenregeln etc.) auch ausnützen. Das geschieht bei der Definition des Begriffs »Lineare Abbildung«.

Definition 25.4

Seien V und W zwei (reelle) Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \vec{v} \in V : \ f(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{v}$$
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Man beachte: Die Rechenvorgänge auf der linken Seite der Gleichung finden jeweils im Vektorraum V statt, die Rechenvorgänge auf der rechten Seite im Vektorraum W.

Man vergleiche diese Definition mit Abschnitt 16.1.1 Affine Funktionen ▶133.

Bsp. 25.6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} .$$

Dann ist f linear, denn:

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = f(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) f(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_3 \\ 4 \cdot (\lambda \cdot x_3) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(\vec{x})$$

Die zweite Eigenschaft rechnet man analog nach.

Warum sind lineare Funktionen so interessant? Weil sich das Bild einer Linearkombination vergleichsweise einfach berechnen kann, denn

$$f(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(\vec{v}_j)$$

Es reicht also die Bilder von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ zu kennen, um die Bilder sämtlicher Linearkombinationen dieser Vektoren berechnen zu können. Dieses Konzept (zusammen mit dem Begriff der Basis bzw. dem Erzeugendensystem) ist sehr fruchtbar. Insbesondere werden so relativ leicht Eigenschaften von Teilmengen vom Vektorraum V auf Teilmengen vom Vektorraum W übertragen. Ein Schlagwort dafür haben wir schon kennengelernt, nämlich linearer Unterraum▶210.

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, so wird sich in der Linearen Algebra zeigen, dass alle linearen Abbildungen f eine Darstellung der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

haben, wodurch wir f durch eine sogenannte Matrix beschreiben können:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: A\vec{x}$$

Das Objekt A heißt dann Matrix (der Abbildung f). Wir sagen: Die Matrix A wird auf den Spaltenvektor $\vec{x}$ angewandt bzw. der Vektor $\vec{x}$ wird mit der Matrix A von links multipliziert.

Der Eintrag a_{ij} der Matrix A ist der Eintrag in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte (Merke: Zeile vor Spalte). i heißt Zeilenindex, j Spaltenindex. Die reelle Matrix A hat dann m Zeilen und n Spalten, wir schreiben dann $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Gängige Kurzschreibweise sind noch

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;\, j=1,\dots,n} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} .$$

Der Ausdruck $f(x)$ lässt sich auch als Linearkombination beschreiben, nämlich durch

$$f(\vec{x}) = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{A_1} + \ldots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{A_n} .$$

Wir stellen also fest: Die Matrix A hat die Vektoren $A_1, \dots, A_n$ als Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_1 & \cdots & A_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Fragen wie »Ist die Hintereinanderausführung von Linearen Abbildungen wieder linear? Und wenn ja, wie sieht dann die Matrix aus, die diese Abbildung beschreibt?« werden ebenfalls in der Linearen Algebra untersucht. Es bleibt noch viel zu erkunden ...

Zusammenfassung

Wir sagen, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ schreiben, wenn es $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Gleichung

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k$$

erfüllt ist. Anschaulich gesehen lässt sich $\vec{x}$ durch Addieren und Skalieren der Vektoren $\vec{v}_j$ erreichen.

Wir sagen, die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sind linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur dadurch als Linearkombination aus ihnen darstellen lässt, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ ist. Sind Vektoren nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig.

Sind V und W zwei Vektorräume, so heißt eine Funktion $f : V \to W$ linear, wenn sie folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \vec{v} \in V: \ f(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{v}$$
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Lineare Abbildungen (auf endlichdimensionalen Vektorräumen) lassen sich durch Matrizen beschreiben bzw. darstellen:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

A heißt dann Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Wir schreiben auch noch

$$A := (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

dafür. i heißt Zeilenindex, j Spaltenindex.

Teil IX.

Anhang

A. Formelsammlung

f	f'	$F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{n}x^{n+1}, n \in \mathbb{R} \setminus -1$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln(x)$ bzw. $\ln\lvert x\rvert$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x$
$\frac{1}{x+a}$	$-\frac{1}{(x+a)^2}$	$\ln\lvert x+a\rvert$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	

B. Griechisches Alphabet

Griechische Buchstaben werden in der Mathematik gerne verwenden. Einige der Zeichen haben haben durch ihren gleichbleibenden Einsatz eine implizite Bedeutung erhalten. So kennen wir Epsilon ϵ aus den Grenzwert-Definitionen, wo es eine beliebig kleine, aber positive (reelle) Zahl ist. In Klammer jeweils das mathematische Teilgebiet ...

Groß	klein		Name	besondere Verwendung
	α		Alpha	Meist eine Winkelbezeichnung, oder ein Skalar (Linear Algebra)
	β		Beta	Meist eine Winkelbezeichnung
Γ	γ		Gamma	γ: Winkel; Γ-Funktion
Δ	δ		Delta	Δ für »Differenz« (Differenzenquotien); δ: Winkel, sehr kleine positive reelle Zahl (Analysis)
	ϵ	ε	Epsilon	sehr kleine, positive reelle Zahl ($\rightarrow$ Grenzwerte, ...)
	ζ		Zeta	Riemann'sche ζ-Funktion,
	η		Eta	–
Θ	θ	ϑ	Theta	Θ: Winkel in Polarkoordinaten
	ι		Iota	–
	κ		Kappa	Krümmung
Λ	λ		Lambda	λ: Skalar (Zahl), z. B. als Eigenwert (Lineare Algebra)
	μ		My »Mü«	wie λ; Erwartungswert (Statistik)
	ν		Ny »Nü«	–
Ξ	ξ		Xi	–
Π	π	ϖ	Pi	Π: Produktzeichen, π: Kreiszahl
	ρ	ϱ	Rho	–
Σ	σ	ς	Sigma	Σ: Summenzeichen, σ: Standardabweichung (Statistik)
	τ		Tau	–
Υ	υ		Ypsilon	–
Φ	ϕ	φ	Phi »Fi«	Φ: Zahl des goldenen Schnittes; lineare Funktion (Lineare Algebra), φ Winkel in Polarkoordinaten;
	χ		Chi »Chi«	χ-Quadrat-Verteilung (Statistik), charakteristisches Polynom (Lineare Algebra)
Ψ	ψ		Psi	Ψ: oft eine lineare Funktion (Lineare Algebra)
Ω	ω		Omega	Ω: Ergebnisraum (Wahrscheinlichkeit)