Übungszettel 3 — bis 22.09.2017

Um dich auf die mathematische Schreibweise einzustellen, werden die Übungsaufgaben auch so formuliert sein, wie du sie in deinem Studium gestellt bekommen könntest. Lass dich nicht davon abschrecken wenn du dir am Anfang schwer tust, sie zu verstehen!

Beispiel 1.1
Entscheide, ob die folgenden Aussagen, Aussagen im mathematischen Sinne sind. Wenn ja, gib eine Begründung und die Negation an. Wenn nein, begründe deine Entscheidung.

Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Aussagen. Entscheide für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ob $\mathcal{A}_i \in \mathbb{A}$ gilt. Bestimme, falls möglich $\neg\mathcal{A}_i$.

$\mathcal{A}_1 =$ „Dienstag ist eine Monat."
$\mathcal{A}_2 =$ „Mathematik ist sehr kompliziert."
$\mathcal{A}_3 =$ „Mindestens 5 Stunden in diesen Übungszettel zu investieren liefert mir eine komplette Lösung."
$\mathcal{A}_4 =$ „Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl."

Beispiel 1.2
Untersuche die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitswert. Formuliere auch deren Negation.

i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : (m \text{ist ungerade}) \wedge (m > n)$

ii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq x) : x^2 < y^2$

iii) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exists z \in R) : x < z < y$

iv) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : (m \text{ist ungerade}) \wedge (m > n)$

v) *Zusatz:* $(\exists! x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq x) : x^2 < y^2$

Beispiel 1.3
Überlege dir die Aussage von (SR2) und (SR4) Aus Satz 4.8 aus dem Skript in nachvollziehbaren Worten und beweise die Gültigkeit der Implikation.

Beispiel 1.4
Verwende die Äquivalenz von $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ um die folgenden Aussagen zu beweisen.

i) $\forall a \in \mathbb{Z} : \ a^2 \text{ ist gerade } \Rightarrow a \text{ ist gerade}$

ii) Wenn die letzte Ziffer einer natürlichen Zahl 2,3,7 oder 8 ist, dann ist die Zahl keine Quadratzahl.

iii) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}) \Rightarrow (\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab})$

iv) $\forall s, t \in \mathbb{Z} : (\frac{s}{t} \notin \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z} : tk \neq s)$

Beispiel 1.5
Schreibe jede dieser Mengen auf mindestens drei verschiedene Arten und stelle sie in einem Venn-Diagramm oder auf einer Zahlengerade dar.

i) Die Menge aller Quadratzahlen.

ii) Die Menge aller ganzen Zahlen zwischen (also echt zwischen) -3 und 3.

iii) Die Menge aller ungeraden, natürlichen Zahlen kleiner 8.

iv) Die Menge aller reellen Zahlen, die mit -2 multipliziert, betragsmäßg echt kleiner 4 sind.