Lösungen ÜZ 3

3.1

A_1 ... ist eine Aussage (eindeutiger Wahrheitswert)

$\neg A_1$: Dienstag ist kein Monat

A_2 & A_3 sind subjektive Aussagen - kein eindeutiger Wahrheitswert

A_4 ist eine Aussage $\neg A_4$: Es gibt eine natürliche Zahl, die keine ganze

3.2

i) Behauptung: Die Aussage ist wahr.

Bew: Sei n eine ~~natü~~ beliebige natürliche Zahl.

Falls n gerade ist, wähle $m := n+1$.

Falls n ungerade ist, wähle $m := n+2$.

In beiden Fällen ist m ungerade und größer als n. □

ii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq x): x^2 < y^2$

Behauptung: Die Aussage ist wahr

Beweis: Wähle $x = 0$.

Für alle $y \neq 0$, ist $y^2 \neq 0$ und $y^2 \geq 0$.

Somit gilt $y^2 > 0 = x^2$, also $y^2 > x^2$ □

iii) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R}): x < z < y$

Behauptung: Die Aussage ist falsch

Beweis: Wähle $x = 1$, $y = 1$

Somit muss für z gelten $(z < 1) \wedge (z > 1)$.

Ist eine der Ungleichungen erfüllt, ist die andere falsch □

iv) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})$: ($m$ ist ungerade) $\wedge (m > n)$

Beh: Die Aussage ist falsch.

Bew: Wähle ~~$n=1$~~, ~~$m=2$~~ ~~so~~ $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Für $m = n$ ist $(m > n)$ nicht erfüllt.

v) Die Existenz wurde bereits in ii) gezeigt.

Eindeutigkeit: Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ beliebig.

Für $y := \frac{x}{2}$ gilt $y \neq x$, da $x \neq 0$.

Da $x \neq 0$ gilt außerdem $\frac{x^2}{4} < x^2$

Somit gilt $y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} < x^2$, also $y^2 < x^2$.

Also ist die Aussage für $x \neq 0$ falsch und die Eindeutigkeit gilt □

Negationen:

i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})$: ($m$ ist gerade) $\vee (m \leq n)$

ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\nexists y \in \mathbb{R}, y \neq x): x^2 \geq y^2$

iii) $(\exists x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}): (z \leq x) \vee (z \geq y)$

iv) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})$: ($m$ ist ung.) $\vee (m \leq n)$

v) $[(\exists x, z \in \mathbb{R}, x \neq z)(\forall y \in \mathbb{R}, y \notin \{x, z\}): (x^2 < y^2) \wedge (z^2 < y^2)] \vee [(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}, y \neq$ $x^2 \geq y^2]$

3.3

(SR2) Folgt aus p immer q und gilt q nicht, so kann p nicht gelten

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \land (p \Rightarrow q)$	$\neg p$	(SR2)
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

(SR4) Gilt entweder q oder p und gilt p nicht, so muss q gelten

~~Wahrheitstafel~~ ~~trivial~~

p	q	$\neg p$	$q \lor p$	$\neg p \land (q \lor p)$	(SR4)
w	w	f	w	f	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	f	w

3.4 i) Es gilt: (a^2 ist gerade $\Rightarrow$ a ist gerade) $\Leftrightarrow$ (a ist ung. $\Rightarrow$ a^2 ist ung.)

Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig.

a ist ungerade $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 =$

$= 2(2k^2+2k)+1$ und $(2k^2+2k) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2$ ist ungerade □

ii) werde zeigen: (a ist Quadratzahl) $\Rightarrow$ (die letzte Ziffer $\in \{1,4,5,6,9,0\}$)

Für die letzte Ziffer eines Produkts sind die letzten Ziffern der Faktoren wichtig. Da a Quadratzahl, haben beide Faktoren dieselbe Ziffer.

$M := \{1,4,5,6,9,0\}$.

$0^2 = 0 \in M$ $\quad 4^2 = 16$ und $6 \in M$ $\quad 8^2 = 64$ und $4 \in M$

$1^2 = 1 \in M$ $\quad 5^2 = 25$ und $5 \in M$ $\quad 9^2 = 81$ und $1 \in M$.

$2^2 = 4 \in M$ $\quad 6^2 = 36$ und $6 \in M$

$3^2 = 9 \in M$ $\quad 7^2 = 49$ und $9 \in M$ □

iii) werde zeigen: $\forall a,b \in \mathbb{R}: \left(\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}\right) \Rightarrow [(a \notin \mathbb{R}_{\geq 0}) \lor (b \notin \mathbb{R}_{\geq 0})]$

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ beliebig

$a+b < 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b < 0$ (*)

$\sqrt{ab}$ ist definiert, wenn ~~a und~~ $(a<0) \land (b<0)$, dann ist die Implikation richtig

oder $(a>0) \land (b>0)$, dann (*) $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$.

Da das Quadrat jeder reellen Zahl aber ≥ 0 ist, kann dieser Fall nicht vorkommen □

iv) werde zeigen: $\forall s,t \in \mathbb{Z}: (\exists k \in \mathbb{Z}: tk = s) \Rightarrow \left(\frac{s}{t} \in \mathbb{Z}\right)$

Seien $s,t \in \mathbb{Z}$ beliebig und $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $t \cdot k = s$ gilt

$\Rightarrow \frac{s}{t} = \frac{t \cdot k}{t} = k \in \mathbb{Z}$ □

<u>3.5</u> $M_i = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\} = \{k^2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, y \in \mathbb{Z} : y^2 = x\}$

$M_{ii} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq k \leq 2\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k| < 3\}$

$M_{iii} = \{1, 3, 5, 7\} = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \text{ ist ungerade}) \wedge n < 8\} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge n \leq 3\}$

$M_{iv} = \{x \in \mathbb{R} \mid |-2x| < 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$

Lösungen ÜZ 4.

4.1 Punkte 1-3 mit Wahrheitstafeln ✓

- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  Bew. mit Wahrheitstafel ... ✓

Zusatz:

$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Bew. mit Wahrheitstafel ... ✓

4.2 "$\subset$"
- $A \subset A$ gilt, da $\forall a \in A : a \in A$ $\Rightarrow$ reflexiv
- $\{1\} \subset \{1,2\}$ aber $\{1,2\} \not\subset \{1\}$ $\Rightarrow$ nicht symmetrisch
- Seien A, B, C beliebig mit $A \subset B$ und $B \subset C$

  ist $a \in A$ beliebig $\overset{A \subset B}{\Rightarrow} a \in B \overset{B \subset C}{\Rightarrow} a \in C$ $\Rightarrow$ transitiv

"$\subsetneq$"
- Für A gilt $A = A$ und somit nicht $A \subsetneq A$ $\Rightarrow$ nicht reflexiv
- $\{1\} \subsetneq \{1,2\}$ aber $\{1,2\} \not\subsetneq \{1\}$ $\Rightarrow$ nicht symmetrisch
- Seien A, B, C beliebig mit $A \subsetneq B$ und $B \subsetneq C$.

  Sei $a \in A$ beliebig $\overset{A \subsetneq B}{\Rightarrow} a \in B \overset{B \subsetneq C}{\Rightarrow} a \in C$.

  Weiters gilt: $B \subsetneq C \Rightarrow (\exists c \in C)$ mit $c \notin B$.

  $c \notin B \overset{A \subsetneq B}{\Rightarrow} c \notin B$

  $\Rightarrow A \subset C$ und $\exists\, c \in C$ mit $c \notin A \Rightarrow A \subsetneq C$ $\Rightarrow$ transitiv.

"$=$"
- Es gilt $A = A$ $\Rightarrow$ reflexiv.
- Gilt $A = B$ $\Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow B \subset A \wedge A \subset B \Rightarrow B = A$

  $\Rightarrow$ symmetrisch.
- Gilt $A = B = C$ so gilt $A \subset C$ und $C \subset A$ wegen der Definition und der Transitivität von "$\subset$" $\Rightarrow$ transitiv.

"disjunkt"
- $\{1\}$ und $\{1\}$ haben gemeinsam 1 $\Rightarrow$ nicht reflexiv
- Sei A disjunkt $B \overset{\text{Def.}}{\Rightarrow} \forall a \in A : a \notin B \Rightarrow \forall b \in B : b \notin A$

  (sonst wäre ein solches $b \in A$ und $b \in B$) $\Rightarrow B$ disjunkt A

  $\Rightarrow$ symmetrisch
- $\{1,2\}$ disjunkt zu $\{3\}$ und $\{3\}$ disjunkt zu $\{1,4\}$

  aber $\{1,2\}$ nicht disjunkt $\{1,4\}$ $\Rightarrow$ nicht transitiv.

4.3 "$\cap$" zz $A \cap B = B \cap A$, gilt, da $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\}$

zz: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ gilt, da $\{x \mid x \in (A \cap B) \wedge x \in C\} =$
$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in (B \cap C)\} = A \cap (B \cap C)$

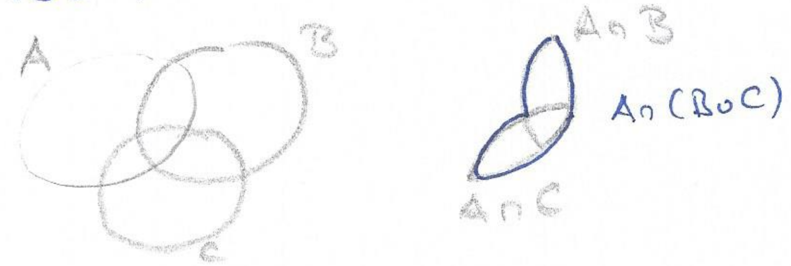
"$\cup$" analog zu "$\cap$" ✓

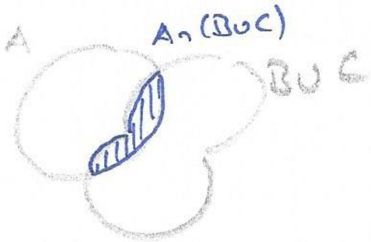
"$\setminus$" $\{1,2\} \setminus \{1\} = \{2\}$ aber ~~{2}~~ $\{1\} \setminus \{1,2\} = \emptyset$ nicht komm.

$(\{1,2,3\} \setminus \{2\}) \setminus \{1,3\} = \{1,3\} \setminus \{1,3\} = \emptyset$ aber

$\{1,2,3\} \setminus (\{2\} \setminus \{1,3\}) = \{1,2,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$ nicht assoziativ.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$





Zusatz:

1. $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

sei $x \in A \cap (B \cup C) \overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in (B \cup C) \overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\overset{4.1}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$
$\overset{def}{\Rightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \overset{Def}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \vee$
$(x \in A \wedge x \in C) \overset{4.1}{\Rightarrow} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \cup C$
$\overset{Def}{\Rightarrow} x \in A \cap (B \cup C)$

4.4 $|A| = 2 \quad |B| = 3$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \qquad P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, B\}$

$\# P(M) = 2^{|M|}$

4.5 i) Die Gleichung $ax = b \quad a \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \frac{b}{a}$ ist die eindeutige Lösung.

ii)

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$

gilt $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} > 0$ ist $\#\mathbb{L} = 2$

gilt $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$ ist $\#\mathbb{L} = 1$

gilt $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0$ ist $\#\mathbb{L} = 0$

iii) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ für $a \neq 0$

$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow |2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad \square$

4.6 i) $2x - 6 + 4 = 3 - 3x$

$\Leftrightarrow 5x = 5$ somit linear mit $a = 5 \quad b = 5$

$\mathbb{L} = \{1\}$

ii) $4x^2 - 2x - 12 = 4x - 4 - 4x^2 + 12x - 9$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 18x + 1 = 0$ somit quads. mit $a = 8,\ b = -18,\ c = 1$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{81}{16}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{9}{4} = \pm\frac{\sqrt{73}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{8} \quad \mathbb{L} = \left\{\frac{9 + \sqrt{73}}{8}, \frac{9 - \sqrt{73}}{8}\right\}$

iii) $4x^2 + 9x = 5x + 8$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ somit quads.

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$

$\mathbb{L} = \{2, -1\}$

iv) $x^2 - 2x - 8 = 0$ somit quads.

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 8 = 1$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 3$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm 3$

$\mathbb{L} = \{-2, 4\}$