Lösungen ÜZ 5

5.1

"$\Rightarrow$" (Beweis der Hinrichtung) zz: $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, $a \neq 0$

Sei $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ und x_1, x_2 NST.

$\Rightarrow$ x_1, x_2 lösen $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

setze $p = \frac{b}{a}$ $q = \frac{c}{a}$: $a(x^2 + px + q) = 0$

Lt. kleiner Lösungsformel gilt $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

nun gilt: $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 + px + q) =$

$= a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right] = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)\right] =$

$\overset{\text{binom.}}{=} a\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$

$= a\left(x - \underbrace{\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)}_{x_2}\right)\left(x - \underbrace{\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)}_{x_1}\right) =$

$= a(x - x_1)(x - x_2)$ und $a \neq 0$ ✓

"$\Leftarrow$" (Beweis der Rückrichtung) zz: $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ und x_1, x_2 NST

Sei $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $a \neq 0$

i) zeige x_1, x_2 sind Nullstellen

$p(x_1) = a(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = a \cdot 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0$

$p(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = a \cdot (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$ ✓

ii) zeige $p(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$.

$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_2 x_1) =$

$= a x^2 + a(-x_1 - x_2)x + a x_1 x_2$

setze $b = a(-x_1 - x_2)$ und $c = a x_1 x_2$.

$p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$.

□

5.2

i) Def-Menge: $3x^2 - 27x + 60 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-4) = 0$

$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{80}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{4, 5\}$

Zerlege Zähler: $x^3 + 7x^2 - 60x = x(x^2 + 7x - 60) = x(x-5)(x+12)$

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{240}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{17}{2} = \begin{cases} 5 \\ -12 \end{cases}$

für $x \in D$ gilt:

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 60x}{3x^2 - 27x + 60} = \frac{x(x-5)(x+12)}{(x-4)(x-5)} = \frac{x(x+12)}{(x-4)}$$

ii) Zerleg Zähler: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad x = 1$ ist Lösung

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x-1) = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \quad -2x^2 - 6x \\ \quad \underline{-2x^2 + 2x} \\ \qquad -8x + 8 \\ \qquad \underline{-8x + 8} \\ \qquad \quad 0R \end{array}$$

Zerlege Nenner: $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 7x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$ $\quad x = -2$ ist Lösung

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 5x^2 - 14x + 8) : (x+2) = 2x^2 - 9x + 4 = (2x-1)(x-4) \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ \quad -9x^2 - 14x \\ \quad \underline{-9x^2 - 18x} \\ \qquad 4x + 8 \end{array}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 4\}$

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 7x + 4} = \frac{(x-1)(x-4)(x+2)}{(x+2)(2x-1)(x-4)} = \frac{x-1}{2x-1}$$

iii) & iv) analog

5.3

i) $x^8+4x^4=-6 \qquad u=x^4$

$u^2+4u+6=0$

$u_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-6}$ hat keine Lsg in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \mathbb{L}=\emptyset$

ii) $D=\mathbb{R}\setminus\{-7,+7\} \qquad HN=(x+7)(x-7)$

Für $x\in D$:

$$\frac{(2x+1)(x-7)}{HN}=\frac{(1-3x)(x+7)}{HN}+\frac{7x+21}{HN}$$

$\Leftrightarrow 2x^2-13x-7=-3x^2-20x+7+7x+21$

$\Leftrightarrow 5x^2-35=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7} \qquad \mathbb{L}=\{-\sqrt{7},\sqrt{7})$

iii) $x^4+x^3+x^2+3x-6=0 \qquad x=1$ ist Lsg

$(x^4+x^3+x^2+3x-6)(x-1)=x^3+2x^2+3x+6$

x^4-x^3

$2x^3+x^2$

$2x^3-2x^2$

$3x^2+3x$

$3x^2-3x$

$6x-6$

0R

$x^3+2x^2+3x+6=0 \qquad x=-2$ ist Lsg

$(x^3+2x^2+3x+6):(x+2)=x^2+3$

x^3+2x^2

$3x+6$

0R

$N_1: (x-1)(x+2)(x^2+3) \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$

$N_2: (x-1)(x+2)$

$N_3: (x^2+3)$

$HN=N_1$

Für $x\in D$ ist die Glg.

$\Leftrightarrow 2x-(3x-1)(x^2+3) = (2x-5)(x-1)(x+2)=(2x-5)(x^2+x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-(3x^3+9x-x^2-3) = 2x^3+2x^2-4x-5x^2-5x+10=2x^3-3x^2-9x+10$

$\Leftrightarrow -5x^3+4x^2+2x-7=0 \qquad x=-1$ ist Lsg

$(-5x^3+4x^2+2x-7):(x+1)=-5x^2+9x-7$

$-5x^3-5x^2$

$9x^2+2x$

$9x^2+9x$

$-7x-7$

$x_{1,2}=\frac{9}{10}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{81}{100}-\frac{7}{5}}_{<0}}$

$\Rightarrow$ keine weiteren Lösungen

$\mathbb{L}=\{-1\}$

iv) $\frac{1}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}+\frac{3x^2-4}{(x^2-3)^2}=\frac{2}{(x-\sqrt{3})^2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\} \qquad HN=(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2$

für $x\in D$

$\Leftrightarrow x^2-3+3x^2-4=2(x^2+2\sqrt{3}x+3)$

$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{3}x-13=0$

$x_{1,2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{\frac{29}{4}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{29}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{29}}{2}\end{cases} \qquad \mathbb{L}=\left\{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{29}}{2}\right\}$

5.4

i) zz: $\forall a,b \in \mathbb{R} : |a+b| \leq |a| + |b|$

F1: $a \geq 0,\ b \geq 0 \quad \Rightarrow a+b \geq 0$

$a+b \leq a+b$ ✓

F2: $a < 0,\ b < 0 \quad \Rightarrow a+b < 0$

$-a-b \leq -a-b$ ✓

F3: $a \geq 0 \quad b < 0$

F3a $\quad a+b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -b$

$a+b \leq a-b$

$\Leftrightarrow b \leq -b$

$\Leftrightarrow 2b \leq 0$, stimmt nach Fallvorraussetzung

F3b $\quad a+b < 0 \Leftrightarrow a < -b$

$-a-b \leq a-b$

$\Leftrightarrow -2a \leq 0$

$\Leftrightarrow a \geq 0$, stimmt nach Vorraussetzung

F4: $a < 0 \quad b \geq 0$

analog zu F3 $\square$

ii) Druckfehler: $\Leftrightarrow$ gehört durch $\Rightarrow$ ersetzt.

zz: $(p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : (p = 4k+1) \vee (p = 4k+3))$

werde zeigen: $(\forall k \in \mathbb{N} : (p = 4k+0) \vee (p = 4k+2)) \Rightarrow p \notin \mathbb{P} \setminus \{2\}$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig fix

F1: $p = 4k \Rightarrow p = 2(2k) \Rightarrow p$ ist gerade

F2: $p = 4k+2 \Rightarrow p = 2(2k+1) \Rightarrow p$ ist gerade

Da p gerade ist, kann p keine Primzahl ungleich 2 sein.

5.5

i) $|2u-1||u+2| = |u-\frac{4}{3}| + 3 \quad (*)$

$F_1: u \in (-\infty, -2)$

$(*) \Leftrightarrow [-(2u-1)][-(u+2)] = -(u-\frac{4}{3})+3$

$\Leftrightarrow 2u^2 + 3u - 2 = -u + \frac{13}{3}$

$\Leftrightarrow u^2 + 2u - \frac{19}{6} = 0$

$\Leftrightarrow {}_1u_2 = -1 \pm \sqrt{\frac{25}{6}} = -1 \pm \frac{5}{\sqrt{6}} \qquad \mathbb{L}_1 = \{-1-\frac{5}{\sqrt{6}}\}$

$F_2: u \in [-2, \frac{1}{2})$

$(*) \Leftrightarrow [-(2u-1)](u+2) = -(u-\frac{4}{3})+3$

$\Leftrightarrow -2u^2 - 3u + 2 = -u + \frac{13}{3}$

$\Leftrightarrow u^2 + u + \frac{7}{6} = 0$

$\Leftrightarrow {}_1u_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{7}{6}} \qquad \mathbb{L}_2 = \emptyset$

$F_3: u \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$

$(*) \Leftrightarrow 2u^2 + 3u - 2 = -u + \frac{13}{3}$

$\overset{F_1}{\Leftrightarrow} {}_1u_2 = -1 \pm \frac{5}{\sqrt{6}}$ und $\frac{5}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} > \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{-1+\frac{5}{\sqrt{6}}\}$

$F_4: u \in [\frac{4}{3}, \infty)$

$(*) \Leftrightarrow 2u^2 + 3u - 2 = u + \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow u^2 + u - \frac{11}{6} = 0$

$\Leftrightarrow {}_1u_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{11}{6}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{12}}$ und $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{12}} < \frac{4}{3} \Rightarrow \mathbb{L}_4 = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1-\frac{5}{\sqrt{6}}, -1+\frac{5}{\sqrt{6}}\}$

ii) $\sqrt{3x-21} = x-7 \qquad D = [7, \infty)$

$\Rightarrow 3x - 21 = x^2 - 14x + 49$

$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 70 = 0$

$\Leftrightarrow {}_1x_2 = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{280}{4}} = \frac{17}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 10 \\ 7 \end{cases}$

Rückeinsetzen $\Rightarrow \mathbb{L} = \{7, 10\}$

iii) $D = [\frac{5}{9}, \infty)$

$\sqrt{9x-5} = 4 - \sqrt{3+x}$

$\Rightarrow 9x - 5 = 16 - 8\sqrt{3+x} + 3 + x$

$\Leftrightarrow 8x - 24 = -8\sqrt{3+x}$

$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{3+x}$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 3 + x$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0$

Rückeinsetzen: $\Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$

IV) $z^2-2z-1=0$ nach oben offene Parabel mit NST $1\pm\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \; {}_1z_2 = 1\pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ negativ zwischen den NST.

F_1: $z\in(-\infty,-3)$

$$z^2-2z-1=-z-3$$
$$\Leftrightarrow z^2-z+2=0$$
$$\Leftrightarrow {}_1z_2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-2} \qquad \mathbb{L}_1=\emptyset$$

F_2: $z\in[-3,\ 1-\sqrt{2}]$

$$z^2-2z+1=z+3$$
$$\Leftrightarrow z^2-3z-2=0$$
$$\Leftrightarrow {}_1z_2=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Frage: $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\overset{?}{\leq}1-\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq-\frac{2\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}\leq\sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow 1+4\sqrt{2}+8\leq 17$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\leq 8 \quad ✓$$
$$\Rightarrow \mathbb{L}_2=\left\{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$$

F_3: $z\in(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$

$$-z^2+2z-1=z+3$$
$$\Leftrightarrow z^2-z+4=0$$
$$\Leftrightarrow {}_1z_2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-4} \Rightarrow \mathbb{L}_3=\emptyset$$

F_4: $z\in[1+\sqrt{2},\infty)$

$$\Leftrightarrow z^2-2z+1=z+3 \overset{F_2}{\Leftrightarrow} {}_1z_2=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_4=\left\{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$\mathbb{L}=\left\{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$$

V) $\sqrt{x+\sqrt{x+16}}=2$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x+16}=4$$
$$\Rightarrow x+16=16-8x+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-9x=0$$
$$x(x-9)=0$$

rückeinsetzen: $\mathbb{L}=\{0\}$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+16}}\overset{?}{\geq}0$$
$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x+16}\overset{?}{\geq}0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+16}\geq -x$$
$$\Rightarrow x+16\geq x^2$$

→ unangenehm
→ ignoriere Def-Mng

5.6

i) $3x-1 < 2x-6-2+x$

$\Leftrightarrow -1 < -8 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

ii) $3x^2 + 9x - 30 - 2x^2 - 16x + 18 \geq -18$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x-1) \geq 0$

beide negativ oder beide positiv

$\mathbb{L} = (-\infty, 1] \cup [6, \infty)$

iii) $3x^2 - 18x + 36 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 > 0$

${}_1x_2 = 3 \pm \sqrt{9-12}$

$\Rightarrow$ keine NST in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R}$

iv) $|3x-1| + |x+2| \leq 3$

F_1: $x \in (-\infty, -2)$

$-3x+1-x-2 \leq 3$

$\Leftrightarrow -4x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \geq 1 \qquad \mathbb{L}_1 = \emptyset$

F_2: $x \in [-2, \frac{1}{3})$

$-3x+1+x+2 \leq 3$

$\Leftrightarrow -2x \leq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \qquad \mathbb{L}_2 = [0, \frac{1}{3})$

F_3: $x \in [\frac{1}{3}, \infty)$

$3x-1+x+2 \leq 3$

$\Leftrightarrow 4x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \qquad \mathbb{L}_3 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$\mathbb{L} = [0, \frac{1}{2}]$

v) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq \frac{-4}{x^2-1} \qquad HN: x^2-1$

$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{HN} - \frac{2(x-1)}{HN} \leq \frac{-4}{x^2-1} \quad (*)$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

F_1: $HN > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$(*) \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 1 \leq -4$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 5 \leq 0$

${}_1x_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 5}$

$\Rightarrow$ keine NST in $\mathbb{R}$

Funktion größer Null $\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

F_2: $HN < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

$(*) \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 1 \geq -4$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 5 \geq 0$ giel auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \mathbb{L}_1 = (-1, 1)$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1$