Lösungen Üz 2

1.1: zz: Jede durch 4 teilbare natürliche Zahl ist durch 2 teilbar.

Sei $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

Ann: n ist nicht durch 2 teilbar.

$\Rightarrow$ n ist ungerade $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$

Da gilt 4 teilt $n \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N} : n = 4\ell$

$\Rightarrow 4\ell = 2k+1 \Leftrightarrow 4\ell - 1 = 2k \Leftrightarrow k = 2\ell - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k \notin \mathbb{N}$ $\lightning$ zu $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Ann war falsch $\Rightarrow 2 \mid n$ $\square$

1.2, i) $\frac{a^2+7ab+4b^2}{3(a+2b)} - \frac{3ab}{3(a+2b)} = \frac{a^2+4ab+4b^2}{3(a+2b)} = \frac{(a+2b)^2}{3(a+b)} = \frac{a+2b}{3}$
für $a \neq 2b$.

ii) für $z \neq 0$, $y \neq \sqrt{-\frac{6}{5}z}$, $x \neq \frac{21}{6}y$ gilt:

$\frac{2x-7y}{5y^2+6z} \cdot \frac{5z(5y^2+6z)}{3(2x-7y)} = \frac{5}{3}z$.

iii) für $a \notin \{-1, b, -b\}$, $b \neq -1$ gilt:

$$\frac{\frac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)(b+1)}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)}$$

iv) $(4(x^2y^2))^3 - ((2xy)^3 - x^2)^2 = 4^3x^6y^6 - 2^6x^6y^6 - 2\cdot 2^3x^5y^3 + x^4 =$

$-2^4x^5y^3 + x^4 = x^4(-2^4xy^3+1)$

v) $\frac{a^2-4b^2}{a^3 - b\,4|a|\,|b|} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}} = (*)$ für $a \geq 0$; $b \neq \frac{1}{2}$

$(*) = \frac{(a-2b)(a+2b)}{a^3 \cdot a^{\frac{3}{2}} - 4a\cdot a^{\frac{3}{2}}\, b \cdot |b|} = \frac{(a-2b)(a+2b)}{a^{\frac{9}{2}} - 4a^{\frac{5}{2}}\, b\,|b|} =$

~~Druckfehler ⇒ der zweite Bruch hätte ... sein sollen.~~

$= \frac{(a-2b)(a+2b)}{a^{\frac{5}{2}}(a^2 - 4b|b|)} = (**)$

Für $b \geq 0$ gilt weiter

$(**) = \frac{(a-2b)(a+2b)}{a^{\frac{5}{2}}(a^2-4b^2)} = \frac{1}{\sqrt{a^5}}$