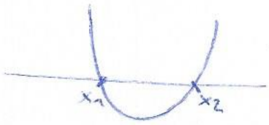
<u>6.1</u> Lösungen ÜZ 6

i) $2(x+2)(x-1) \geq x^2+3$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4 \geq x^2+3$

$\Leftrightarrow x^2+2x-7 \geq 0$

Es handelt sich um eine nach oben offene, quadr. Fkt:



$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{8}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, -1-\sqrt{8}] \cup [-1+\sqrt{8}, \infty)$

ii) $\frac{|2x+3|}{4} - |x^2-4| < |x-1|$

$x = -\frac{3}{2}$, $x=-2$, $x=2$, $x=1$

F1: $x \in (-\infty, -2]$:

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - x^2 + 4 < -x+1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{4} > 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{37}}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \left[\left(-\infty, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{37}}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{37}}{4}, \infty\right)\right] \cap (-\infty, -2]$
$= (-\infty, -2]$

F2: $x \in (-2, -\frac{3}{2})$

$\Leftrightarrow \frac{-(2x+3)}{4} + x^2 - 4 < -x+1$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{23}{4} < 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{23}{4}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{93}}{4}$

$\mathbb{L}_2 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{93}}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{93}}{4}\right) \cap \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$
$= \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

F3: $x \in [-\frac{3}{2}, 1)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{4} + x^2 - 4 < -x+1$

$\mathbb{L}_3 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{77}}{4}, -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{77}}{4}\right) \cap \left[-\frac{3}{2}, 1\right)$
$= \left[-\frac{3}{2}, 1\right)$

F4: $x \in [1, 2)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{4} + x^2 - 4 < x-1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{4} < 0$

$\overset{F1}{\Leftrightarrow} \mathbb{L}_4 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{37}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{37}}{4}\right) \cap [1, 2)$
$= \left[1, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{37}}{4}\right)$

F5: $[2, \infty)$

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{4} - x^2 + 4 < x-1$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{23}{4} > 0$

$\overset{F2}{\Leftrightarrow} \mathbb{L}_5 = \left[\left(-\infty, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{93}}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{93}}{4}, \infty\right)\right] \cap [2, \infty)$

$\mathbb{L}_5 = \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{93}}{4}, \infty\right)$

$\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{37}}{4}\right) \cup \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{93}}{4}, \infty\right)$

iii) HN: $(x+3)^2(x-3)$

$$\frac{(2x^2-2x-12)(x+3)}{HN} > \frac{(2x+6)(x-3)}{HN} - \frac{3x(x^2+6x+9)}{HN}$$

F1: $x < 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$: $HN < 0$

$\Leftrightarrow 2x^3+6x^2-2x^2-6x-12x-36 < 2x^2-6x+6x-18-3x^3-18x^2-27x$

$\Leftrightarrow 5x^3+\cancel{5x^2}20x^2+9x-18<0$ $\quad x=-3$ ist Lösung für $f(x)=0$

$(5x^3+20x^2+9x-18):(x+3) = 5x^2+5x-6$

$15x^2$

$5x^2+9x$

$15x$

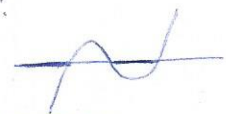
$-6x$

$0R$

$x^2+x-\frac{6}{5}=0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{6}{5}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{20}}$

Pol. Fkt 3. Grades mit führendem Koeff >0 :



$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{29}{20}}, -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{29}{20}}\right)$

F2: $x>3$:

$f(x) > 0$

$\mathbb{L}_2 = (3, \infty)$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$

6.2

i) $xRy :\Leftrightarrow |x-y| \leq 1$

ii) $xRy :\Leftrightarrow x = y$

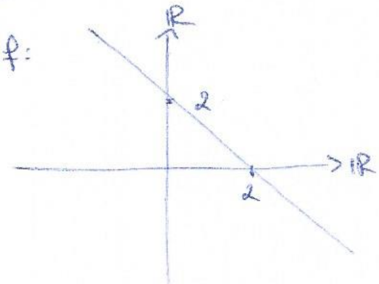
iii) $xRy :\Leftrightarrow x \leq y$

iv) $xRy :\Leftrightarrow (x \neq 3) \land (y \neq 3)$

v) $xRy :\Leftrightarrow x - y = 3$

6.3

f:



Beh: nicht Beschränkt

Sei M_u Beliebig

wähle $x = -M_u \Rightarrow f(x) = M_u + 2 > M_u$

Sei M_L beliebig

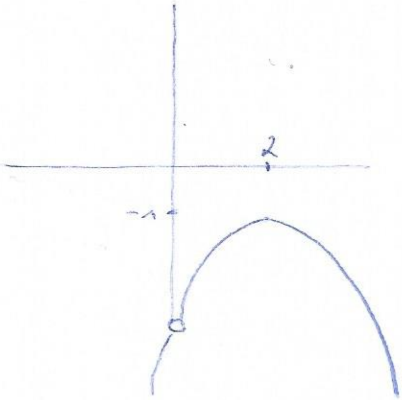
wähle $x = -M_L + 3 \Rightarrow f(x) = +M_L - 3 + 2 = +M_L - 1 < M_L$

Beh: ~~mo~~ streng mon. fallend

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Beliebig mit $x_1 < x_2$

$f(x_1) = -x_1 + 2 \overset{\text{da } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2}{>} -x_2 + 2 = f(x_2)$ ✓

g:



Beh: mit $M_u = 0$ nach oben beschränkt:

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$f(x) = -(x-2)^2 - 1 < \cancel{\ldots} \; 0$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-(x-2)^2}_{?a} < 1$

Quadrat: $a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -a^2 \leq 0 < 1$ ✓

Beh: auf $[2, \infty)$ str. mon fallend.

Sei $x_1, x_2 \in [2, \infty)$ $\quad x_1 < x_2$

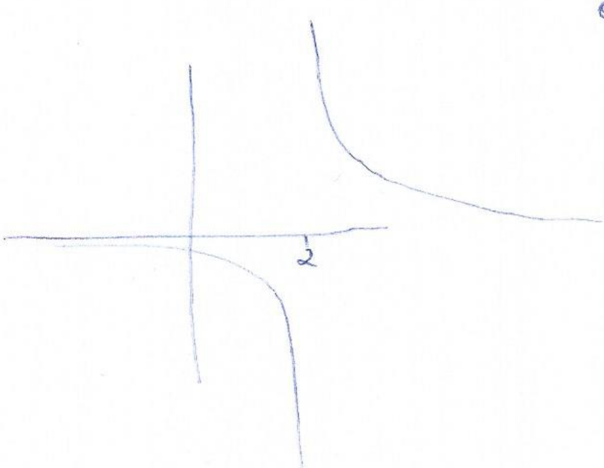
$f(x_1) = -(x_1-2)^2 - 1 \overset{(*)}{>} -(x_2-2)^2 - 1 = f(x_2)$

(*) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow$ weil beide Seiten nicht negativ sind $\Rightarrow$
$(x_1-2)^2 < (x_2-2)^2 \Leftrightarrow -(x_1-2)^2 > -(x_2-2)^2$

Beh: auf $(-\infty, 2] \setminus \{0\}$ str. mon. st.

analog

h:



Beh: nicht beschränkt.

Sei M_u beliebig

wähle $x = 2 + \frac{1}{2M_u} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2M_u} - 2} =$
$= 2M_u > M_u$

Sei $M_L < 0$ beliebig

wähle $x = 2 + \frac{1}{2M_L} \Rightarrow f(x) = +2M_L < M_L$

Sei $M_L \geq 0$ beliebig

wähle $x = 1$ ✓

Beh: h ist auf $(-\infty, 2)$ und auf $(2, \infty)$ str. mon fall.

Bew: Seien $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ $\quad x_1 < x_2$.

$f(x_1) = \frac{1}{x_1 - 2} \overset{(*)}{>} \frac{1}{x_2 - 2} = f(x_2)$

(*) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \cancel{\ldots} \; x_1 - 2 < x_2 - 2 \overset{(x_2-2)<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_2-2} \cdot (x_1 - 2) > 1$

$\overset{(x_1-2)<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_2-2} < \frac{1}{x_1-2}$

analog für $(2, \infty)$

6.4

Beh: f ist injektiv   zz: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow -x_1 + 2 = -x_2 + 2$$
$$\Leftrightarrow -x_1 = -x_2$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

Beh f ist surjektiv.   zz: $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): y = f(x)$

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig, wähle $x = -y + 2$. $f(x) = -(-y+2) + 2 = y$ $\square$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv.

Beh: g ist nicht injektiv

$$g(+1) = -(-1)^2 - 1 = -2 = -(3-2)^2 - 1 = g(3) \checkmark$$

Beh: g ist nicht surjektiv

$y = 0$: $-(x-2)^2 - 1 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 \overset{!}{=} -1$ geht nicht

$g: \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 2} \to \mathbb{R}_{\leq -1} \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ wäre bijektiv

Beh: h ist injektiv

$$h(x_1) = h(x_2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 2} = \frac{1}{x_2 - 2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \checkmark$$

Beh: h ist nicht surjektiv

wähle $y = 0$:

$\frac{1}{x-2} \overset{!}{=} 0$ geht nicht $\checkmark$

$h: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$ wäre bijektiv

6.5