UZ 1 – Lösungen

1.1

$$\frac{9}{4}-\left(\frac{7}{6}+\frac{4}{9}\right)=\frac{9}{4}-\left(\frac{21+8}{18}\right)=\frac{81}{36}-\frac{58}{36}=\frac{23}{36}$$

$$\frac{5}{12}+\left(-\frac{7}{18}-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{12}+\left(-\frac{19}{18}\right)=\frac{15}{36}-\frac{38}{36}=-\frac{23}{36}$$

$$\frac{9}{8}:\left(\frac{54}{6}:\frac{24}{36}\right)=\frac{9}{8}:\left(\frac{9}{1}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{9\cdot 3}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{6}+\frac{4}{18}\right)}{\frac{3}{5}-\frac{5}{5}+\frac{3}{10}}=\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{40}{18}\right)}{-\frac{1}{10}}=-\frac{15}{2}\cdot\frac{20}{9}=\cancel{-\frac{25}{6}}-\frac{50}{3}$$

1.2

$$\frac{x}{7}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\iff \cancel{5x\ldots}\ x=7\left(\frac{15}{20}+\frac{8}{20}\right)=\frac{7\cdot 23}{20}$$

Für $d\neq 0$ gilt: $\frac{1}{2}-\frac{5}{d}=\frac{2}{3}\iff -\frac{5}{d}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\overset{d\neq 0}{\iff}\frac{d}{5}=-6\iff d=-30$

Für $y\neq 0$ gilt: $\frac{2}{y}\cdot\frac{7}{8}=\frac{12}{18}\overset{y\neq 0}{\iff}\frac{7}{4}\cdot\frac{18}{12}=y\iff y=\frac{21}{8}$

Für $\omega\neq 0$ gilt: $\frac{2}{5}:\left(-\frac{\omega}{3}\right)-\frac{4}{5}=5\iff -\frac{6}{5\omega}=\frac{29}{5}\iff -\frac{5\omega}{6}=\frac{5}{29}$

$\iff \omega=-\frac{6}{29}$

1.3

Sei $s\in\mathbb{Z}$ beliebig.

$s=\frac{s}{1}$ mit $s\in\mathbb{Z}$, $1\in\mathbb{N}$. Somit ist $s=\frac{s}{1}$ aus $\mathbb{Q}$.

1.4 Seien $p, r\in\mathbb{Z}$ $q, s\in\mathbb{N}$

$\frac{p}{q}$ kürzen lässt sich darstellen als $\frac{\frac{p}{ggT(p,q)}}{\frac{q}{ggT(p,q)}}$.

Seien nun $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{r'}{s'}$ die teilerfremden Brüche

(also $p':=\frac{p}{ggT(p,q)}$ usw...)

$$\frac{p'}{q'}+\frac{r'}{s'}=\frac{p'\frac{kgV(q',s')}{q'}+r'\frac{kgV(q',s')}{s'}}{kgV(q',s')}.$$

1.5

(P1): $a^m\cdot a^n\overset{\text{Def 3.8}}{=}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m+n}=a^{m+n}$

(P2): $a^n b^n\overset{\text{Def 3.8}}{=}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{n}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b\cdot b}_{n}\overset{(\cdot)\text{ kommut.}}{=}$

$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-1}\cdot b\cdot a\cdot\underbrace{b\cdot\ldots\cdot b}_{n-1}=$ Führe kommutative Vertauschung oft genug durch $=$

$=\underbrace{ababab\ldots ab}_{n\text{ mal }(ab)}\overset{(\cdot)\text{ assoziativ}}{=}\underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n}\overset{\text{Def}}{=}(ab)^n$

□

1.5 Zusatz

Zeige für $m,n \in \mathbb{N}$, a beliebig, $a \neq 0$ gilt: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (*)

F1 $m > n$: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = a^{m-n}$ ✓

F2 $m = n$: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{1} = 1 = a^0 = a^{m-n}$ ✓

F3 $m < n$: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$ ✓

~~(P1) zz~~

Seien nun a,b beliebig, $m,n \in \mathbb{Z}$ beliebig

(P1) zz: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

F1 $m>0$, $n>0$ bereits in 1.5 gezeigt

F2 $m<0$, $n>0$, also $(-m)>0$, $(-m) \in \mathbb{N}$

$a^m \cdot a^n = \frac{a^n}{a^{-m}} \overset{(*)}{=} a^{n-(-m)} = a^{n+m} = a^{m+n}$ ✓

F3 $m>0$, $n<0$ analog zu F2

F4 $m=0$, $n \neq 0$. Dann gilt für $a \neq 0$

$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{n+0} = a^{n+m}$ ✓

F5 $n=0$, $m \neq 0$ analog F4.

(P2) zz: $a^n b^n = (ab)^n$

F1: $n>0$ in 1.5 gezeigt

F2: $n=0$ $a \neq 0$ $b \neq 0$

$a^n b^n = a^0 b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (ab)^0 = (ab)^n$ ✓

F3: $n<0$, also $(-n)>0$ $(-n) \in \mathbb{N}$

$a^n b^n = \frac{1}{a^{(-n)}} \frac{1}{b^{(-n)}} = \frac{1}{a^{(-n)} b^{(-n)}} \overset{1.5}{=} \frac{1}{(ab)^{(-n)}} = (ab)^{-(-n)} = (ab)^n$ ✓

□

Lösungen ÜZ 0

! Es gibt keinen eindeutigen Lösungsweg → dies ist nur mein
~~ESTYVY~~ Vorschlag !.

0.1

a) i) $1\frac{2}{7} - \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{8}{4}} : \frac{16}{27} = \frac{9}{7} + \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{18}_{2}} \cdot \frac{\cancel{27}^{3}}{\cancel{16}_{4}} = \frac{9}{7} + \frac{9}{8} = \frac{9(8+7)}{56} = \frac{135}{56} = 2\frac{23}{56}$

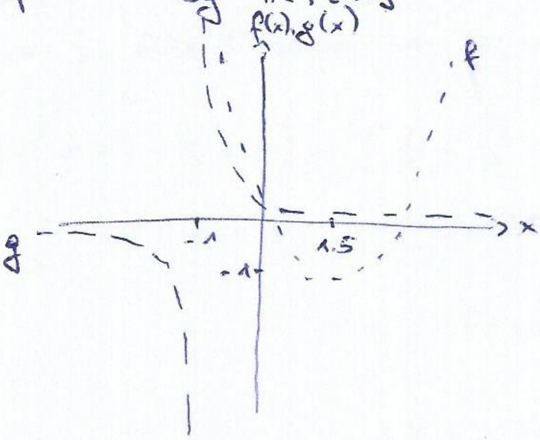
ii) $\frac{a^2+7ab+4b^2}{3a+6b} - \frac{ab}{a+2b} = \frac{a^2+4ab+4b^2}{3(a+2b)} = \frac{(a+2b)^2}{3(a+2b)} = \frac{1}{3}(a+2b)$

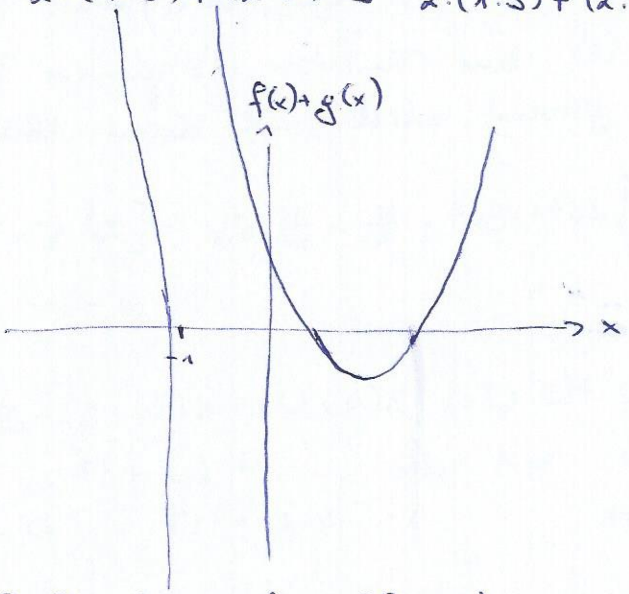
b) Die Reellen Zahlen sind eine Zusammenfassung aller endlichen und unendlicher Dezimalzahlen und ganzen Zahlen. Im Unterschied zu anderen Zahlenmengen sind unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen zugelassen.

c) Eine Rechenoperation $\circ$ heißt kommutativ, wenn für alle Elemente a, b, c gilt $a \circ b = b \circ a$ und assoziativ, wenn gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
Addition & Multipl. sind sowohl komm. als auch ass.
Subtraktion & Division weder noch. $2-1 \neq 1-2$ $\quad 2:1 \neq 1:2$
$2-(1-3) \neq (2-1)-3 \quad 2:(1:3) \neq (2:1):3$

0.2 a) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b)





c) Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedes Element einer Definitionsmenge eindeutig auf ein Element aus einer Wertemenge abbildet.
Auch in der Einschränkung $D = \{5\}$ ist die Eindeutigkeit der Abbildung nicht gegeben, da 5 auf ganz $\mathbb{R}$ abgebildet wird.

Zusatz: Bsp Mengenlehre

$A = [-2.5, 5)$

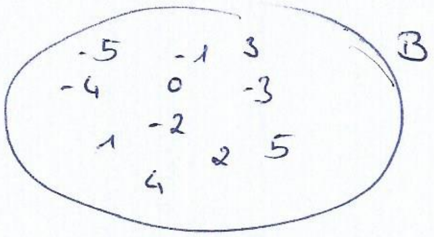
$B = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$

a) $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $B \setminus A = \{-5, -4, -3, 5\}$

c) 

oder 

d) 

e) $\cancel{\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}}$

$\{3k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \mid n\}$

f) $\{10^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$