Abschlusstest zum Brückenkurs Mathematik 2017

Für die Bearbeitung des Abschlusstests sind 90 Minuten Zeit. Es sind keine Hilfsmittel wie Unterlagen, Mitschriften, Formelhefte, Taschenrechner oder andere digitale Geräte erlaubt.
Jedes Beispiel gibt bis zu drei Punkte. Denke daran, dass der Rechenweg beurteilt wird, also jeder Schritt ausreichend begründet ist.
Bitte schreib auf jedes Blatt deiner Abgabe deinen Namen und die Matrikelnummer in die Kopfzeile.

Viel Erfolg.

Beispiel 1 (Mengenlehre)

(i) *(2P)* Entscheide welche der beiden Aussagen korrekt sind und finde ein Gegenbeispiel für die falsche (kein weiterer Beweis notwendig).

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

(ii) *(1P)* Stelle die Potenzmenge $\mathcal{P}(A \setminus \mathbb{Z})$ für die Menge $A = \{\frac{k}{2} | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \leq 6)\}$ auf.

Beispiel 2 (mathematische Schreibweise)
Berechne die folgenden Ausdrücke.

(i) *(1P)* a_4 der Folge $a_n = \frac{n}{2} a_{n-1}$ mit $a_0 = 1$

(ii) *(1P)* $\sum_{j=2}^{6} \binom{49}{j} - \sum_{i=3}^{8} \binom{49}{i-1}$

(iii) *(1P)* $\sum_{i=0}^{3} \left(\prod_{j=0}^{1+i} (-1)^j \frac{1}{2} \right)$

Beispiel 3 (mathematischer Beweis)
(3P) Zeige, dass eine natürliche Zahl genau dann durch drei teilbar ist, wenn sie als Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen darstellbar ist.

Beweise also folgende Aussage: (3 teilt $k \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow$ (k ist die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen)

Beispiel 4 (Gleichungen, Ungleichungen)
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

(i) *(1P)* $\frac{3}{4x^2 - 9} + \frac{2}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{2}{2x + 3}$

(ii) *(1P)* $z^4 - z^2 - 2 \geq 0$

(iii) *(1P)* $\frac{x^3 - 3x^2}{x^3 - 3x^2 - 6x^+8} \leq 1$

Beispiel 5 (Funktionen)
Sei f eine wie folgt definierte Funktion.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$$

(2P) Untersuche die Funktion auf Injektivität und Surjektivität.
(1P) Berechne den rechts- und linksseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$.

Beispiel 6 (Differentialrechnung, Integralrechnung)

(i) *(1P)* Bestimme die erste Ableitung von $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^2+1)^3}$

(ii) *(2P)* Berechne die folgenden Integrale

(a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2 + x}{3} - \frac{1}{x^2} dx$$

(b)

$$\int \frac{2}{2x-5} dx$$

Wichtige Definitionen

Definition 0.1 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)
Sei $f : D \to W$ eine Funktion.
f heißt **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
f heißt **surjektiv** $:\Leftrightarrow (\forall y \in W)(\exists x \in D) : f(x) = y$
f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Definition 0.2 (Grenzwert von Funktionen mit $\varepsilon - \delta$ Definition)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in D$.

Man sagt die Funktion f hat einen **rechtsseitigen Grenzwert** $L \in \mathbb{R}$ an der Stelle x_0, wenn sich zu jeder noch so kleinen, positiven Zahl ε eine ausreichend kleine Zahl δ finden lässt, sodass sich der Funktionswert aller Werte im Intervall $(x_0, x_0 + \delta)$ um weniger als ε von $f(x_0)$ unterscheidet.
Formell lässt sich das folgendermaßen ausdrücken:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0),\ \textit{sodass}\ (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Äquivalent lässt sich der **linksseitige Grenzwert** formulieren:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0),\ \textit{sodass}\ (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Man sagt, die Funktion f hat in x_0 den **Grenzwert** L, wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L :\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0),\ \textit{sodass}\ (\forall x \in D\ \textit{mit}\ 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - L| < \varepsilon$$