Skript zum Brückenkurs Mathematik 2017

Jakob Hauser

19. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ich freue mich sehr, dich im Studium der Mathematik willkommen zu heißen. Die Entscheidung für diese Ausbildung wurzelt hoffentlich in deiner bisherigen Begeisterung für diese Disziplin- entweder aus dem Mathematikunterricht, aus vertiefenden Kursen wie Mathematik-Olympiaden oder aus mathematischem Kontakt durch Eigeninitiative. Vielleicht war es aber auch die Entscheidung für ein zweites Unterrichtsfach, das in der Schule auch ganz ok war. Was auch immer der Grund dafür ist, dass du Mathematik, oder ein Studium mit großem mathematischen Anteil gewählt hast, du wirst sehr bald feststellen, dass Mathematik mit dem Rechnen in der Schule wenig bis gar nichts zu tun hat. Natürlich wird der Schulstoff einen Teil deines Studiums ausmachen, er füllt in etwa ein halbes Semester, aber die Umstellung zur Hochschulmathematik wird enorm sein. Und genau bei dieser Umstellung haben sehr viele Studienanfänger große Schwierigkeiten. Das einzige Ziel dieser Lehrveranstaltung ist es, dir bei dieser Umstellung so gut wie nur irgendwie möglich zu helfen. Deswegen wird der Fokus in dieser Vorlesungsübung nicht auf dem fachlichen Inhalt, sondern auf dem (hochschul-) mathematischen Zugang zu diesen Inhalten liegen. Im Groben werden die für den Anfang wichtigen Kapitel des Schulstoffs besprochen, welche hier und da auch ein wenig weiter ausgeführt werden. Am Ende der zwei Wochen sollst du auf jeden Fall auf dem von der Uni erwarteten Niveau sein (oder zumindest wissen, wo das liegt) und ein Gefühl dafür bekommen haben, wie Mathematik auf der Uni aussehen könnte. Deine wichtigste Aufgabe ist es, so viel wie möglich aus diesem Kurs mitzunehmen. Wie bereits erwähnt geht es darum dir zu helfen, also frage alle Fragen die sich dir aufdrängen, knüpfe deine ersten guten Kontakte mit MitstudentInnen und wecke und entdecke deine Freude an der Mathematik!

2 Beurteilungskriterien und allgemeine Informationen

2.1 Skript

Dieses Skript dient als Orientierungshilfe während der Lehrveranstaltung. Hier sind die wichtigsten Definitionen, Sätze, Inhalte und Beispiele der LV gesammelt, um einen Überblick über den Stoff zu haben. Das Skript ersetzt keinesfalls eine eigene Mitschrift, da Erklärungen und Lösungen zu den Beispielen nicht enthalten sind. Im Laufe der LV wird das Skript erweitert und von möglichen Fehlern befreit werden, daher lohnt es sich nicht das Skript auszudrucken. Falls du Fehler oder Unstimmigkeiten entdeckst, teile mir diese bitte via Mail (jakob.hauser@edu.uni-graz.at) mit. Als Mathematik-Chemie Student bitte ich bei Feinheiten der Rechtschreibung und Beistrichsetzung um Nachsicht!

2.2 Beurteilungskriterien

Dieser Kurs wird mit den Noten „mit Erfolg teilgenommen" (E) und „ohne Erfolg teilgenommen"(oE) bewertet und ist 1 ECTS Punkt wert. Dieser kann zum Beispiel als freies Wahlfach genutzt werden. Für eine erfolgreiche Teilnahme am Kurs müssen folgende Voraussetzungen erfüllt werden:

1. 80% Anwesenheit
2. Teilnahme am Abschlusstest am 29.09.2017
3. selbstständiges Bearbeiten der Übungsaufgaben (genauere Informationen dazu in 2.4)

Bei guter Begründung, warum diese Voraussetzungen nicht erfüllt werden können (Aufnahmetest, etc.), können in einem gewissen Ausmaß Ersatzleistungen gefunden werden.

2.3 Ablauf

Der Ablauf des Kurses wird sich im Allgemeinen folgendermaßen gestalten:

- 09:00-10:30 Erste Einheit des Tages, inklusive kurzer Wiederholung des bisherigen Stoffes.
- 10:30-11:00 Pause, Abgabe der Hausübungen
- 11:00-12:00 Zweite Einheit des Tages

In der ersten Einheit (18.09.2017) wird es einen Orientierungstest geben, der zur Auskunft über den aktuellen Wissenstand für den Vortragenden dient.

In der letzten Einheit (29.09.2017) wird es einen Abschlusstest über den Stoff der LV geben. Bei diesem Test ist die Teilnahme verpflichtend, ein positives Resultat ist aber nicht für einen erfolgreichen Abschluss der LV notwendig. Es geht lediglich darum, StudienanfängerInnen die Situation einer Prüfung näher zu bringen.

2.4 Hausübungen

Es werden täglich Übungszettel online gestellt werden, die bis zum nächsten Tag zu bearbeiten sind. Die Lösungen oder Lösungsansätze sind entweder händisch in der nächsten Einheit oder via Mail vor der nächsten Einheit abzugeben. Fertig gerechnete Beispiele, in denen eine (eventuell auch falsche) Lösung erarbeitet wurde, gelten als gelöst, Beispiele in denen der Lösungsweg eine Bearbeitung des Themas zeigt, die aber zu keine Lösung kommen, gelten als halb gelöst und Beispiele die nicht oder kaum bearbeitet wurden, gelten als nicht gelöst. Für einen erfolgreichen Abschluss der LV muss mindestens die Hälfte aller Beispiele gelöst sein, wobei zwei halb gelöste Beispiele natürlich ein gelöstes ergeben.

3 Mathematische Grundlagen und Elementare Rechenmethoden

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, soll der Fokus dieser Lehrveranstaltung neben dem stofflichen Inhalt auch auf dem Zugang zu diesem liegen. Die meisten Mathematik Vorlesungen halten sich an das Prinzip „Definition-Satz-Beweis”. Das heißt, dass die allermeisten Themenbereiche mit grundlegenden Definitionen von Objekten oder Eigenschaften beginnen, für diese werden dann Aussagen in Form von Sätzen getätigt und diese Aussagen (Sätze) werden dann mit Hilfe der bisherigen Definitionen und Erkenntnisse bewiesen. Genau das ist es, was die Mathematik ausmacht. Durch allgemeine und abstrakte Definitionen können leichte Aussagen sofort abgeleitet werden und aus diesen Aussagen lassen sich wieder neue beweisen und so weiter. Somit entsteht schlussendlich ein Gesamtkonstrukt eines Themas, bei dem jede Aussage, Rechentechnik, Eigenschaft und so weiter exakt bewiesen ist. Dass Rechenregeln vom Lehrer neu eingeführt und verwendet werden gibt es nicht, diese Regeln werden in den entsprechenden Vorlesungen erst teilweise mühevoll erarbeitet werden.

3.1 Grundrechenarten

Zum Start betrachten wir das ganz normale „rechnen”, wie man es aus der Volksschule kennt. Um rechnen zu können werden Zahlen benötigt, diese müssen definiert werden:

Definition 3.1 (die natürlichen Zahlen)
Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält die Zahlen $1, 2, 3, \dots$, ist die Null dabei bezeichnet man die Menge mit $\mathbb{N}_0$.
oder

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Die Definition von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ ist nicht einheitlich und weicht hier zum Beispiel von jener des BiFi ab. Ich habe in meinem Studium jedoch fast ausschließlich die Verwendung dieser Definition gesehen.
Normalerweise definieren Vortragende Schreibweisen, die nicht einheitlich gehandhabt werden, im Laufe des Semesters und weisen darauf hin, dass sie es so und so verwenden. Halt dich in den Vorlesungen am Besten nach dem oder der Vortragenden.

Um nun Aussagen über das Rechnen mit natürlichen Zahlen zu treffen, müssen Eigenschaften von Rechenoperationen definiert werden.

Definition 3.2 (kommutativ, assoziativ)
Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt **kommutativ**, wenn für alle a und b aus M gilt:

$$a * b = b * a$$

und **assoziativ**, wenn für alle a, b und c aus M gilt:

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Aus der Definition einer Zahlenmenge und einer Eigenschaft für Rechenoperationen lässt sich nun die erste Folgerung treffen.

Satz 3.3
Die Addition $(+)$ und die Multiplikation $(\cdot)$ sind auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Für den Beweis dieses Satzes bräuchte es eine formale Definition von Addition und Multiplikation, die ich hier ausspare.

Mit Hilfe von Satz 3.3 lässt sich nun folgendes Beispiel lösen. Denke daran, „ist ja eh klar!" oder „das weiß ich aus der Schule!" sind keine zulässigen Argumente!

Beispiel 3.1
Zeige, dass für drei natürliche Zahlen a, b, c gilt:

$$a + b + c = c + b + a.$$

Beispiel 3.1 erfordert kein Rechnen sondern eine Argumentation, einen sogenannten Beweis. Da sich die zu beweisende Aussage auf alle Elemente einer gegebenen Menge (hier natürliche Zahlen) bezieht, spricht man von einer Allaussage.

Beweisstrategie 1 (Beweis einer Allaussage)
Eine Variante um eine Allaussage zu beweisen ist die Aussage für ein beliebiges (frei wählbares) Element der Menge zu zeigen. Die Alternative wäre sonst, die Aussage für jedes Element extra zu beweisen, und das kann bei großen Mengen unangenehm und bei unendlichen Mengen unmöglich sein.
Sei nun die gegebene Menge M und es sei zu zeigen, dass eine Aussage $\mathcal{A}$ für jedes Element aus M gilt, dann wäre folgendes Vorgehen eine gute Möglichkeit:

Sei a ein beliebiges Element aus M.
Nun zeigt man, dass $\mathcal{A}$ für a richtig ist.
Da a als Vertreter für jedes Element aus M gewählt wurde, muss $\mathcal{A}$ somit auf ganz M gültig sein.

Beispiel 3.2
Zeige, dass für jede gerade natürliche Zahl gilt, dass die nächstgrößere Zahl ungerade ist.

Definition 3.4 ($\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$)
Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind wie folgt definiert:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}.$$

Im Weiteren sind die aus der Schule bekannten Rechenregeln für $\mathbb{Q}$ aufgelistet. (Sie gelten natürlich auch in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, diese werden in dieser LV jedoch nicht im Detail eingeführt.)

Rechenregel 3.5 (Distributivgesetz)
Die Menge $\mathbb{Q}$ erfüllt mit Multiplikation und Addition das **Distributivgesetz**, es gilt also für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Rechenregel 3.6 (Rechnen mit negativen Vorzeichen)
Beim Rechnen mit negativen Vorzeichen gilt:

- Die Subtraktion ist weder kommutativ noch assoziativ.
- Für a aus $\mathbb{Q}$ gilt $-(-a) = a$
- Für a, b aus $\mathbb{Q}$ gilt $(-a)b = a(-b) = -ab$ und $(-a)(-b) = ab$

Rechenregel 3.7 (Rechnen in $\mathbb{Q}$)
Für Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{s}{t}$ mit p, s aus $\mathbb{Z}$ und q, t aus $\mathbb{N}$ und a aus $\mathbb{Z}, a \neq 0$ gilt:

- Vorzeichen: $\frac{+p}{+q} = \frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$ und $\frac{p}{-q} = \frac{-p}{q} = -\frac{p}{q}$
- Brüche kürzen: $\frac{pa}{qa} = \frac{p}{q}$
- Brüche erweitern: $\frac{p}{q} = \frac{pa}{qa}$
- Bruchmultiplikation: $\frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{ps}{qt}$
- Bruchdivision: $\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{s}$, für $s \neq 0$
- Bruchaddition: $\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{pt + sq}{qt}$ (wobei sinnvolles Kürzen natürlich wichtig ist!)

Wenn du dir bei den Hausübungsbeispielen zum Rechnen mit Vorzeichen und Brüchen schwer tust, dann musst du jetzt unbedingt starten das nachzuholen. Schnapp dir ein Schulbuch und beginn Beispiele zu rechnen.

3.2 Potenzen und Wurzeln

Aus der Schule sollten dir die folgenden Rechenregeln geläufig sein. In deinem Studium wird auf jeden Fall erwartet, dass du fließend mit Variablen und Potenzen umgehen kannst und dass die keine Fehler wie etwa $(a+b)^2 = a^2 + b^2, a^3 + a^2 = a^5, a^2 \cdot a^3 = a^6, \ldots$ passieren.
Auch wenn sie nur aus Schlampigkeit passieren, geben solche Fehler das Gefühl, dass es dir an der grundlegendsten Mathematik mangelt und können bei Tafelrechnungen oder Prüfungen fatal sein. Also bitte, bitte vermeide so etwas!

Definition 3.8 (Potenzieren mit natürlichen Zahlen)
Für eine beliebige Zahl a (bis hier umfasst das also $\mathbb{Q}$, es gilt aber natürlich auch in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$) und eine natürliche Zahl n ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n-mal}$$

definiert.
a wird **Basis**, n der **Exponent** genannt.
Für $a \neq 0$ definiert man $a^0 = 1$.

Rechenregel 3.9 (Rechenregeln für Potenzen)
Für beliebige Zahlen a und b und natürliche Zahlen m und n gelten folgende Rechenregeln:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{P1}$$

$$a^n b^n = (ab)^n \tag{P2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{P3}$$

Beispiel 3.3
Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen m, n und eine beliebige Zahl a

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

gilt.

Rechenregel 3.10 (Erweiterung des Exponenten auf $\mathbb{Z}$)
Für eine beliebige Zahl a und eine natürliche Zahl n gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{P4}$$

Somit lassen sich (P1) bis (P3) auf ganzzahlige Exponenten ausweiten.

Definition 3.11 (die n-te Wurzel)
Für eine beliebige, nicht negative Zahl a ($a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) und eine natürliche Zahl n ist $a^{\frac{1}{n}}$ diejenige Zahl b für die gilt, $b^n = a$. b wird als die **n-te Wurzel** von a bezeichnet.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Somit kann man nun (P1) bis (P4) auf rationale Potenzen ausweiten, die Formulierungen bleiben dieselben.

Durch das Einführen von Wurzeln erhält man nun erstmals Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar sind, sogenannte irrationale Zahlen (manchmal wird diese Menge mit $\mathbb{I}$ bezeichnet).

Definition 3.12 (die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$)
Die Zusammenfassung aller rationalen und irrationalen Zahlen bezeichnet man als die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Irrationale Zahlen kann man auf verschiedenste Art und Weise finden. Zum Beispiel sind die meisten Wurzeln irrationale Zahlen ($\sqrt{2}, \dots$) oder die Kreiszahl π ist eine sehr bekannte irrationale Zahl.
Man kann sich leicht überlegen, dass irrationale Zahlen unendlich viele Kommastellen haben müssen, ansonsten könnte man sie als Bruch mit einer großen 10er Potenz im Nenner anschreiben. Umgekehrt gilt (und das müsste natürlich genau gezeigt werden), dass jede nicht periodische Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen irrational ist. Somit kann man sehr leicht irrationale Zahlen anschreiben.
$1,01001000100001\dots$

Satz 3.13 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
Die Wurzel aus 2 ist irrational.

Beweisstrategie 2 (Beweis durch Widerspruch)
In manchen Situationen bietet es sich an, eine Aussage zu beweisen indem man zeigt, dass das Gegenteil unmöglich ist. Die Idee ist, dass ich eine Annahme treffe und dann durch zulässige Schlussfolgerungen irgendwann eine Aussage folgere, die definitiv nicht wahr sein kann.
Da nur eine Annahme getroffen wurde und alle restlichen Folgerungen zulässig waren, muss also die Annahme falsch gewesen sein und ihr Gegenteil somit wahr.

Beispiel 3.4
Beweise durch Widerspruch, dass das Produkt einer irrationalen und einer natürlichen Zahl immer irrational ist.

Dieses Beispiel würde genau genommen eher einen indirekten Beweis widerspiegeln, die Unterschiede zwischen indirektem Beweis und Widerspruchsbeweis sind jedoch sehr fein und werden später noch genauer diskutiert.

3.3 Terme

Definition 3.14 (Term)
Ein (in mathematischem Sinne) sinnvoller mathematischer Ausdruck, der Zahlen und Variablen enthält heißt **Term**.

Je nachdem welche Objekte die im Term befindlichen Variablen repräsentieren, gelten natürlich alle Gesetze, die für diese Objekte auch gelten. Da in den meisten Fällen Variablen reelle Zahlen ersetzen, gelten natürlich Kommutativ-, Assoziativ-, Distributiv-, Potenzgesetze und so weiter. Aus diesen Gesetzen folgen auch die aus der Schule bekannten Rechenregeln für Terme.

Rechenregel 3.15
Einige wichtige Regeln beim Rechnen mit Termen sind:

- **Zusammenfassen von Termen**
  Terme dürfen nur addiert(subtrahiert) werden, wenn sie sich in Basis und Exponent gleichen (gleichnamig sind).
- **Ausklammern eines Faktors**
  Gleiche Faktoren einer Summe (Differenz) können ausgeklammert werden. $ax + ay = a(x + y)$ für a, x, y reelle Zahlen.
- **Ausmultiplizieren von Klammern**
  Für beliebige reelle Zahlen a, b, x, y gilt

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$

Beispiel 3.5
Zeige, dass für eine beliebige reelle Zahl a die Rechnung $a^2+3a^4 = 4a^6$ nicht gilt. Finde ein Argument, das mit Rechengesetzen der reellen Zahlen die Rechenregel für das Zusammenfassen von Termen unterstützt.

Beispiel 3.6
Beweise die Rechenregel für das Ausmultiplizieren von Klammern und leite daraus die drei binomischen Formeln her.

Beispiel 3.7
Kürze und fasse die folgenden Brüche soweit wie möglich zusammen und gib bei Bedarf Einschränkungen für die Variablen an.

- $\dfrac{27a}{18a^3}$
- $\dfrac{3ab^4 - 17ab^2 + 39a^2b^2}{ab^2}$
- $\dfrac{54a^2 - 36ab + 6b^2}{6a - 2b}$
- $\dfrac{2y}{3z + 6} - \dfrac{1 - y}{z + 2} + \dfrac{3x - 2xy}{3xz + 6x}$

- $\dfrac{a^2+7ab+4b^2}{3a+6b} - \dfrac{ab}{a+2b}$
- $\dfrac{2x-7y}{5y^2+6z} : \dfrac{6x-21y}{25y^2z+30z^2}$
- $\dfrac{\dfrac{a}{a+1} - \dfrac{b}{b+1}}{\dfrac{a-b}{a+b}}$

Beispiel 3.8
Fasse zusammen und gib bei Bedarf Einschränkungen für die Variablen an.

- $(-a^2) \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3$
- $13(a-1)^3 + 2(1-a)^3 - 8(a-1)^3 + 2(1-a)^3$
- $(4(x^2y^2))^3 - ((2xy)^3 - x^2)^2$
- für $m, n \in \mathbb{N}_0$:
  $\left(\dfrac{a^7}{b^3} : \dfrac{a^{7+n}}{b^n}\right) \cdot \dfrac{a^n}{b}$
- $\dfrac{12\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{9x-9y}} - 3\sqrt{x+y}$
- $\dfrac{a^2-4b^2}{\sqrt[3]{a^9} - b \cdot \sqrt{16a^2b^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

3.4 spezielle Notationen

3.4.1 Indizierung von Variablen

Die Verwendung von Variablen ist in der Mathematik unumgänglich. Du wirst sehr bald feststellen, dass du in deinem Studium beinahe Variablen, dafür aber keine Zahlen mehr zu Sehen bekommst. Ein Problem, dass sich dabei auftut ist, dass es nur 26 Buchstaben im Alphabet gibt, und somit das Repertoire an Klein- und Großbuchstaben recht schnell ausgeschöpft ist. Außerdem werden zu viele verschiedene Buschstaben sehr schnell unübersichtlich. Die Lösung dafür sind Indizes, also kleine (meist) tiefgestellte Zahlen, die etwa verschiedene a unterscheidbar machen.

Beispiel 3.9
Man treffe folgende Zuordnung:
$a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 6$ und $a_3 = 8$
Berechne: $a_0 + a_2 - a_1$
Weiters deklariere man:
für $j = 0, 1, 2, \ldots, 5$: $b_j = \dfrac{j}{2}$
Berechne: $(b_3 - a_2) \cdot b_5 + \dfrac{b_1}{b_2}$
Schlussendlich sei:
für $i = 0, 1, 2, 3$ und $j = 0, 1, \ldots, 5$: $c_{i,j} = a_i \cdot b_j$
Gib alle $c_{i,j}$ an!

3.4.2 das Summenzeichen $\sum$

Definition 3.16 (Summenschreibweise)
Um eine lange Summe kürzer und übersichtlicher anschreiben zu können, bedient man sich des Summenzeichens (großes griechisches Sigma)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i.$$

i ist hier der sogenannte **Laufindex**, Null die untere Grenze und n die obere Grenze. Das Symbol bedeutet nun, dass der Teil, der rechts vom Summenzeichen steht, für jedes i von der unteren bis zur oberen Grenze addiert wird. dh:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Hier wurde eine Summe von Folgegliedern dargestellt. Natürlich kann statt a_i auch jeder beliebige andere Ausdruck dastehen.

Beispiel 3.10
Berechne die folgenden Summen:

$\sum_{i=0}^{4}(2 * i - 1)$

$\sum_{k=2}^{6}\left(\frac{k+1}{2}\right)$

$\sum_{j=-3}^{3}(-1)^j j$

$\left(\sum_{m=0}^{4} m + 2\right) - 3$

$\sum_{h=0}^{5} 3$

3.4.3 das Produktzeichen $\prod$

Definition 3.17
Das Produktzeichen (großes griechisches Pi) funktioniert gleich wie das Summenzeichen, nur dass die Glieder multipliziert werden. dh:

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Beispiel 3.11
Berechne die folgenden Produkte:

$$\prod_{i=1}^{4} i$$

$$\prod_{d=0}^{5} \frac{d+1}{2}$$

$$\prod_{j=0}^{35} 5$$

Die Schreibweisen können untereinander auch kombiniert werden.

Beispiel 3.12
Berechne:

$$\sum_{i=i}^{3} \sum_{j=0}^{2} \left(i + \frac{j}{3} \right)$$

$$\prod_{k=1}^{3} \sum_{l=0}^{1} a_{l+k}$$

$$\sum_{m=0}^{5} \sum_{n=m}^{5} n$$

4 Logik

Wie in den letzten Kapiteln bereits mehrmals erwähnt wurde, liegt ein erheblicher Teil eines mathematischen Beweises darin, Schritt für Schritt zulässige Schlussfolgerungen zu treffen und somit auf das gewünschte Ergebnis zu kommen. Welche Schlussfolgerungen nun tatsächlich zulässig sind, muss natürlich, so wie alles in der Mathematik, genau festgelegt werden. Wie gesagt, die Exaktheit dieser Wissenschaft ist es, was sie ausmacht.

4.1 Aussagen

Definition 4.1 (Aussage)
Eine Aussage in mathematischem Sinne zeichnet sich dadurch aus, dass sie einen eindeutig bestimmbaren Wahrheitswert, wahr (W) oder falsch (F) hat. Aussagen werden meist mit Kleinbuchstaben (p, q) oder durch große Skript-Buchstaben ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$) benannt.

z.B: p: „-5 ist eine ganze Zahl." ist eine Aussage und hat den Wahrheitswert wahr (W). („p ist eine wahre Aussage" oder „es gilt p".)
q: „Es gibt eine größte natürliche Zahl" ist eine falsche Aussage.
$\mathcal{A}$: „Rot ist eine schöne Farbe" ist keine mathematische Aussage, da der Wahrheitsgehalt subjektiv und nicht eindeutig ist.

Definition 4.2 (Negation)
Sei p eine Aussage. Dann ist $\neg p$ (sprich „non") das logische Gegenteil, also die Negation der Aussage. Wahrheitswerte werden in sogenannten Wahrheitstafeln übersichtlich dargestellt.

p	$\neg p$
W	F
F	W

Beispiel 4.1
Beweise, dass $\neg(\neg p)$ gleichbedeutend ist mit p.
Für Beweise zu Aussagenlogik, eignen sich Wahrheitstafeln hervorragend.

4.2 Prädikatenlogik

Natürlich kann man Aussagen auch für (freie) Variablen treffen. Etwa sei die Aussage $\mathcal{A}(x)$ gegeben als $x \geq 1$.
Somit sind $\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(5)$ und $\mathcal{A}(\frac{5}{7})$ wahre Aussagen, $\mathcal{A}(-5)$ jedoch eine falsche.

Definition 4.3 (All-Aussage)
Gilt eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle Elemente einer Menge M, so schreibt man

$$\forall x \in M : \mathcal{A}(x).$$

$\forall$ ist der **All-Quantor** und bedeutet alle. Der Doppelpunkt hier steht für „gilt". Lies also: „Für alle x in der Menge M gilt $\mathcal{A}(x)$.

Um den Wahrheitswert einer solchen Aussage nachzuweisen benötigt es einen Beweis einer Allaussage (vgl. Beweisstrategie 1), um die Aussage zu widerlegen, reicht ein einziges Gegenbeispiel.

Das Symbol $\in$ bedeutet „Element aus" und wird im nächsten Kapitel noch genauer behandelt.

Definition 4.4 (Existenz Aussage)
Gilt eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ für mindestens ein Element einer Menge M, so schreibt man

$$\exists x \in M : \mathcal{A}(x).$$

Gibt es **genau ein** Element in M, für das die Aussage gilt, dann schreibt man

$$\exists! x \in M : \mathcal{A}(x).$$

(alternativ zu $\exists!$ sieht man auch manchmal $\exists^1$)
$\exists$ ($\exists!$) ist der **Existenz-Quantor** und bedeutet „es gibt" („es gibt genau ein").

Um eine Existenzaussage zu beweisen reicht es, ein gültiges Beispiel zu liefern. Bei einer eindeutigen Existenz muss man zusätzlich für alle anderen Elemente zeigen, dass die Aussage nicht zutrifft (es wird also eine zusätzliche Allaussage zu beweisen). Um eine Existenzaussage zu widerlegen, muss man zeigen, dass die Aussage für alle Elemente falsch ist (also wieder eine Allaussage).

Beispiel 4.2
Gib den Wahrheitswert der folgenden Aussagen $\mathcal{A}$ an und begründe deine Entscheidung schlüssig. Formuliere auch jeweils die Negation $\neg\mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}(x) : \forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \in \mathbb{Q}$
- $\mathcal{A}(x, y) : (\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x + y \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{A}(x, y) : (\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x - y \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{A}(p) : \exists p \in \mathbb{Q} : p^2 = \dfrac{9}{16}$
- $\mathcal{A}(p) : \exists! p \in \mathbb{Q} : p^2 = \dfrac{9}{16}$
- Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. $\mathcal{A}(p) : \exists p \in \mathbb{P} : p^2 \in \mathbb{P}$

4.3 logische Verknüpfung von Aussagen

Definition 4.5 (UND und ODER)
Zwei Aussagen p, q können mit einem logischen UND ($\wedge$) oder einem logischen ODER ($\vee$) verknüpft werden. $p \wedge q$ ist wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind, $p \vee q$ ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

Definition 4.6 (Implikation)
Folgt aus einer Aussage p eine Aussage q, so wird das mit einer Implikation angedeutet.

$$p \Rightarrow q$$

Der Wahrheitswert einer Implikation ist wie folgt definiert.

p	q	$p \Rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Diese Definition kann verwirrend sein, insbesondere finden sich Beispiele in denen sie sogar falsch erscheint. Es handelt sich aber nur um den Wahrheitswert der Implikation, nicht um die Aussagen selber. Nur weil die erste Aussage falsch und die zweite wahr ist, ist die Implikation dennoch wahr. „Aus falschem folgt beliebiges".
Wichtig ist, dass bei einer wahren Implikation und einer wahren Aussage p nur eine wahre Aussage q in Frage kommt.

Beispiel 4.3
Beweise, dass $p \Rightarrow q$ gleichbedeutend mit $\neg q \Rightarrow \neg p$ ist.

Somit ergeben sich für $p \Rightarrow q$ verschiedene Sprechweisen.

- Aus p folgt (zwingend) q.
- p impliziert q.
- p ist hinreichend für q. (Wenn also p gilt, dann muss q gelten).
- q ist notwendig für p. (p kann nur dann gelten, wenn q gilt, da $p \Rightarrow q$ gleichbedeutend ist mit $\neg q \Rightarrow \neg p$.)

Definition 4.7 (Äquivalenz)
Sind zwei Aussagen p und q gleichbedeutend, so wird das mit einer Äquivalenz angedeutet.

$$p \Leftrightarrow q$$

$p \leftrightarrow q$ gilt dann, wenn gilt $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Beispiel 4.4
Stelle die Wahrheitstafel der Äquivalenz auf!

Satz 4.8 (Schlussregeln)
Für drei Aussagen p, q und r gelten die folgenden Schlussregeln.

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \tag{SR1}$$

$$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p \tag{SR2}$$

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \tag{SR3}$$

$$(\neg p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow q \tag{SR4}$$

Beispiel 4.5
Überlege dir die Aussage von (SR1) und (SR3) in nachvollziehbaren Worten und beweise die Gültigkeit der Implikation.

5 Mengenlehre

Definition 5.1 (Menge, nach Georg Cantor)
Unter einer **Menge** versteht man die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen.

Mengen werden meist mit Großbuchstaben, Objekte (in Zukunft **Elemente** genannt) mit Kleinbuchstaben benannt.

Definiert man nun zu Beispiel eine Menge $M := \{1, 5, \text{König}, ?\}$, so ist M eine Menge, die vier Elemente enthält: Die Zahlen 1 und 2, das Wort König und das Symbol ?.
Man schreibt $1 \in M, 5 \in M, \text{König} \in M, ? \in M$. Wenn eine Element nicht in der Menge liegt schreibt man $\notin$. Also $2 \notin M$ oder Dame $\notin M$.

Schreibweise 5.2 (Schreibweisen von Mengen)
Es gibt verschiedene Arten, wie man Mengen darstellen kann.

Mengen können durch Aufzählen der Elemente geschrieben werden.
$M = \{1, 5, \text{König}, ?\}$

Ist es eindeutig, wie eine Abfolge weitergeht, können Auslassungspunkte verwendet werden.
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ oder $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Fasst man alle Elemente in einer Menge zusammen, die eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ erfüllen, so schreibt man:
$M = \{x | \mathcal{A}(x)\}$ (lies: M ist die Menge aller x für die $\mathcal{A}(x)$ gilt.)

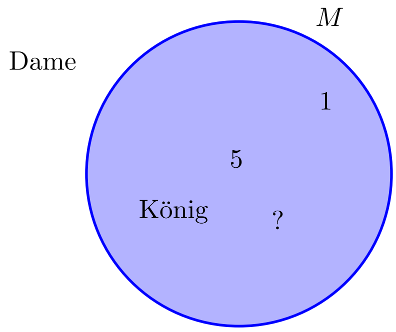
Oft macht es auch Sinn, nur Elemente aus einer Grundgesamtheit $\mathbb{G}$ zuzulassen.
$M = \{x \in \mathbb{G} | \mathcal{A}(x)\}$ (lies: M ist die Menge aller x aus $\mathbb{G}$ für die $\mathcal{A}(x)$ gilt.)

Beispiel 5.1
Schreibe jede dieser Mengen auf mehrere (mind. 3) Varianten:

- Die Menge aller ungeraden Zahlen.
- Die Menge aller Quadratzahlen.
- Die Menge aller ganzen Zahlen zwischen -3 und 3.

Um Mengen graphisch darzustellen werden oft Venn-Diagramme verwendet.

Schreibweise 5.3 (Venn-Diagramm)
Ein Venn-Diagramm ist ein Kreis (oder eine Ellipse), die eine Menge symbolisiert. Elemente können dann, je nachdem ob sie Teil der Menge sind oder nicht, innerhalb oder außerhalb des Kreises gezeichnet werden.



Definition 5.4 (Leere Menge)
Eine Menge M, die keine Elemente enthält, bezeichnet man als die leere Menge.

$$M = \{\} \text{ oder } M = \emptyset$$

Schreibweise 5.5 (Intervalle)
Intervalle sind eine besondere Form der Mengenschreibweise, wenn es um Teilmengen von $\mathbb{R}$ geht. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$„**geschlossenes Intervall**”
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$„**halboffenes Intervall**”
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$„**halboffenes Intervall**”
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$„**offenes Intervall**”

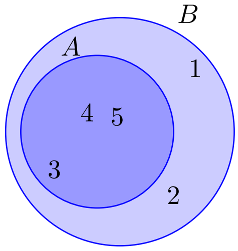
a oder b können auch durch $\pm\infty$ ersetzt werden, um eine Unbeschränktheit nach oben (unten) auszudrücken.

Beispiel 5.2
Stelle die folgenden Mengen graphisch auch einer Zahlengerade und (bei endlichen Mengen) als Venn-Diagramm dar.

- $A = \{-1, -0.5, 0, 0.5, \ldots, 2\}$
- $B = \{b \in \mathbb{N} | 1 < b < 5\}$
- $C = (1, 5]$
- $D = \{2d + 1 | d \in \mathbb{N},\ d < 4\}$
- $E = \{e \in \mathbb{R} || e| \leq 3\}$
- $F = [-2, \infty)$

5.1 Mengenrelationen

Definition 5.6 (Teilmenge)
Eine Menge A ist **Teilmenge** einer Menge B, wenn ganz A in B enthalten ist. (schreibe $A \subset B$)
$A \subset B :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$



Eine Menge A ist eine **echte Teilmenge** einer Menge B, wenn ganz A in B enthalten ist, jedoch B nicht in A. (schreibe $A \subsetneq B$)
$A \subsetneq B :\Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B) \wedge (\exists y \in B : y \notin A)$

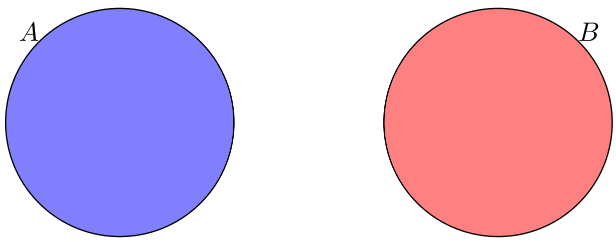
Umgekehrt kann man auch sagen: b ist eine (echte) **Obermenge** von A.

Für alle Mengen M gilt $\emptyset \subset M$.

Definition 5.7 (Mengengleichheit)
Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.
$A = B :\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

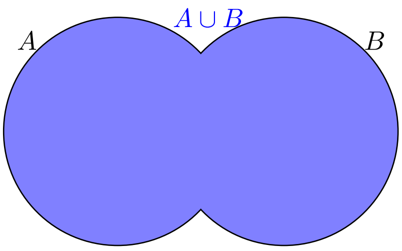
Auf Grund der Definition einer Menge, verändern Doppelnennungen oder Umordnungen der Elemente die Menge nicht.
d.h: $\{1,1,2\} = \{1,2\}$ und $\{1,2\} = \{2,1\}$

Definition 5.8 (disjunkte Mengen)
Zwei Mengen A, B sind **disjunkt**, wenn kein Element in beiden Mengen vorkommt.

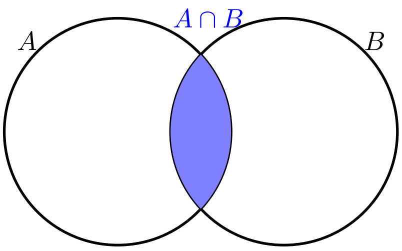


5.2 Mengenoperationen

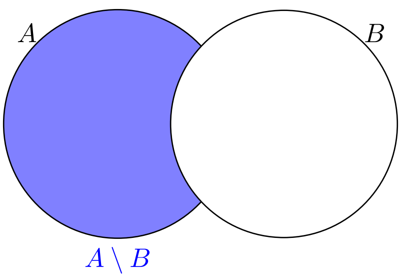
Definition 5.9 (Vereinigung und Durchschnitt)
Seien A und B Mengen.
Die **Vereinigung** von A und B (schreibe $A \cup B$) ist die Menge aller Elemente die in A oder B vorkommen.
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



Der **Durchschnitt** von A und B (schreibe $A \cap B$) ist die Menge aller Elemente, die in A und B vorkommen.
$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



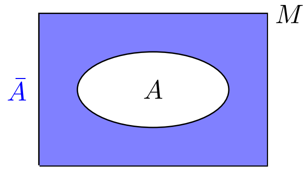
Definition 5.10 (Mengendifferenz)
Die **Differenz** von A und B (schreibe $A \setminus B$, sprich „A ohne B") sind alle Elemente von A, die nicht in B vorkommen.
$A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$



Definition 5.11 (Kartesisches Produkt)
Seien A und B zwei nichtleere Mengen.
Das kartesische Produkt $A \times B$ (sprich „A kreuz B") ist die Menge aller 2er Tupel, die aus jeweils einem Element von A und einem Element von B erzeugt werden.
$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$

Ein Spezialfall des kartesischen Produkts ist die Menge aller Koordinatenpunkte in der Ebene (das kartesische Koordinatensystem).
$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$

Definition 5.12 (Komplement)
Sei A eine Teilmenge einer Grundmenge M ($A \subset M$). Dann ist die Komplementärmenge von A ($\bar{A}$ oder A^c) der Rest von M, der nicht in A enthalten ist.
$\bar{A} := \{x \in M|x \notin A\}$



Beispiel 5.3
Seien A, B, C, D, E die Mengen aus Beispiel 5.2. Bestimme und veranschauliche grafisch:

- $A \cup B$
- $A \cap C$
- $C \setminus E$
- $B \times D$
- $(A \cap E) \setminus (C \cap \mathbb{Z})$
- $\bar{C}$ wobei die Grundmenge $\mathbb{R}$ sei.

6 Gleichungen

Definition 6.1 (Gleichung)
Unter einer Gleichung versteht man zwei Terme, die durch ein Gleichheitszeichen (eine sogenannte Relation) miteinander verbunden sind. Sind in mindestens einem dieser Terme Variablen enthalten, so kann man nach Lösungen der Gleichung suchen.
Als Lösung einer Gleichung versteht man Element einer Grundmenge (meist Zahlen), die, wenn man sie für die Variable(n) der Gleichung einsetzt, eine **wahre Aussage** ergeben.
Die (nicht zwingend nichtleere) Menge aller Lösungen wird **Lösungsmenge** genannt und oft mit $\mathbb{L}$ bezeichnet.

Definition 6.2 (Äquivalenzumformung)
Unter einer **Äquivalenzumformung** versteht man die Veränderung einer Gleichung (G_1) zu einer äquivalenten Gleichung (G_2), das heißt einer Gleichung, die dieselbe Definitions- und Lösungsmenge besitzt. Solche Umformungen werden mit einem Äquivalenzpfeil ((G_1) $\Leftrightarrow$ (G_2)) gekennzeichnet.

Ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ($\mathbb{L}_1$) eine echte Teilmenge der neuen Gleichung ($\mathbb{L}_2$) ($\mathbb{L}_1 \subsetneq \mathbb{L}_2$), so spricht man von einer **Implikation** ((G_1) $\Rightarrow$ (G_2)).

Rechenregel 6.3
Durch den Erhalt der Lösungsmenge bei Äquivalenzumformungen kann eine Gleichung gelöst werden, indem sie in eine einfachere äquivalente Gleichung umgeformt wird (vorzugsweise $x = [\dots]$).
Kommen in einer Gleichung keine Variablen vor und beschreibt sie eine wahre Aussage, so ist die ganze Grundmenge die Lösung. Beschreibt sie eine falsche Aussage, ist die Lösungsmenge die leere Menge.

Folgende (beidseitige) Veränderungen sind zulässige Äquivalenzumformungen:

- Addition oder Subtraktion einer reellen Zahl oder eines, im Definitionsbereich wohldefinierten, Terms.
- Multiplikation oder Division einer von Null verschiedenen reellen Zahl oder eines, im Definitionsbereich wohldefinierten, von Null verschiedenen, Terms.

Beispiel 6.1
Warum ist Quadrieren, bzw. Wurzelziehen nicht in der oben angeführten Liste? Setzte bei einem solchen Umformungsschritt die richtigen Implikationen oder Äquivalenzen.

6.1 grafisches Lösen von Gleichungen

Um Gleichungen grafisch zu lösen hat man im Groben zwei Möglichkeiten. Beide führen auf eine Interpretation der Gleichung als Funktion zurück.
Entweder interpretiert man sowohl die linke Seite, als auch die rechte Seite der Gleichung als Funktion, sprich

$$f(x) = g(x).$$

Zeichnet man den Graphen der beiden Funktionen, so sind die x-Koordinaten aller Schnittpunkte die Lösungsmenge.
Alternativ kann man eine Gleichung immer in die Form

$$\cdots = 0$$

überführen, und das Problem auf ein Nullstellenproblem

$$f(x) = 0$$

herunterbrechen. Genau genommen handelt es sich hier jedoch um einen Spezialfall der ersten Variante.
Das zeichnen eines Funktionsgraphen wird im Kapitel Funktionen genauer behandelt.

6.2 Lineare Gleichungen

Definition 6.4
Eine Gleichung wird als (reelle) **lineare Gleichung** bezeichnet, wenn sie zu einer Gleichung der Form

$$ax = b \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

äquivalent ist.

Beispiel 6.2
Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen in a) $\mathbb{R}$ und b) $\mathbb{Z}$:

- $2(x - 3) + 4 = 3(1 - x)$
- $3(x + 1)(1 - x) = 1 - 3x - 3x^2$

6.3 Quadratische Gleichungen

Definition 6.5 (Quadratische Gleichung)
Eine Gleichung wird als (reelle) **quadratische Gleichung** oder Gleichung zweiten Grades bezeichnet, wenn sie zu einer Gleichung der Form

$$ax^2 + bx = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

äquivalent ist.

Beispiel 6.3
Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen:

- $x^2 + \sqrt{8}x + 2 = 0$
- $2x^2 + 6x - \sqrt{108} = \sqrt{12}$

Rechenregel 6.6 (quadratische Lösungsformeln)
Für $p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0$ sind die folgenden Gleichungen äquivalent:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ sind folgende Gleichungen äquivalent:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wie schon vorher erwähnt, lässt sich das Lösen von Gleichungen auf ein Nullstellenproblem zurückführen. Daher sind Lösungsmethoden oft an Eigenschaften von Polynomen gekoppelt. Die genaue Definition eines Polynoms erfolgt in Kapitel (???). Derzeit reicht eine ungefähre Idee was ein Polynom ist, die du aus der Schule hast.

Satz 6.7 (Zerlegung von Polynomen zweiten Grades in Linearfaktoren)
Es sei $p(x)$ ein Polynom der Form $p(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$ mit zwei reellen (nicht zwingend verschiedenen) Nullstellen x_1, x_2. Dann hat $p(x)$ die Darstellung

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Zur Erinnerung: eine quadratische Gleichung mit reellen Lösungen lässt sich auf eine solche Form zurückführen.

Beispiel 6.4
Kürze die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich und bestimme deren Definitionsmenge.

- $\dfrac{x^3 + 7x^2 - 60x}{3x^2 - 27x + 60}$
- $\dfrac{x^2 - 4}{2x - 4}$

6.4 Gleichungen höheren Grades

Definition 6.8
Eine Gleichung wird als (reelle) **Gleichung n-ten Grades** bezeichnet, wenn sie zu einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

äquivalent ist.

Es gibt für Gleichungen dritten Grades noch eine wahnsinnig komplizierte und unpraktische Lösungsformel, für Gleichungen höheren Grades gibt es dann meistens gar keine mehr. Daher benötigt es zu deren Lösung andere Lösungsansätze: Mit dem folgenden Satz lassen sich Nullstellen manchmal ganz gut erraten:

Satz 6.9
Ist $p(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, so sind alle ganzzahligen Nullstellen Teiler des konstanten Koeffizienten a_0.

Neben dem Raten nach Nullstellen gilt es zu versuchen, das Polynom in eine Form zu bringen, bei der quadratische Lösungsformeln wieder greifen können.

Rechenregel 6.10 (Substitution)
Ist eine Gleichung der Form $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, $m \in \mathbb{N}$, so lässt sich durch die Substitution

$$u := x^m$$

die Gleichung in die quadratische Form

$$au^2 + bu + c = 0$$

bringen und lösen. Die Lösungen $u_{1,2}$ müssen dann rückeingesetzt werden.

Beispiel 6.5
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

- $2x^4 - 8x^2 = 18$
- $x^6 - 4x^5 + 2x^3 = -x^3(2x - 4)(2x + 4) + 5$

Satz 6.11 (Linearfaktorisierung von Polynomen)
Ein reelles Polynom n-ten Grades $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ lässt sich in Linearfaktoren, in $\mathbb{R}$ nicht lösbare quadratische Faktoren und in konstante Faktoren zerlegen.

$$p(x) = a_n \underbrace{(x - x_m)(x - x_{m-1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_2)(x - x_1)}_{lineare Faktoren} \ldots$$
$$\ldots \underbrace{(x^2 + b_{1,k}x + b_{0,k})(x^2 + b_{1,k-1}x + b_{0,k-1}) \cdot \cdots \cdot (x^2 + b_{1,2}x + b_{0,2})(x^2 + b_{1,1}x + b_{0,1})}_{nichtreduzierbarequadratischeFaktoren}$$

Hier sind $x_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}$ die Nullstellen des Polynoms.
Außerdem muss gelten
$$m + 2k = n$$

Somit lässt sich nun jedes Polynom und somit jede Gleichung höherer Ordnung, in ein Produkt von linearen und quadratischen Polynomen zerlegen, welche leicht lösbar sind.
Diese Zerlegung muss allerdings nicht trivial sein, lässt sich aber zum Beispiel mittels **Polynomdivision** erreichen.

Satz 6.12 (Polynomdivision)
Ist $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades und x_1 eine Nullstelle von $p(x)$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $q(x)$ von Grad (n-1), sodass gilt

$$p(x) = (x - x_1)q(x).$$

$q(x)$ ist hier also der Rest der Linearfaktorisierung. Kennt man also eine Nullstelle (oder eine Lösung der Gleichung), lässt sich ein Linearfaktor herausdividieren und es bleibt ein Polynom (oder eine Gleichung) niederen Grades übrig.

Rechenregel 6.13 (Polynomdivision)
Kennt man (etwa durch Probieren) eine Lösung einer Gleichung höherer Ordnung, so kann man durch Polynomdivision eine Gleichung niederer Ordnung erzeugen. Entweder kann man nun eine Lösungsformel oder ein anderes Lösungsverfahren ansetzen oder man probiert weiter.
Zum Beispiel erkennt man bei der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$, dass auf Grund der 8 als ganzzahlige Nullstellen nur $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ in Frage kommen. Durch Ausprobieren findet man 2 als erste Lösung. Nun kann man eine Polynomdivision durchführen.

$$(x^3 - 4x^2 + 8) : (x - 2) =$$

Wie bei der schriftlichen Division fragt man danach, mit was der Divisor ergänzt werden muss, um die höchste Potenz des Dividenden zu erhalten, danach rechnet man zurück, subtrahiert und fürt denselben Schritt solange durch, bis sich ein Rest ergibt.

$$\begin{array}{rl}
& (x^3 - 4x^2 + 0x + 8) : (x - 2) = x^2 - 2x - 4 \\
-(\underline{x^3 - 2x^2}) & \\
0x^3 - 2x^2 + 0x + 8 & \\
- \quad (\underline{-2x^2 + 4x}) & \\
0x^3 + 0x^2 - 4x + 8 & \\
- \quad (\underline{-4x + 8}) & \\
0R &
\end{array}$$

Somit sind die weiteren Lösungen der Gleichung die Lösungen von $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Beispiel 6.6
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

- $x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 26x = 16$
- $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 4x = 4$

6.5 Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen spielt es eine wesentliche Rolle, die Grundmenge aller möglichen Lösungen geschickt einzuschränken. Der Grund dafür liegt darin, dass durch Brüche Divisionen durch null möglich werden. Diese dürfen von Anfang an nicht in Betracht gezogen werden.

Definition 6.14 (Bruchgleichung)
Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung, bei der eine Variable im Nenner eines Bruchs vorkommt.

Rechenregel 6.15 (Lösen von Bruchgleichungen)
Zu Beginn muss die Definitionsmenge der Gleichung, also jene Teilmenge der Grundmenge, auf der die Gleichung eindeutig definiert ist. Dafür müssen alle Nullstellen der Nennerpolynome ausgeschlossen werden.
Anschließend werden alle Bruchterme auf einen gemeinsamen Nenner gebracht.
Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man eine Gleichung höheren Grades. (Auf eine Multiplikation mit Null muss keine Rücksicht mehr genommen werden, da der Hauptnenner ein Produkt von Nennerpolynomen ist, deren Nullstellen bereits aus der Grundmenge entfernt wurden).

Beispiel 6.7
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

- $\dfrac{x-2}{x^2-4}=0$
- $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{2x}{x^2-1}$
- $\dfrac{2x+1}{x+7}=\dfrac{1-3x}{x-7}+\dfrac{7x+231}{x^2-49}$

6.6 Wurzelgleichungen

Definition 6.16 (Wurzelgleichung)
Eine Gleichung, in der eine Variable als Argument einer Wurzel vorkommt, wird Wurzelgleichung genannt.

Ein großes Problem beim Lösen von Wurzelgleichungen ist, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung darstellt, dies wurde in Beispiel 6.1 genauer besprochen. Jedoch wird man ums Quadrieren nicht herumkommen, um Wurzelausdrücke aufzulösen.

Rechenregel 6.17 (Lösen von Wurzelgleichungen)
Um Wurzelausdrücke aufzulösen muss man Quadrieren. Quadrieren ist jedoch eine **Implikation** und **keine Äquivalenzumformung**. Somit vergrößert man durch Potenzieren der Gleichung möglicherweise die Lösungsmenge. Demnach müssen erhaltene Lösungen durch Einsetzen überprüft werden.

Ein typischer Fehler, ist beim Quadrieren einer Gleichung auf die Verwendung binomischer Formeln zu vergessen. Denk immer daran, dass die gesamte Seite von deinem Rechenschritt betroffen ist.

Um binomische Formeln zu vermeiden, die erst recht Wurzelausdrücke liefern, ist es zielführend die Wurzel alleine auf eine Seite zu bringen, bevor potenziert wird.

Beispiel 6.8
Bestimme alle reelle Lösungen der folgenden Gleichungen.

- $\sqrt{x-5}=-2$
- $\sqrt{x+8}-x=2$
- $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=1$
- $\sqrt{(x-2)^2}=2$

6.7 Betragsgleichungen

Definition 6.18 (Betragsgleichung)
Eine Gleichung, in der eine Variable als Argument eines Betrags vorkommt, wird Wurzelgleichung genannt.

Da bisher der Betrag nur verwendet, und nie definiert wurde, soll hier eine formale Definition folgen.

Definition 6.19 (Betragsfunktion)
Der Betrag (bzw. die Betragsfunktion) ist wie folgt definiert.

$$|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Um einen Betrag aufzulösen muss man also wissen, ob das Argument negativ oder nicht ist. Um das bei Gleichungen zu garantieren greift man auf eine sogenannte **Fallunterscheidung** zurück.

Beweisstrategie 3 (Fallunterscheidung)
Kommt man in Rechnungen, Beweisen oÄ an einen Punkt, bei dem weitere Schritte oder Aussagen nur mehr auf einen Teil der ursprünglichen Grundgesamtheit zutreffen, kann man eine Fallunterscheidung durchführen. Dabei wird die Grundmenge in beliebig viele **disjunkte** Teilmengen aufgeteilt, für die das Beispiel oder der Beweis jeweils separat fertig gestellt wird. Jeder dieser separaten Wege wird als „Fall " bezeichnet. Wichtig ist, dass eine Fallunterscheidung wirklich jedes Element genau einmal berücksichtigt.

Rechenregel 6.20 (Lösen einer Betragsgleichung)
Um Beträge in deiner Gleichung aufzulösen, musst du deine Grundmenge (meist die reellen Zahlen) so in disjunkte Teilintervalle zerlegen, dass für jeden Fall klar ist, wie der Betrag aufgelöst wird.
Berechne nun die Lösungsmenge jedes einzelnen Falles (achte darauf, dass eine Lösung im entsprechenden Teilintervall liegen muss).
Die endgültige Lösungsmenge ist die Vereinigung aller Teillösungen.

Beispiel 6.9
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

- $|x - 1| = 5$
- $4 + |2t - 1| = |t|$
- $|z^2 - 2z - 1| = |z + 3|$

6.8 Ungleichungen

Wird bei einer Gleichung das Gleichheitszeichen durch ein **Ungleichheitszeichen** ($<, >, \leq, \geq$) ersetzt, so spricht man von einer **Ungleichung**.

Die Theorie von Gleichungen und Ungleichungen sind sehr ähnlich, die Definitionen für **Äquivalenzumformung und Implikation** bleiben dieselben. Auch die elementaren Äquivalenzumformungen (Addition und Multiplikation)sind ident. Bei Ungleichungen muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck, das Ungleichheitszeichen umdreht. Dies führt bei Bruchungleichungen etwa zu zusätzlichen Fallunterscheidungen.

Beispiel 6.10 (lineare Ungleichungen)
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Ungleichungen.

- $4x + 3 \leq 2(x - 6)$
- $3x - 1 < 2(x - 3) - (2 - x)$
- $-7x \geq \dfrac{3(x-1)}{2}$

Beispiel 6.11 (quadratische Ungleichungen)
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Ungleichungen.

- $(4x - 1)^2 - (3x + 2)^2 \leq 6(x - 3)^2$
- $3(x - 2)(x + 5) - 2(x + 9)(x - 1) \geq -18$
- $-3x^2 + 18x - 36 < 0$
- $x^2 + 6x + 9 \geq 0$
- $x^2 + 2x + 10 > 0$

Beispiel 6.12 (Bruchungleichungen)
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Ungleichungen.

- $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 2$
- $\dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{1}{x+1}$
- $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{-4}{x^2-1}$

Beispiel 6.13 (Betragsungleichungen)
Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Ungleichungen.

- $|x + 2| \leq 2x - 1$
- $|3x - 1| + |x + 2| \leq 3$
- $-|x + 1| + |x - 3| \geq 1 + |x + 4|$