Übungszettel 4 — bis 25.09.2017

Ab sofort sollte mathematische Schreibweise geläufig sein, daher werde ich Aufgabenstellungen nur noch in Symbolweise ausformulieren. Versuche dich mit Symbolschreibweise anzufreunden!!

Beispiel 4.1
Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen, wobei p, q, r, s Aussagen sind. Finde ebenfalls eine verbale Begründung, warum diese gleichbedeutend sind (eventuell auch in Form eines Beispiels)

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge q] \Leftrightarrow [(r \Leftrightarrow p) \wedge (p \Leftrightarrow q) \wedge p]$
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \wedge (r \Leftrightarrow p)]$
  Diese Logik wird verwendet, wenn man die Äquivalenz mehrerer Aussagen beweisen will. Es reicht einen Implikationsring zu beweisen (ein sogenannter Ringschluss).
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
  Wie lautet die, dem Distributivgesetz ähnliche, Regel für $p \vee (q \wedge r)$? Beweise sie!
- *Zusatz:* Wie lässt sich die Klammermultiplikation auf Aussagen umlegen? überlege dir dazu eine äquivalente Aussage für $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$, in der die Klammern „aufgelöst" wurden (natürlich wirst du neue Klammern für die Zusammenfassung brauchen, die beim Ausmultiplizieren durch Punkt vor Strich nicht nötig sind).

Beispiel 4.2 (Mengenrelationen)
Für eine **Relation** R für Elemente einer Menge M sind folgende Eigenschaften definiert:

Die Relation heißt **reflexiv**, wenn gilt:

$$\forall x \in M : (xRx)$$

Die Relation heißt **symmetrisch** wenn gilt:

$$\forall x, y \in M : (xRy) \Rightarrow (yRx)$$

Die Relation heißt **transitiv** wenn gilt:

$$\forall x, y, z \in M : [(xRy) \wedge (yRz)] \Rightarrow (xRz)$$

Die Relation $=$ erfüllt beispielsweise alle Eigenschaften, die Relationen $<, >$ sind nur transitiv, die Relationen $\leq, \geq, |$ sind transitiv und reflexiv.

Untersuche die Mengenrelationen „$\subset, \subsetneq, =,$ *disjunkt*" (auf der Menge aller Mengen $\mathbb{M}$) auf ihre Eigenschaften. (Begründung oder Gegenbeispiel!)

Beispiel 4.3 (Mengenoperationen)
Untersuche die Mengenoperationen „$\cap, \cup, \setminus$ " auf Kommutativität und Assoziativität. (Beweis oder Gegenbeispiel)

Zeige durch Verwendung eines Venn-Diagramms, dass gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

.
Zusatz: Beweise die obige Aussage.
(*Hinweis: Die Mengengleichheit lässt sich auf zwei Varianten gut zeigen. 1. kannst du dir mit Hilfe der Definitionen die linke und die rechte Menge des Gleichheitszeichens aufstellen und argumentieren, warum es sich um dieselben handelt. Die zweite Variante ist die elegantere. Verwende die Definition der Mengengleichheit $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$ und beweise jeweils die Gültigkeit der Teilmengenrelation. Dafür zeigst du, dass ein beliebiges Element der linken Menge ein Element der rechten Menge sein muss und umgekehrt.*

Beispiel 4.4 (Potenzmenge)
Die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) einer Menge M, ist die Anzahl der in M enthaltenen Elemente. Man schreibt

$$|M| \text{ oder } \#M$$

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

$$\mathcal{P}(M) = \{A | A \subset M\}$$

Beachte, dass immer $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$ gilt.

Bestimme für die Mengen $A, B: \quad |A|, |B|, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$.
$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3, 5\}$
Findest du eine Gesetzmäßigkeit für die Mächtigkeit der Potenzmenge einer beliebigen Menge M? (Kein Beweis nötig)

Beispiel 4.5 (Gleichungen)

i) Beweise, dass eine (nach Def 6.4) reelle lineare Gleichung immer genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt und bestimme diese Lösung.

ii) Argumentiere, welche Möglichkeiten es für $\#\mathbb{L}$ einer (nach Def 6.5) reellen quadratischen Gleichung gibt. (Du darfst das Resultat aus Rechenregel 6.6 verwenden).

iii) Beweise die große quadratische Lösungsformel.
(*Hinweis: Unter Umständen fällt es dir leichter, mit der Lösungsformel zu starten und bei der Grundform zu enden. Sind alle Schritte Äquivalenzen, so ist es egal ob man von vorne nach hinten oder von hinten nach vorne argumentiert.*

Beispiel 4.6
Finde alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen **ohne** Verwendung von quadratischen Lösungsformeln (Stichwort: Ergänzen auf Quadrate). Beweise außerdem, ob es sich um eine lineare oder quadratische Gleichung handelt.

i) $2(x - 3) + 4 = 3(1 - x)$

ii) $2(x - 2)(2x + 3) = 4(x - 1) - (2x - 3)^2$

iii) $4x^2 + 9x = 5(x + 2) - 2$

iv) $x^2 - 2x = 8$