

SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK

Ingák

JEGYZŐKÖNYV

Jakobi Ádám

2021.03.08.



Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. Elméleti bevezetés	2
2.1. Matematikai inga, csillapítás, gerjesztés	2
2.2. Inga energiája	3
2.3. Fizikai inga	3
2.4. Numerikus módszerek	5
2.4.1. Euler algoritmus	5
2.4.2. Euler-Cromer módszer	5
2.4.3. Negyedrendű Runge-Kutta módszer (RK4)	6
2.4.4. Adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer (ARK4)	6
3. Kiértékelés	7
3.1. Egyszerű inga	7
3.1.1. Matematikai inga grafikonok	8
3.1.2. Csillapított inga grafikonok	9
3.1.3. Gerjesztett inga grafikonok	10
3.1.4. Csillapított és gerjesztett inga grafikonok	11
3.1.5. Futási idők	12
3.1.6. Eredmények részletezése	12
3.2. Kettős inga	13
4. Diskusszió	14

1. Bevezető

A második beadandó során célunk az ingamodellek különböző közelítéseinek (matematikai, csillapított, gerjesztett és fizikai) mozgásának vizsgálata különböző numerikus differenciálegyenlet megoldó módszerek segítségével, melyek az Euler algoritmus, az Euler-Cromer-módszer, az egyszerű negyedrendű Runge-Kutta-módszer, illetve a lépéshossz-váltó (adaptív) negyedrendű Runge-Kutta-módszer. További cél a matematikai kettős inga szimulációja, trajektóriájának, fázisterének és átbillenési jelenségeinek vizsgálata és vizualizációja.

A feladat során rendelkezésre álló c++ forrásfájl átírásával, mely eredetileg az egyszerű ingát szimulálta az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer segítségével, a különböző numerikus módszerek vizsgálata is lehetővé válik.

2. Elméleti bevezetés

2.1. Matematikai inga, csillapítás, gerjesztés

A matematikai inga mozgásegyenlete levezethető a Newton-törvényekből:

$$F = ma$$

Inga esetén (merev, tömeg nélküli rúd végén tömegpont) az eredő erő mindig tangenciális irányú, képlettel kifejezve:

$$F = m(-g \sin(\Theta))$$

Ebből m-el osztva kapjuk:

$$a = -g \sin(\Theta)$$

polárkoordinátákra történő átállás során definiálnunk kell az ívhosszt:

$$s = l\Theta$$

,

ahol s az ívhossz, l a rúd hossza és Θ az elfordulás szöge a függőlegeshez képest (ahol a függőleges a gravitációs gradiens iránya). Innen idő szerinti deriválásokból kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -g \sin(\Theta)$$

Így a matematikai inga mozgásegyenlete:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l} \sin(\Theta)$$

A fenti kifejezést kibővítve megkaphatjuk a csillapított és gerjesztett inga mozgásegyenletét:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l} \sin(\Theta) - q \frac{d\Theta}{dt} + F_D \sin(\Omega_D t)$$

,

ahol q a súrlódási együttható, F_D a külső periodikus gerjesztő erő amplitúdója, Ω_D a gerjesztő erő szögfrekvenciája, $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pedig az inga saját frekvenciája.

Kritikus csillapításról beszélünk, ha $\Omega = \frac{q}{2}$ és túlcillapításról, ha $\Omega < \frac{q}{2}$.

A csillapítás hatására a következő tranziens viselkedés áll fenn:

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{qt}{2}} \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}} t + \Phi\right)$$

A tranziens lecsengése után a gerjesztő erő vezérli a rendszert. Kis kitérésekre (lineáris közelítés) a modell analitikusan megoldható:

$$\Omega(t) = \frac{F_D \sin(\Omega_D t + \Phi)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2}}$$

(A kis kitérésekre használható lineáris közelítéstől a későbbiekben eltekintek.)

2.2. Inga energiája

Az inga energiáját megkaphatjuk annak mozgási és helyzetienergiájából (tömegpont esetében, ahol nem kell foglalkoznunk az ingatest forgási energiájával), így az energiára vonatkozó egyenlet:

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}m(L\omega)^2$$

A későbbiekben a tömeget egységnyinek ($m = 1$) vettem.

2.3. Fizikai inga

A fizikai inga egy M tömegű kiterjedt test, melyet egy pontján rögzítenek úgy, hogy a rögzítési pont körül szabadon elforoghasson. F legyen a felfüggesztési pont és S pedig a test súlypontja. Egyensúly esetén ($\Theta = 0$) az \overline{FS} egyenes párhuzamos a gravitációs mező skalárpotenciáljával ($\nabla\Phi$), vagyis a földre merőleges. Ezekkel a feltételekkel a fizikai inga mozgásegyenlete felírható a következőképpen:

$$I_P \ddot{\Theta} = \tau_F$$

ahol τ_F az F pontban lévő forgatónyomaték, I_P pedig az ingatest skalár tehetetlenségi nyomatéka a P pontban. Tegyük fel, hogy a fizikai inga tömege a tömegközéppontjában koncentrálódik. Ekkor:

$$\tau_F = Mgd \sin(\Theta)$$

ahol d a felfüggesztés és a súlypont távolsága. Így:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{Mgd}{I_P} \sin(\Theta)$$

Bevezetve az $l_{eff} = \frac{I_P}{Md}$ redukált hosszt:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l_{eff}} \sin(\Theta)$$

A következtetés tehát, hogy a fizikai ingát a matematikai ingához hasonlóan tudjuk szimulálni egy redukált hossz bevezetésének segítségével, így a későbbiekben a fizikai ingához kapcsolódó számolásokról eltekintek.

A kettős inga mozgásegyenletének kiszámításához szükségünk van a rendszer Lagrange-függvényére. Ennek segítségével a mozgásegyenlet kifejezhető a variációs módszer és az Euler-Lagrange-egyenlet kifejtésének segítségével.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 L_1 \omega_1^2 \sin(2d\theta) + 2m_2 L_2 \omega_2^2 \sin(d\theta) + 2gm_2 \cos(\theta_2) \sin(d\theta) + 2gm_1 \sin(\theta_1) + \gamma_1}{-2L_1 (m_1 + m_2 \sin^2(d\theta))} \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 L_2 \omega_2^2 \sin(2d\theta) + 2(m_1 + m_2) L_1 \omega_1^2 \sin(d\theta) + 2g(m_1 + m_2) \cos(\theta_1) \sin(d\theta) + \gamma_2}{2L_2 (m_1 + m_2 \sin^2(d\theta))} \quad (2)$$

m , L , θ és ω megfelelő indexekkel ellátott mennyiségek rendre az adott inga tömegét, kötéltávolságát, kitérésének szögét, valamint szögsebességét jelölik. Az 1-es index közvetlenül a felfüggesztéshez, míg a 2-es az alsó, magához az elsőhöz rögzített ingát jelöli. A g mennyiség a gravitációs gyorsulás.

Többek között még a mozgásegyenletekben szereplő γ_1 és γ_2 mennyiségek az alábbiakat takarják:

$$\gamma_1 = 2\alpha - 2\beta \cos(d\theta) \quad (3)$$

$$\gamma_2 = 2\alpha \cos(d\theta) - \frac{2(m_1 + m_2)}{m_2} \beta \quad (4)$$

Ahol használtuk az első testre ható

$$\alpha = q_1 \omega_1 - F_{D_1} \sin(\Omega_{D_1} t) \quad (5)$$

valamint a második testre ható

$$\beta = q_2 \omega_2 - F_{D_2} \sin(\Omega_{D_2} t) \quad (6)$$

gerjesztő-csillapító hatások jelölését. Ezekben Ω_D és F_D - a megfelelő indexekkel - a gerjesztés frekvenciáját és amplitúdóját jelöli, míg az itt és fentebb megjelenő $d\theta = \theta_1 - \theta_2$, a két inga kitérésének különbsége.

2.4. Numerikus módszerek

A fent leírt differenciálegyenletet numerikus úton oldjuk meg, vagyis az időben változó mennyiségeket egy kicsi δt időbeli lépés során frissítjük a differenciálegyenlet szerint. Inga esetében ezek a mennyiségek az idő (t), a kitérési szög (θ), a szögsebesség ($\omega = \dot{\theta}$) és a szöggyorsulás ($\beta = \ddot{\theta}$). A szöggyorsulást egy adott pontban, ismerve a t , θ és ω mennyiségeket egzakt ki tudjuk számolni. A t mennyiség léptetése mindig az aktuálisan választott lépéshossz, a θ és ω mennyiségeket pedig a hozzájuk tartozó deriváltak segítségével tudjuk frissíteni. A frissítés mikéntje algoritmusonként változik, mi a következőkben az Euler, Euler-Cromer, negyedrendű Runge-Kutta (RK4) és adaptív negyedrendű Runge-Kutta (ARK4) algoritmusokat próbáljuk ki.

2.4.1. Euler algoritmus

Az elsőrendű, explicit Runge-Kutta módszert hívjuk Euler algoritmusnak, lokális csonkolási hibája (LTE) $\mathcal{O}(\delta t^3)$, a globális csonkolási hibája pedig $\mathcal{O}(\delta t^2)$. A feladat során használt módszerek közül az Euler algoritmus numerikusan a legkevésbé stabil. Az algoritmus az inga esetére nézve a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n + \delta t \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega_n \delta t \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \beta_n \delta t \\ \beta_n &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) - q\omega + F_D \sin(\omega_D t)\end{aligned}$$

2.4.2. Euler-Cromer módszer

Az Euler-Cromer módszer egy szemi implicit elsőrendű Runge-Kutta módszer, explicit verziójától (Euler algoritmus) csak abban tér el, hogy a kitérést egy lépésben nem a hozzátartozó szögsebesség, hanem a már léptetett szögsebesség segítségével frissíti:

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n + \delta t \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \beta_n \delta t \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega_{n+1} \delta t \\ \beta_n &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) - q\omega + F_D \sin(\omega_D t)\end{aligned}$$

Az Euler-Cromer módszer már numerikusan stabil az Euler algoritmussal szemben.

2.4.3. Negyedrendű Runge-Kutta módszer (RK4)

A negyedrendű Runge-Kutta módszer explicit Runge-Kutta módszer, lokális csonkolási hibája (LTE) $\mathcal{O}(\delta t^5)$, a globális csonkolási hibája pedig $\mathcal{O}(\delta t^4)$, numerikusan stabil. Felépítése a következő:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= f(t_n + \delta t, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{\delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

,

ahol f a léptetéshez szükséges deriváltfüggvény az adott helyen és időben. Az implementáció során az idő, kitérési szög és szögsebesség mennyiségeket vektorként kezeltem, az f derivált függvény pedig az adott vektorkomponensekhez tartozó deriváltakat adja vissza a következő módon:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dt} &= 1 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \beta \\ \beta_n &= -\frac{g}{l} \sin(\theta) - q\omega + F_D \sin(\omega_D t)\end{aligned}$$

2.4.4. Adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer (ARK4)

Az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer annyival tér el a nem adaptív változattól, hogy lépéshosszát a lokális hiba szerint változtatja: ha bármelyik mennyiség becsült hibája meghaladja a pontossági paramétert, a lépéshossz lecsökken, majd az adott lépést és hibáját újra számolja az algoritmus az új lépéshosszal. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a lépéshez tartozó hiba nagyon alacsony értéket ad, csak akkor a lépéshosszt nem csökkenteni, hanem növelni fogjuk, amíg a hiba megfelelő tartományba nem kerül. A becsült hiba kiszámítási módja az, hogy minden lépést kétszer végzünk el: első verzióban, az egyszerű negyedrendű Runge-Kuttához hasonlóan kiszámolunk egy teljes lépést, a második verzióban pedig két fél lépést teszünk meg, majd megnézzük a két verzió közötti eltérést, mely megadja a becsült lokális csonkolási hibát az adott lépésre.

A mérések során használt pontossági paraméter $accuracy = 10^{-6}$ volt.

3. Kiértékelés

3.1. Egyszerű inga

Először ábrázolom a kapott eredményeket a megadott paraméterek során, utána részletezem az eredményeket. Az ábrák elkészítéséhez írtam egy python függvényt, ami használható tetszőleges $m \times n$ -es ábra elkészítéséhez. A paraméterek jelentése a következő:

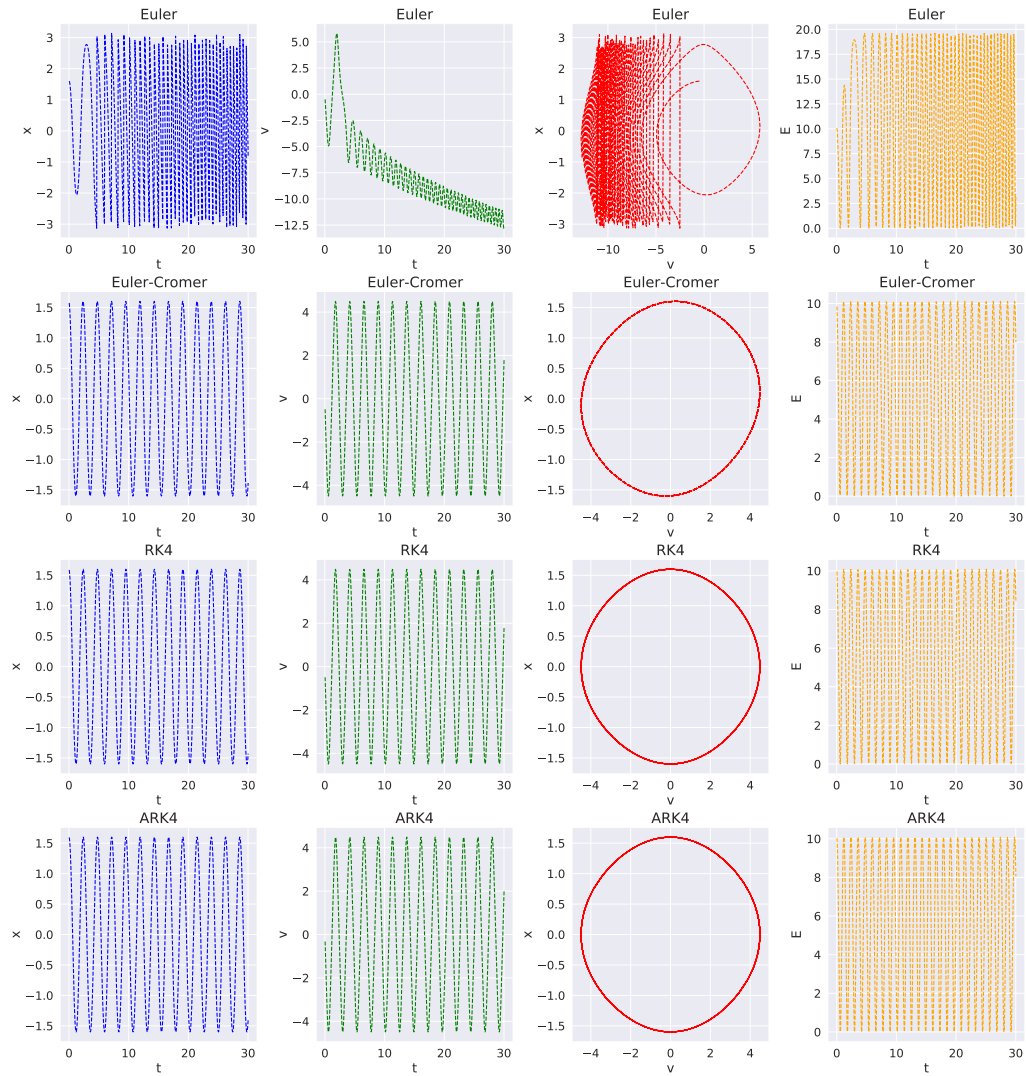
- m : tömegpont tömege
- L : inga hossza
- q : súrlódási együttható
- Ω_D : külső periodikus gerjesztő erő szögfrekvenciája
- F_D : külső periodikus gerjesztő erő amplitúdója
- $\theta(0)$: kiindulási szög radiánban
- $\omega(0)$: kiindulási szögfrekvencia
- T_{max} : számítási időtartam

Az ábrák fölötti címek jelentése alább látható:

- Euler : Euler módszer
- Euler-Cromer : Euler-Cromer módszer
- RK4 : negyedrendű Runge-Kutta
- ARK4 : adaptív negyedrendű Runge-Kutta

3.1.1. Matematikai inga grafikonok

Matematikai inga

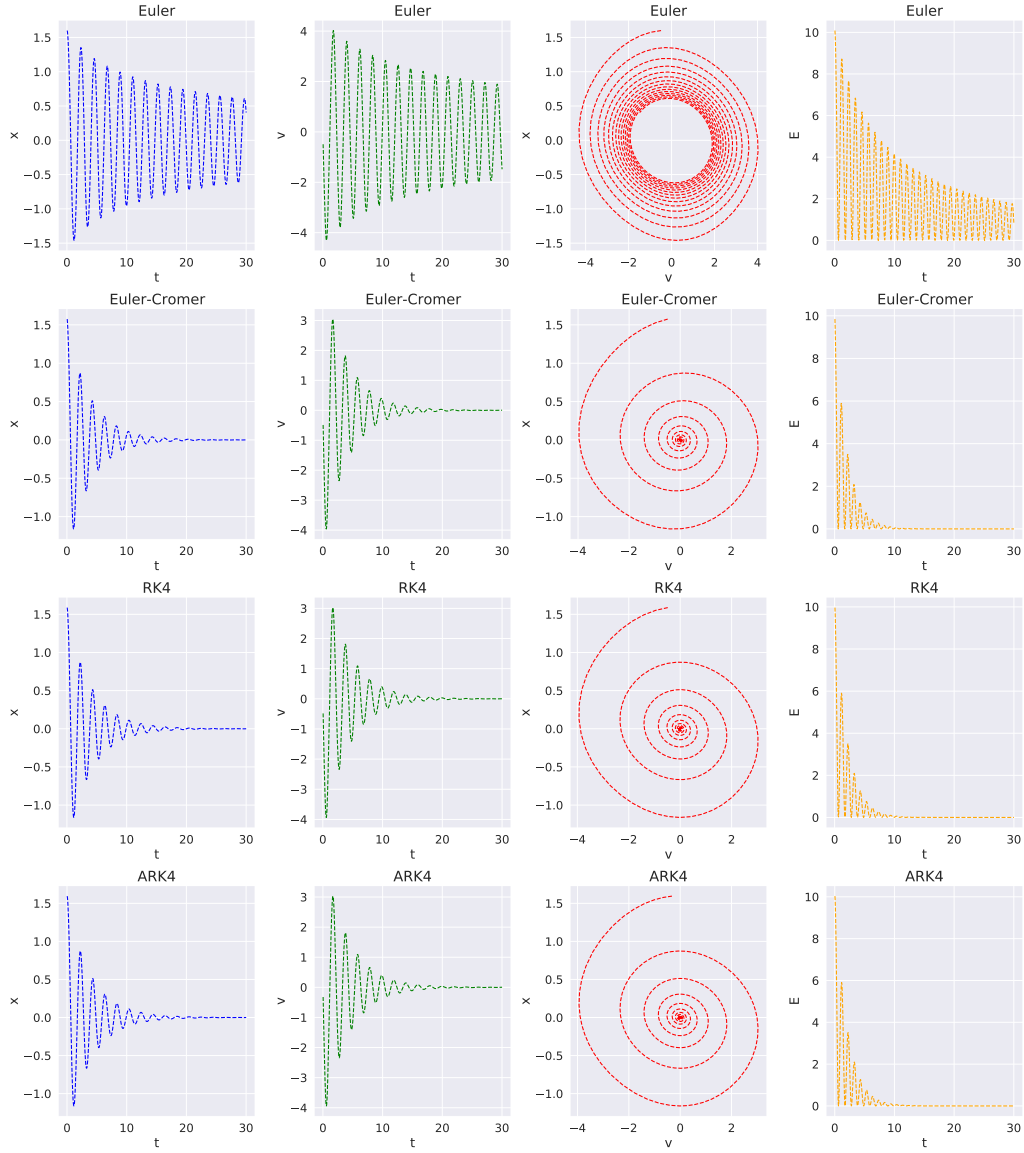


1. ábra. Matematikai inga grafikonjai.

Az inga paramétereit: $L = 1$; $q = 0$; $\Omega_D = 0$; $F_D = 0$; $\theta(0) = 1.6$; $\omega(0) = 0$; $T_{max} = 30$.

3.1.2. Csillapított inga grafikonok

Csillapított inga

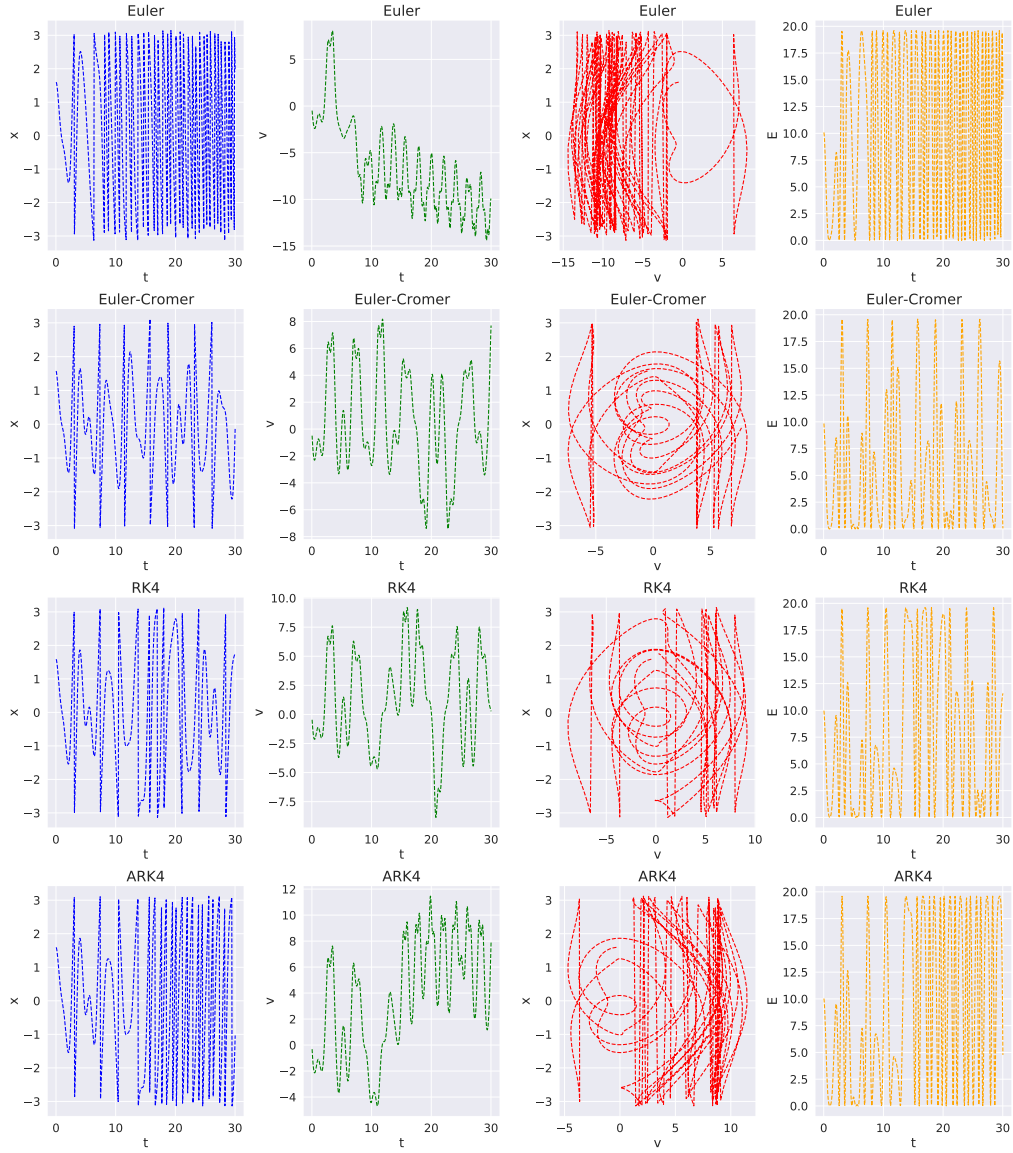


2. ábra. Csillapított inga grafikonjai.

Az inga paramétereit: $L = 1$; $q = 0.5$; $\Omega_D = 0$; $F_D = 0$; $\theta(0) = 1.6$; $\omega(0) = 0$; $T_{max} = 30$.

3.1.3. Gerjesztett inga grafikonok

Gerjesztett inga

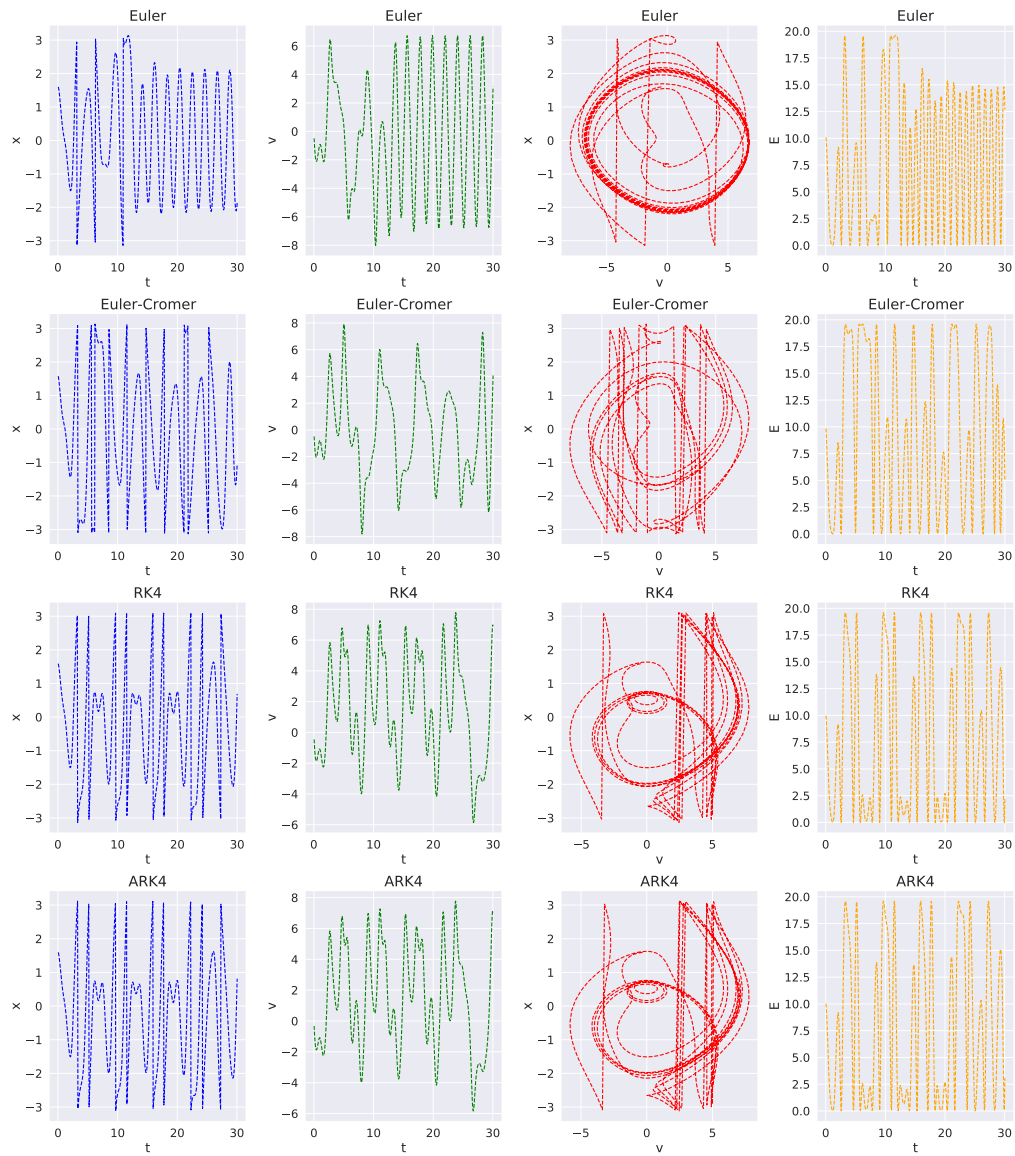


3. ábra. Gerjesztett inga grafikonjai.

Az inga paramétereit: $L = 1$; $q = 0$; $\Omega_D = 3$; $F_D = 8$; $\theta(0) = 1.6$; $\omega(0) = 0$; $T_{max} = 30$.

3.1.4. Csillapított és gerjesztett inga grafikonok

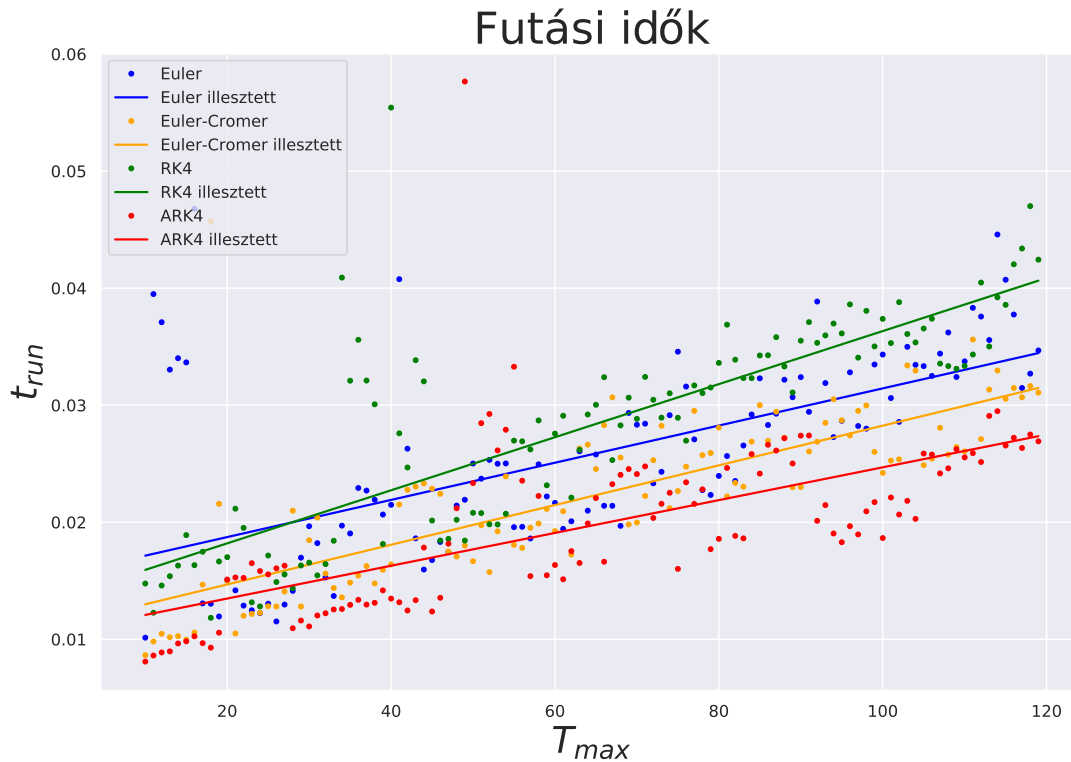
Csillapított és gerjesztett inga



4. ábra. Csillapított és gerjesztett inga grafikonjai.

Az inga paramétereit: $L = 1$; $q = 0.5$; $\Omega_D = 3$; $F_D = 8$; $\theta(0) = 1.6$; $\omega(0) = 0$; $T_{max} = 30$.

3.1.5. Futási idők



5. ábra. Futási idők ábrázolása, x tengelyen a szimuláció tervezett ideje (T_{max}), az y tengelyen pedig az adott T_{max} -hoz tartozó futási idő.

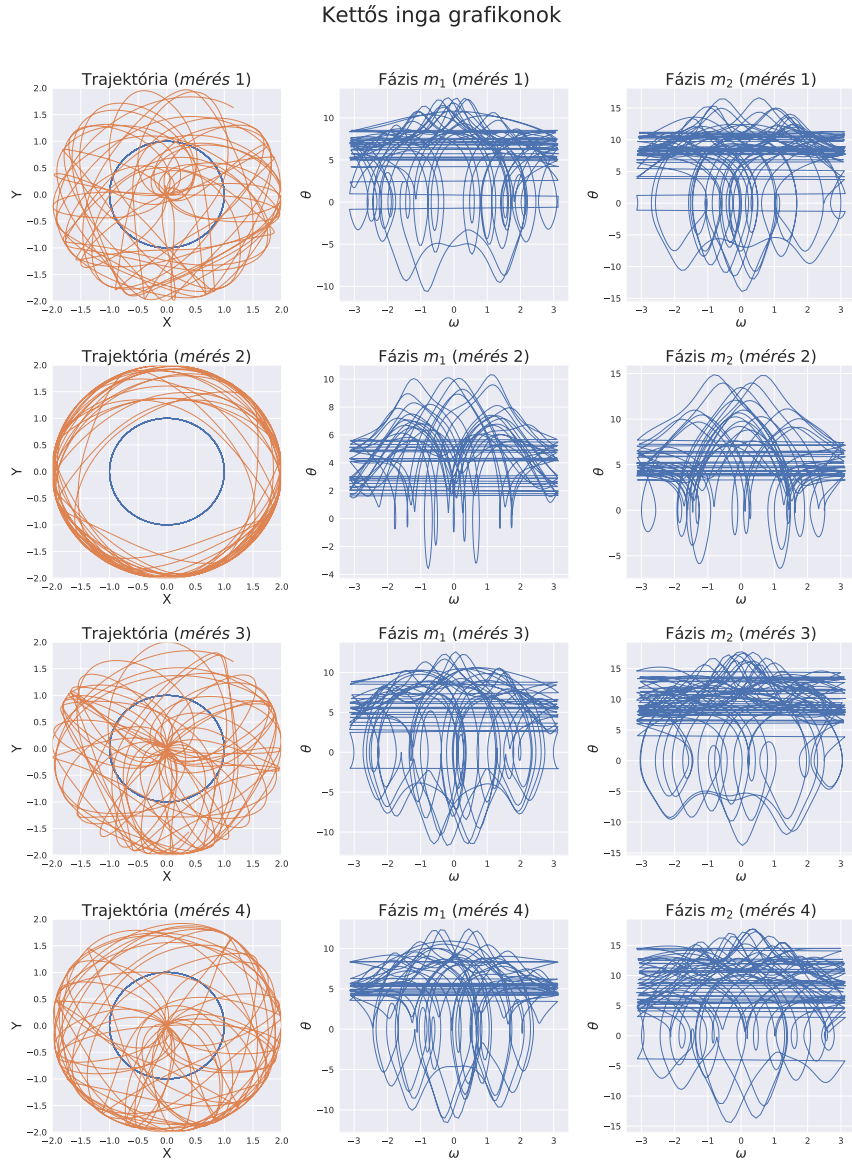
3.1.6. Eredmények részletezése

Mint azt korábban is írtam, az Euler módszer numerikusan a legkevésbé stabil a használt algoritmusok közül, ez az ábrákból világosan látszik (egész más eredményeket ad, mint a többi verzió, az energia sem marad meg ott, ahol kéne). Az Euler-Cromer módszer többnyire stabil, de nem annyira pontos, mint a negyedrendű Runge-Kutta algoritmusok. A negyedrendű Runge-Kutta módszer majdnem mindenhol azonos eredményt adott, mint adaptív változata, de pár helyen (a gerjesztett inga esetében) a jelenleg használt 0.05-ös lépéshosszal az adaptív változata pontosabb eredménnyel tudott szolgálni.

Futási időket tekintve az Euler és Euler-Cromer meredeksége közel azonos, az eltérés elméletileg csak véletlen hiba, ugyanis az Euler és Euler-Cromer módszer lépéseinek száma azonos. Hosszú futtatásokra az Euler algoritmus futási ideje az egekbe szökik, de ez csak annak a következménye, hogy az Euler algoritmus numerikusan instabil, és a futtatásom során a változóim értékei elszállnak, ami már kezelhetetlen méretű számokat eredményez (ez növeli meg valójában a futási időt). A leglassabb a futási idők közül (legnagyobb meredekséggel) a negyedrendű Runge-Kutta, a leggyorsabb pedig az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer volt (több lépésből áll, mint másodrendű társai, de ideális lépéshosszokat választva még így is le tudta őket hagyni).

3.2. Kettős inga

A kettős inga csillapítás és külső gerjesztő erő hiányában is kaotikus mozgást végez, ezért a kettős ingával végzett mérések során ezt a tulajdonságát szeretném érzékeltetni. Négy mérést végeztem, mindegyiket közel azonos paraméterekkel, az eredmények azonban teljes mértékben eltérőek lettek egymástól. A mérésekhez a negyedrendű Runge-Kutta módszert használtam $\delta t = 0.01$ -es lépéshosszal.



6. ábra. Kettős inga ábrák, a négy mérés legtöbb paramétere megegyezik ($m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\Omega_{1D} = 0$, $\Omega_{2D} = 0$, $F_{1D} = 0$, $F_{2D} = 0$, $\theta_1 = 2.5$, $\theta_2 = 2.5$, $\omega_2 = 0$, $T_{max} = 30$), a mérések egymástól csak az első tömegük kezdeti szögfrekvenciájában térnek el, értékük rendre $\omega_{11} = 5$, $\omega_{12} = 5.1$, $\omega_{13} = 5.2$, $\omega_{14} = 5.3$.

Az átbillenési jelenség szemléletesebb vizualizációja céljából elkészítettem a kettős inga animációját. Az animáció mind a négy mérést egyszerre tartalmazza, így a kaotikus viselkedés is jobban megfigyelhetővé válik.

Az animáció megtalálható a feladat mappájában (*double_pendulum.avi*).

4. Diszkusszió

A feladat során ingamodellek különböző közelítéseinek (matematikai, csillapított, gerjesztett és fizikai) mozgását vizsgáltam numerikus differenciálegyenlet megoldó módszerek segítségével. Összehasonlítottam egymással az Euler-módszert, az Euler-Cromer-módszert, az egyszerű negyedrendű Runge-Kutta-módszert, illetve a lépéshossz-váltó (adaptív) negyedrendű Runge-Kutta-módszert. Ezen kívül elvégeztem a matematikai kettős inga szimulációját, trajektóriájának, fázisterének és átbillenési jelenségeinek vizsgálatát és vizualizációját.

A különböző közelítéseket és módszereket c++ nyelven implementáltam a tárgy honlapján található példakód segítségével, az innen kapott adatokat Python 3 notebookkal ábrázoltam.