

SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK

# Bolygómozgás

## JEGYZŐKÖNYV

Jakobi Ádám

2021.03.09.



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>2</b>
<b>2. Elméleti bevezetés</b>	<b>2</b>
2.1. Kepler-törvények . . . . .	2
2.2. Kepler-probléma egzakt megoldása . . . . .	3
2.3. A háromtest-probléma . . . . .	4
<b>3. Megoldás módszerei</b>	<b>5</b>
3.1. Differenciálegyenlet megoldó módszerek . . . . .	5
3.1.1. Negyedrendű Runge-Kutta módszer (RK4) . . . . .	5
3.1.2. Adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer (ARK4) . . . . .	6
3.2. Kezdeti feltételek . . . . .	6
3.3. Tengelymetszet . . . . .	7
<b>4. Kiértékelés</b>	<b>7</b>
4.1. Első, második és harmadik feladat . . . . .	7
4.2. Háromtest probléma . . . . .	8
<b>5. Diskusszió</b>	<b>8</b>
<b>6. Függelék</b>	<b>9</b>

# 1. Bevezető

Mostani feladatunk során bolygómozgások szimulációját szeretnénk elkészíteni. Ehhez különböző differenciálegyenlet megoldó numerikus módszereket fogunk használni, például a negyedrendű és az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszereket. Kipróbálunk majd különböző paraméter beállításokat, vizsgálni fogjuk az algoritmusok működését és stabilitását. Meg fogjuk nézni a Naprendszer tetszőleges bolygójának mozgását, vizsgáljuk a Merkúr relativitás elméletből következő precesszióját és megpróbáljuk szimulálni a háromtest problémát.

## 2. Elméleti bevezetés

### 2.1. Kepler-törvények

A bolygómozgás egyik úttörő kutatója volt Kepler, aki rájött (Tycho Brahe csillagászati megfigyelései alapján) három fontos összefüggésre, melyeket ma Kepler törvényeknek nevezünk:

1. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában van a Nap.
2. A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területet sűrol.
3. A bolygók Naptól való átlagos távolságainak, azaz a pálya fél nagytengelyeinek (a) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük (T) négyzetei. Tehát az  $\frac{a^3}{T^2}$  hányados minden bolygó esetén ugyanakkora (ha azok ugyanabban a naprendszerben keringenek).

A törvényeket később Isaac Newton vezette le a gravitációs elmélete alapján. A gravitációs elmélet alapján több általánosítás tehető:

- A törvények nem csak egy bolygó-csillag párosra, hanem bolygó körül keringő holdakra és műholdakra, illetve bármely nagy tömegű égitest körül keringő más égitestekre is igazak.
- A természetben nem csak kötött ellipszis alakú pályák lehetségesek, hanem parabola és hiperbola is lehetséges.

Kepler törvényei Newton gravitációs törvényéből vezethetőek le:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

A középpontba mutató erők következtében a perdület megmarad, így a pályák síkban helyezkednek el.

Észrevételek:

- A Nap tömege legalább ezerszerese bármely más bolygó tömegének.

- Feltehetjük, hogy a Nap mozdulatlan, illetve elhanyagolhatjuk a bolygó tömegét.
- Bolygó-hold, csillag-csillag rendszerek esetén a tömegek nem hanyagolhatóak el, ekkor a tömegközéppont lesz mozdulatlan (redukált tömeg).

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

## 2.2. Kepler-probléma egzakt megoldása

Naprendszerünkre tehát felírhatjuk a Kepler-probléma analitikus megoldását. A Nap körül keringő bolygók mozgását polár koordinátákkal kifejezve a következő egyenleteket kapjuk (feltéve, hogy a koordináta-rendszerünk középpontja a Nap és az ellipszispályák nagytengelye egybe esik az x tengellyel):

- pályasugár:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}, \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$$

,

ahol  $\epsilon$  az excentricitás ( $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ).

- pályasebesség:

$$v = \sqrt{G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

,

- teljes energia (a kinetikus és a potenciális energia együtt):

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{2a}$$

,

- keringési idő (Kepler 3. törvényéből):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

,

- perdület:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (\mu \vec{v})$$

.

## 2.3. A háromtest-probléma

Első ránézésre a probléma egyszerű: van három tömegpontunk  $(m_1, m_2, m_3)$ , három pozíciónk  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$  és minden tömegpontra egy egyenletünk:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy analitikusan csak nagyon kevés eset kezelhető és a megoldások erősen függenek a kezdeti feltételektől. Az analitikusan kezelhető esetek közé tartoznak a következők:

- síkbeli háromtest-probléma: mind a három test egy közös síkban mozog,
- korlátozott háromtest-probléma:  $m_3 = 0$ , ekkor  $m_1, m_2$  Kepler-pályán mozog, míg a harmadik körülöttük kering.

Általában a háromtest-problémák nem síkbeliek, de például a Naprendszer jó közelítéssel annak tekinthető.

- háromtest-probléma erőtvénnyei:

$$\vec{a}_1 = -G \frac{m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - G \frac{m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13}$$

$$\vec{a}_2 = -G \frac{m_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - G \frac{m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23}$$

$$\vec{a}_3 = -G \frac{m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - G \frac{m_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32}$$

- relatív pozíciók:

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2, \quad \vec{s}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad \vec{s}_3 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- mozgásegyenletek:

$$\frac{d^2 \vec{s}_i}{dt^2} = -G \frac{m}{s_i^3} \vec{s}_i + m_i \vec{G}$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad \vec{G} = G \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{s}_i}{s_i^3}$$

### 3. Megoldás módszerei

A bolygómozgás szimuláció numerikus megoldásához a negyedrendű Runge-Kutta és az adaptív negyedrendű Runge-Kutta differenciálegyenlet megoldó módszereket fogom alkalmazni, melyeket a következő alfejezetben tárgyalok.

#### 3.1. Differenciálegyenlet megoldó módszerek

##### 3.1.1. Negyedrendű Runge-Kutta módszer (RK4)

A negyedrendű Runge-Kutta módszer explicit Runge-Kutta módszer, lokális csonkolási hibája (LTE)  $\mathcal{O}(\delta t^5)$ , a globális csonkolási hibája pedig  $\mathcal{O}(\delta t^4)$ , numerikusan stabil. Felépítése a következő:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= f(t_n + \delta t, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{\delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

,

ahol  $f$  a léptetéshez szükséges deriváltfüggvény az adott helyen és időben. Az implementáció során az idő, elmozdulás és sebesség mennyiségeket vektorként kezeltem, az  $f$  derivált függvény pedig az adott vektorkomponensekhez tartozó deriváltakat adja vissza a következő módon:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dt} &= 1 \\ \frac{dr_x}{dt} &= v_x \\ \frac{dr_y}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -Gm_{Sun} \frac{r_x}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -Gm_{Sun} \frac{r_y}{(r_x^2 + r_y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

### 3.1.2. Adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer (ARK4)

Az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszer annyival tér el a nem adaptív változattól, hogy lépéshosszát a lokális hiba szerint változtatja: ha bármelyik mennyiség becsült hibája meghaladja a pontossági paramétert, a lépéshossz lecsökken, majd az adott lépést és hibáját újra számolja az algoritmus az új lépéshosszal. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a lépéshez tartozó hiba nagyon alacsony értéket ad, csak akkor a lépéshosszt nem csökkenteni, hanem növelni fogjuk, amíg a hiba megfelelő tartományba nem kerül. Minél meredekebb a derivált, annál kisebb lépéshosszra van szükség ugyanazon pontosság eléréséhez. A becsült hiba kiszámítási módja az, hogy minden lépést kétszer végzünk el: első verzióban, az egyszerű negyedrendű Runge-Kuttához hasonlóan kiszámolunk egy teljes lépést, a második verzióban pedig két fél lépést teszünk meg, majd megnézzük a két verzió közötti eltérést, mely megadja a becsült lokális csonkolási hibát az adott lépésre.

## 3.2. Kezdeti feltételek

Az idő mértékegységét évnek, a távolságát csillagászati egységnek ( $1AU = 1,496 \cdot 10^{11} m$ ), a szögelfordulását pedig radiánnak választottam.

Az origót és a nagytengelyt az előzőeknek megfelelően állítom be (az origóban van a nap, a nagytengely pedig egybeesik az  $x$  tengellyel). A nap körül keringő bolygó a perihéliumból, azaz a közelpontból indul (ahol a bolygó az ellipszis pályán legközelebb helyezkedik a naphoz):

$$x(t=0) = a(1 + \epsilon)$$

A közelpontban a sebesség kizárólag  $y$  irányú komponenst tartalmaz, így az  $y$  irányú sebességkomponens kiszámítható a fenti pályasabességre vonatkozó képlet alapján:

$$v_y = \sqrt{G(m_1 + m_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

A  $G$  gravitációs állandó értéke kiszámítható Kepler harmadik törvényéből:

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2(m_1 + m_2)}a^3$$

A Nap-Föld keringési adatok behelyettesítésével meghatározható  $G(m_{Sun} + m_{Earth})$ :

$$G(m_{Sun} + m_{Earth}) = 4\pi^2 \frac{AU^3}{year^2}$$

Mivel a Nap tömege legalább három nagyságrenddel nagyobb, mint bármely más bolygó tömege a naprendszerben, megtehetjük a következő közelítéseket:

$$G(m_{Sun} + m_{Earth}) \approx G(m_{Sun} + m_{Planet}) \approx Gm_{Sun}$$

Az előző összefüggések alapján  $t = 0$  időpillanatban meghatározhatjuk a megadott paraméterek mellett az excentricitást és a fél nagytengely méretét is:

$$\epsilon = 1 - \frac{x(0)v_y(0)^2}{G(M_{Sun} + m_{Planet})}, \quad a = \frac{x(0)}{1 + \epsilon}$$

### 3.3. Tengelymetszet

A pálya vizsgálatához ki akarjuk íratni az  $x$ -tengely metszeteket. A szimuláció véges lépéshosszai miatt nem várható el, hogy pont a tengelyre essen egy-egy lépés, amikor keresztezzük az  $x$ -tengelyt, ezért vissza kell léptetnünk oda. Ehhez áttérünk egy lépés erejére  $t$ -ről  $y$ -ra, mint független változóra, és  $-y$ -os lépéshosszal visszalépünk az  $x$  tengelyre:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt}$$

A keresztezés észleléséhez minden lépés előtt elmentjük az  $y$  változó értékét ( $y_{save} = y_{i-1}$ , majd a léptetés utáni  $y_i$ -vel beszorozva megtudjuk határozni, hogy keresztezte-e a pálya az  $x$  tengelyt, hiszen a keresztezés pillanatában  $y$  előjelet vált, így ha történt keresztezés, akkor  $y_{save} \cdot y_i < 0$ , ellenkező esetben pedig  $y_{save} \cdot y_i > 0$ . ( $y_{save} \cdot y_i = 0$  esetén szintén keresztezés történt, bár erre nagyon kicsi az esély. Ebben az esetben nincs szükség visszaléptetésre.)

Ide megjegyzésként írom, hogy találtam egy hibát a forráskódban, az `interpolate_crossing` függvényben az  $x$  vektor referencia nélkül lett átadva (lemaradt az `&`), ezért eredetileg a függvény nem végezte el ténylegesen a visszaléptetést, csak a függvénynek lemásolt, majd utána törölt változókon.

## 4. Kiértékelés

### 4.1. Első, második és harmadik feladat

Az első három feladatot összevonva oldottam meg. Az első feladat részeként ábrázoltam a Merkúr trajektóriáját különböző módszerek (negyedrendű Runge-Kutta, adaptív negyedrendű Runge-Kutta) esetére, kipróbálva több lépéshossz és accuracy beállítási paramétert is. Az ábrákon feltüntettem a perihéliumot, aphéliumot és az őket összekötő nagytengelyt is a kezdeti időpillanatban, illetve a mérés végén. A hozzájuk tartozó labeleknél feltüntettem a nagytengely hosszát, illetve bezárt szögét az  $x$  tengelyre vonatkoztatva. A perihéliumot és aphéliumot a következő módon számoltam: a bolygó  $x$ - $y$  pozíciói alapján létrehoztam a sugár változót ( $r$ ), melynek megkerestem (egy simítás után) az összes minimum és maximum helyét. A legutolsó minimum és maximum helyen kapott  $x$ - $y$  koordináták adják a perihélium és aphélium pozícióit a mérés végén. A nagytengely hosszát és  $x$  tengellyel bezárt szögét a mérés végi perihélium és aphélium koordinátái segítségével számoltam. Az adaptív módszer ábráihoz scatter plotot készítettem, amely annyit jelent, hogy az ábrán megjelenő pontok különböző színt kapnak aszerint, hogy az adott pontból mekkora  $dt$  lépést tettek meg a következő pontba (az ábrák melletti *colorbar* mutatja a pontokhoz tartozó színkódot). Ezzel megvalósítottam a kettes



feladat elejét is, sikeresen ábrázoltam a lépéshosszt a pálya mentén. A második feladat másik részeként készítettem egy ábrát pár futási időről is. A harmadik feladat során az eredeti kódban a mozgási egyenletet ki kellett egészíteni egy korrekcióval, melyre az általános relativitás elmélet ad magyarázatot:

$$F = G \frac{m_{Sun} m_{Planet}}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

,

ahol  $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-8} AU^2$ . Ezzel az átalakítással 100 év alatt 43 ívmásodperc szögelfordulásra számítunk a Merkúr esetén (ezt az elfordulást nevezzük precessziónak). Ennek mérésére szolgál az ábrák közül a jobb felső sarokban elhelyezkedő  $accuracy = 1e - 15$  értékű mérése, mely a lehetőségeim közül a legpontosabb mérés volt, amit még belátható időn belül le tudtam futtatni. A Kepleri és Einsteini ábrákról leolvasható szögelfordulásuk, a kettő különbségéből pedig megkaphatjuk a precesszió szimulálásának eredményét. 43 ívmásodperc körülbelül  $2e - 4$  radiánnak felel meg, az előbb említett különbségből én  $1e - 4$  radiánt, vagyis a várt elfordulás felét kaptam meg (ennyire tudtam pontosan mérni a precessziót). A várt precesszió túl elfordulást az algoritmusok hibája okozza.

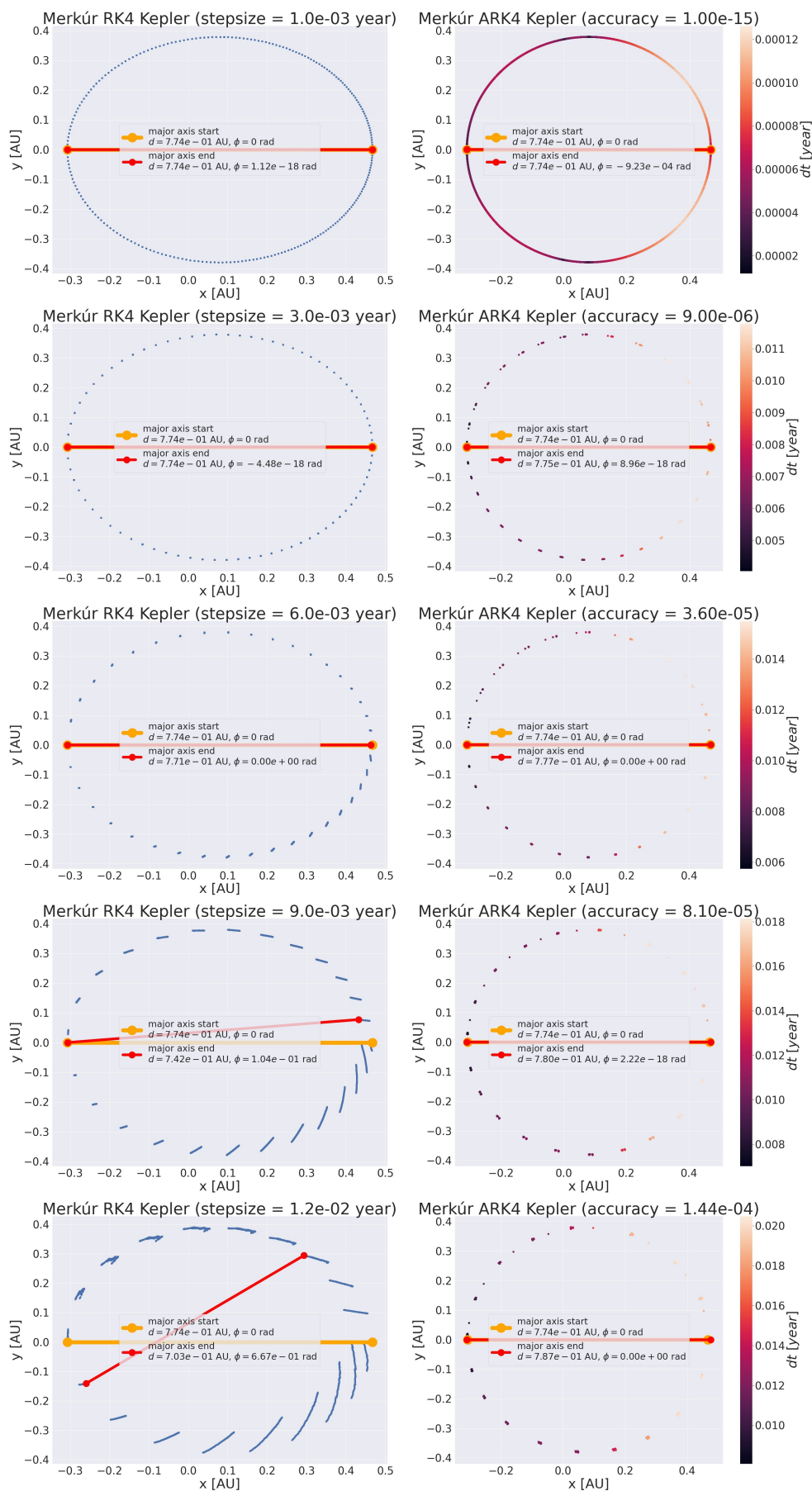
## 4.2. Háromtest probléma

A háromtest problémához az elméletben leírt mozgásegyenletek szerint írtam egy cpp forráskódot (mellékeltem a feladat mappájába). A forráskód segítségével legyártottam az ábrázoláshoz szükséges értékeket, az ábra a paraméterekkel megtalálható a függelékben. Szimulációt is készítettem, mely szintén megtalálható a feladat mappájában.

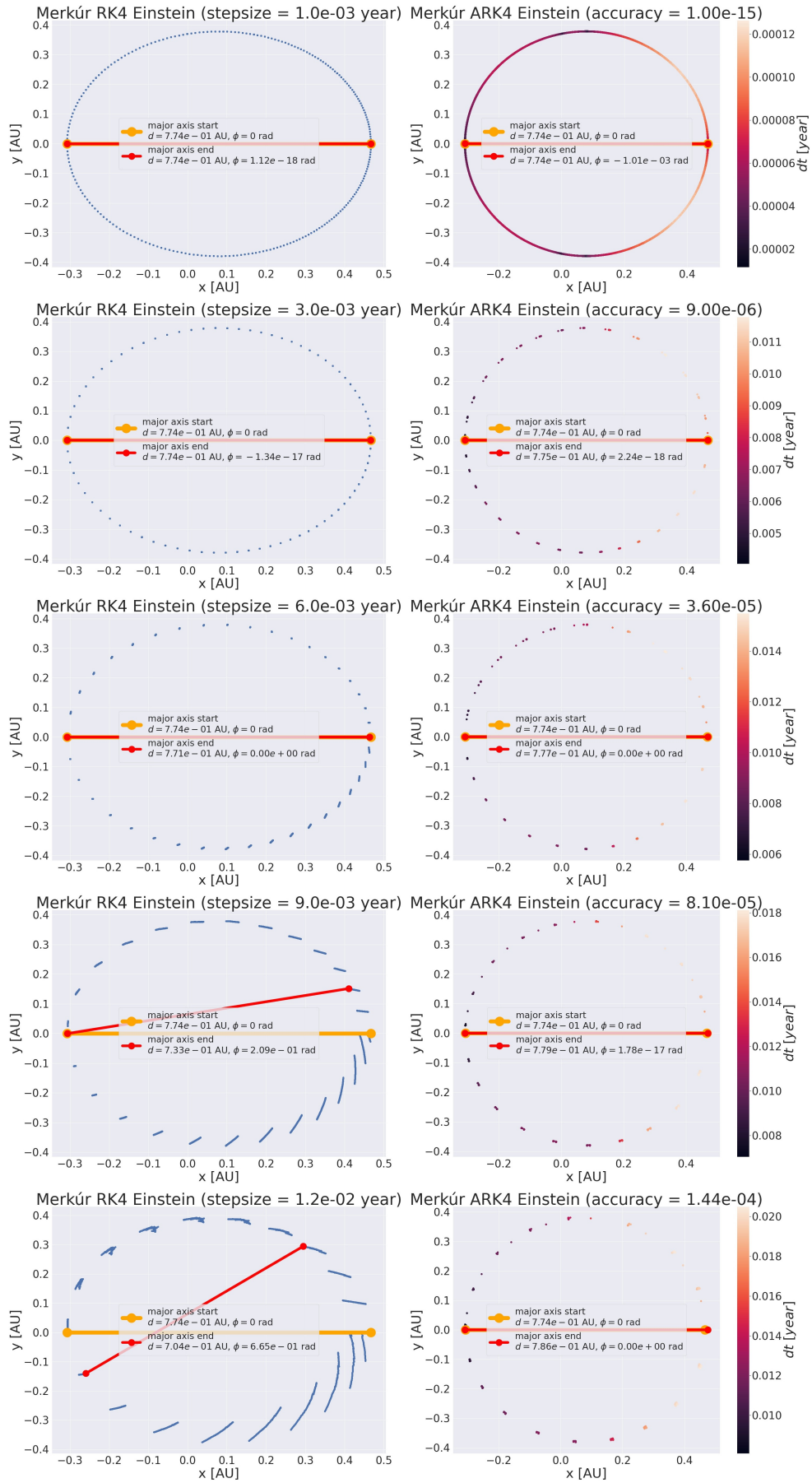
## 5. Diszkusszió

Mostani feladatunk során bolygómozgásokat szimuláltunk. Ehhez különböző differenciál-egyenlet megoldó numerikus módszereket használtunk, például a negyedrendű és az adaptív negyedrendű Runge-Kutta módszereket. Kipróbáltunk különböző paraméter beállításokat, vizsgáltuk az algoritmusok működését és stabilitását. Megnéztük a Merkúr mozgását és a relativitás elméletből következő precesszióját, vizsgáltuk az adaptív lépéshossz pályafüggését és szimuláltuk a háromtest problémát.

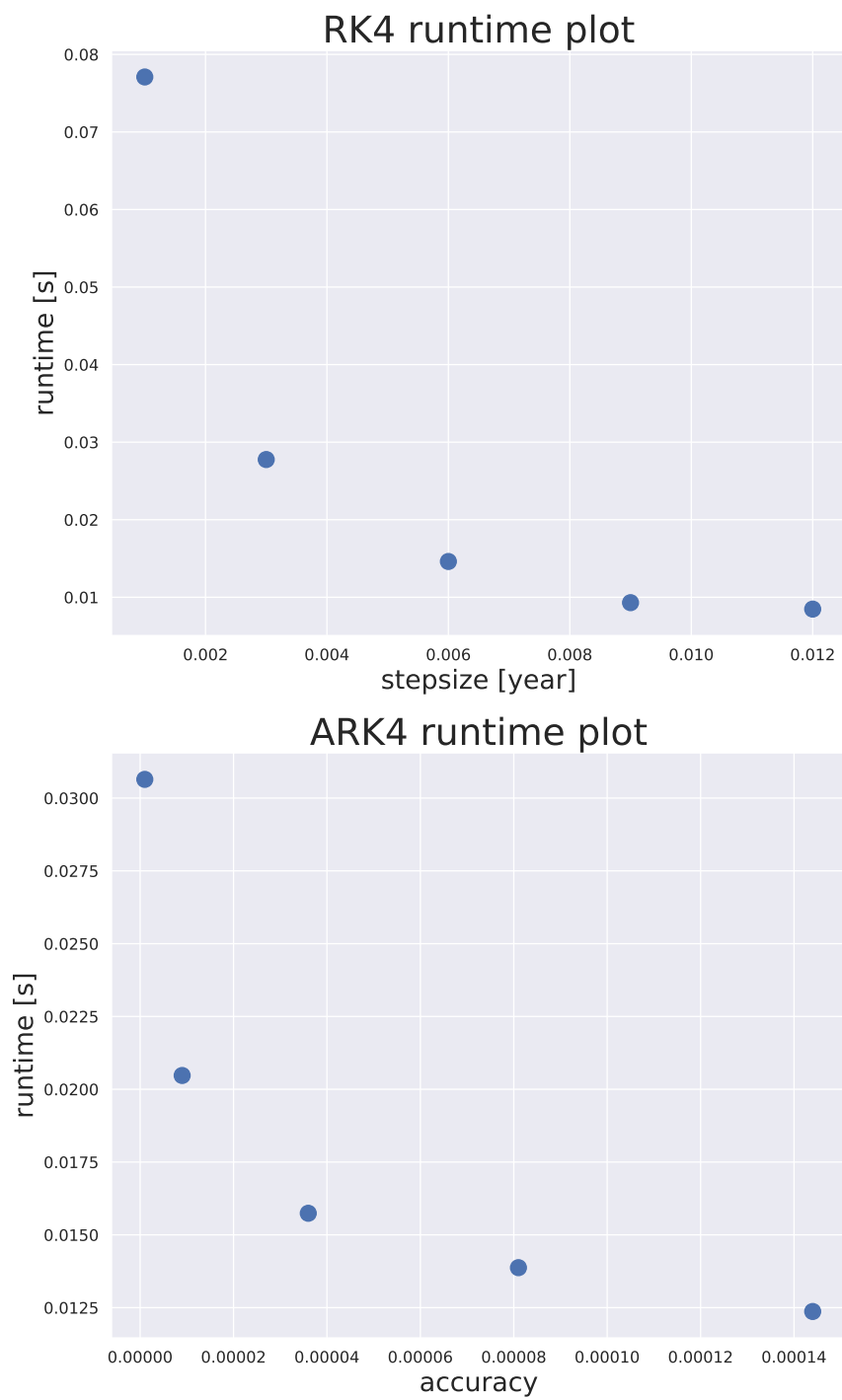
## 6. Függlék



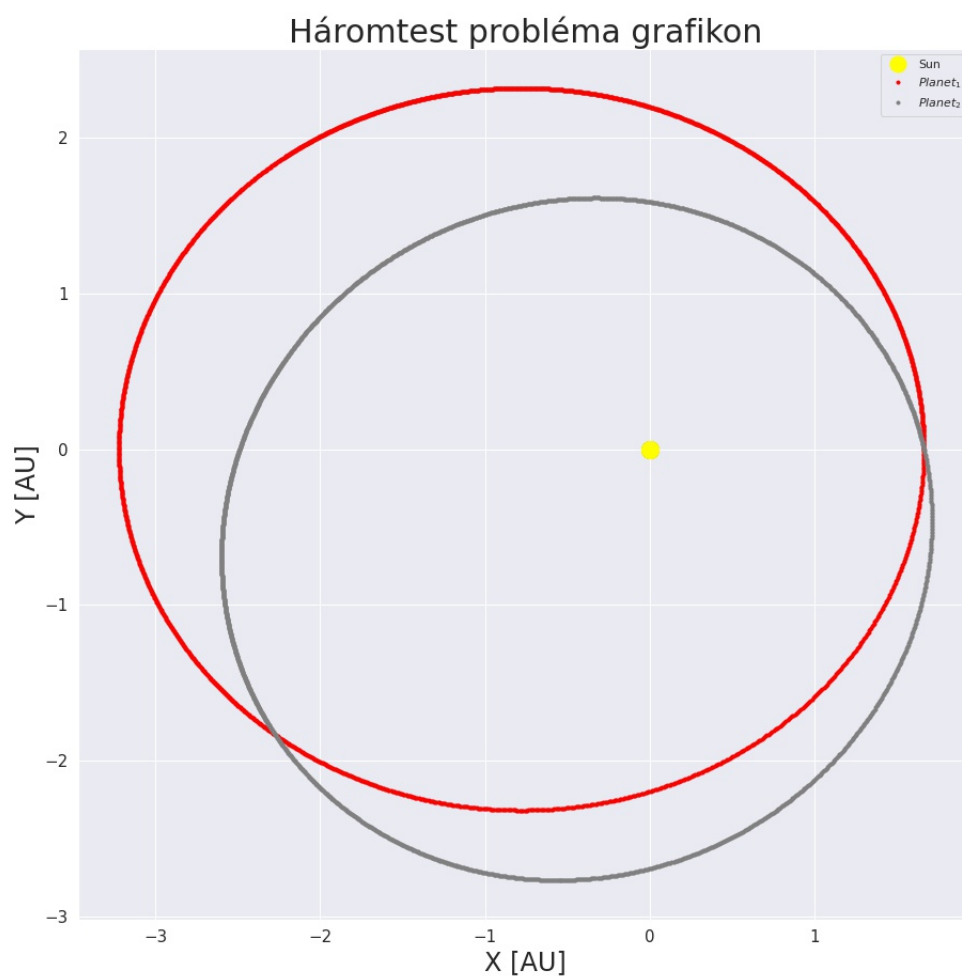
1. ábra. Kepleri trajektóriák a Merkúr 100 évére nézve (itt az év Merkúri évet jelent)



2. ábra. Einsteini trajektóriák a Merkúr 100 évére nézve (itt az év Merkúri évet jelent)



3. ábra. Futási idők



4. ábra. Háromtest probléma ábrázolása, 5 földi éven keresztül. A Nap ténylegesen a Nap, a piros pont a Mars, de a tömege a valódi Mars ötszöröse, a harmadik bolygó egy kisebb tömegű, Mars közeléből indított égitest.