Számítógépes Szimulációk

Harmonikus Oszcillátor

JEGYZŐKÖNYV

Jakobi Ádám

2021. február 15.

1. Bevezető

Az első beadandó célja harmonikus oszcillátor modellezése, mely a legtöbb valós fizikai jelenséggel ellentétben egzakt módon leírható. Így van lehetőségünk arra, hogy összevessük numerikus módszereink hatékonyságát az analitikus eredménnyel.

A feladatunk az Euler-Cromer algoritmus, az Euler algoritmus és az analitikus megoldás összehasonlítása. Az adatokat egy c++ program segítségével generáltam. A paramétereket parancssori argumentumként adtam meg: szögsebesség, kezdeti kitérés, kezdeti sebesség, periódusok száma, egy periódus alatti lépések száma. A végeredményt egy text file-ba irattam ki, 10 oszlopba. Az első oszlop az eltelt idő, majd 3-3-3 oszlop az Euler-Cromer, Euler és analitikus módszer kitérés, sebesség és energia értékeinek feleltethetők meg. A programot különböző bemeneti paraméterekkel futtattam, a kapott eredményeket lent ábrázolom és diskutálom. Az ábrákat python 3 notebook segítségével készítettem.

2. Elméleti bevezetés

2.1. Harmonikus oszcillátor mozgásegyenletei

Mozgásegyenlete:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Integrálva megkapható a kitérés és a sebesség időfüggvénye (analitikus számolási módszer):

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + (\frac{v_0}{\omega}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

2.2. Numerikus módszerek

A harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete másodrendű, amely átírható két elsőrendű csatolt egyenletre:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -w^2 \cdot x = a$$

Euler-módszer:

$$v(t+dt) = v(t) + a(t) \cdot dt$$

$$x(t+dt) = x(t) + v(t) \cdot dt$$

Euler-Cromer-szabály:

$$v(t+dt) = v(t) + a(t) \cdot dt$$

$$x(t+dt) = x(t) + v(t+dt) \cdot dt$$

Az Euler-Cromer-szbály annyival tér el az Euler-algoritmustól, hogy a második egyenletben már a frissített v(t+dt) szerepel az eredeti v(t) helyett. Utóbbi alkalmas az energia megőrzésére, míg az eredeti algoritmus nem.

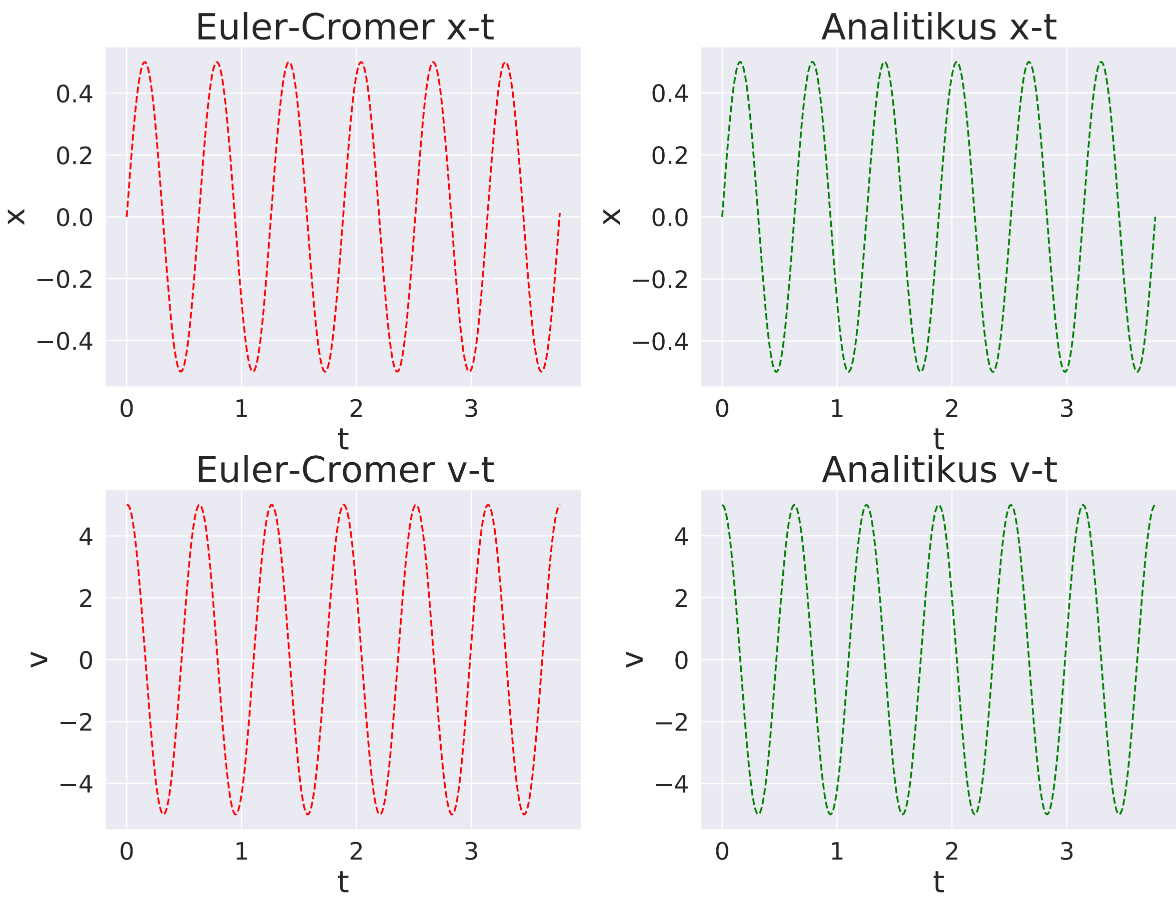
A rendszerünk pillanatnyi energiáját pedig a következő képlettel tudjuk kiszámítani:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2$$

3. Kiértékelés

3.1. Kitérés-idő

Az első feladatban a harmonikus oszcillátor kitérésének és sebességének folyamatát vizsgáltuk az idő függvényében.

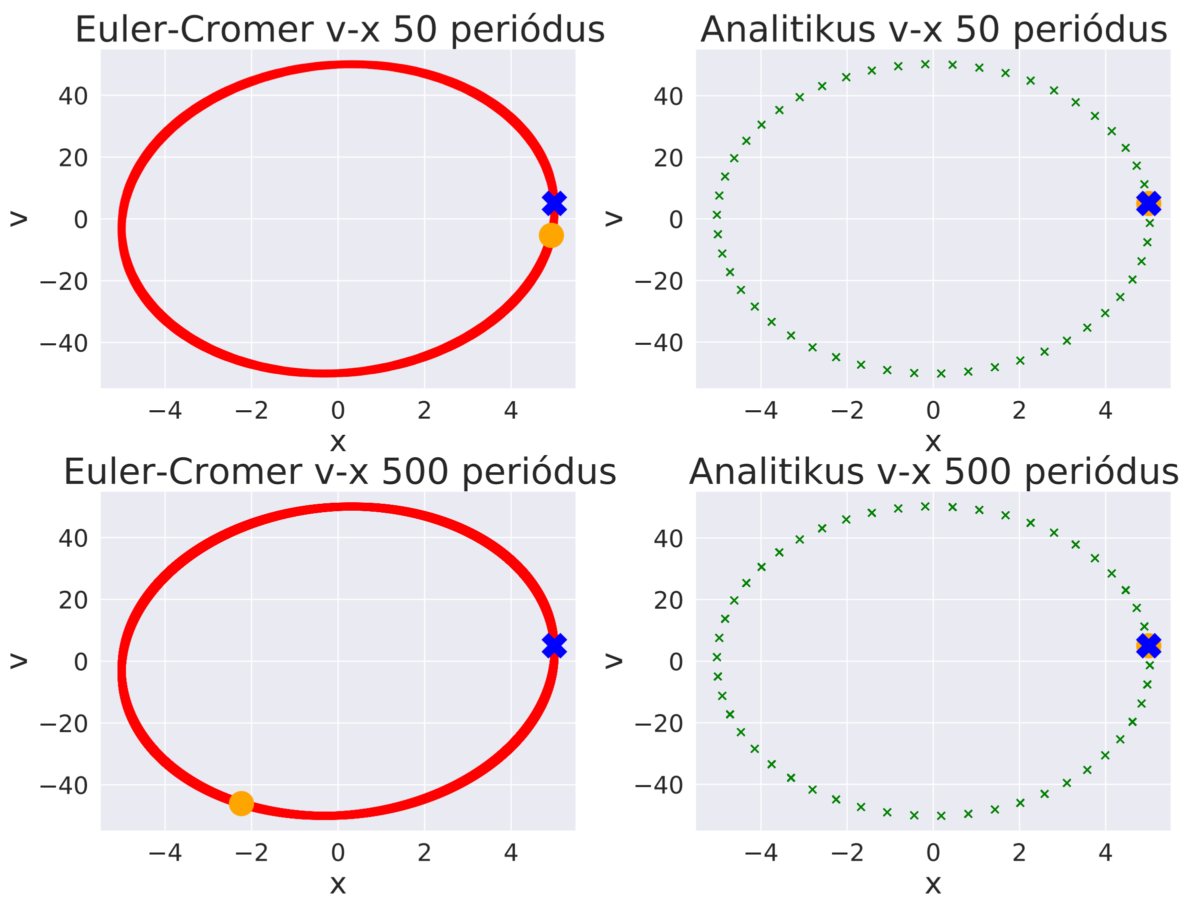


1. ábra. Euler-Cromer módszer kitérés-idő grafikonja ($\omega = 10$; $x_0 = 0$; $v_0 = 5$, periódusok száma=6 ; lépésszám periódusonként=50)

Az eredményeket az analitikus megoldással összevetve látszik, hogy az elméletből elvártakat kaptuk vissza.

3.2. Fázisdiagram

A második feladatban a kitérés-sebesség diagramot kellett ábrázolnunk hosszabb időtartamon.



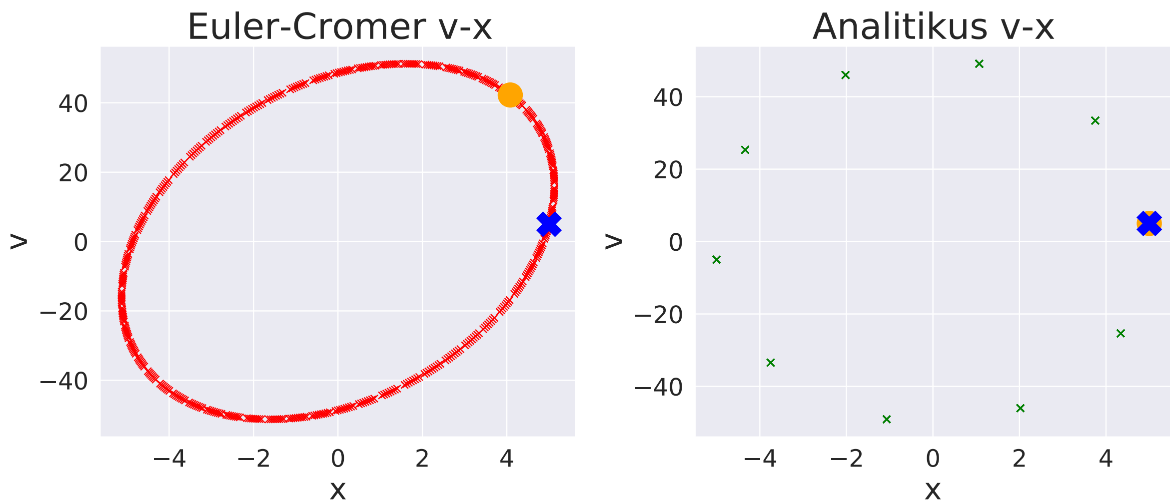
2. ábra. Euler-Cromer módszer fázisdiagramja ($\omega = 10$; $x_0 = 5$; $v_0 = 5$; lépésszám periódusonként=50)

Mint azt az analitikus megoldás is mutatja, azt vártuk, hogy a modellünk tetszőlegesen hosszú futtatásra ellipszis pályát ad, melynek pontjai periódusonként azonos koordinátákon jelennek meg (ez látszik is az analitikus ábrákon).

Ennek ellenére, az Euler-Cromer módszernél a számolt pontok koordinátáiban folyamatos elcsúszás figyelhető meg. Az elcsúszás érzékeltetésére kiemeltem kék X jelölővel az első, és sárga

O jelölővel az utolsó számolt pontot, melyeknek az analitikus modell alapján egy pontba kéne esnie. A felső ábra és alsó ábra segít illusztrálni az eltolódás mértékét a ciklusok számának függvényében.

Egy másik probléma is megfigyelhető: ha periódusonként kevés a lépésszám, akkor a fázisdiagram ellipszistengelye elfordul az elmélet szerint várt vízszinteshez képest.

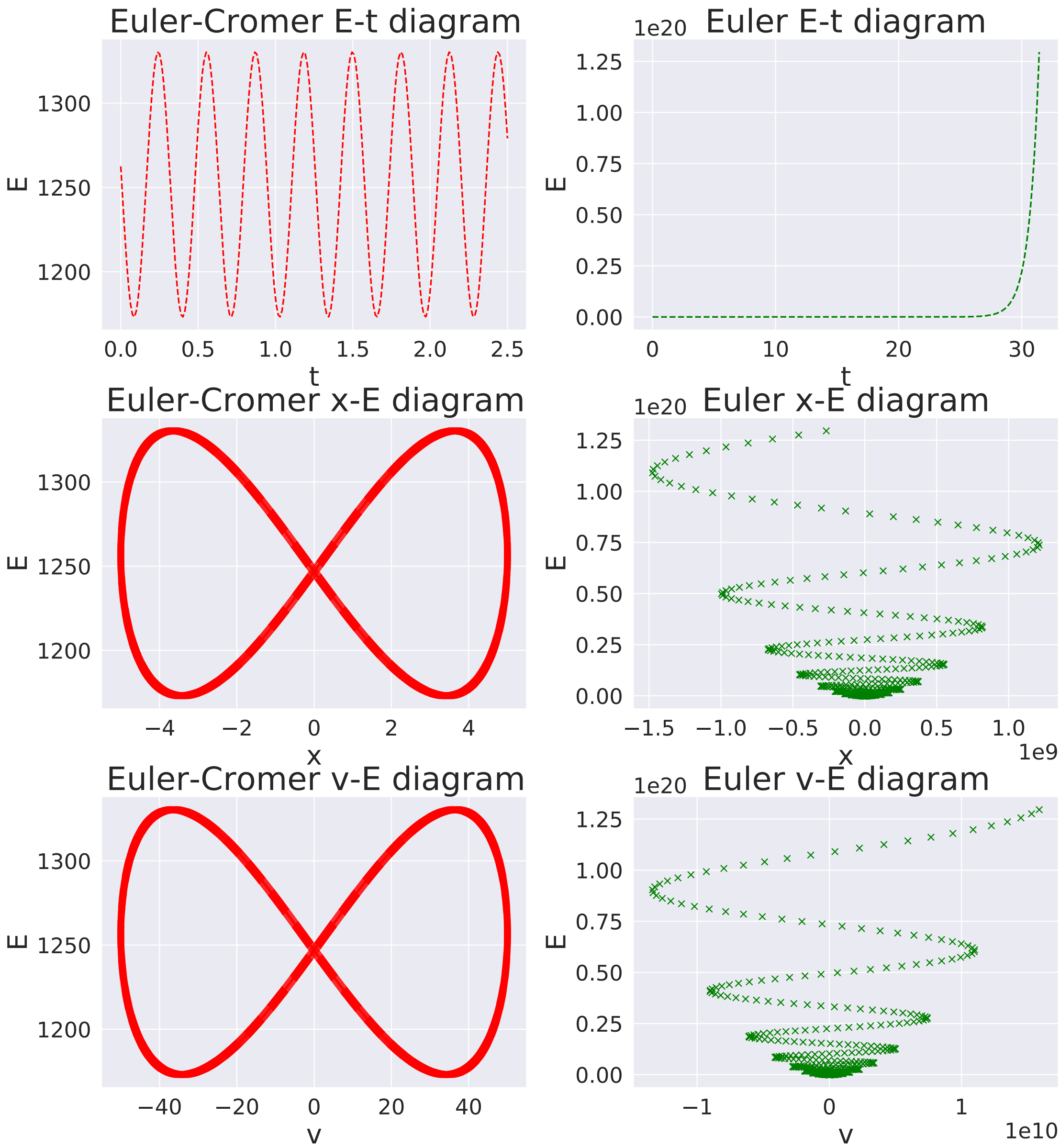


3. ábra. Euler-Cromer módszer elfordult fázisdiagramja ($\omega = 10$; $x_0 = 5$; $v_0 = 5$; periódusok száma=50 ; lépésszám periódusonként=10)

3.3. Energiamegmaradás

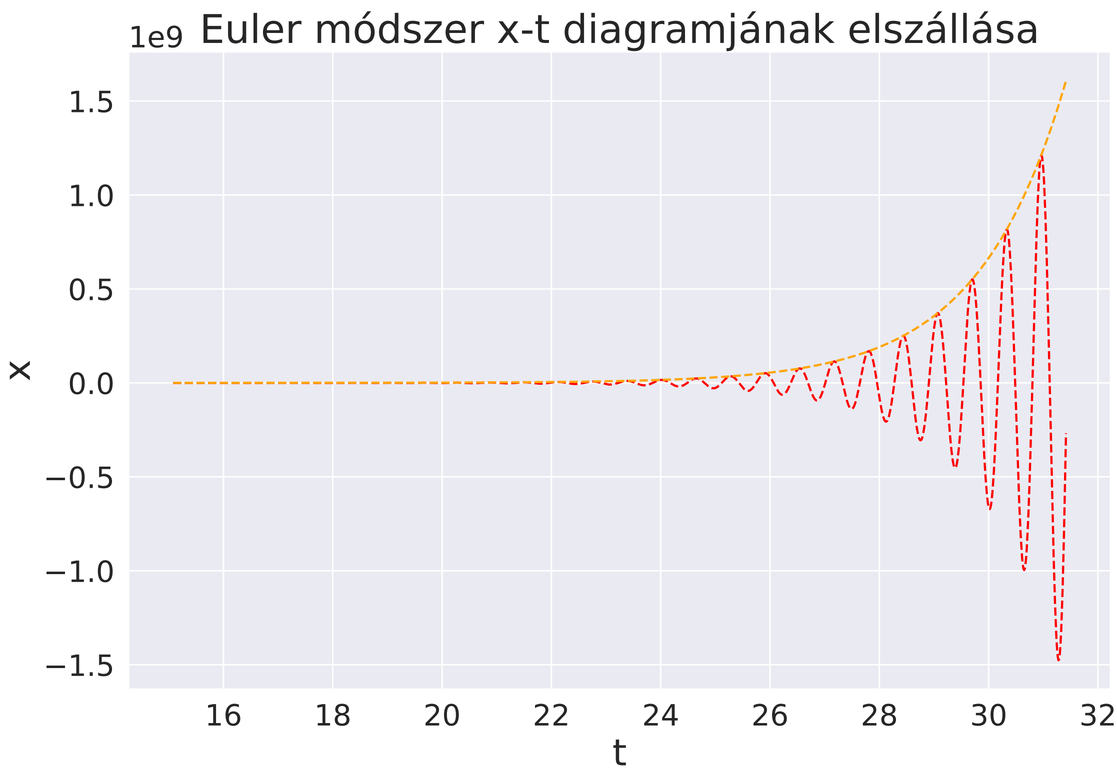
A harmadik feladatban az Euler és Euler-Cromer algoritmusokat kellett összehasonlítanunk az energiamegmaradás szempontjából.

Az Euler algoritmus energiája folyamatosan nő, melyet a pontatlan léptetés okoz, amely során a kitérések és sebességek maximuma is folyamatosan emelkedik.



4. ábra. Euler-Cromer és Euler módszer energiaváltozása ($\omega = 10$; $x_0 = 5$; $v_0 = 5$; periódusok száma=50 ; lépésszám periódusonként=50)

Az Euler-Cromer algoritmus energiája periodikusan egy adott tartományban marad, míg az Euler algoritmusé exponenciálisan elszáll. Az exponenciális változást a kitérés-idő grafikonon is megfigyelhetjük, melyet a következő ábrán szemléltetek, ahol exponenciálist illesztettem a kitérés-idő grafikonra.

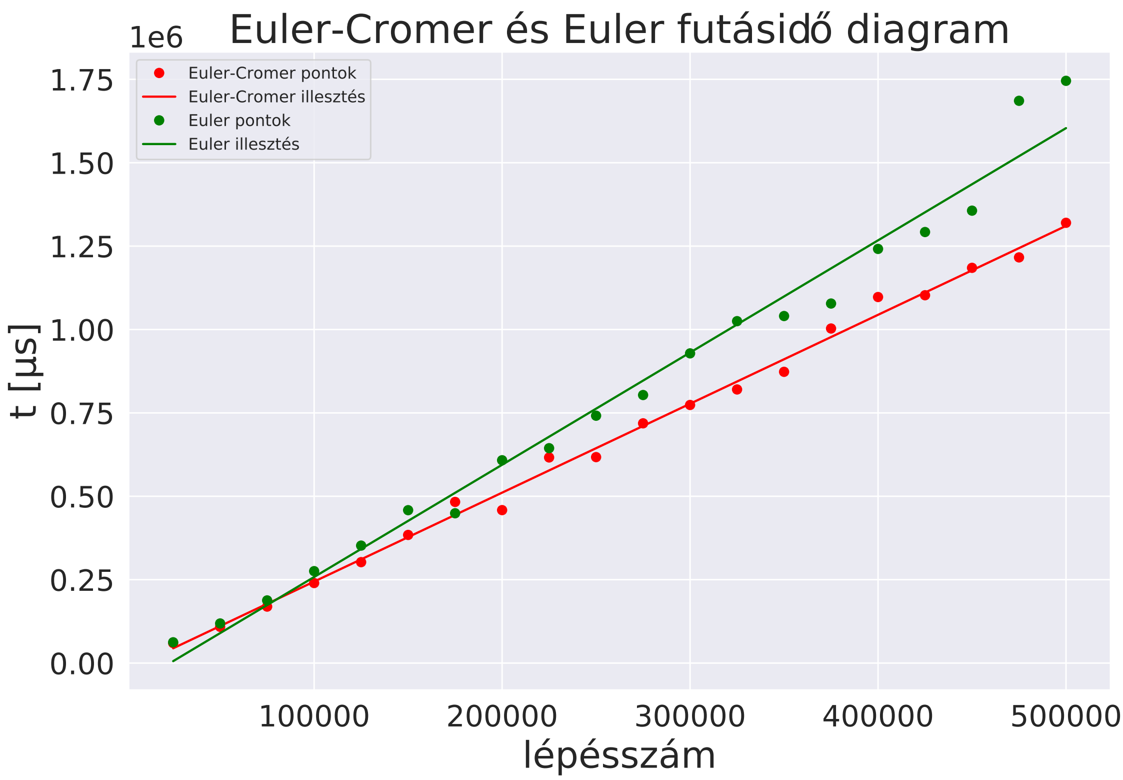


5. ábra. Euler algoritmus kitérésének elszállása az idő függvényében($\omega = 10$; $x_0 = 5$; $v_0 = 5$; periódusok száma=50 ; lépésszám periódusonként=50)

3.4. Futásidő

Az utolsó feladat a program futásidejének vizsgálata volt a lépésszámok függvényében. A lépésszámot növelhetjük a periódusonkénti lépésszám növelésével és a periódusok számának növelésével is. Én utóbbi választottam, egy állandó (500 lépés / periódus) számon tartottam a periódusonkénti lépésszámot, és a periódusok számát növeltem lineárisan 50-től 1000-ig 50-esével. A többi paramétert az előző két feladatnak megfelelően vettem fel.

Megvizsgáltam a futásidőt az Euler-Cromer és Euler algoritmus esetén is, ehhez két módosított c++ kódot hoztam létre, melyek külön-külön csak a megadott algoritmus alapján számolnak. A futást ciklusba tettem, amiben az oszcillátor ciklusainak számát növelem. Az egyes ciklusok idejét a chrono könyvtár segítségével mértem meg.



6. ábra. Euler-Cromer és Euler módszer futásidejének vizsgálata ($\omega = 10$; $x_0 = 5$; $v_0 = 5$; lépésszám periódusonként=500)

Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a futási idő lineárisan nő a lépésszám függvényében az Euler-Cromer és az Euler módszer esetén is, azonban az Euler módszer esetén meredekebb az egyenes, mivel ott a maximum kitérés, a maximum sebesség és az energia értéke is folyamatosan nő (mivel az algoritmus nem stabil), és mivel nagyobb számokkal kell dolgoznia a programnak, a futásidő is hosszabb lesz.

4. Diszkusszió

A feladatokat sikeresen elvégeztem, a módosított sho_m.cpp, sho_e.cpp, sho_ec.cpp és a jupyter notebook kódok megtalálhatók a kooplex oldalamon a harmonikus oszcillator mappában.