

SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK

Húr

JEGYZŐKÖNYV

Jakobi Ádám

2021.03.17.



Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. Elméleti bevezetés	2
2.1. Közönséges és parciális differenciálegyenletek	2
2.2. Egydimenziós húr leírása	3
2.3. Analitikus megoldás, normál módus	4
3. Megoldás módszerei	5
3.1. Numerikus megoldás leírása, leapfrog módszer	5
3.2. Kezdeti feltételek megadása	5
4. Kiértékelés	6
5. Diskusszió	17

1. Bevezető

A mostani alkalom során az egy dimenziós húr mozgását fogom szimulálni a leapfrog algoritmus segítségével, melyről animáció is fog készülni. A numerikus megoldást össze fogom vetni az analitikus megoldással, ez normál módus esetén tehető meg. Ezt követően megpróbálom megbecsülni a hullám sebességét, feltérképezni a rendszer stabilitását a felbontás (Δx , Δt) változtatásával, végül pedig a rendszer linearitását fogom vizsgálni vegyes kezdőfeltételek beállításával.

2. Elméleti bevezetés

2.1. Közönséges és parciális differenciálegyenletek

Ha a differenciálegyenletben egyetlen független változó van, akkor a derivált közönséges derivált. Ebben az esetben közönséges differenciálegyenletről beszélünk.

Ha a differenciálegyenletben kettő vagy több független változó van, akkor a derivált parciális derivált. Ekkor a szóban forgó egyenlet egy parciális differenciálegyenlet.

A fizikai mezők jellemzően több független változót tartalmaznak ($U(x, y, z, t)$). Fizikai mezőkre hozható példák többek között a nyomás, hőmérséklet és az elektromágneses térerősség. Ezekre a mezőkre jellemző a közelhatás, vagyis hogy a szomszédos helytől, időtől függ a fizikai mennyiség.

A legtöbb fizikai jelenség leírható másodrendű parciális differenciálegyenletekkel:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} = F$$

A másodrendű parciális differenciálegyenlet:

- elliptikus, ha $AC - B^2 > 0$,
- parabolikus, ha $AC - B^2 = 0$,
- és hiperbolikus, ha $AC - B^2 < 0$.

A megoldások egyértelműségéhez szükséges a kezdeti feltételek megadása ($t = 0$ -ban a mező, illetve első deriváltjai).

Lehetséges peremfeltételek:

- Dirichlet: U ismert S nyílt/zárt felületen,
- Neumann: ∇U ismert S nyílt/zárt felületen,
- Cauchy: U és ∇U ismert S nyílt/zárt felületen.

2.2. Egydimenziós húr leírása

Egyszerűsítő feltételezések:

- egy dimenziós rendszer, $y(x, t)$ jel,
- nincs súrlódás,
- nincs gravitáció,
- ρ vonalmenti anyagsűrűség,
- L rendszerméret (a húr hossza),
- T feszültség (nyugalmi helyzet fele y irányban hat az erő),
- kis kitérések $y \ll L$, meredekség is kicsi: $\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \Theta \approx \sin \Theta$.

A fenti egyszerűsítéseket felhasználva a mozgásegyenlet a következő módon írható fel: egyrész a húr egy rövid szakaszára felírható Newton második törvénye ($\sum F = ma$):

$$\sum F_{iy} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

,

másrészt kiszámítható a szakasz kezdetén és végén az y irányú feszítő erő, melynek összege a szakaszra ható eredő erő:

$$\sum F_{iy} = T \sin \Theta(x + \Delta x) - T \sin \Theta(x) = T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x = \Delta x T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

A két egyenletből megkapjuk a hullámeqyenletet:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

,

ahol $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ a hullám sebessége (a hullám és a húr sebessége nem azonos, utóbbi $\frac{\partial y}{\partial t}$).

2.3. Analitikus megoldás, normál módus

A normál módus közben a rezgés olyan mozgást végez, mely során a rendszer minden pontja azonos ω körfrekvenciával rezeg. Normál módusban álló hullámok alakulnak ki, ezért a differenciálegyenlet változóban szeparálhatóvá válik:

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

.

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

.

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0$$

,

ahol $k := \frac{\omega}{c}$. Megoldások sin és cos kezdeti és peremfeltételt ($y(0, 0) = 0$, $y(L, 0) = 0$) illesztve:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \Phi_{0n})$$

,

ahol $k_n = \frac{\pi n}{L}$ és $\omega_n = ck_n$, B_n és Φ_{0n} számolható a $t = 0$ -ban kitérítésből. Ez az általános megoldás, melyet a normál módusokban számolt parciális megoldások lineáris kombinációjaként kaptunk meg. Egy adott t időpillanatban az egyenlet megfeleltethető egy tisztán szinuszos tartalmú (kezdeti feltétel miatt) Fourier transzformációnak, ahol n a módusok száma mutatja a rezgést felbontó komponenseket. A Fourier transzformáció körfrekvenciája itt

$$k_n = n \frac{\pi}{L} = n \frac{\pi}{T/2} = n \frac{2\pi}{T} = nk_1, \quad T = 2L, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

,

vagyis a megoldásunk azonos egy olyan periodikus függvény Fourier transzformációjával, melynek periódushossza a húr egyensúlyi hosszának kétszerese. Normál módus esetén a rezgésünk egyetlen k_n komponensű rezgést tartalmaz, így analitikusan könnyen számítható (nem normál módus esetén a pontos eredményhez az összes, végtelen számú komponens ismeretére is szükségünk lenne, így csak közelítve tudjuk kiszámolni az eredményt az első valahány komponens használatával).

3. Megoldás módszerei

3.1. Numerikus megoldás leírása, leapfrog módszer

A numerikus megoldáshoz diszkretizálni kellett a problémát. Ehhez megadtuk a húr diszkrét pontjai közötti x irányú távolságot (Δx) illetve az időbeli léptetések nagyságát (Δt). Így az eredmények reprezentálhatók egy mátrixként, ahol a sorok adják az azonos időpillanatban lévő húrponthoz, az oszlopok a húr pontjainak x koordinátáit, a mátrix értékei pedig az y koordinátákat.

A mátrix "szélei" (a legelső és legutolsó oszlop értékei) zérus értékűek a peremfeltétel következtében, mivel a húr két végpontja rögzített. A rács legelső sora tartalmazza a kezdeti feltételt. A hullámmegyenlet $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ és $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ tagjait középponti differenciákkal, számítjuk ki:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

A felső két egyenletből a diszkretizált hullámmegyenlet:

$$\frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{c^2(\Delta t)^2} = \frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

Átrendezve pedig megkapjuk $y_{i,j+1}$ -re az explicit egyenletet, melyben a jövő függ a jelentőtől és a múlttól is:

$$y_{i,j+1} = 2y_{i,j} - y_{i,j-1} + \left(\frac{c}{c'}\right)^2 (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j})$$

ahol a rácsfelbontás ismeretében egy formális sebesség $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ lett bevezetve, melynek értéke meghatározó a stabilitás szempontjából (ennek részleteit a kiértékelés során fogom tárgyalni). Ez a megoldási módszer az időléptető (leapfrog) algoritmus egy esete.

3.2. Kezdeti feltételek megadása

Kezdeti feltételként az algoritmusnak két vektorra van szüksége, az egyik tartalmazza az összes $y(x, 0)$ kitérést a $t = 0$ kiindulási időben, a másik tartalmazza az összes $(y(x, -\Delta t))$ kitérést a $t = -\Delta t$ időpillanatban, aminek segítségével a rendszer ki tudja számolni a pontjaink kezdősebességét. A feladat kiírásában meg lett adva, hogy a kezdeti sebességek legyenek zérusok, így az $y(x, -\Delta t)$ vektor megegyezik az $y(t, 0)$ vektorral. Peremfeltételek még, hogy a húr két végpontja a teljes mozgás során rögzített, vagyis $y(0, t) = y(L, t) = 0$. A mozgás során

használt mennyiségekhez a jelen szimulációban mértékegységeket is szeretnék rendelni, ezért a továbbiakban SI mértékegységeket fogok használni a fizikai mennyiségek leírására.

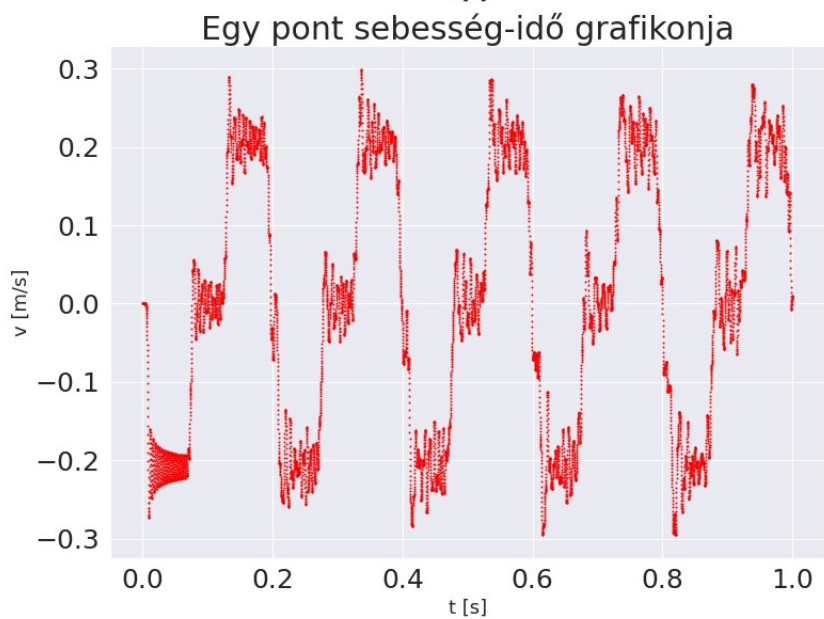
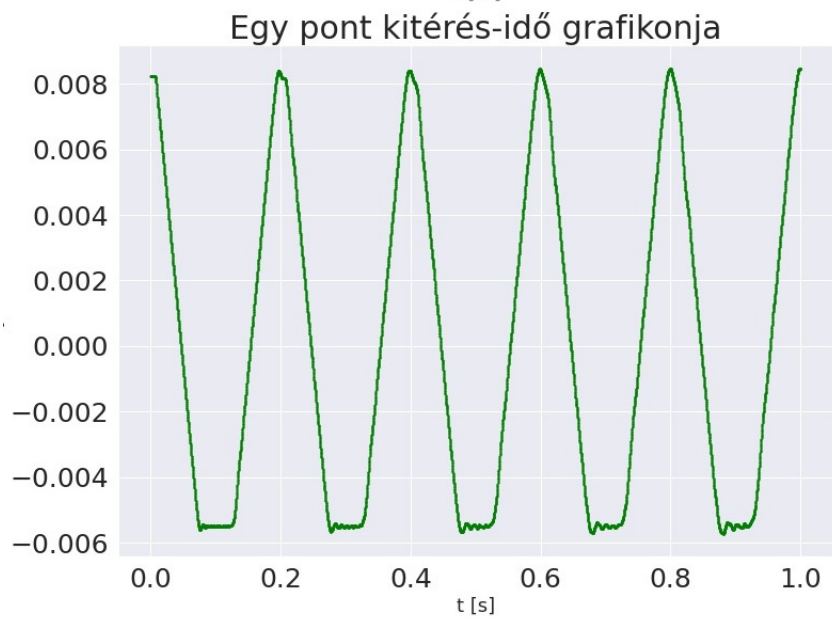
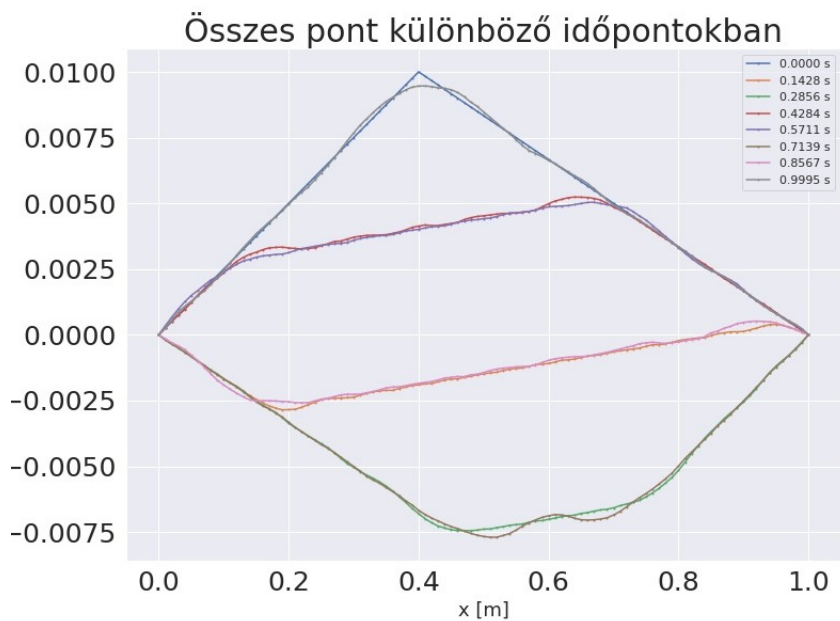
4. Kiértékelés

Elkészítettem a megoldás forráskódját $c++$ nyelven, a futtatását megoldottam python notebookok keresztül.

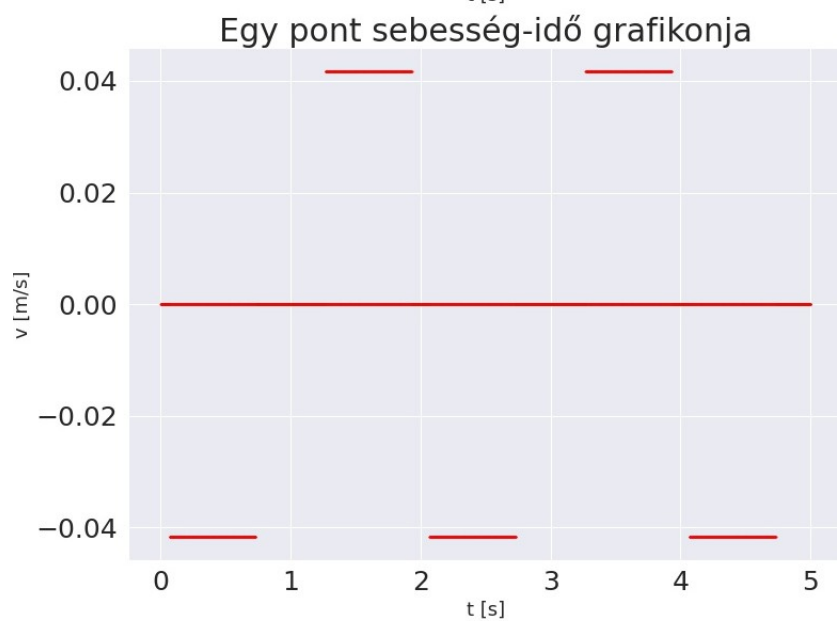
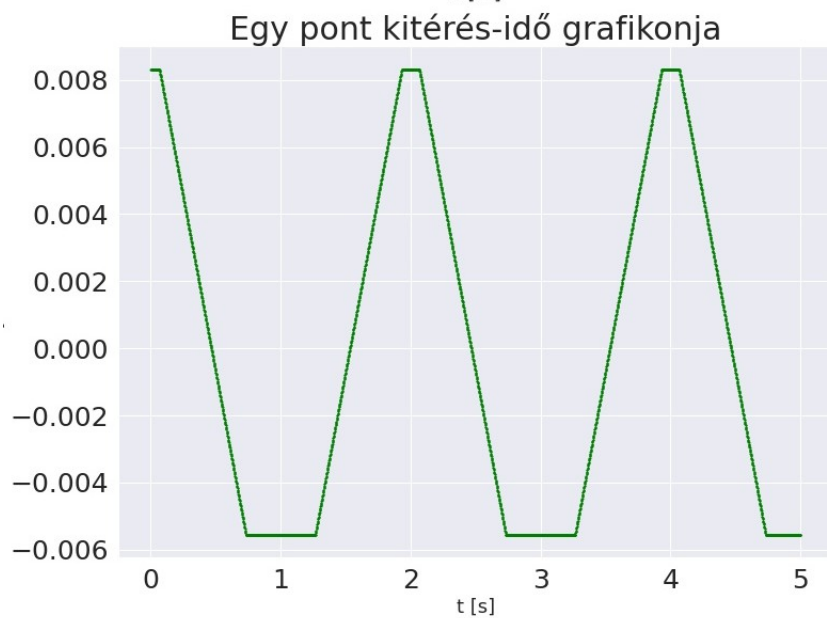
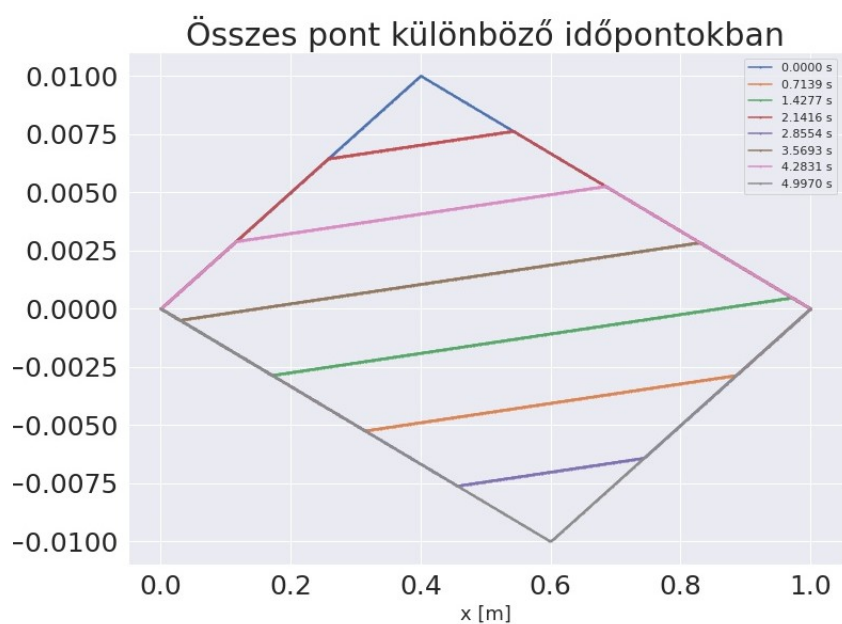
A paraméterek egy részét minden futtatás során változatlanul hagytam:

- $L = 1 \text{ m}$
- $T = 0.01 \text{ N}$
- $\rho = 0.01 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$
- $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Első körben kétszer különböző dt és dx paraméterbeállítással futtattam a kódom, mellyel a c' és c arányát próbáltam befolyásolni. Először $c < c'$, másodszor pedig $c = c'$ értékeket használtam. Mindkét esetben készítettem szimulációt is, ezek megtekinthetők a youtube csatornámon, melynek linkje megtalálható a diszkusszió után.



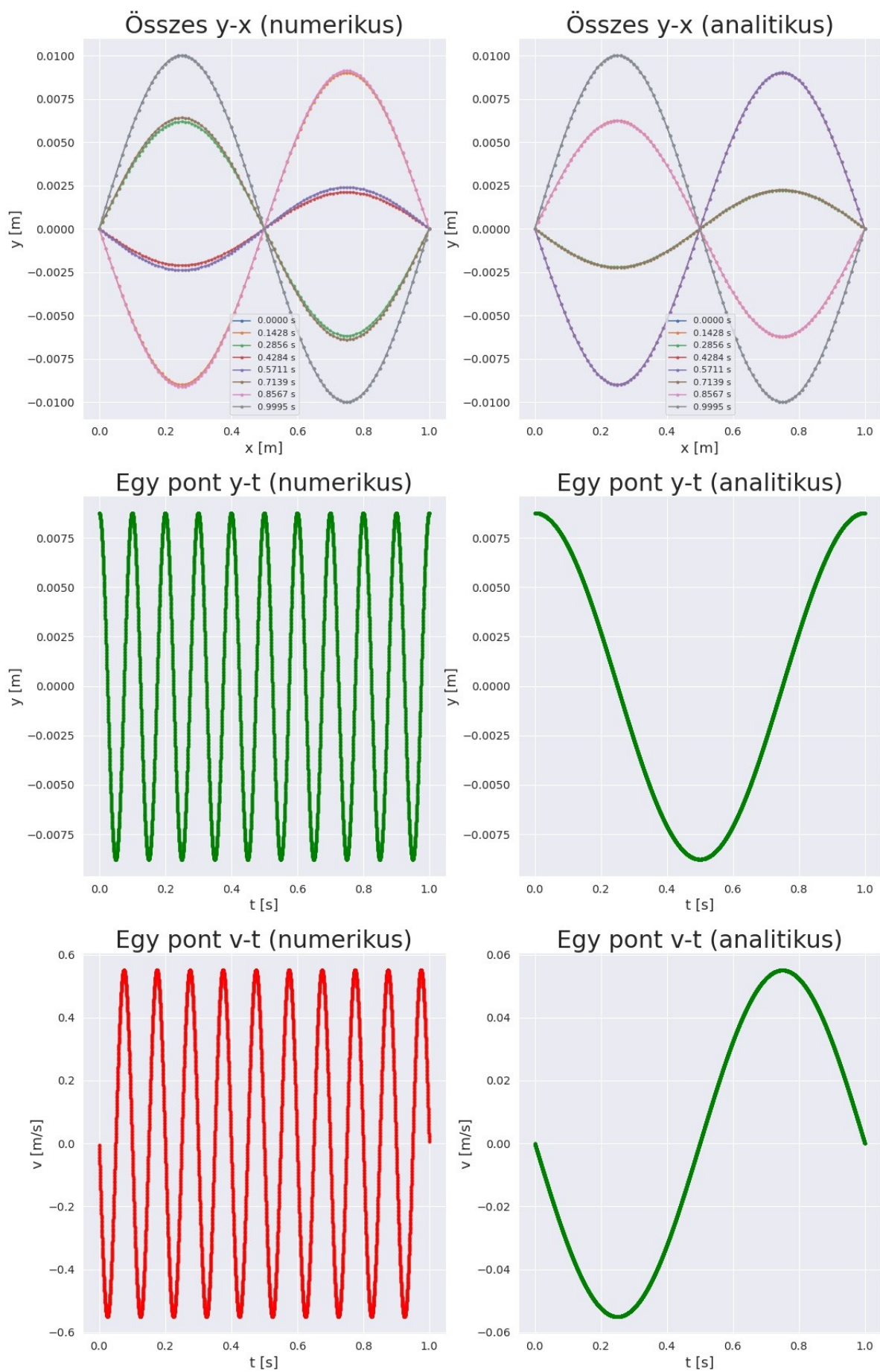
1. ábra. Trianguláris kezdőfeltétel, $dx = 0.01 \text{ m}$, $dt = 0.0001 \text{ s}$, $t_{sum} = 1.0 \text{ s}$, $x_0 = 0.4 \text{ m}$,
 $y_0 = 0.01 \text{ m}$



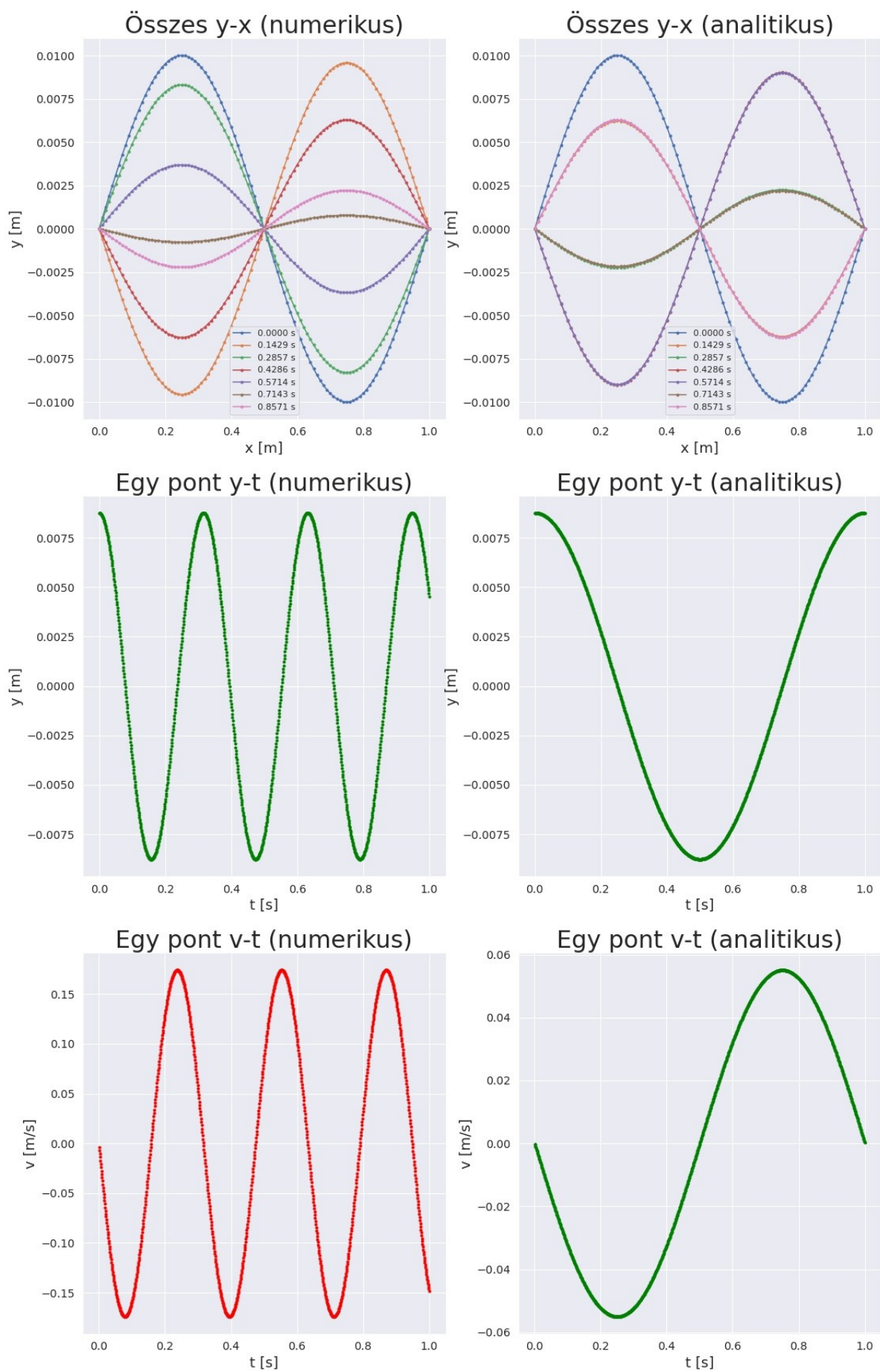
2. ábra. Trianguláris kezdőfeltétel, $dx = 0.001\text{ m}$, $dt = 0.001\text{ s}$, $t_{sum} = 5.0\text{ s}$, $x_0 = 0.4\text{ m}$,
 $y_0 = 0.01\text{ m}$

Ezt követően megpróbáltam összehasonlítani az $n = 2$ normálmódusú rezgést numerikus és analitikus megoldás esetén. Itt egyben összehasonlítottam különböző c' értékeket is, a cél az volt, hogy meg tudjam határozni a rendszerem stabilitását a c és c' paraméterek viszonyának függvényében. Ezekhez öt ábrát készítettem, melyek a következő oldalaktól tekinthetők meg. A negyedik és ötödik ábrámon megadtam egy felső határt a rezgés amplitúdójának méretére, melyet meghaladva nem plotoltam ki több pontot, így az ábrán szereplő idők ezen határ eléréséig tartanak. Végül készítettem még egy mérést arról, hogy milyen c' paraméterek esetén szállt el az algoritmusom.

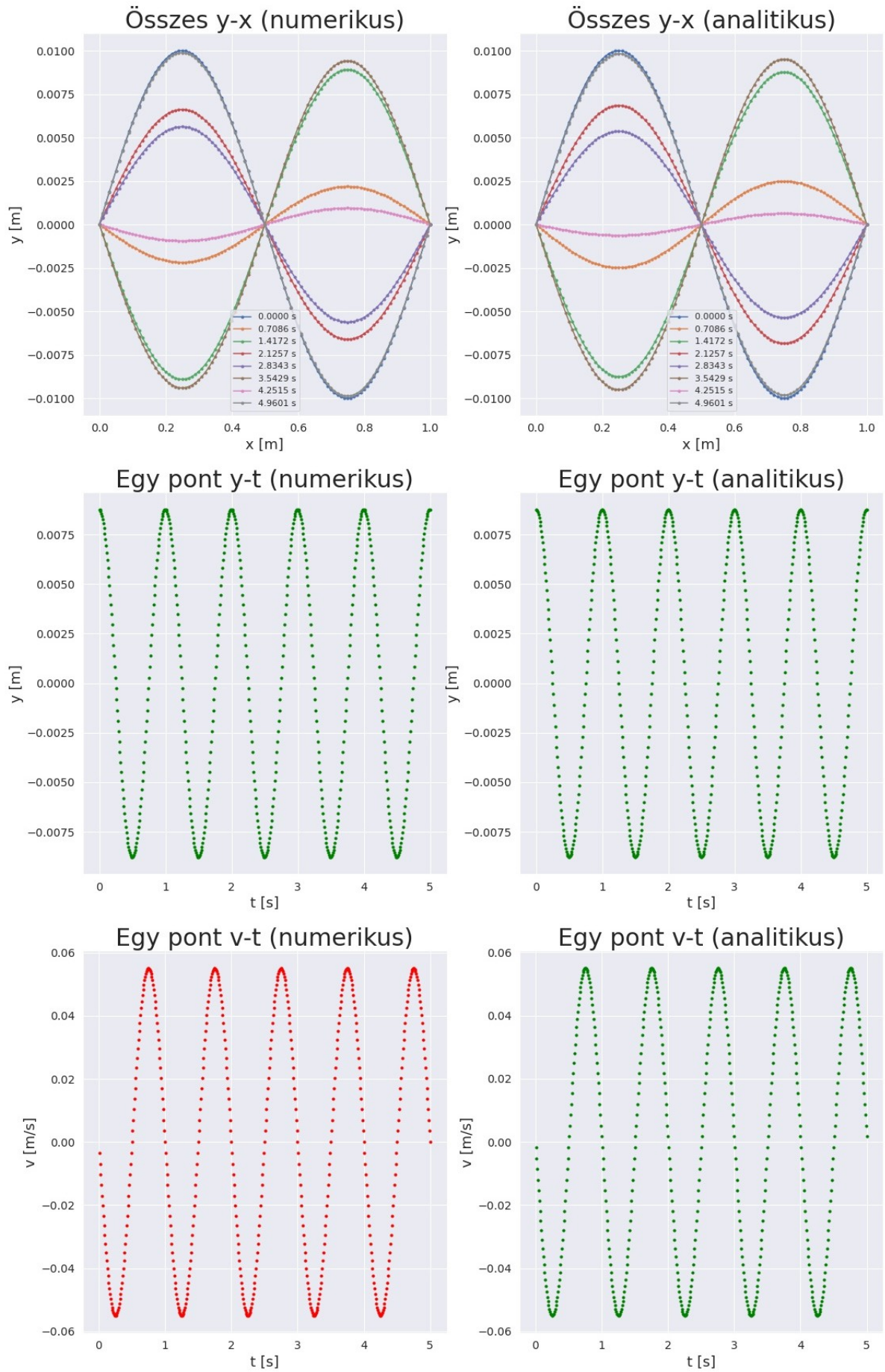
Az eredmények után két dolgot tapasztaltam, az egyik, hogy $c' < c$ esetén az algoritmusom biztosan elszáll (az amplitúdó tart a végtelenbe), a másik, hogy a rezgésem frekvenciája c' változását követi, azaz minél nagyobb c' , annál nagyobb a rezgésem frekvenciája és fordítva (és a rezgés frekvenciája jól mutatja a hullám terjedési sebességét is, ennek tárgyalását a későbbiekben fogom folytatni). $c = c'$ esetén az analitikus és a numerikus megoldások szinte teljes mértékben egybevágnak, ezt a harmadik ábrán figyelhetjük meg (ekkor az analitikus és numerikus rezgésünk frekvenciája gyakorlatilag azonos). $c < c'$ esetén az algoritmusom többnyire stabil, az utolsó ábrán viszont látszik, hogy néhány esetben itt is elszáll a programom. Ennek okát jelenleg nem tudom megmagyarázni, lehet, hogy én írtam meg rosszul a kódot, benne maradt valahol egy bug, ami szisztematikus hibát okoz (mindig azonos c' helyeken száll el a kódom), vagy lehet az algoritmus hibája is, erről nincs információ, ennek kiderítéséhez további vizsgálatok szükségesek.



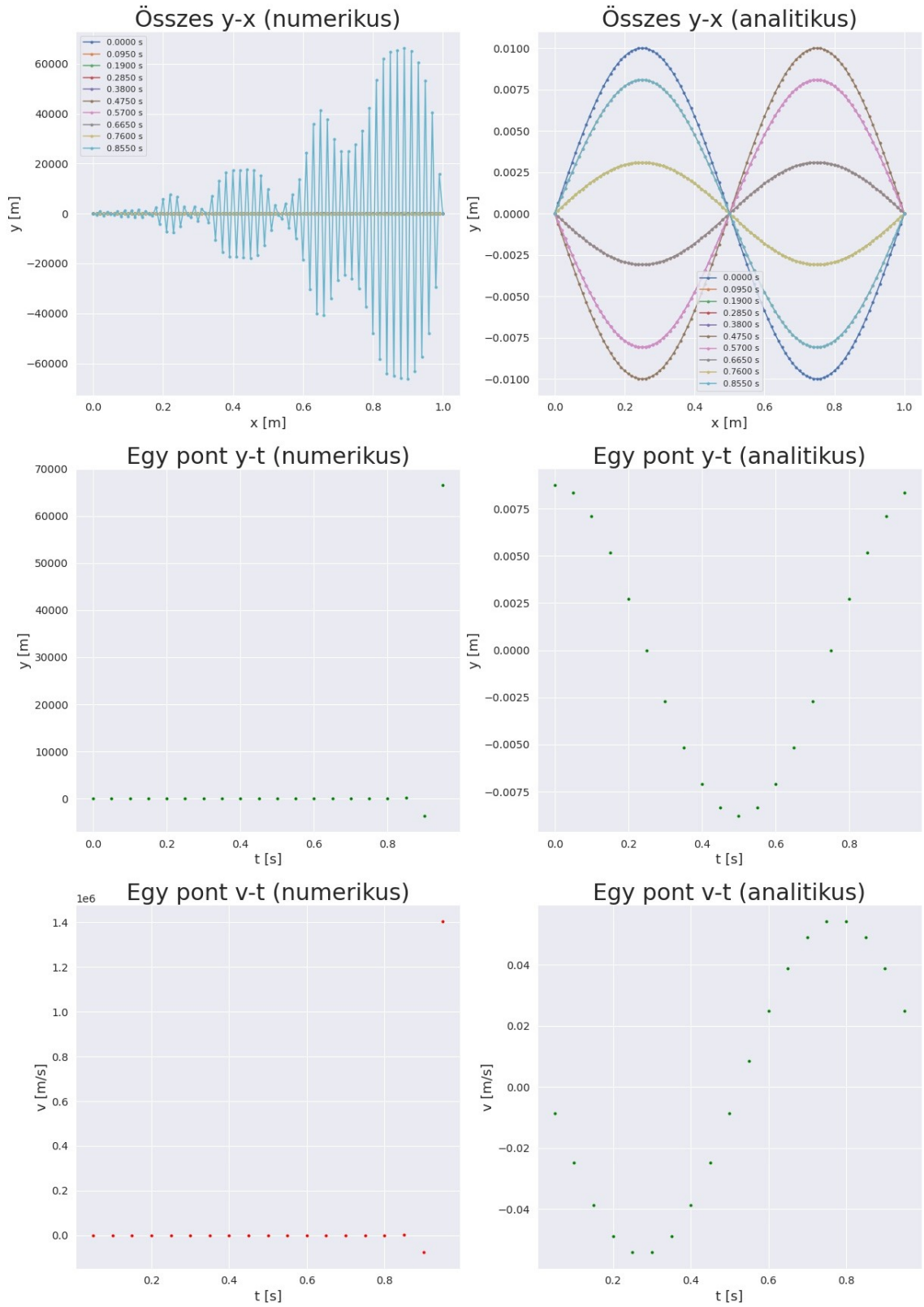
3. ábra. Normál módus kezdőfeltétel, $dx = 0.01 \text{ m}$, $dt = 0.0001 \text{ s}$, $t_{sum} = 1.0 \text{ s}$, $A = 0.4 \text{ m}$,
 $n = 2$



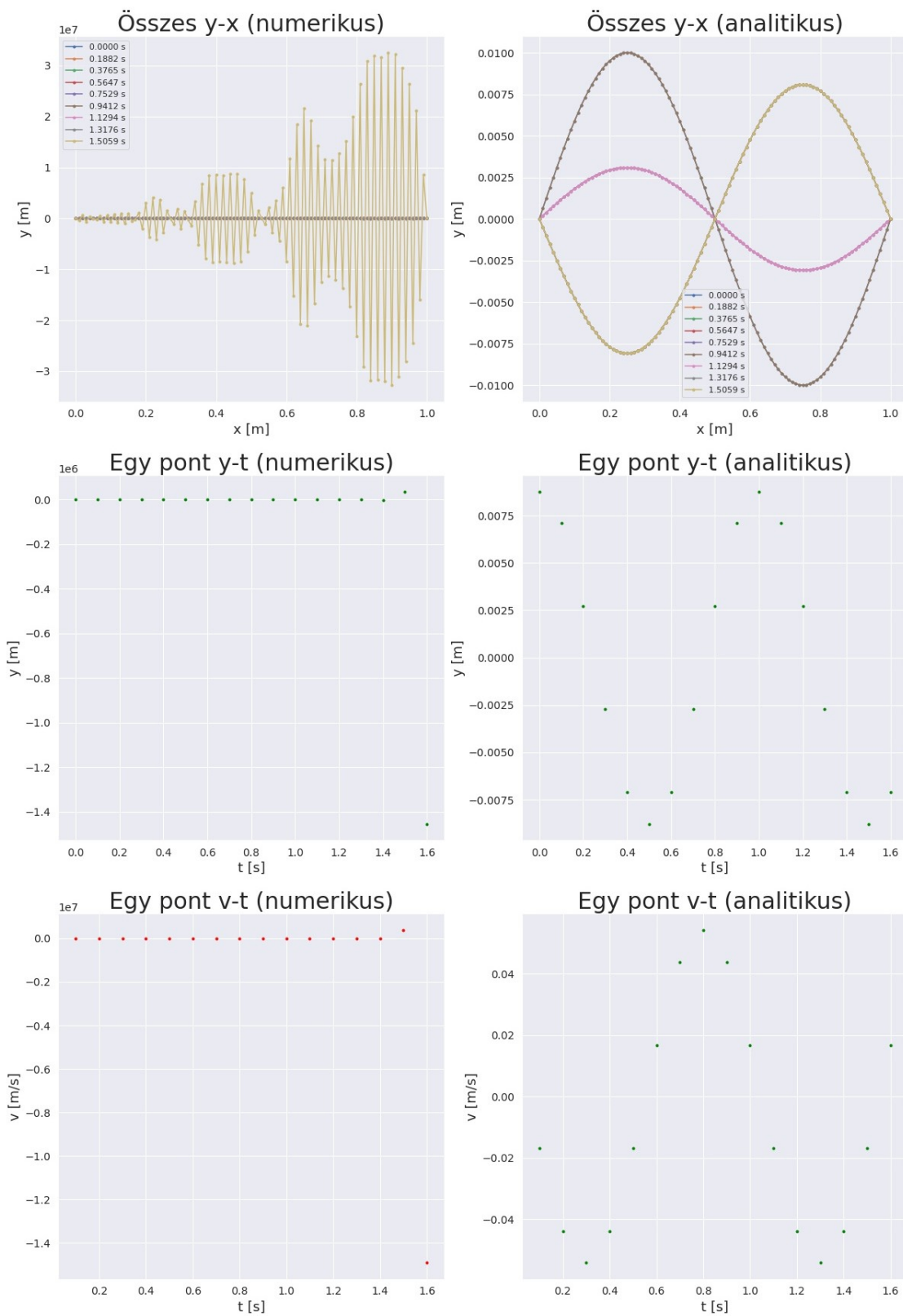
4. ábra. Normál módus kezdőfeltétel, $dx = 0.01\text{ m}$, $dt = 0.001\text{ s}$, $t_{sum} = 1.0\text{ s}$, $A = 0.4\text{ m}$,
 $n = 2$



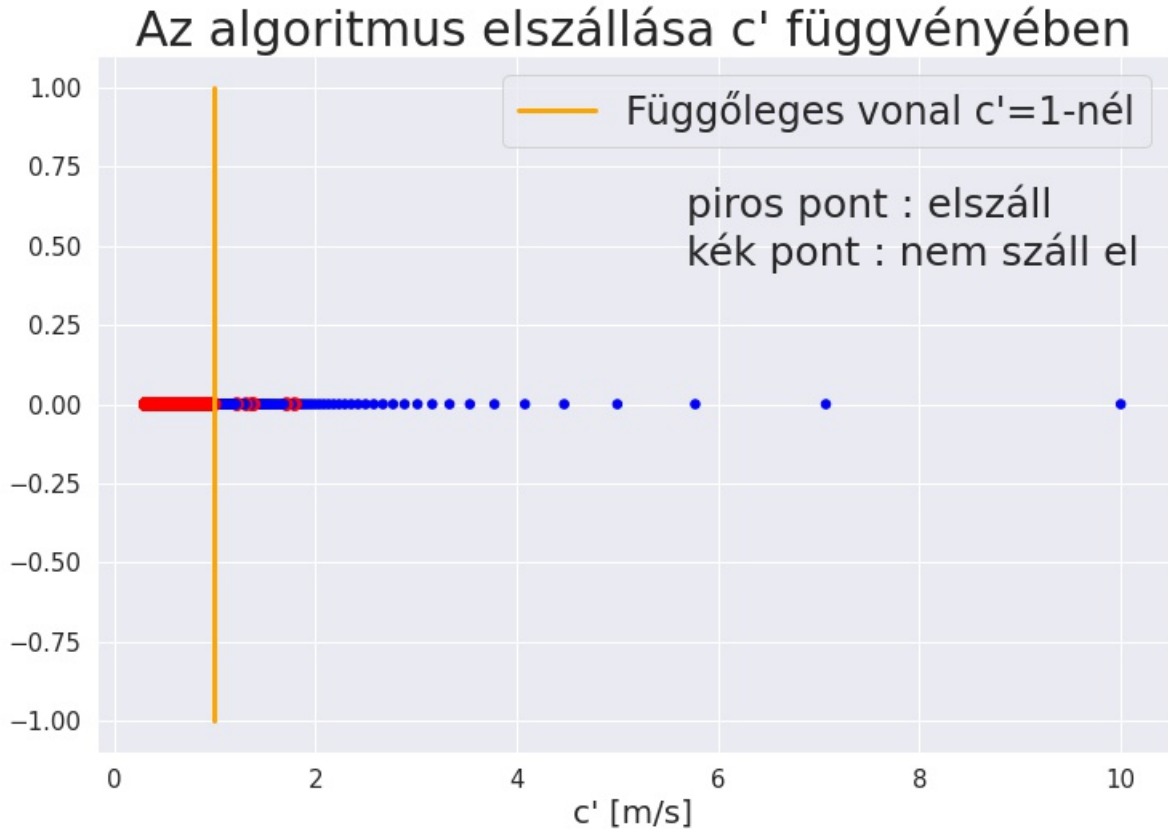
5. ábra. Normál módus kezdőfeltétel, $dx = 0.01 \text{ m}$, $dt = 0.01 \text{ s}$, $t_{sum} = 1.0 \text{ s}$, $A = 0.4 \text{ m}$, $n = 2$



6. ábra. Normál módus kezdőfeltétel, $dx = 0.01$ m, $dt = 0.02$ s, $t_{sum} = 1.0$ s, $A = 0.4$ m, $n = 2$



7. ábra. Normál módus kezdőfeltétel, $dx = 0.01 \text{ m}$, $dt = 0.1 \text{ s}$, $t_{sum} = 1.0 \text{ s}$, $A = 0.4 \text{ m}$, $n = 2$

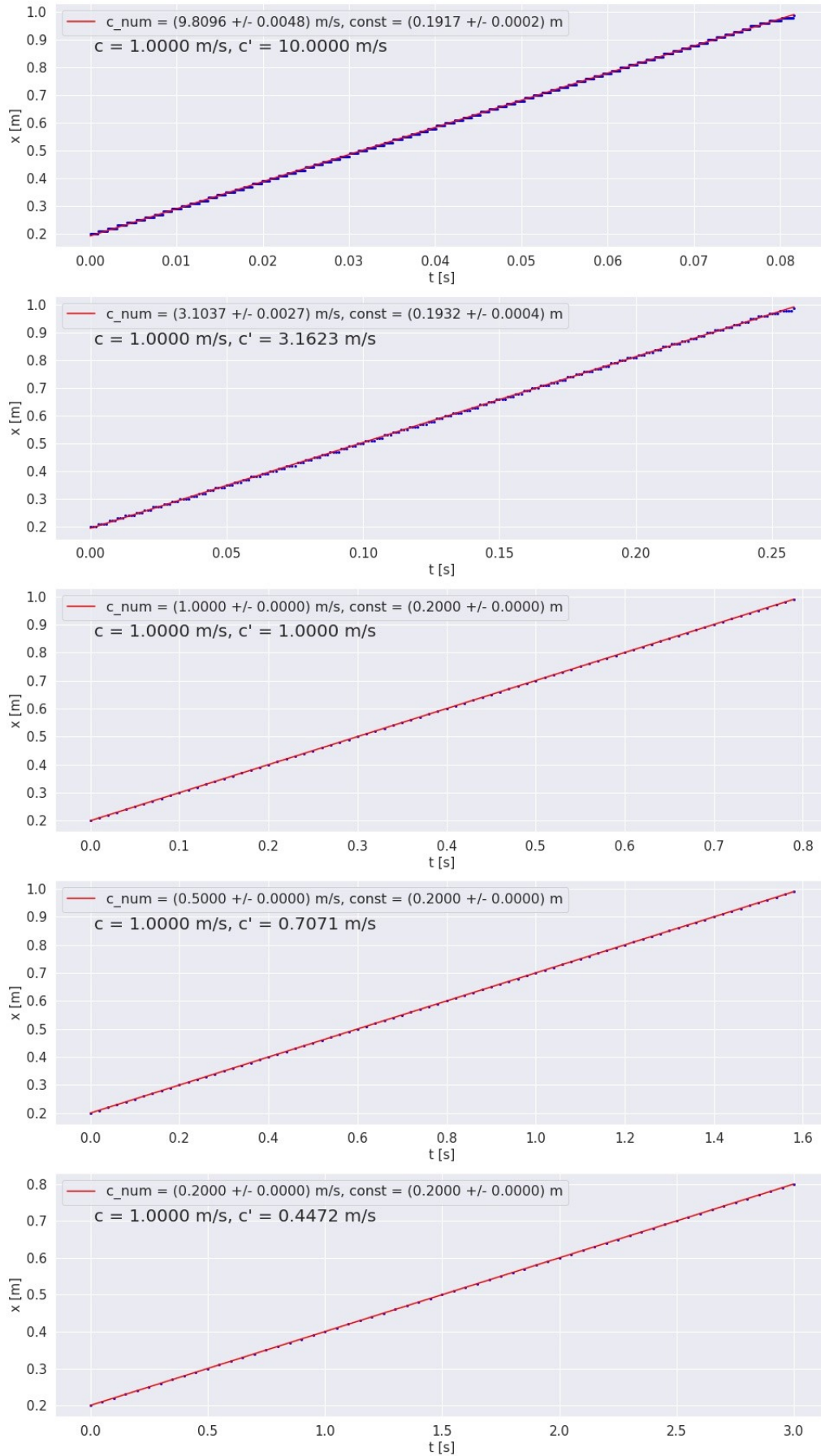


8. ábra. Ezen az ábrán látható az algoritmus stabilitásának tesztje c' függvényében. A piros pontok jelzik az olyan méréseket, ahol az amplitúdó nagymértékben megnőtt a mérés során, a kék pontok pedig azokat a méréseket jelölik, ahol az amplitúdó állandó maradt

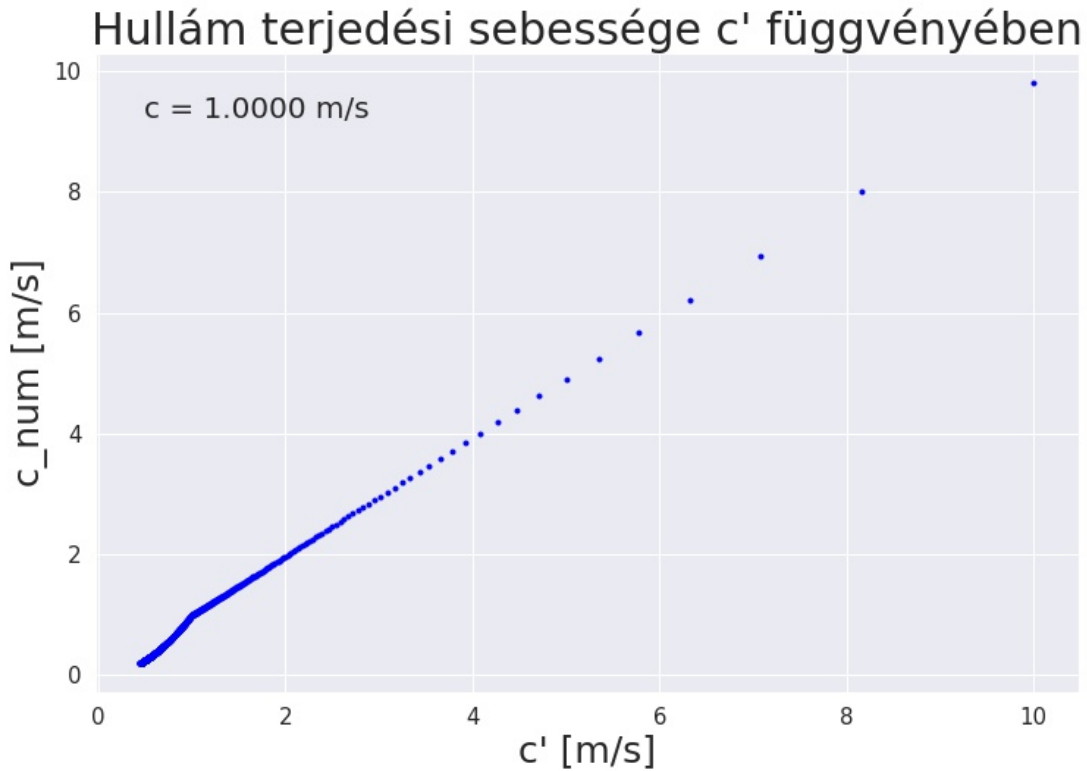
A stabilitás vizsgálata után megpróbáltam kitalálni egy módszert, amivel meghatározhatom a tényleges, mérés során tapasztalható hullámterjedési sebességet (c). Ehhez kezdeti feltételnek egy dirac delta szerű függvényt adtam meg, a csúcsot a húr baloldali ötödéhez helyeztem. A szimuláció során ennek a csúcsnak a terjedését vizsgáltam: minden időpillanatban megkerestem a kitérésvektorom maximumait, és a legjobboldali x koordinátáját vettem a hullámom indítástól számított aktuális pozíciójának (természetesen csak addig tartott a szimulációm, amíg a legjobboldali csúcs kellőképpen meg nem közelítette a jobboldali rögzítési pontot). Ezután az x pozíciókra az eltelt idő t függvényében egyenest illesztettem, melynek meredeksége meghatározza a hullám tényleges terjedési sebességét. Ezekről is több esetben ábrát készítettem, melyek alább megtekinthetők, illetve a dirac delta függvényem terjedéséről animáció is készült (itt már nem tartottam magam ahhoz, hogy az animáció mindössze addig tart, amíg a hullám el nem éri a túloldalt, hanem a mérés több odavissza ciklusig terjed egészen öt másodpercen keresztül).

Itt szintént azt tapasztaltam, hogy minél nagyobb a c' értéke, annál nagyobb a hullámterjedési sebesség és fordítva, illetve $c = c'$ esetén kaptam vissza a fizikai értelemben helyes, az analitikusan várt hullámterjedési sebességet (vagyis $c_{num} = c' = c$).

Hullám terjedési sebessége



9. ábra. A hullámterjedési sebességéről készült ábrák a hozzájuk tartozó illesztésekkel



10. ábra. Átfogó ábra a hullámterjedési sebesség c' függéséről

Legvégül pedig vegyes kezdeti feltételekkel teszteltem a húr mozgását. Ehhez két különböző trianguláris kezdőfeltételt és azok összegét, majd két különböző normálmódus ($n = 2$ és $n = 3$) és azok összegét hasonlítottam össze. Ezen mérések szemléltetésére olyan animációkat készítettem, ahol egyszerre vannak megjelenítve a különálló kezdeti feltételekből indított mozgások és a közös kezdeti feltétel során létrejött mozgás is. Az animációkon jól látszik, hogy a kevert kezdeti feltételből származó mozgás minden időpillanatban megegyezik a két külön kezdőfeltételből létrejött hullámok mozgásának összegével, vagyis kijelenthetjük, hogy a húr mozgása lineáris (a differenciálegyenlet alapján is ezt vártuk, illetve már az elméletben felírtuk, hogy a húr tetszőleges mozgása leírható a normál módusok lineáris kombinációjaként, akár egy Fourier sor).

5. Diskusszió

Sikerült betekintést nyernem a két végén rögzített, egydimenziós húr mozgására különböző kezdőfeltételek esetén. Elkészítettem a húr differenciálegyenletének numerikus megoldását `c++` nyelven (a leapfrog módszert használva), egy python notebookból pedig különböző méréseket végeztem a forráskóddal. Megvizsgáltam a rendszerem stabilitását a c és c' paraméterek egymáshoz való viszonyának függvényében, összehasonlítottam a numerikus megoldásaim az analitikus megoldásokkal, amikor erre lehetőségem volt (normál módusok esetén), mértem a hullámterjedési sebesség c' függését, illetve megmutattam a húr linearitását kevert kezdőfelté-

telekkel készített animációk segítségével. A feladat során készült animációk megtekinthetők a youtube csatornámon, melynek a linkje a következő:

https://www.youtube.com/watch?v=89aMUs_lTTo&list=PL4gVMn1LI9jMhRoP1HQAvp4QcwzsPG_7f&ab_channel=%C3%81d%C3%A1mJakobi