

# Káosz

Bagoly Zsolt, Dobos László

2016. szeptember 14.

A fizikai rendszerek dinamikáját determinisztikus differenciálegyenletekkel (diszkrét idejű rendszerek esetében differenciaegyenletekkel vagy iteratív formulákkal) írjuk le, mely azt jelenti, hogy a differenciálegyenletek, a bennük szereplő konstansok, illetve a rendszer kiindulási fázisterének pontos ismeretében a rendszer állapota elvben bármely jövőbeli időpontban kiszámítható. A kaotikus rendszerek, bár első ránézésre rendezetlen, „össze-vissza” viselkedést mutatnak, nem azonosak a sztochasztikus rendszerekkel. Ez utóbbiak nagyon sok szabadsági fokkal rendelkeznek, így determinisztikus differenciálegyenletek helyett csak valószínűségi alapon, sztochasztikus differenciálegyenletekkel írhatók le. A kaotikus rendszereket leíró dinamikai egyenletek nem lineárisak, ezért – bár a kérdéssel már Henri Poincaré is foglalkozott, és stabilitási elméletüket Alekszandr Ljapunov már a 20. század elején kidolgozta – igazi viselkedésüket csak a számítógépes numerikus analízis elérhetővé válása és Edward Lorenz úttörő munkája nyomán ismertük meg.

## 1. A csillapított harmonikus oszcillátor

A csillapított és gerjesztett harmonikus oszcillátor ugyan nem kaotikus rendszer (hiszen mozgásegyenleteik lineárisak), de mivel analitikus megoldásaikat ismerjük, így segítségükkel bevezethetünk pár fontos fogalmat. A csillapított harmonikus oszcillátor esetében a négyzetes potenciálból eredő  $-kx$  visszahúzó erőn túl megjelenik egy  $-c\frac{dx}{dt}$ , sebességgel arányos csillapítási tag is, így a mozgásegyenlet

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1)$$

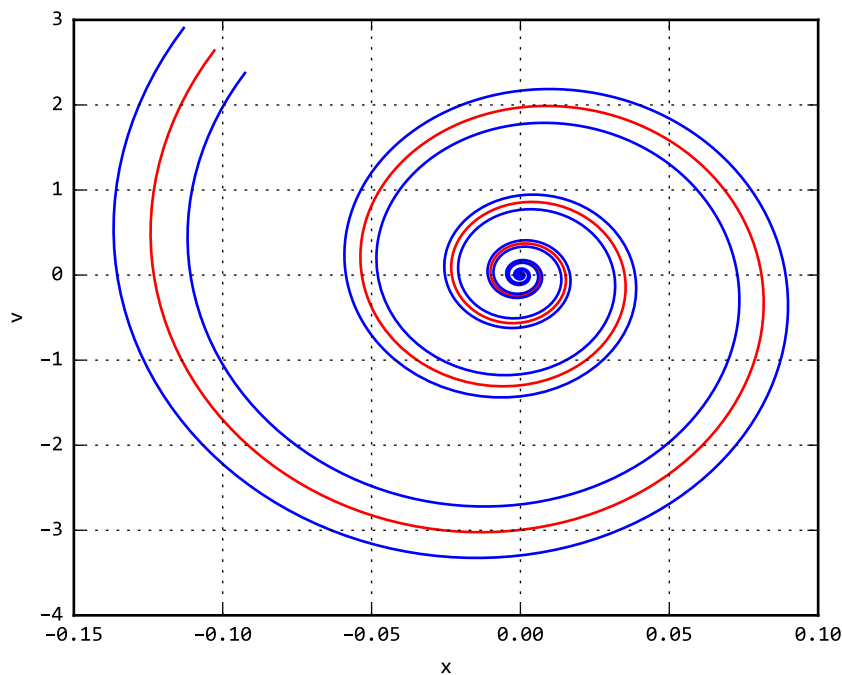
Az alulcsillapított ( $c^2 - 4mk < 0$ ) egyenlet megoldása

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi_0), \quad (2)$$

ahol  $\gamma = \frac{c}{2m}$  a lecsengési exponens,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  a csillapítatlan körfrekvencia, és  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  a csillapított körfrekvencia. Bevezetjük a  $v = \frac{dx}{dt}$  sebességváltozót, és az 1. ábrán felrajzoljuk a csillapított oszcillátor  $(x, v)$  fázissíkját. Megfigyelhető, hogy az  $(x(t), v(t))$  trajektóriák a kezdeti paraméterektől függetlenül,  $t$  növekedésével egyre közelebb kerülnek az origóhoz (csökkenő amplitúdó), és  $t \rightarrow \infty$  esetben a  $(0, 0)$  ponthoz tartanak, mely a rendszer *fixpontja*.

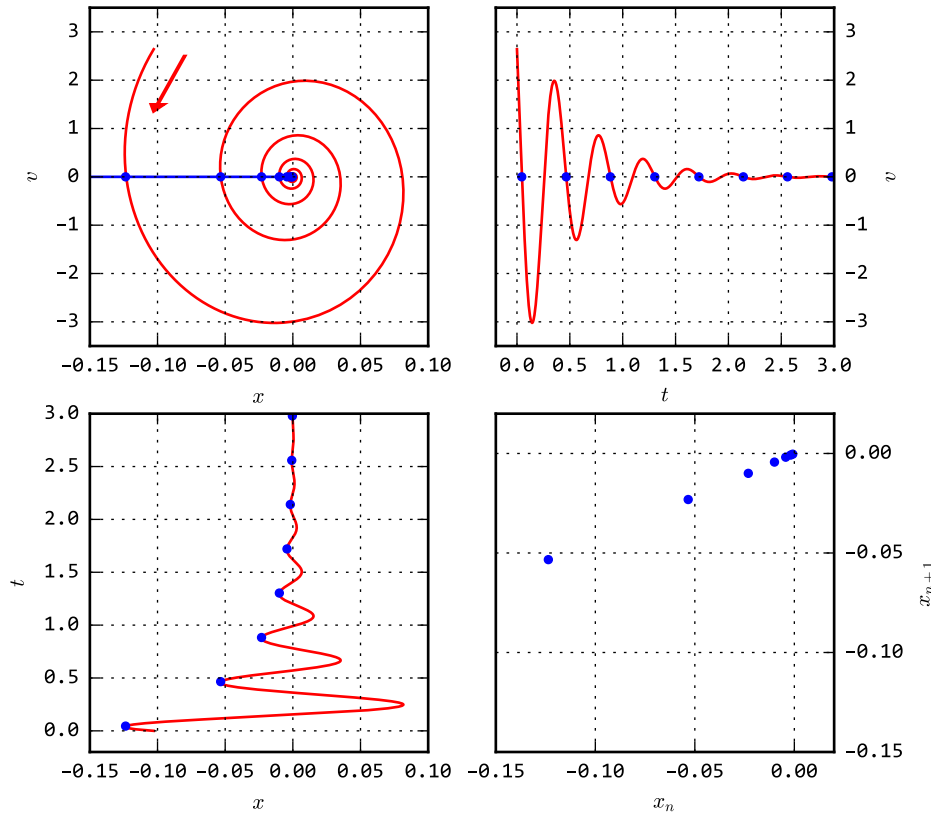
## 2. A Poincaré-leképezés

Az eddigiekben a csillapodó mozgás jellemzésére a fázistérbeli teljes trajektóriát használtuk. Létezik-e a csillapodó amplitúdójú mozgásnak egy kevesebb adattal leírható jellemzése úgy, hogy azért a folyamatra vonatkozó lényeges információkat (exponenciális



**1. ábra.** A csillapított harmonikus oszcillátor fázissíkbeli trajektóriája három különböző kezdeti paraméter esetén. Megfigyelhető, hogy a trajektóriák minden esetben a  $(0, 0)$  fixponthoz tartanak.

csillapodás) nem veszítjük el? Az, hogy egy oszcilláló mozgás csillapodik, megfelel annak, hogy az egymást követő maximális kitérések nagysága csökken. A maximális kitéréseknek megfelelő pontok a fázistérben a trajektória és az  $x$ -tengely metszéspontjai. Ezek közül tekintsük csak azokat, amikor az oszcillátor kitérése abszolút értékben maximális, de negatív. Egy ilyen metszésakor a sebesség nulla, előtte pozitív, utána pedig negatív, következésképpen  $x$ -nek tényleg szélsőértéke van ebben a pontban. Az  $x$ -tengely és trajektória  $(x_1, x_2, \dots)$  egyirányú metszéspontjait a rendszer Poincaré-metszetének nevezzük. Fontos megjegyezni, hogy esetünkben a pozitív  $x$ -tengellyel vett metszéspontok nem tartoznak a Poincaré-metszethez, hiszen ott a metszés ellenkező irányban, alulról felfelé történik. A Poincaré-metszet jól szemléltethető az egymást követő metszéspontok egymás függvényében való ábrázolásával, azaz az  $(x_n, x_{n+1})$  pontpárok felrajzolásával. A csillapított harmonikus oszcillátor Poincaré-leképezését és annak megkonstruálását a 2. ábra mutatja. Az általános, többváltozós definíció szerint a Poincaré-metszetet a trajektória és a fázistér dimenziószámánál egyel kisebb dimenziójú hipersík *egyirányú* metszéspontjai alkotják, azaz csak azok a pontok tartoznak bele melyeknél a trajektória a hipersíkon azonos irányban halad át. Természetesen az sem kikötés, hogy a Poincaré-leképezésnek a trajektória extrémumait kell kiválasztani, ezt a bemutatott példa esetében csak a szemléletesség kedvéért tettük. Belátható, hogy periodikus pályák esetében a Poincaré-leképezés csak néhány diszkrét pontot tartalmaz. Hosszabb periódusú, egy periódus alatt a Poincaré-metszeten több pontot is létrehozó trajektóriák vizsgálatakor az  $(x_n, x_{n+1})$  pontpárok ábrázolása helyett érdekesebb lehet a  $(x_n, x_{n+k})$ ,  $k$ -val késleltetett Poincaré-leképezés ábrázolása. Később látni fogjuk, hogy kaotikus rendszerek esetében a Poincaré-leképezés az  $(x_n, x_{n+1})$  sík nem triviális részhalmazait tölti ki.



**2. ábra.** A csillapított harmonikus oszcillátor Poincaré-leképezésének megkonstruálása. a) A bal felső panel az eredeti trajektória és a negatív  $x$ -tengely metszéspontjait mutatja. Ezek az  $x$ -tengely azon pontjai, melyeken a trajektória azonos irányban halad át. A trajektória időbeli fejlődésének irányát nyíl jelöli. b) A jobb felső ábra a sebességet mutatja az idő függvényében. A maximális kitérésekhez zérus sebesség tartozik. c) A bal alsó ábrán a maximális abszolút értékű negatív kitérésekhez tartozó pontokat jelöltük az idő függvényében. d) A jobb alsó ábra az egymás után következő maximális abszolút értékű negatív kitéréseket mutatja egymás függvényében. Ez a Poincaré-leképezés egy szokásos ábrázolási módja.

A folytonos trajektóriához hozzárendelhetünk tehát egy diszkrét  $(x_1, x_2, \dots)$  sorozatot, melyek a mozgásegyenletek viselkedését jellemzik. Az  $x_n$  értékek alapján a csillapított oszcillátor mozgásegyenletét az

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n e^{-\gamma T} \quad (3)$$

alakban rekonstruálhatjuk, ahol  $T$  a rendszer periódusideje. Egy periódus alatt az amplitúdó éppen  $e^{-\gamma T}$  részére csökken. Általános esetben az  $F(x)$  leképezés nem írható fel analitikus alakban, hanem közelítésekkel kell élnünk.

### 3. A gerjesztett harmonikus oszcillátor

A gerjesztett harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete (1)-hez igen hasonlóan

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = G(t), \quad (4)$$

ahol jobboldalon megjelenik az időfüggő  $G(t)$  gerjesztés. A gerjesztést

$$G(t) = G_0 \cos \omega t \quad (5)$$

alakúnak választva a rendszer rövid tranziens után  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgést fog végezni

$$A = \frac{G_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (6)$$

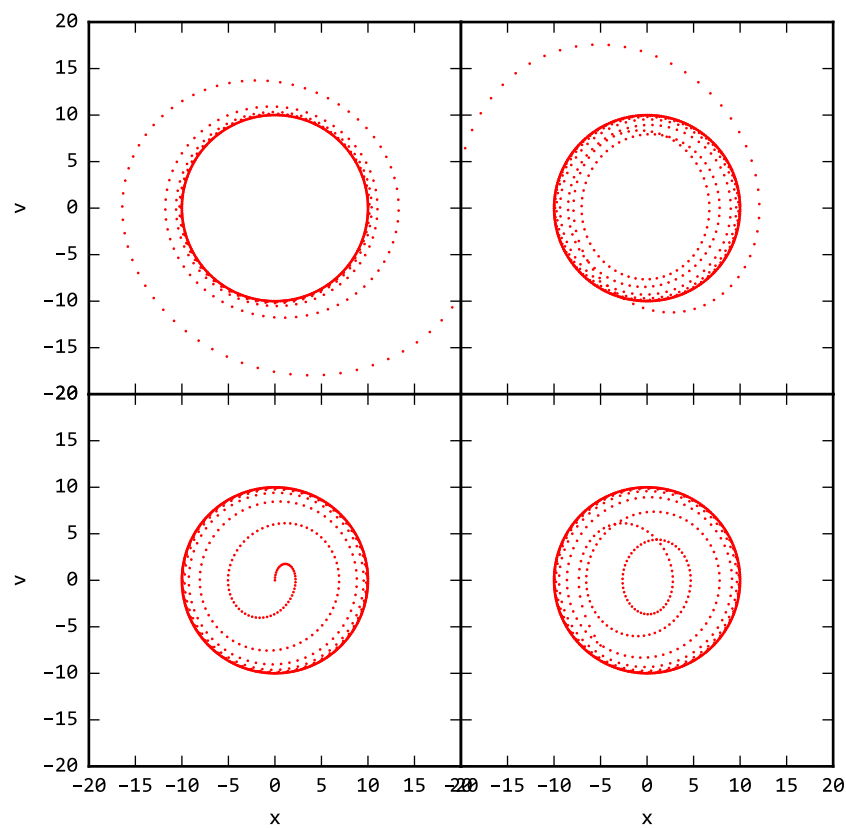
amplitúdóval. A fázistérben ennek a mozgásnak  $t \rightarrow \infty$  esetben a trajektóriája egy ellipszis  $2A$  illetve  $2A\omega$  tengelyekkel, ld. 3. ábra. Meg lehet mutatni, hogy ez a mozgás *stabil*, azaz ha a fázistér olyan pontjából indítjuk a rendszert, amely nincs rajta ezen az ellipszisen, akkor az onnan induló trajektória  $t \rightarrow \infty$  esetben az ellipszishoz fog hozzásimulni. Általában a fázistér olyan halmazait, amelyhez a trajektóriák tartanak *attraktornak* (azaz „vonzónak”) nevezzük.

### 4. A logisztikus leképezés

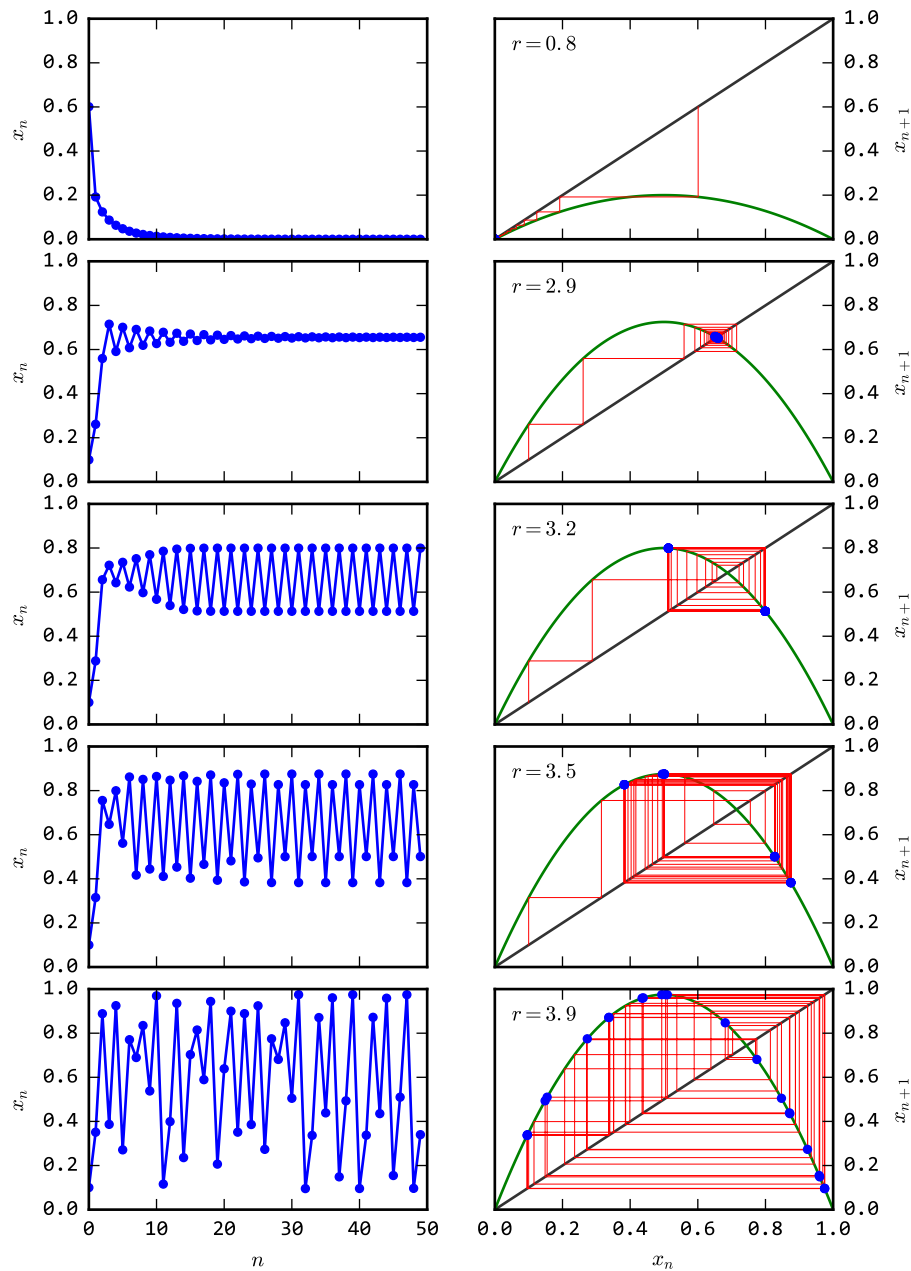
A folytonos idejű rendszerek vizsgálata esetében a fázistér helyett célszerűbb a Poincaré-metszetben dolgozni. Diszkrét idejű rendszerek esetében a Poincaré-metszet helyett közvetlenül vizsgálhatjuk a változók diszkrét időpontokban vett értékét, ezért most tekintsünk egy diszkrét idejű kaotikus rendszert, az ún. *logisztikus leképezést*. A logisztikus leképezés nyulak populációjának dinamikáját modellezi generációról generációra, a szaporodási ráta függvényében. Ha egy területen kevés a nyúl, akkor a következő generáció megszorodik, ellenben ha sok a nyúl, akkor közbe szól a rendelkezésre álló élelem véges mennyisége, és előfordulhat, hogy a nyulak eleszik egymás elől az élelmet, és szaporodás helyett nagyobb valószínűséggel éhen pusztulnak, vagyis a populáció a következő generációra csökken. Legyen  $x_n \in [0, 1]$  a nyulak egy generációjában az egyedszám maximális egyedszámhoz viszonyított aránya. Ekkor egy nagyon leegyszerűsített modell szerint az  $n + 1$ . generáció relatív egyedszámát az

$$x_{n+1} = F(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (7)$$

rekurzív formula adja meg, ahol  $r \in [0, 4]$  a nyulak születési rátája mínusz a halálozási ráta, mely egy adott populáció esetében konstans. A logisztikus leképezés egyszerűsége



**3. ábra.** A harmonikusan gerjesztett oszcillátor fázissíkbeli trajektóriája négy különböző kezdeti paraméter esetén. Megfigyelhető, hogy a trajektóriák minden esetben a gerjesztés által kijelölt ellipszishez, azaz az attraktorhoz tartanak.



**4. ábra.** A logisztikus leképezés viselkedése az  $r$  kontroll paraméter különböző értékeire: a) exponenciálisan csökkenő b) konstans, c) két éves periódussal oszcilláló, d) négy éves periódussal oszcilláló, és e) kaotikusan változó nyúlpopuláció. A baloldali panelek a populáció méretének időfüggését, a jobboldaliak pedig a leképezés Poincaré-metszetbeli viselkedését mutatják. A Poincaré-metszeteken ábrázoltuk az adott  $r$  kontrollparaméternek megfelelő másodfokú görbét és a nyúlpopuláció időbeli fejlődését (piros trajektóriák). A Poincaré-metszet pontjait a kék pontok mutatják. Az  $(x_n, x_{n+1})$  pontpárokat csak 25 iteráció után ábrázoltuk, hogy a kezdeti tranziensek ne jelenjenek meg az ábrán.

ellenére igen összetett kaotikus viselkedést mutat, ráadásul a leképezés viselkedése az  $r$ , ún. *kontrollparaméteren* keresztül szabályozható.

A logisztikus leképezés viselkedésének vizsgálatához a 4. ábrán felrajzoltuk az  $x_n$  értékeket  $n$  függvényében, illetve az  $(x_n, x_{n+1})$  egymást követő értékekből alkotott pontpárokat, azaz a leképezés Poincaré-metszetét az  $r$  kontrollparaméter több különböző értékére. Látható, hogy a periodikus pályáknak néhány diszkrét pont, a kaotikus pályának viszont „véletlenszerű” ponteloszlás felel meg. Diszkrét idejű rendszerek esetében a  $k$  szerinti periodicitás alatt azt értjük, ha a valamilyen  $k$  egész számra teljesül, hogy

$$x = F^k(x) = \underbrace{F(F(F(\dots F(x))))}_k, \quad (8)$$

ahol  $F$  a leképezést generáló függvény, melyet egymás utána  $k$ -szor hattatunk  $x$ -re. Megfigyelhető, hogy a leképezés viselkedése a kontrollparaméter értékétől függ. Hogy a logisztikus leképezés viselkedésének kontrollparamétertől való függését jobban megvizsgálhassuk, az 5. ábrán felrajzoltuk  $x_n$  értékeit  $r$  függvényében kellően nagy  $n$ -ekre, hogy a kezdeti tranziensek eltűnjenek. Ez nyilvánvalóan egy többértékű függvény lesz, és azt várjuk, hogy periodikus viselkedés esetén az adott  $r$  értékhez csak néhány diszkrét  $x$  érték tartozik majd, míg kaotikus viselkedés esetén az  $x$  értékek nem triviális halmaza. Az 5. ábra az ún. *bifurkációs diagram*, ahol jól megfigyelhető a kontrollparaméter változtatásának hatása. A kontrollparaméter érdekes tartományai a következők:

- $r < 1$  esetében  $x \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$
- $1 < r < 2$  esetében  $x \rightarrow \frac{r-1}{r}$ , ha  $n \rightarrow \infty$
- $2 < r < 3$  esetében szintén  $x \rightarrow \frac{r-1}{r}$ , ha  $n \rightarrow \infty$ , viszont a konvergenciát előbb egy periodikusan oszcilláló szakasz előzi meg.
- $2 < r < 1 + \sqrt{6}$  esetében *majdnem minden* kezdeti érték esetében két érték közötti oszcilláció áll be.
- 3,44949 és 3,54409 között *majdnem minden* kezdeti érték esetében négy érték közötti oszcilláció áll be.
- $r$  lassú növelésével egyre hosszabb, kettőhatvány periódusú pályák jönnek létre.
- $r \gtrsim 3,56995$  értékekre általában kaotikus viselkedés figyelhető meg, de van néhány speciális  $r$  tartomány (ún. *stabilitási szigetek*), például  $r = 1 + \sqrt{8}$  környezetében, ahol a rendszer 3, majd 6 és 12 érték között oszcillál.
- stb.

Belátható, hogy a logisztikus leképezés esetében tetszőleges hosszúságú periodikus pálya megvalósulhat. Egy periodikus viselkedéshez tartozó  $r$  értékből lassan felfelé indulva a káosz beállta előtt a periódus mindig végtelen sokszor megduplázódik. A periódus megduplázódását, és ennek következtében a Poincaré-metszeten új fixpontok megjelenését nevezzük *bifurkációnak*. A bifurkációkhoz tartozó  $r_1, r_2, \dots$  értékeket Feigenbaum-szekvenciának nevezzük. Belátható, hogy létezik egy

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}} \approx 4,669201... \quad (9)$$

konstans érték, amihez a kontrollparaméter bifurkációs pontokhoz tartozó értékeinek aránya konvergál. Ez a szám egy univerzális konstans, ami azt jelenti, hogy minden egy dimenziós, egyetlen  $x_n$ -ben kvadratikus maximummal rendelkező leképezés esetén megadja a bifurkációs pontok távolságainak arányát.

Egy kaotikus rendszer  $(x_1, x_2, \dots)$  Poincaré-metszetének információtartalmát úgy határozzuk meg, hogy elkészítjük az  $x_n$  értékek  $p_i$  normált hisztogramját, ahol az  $i$  index a hisztogram  $i$ . dobozát jelöli, majd kiszámítjuk a

$$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i, \quad (10)$$

úgynevezett Shannon-entrópiát vagy *információt*. A Shannon-entrópia mértékegysége a *bit*, és kifejezésében az összegzés a hisztogram dobozaira történik. A 6. ábrán felrajzoltuk a logisztikus leképezés kontrollparaméterének négy különböző értékéhez tartozó eloszlásokat. Megfigyelendő, hogy a periodikus esetekben csak néhány éles csúcs jelenik meg, míg a kaotikus rendszert a széles, nem triviális eloszlás jellemzi. Az egyetlen csúcsot mutató egyszerű periodikus rendszer információja  $H = 0$ . Az információ minden bifurkáció után, a csúcsok megduplázódása során 1-gyel nő. A maximális entrópiát egyenletes eloszlás esetén várjuk, ami persze kaotikus rendszer esetében soha sem valósul meg.

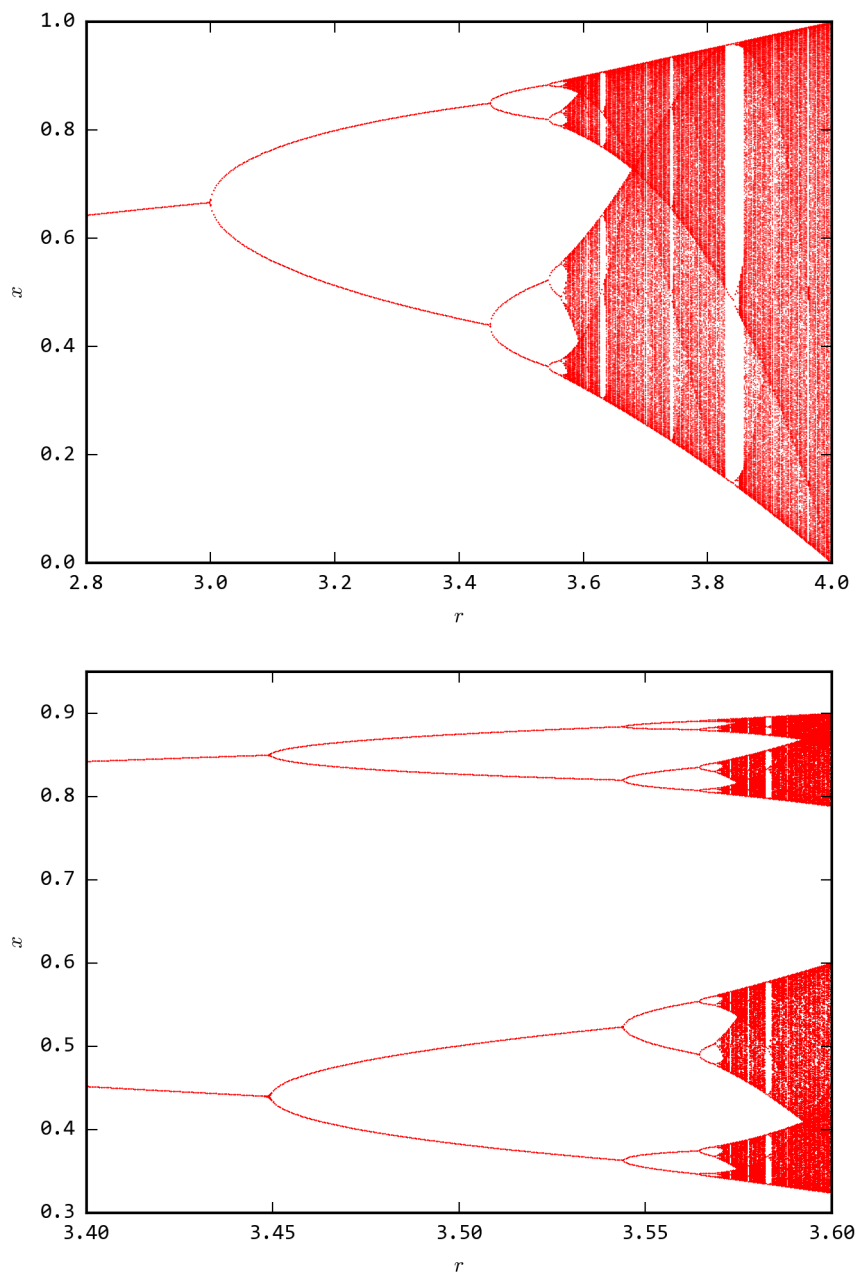
A gyakorlatban a hisztogram elkészítésekor az  $N$  dobozszámot úgy célszerű megválasztani, hogy a rendelkezésre álló mintaszám esetében a Poisson-hiba lehetőleg még megfelelően kicsi legyen. Az  $N = \sqrt{n}$  jó választás –  $n$  itt a Poincaré-metszet mintaszáma –, hiszen ekkor az egyes dobozokba jutó pontok várható értéke  $\sqrt{n}$ , vagyis a relatív Poisson-hiba  $\sqrt[4]{n}$ , ugyanakkor a dobozok száma is kielégítően magas.

Tekintsük most a 7. ábrát, melyen a logisztikus leképezés viselkedését ábrázoltuk a kaotikus tartományban. Figyeljük meg, hogy kaotikus intervallumok között rövid, kváziperiodikus szakaszok jelennek meg. Ez annak felel meg, amikor a kaotikus rendszer a leképezés fixpontja környékén bolyong, de idővel eltávolodik onnan. Ezt a jelenséget nevezzük *intermittenciának*. Az intermittens szakaszok rendszertelen időközönként jelennek meg, és hosszuk is véletlenszerű eloszlást mutat. Ez azt jelenti, hogy a kontrollparaméter bizonyos értékeinél egy rendszer a kaotikus tartományban is sokáig viselkedhet viszonylag szabályosan, majd hirtelen kaotikussá válhat. Egy idő múlva ismét visszatér a szabályos viselkedés és ez így ismétlődik tovább. Az intermittencia megjelenhet a fixponttól távol is, ld. 8. ábra. Ebben az esetben a viszonylag hosszú ideig tartó kváziperiodikus viselkedés oka az, hogy a rendszer egy hosszú, szűk, hosszú „csőbe” jut, amiből időbe kerül kijutnia, és eközben kváziperiodikus viselkedést mutat. Amíg a trajektória a csőben tartózkodik, az  $x_n$  értékek alig változnak, azaz olyan mintha szabályos lenne a rendszer. Amint kijut a csőből, újra a kaotikus trajektória mentén fog mozogni, majd bolyongása során megint visszajut a csőbe.

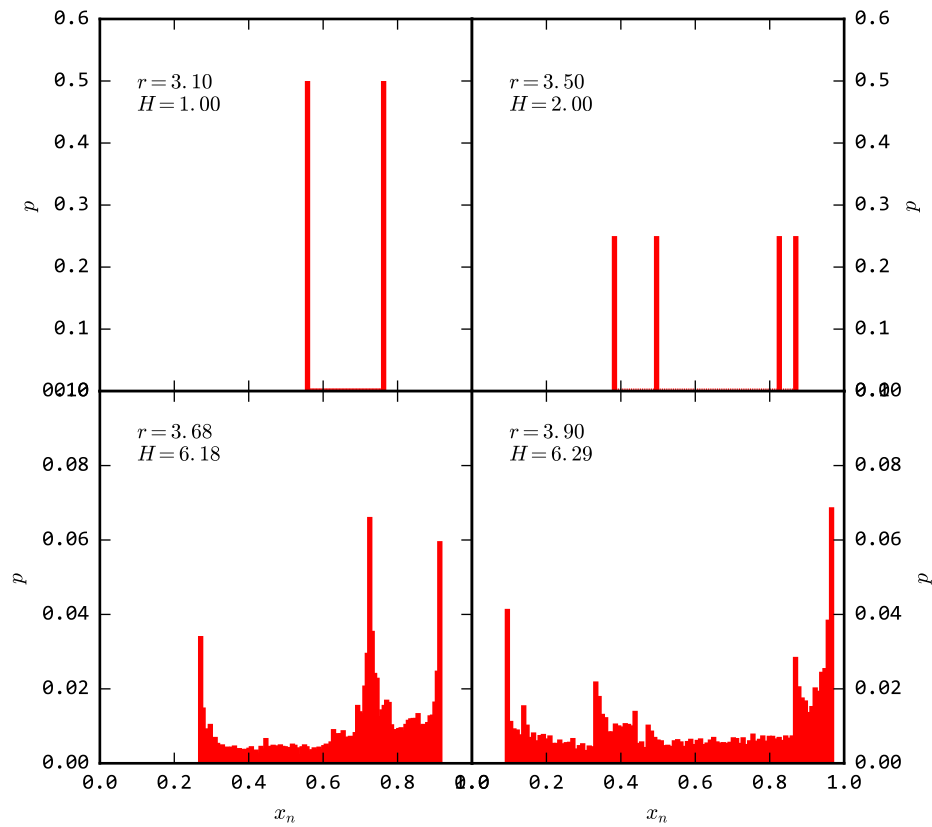
## 5. Az áramkör

Vizsgálataink tárgyát a lehető legegyszerűbb nemlineáris elektronikus áramkör képezi (ld. 9. ábra): egy  $L_x R_x$  veszteséges tekercs és egy  $D_x$  szilícium egyenirányító dióda sorba kapcsolt RLC-köre. A rendszer bemenete a tekercs egyik kivezetése, a kimenete pedig a dióda katódja. Ez az áramkör a bevezetőben említett csillapított oszcillátor nem lineáris változatának elektronikus megfelelője. A rendszer nem linearitásáért a dióda karakterisztikája a felelős. Ha egyenfeszültséget adunk a bemenetre, akkor a jól ismert dióda karakterisztika

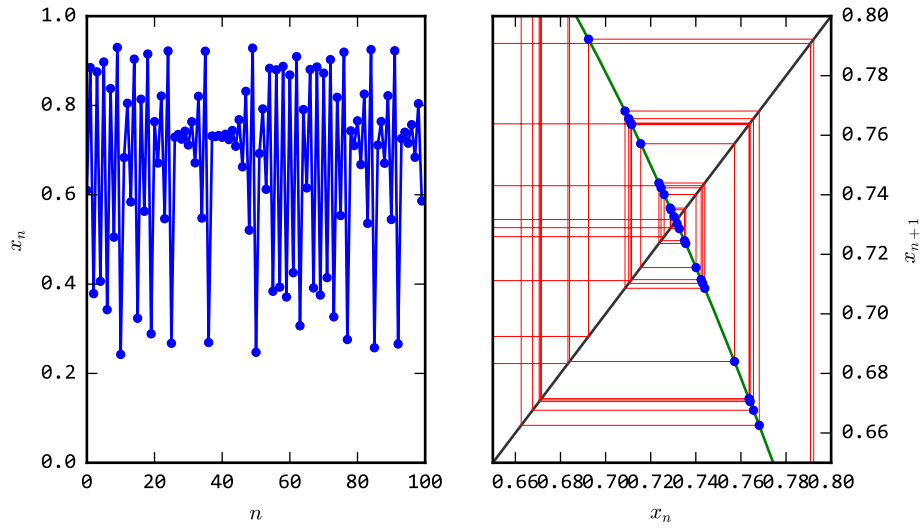




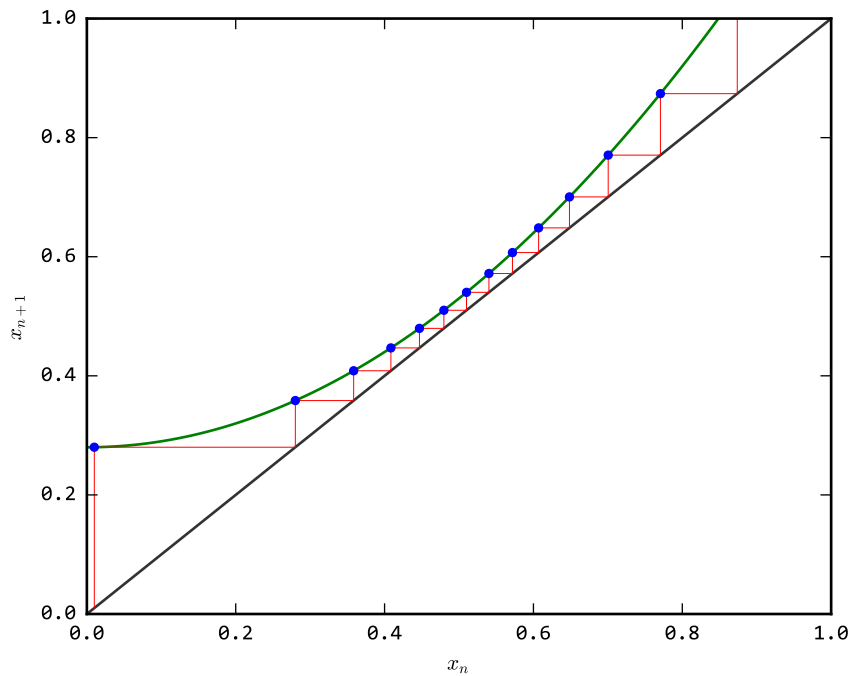
**5. ábra.** A logisztikus leképezés bifurkációs diagramja, mely az  $r$  kontrollparaméter függvényében mutatja a leképezés attraktorát. A bifurkációs pontok azok, ahol az attraktor „megduplázódik”, azaz a korábban  $k$  periódusú pálya  $2k$  periódusúvá változik. Figyeljük meg, hogy a kaotikus tartományban a pontok sűrűségeloszlása nem egyenletes, az attraktor érdekes finomszerkezetet mutat! Ugyancsak figyeljük meg az egyes kaotikus tartományokon túli keskeny stabilitási szigetek létét! Az alsó ábrán a bifurkációs diagram egy érdekes részét kinagyítottuk, így jól látszik a perióduskettőződés. Ugyancsak jól megfigyelhető, hogy a bifurkációs diagram egyes részei mennyire „hasonlítanak” egymásra, néhol kicsiben megismétlődik a korábban nagyban látott minta. Ez a tulajdonság a fraktálok alapvető jellemzője.



**6. ábra.** A logisztikus leképezés eloszlása és Shannon-entrópiája a kontrollparaméter négy különböző értékére. Az első két panel periodikus viselkedéshez tartozik, míg a harmadik panelen megfigyelhető, némileg kiszélesedett csúcs az intermittens viselkedésre utal. Az utolsó panel a káosz eloszlását mutatja.



**7. ábra.** A logisztikus leképezés viselkedése a kontrollparaméter  $r = 3,72$  értéke esetében, a fixpont környéki tartományban. A rövid kvázi-periodikus szakaszok az intermittens tartományok.



**8. ábra.** Egy rendszer viselkedése az intermittens tartományban. A trajektória beszorulhat a leképezés által definiált hosszú „csőbe”, ami viszonylag hosszú, kvázi-periodikus viselkedést okoz.

miatt

$$U_{ki} = \begin{cases} U_{be}, & \text{ha } U_{be} > -U_D \\ -U_D, & \text{ha } U_{be} < -U_D, \end{cases} \quad (11)$$

ahol  $U_D \approx 0,5$  V, a dióda nyitófeszültsége. Mindez igaz abban az esetben is, ha a bemenő feszültség frekvenciája nem túl nagy ( $f < 1$  kHz), hiszen ebben a frekvenciatartományban az áramkör belső tranziensei sokkal gyorsabban lecsengenek, mint a gerjesztés periódusideje. A tranziensek lecsengésének idejét két jelenség határozza meg, amelyek megértéséhez túl kell lépni a statikus diódamodellen. Figyelembe kell venni, hogy valódi diódák esetében a 9. ábrán bemutatott kapcsolás esetében a záróirányban előfeszített dióda *záróréteg-kapacitása* a tekercsel és annak belső ellenállásával egy soros  $RLC$ -kört képez. Az  $RLC$ -körhöz két karakterisztikus időskála tartozik. A rezonanciafrekvenciához tartozó periódusidő

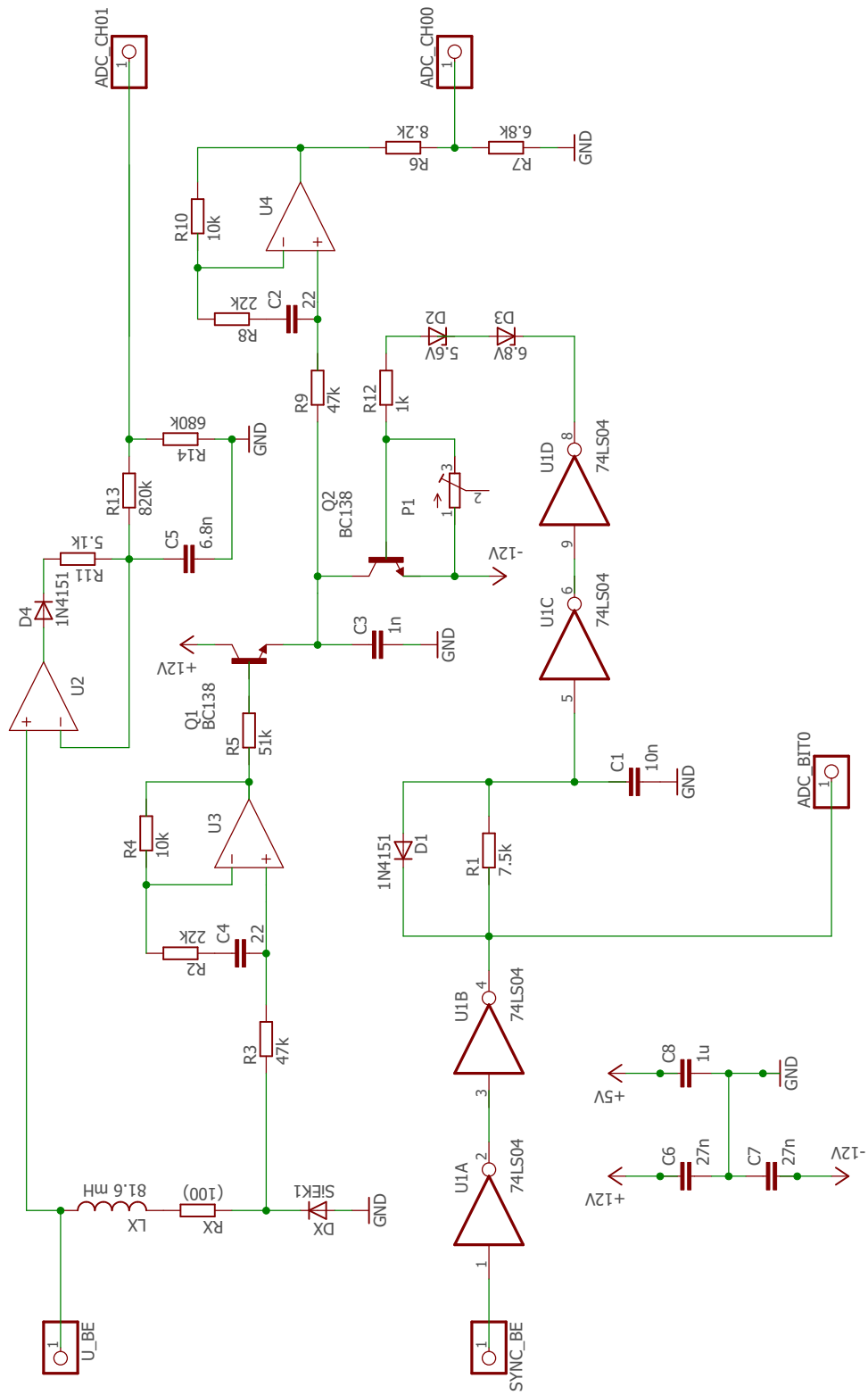
$$T_{rez} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC_D} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (12)$$

ahol  $C_D$  a dióda záróirányú kapacitása, valamint

$$T_{csill} = \frac{2L}{R} > T_{rez}, \quad (13)$$

a rezgések lecsengési ideje. A diódának ez a tulajdonsága önmagában nem elegendő a kaotikus viselkedés létrejöttéhez, azonban egy fizikai dióda  $\tau_{rr}$  lezárási késleltetési ideje (reverse recovery time) véges, ami azt jelenti, hogy a dióda lezárásához a  $pn$  átmenetből előbb ki kell ürülniük a jelenlevő töltéshordozóknak, és ez  $\tau_{rr} > 0$  időt vesz igénybe. Ez abban nyilvánul meg, hogy miközben már záróirányú feszültség esik a diódán,  $\tau_{rr}$  ideig még nyitóirányú áram folyik rajta. Közöséges alkalmazásokban, jól megválasztott diódatípus felhasználása mellett ezt az időt el lehet hanyagolni, a jelen mérésben azonban fontos szerepet játszik. A lezárási késleltetést nagyban befolyásolja a dióda mérete, geometriája és a nyitóáram értéke. A gyors,  $\tau_{rr} \approx 1$  ns diódák kis méretűek, kicsi bennük a  $pn$  átmenet felülete, következésképpen a töltéshordozók hamar ki tudnak diffundálni az átmenetből. Ha egy dióda esetében a gyorsaság helyett a minél nagyobb disszipálható teljesítmény a szempont (pl. tápegységek egyenirányító diódáinak esetében a diódán folyó áram tipikusan  $I_{max} = 1\text{--}10$  A közé esik), akkor nagy méretű diódát alkalmazunk, ellenkező esetben az könnyen túlmelegedne. A mérési összeállítás áramkörében felhasznált SiEK1 dióda lezárási késleltetése a nyitóáramtól függően  $\tau_{rr} = 1\text{--}10$   $\mu$ s, ami viszonylag nagy érték. A záróirányú kapacitással együtt ez a késleltetési idő az, ami az áramkörben a kaotikus viselkedést okozza. Ha megfelelően gyors diódát alkalmazunk, akkor nem kapunk kaotikus kimenő jelet, ami azt mutatja, hogy egy áramkör tervezésénél mennyire fontos szempont az egyes komponensek paramétereinek gondos figyelembe vétele. Pontatlanul megválasztott paraméterű komponensekből épített áramkörök igen könnyen kaotikussá válhatnak, ami rendkívül zajossá teszi a működésüket.

Ha a mérésben szereplő áramkör szinuszos bemenő jelének frekvenciája eléri a 10 kHz-es nagyságrendet, akkor a bemeneti amplitúdót fokozatosan növelve az egy nagyságrendbe eső  $1/f$ ,  $T_{rez}$  és  $\tau_{rr}$  időskálák miatt nem lineáris rezonancia lép fel. Ennek hatására egy kritikus bemenő amplitúdónál bifurkációt figyelhetünk meg, azaz a kimenő jel két amplitúdó között oszcillál. A bemenő jel amplitúdójának további növelésére további bifurkációk történnek, majd a Feigenbaum-szekvencia bejárása után a kimeneti jel kaotikus lesz. A mérési összeállítással könnyen előállíthatunk intermittens működést, valamint a 3-as és 6-os periodikus ablak is szépen megfigyelhető. Ennek ellenére az áramkör működését nem



**9. ábra.** A kaotikus oszcillátort megvalósító áramkör ( $L_X$ ,  $R_X$ ,  $D_X$  komponensek) és a mérőelőtét kapcsolási rajza.

a korábban bemutatott logisztikus leképezés írja le. A kaotikus rendszerekben megfigyelhető nagyfokú *univerzalitás* miatt azonban az igen egyszerű logisztikus leképezés mégis jó közelítése a mérésbeli áramkörnek, és kvalitatív jellemzőit (mint például a bifurkációs diagram) jól adja vissza. A mérések szerint az áramkör viselkedését a logisztikus leképezés helyett legjobban egy kétdimenziós (kétváltozós) leképezés adja vissza, melyet részletesen itt nem ismertetünk.

## 6. A mérőelőtét és a mérőprogram

Az áramkör viselkedését legegyszerűbben oszcilloszkópon figyelhetjük meg, de az nem alkalmazható kvantitatív mérésekre. A pontos mérések elvégzésére egy IBM PC számítógépen alapuló mérőrendszer szolgál, melyet egy mérőelőtét kapcsol össze az áramkörrel. A mérőelőtét egy 12 bites analóg-digitális-átalakítót hajt meg, mely digitális kimenetét a számítógépen futó mérőprogram dolgozza fel.

### 6.1. A mérőelőtét

Hasonlóan a 2. fejezetben leírtakhoz, a teljes kimeneti jelalak helyett célszerű a kaotikus jel Poincaré-leképezését vizsgálni. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy csak a jel maximumainak értékére vagyunk kíváncsiak. A 9. ábrán bemutatott mérőelőtét ezen maximumok meghatározását végzi el egy analóg áramkör segítségével. A mérőelőtét három fő részből áll:

- egy folytonos üzemű csúcs-egyenirányító,
- egy mintavételező csúcs-egyenirányító, valamint
- egy kisütő- és szinkronjel generátor.

Az  $U_2$  műveleti erősítővel megépített folytonos üzemű csúcsegyenirányító a bementi jel amplitúdójának mérésére szolgál. Az  $R_{13}$  és  $R_{14}$  ellenállásokkal megépített osztó a maximummalisan 10–12 V-os kimenő jelszintet az A/D konverter max. 5 V bemeneti feszültségéhez igazítja. A mintavételező csúcs-egyenirányító az  $U_3$  és  $U_4$  műveleti erősítőkből áll, és a feladata a kaotikus jel csúcserősségeinek meghatározása. Itt nem az előzőleg alkalmazott visszacsatolt kapcsolást választottuk, mert sajnos annak tranziens tulajdonságai nem voltak elég jók. Helyette kompromisszumot kötöttünk a pontosság és a gyorsaság között, és egy egyszerű passzív csúcs-egyenirányítót használunk. Az  $U_3$ -mal felépített egységnyi erősítésű fokozat nagy bemenő ellenállása révén alig terheljük a kaotikus áramkört. Az  $R_5$  ellenálláson keresztül a  $Q_1$  tranzisztort vezéreljük, amely egyrészt a bázis-emitter dióda és  $C_3$  miatt csúcs-egyenirányítóként működik, másrészt áramerősítést végez, ami ahhoz szükséges, hogy követni tudjuk a bemeneti feszültség (azaz a kaotikus áramkör kimeneti feszültségének) változását. Mivel a kondenzátor töltése  $Q = CU$ , ezért a kondenzátor feszültségének időbeli változása

$$\frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}. \quad (14)$$

Ha  $dU/dt$  (amit slew-rate-nek neveznek) kisebb, mint a bemeneti feszültség változási gyorsasága, akkor a kimeneti feszültség értéke hibás lesz. Nagyobb slew-rate-et pedig csak nagyobb áramerősséggel tudunk elérni, ezért van szükség a  $Q_1$  tranzisztor áramerősítésére. A visszacsatolás nélküli egyenirányító kimeneti feszültsége sajnos egy  $U_D$  diódafeszültséggel

kisebb mint a bemenő csúcs feszültsége, ráadásul a diódafeszültség függ az emitteráramtól, ami további mérési pontatlanságot okoz. A kondenzátor feszültségét az  $U_4$ -gyel kialakított feszültségkövető és az  $R_6$ – $R_7$  osztó illeszti az A/D-átalakítóhoz. A kisütő- és szinkronjelet egy 74LS04 (6 x NOT) digitális IC segítségével állítjuk elő a függvénygenerátor kimenő szinkronjeléből. Az  $R_1C_1$  kisütési idő úgy van beállítva, hogy a kaotikus jel maximuma és az A/D-konverzió lezajlása után (ez kb. 13  $\mu$ s) süsse csak ki a  $Q_2$  tranzisztor  $C_3$ -at. A kondenzátort nem földpotenciálra sütjük ki, hanem valamilyen negatív potenciálra. Ez azért szükséges, hogy  $U_D$ -nél kisebb maximumokat is ki tudjunk mérni. A kisütés mértékét a  $P_1$  trimmer potenciométerrel változtathatjuk. Az a jó beállítás, ha a legnagyobb bemenő csúcs után is negatívba megy a kondenzátor feszültsége.

## 6.2. A mérőprogram

A mérőprogram három kiértékelő programból áll, amelyek különböző feladatokat látnak el. Ezek közül egy egyszerű menü segítségével választhatunk.

**Oszilloszkóp** : Ebben az üzemmódban közvetlenül figyelhetjük meg az A/D-átalakítóról érkező jelet. Itt jeleníthetjük meg a bifurkációkat és a kaotikus tartományba ágyazott periodikus ablakokat. A mért adatok fájlba menthetők, majd tetszőleges programmal könnyen ábrázolhatók. Az egyes billentyűk funkciója:

- *SPACE*: a kijelzés leállítása („tároló szkóp”);
- *ENTER*: folyamatos kijelzés;
- + ill. –: az erősítés növelése illetve csökkentése;
- *S*: az adatok kimentése;
- *ESC*: vissza a főmenühez.

**Attraktor** : Ez az üzemmód a rendszer Poincaré-metszetbeli attraktorának vizsgálatára szolgál. A mérésből rendelkezésünkre áll egy  $x_n$  sorozat, így ábrázolhatjuk  $x_{n+1}$ -et  $x_n$  függvényében. Ha a rendszert egy egyszerű leképezés írja le, akkor az (3) képlet alapján az  $F$  függvénynek kell kirajzolódnia. Ha bonyolultabb a helyzet, akkor a kirajzolódó alakzat nem lesz egyértékű függvénnyel jellemezhető. Viszont maga az alakzat mindenképpen a rendszer attraktorát jellemzi: a periodikus szakaszban egy vagy néhány pontot, a kaotikus állapotban pedig folytonos görbét kapunk. Az  $(x_n, x_{n+1})$  pontok ábrázolásával könnyen különbséget lehet tenni teljesen véletlen és kaotikus jel között: véletlen jelre a módszer nem egy görbét, hanem egy betöltött síkidomot szolgáltat (azaz például betölti az egész négyzetet). A programmal megváltoztathatjuk a késleltetést, azaz  $x_{n+1}$  helyett  $x_n + j$ -t is ábrázolhatjuk  $x_n$  függvényében, ahol  $j = 1..9$  egész szám. Attraktor üzemmódban az egyes billentyűk funkciója:

- *ENTER*: az ábra törlése;
- + ill. –: az erősítés növelése illetve csökkentése;
- $\Leftarrow$  ill.  $\Rightarrow$ : a késleltetés csökkentése illetve növelése;
- *S*: az adatok kimentése;
- *ESC*: vissza a főmenühez.

**Eloszlás** : Ebben az üzemmódban az A/D-átalakítóról érkező jelek nagyság szerinti eloszlását (hisztogramját) vizsgálhatjuk. Periodikus viselkedés mellett csak egy vagy néhány különböző amplitúdóértéket mérünk, ha viszont kaotikus a rendszer, akkor széles tartományban változnak a mért csúcsok amplitúdói. A kimentésnél itt csak egyszer kell megadni a fájl nevét, utána minden kimentett eloszlás ugyanabba a fájlba kerül, így könnyen fel lehet venni a bifurkációs diagramot. Ehhez különböző bemenő feszültségeknél felvett eloszlásokat kell egymás után kimenteni. A program kiszámítja a megmért eloszláshoz tartozó, (10) képlet szerinti információt (Shannon-entrópiát) is. Ez az információ éles eloszlásokra kicsi, maximális értékét ( $H_{\max} = 12$  bit) pedig az egyenletes eloszláson veszi fel. Egy bifurkáció során  $H$  elméletileg 1 bittel nő, de ebben a rendszerben a jelenlevő zaj miatt ez a növekmény kevesebb. Az információ értéke a kimentett adatfájl harmadik oszlopában található. Az egyes billentyűk funkciója:

1. *SPACE*: új mérés indítása;
2. + ill. -: az erősítés növelése illetve csökkentése;
3. *S*: az adatok kimentése;
4. *ESC*: vissza a főmenühöz.