Definitionen

1. Menge: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung **wohlunterschiedenen Objekten** zu einem Ganzen.
Es muss zudem einwandfrei entscheidbar sein, ob ein Objekt der Gesamtheit angehört oder nicht.
Die Objekte der Menge heißen **Elemente** der Menge.

2. gleichheit von Mengen: Zwei Mengen A und B heißen **gleich** ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element aus A auch ein Element aus B ist – und umgekehrt.
für alle $x \in A$ gilt auch $x \in B$ und für alle $y \in B$ gilt auch $y \in A$
Sind die Mengen A und B nicht gleich, notiert man $A \neq B$.

3. Komplementärmenge: Sei $E(x)$ eine Aussageform über der Menge U.
Dann heißen die Mengen $M = \{x \in U \mid E(x)\}$ und $\bar{M} = \{x \in U \mid \neg E(x)\}$ in U komplemetär.
$\bar{M}$ heißt **Komplementärenge** oder *Komplement* vom M in U.

4. Leere Menge: Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

5. Teilmenge: Eine Menge B heißt **Teilmenge** einer Menge A genau dann, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist. ($B \subseteq A$ *gilt gdw.* $\forall x : x \in B \to x \in A$) .
A heißt dann **Obermenge** von B. B heißt echte Teilmenge von A.

6. Potenzmenge: Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** von M und wird $\mathcal{P}(M)$ notiert:
$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\}$

7. Vereinigung: Seien M und N Mengen. Die Vereinigungsmenge ist Definiert durch: $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$

8. Schnitt: Seien M und N Mengen. Der Schnitt ist Definiert als $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$

9. Differenz: Seien M und N Mengen. Die Differenz ist definiert durch $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$

10. Mengenfamilie: Die Mengenfamilie $\mathcal{F}$ sei definiert als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$
Dann ist die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcup \mathcal{F} = \{\mathrm{x} \mid \exists\, \mathrm{N} \in \mathcal{P}(\mathrm{M}) : (\mathrm{N} \in \mathcal{F} \wedge x \in N)\}$
Der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \to x \in N)\} \cap \bigcup \mathcal{F}$

11. kartesisches Produkt: Seien A und B Mengen. Das **kartesische Produkt** (auch Kreuzprodukt) von A und B ist definiert durch
$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$

12. Isomorphie: Zwei Mengen X und Y sind **isomorph**, wenn dich ihre Elemente eins zu eins zuordnen lassen. $(X \cong Y)$

13. Disjunkte Vereinigung: Die **disjunkte Vereinigung** von A und B ist definiert durch:
$A \uplus B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$

Rechengesetze

Assoziativgesetz:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Kommutativgesetz:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Distributivgesetz:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

De-Morgan:
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Absorption:
$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

Idempotenz:
$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

Komplementgesetze:
$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$
$$A \cup \bar{A} = G$$

Zahlenmengen

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0,-1,1,-2,2,\ldots\}$
rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid \mathrm{m} \in \mathbb{Z} , \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \neq 0\}$
reelle Zahlen $\mathbb{R}$
irrationale Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Dabei gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq$

Schreibweisen Mengen:

Mengen können durch mehrere Schreibweisen beschrieben werden:
explizit: M = {1,2,3,4}
verbal: „Die Menge aller nicht-negativen, geraden Ganzzahlen“
unendliche Mengen: M := {0,2,4,6,8,...}
implizit: M := {x $\in \mathbb{N}$ | x ist gerade}

Eine **Potenzmenge** ist jede mögliche Teilmenge einer Menge. Bsp: M := {1,2,3} dann ist
$\mathcal{P}$(M) := {{$\emptyset$},{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}.

Bei der **disjunkten Vereinigung** zweier Mengen kreuzt man die jeweiligen Elemente mit einer Menge aus einem Index (Menge A × {1}, Menge B × {2} usw.) und vereinigt die daraus resultierenden Kreuzprodukte. Dadurch ist jedem Element aus A $\uplus$ B anzusehen, ob es aus A oder B stammt.