Definitionen

1. Induktion: Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte 1 und 3 durchzuführen:

- Induktionsanfang (IA): Man zeigt, dass $A(0)$ richtig ist.
- Induktionsbehauptung (IB): Annahme, dass $A(k)$ für ein festes k richtig ist.
- Induktionsschluss (IS): Man zeigt: Aus der Annahme, dass $A(k)$ richtig ist (Induktionsanker), folgt, dass auch $A(k+1)$ richtig ist:
  $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Dann ist gewährleistet, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Wichtig: Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 0$, sondern für ein $n_0 > 0$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

2. Induktiv erzeugte Menge: Die Menge M wird wie folgt induktiv definiert:

- Basismenge: jedes x mit ˜ gehört zu M.
- Erzeugungsregel: Sind m_1 und m_2 Elemente aus M, dann auch das Element $m = randoomFunction(m_1, m_2)$.
- Nur Elemente, die so gebildet werden können, gehören zu M.

3. Wörter/Zeichenketten: Sei $\sum$ ein Alphabet. Die Menge $\sum^*$ aller Wörter über $\sum$ ist induktiv definiert:

- Basismenge: Das leere Wort ϵ gehört zu $\sum^*$; das heißt: $\epsilon \in \sum^*$.
- Erzeugungsregel: Ist w ein Wort in $\sum^*$ und a ein Element von $\sum$, dann gehört die Konkatenation wa zu $\sum^*$

4. Länge eines Wortes: Sei $\sum$ ein Alphabet. Die Länge eines Wortes $w \in \sum^*$ ist induktiv definiert durch:

- Die Länge des leeren Wortes ϵ ist 0, $|\epsilon| = 0$
- Sei $w \in \sum^*$ und $a \in \sum$. Dann ist $|wa| = |w| + 1$.

5. aussagenlogische Formeln: Sei X die Menge der aussagenlogischen Variablen.
Die Menge der aussagenlogischen Formeln wird wie folgt definiert:

- Basismenge: Die Konstanten w und f sind aussagenlogische Formeln.
- Basismenge: Jede Aussagenlogische Variable $x \in X$ ist eine aussagenlogische Formel.
- Erzeugungsregel: Sind α und β aussagenlogische Formeln, so sind auch $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta) und (\alpha \Leftrightarrow \beta)$ aussagenlogische Formeln.

Beispiel Induktion: Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

- Induktionsanfang (IA): Die Eigenschaft gilt für $n = 0$, denn $\sum_{i=1}^{n} i = 0$ und $\frac{1}{2}n(n+1) = 0$.
- Induktionsbehauptung (IB): Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein beliebiges, aber festes k gilt: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$.
- Induktionsschluss (IS): Unter der Vorraussetzung, dass die IB gilt, wollen wir die Summenformel für $k+1$ zeigen: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}k(k+1)(+2)$ Dies können wir durch folgende Umformung zeigen:
  $\sum_{i=1}^{k+1} i = (\sum_{i=0}^{k}) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+(2k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Nach dem Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen.

Verallgemeinerte vollständige Induktion: Diese wird genutzt, wenn die Induktionsannahme $A(n)$ nicht genug ist, um den Induktionsschluss $A(n+1)$ beweisen zu können.
Die Aussage $A(n)$ gilt für alle natürlichen Zahlen, wenn sowohl der Induktionsanfang $A(0)$ als auch der Induktionsschritt gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (A(0) \wedge \cdots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$$

Beispiel: Sei n eine natürliche Zahl und $n \geq 2$. Dann ist n das Produkt von Primzahlen.

- **IA:** Die Eigenschaft gilt für $n = 2$, denn 2 ist das Produkt von sich selbst, also einer Primzahl.
- **Starke Induktionsbehauptung (IB):** Für festes n nehmen wir an, dass sich alle Zahlen $2, 3, \ldots, n$ als Produkt von Primzahlen schreiben lassen.
- **Induktionsschluss (IS):** Z.z.: $n+1$ ist ein Produkt von Primzahlen.
  Fall 1: $n+1$ ist eine Primzahl, dann auch ein Produkt von Primzahlen (sich selbst).
  Fall 2: $n+1$ ist keine Primzahl, dann gibt es mindestens zwei echte Teiler b und c:
  Da b und c beide echt kleiner als $n+1$ sind, gilt die IB für sie:
  $$b = p_1 \ldots p_k c = q_1 \ldots q_l$$
  Damit gilt: $n + 1 = b \cdot c = (p_1 \ldots p_k) \cdot (q_1 \ldots q_l)$
  $n+1$ ist also ein Produkt von Primzahlen.

Nach dem verallgemeinerten Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

„Induktionsschablone“

- **Induktionsanfang (IA):** Die Eigenschaft gilt für $n = 0$, denn ...
- **Induktionsbehauptung (IB):** Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein beliebiges, aber festes k gilt: $\sum_{i=0}^{k} \cdots$
- **Induktionsschluss (IS):** Unter der Voraussetzung, dass die IB gilt, wollen wir die Summenformel für $k+1$ zeigen: $\sum_{i=0}^{k+1} \cdots$

Nach dem Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen.

Peano-Axiome:

$$0 \cdot m = 0$$
$$(n+1) \cdot m = (n \cdot m) + m$$
$$n \cdot (m_1 + m_2) = n \cdot m_1 + n \cdot m_2$$