Definitionen

1. Relation: Eine **Relation** zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$. Man schreibt $a\mathrm{R}b$.
$a\mathrm{R}b$ genau dann, wenn $(a,\ b) \in R$

2. Inverse Relation: Sei R $\subseteq$ A $\times$ B eine Relation zwischen A und B. Die **Inverse Relation zu *R*** wird R^{-1} notiert.
R^{-1} = {(y,x) $\in$ B $\times$ A | (x,y) $\in$ R}

3. Komposition: Seien R $\subseteq M_1 \times M_2$ und S $\subseteq M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen.
Die Verknüpfung (R $\circ$ S) $\subseteq (M_1 \times M_3)$ heißt Komposition der Relationen R und S:
R $\circ$ S := {(x,z) | es existiert y $\in M_2$ mit (x,y) $\in$ R und (y,z) $\in$ S}

4. Reflexivität: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **reflexiv**, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht:
für alle a $\in$ A : (a,a) $\in$ R

5. Symmetrie: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **symmetrisch**, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt: (a,b) $\in$ R, dann (b,a) $\in$ R.
Antisymmetrie ist das Gegenteil: (a,b) $\in$ R, dann $\neg$(b,a) $\in$ R.

6. Antisymmetrie: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **antisymmetrisch**, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt: (a,b) $\in$ R und (b,a) $\in$ R, dann a = b

7. Transitivität: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **transitiv**, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann:
(a,b) $\in$ R und (b,c) $\in$ R, dann (a,c) $\in$ R

8. Totalität Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **total** (auch: linear), wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen:
Für alle (a,b) $\in$ A : (a,b) $\in$ R oder (b,a) $\in$ R

9. Teilbarkeitsrelation: Sei a $\in \mathbb{N}^+$, b $\in \mathbb{Z}$.
Wir schreiben a|b, wenn „a ein Teiler von b“ist, d.h. wenn gilt: $\exists$k $\in \mathbb{Z}$: b = k $\cdot$ a

10. Rechtseindeutigkeit: Eine Relation R $\subseteq$ A $\times$ B heißt **rechtseindeutig** (nacheindeutig) wenn für alle a $\in$ A gilt:
Wenn (a,b) $\in$ R und (a,c) $\in$ R, dann b = c.

11. Linkseindeutigkeit: Eine Relation R $\subseteq$ A $\times$ B heißt **linkseindeutig**: für alle a $\in$ B gilt:
Wenn (b,a) $\in$ R und (c,a) $\in$ R, dann b = c.

12. Eindeutigkeit: Eine Relation R $\subseteq$ A $\times$ B heißt **eindeutig**: R rechtseindeutig und R linkseindeutig

13. Linkstotal: Eine Relation R $\subseteq$ A $\times$ B heißt **linkstotal**: Für alle a $\in$ A existiert b $\in$ B mit (a,b) $\in$ R.

14. Rechtstotal: Eine Relation R $\subseteq$ A $\times$ B heißt **rechtstotal**: Für alle b $\in$ B ex. a P$\in$ A mit (a,b) $\in$ R.

15. Irreflexiv: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **irreflexiv** für alle a $\in$ A mit (a,a) $\notin$ R

16. Alternativ: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **alternativ** für alle a,b$\in$R mit (a,b) $\in$ R xor (b,a) $\in$ R

17. Äquivalenzrelation: Ist eine Relation ~ reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie **Äquivalenzrelation** genannt.

18. Äquivalenzklasse: Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R über der Menge A.
Dann ist für a $\in$ A: $[a]_R$ = {x | (a,x) $\in$ R} die **Äquivalenzklasse** von a.

19. Zerlegung: Sei A eine nicht.leere Menge. Eine **Zerlegung** (oder **Partition**) von A ist eine Mengenfamilie $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}$(A) mit:
1. Überdeckung: A $\subseteq \bigcup \mathcal{Z}$
2. $\emptyset \notin \mathcal{Z}$
3. Disjunktivität: Für alle $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$ gilt entweder $M_1 = M_2$ oder $M_1 \cap M_2 = \emptyset$
Eine Zerlegung ist also eine Einteilung von A in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit A übereinstimmt.

20. Abschluss: Sei R eine Relation über A und sei ϕ (reflexiv, usw.) eine Eigenschaft von Relationen.
Die Relation R* heißt **Abschluss** von R bezüglich ϕ, wenn gilt:
1. R* besitzt die Eigenschaft ϕ
2. R $\subseteq$ R*
3. Für alle Relationen D, die R umfassen und ebenfalls die Eigenschaft ϕ besitzen, gilt R* $\subseteq$ S.
Mit anderen Worten: R* ist die kleinste Relation, die R umfasst und die Eigenschaft ϕ besitzt.
Besitzt R bereits die Eigenschaft, so fügt der Abschluss nichts hinzu: R* = R

21. Ordnung: Ist eine Relation $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine **Halbordnung** (partielle Ordnung)
a und b heißen **vergleichbar** bzgl. $\leq$, falls a $\leq$ b oder b $\leq$ a gilt (sonst unvergleichbar).
Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt die **(totale) Ordnung** und A heißt durch $\leq$ geordnet.

22. minimal/maximal: Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation auf A. Sei M eine nichtleere Teilmenge von A.
Ein Element m $\in$ M heißt **maximal** Element in M, wenn für alle m’ $\in$ M, aus gilt: aus m $\leq$ m’ folgt m = m’.
m heißt **minimales** Element, wenn für alle m’ $\in$ M gilt: Aus m’ $\leq$ m folgt m = m’.

spezielle Relationen

Es gibt spezielle Relationen, die im weiteren auch noch genutzt werden:
Leere Relation: R = $\emptyset$
All-Relation: R = A $\times$ B
Identität (über M): R = $Id_M = \triangle_M$:= {(x,x) | x $\in$ M}