

Definitionen

**Aussage:** Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) ist, also nie beides zugleich.

**Konjunktion:** Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Dann ist auch  $A$  **und**  $B$  eine Aussage - die sogenannte **(logische) Konjunktion**. Kurz:  $(A \wedge B)$ .  
 $(A \wedge B)$  ist genau dann wahr, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  wahr ist.

**Disjunktion:** Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Dann ist auch  $A$  **oder**  $B$  eine Aussage - die sogenannte **(logische) Disjunktion**. Kurz:  $(A \vee B)$ .  
 $(A \vee B)$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  oder  $B$  wahr ist — oder beide.

**Negation:** Sei  $A$  eine Aussage. Dann ist auch **nicht**  $A$  eine Aussage - die **(logische) Negation**. Kurz:  $(\neg A)$ .  
Die Aussage  $(\neg A)$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  falsch ist.

**Implikation:** Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Dann ist auch **wenn**  $A$ , **dann**  $B$  eine Aussage, die **(logische) Implikation**. Kurz:  $(A \Rightarrow B)$ .  
Die Aussage  $(A \Rightarrow B)$  ist genau dann falsch, wenn  $A$  wahr und  $B$  falsch ist.

**Bi-Implikation:** Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Dann ist auch  $A$  **genau dann, wenn**  $B$  eine Aussage, die **Bi-Implikation**. Kurz:  $(A \iff B)$ .  
Die Aussage  $(A \iff B)$  ist genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  beide den gleichen Wahrheitswert haben.

**Formel:** Eine aussagenlogische Verknüpfung von Aussagenvariablen (durch endlich viele Junktoren) heißt **(aussagenlogische) Formel**. Aussagenvariablen werden auch als **atomare Formeln** bezeichnet.

**Auswertung**  $A_B(x)$ : Sei  $B : Var \rightarrow \{w, f\}$  eine Belegung. Die Auswertung  $A_B(F)$  ergibt sich **rekursiv**; das Rekursionsende sind die Variablen:

**Tautologie:** Eine **Tautologie** ist eine Formel, die stets wahr ist, in deren Wahrheitswertverlauf also ausschließlich den Wahrheitswert  $w$  vorkommt.

**Kontradiktion:** Eine **Kontradiktion** ist eine Formel, die stets falsch ist, in deren Wahrheitswertverlauf also ausschließlich der Wahrheitswert  $f$  vorkommt.

**Erfüllbarkeit:** Eine Formel  $F$  heißt **erfüllbar**, wenn es mindestens eine Belegung der Aussagenvariablen gibt, die  $F$  wahr macht.

**Äquivalenz:** Zwei Formeln  $F$  und  $G$  heißen **(logisch) äquivalent** genau dann, wenn die Formel  $(F \iff G)$  eine Tautologie ist. Dies wird durch  $F \equiv G$  dargestellt.

**Folgerungsbeziehung:** Die Formel  $F$  **impliziert die Formel**  $G$  genau dann, wenn  $(F \Rightarrow G)$  eine Tautologie ist.  
Dies wird durch  $F \models G$  dargestellt. (Aus  $F$  folgt  $G$ )

**Aussageform:** Eine **Aussageform** über den Universen  $U_1, \dots, U_n$  ist ein Satz mit den freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$ .

**Quantoren:** Sei  $p(x)$  eine Aussageform über dem Universum  $U$ .  
 $\exists x : p(x)$  ist wahr genau dann, wenn ein  $u$  in  $U$  existiert, so dass  $p(u)$  wahr ist.  
 $\forall x : p(x)$  ist wahr genau dann, wenn  $p(u)$  für jedes  $u$  aus  $U$  wahr ist.

**gebundene Variablen:** Eine Variable  $x$  wird in einer Formel  $F = \forall x : G$  durch den Allquantor **gebunden**.  
Analog wird  $x$  in  $F = \exists x : G$  durch den Existenzquantor **gebunden**.

**Normalisierte Darstellung:** Eine Formel ist in normalisierter Variablenschreibweise, wenn gilt:

- 1. keine Variable kommt sowohl frei, als auch gebunden vor
- 2. keine Variable ist mehrfach gebunden

Wahrheitstabellen

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$(A \Rightarrow B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$(A \iff B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

A	$\neg A$
w	f
f	w

Umformungsregeln	
<b>Kommutativgesetz:</b>	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
<b>Assoziativgesetz:</b>	$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$
<b>Distributivgesetz:</b>	$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
<b>Idempotenzgesetz:</b>	$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$
<b>Doppelnegation:</b>	$\neg(\neg p) \equiv p$
<b>de Morgan Gesetz:</b>	$\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$ $\neg(p \vee q) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q))$
<b>Tautologieregeln:</b>	$(p \wedge q) \equiv p$ $(p \vee q) \equiv q$ wobei: $(q = \text{Tautologie})$
<b>Kontradiktionsregeln:</b>	$(p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \equiv p$ wobei: $(q = \text{Kontradiktion})$

Umformungsregeln für Quantoren	
<b>Negationsregeln:</b>	$\neg \forall x : p(x) \equiv \exists x : (\neg p(x))$ $\neg \exists x : p(x) \equiv \forall x : (\neg p(x))$
<b>Ausklammerregeln:</b>	$(\forall x : p(x) \wedge \forall y : q(y)) \equiv \forall z : (p(z) \wedge q(z))$ $(\exists x : p(x) \vee \exists y : q(y)) \equiv \exists z : (p(z) \vee q(z))$
<b>Vertauschungsregeln:</b>	$\forall x \forall y : p(x, y) \equiv \forall y \forall x : p(x, y)$ $\exists x \exists y : p(x, y) \equiv \exists y \exists x : p(x, y)$

Definitionen

**Menge** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung **wohlunterschiedenen Objekten** zu einem Ganzen.  
Es muss zudem einwandfrei entscheidbar sein, ob ein Objekt der Gesamtheit angehört oder nicht.  
Die Objekte der Menge heißen **Elemente** der Menge.

**gleichheit von Mengen:** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **gleich** ( $A = B$ ) genau dann, wenn jedes Element aus  $A$  auch ein Element aus  $B$  ist – und umgekehrt.  
für alle  $x \in A$  gilt auch  $x \in B$  und für alle  $y \in B$  gilt auch  $y \in A$   
Sind die Mengen  $A$  und  $B$  nicht gleich, notiert man  $A \neq B$ .

**Komplementärmenge:** Sei  $E(x)$  eine Aussageform über der Menge  $U$ .  
Dann heißen die Mengen  $M = \{x \in U | E(x)\}$  und  $\bar{M} = \{x \in U | \neg E(x)\}$  in  $U$  komplementär.  
 $\bar{M}$  heißt **Komplementärmenge** oder **Komplement** von  $M$  in  $U$ .

**Leere Menge:** Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit  $\emptyset$  bezeichnet.

**Teilmenge:** Eine Menge  $B$  heißt **Teilmenge** einer Menge  $A$  genau dann, wenn jedes Element von  $B$  auch ein Element von  $A$  ist. ( $B \subseteq A$  gilt gdw.  $\forall x: x \in B \rightarrow x \in A$ ) .  
 $A$  heißt dann **Obermenge** von  $B$ .  $B$  heißt echte Teilmenge von  $A$ .

**Potenzmenge:** Sei  $M$  eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von  $M$  heißt **Potenzmenge** von  $M$  und wird  $\mathcal{P}(M)$  notiert:  
 $\mathcal{P}(M) := \{X | X \subseteq M\}$

**Vereinigung:** Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Die Vereinigungsmenge ist Definiert durch:  $M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}$

**Schnitt:** Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Der Schnitt ist Definiert als  $M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$

**Differenz:** Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Die Differenz ist definiert durch  $M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}$

**Mengenfamilie:** Die Mengenfamilie  $\mathcal{F}$  sei definiert als  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$   
Dann ist die Vereinigung aller Mengen aus  $\mathcal{F}$ :  
 $\bigcup \mathcal{F} = \{x | \exists N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \wedge x \in N)\}$   
Der Durchschnitt aller Mengen aus  $\mathcal{F}$ :  
 $\bigcap \mathcal{F} = \{x | \forall N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \rightarrow x \in N)\} \cap \bigcup \mathcal{F}$

**kartesisches Produkt:** Seien  $A$  und  $B$  Mengen.  
Das **kartesische Produkt** (auch Kreuzprodukt) von  $A$  und  $B$  ist definiert durch  
 $A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$

**Isomorphie:** Zwei Mengen  $X$  und  $Y$  sind **isomorph**, wenn dich ihre Elemente eins zu eins zuordnen lassen. ( $X \cong Y$ )

**Disjunkte Vereinigung:** Die **disjunkte Vereinigung** von  $A$  und  $B$  ist definiert durch:  
 $A \uplus B := (A \times 0) \cup (B \times 1)$

Rechengesetze	
<b>Assoziativgesetz:</b>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<b>Kommutativgesetz:</b>	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
<b>Distributivgesetz:</b>	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
<b>De-Morgan:</b>	$A   (B \cup C) = (A   B) \cap (A   C)$ $A   (B \cap C) = (A   B) \cup (A   C)$
<b>Absorption:</b>	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
<b>Idempotenz:</b>	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
<b>Komplement:</b>	$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = G$
Zahlenmengen	
<b>natürliche Zahlen:</b>	$\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$
<b>ganze Zahlen:</b>	$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$
<b>rationale Zahlen:</b>	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}   m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
<b>reelle Zahlen:</b>	$\mathbb{R}$
<b>irrationale Zahlen:</b>	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
<b>komplexe Zahlen:</b>	$\mathbb{C}$
<b>Dabei gilt:</b>	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
Schreibweisen Mengen	
<b>explizit:</b>	$M = \{1, 2, 3, 4\}$
<b>verbal:</b>	"Die Menge aller nicht-negativen, geraden Ganzzahlen"
<b>unendliche Mengen:</b>	$M := \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
<b>implizit:</b>	$M := \{x \in \mathbb{N}   x \text{ ist gerade}\}$
Potenzmenge:	
Jede mögliche Teilmenge einer Menge. Bsp: $M := \{1, 2, 3\}$ dann ist $\mathcal{P}(M) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .	
disjunkten Vereinigung:	
Bei der disjunkten Vereinigung zweier Mengen kreuzt man die jeweiligen Elemente mit einer Menge aus einem Index ( $A \times 1, B \times 2$ usw.) und vereinigt die daraus resultierenden Kreuzprodukte. Dadurch ist jedem Element aus $A \uplus B$ anzusehen, ob es aus $A$ oder $B$ stammt.	

Definitionen

**Relation:** Eine **Relation** zwischen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge von  $A \times B$ . Man schreibt  $aRb$ .  
 $aRb \leftrightarrow (a,b) \in R$

**Inverse Relation:** Sei  $R \subseteq A \times B$  eine Relation zwischen  $A$  und  $B$ . Die **Inverse Relation** zu  $R$  wird  $R^{-1}$  notiert.  
 $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$

**Komposition:** Seien  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zweistellige Relationen.  
Die Verknüpfung  $(R \circ S) \subseteq (M_1 \times M_3)$  heißt **Komposition** der Relationen  $R$  und  $S$ :  
 $R \circ S := \{(x,z) | \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

**Reflexivität:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **reflexiv**, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht:  
 $\forall a \in A : (a,a) \in R$

**Symmetrie:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **symmetrisch**, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt:  
 $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

**Antisymmetrie:** Das Gegenteil von Symmetrie:  
 $(a,b) \in R \rightarrow \neg(b,a) \in R$

**Antisymmetrie:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **antisymmetrisch**, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt:  
 $((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow a = b$

**Transitivität:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **transitiv**, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann:  
 $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$

**Totalität** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **total** (auch: linear), wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen:  
 $\forall (a,b) \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

**Teilbarkeitsrelation:** Sei  $a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{Z}$ .  
Wir schreiben  $a|b$ , wenn "a ein Teiler von b" ist, d.h. wenn gilt:  
 $\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a$

**Rechtseindeutigkeit:** Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt **rechtseindeutig** (nacheindeutig) wenn Für alle  $a \in A$  gilt:  
 $((a,b) \in R \wedge (a,c) \in R) \rightarrow b = c$

**Linkseindeutigkeit:** Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt **linkseindeutig** wenn für alle  $a \in B$  gilt:  
 $((b,a) \in R \wedge (c,a) \in R) \rightarrow b = c$

**Eindeutigkeit:** Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt **eindeutig** wenn:  
 $R$  rechtseindeutig und  $R$  linkseindeutig.

**Linkstotal:** Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt **linkstotal** wenn:  
 $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$

**Rechtstotal:** Eine Relation  $R \subseteq A \times B$  heißt **rechtstotal**:  
 $\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$

**Irreflexiv:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **irreflexiv** wenn:  
 $\forall a \in A : (a,a) \notin R$

**Alternativ:** Eine Relation  $R \subseteq A^2$  über einer Menge  $A$  heißt **alternativ** wenn:  
 $\forall a,b \in R : (a,b) \in R \text{ xor } (b,a) \in R$

**Äquivalenzrelation:** Ist eine Relation  $\sim$  reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie **Äquivalenzrelation** genannt.

**Äquivalenzklasse:** Gegeben sei eine Äquivalenzrelation  $R$  über der Menge  $A$ . Dann ist Für  $a \in A : [a]_R = \{x | (a,x) \in R\}$  die **Äquivalenzklasse** von  $a$ .

**Zerlegung:** Sei  $A$  eine nichtleere Menge. Eine **Zerlegung** (oder **Partition**) von  $A$  ist eine Mengenfamilie  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$  mit:

- 1. Überdeckung:  $A \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$
- 2.  $\emptyset \notin \mathcal{Z}$
- 3. Disjunktivität:  $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{Z}$  gilt entweder  $M_1 = M_2$   $\vee$   $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Eine Zerlegung ist also eine Einteilung von  $A$  in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit  $A$  übereinstimmt.

**Abschluss:** Sei  $R$  eine Relation über  $A$  und sei  $\phi$  (reflexiv, usw.) eine Eigenschaft von Relationen.  
Die Relation  $R^*$  heißt **Abschluss** von  $R$  bezüglich  $\phi$ , wenn gilt:

- 1.  $R^*$  besitzt die Eigenschaft  $\phi$
- 2.  $R \subseteq R^*$
- 3. Für alle Relationen  $D$ , die  $R$  umfassen und ebenfalls die Eigenschaft  $\phi$  besitzen, gilt  $R^* \subseteq S$

Mit anderen Worten:  $R^*$  ist die kleinste Relation, die  $R$  umfasst und die Eigenschaft  $\phi$  besitzt.  
Besitzt  $R$  bereits die Eigenschaft, so fügt der Abschluss nichts hinzu:  $R^* = R$

**Ordnung:** Ist eine Relation  $\leq$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine **Halbordnung** (partielle Ordnung)  
 $a$  und  $b$  heißen **vergleichbar** bzgl.  $\leq$ , falls  $a \leq b \vee b \leq a$  gilt (sonst unvergleichbar).  
Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt die **(totale) Ordnung** und  $A$  heißt durch  $\leq$  geordnet.

**minimal/maximal:** Sei  $\leq$  eine Halbordnungsrelation auf  $A$ . Sei  $M$  eine nichtleere Teilmenge von  $A$ .  
Ein Element  $m \in M$  heißt **maximal** Element in  $M$ , wenn:  
 $\forall m' \in M : m \leq m' \Rightarrow m = m'$   
 $m$  heißt **minimales** Element, wenn:  
 $\forall m' \in M : m' \leq m \Rightarrow m = m'$

Spezielle Relationen	
Es gibt spezielle Relationen, die im weiteren auch noch genutzt werden:	
<b>Leere Relation:</b>	$R = \emptyset$
<b>All-Relation:</b>	$R = A \times B$
<b>Identität (über M):</b>	$R = Id_M = \Delta_M := \{(x,x)   x \in M\}$

Definitionen

**Term:** Ein Term setzt sich zusammen aus:

- Konstanten:  $e, \pi, \dots$
- Variablen:  $x, y, \dots$
- Operatoren:  $+, -, \times, \sqrt{\phantom{x}}, \dots$
- Funktionen:  $f(x), \sin(x), \dots$

**Gleichung:** Eine Gleichung  $t_1 = t_2$  setzt zwei Terme in Beziehung.

**Grad (von Fkt.):** Ein reellwertiges Polynom ist ein Ausdruck der Form ( $x \in \mathbb{R}$ ):

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n x^n + a_1 x^1 + a_0$$

Falls  $a_n \neq 0$ , dann ist  $n$  der Grad des Polynoms.

**Logarithmus:**  $\log_a(c) = x$  für  $a^x = c$

Brüche	
Addition bei gleichem Nenner:	$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$
Multiplikation:	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
Kürzen eines gleichen Faktors:	$\frac{a \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d}$
Erweitern um c:	$\frac{a}{d} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{d \cdot c}$
Addieren mit verschiedenen Nennern (durch erweitern):	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = (\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{d}) + (\frac{b}{d} \cdot \frac{c}{c}) = \frac{ad + bc}{cd}$

Summen-/Produktnotation

**Summennotation:**  $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ist äquivalent zu  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$

**Produktnotation:**  $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

Exponential-Gesetze
Sei $m, n \in \mathbb{N}$ :
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>b^{-n} = \frac{1}{b^n}</math></li><li>• <math>b^m \cdot b^n = b^{m+n}</math></li><li>• <math>\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}</math></li><li>• <math>(b^m)^n = b^{m \cdot n}</math></li><li>• <math>b^m \cdot c^m = (b \cdot c)^m</math></li><li>• <math>\frac{b^m}{c^m} = (\frac{b}{c})^m</math></li><li>• <math>\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}</math></li><li>• <math>x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}</math></li></ul>

Binomische Formeln
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math></li><li>• <math>(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math></li><li>• <math>(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2</math></li></ul>

Logarithmen	
Umkehrung:	$\log_b(b^q) = q \Leftrightarrow b^{\log_b(q)} = q$
Mul/Additivität:	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ $\log_b(a^q) = q \log_b(a)$
Basiswechsel:	$\log_b(a) = \frac{\log_d(a)}{\log_d(b)}$

Trigonometrische Funktionen	
Tangensfunktion:	$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Co-Tangensfunktion:	$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Zusammenfassung
<ul style="list-style-type: none"><li>• Ein Term ist ein Ausdruck, der für einen Zahlenwert steht. Ein Beispiel für einen Term ist z.B: <math>\sin(x)^2 + \cos(x^2)</math> Wobei <math>x^2 - 3 = 0</math> kein Term ist, sondern eine Gleichung.</li><li>• für die Summen-/Produktnotation gibt man unten die untere Grenze und oben die obere Grenze die Summierung/Produktbildung an. Bsp: <math>\sum_{i=1}^5 a_i := 1 + 2 + 3 + 4 + 5</math> <math>\prod_{0 \leq i \leq 5, i \% 2 = 1} (i + 1) := (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (5 + 1)</math></li><li>• Hyperbeln können nach ähnlichem Schema umgeformt werden. Dabei wird ein Term <math>\frac{1}{x}</math> zu <math>x^{-1}</math>. Wenn der Nenner einen Exponenten besitzt kann dieser auch wieder umgeformt werden, damit die Rechengesetze gelten. <math>\frac{1}{x^m} = x^{-m}</math></li><li>• Wurzelfunktionen können umgeformt werden. Wenn man z.B einen Term <math>\sqrt[2]{x}</math> hat, kann dieser zu <math>x^{\frac{1}{2}}</math> umgeformt werden. Dadurch gelten auch für Wurzeln, die Exponentialgesetze.</li><li>• Logarithmen können genutzt werden, wenn bei einer Exponentialfkt. der Exponent unbekannt, aber das Ergebnis bekannt ist. Dabei gibt es den Spezialfall des natürlichen Logarithmus. Dieser ist definiert als: <math>\ln(x) := \log_e(x)</math></li></ul>

Definitionen

**Abbildung:** Unter einer Abbildung  $f$  von einer Menge  $A$  in einer Menge  $B$  versteht man eine Vorschrift, die jedem  $a \in A$  eindeutig ein bestimmtes  $b = f(a) \in B$  zuordnet.

- Schreibweise:  $f : A \rightarrow B$ .
- für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise  $a \mapsto b = f(a)$
- Man bezeichnet  $b$  als das Bild von  $a$ .
- $a$  ist ein Urbild von  $b$

**Abbildung:** Sei  $F \subseteq A \times B$  eine linksvollständige und rechtseindeutige Relation.

1.  $F$  ist linksvollständig: für alle  $a \in A$  gilt: Es existiert ein  $b \in B$ , so dass  $(a, b) \in R$
2.  $F$  ist rechtseindeutig: für alle  $a \in A$  und alle  $b_1, b_2 \in B$  gilt:  $(a, b_1) \in R$  und  $(a, b_2) \in R$ , dann  $b_1 = b_2$

Das Tripel  $f = (A, B, F)$  heißt Abbildung von  $A$  nach  $B$ .

- $F$  heißt Graph der Abbildung
- $A$  ist der Definitionsbereich
- $B$  ist der Bildbereich

Zu jedem  $a \in A$  wird das eindeutig bestimmte  $b \in B$  mit  $aFb$  als Bild von  $f$  bei  $a$  bezeichnet. Notation:  $f(a)$

**Bild:** Sei  $f : A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$

- Das Bild von  $M$  unter  $f$  ist die Menge:  $f(M) := \{f(x) | x \in M\}$
- Insbesondere heißt  $Bild(f) := f(A)$  das (volle) Bild von  $f$  (auch Wertebereich).
- Das Urbild einer Teilmenge  $N \subseteq B$  ist definiert durch:  $f^{-1}(N) := \{a \in A | f(a) \in N\}$

**Einschränkung:** Sei  $f = (A, B, F)$  eine Abbildung und  $M \subseteq A$ . Die Abbildung  $f|_M = (M, B, F \cap (M \times B))$  heißt Einschränkung von  $f$  auf  $M$ .

**Komposition:** Kompositionen von Funktionen ist hier definiert als:  $a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), a \in A$

**Injektiv:** Wenn für alle  $a, a' \in A$  mit  $a \neq a'$  gilt  $f(a) \neq f(a')$ .

**surjektiv:** Falls es für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$  gibt mit  $f(a) = b$ .

**bijektiv:** Falls  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

**Inverse Abbildung:** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Abbildung. Da existiert zu  $f$  stets eine Abbildung  $g$  mit  $g \circ f = id_A$  und  $f \circ g = id_B$ .  $g$  heißt die zu  $f$  inverse Abbildung oder Umkehrabbildung. Notation:  $f^{-1}$ .

**Gleichmächtig:** Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen.  $M$  und  $N$  heißen gleichmächtig (oder umfangsgleich) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow N$  gibt. Notation  $M \equiv N$ . ( $|M| = |N|$ )

**endlich:** Eine Menge  $M$  heißt endlich genau dann, wenn  $M = \emptyset$  oder es für ein  $n \in \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung  $b : M \rightarrow \mathbb{N}_n$  gibt.

**unendlich:** Eine Menge  $M$  heißt unendlich genau dann, wenn  $M$  nicht endlich ist.

**abzählbar:** Eine Menge  $M$  heißt abzählbar genau dann, wenn  $M$  endlich ist oder es eine bijektive Abbildung  $b : M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

**abzählbar unendlich:** Eine Menge  $M$  heißt abzählbar unendlich genau dann, wenn  $M$  abzählbar und unendlich ist.

**überabzählbar:** Eine Menge heißt überabzählbar genau dann, wenn  $M$  nicht abzählbar ist.

**Folge:** Eine Folge Reeller Zahlen ist eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**konvergenz:** Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn gilt: Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:  $|a_n - a| < \epsilon$  für alle  $n > N$   
Die Zahl  $a$  heißt Grenzwert (Limes) der Folge  $(a_n)$ . Eine Folge  $(a_n)$  mit Grenzwert heißt konvergent. Man schreibt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder auch  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
Eine Folge, die gegen  $a = 0$  konvergiert, heißt Nullfolge.

**Reihe:** Sei  $(a_n)$  eine Folge. Die Reihe  $(s_n)$  ergibt sich aus  $(a_n)$  durch Summation:  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$

**beschränkt(e Folge):** Eine Folge  $(a_n)$  heißt beschränkt, wenn es eine Zahl  $s$  gibt, so dass  $|a_n| \leq s$  für alle  $n$  gilt.

**monoton wachsend:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt monoton wachsend, wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n$  gilt.

**monoton fallend:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt monoton fallend, wenn  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n$  gilt.

**supremum:** Eine Zahl  $s$  heißt Suprmum einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , wenn  $s$  die kleinste obere Schranke von  $M$  ist, d.h:

- $s$  ist obere Schranke von  $M$  ( $\forall m \in M : m \leq s$ )
- jede Zahl  $x < s$  ist keine obere Schranke von  $M$

**infimum:** Eine Zahl  $i$  heißt Infimum einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , wenn  $i$  die größte untere Schranke von  $M$  ist.

**Häufungspunkt:**  $h$  heißt Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)$ , wenn jede Umgebung  $K_\epsilon(h)$  von  $h$  unendlich viele Folgeglieder enthält. Also:  $|h - a_n| < \epsilon$  für unendlich viele  $n$

**Cauchy-Folge:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n$  gibt so dass gilt:  $|a_n - a_m| < \epsilon$ , falls  $n$  und  $m > N$  sind.

**Asymptotisch:** Zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit  $b_n \neq 0$  heißen asymptotisch gleich, falls die Folge  $(\frac{a_n}{b_n})$  gegen 1 konvergiert. Notation:  $a_n \sim b_n$ .

**O-Notation:** Sei  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  gehört zu der Menge  $O(g)$ , wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}^+$  gibt, sodass  $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$  für fast alle  $n$  gilt.

Rechenregeln Folgen
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0</math> für jedes positive <math>s \in \mathbb{Q}</math>.</li><li>• <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1</math> für jedes reelle <math>a &gt; 0</math>.</li><li>• <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1</math>.</li><li>• <math>\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0</math> für jedes reelle <math>q</math> mit <math> q  &lt; 1</math>.</li></ul>

### Direkter Beweis

Wird bei wenn-dann-Aussagen genutzt. Modus ponens: Aus  $p$  und  $(p \Rightarrow q)$  ergibt sich  $q$ . Vorgehen dabei ist:

1. Satz genau studieren–Welche Parameter werden gestellt?
2. Bei der Hypothese beginnen. Diese muss wahr sein, denn  $(p \Rightarrow q)$ .
3. ggf. die Hypothese mathematisch darstellen Bsp:  
gerade Zahl  $n = 2k$   
ungerade Zahl  $n = 2k + 1$
4. Dann durch (beliebig viele) Folgeaussagen von der Hypothese zur Schlussfolgerung kommen.  
 $p \Rightarrow s_1, s_1 \Rightarrow s_2, s_2 \Rightarrow q$  wobei  $s_1 - s_n$  wieder wahre Aussagen sind.
5. Praktisch dabei: Es muss nicht jeder Schritt aufgeschrieben werden–nur solche, die wichtig für die Beweisführung des Lemmas sind.

#### Beispiel:

**Satz:** "Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar."

**Gegebene Informationen:**  $n \in \mathbb{N}$  und  $p = n + (n + 1) + (n + 2)$  ist durch 3 teilbar

1.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$
2.  $\Rightarrow n + (n + 1) + (n + 2) = (3n + 3)$
3.  $\Rightarrow (3n + 3) = 3(n + 1)$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

### Kontraposition

Ist dem Direkten Beweis sehr ähnlich. Nur dass hier die Behauptung negiert und umgekehrt wird um zu der äquivalenten Kontraposition zu gelangen. Aus  $(p \Rightarrow q)$  wird also  $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ . Man beweist also quasi rückwärts.

#### Beispiel:

**Satz:** "Wenn  $a^2$  eine ungerade Zahl ist, dann ist  $a$  ungerade". Die äquivalente Kontraposition dazu ist: "Wenn  $a$  gerade, dann ist  $a^2$  gerade".

1.  $\neg q = „a$  ist gerade“
2.  $a = 2 \cdot k$  (Def. gerade Zahl)
3.  $a \cdot a = (2 \cdot k) \cdot a$  (mul. mit  $a$ )
4.  $a^2 = 2 \cdot (k \cdot a)$  (Assoziativgesetz)
5.  $a^2 = 2 \cdot k'$  (wobei  $k' = a \cdot k$ )
6.  $\neg p = a^2$  ist gerade (durch  $2 \cdot k'$ )

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

### Widerspruch

Basiert wieder auf der Implikation  $(p \Rightarrow q)$ . Hier wird aber ein Widerspruch erzeugt sodass  $(p \wedge \neg q)$

#### Beispiel:

**Satz:** "Wenn  $a$  und  $b$  gerade natürliche Zahlen sind, dann ist auch  $a \cdot b$  gerade".

1. Annahme:  $a \cdot b$  ist ungerade.
2.  $a \cdot b = 2 \cdot (a \cdot k)$  (denn:  $b = 2 \cdot k$ )
3.  $a \cdot k$  ist gerade. Also muss  $a \cdot b$  gerade sein.

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

### Äquivalenzbeweis

Bei dieser Beweistechnik unterteilt man die Aussage in zwei direkte Beweise. Aus  $(p \Leftrightarrow q)$  wird dann  $(p \Rightarrow q)$  und  $(q \Rightarrow p)$ .

#### Beispiel:

**Satz:** " $a$  ist gerade genau dann, wenn  $a^2$  gerade ist".

Dabei ist  $p = "a$  ist gerade" und  $q = "a^2$  ist gerade"

In diesem Fall ist  $(p \Rightarrow q)$  schon bewiesen. (siehe Bsp. Kontraposition)

$(q \Rightarrow p)$  wird durch Kontraposition bewiesen:

1.  $\neg p$ : „ $a$  ist ungerade“
2.  $a - 1 = 2 \cdot k$  (def. ungerade Zahl umgestellt)
3.  $a = 2 \cdot k + 1$
4.  $a^2 = (2 \cdot k)^2 + 2 \cdot (2 \cdot k) + 1$  (quadrat schon ausmul.)
5.  $a^2 = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot k + 2 \cdot k) + 1$
6.  $a^2$  ist ungerade

Da nun sowohl  $(p \Rightarrow q)$  als auch  $(q \Rightarrow p)$  bewiesen ist, ist der Äquivalenzbeweis erbracht.  $\square$

### Fallunterscheidung

Jede Aussage  $p$  ist logisch äquivalent zu  $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$ .  
Dann Beweist man einfach beide Fälle.

#### Beispiel:

**Satz:** "Jede natürliche Zahl  $n^2$  geteilt durch 4 lässt entweder den Rest 1 oder 0".

#### $n$ ist gerade:

- $n = 2m$  für  $m \in \mathbb{N}$
- $n^2 = 4m^2$
- $n^2$  ist durch 4 teilbar
- Rest ist 0
- Rest ist 1 oder 0

#### $n$ ist ungerade:

- $n = 2m + 1$  für  $m \in \mathbb{N}$
- $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$
- $n^2$  ist durch 4 teilbar mit Rest 1
- Rest ist 1
- Rest ist 1 oder 0

Damit sind alle Fälle betrachtet und die Aussage bewiesen.  $\square$

## Beweis mit Quantoren

Bei universellen Aussagen ( $\forall x$ ) muss man unabhängig von konkreten Werten für die Quantifizierten Variablen Beweisen. Deswegen beginnt und beendet man den Beweis etwas anders:

Bei der Aussage  $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$  würde man so vorgehen:

1. Sei  $a$  ein beliebiger, aber fester Wert aus dem Universum (also der Menge).
2. <Beweis>
3. Da  $a$  beliebig gewählt werden kann, folgt:  
 $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$ .

Damit ist die Aussage Bewiesen  $\square$

Bei existenziellen Aussagen  $\exists x: (p(x) \Rightarrow q(x))$  geht man so vor:

1. Sei  $a =$  <Ein geeignetes Element aus dem Universum>.
2. <Beweis>
3. Damit ist die Existenz eines  $a$  mit der Eigenschaft  $(p(x) \Rightarrow q(x))$  bewiesen.
4. Damit ist die Gültigkeit der Aussage  $\exists x: (p(x) \Rightarrow q(x))$  bewiesen.