Definitionen

Aussage: Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist, also nie beides zugleich.

Konjunktion: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **und** B eine Aussage - die sogenannte **(logische) Konjunktion**. Kurz: $(A \wedge B)$.
$(A \wedge B)$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Disjunktion: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **oder** B eine Aussage - die sogenannte **(logische) Disjunktion**. Kurz: $(A \vee B)$.
$(A \vee B)$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist — oder beide.

Negation: Sei A eine Aussage. Dann ist auch **nicht** A eine Aussage - die **(logische) Negation**. Kurz: $(\neg A)$.
Die Aussage $(\neg A)$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Implikation: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch **wenn** A, **dann** B eine Aussage, die **(logische) Implikation**. Kurz: $(A \Rightarrow B)$.
Die Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Bi-Implikation: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **genau dann, wenn** B eine Aussage, die **Bi-Implikation**. Kurz: (A $\iff$ B). Die Aussage (A $\iff$ B) ist genau dann wahr, wenn A und B beide den gleichen Wahrheitswert haben.

Formel: Eine aussagenlogische Verknüpfungvon Aussagenvariablen (durch endlich viele Junktoren) heißt **(aussagenlogische) Formel**. Aussagenvariablen werden auch als **atomare Formeln** bezeichnet.

Auswertung $A_B(x)$: Sei $B : Var \rightarrow \{w, f\}$ eine Belegung. Die Auswertung $A_B(F)$ ergibt sich **rekursiv**; das Rekursionsende sind die Variablen:

Tautologie: Eine **Tautologie** ist eine Formel, die stets wahr is, in deren Wahrheitswerteverlauf also ausschließlich den Wahrheitswert w vorkommt.

Kontradiktion: Eine **Kontradiktion** ist eine Formel, die stets falsch ist, in deren Wahrheitswerteverlauf also ausschließlich der Wahrheitswert f vorkommt.

Erfüllbarkeit: Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es mindestens eine Belegung der Aussagenvariablen gibt, die F wahr macht.

Äquivalenz: Zwei Formeln F und G heißen **(logisch) äquivalent** genau dann, wenn die Formel $(F \iff G)$ eine Tautologie ist. Dies wird durch $F \equiv G$ dargestellt.

Folgerungsbeziehung: Die Formel F **imliziert die Formel** G genau dann, wenn $(F \Rightarrow G)$ eine Tautologie ist.
Dies wird durch $F| = G$ dargestellt. (Aus F folgt G)

Aussageform: Eine **Aussageform** Über den Universen $U_1, \ldots, U_n$ ist ein Satz mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Quantoren: Sei $p(x)$ eine Aussageform über dem Universum U. $\exists x : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn ein u in U existiert, so dass $p(u)$ wahr ist.
$\forall : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn $p(u)$ für jedes u aus U wahr ist.

gebundene Variablen: Eine Variable x wird in einer Formel $F = \forall x : G$ durch den Allquantor **gebunden**.
Analog wird x in $F = \exists x : G$ durch den Existenzquantor **gebunden**.

Normalisierte Darstellung: Eine Formel ist in normalisierter Variablenschreibweise, wenn gilt:

1. keine Variable kommt sowohl frei, als auch gebunden vor
2. keine Variable ist mehrfach gebunden

Wahrheitstabellen

A	B	(A ∧ B)
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	(A ∨ B)
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	¬A
w	f
f	w

A	B	(A ⇒ B)
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	(A ⟺ B)
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Umformungsregeln

Kommutativgesetz
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
Assoziativgesetz
$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$
Distributivgesetz
$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
Idempotenzgesetz
$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$
Doppelnegation
$\neg(\neg p) \equiv p$
de Morgan Gesetz
$\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$ $\neg(p \vee q) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q))$
Tautologieregeln
$wobei : (q = Tautologie)$ $(p \wedge q) \equiv p$ $(p \vee q) \equiv q$
Kontradiktionsregeln
$wbei : (q = Kontradiktion)$ $(p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \equiv p$

Umformungsregeln für Quantoren:

Negationsregeln
$\neg\forall x : p(x) \equiv \exists x : (\neg p(x))$ $\neg\exists x : p(x) \equiv \forall x : (\neg p(x))$
Ausklammerregeln
$(\forall x : p(x) \wedge \forall y : q(y)) \equiv \forall z : (p(z) \wedge q(z))$ $(\exists x : p(x) \vee \exists y : q(y)) \equiv \exists z : (p(z) \vee q(z))$
Vertauschungsregeln
$\forall x \forall y : p(x, y) \equiv \forall y \forall x : p(x, y)$ $\exists x \exists y : p(x, y) \equiv \exists y \exists x : p(x, y)$

Definitionen

Menge Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung **wohlunterschiedenen Objekten** zu einem Ganzen.
Es muss zudem einwandfrei entscheidbar sein, ob ein Objekt der Gesamtheit angehört oder nicht.
Die Objekte der Menge heißen **Elemente** der Menge.

gleichheit von Mengen: Zwei Mengen A und B heißen **gleich** ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element aus A auch ein Element aus B ist – und umgekehrt.
für alle $x \in A$ gilt auch $x \in B$ und für alle $y \in B$ gilt auch $y \in A$
Sind die Mengen A und B nicht gleich, notiert man $A \neq B$.

Komplementärmenge: Sei $E(x)$ eine Aussageform über der Menge U.
Dann heißen die Mengen $M = \{x \in U | E(x)\}$ und $\bar{M} = \{x \in U | \neg E(x)\}$ in U komplemetär.
$\bar{M}$ heißt **Komplementärmenge** oder **Komplement** von M in U.

Leere Menge: Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Teilmenge: Eine Menge B heißt **Teilmenge** einer Menge A genau dann, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist.
($B \subseteq A$ gilt gdw. $\forall x : x \in B \rightarrow x \in A$) .
A heißt dann **Obermenge** von B. B heißt echte Teilmenge von A.

Potenzmenge: Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** von M und wird $\mathcal{P}(M)$ notiert:
$\mathcal{P}(M) := \{X | X \subseteq M\}$

Vereinigung: Seien M und N Mengen. Die Vereinigungsmenge ist Definiert durch: $M \cup N := \{x | x \in M \ oder \ x \in N\}$

Schnitt: Seien M und N Mengen. Der Schnitt ist Definiert als $M \cap N := \{x | x \in M \ und \ x \in N\}$

Differenz: Seien M und N Mengen. Die Differenz ist definiert durch $M | N := \{x | x \in M \ und \ x \notin N\}$

Mengenfamilie: Die Mengenfamilie $\mathcal{F}$ sei definiert als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$
Dann ist die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcup \mathcal{F} = \{x | \exists N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \wedge x \in N)\}$
Der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{F}$:
$\bigcap \mathcal{F} = \{x | \forall N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \rightarrow x \in N)\} \cap \bigcup \mathcal{F}$

kartesisches Produkt: Seien A und B Mengen.
Das **kartesische Produkt** (auch Kreuzprodukt) von A und B ist definiert durch
$A \times B := \{(a, b) | a \in Aundb \in B\}$

Isomorphie: Zwei Mengen X und Y sind **isomorph**, wenn dich ihre Elemente eins zu eins zuordnen lassen. ($X \cong Y$)

Disjunkte Vereinigung: Die **disjunkte Vereinigung** von A und B ist definiert durch:
$A \uplus B := (A \times 0) \cup (B \times 1)$

Rechengesetze

Assoziativgesetz:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetz:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetz:	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
De-Morgan:	$A | (B \cup C) = (A | B) \cap (A | C)$ $A | (B \cap C) = (A | B) \cup (A | C)$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenz:	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Komplementgesetze:	$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = G$

Zahlenmengen

natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \ldots$

ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$

rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$

reelle Zahlen: $\mathbb{R}$

irrationale Zahlen: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$

Dabei gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Schreibweisen Mengen

explizit: $M = \{1, 2, 3, 4\}$

verbal: "Die Menge aller nicht-negativen, geraden Ganzzahlen"

unendliche Mengen: $M := \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

implizit: $M := \{x \in \mathbb{N} | xistgerade\}$

Potenzmenge:

Jede mögliche Teilmenge einer Menge. Bsp: $M := \{1, 2, 3\}$ dann ist $\mathcal{P}(M) := \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

disjunkten Vereinigung:

Bei der disjunkten Vereinigung zweier Mengen kreuzt man die jeweiligen Elemente mit einer Menge aus einem Index ($A \times 1$, $B \times 2$ usw.) und vereinigt die daraus resultierenden Kreuzprodukte. Dadurch ist jedem Element aus $A \uplus B$ anzusehen, ob es aus A oder B stammt.

Definitionen

Relation: Eine **Relation** zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$. Man schreibt aRb.
$aRb \leftrightarrow (a,b) \in R$

Inverse Relation: Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B. Die **Inverse Relation** zu R wird R^{-1} notiert.
$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$

Komposition: Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen.
Die Verknüpfung $(R \circ S) \subseteq (M_1 \times M_3)$ heißt **Komposition** der Relationen R und S:
$R \circ S := \{(x,z) | \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

Reflexivität: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **reflexiv**, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht:
$\forall a \in A : (a,a) \in R$

Symmetrie: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **symmetrisch**, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt:
$(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

Antisymmetrie: Das Gegenteil von Symmetrie:
$(a,b) \in R \rightarrow \neg(b,a) \in R$

Antisymmetrie: Eine Relation R $\subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **antisymmetrisch**, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt:
$((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow a = b$

Transitivität: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **transitiv**, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann:
$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$

Totalität Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **total** (auch: linear), wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen:
$\forall (a,b) \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

Teilbarkeitsrelation: Sei $a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{Z}$.
Wir schreiben $a|b$, wenn "a ein Teiler von b" ist, d.h. wenn gilt:
$\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a$

Rechtseindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **rechtseindeutig** (nacheindeutig) wenn Für alle $a \in A$ gilt:
$((a,b) \in R \wedge (a,c) \in R) \rightarrow b = c$

Linkseindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **linkseindeutig** wenn für alle $a \in B$ gilt:
$((b,a) \in R \wedge (c,a) \in R) \rightarrow b = c$

Eindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **eindeutig** wenn:
R rechtseindeutig und R linkseindeutig.

Linkstotal: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **linkstotal** wenn:
$\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$

Rechtstotal: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **rechtstotal**:
$\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$

Irreflexiv: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **irreflexiv** wenn:
$\forall a \in A : (a,a) \notin R$

Alternativ: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **alternativ** wenn:
$\forall a,b \in R : (a,b) \in Rxor(b,a) \in R$

Äquivalenzrelation: Ist eine Relation ˜ reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie **Äquivalenzrelation** genannt.

Äquivalenzklasse: Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R über der Menge A. Dann ist Für $a \in A : [a]_R = \{x | (a,x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von a.

Zerlegung: Sei A eine nichtleere Menge. Eine **Zerlegung** (oder **Partition**) von A ist eine Mengenfamilie $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$ mit:

1. Überdeckung: $A \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$
2. $\emptyset \notin \mathcal{Z}$
3. Disjunktivität: $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$ gilt entweder $M_1 = M_2 \vee M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Eine Zerlegung ist also eine Einteilung von A in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit A übereinstimmt.

Abschluss: Sei R eine Relation über A und sei ϕ (reflexiv, usw.) eine Eigenschaft von Relationen.
Die Relation R^* heißt **Abschluss** von R bezüglich ϕ, wenn gilt:

1. $R*$ besitzt die Eigenschaft ϕ
2. $R \subseteq R*$
3. Für alle Relationen D, die R umfassen und ebenfalls die Eigenschaft ϕ besitzen, gilt $R* \subseteq S$

Mit anderen Worten: $R*$ ist die kleinste Relation, die R umfasst und die Eigenschaft ϕ besitzt.
Besitzt R bereits die Eigenschaft, so fügt der Abschluss nichts hinzu: $R* = R$

Ordnung: Ist eine Relation $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine **Halbordnung** (partielle Ordnung)
a und b heißen **vergleichbar** bzgl. $\leq$, falls $a \leq b \vee b \leq a$ gilt (sonst unvergleichbar).
Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt die **(totale) Ordnung** und A heißt durch $\leq$ geordnet.

minimal/maximal: Sei $\leq$ eine Halbordnungsrelation auf A. Sei M eine nichtleere Teilmenge von A.
Ein Element $m \in M$ heißt **maximal** Element in M, wenn:
$\forall m' \in M : m \leq m' \Rightarrow m = m'$
m heißt **minimales** Element, wenn:
$\forall m' \in M : m' \leq m \Rightarrow m = m'$

Spezielle Relationen

Es gibt spezielle Relationen, die im weiteren auch noch genutzt werden:

Leere Relation:	$R = \emptyset$
All-Relation:	$R = A \times B$
Identität (über M):	$R = Id_M = \triangle_M := \{(x,x) | x \in M\}$

Definitionen

1. Term: Ein Term setzt sich zusammen aus:

- Konstanten: e, π, usw.
- Variablen: x, y, usw.
- Operatoren: +, -, $\cdot$, $\sqrt{}$, usw.
- Funktionen: f(x), sin(x), usw.

Gleichung: Eine Gleichung $t_1 = t_2$ setzt zwei Terme in Beziehung.

Grad (von Fkt.): Ein reellwertiges Polynom ist ein Ausdruck der Form ($x \in \mathbb{R}$):
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n x^n + a_1 x^1 + a_0$
Falls $a_n \neq 0$, dann ist n der Grad des Polynoms.

Logarithmus: $log_a(c) = x$ fr $a^x = c$

Brche

$$\textbf{Addition bei gleichem Nenner:} \frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

$$\textbf{Multiplikation:} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\textbf{Krzen eines gleichen Faktors:} \frac{a \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d}$$

$$\textbf{Erweitern um c:} \frac{a}{d} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{d \cdot c}$$

Addieren mit verschiedenen Nennern (durch erweitern):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = (\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{d}) + (\frac{b}{d} \cdot \frac{c}{c}) = \frac{ad + bc}{cd}$$

Summen-/Produktnotation

Summennotation:
$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ist quivalent zu $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$
Produktnotation:
$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$

1 Exponential-Gesetze

Sei $m, n \in \mathbb{N}$

- $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$
- $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
- $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$
- $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$
- $b^m \cdot c^m = (b \cdot c)^m$
- $\frac{b^m}{c^m} = (\frac{b}{c})^m$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

Logarithmen

Umkehrung: $log_b(b^q) = q \Leftrightarrow b^{log_b(q)} = q$
Mul/Additivitt: $log_b(xy) = log_b(x) + log_b(y)$
oder: $log_b(a^q) = q log_b(a)$
Basiswechsel: $log_b(a) = \frac{log_d(a)}{log_d(b)}$

Trigonometrische Funktionen

Tangensfunktion: $tan(x) := \frac{sin(x)}{cos(x)}$
Co-Tangensfunktion: $cot(x) := \frac{cos(x)}{sin(x)}$

Zusammenfassung

Ein Term ist ein Ausdruck, der fr einen Zahlenwert steht. Ein Beispiel fr einen Term ist z.B:
$sin(x)^2 + cos(x^2)$
Wobei $x^2 - 3 = 0$ kein Term ist, sondern eine Gleichung.

Fr die Summen-/Produktnotation gibt man unten die untere Grenze und oben die obere Grenze die Summierung/Produktbildung an. Bsp:
$\sum_{i=1}^{5} a_i := 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$\prod_{0 \leq i \leq 5, iistungerade} (i+1) := (1+1) \cdot (3+1) \cdot (5+1)$

Hyperbeln knnen nach hnlichem Schema umgeformt werden. Dabei wird ein Term $\frac{1}{x}$ zu x^{-1}. Wenn der Nenner einen Exponenten besitzt kann dieser auch wieder umgeformt werden, damit die Rechengesetze gelten. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$

Wurzelfunktionen knnen umgeformt werden. Wenn man z.B einen Term $\sqrt[2]{x}$ hat, kann dieser zu $x^{\frac{1}{2}}$ umgeformt werden. Dadurch gelten auch fr Wurzeln, die Exponentialgesetze.

Logarithmen knnen genutzt werden, wenn bei einer Exponentialfkt. der Exponent unbekannt, aber das Ergebnis bekannt ist. Dabei gibt es den Spezialfall des natrlichen Logarithmus. Dieser ist definiert als:
$ln(x) := log_e(x)$