Definitionen

1. Abbildung: Unter einer Abbildung f von einer Menge A in einer Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet.

- Schreibweise: $f : A \to B$.
- Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise $a \rightarrowtail b = f(a)$
- Man bezeichnet b als das Bild von a.
- a ist ein Urbild von b

2. Abbildung: Sei $F \subseteq A \times B$ eine linksvollständige und rechtseindeutige Relation.
1. F ist linksvollständig: Für alle $a \in A$ gilt: Es existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in R$ 2. F ist rechtseindeutig: Für alle $a \in A$ und alle $b_1, b_2 \in B$ gilt: $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$, dann $b_1 = b_2$.
Das Tripel $f = (A, B, F)$ heißt Abbildung von A nach B.

- F heißt Graph der Abbildung
- A ist der Definitioinsbereich
- B ist der Bildbereich

Zu jedem $a \in A$ wird das eindeutig bestimmte $b \in B$ mit aFb als Bild von f bei a bezeichnet. Notation: $f(a)$

3. Bild: Sei $f : A \to B$ und $M \subseteq A$.

- Das Bild von M unter f ist die Menge: $f(M) := \{f(x)|x \in M\}$
- Insbesondere heißt $Bild(f) := f(A)$ das (volle) Bild von f (auch Wertebereich).
- Das Urbild einer Teilmenge $N \subseteq B$ ist definiert durch: $f^{-1}(N) := \{a \in A|f(a) \in N\}$

4. Einschränkung: Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung und $M \subseteq A$.
Die Abbildung $f|_m = (M, B, F \cap (M \times B))$ heißt Einschränkung von f auf M.

5. Komposition: Kompositionen von Funktionen ist hier definiert als: $a \rightarrowtail (g \circ f)(a) = g(f(a)), a \in A$

6. Injektiv: Wenn für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt $f(a) \neq f(a')$.

7. surjektiv: Falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

8. bijektiv: Falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

9. Inverse Abbildung: Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Da existiert zu f stets eine Abbildung g mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$. g heißt die zu f inverse Abbildung oder Umkehrabbildung. Notation: f^{-1}.

10. Gleichmächtig: Seien M und N zwei Mengen. M und N heißen gleichmächtig (oder umfangsgleich) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. Notation $M \tilde{=} N$. ($|M| = |N|$)

11. endlich: Eine Menge M heißt endlich genau dann, wenn $M = \emptyset$ oder es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $b : M \to \mathbb{N}_n$ gibt.

12. unendlich: Eine Menge M heißt unendlich genau dann, wenn M nicht endlich ist.

13. abzählbar: Eine Menge M heißt abzählbar genau dann, wenn M endlich ist oder es eine bijektive Abbildung $b : M \to \mathbb{N}$ gibt.

14. abzählbar unendlich: Eine Menge M heißt abzählbar unendlich genau dann, wenn M abzählbar und unendlich ist.

15. überabzählbar: Eine Menge heißt überabzählbar genau dann, wenn M nicht abzählbar ist.

16. Folge: Eine Folge Reeller Zahlen ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

17. konvergenz: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{R}$, so dass gilt:
$|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N$
Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n). Eine Folge (a_n) mit Grenzwert heißt konvergent. Man schreibt: $lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Eine Folge, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt Nullfolge.

18. Reihe: Sei (a_n) eine Folge. Die Reihe (s_n) ergibt sich aus (a_n) durch Summation: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$

19. beschränkt(e Folge): Eine Folge (a_n)heißt beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, so dass $|a_n| \leq s$ für alle n gilt.

20. monoton wachsend: Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n gilt.

21. monoton fallend: Eine Folge (a_n) heißt monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n gilt.

22. supremum: Eine Zahl s heißt Suprmum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h:

- s ist obere Schranke von M ($\forall m \in M : m \leq s$)
- jede Zahl $x < s$ ist keine obere Schranke von M

23. infimum: Eine Zahl i heißt Infimum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn i die größte untere Schranke von M ist.

24. Häufungspunkt: h heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n), wenn jede Umgebung $K_\epsilon(h)$ von h undendlich viele Folgeglieder enthält. Also:
$|h - a_n| < \epsilon$ für unendlich viele n

25. Cauchy-Folge: Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n gibt so dass gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$, falls n und $m > N$ sind.

26. Asymptotisch: Zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $b_n \neq 0$ heißen asymptotisch gleich, falls die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen 1 konvergiert. Notation: $a_n \tilde{-} b_n$.

27. O-Notation: Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gehört zu der Menge $O(g)$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+ gibt, sodass |f(n)| \leq c \circ |g(n)|$für fast alle n gilt.

Rechenregeln Folgen

- $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ für jedes positive $s \in \mathbb{Q}$.
- $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes reelle $a > 0$.
- $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- $lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für jedes reelle q mit $|q| < 1$.