Beweistechniken

1. Direkter Beweis: Wird bei wenn-dann-Aussagen genutzt. Modus ponens: Aus p und $(p \Rightarrow q)$ ergibt sich s.
Vorgehen dabei ist:

- $\Rightarrow$ Satz genau studieren–Welche Parameter werden gestellt?
- $\Rightarrow$ Bei der Hypothese beginnen. Diese muss wahr sein, denn $(p \Rightarrow q)$.
- $\Rightarrow$ ggf. die Hypothese mathematisch darstellen Bsp:
  gerade Zahl $n = 2k$
  ungerade Zahl $n = 2k + 1$
- $\Rightarrow$ Dann durch (beliebig viele) Folgeaussagen von der Hypothese zur Schlussfolgerung kommen.
  $p \Rightarrow s_1, s_1 \Rightarrow s_2, s_2 \Rightarrow q$ wobei $s_1 - s_n$ wieder wahre Aussagen sind.
- $\Rightarrow$ Praktisch dabei: Es muss nicht jeder Schritt aufgeschrieben werden–nur solche, die wichtig für die Beweisführung des Lemma sind.

Beispiel: Satz: „Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar."
Gegebene Informationen: $n \in \mathbb{N}$ **und**
$p = n + (n+1) + (n+2)$ **ist durch 3 teilbar**

1. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$
2. $\Rightarrow n + (n+1) + (n+2) = (3n+3)$
3. $\Rightarrow (3n+3) = 3(n+1)$

Damit ist der Satz bewiesen. □

2. Kontraposition: Ist dem Direkten Beweis sehr ähnlich. Nur dass hier die Behauptung negiert und umgekehrt wird um zu der äquivalenten Kontraposition zu gelangen. Aus $(p \Rightarrow q)$ wird also $(\neg q \Rightarrow \neg p)$. Man beweist also quasi rückwärts.

Beispiel: Satz: „Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist a ungerade".
Die äquivalente Kontraposition dazu ist: „Wenn a gerade, dann ist a^2 gerade".

1. $\neg q =$ „a ist gerade"
2. $a = 2 \cdot k$ (Def. gerade Zahl)
3. $a \cdot a = (2 \cdot k) \cdot a$ (mul. mit a)
4. $a^2 = 2 \cdot (k \cdot a)$ (Assoziativgesetz)
5. $a^2 = 2 \cdot k'$ (wobei $k' = a \cdot k$)
6. $\neg p = a^2 istgerade$ (durch $2 \cdot k'$)

Damit ist der Satz bewiesen. □

3. Wiederspruch: Basiert wieder auf der Implikation $(p \Rightarrow q)$. Hier wird aber ein Wiederspruch erzeugt sodass $(p \wedge \neg q)$

Beispiel: Satz: „Wenn a und b gerade natürliche Zahlen sind, dann ist auch $a \cdot b$ gerade".

1. Annahme: $a \cdot b$ ist ungerade.
2. $a \cdot b = 2 \cdot (a \cdot k)$ (denn: $b = 2 \cdot k$)
3. $a \cdot k$ ist gerade. Also muss $a \cdot b$ gerade sein.

Damit ist der Satz bewiesen. □

4. Äquivalenzbeweis Bei dieser Beweistechnik unterteilt man die Aussage in zwei direkte Beweise. Aus $(p \Leftrightarrow q)$ wir dann $(p \Rightarrow q)$ und $(q \Rightarrow p)$.

Beispiel: Satz: „a ist gerade genau dann, wenn a^2 gerade ist".
Dabei ist p „a ist gerade" und
$q =$ „a^2 ist gerade"
In diesem Fall ist $(p \Rightarrow q)$ schon bewiesen. (siehe Bsp. Kontraposition)
$(q \Rightarrow p)$ wird durch Kontraposition bewiesen:

1. $\neg p$: „a ist ungerade"
2. $a - 1 = 2 \cdot k$ (def. ungerade Zahl umgestellt)
3. $a = 2 \cdot k + 1$
4. $a^2 = (2 \cdot k)^2 + 2 \cdot (2 \cdot k) + 1$ (quadrat schon ausmul.)
5. $a^2 = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot k + 2 \cdot k) + 1$
6. $a^2 istungerade$

Da nun sowohl $(p \Rightarrow q)$ als auch $(q \Rightarrow p)$ bewiesen ist, ist der Äquivalenzbeweis erbracht. □

5. Fallunterscheidung: Jede Aussage p ist logisch äquivalent zu $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$. Dann Beweist man einfach beide Fälle.

Beispiel: Satz: „Jede natürliche Zahl n^2 geteilt durch 4 lässt entweder den Rest 1 oder 0".

n ist gerade

- $\Rightarrow$ $n = 2m f\ddot{u}r m \in \mathbb{M}$
- $\Rightarrow$ $n^2 = 4m^2$
- $\Rightarrow$ $n^2 ist durch 4 teilbar$
- $\Rightarrow$ Rest ist 0
- $\Rightarrow$ Rest ist 1 oder 0

n ist ungerade

- $\Rightarrow$ $n = 2m + 1 f\ddot{u}r m \in \mathbb{M}$
- $\Rightarrow$ $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$
- $\Rightarrow$ $n^2 ist durch 4 teilbar mit Rest 1$
- $\Rightarrow$ Rest ist 1
- $\Rightarrow$ Rest ist 1 oder 0

Damit sind alle Fälle betrachtet und die Aussage bewiesen. □

6. Beweis mit Quantoren: Bei universellen Aussagen $(\forall x)$ muss man unabhängig von konkreten Werten für die Quantifizierten Variablen Beweisen. Deswegen beginnt und beendet man den Beweis etwas anders:
Bei der Aussage $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ würde man so vorgehen:

1. Sei a ein beliebiger, aber fester Wert aus dem Universum (also der Menge).
2. <Beweis>
3. Da a beliebig gewählt werden kann, folgt
   $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$.

Damit ist die Aussage Bewiesen □
Bei existenziellen Aussagen $\exists x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ geht man so vor:

1. Sei $a =$ <Ein geeignetes Element aus dem Universum>.
2. <Beweis>
3. Damit ist die Existenz eines a mit der Eigenschaft $(p(x) \Rightarrow q(x))$ bewiesen.
4. Damit ist die Gültigkeit der Aussage $\exists x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ bewiesen.