Definitionen

1. Gruppe: Eine Menge $(\mathbb{G}, \cdot, 1)$ mit der Operation $\cdot$ und dem Element 1 ist eine Gruppe, wenn gilt:

- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ **Assoziativität**
- $x \cdot 1 = x$ **Neutralität der 1**
- $x \cdot x^{-1} = 1$ **Existenz von inversen x^{-1} für $x \neq 0$**

Dabei heißt eine Gruppe kommutativ, wenn zusätzlich gilt:
$x \cdot y = y \cdot x$ **Kommutativität**

2. Halbgruppe: Eine Halbgruppe ist eine Verallgemeinerung einer Gruppe, der die Assoziativität genügt.

3. Körper: Ein Körper $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ist eine Menge $\mathbb{K}$, welche mit zwei zweistelligen Verknüpfungen versehen ist und folgende Eigenschaften besitzt:

- $(\mathbb{K}, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei 0 das neutrale Element der Addition ist.
- $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.
- Des weiteren gilt das Distributivgesetz: $x(y + z) = xy + xz$

4. Ring: Ein Ring $(\mathbb{P}, +, 0, \cdot, 1)$ besitzt folgende Eigenschaften:

- $(\mathbb{P}, +, 0)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{P}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ ist eine Halbgruppe.
- Es gelten die Distributivgesetze.

Ein Ring heißt kommutativ, wenn die Addition kommutativ ist. $(\mathbb{P}, +, 0)$ also eine kommutative Gruppe ist.

5. Unitärer Ring: Ein unitärer Ring besitzt ein multiplikativ neutrales Element. $(\rightarrow 1)$

6. komplexe Zahl: Eine Komplexe Zahl z ist definiert als $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dabei ist a der Realteil und b der Imaginärteil von z.

7. Exponentialdarstellung: Eine komplexe Zahl lässt sich auch mit Hilfe der komplexen e-Funktion darstellen:
$z = r \cdot e^{i\phi} = r \cdot (cos(\phi) + i \cdot sin(\phi))$
Dabei ist
$sin(\phi) = Im(z)$
$cos(\phi) = Re(z)$

Rechengesetze Imaginäre Zahlen

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Subtraktion: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Betrag Exponentialform: $r = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$

Winkel Exponentialform: $\phi = arctan(\frac{Im}{Re})$

Multiplikation: $(r_1 \cdot e^{i\phi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\phi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

Disvision: $\frac{r_1 \cdot e^{i\phi_1}}{r_2 \cdot e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$