

Definitionen

Aussage: Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist, also nie beides zugleich.

Konjunktion: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **und** B eine Aussage - die sogenannte **(logische) Konjunktion**. Kurz: $(A \wedge B)$.
 $(A \wedge B)$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Disjunktion: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **oder** B eine Aussage - die sogenannte **(logische) Disjunktion**. Kurz: $(A \vee B)$.
 $(A \vee B)$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist — oder beide.

Negation: Sei A eine Aussage. Dann ist auch **nicht** A eine Aussage - die **(logische) Negation**. Kurz: $(\neg A)$.
Die Aussage $(\neg A)$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Implikation: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch **wenn** A , **dann** B eine Aussage, die **(logische) Implikation**. Kurz: $(A \Rightarrow B)$.
Die Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

Bi-Implikation: Seien A und B Aussagen. Dann ist auch A **genau dann, wenn** B eine Aussage, die **Bi-Implikation**. Kurz: $(A \iff B)$.
Die Aussage $(A \iff B)$ ist genau dann wahr, wenn A und B beide den gleichen Wahrheitswert haben.

Formel: Eine aussagenlogische Verknüpfung von Aussagenvariablen (durch endlich viele Junktoren) heißt **(aussagenlogische) Formel**. Aussagenvariablen werden auch als **atomare Formeln** bezeichnet.

Auswertung $A_B(x)$: Sei $B : Var \rightarrow \{w, f\}$ eine Belegung. Die Auswertung $A_B(F)$ ergibt sich **rekursiv**; das Rekursionsende sind die Variablen:

Tautologie: Eine **Tautologie** ist eine Formel, die stets wahr ist, in deren Wahrheitswertverlauf also ausschließlich den Wahrheitswert w vorkommt.

Kontradiktion: Eine **Kontradiktion** ist eine Formel, die stets falsch ist, in deren Wahrheitswertverlauf also ausschließlich der Wahrheitswert f vorkommt.

Erfüllbarkeit: Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es mindestens eine Belegung der Aussagenvariablen gibt, die F wahr macht.

Äquivalenz: Zwei Formeln F und G heißen **(logisch) äquivalent** genau dann, wenn die Formel $(F \iff G)$ eine Tautologie ist. Dies wird durch $F \equiv G$ dargestellt.

Folgerungsbeziehung: Die Formel F **impliziert die Formel** G genau dann, wenn $(F \Rightarrow G)$ eine Tautologie ist.
Dies wird durch $F \models G$ dargestellt. (Aus F folgt G)

Aussageform: Eine **Aussageform** über den Universen U_1, \dots, U_n ist ein Satz mit den freien Variablen x_1, \dots, x_n .

Quantoren: Sei $p(x)$ eine Aussageform über dem Universum U .
 $\exists x : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn ein u in U existiert, so dass $p(u)$ wahr ist.
 $\forall x : p(x)$ ist wahr genau dann, wenn $p(u)$ für jedes u aus U wahr ist.

gebundene Variablen: Eine Variable x wird in einer Formel $F = \forall x : G$ durch den Allquantor **gebunden**.
Analog wird x in $F = \exists x : G$ durch den Existenzquantor **gebunden**.

Normalisierte Darstellung: Eine Formel ist in normalisierter Variablenschreibweise, wenn gilt:

- 1. keine Variable kommt sowohl frei, als auch gebunden vor
- 2. keine Variable ist mehrfach gebunden

Wahrheitstabellen

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$(A \Rightarrow B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$(A \iff B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

A	$\neg A$
w	f
f	w

Umformungsregeln	
Kommutativgesetz:	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
Assoziativgesetz:	$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$
Distributivgesetz:	$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
Idempotenzgesetz:	$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$
Doppelnegation:	$\neg(\neg p) \equiv p$
de Morgan Gesetz:	$\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$ $\neg(p \vee q) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q))$
Tautologieregeln:	$(p \wedge q) \equiv p$ $(p \vee q) \equiv q$ wobei: $(q = \text{Tautologie})$
Kontradiktionsregeln:	$(p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \equiv p$ wobei: $(q = \text{Kontradiktion})$

Umformungsregeln für Quantoren	
Negationsregeln:	$\neg \forall x : p(x) \equiv \exists x : (\neg p(x))$ $\neg \exists x : p(x) \equiv \forall x : (\neg p(x))$
Ausklammerregeln:	$(\forall x : p(x) \wedge \forall y : q(y)) \equiv \forall z : (p(z) \wedge q(z))$ $(\exists x : p(x) \vee \exists y : q(y)) \equiv \exists z : (p(z) \vee q(z))$
Vertauschungsregeln:	$\forall x \forall y : p(x, y) \equiv \forall y \forall x : p(x, y)$ $\exists x \exists y : p(x, y) \equiv \exists y \exists x : p(x, y)$

Definitionen

Menge Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung **wohlunterschiedenen Objekten** zu einem Ganzen.
Es muss zudem einwandfrei entscheidbar sein, ob ein Objekt der Gesamtheit angehört oder nicht.
Die Objekte der Menge heißen **Elemente** der Menge.

gleichheit von Mengen: Zwei Mengen A und B heißen **gleich** ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element aus A auch ein Element aus B ist – und umgekehrt.
für alle $x \in A$ gilt auch $x \in B$ und für alle $y \in B$ gilt auch $y \in A$
Sind die Mengen A und B nicht gleich, notiert man $A \neq B$.

Komplementärmenge: Sei $E(x)$ eine Aussageform über der Menge U .
Dann heißen die Mengen $M = \{x \in U | E(x)\}$ und $\bar{M} = \{x \in U | \neg E(x)\}$ in U komplementär.
 \bar{M} heißt **Komplementärmenge** oder **Komplement** von M in U .

Leere Menge: Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit \emptyset bezeichnet.

Teilmenge: Eine Menge B heißt **Teilmenge** einer Menge A genau dann, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist. ($B \subseteq A$ gilt gdw. $\forall x : x \in B \rightarrow x \in A$) .
 A heißt dann **Obermenge** von B . B heißt echte Teilmenge von A .

Potenzmenge: Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** von M und wird $\mathcal{P}(M)$ notiert:
 $\mathcal{P}(M) := \{X | X \subseteq M\}$

Vereinigung: Seien M und N Mengen. Die Vereinigungsmenge ist Definiert durch: $M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}$

Schnitt: Seien M und N Mengen. Der Schnitt ist Definiert als $M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$

Differenz: Seien M und N Mengen. Die Differenz ist definiert durch $M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}$

Mengenfamilie: Die Mengenfamilie \mathcal{F} sei definiert als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$
Dann ist die Vereinigung aller Mengen aus \mathcal{F} :
 $\bigcup \mathcal{F} = \{x | \exists N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \wedge x \in N)\}$
Der Durchschnitt aller Mengen aus \mathcal{F} :
 $\bigcap \mathcal{F} = \{x | \forall N \in \mathcal{P}(M) : (N \in \mathcal{F} \rightarrow x \in N)\} \cap \bigcup \mathcal{F}$

kartesisches Produkt: Seien A und B Mengen.
Das **kartesische Produkt** (auch Kreuzprodukt) von A und B ist definiert durch
 $A \times B := \{(a,b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$

Isomorphie: Zwei Mengen X und Y sind **isomorph**, wenn dich ihre Elemente eins zu eins zuordnen lassen. ($X \cong Y$)

Disjunkte Vereinigung: Die **disjunkte Vereinigung** von A und B ist definiert durch:
 $A \uplus B := (A \times 0) \cup (B \times 1)$

Rechengesetze	
Assoziativgesetz:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetz:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetz:	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
De-Morgan:	$A (B \cup C) = (A B) \cap (A C)$ $A (B \cap C) = (A B) \cup (A C)$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenz:	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Komplement:	$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = G$
Zahlenmengen	
natürliche Zahlen:	$\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$
ganze Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$
rationale Zahlen:	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
reelle Zahlen:	\mathbb{R}
irrationale Zahlen:	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
komplexe Zahlen:	\mathbb{C}
Dabei gilt:	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
Schreibweisen Mengen	
explizit:	$M = \{1, 2, 3, 4\}$
verbal:	"Die Menge aller nicht-negativen, geraden Ganzzahlen"
unendliche Mengen:	$M := \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
implizit:	$M := \{x \in \mathbb{N} x \text{ ist gerade}\}$
Potenzmenge:	
Jede mögliche Teilmenge einer Menge. Bsp: $M := \{1, 2, 3\}$ dann ist $\mathcal{P}(M) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.	
disjunkten Vereinigung:	
Bei der disjunkten Vereinigung zweier Mengen kreuzt man die jeweiligen Elemente mit einer Menge aus einem Index ($A \times 1, B \times 2$ usw.) und vereinigt die daraus resultierenden Kreuzprodukte. Dadurch ist jedem Element aus $A \uplus B$ anzusehen, ob es aus A oder B stammt.	

Definitionen

Relation: Eine **Relation** zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$. Man schreibt aRb .
 $aRb \leftrightarrow (a,b) \in R$

Inverse Relation: Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B . Die **Inverse Relation** zu R wird R^{-1} notiert.
 $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$

Komposition: Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen.
Die Verknüpfung $(R \circ S) \subseteq (M_1 \times M_3)$ heißt **Komposition** der Relationen R und S :
 $R \circ S := \{(x,z) | \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

Reflexivität: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **reflexiv**, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht:
 $\forall a \in A : (a,a) \in R$

Symmetrie: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **symmetrisch**, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt:
 $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

Antisymmetrie: Das Gegenteil von Symmetrie:
 $(a,b) \in R \rightarrow \neg(b,a) \in R$

Antisymmetrie: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **antisymmetrisch**, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt:
 $((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow a = b$

Transitivität: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **transitiv**, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann:
 $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$

Totalität Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **total** (auch: linear), wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen:
 $\forall(a,b) \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

Teilbarkeitsrelation: Sei $a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{Z}$.
Wir schreiben $a|b$, wenn "a ein Teiler von b" ist, d.h. wenn gilt:
 $\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a$

Rechtseindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **rechtseindeutig** (nacheindeutig) wenn Für alle $a \in A$ gilt:
 $((a,b) \in R \wedge (a,c) \in R) \rightarrow b = c$

Linkseindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **linkseindeutig** wenn für alle $a \in B$ gilt:
 $((b,a) \in R \wedge (c,a) \in R) \rightarrow b = c$

Eindeutigkeit: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **eindeutig** wenn:
 R rechtseindeutig und R linkseindeutig.

Linkstotal: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **linkstotal** wenn:
 $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$

Rechtstotal: Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **rechtstotal**:
 $\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$

Irreflexiv: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **irreflexiv** wenn:
 $\forall a \in A : (a,a) \notin R$

Alternativ: Eine Relation $R \subseteq A^2$ über einer Menge A heißt **alternativ** wenn:
 $\forall a,b \in R : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

Äquivalenzrelation: Ist eine Relation \sim reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie **Äquivalenzrelation** genannt.

Äquivalenzklasse: Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R über der Menge A . Dann ist Für $a \in A : [a]_R = \{x | (a,x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von a .

Zerlegung: Sei A eine nichtleere Menge. Eine **Zerlegung** (oder **Partition**) von A ist eine Mengenfamilie $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$ mit:

- 1. Überdeckung: $A \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$
- 2. $\emptyset \notin \mathcal{Z}$
- 3. Disjunktivität: $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{Z}$ gilt entweder $M_1 = M_2 \vee M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Eine Zerlegung ist also eine Einteilung von A in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit A übereinstimmt.

Abschluss: Sei R eine Relation über A und sei ϕ (reflexiv, usw.) eine Eigenschaft von Relationen.
Die Relation R^* heißt **Abschluss** von R bezüglich ϕ , wenn gilt:

- 1. R^* besitzt die Eigenschaft ϕ
- 2. $R \subseteq R^*$
- 3. Für alle Relationen D , die R umfassen und ebenfalls die Eigenschaft ϕ besitzen, gilt $R^* \subseteq D$

Mit anderen Worten: R^* ist die kleinste Relation, die R umfasst und die Eigenschaft ϕ besitzt.
Besitzt R bereits die Eigenschaft, so fügt der Abschluss nichts hinzu: $R^* = R$

Ordnung: Ist eine Relation \leq reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine **Halbordnung** (partielle Ordnung)
 a und b heißen **vergleichbar** bzgl. \leq , falls $a \leq b \vee b \leq a$ gilt (sonst unvergleichbar).
Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt die **(totale) Ordnung** und A heißt durch \leq geordnet.

minimal/maximal: Sei \leq eine Halbordnungsrelation auf A . Sei M eine nichtleere Teilmenge von A .
Ein Element $m \in M$ heißt **maximal** Element in M , wenn:
 $\forall m' \in M : m \leq m' \Rightarrow m = m'$
 m heißt **minimales** Element, wenn:
 $\forall m' \in M : m' \leq m \Rightarrow m = m'$

Spezielle Relationen	
Es gibt spezielle Relationen, die im weiteren auch noch genutzt werden:	
Leere Relation:	$R = \emptyset$
All-Relation:	$R = A \times B$
Identität (über M):	$R = Id_M = \Delta_M := \{(x,x) x \in M\}$

Definitionen

Term: Ein Term setzt sich zusammen aus:

- Konstanten: e, π, \dots
- Variablen: x, y, \dots
- Operatoren: $+, -, \times, \sqrt{}, \dots$
- Funktionen: $f(x), \sin(x), \dots$

Gleichung: Eine Gleichung $t_1 = t_2$ setzt zwei Terme in Beziehung.

Grad (von Fkt.): Ein reellwertiges Polynom ist ein Ausdruck der Form ($x \in \mathbb{R}$):

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n x^n + a_1 x^1 + a_0$$

Falls $a_n \neq 0$, dann ist n der Grad des Polynoms.

Logarithmus: $\log_a(c) = x$ für $a^x = c$

Brüche	
Addition bei gleichem Nenner:	$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$
Multiplikation:	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
Kürzen eines gleichen Faktors:	$\frac{a \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d}$
Erweitern um c:	$\frac{a}{d} = \frac{a}{d} \cdot 1 = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{d \cdot c}$
Addieren mit verschiedenen Nennern (durch erweitern):	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = (\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{d}) + (\frac{b}{d} \cdot \frac{c}{c}) = \frac{ad+bc}{cd}$

Summen-/Produktnotation

Summennotation: $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ist äquivalent zu $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$

Produktnotation: $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

Exponential-Gesetze
Sei $m, n \in \mathbb{N}$:
<ul style="list-style-type: none">• $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$• $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$• $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$• $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$• $b^m \cdot c^m = (b \cdot c)^m$• $\frac{b^m}{c^m} = (\frac{b}{c})^m$• $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$• $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Binomische Formeln
<ul style="list-style-type: none">• $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$• $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$• $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Logarithmen	
Umkehrung:	$\log_b(b^q) = q \Leftrightarrow b^{\log_b(q)} = q$
Mul/Additivität:	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$ $\log_b(a^q) = q \log_b(a)$
Basiswechsel:	$\log_b(a) = \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}$

Trigonometrische Funktionen	
Tangensfunktion:	$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Co-Tangensfunktion:	$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Zusammenfassung
<ul style="list-style-type: none">• Ein Term ist ein Ausdruck, der für einen Zahlenwert steht. Ein Beispiel für einen Term ist z.B: $\sin(x)^2 + \cos(x^2)$ Wobei $x^2 - 3 = 0$ kein Term ist, sondern eine Gleichung.• für die Summen-/Produktnotation gibt man unten die untere Grenze und oben die obere Grenze die Summierung/Produktbildung an. Bsp: $\sum_{i=1}^5 a_i := 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$\prod_{0 \leq i \leq 5, i \% 2 = 1} (i + 1) := (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (5 + 1)$• Hyperbeln können nach ähnlichem Schema umgeformt werden. Dabei wird ein Term $\frac{1}{x}$ zu x^{-1}. Wenn der Nenner einen Exponenten besitzt kann dieser auch wieder umgeformt werden, damit die Rechengesetze gelten. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$• Wurzelfunktionen können umgeformt werden. Wenn man z.B einen Term $\sqrt[3]{x}$ hat, kann dieser zu $x^{\frac{1}{3}}$ umgeformt werden. Dadurch gelten auch für Wurzeln, die Exponentialgesetze.• Logarithmen können genutzt werden, wenn bei einer Exponentialfkt. der Exponent unbekannt, aber das Ergebnis bekannt ist. Dabei gibt es den Spezialfall des natürlichen Logarithmus. Dieser ist definiert als: $\ln(x) := \log_e(x)$

Definitionen

Abbildung: Unter einer Abbildung f von einer Menge A in einer Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet.

- Schreibweise: $f : A \rightarrow B$.
- für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise $a \mapsto b = f(a)$
- Man bezeichnet b als das Bild von a .
- a ist ein Urbild von b

Abbildung: Sei $F \subseteq A \times B$ eine linksvollständige und rechtseindeutige Relation.

1. F ist linksvollständig: für alle $a \in A$ gilt: Es existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in R$
2. F ist rechtseindeutig: für alle $a \in A$ und alle $b_1, b_2 \in B$ gilt: $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$, dann $b_1 = b_2$

Das Tripel $f = (A, B, F)$ heißt Abbildung von A nach B.

- F heißt Graph der Abbildung
- A ist der Definitionsbereich
- B ist der Bildbereich

Zu jedem $a \in A$ wird das eindeutig bestimmte $b \in B$ mit aFb als Bild von f bei a bezeichnet. Notation: $f(a)$

Bild: Sei $f : A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$

- Das Bild von M unter f ist die Menge: $f(M) := \{f(x)|x \in M\}$
- Insbesondere heißt $Bild(f) := f(A)$ das (volle) Bild von f (auch Wertebereich).
- Das Urbild einer Teilmenge $N \subseteq B$ ist definiert durch: $f^{-1}(N) := \{a \in A|f(a) \in N\}$

Einschränkung: Sei $f = (A, B, F)$ eine Abbildung und $M \subseteq A$. Die Abbildung $f|_M = (M, B, F \cap (M \times B))$ heißt Einschränkung von f auf M .

Komposition: Kompositionen von Funktionen ist hier definiert als: $a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), a \in A$

Injektiv: Wenn für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt $f(a) \neq f(a')$.

surjektiv: Falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

bijektiv: Falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Inverse Abbildung: Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung. Da existiert zu f stets eine Abbildung g mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$. g heißt die zu f inverse Abbildung oder Umkehrabbildung. Notation: f^{-1} .

Gleichmächtig: Seien M und N zwei Mengen. M und N heißen gleichmächtig (oder umfangsgleich) genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ gibt. Notation $M \cong N$. ($|M| = |N|$)

endlich: Eine Menge M heißt endlich genau dann, wenn $M = \emptyset$ oder es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $b : M \rightarrow \mathbb{N}_n$ gibt.

unendlich: Eine Menge M heißt unendlich genau dann, wenn M nicht endlich ist.

abzählbar: Eine Menge M heißt abzählbar genau dann, wenn M endlich ist oder es eine bijektive Abbildung $b : M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

abzählbar unendlich: Eine Menge M heißt abzählbar unendlich genau dann, wenn M abzählbar und unendlich ist.

überabzählbar: Eine Menge heißt überabzählbar genau dann, wenn M nicht abzählbar ist.

Folge: Eine Folge Reeller Zahlen ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

konvergenz: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N$
Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) . Eine Folge (a_n) mit Grenzwert heißt konvergent. Man schreibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder auch $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.
Eine Folge, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt Nullfolge.

Reihe: Sei (a_n) eine Folge. Die Reihe (s_n) ergibt sich aus (a_n) durch Summation: $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$

beschränkt(e Folge): Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, so dass $|a_n| \leq s$ für alle n gilt.

monoton wachsend: Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n gilt.

monoton fallend: Eine Folge (a_n) heißt monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n gilt.

supremum: Eine Zahl s heißt Suprmum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h:

- s ist obere Schranke von M ($\forall m \in M : m \leq s$)
- jede Zahl $x < s$ ist keine obere Schranke von M

infimum: Eine Zahl i heißt Infimum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn i die größte untere Schranke von M ist.

Häufungspunkt: h heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n) , wenn jede Umgebung $K_\epsilon(h)$ von h unendlich viele Folgenglieder enthält. Also: $|h - a_n| < \epsilon$ für unendlich viele n

Cauchy-Folge: Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n gibt so dass gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$, falls n und $m \geq n$ sind.

Asymptotisch: Zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $b_n \neq 0$ heißen asymptotisch gleich, falls die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ gegen 1 konvergiert. Notation: $a_n \sim b_n$.

O-Notation: Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zu der Menge $O(g)$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ für fast alle n gilt.

Rechenregeln Folgen
<ul style="list-style-type: none">• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0$ für jedes positive $s \in \mathbb{Q}$.• $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes reelle $a > 0$.• $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.• $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ für jedes reelle q mit $q < 1$.

Direkter Beweis

Wird bei wenn-dann-Aussagen genutzt. Modus ponens: Aus p und $(p \Rightarrow q)$ ergibt sich q . Vorgehen dabei ist:

1. Satz genau studieren–Welche Parameter werden gestellt?
2. Bei der Hypothese beginnen. Diese muss wahr sein, denn $(p \Rightarrow q)$.
3. ggf. die Hypothese mathematisch darstellen Bsp:
gerade Zahl $n = 2k$
ungerade Zahl $n = 2k + 1$
4. Dann durch (beliebig viele) Folgeaussagen von der Hypothese zur Schlussfolgerung kommen.
 $p \Rightarrow s_1, s_1 \Rightarrow s_2, s_2 \Rightarrow q$ wobei $s_1 - s_n$ wieder wahre Aussagen sind.
5. Praktisch dabei: Es muss nicht jeder Schritt aufgeschrieben werden–nur solche, die wichtig für die Beweisführung des Lemmas sind.

Beispiel:

Satz: "Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar."

Gegebene Informationen: $n \in \mathbb{N}$ und $p = n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 teilbar

1. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$
2. $\Rightarrow n + (n + 1) + (n + 2) = (3n + 3)$
3. $\Rightarrow (3n + 3) = 3(n + 1)$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Kontraposition

Ist dem Direkten Beweis sehr ähnlich. Nur dass hier die Behauptung negiert und umgekehrt wird um zu der äquivalenten Kontraposition zu gelangen. Aus $(p \Rightarrow q)$ wird also $(\neg q \Rightarrow \neg p)$. Man beweist also quasi rückwärts.

Beispiel:

Satz: "Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist a ungerade". Die äquivalente Kontraposition dazu ist: "Wenn a gerade, dann ist a^2 gerade".

1. $\neg q = "a \text{ ist gerade}"$
2. $a = 2 \cdot k$ (Def. gerade Zahl)
3. $a \cdot a = (2 \cdot k) \cdot a$ (mul. mit a)
4. $a^2 = 2 \cdot (k \cdot a)$ (Assoziativgesetz)
5. $a^2 = 2 \cdot k'$ (wobei $k' = a \cdot k$)
6. $\neg p = a^2 \text{ ist gerade (durch } 2 \cdot k')$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Widerspruch

Basiert wieder auf der Implikation $(p \Rightarrow q)$. Hier wird aber ein Widerspruch erzeugt sodass $(p \wedge \neg q)$

Beispiel:

Satz: "Wenn a und b gerade natürliche Zahlen sind, dann ist auch $a \cdot b$ gerade".

1. Annahme: $a \cdot b$ ist ungerade.
2. $a \cdot b = 2 \cdot (a \cdot k)$ (denn: $b = 2 \cdot k$)
3. $a \cdot k$ ist gerade. Also muss $a \cdot b$ gerade sein.

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Äquivalenzbeweis

Bei dieser Beweistechnik unterteilt man die Aussage in zwei direkte Beweise. Aus $(p \Leftrightarrow q)$ wird dann $(p \Rightarrow q)$ und $(q \Rightarrow p)$.

Beispiel:

Satz: " a ist gerade genau dann, wenn a^2 gerade ist". Dabei ist $p = "a \text{ ist gerade}"$ und $q = "a^2 \text{ ist gerade}"$. In diesem Fall ist $(p \Rightarrow q)$ schon bewiesen. (siehe Bsp. Kontraposition) $(q \Rightarrow p)$ wird durch Kontraposition bewiesen:

1. $\neg p$: " a ist ungerade"
2. $a - 1 = 2 \cdot k$ (def. ungerade Zahl umgestellt)
3. $a = 2 \cdot k + 1$
4. $a^2 = (2 \cdot k)^2 + 2 \cdot (2 \cdot k) + 1$ (quadrat schon ausmul.)
5. $a^2 = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot k + 2 \cdot k) + 1$
6. a^2 ist ungerade

Da nun sowohl $(p \Rightarrow q)$ als auch $(q \Rightarrow p)$ bewiesen ist, ist der Äquivalenzbeweis erbracht. \square

Fallunterscheidung

Jede Aussage p ist logisch äquivalent zu $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$.
Dann Beweist man einfach beide Fälle.

Beispiel:

Satz: "Jede natürliche Zahl n^2 geteilt durch 4 lässt entweder den Rest 1 oder 0".

n ist gerade:

- $n = 2m$ für $m \in \mathbb{M}$
- $n^2 = 4m^2$
- n^2 ist durch 4 teilbar
- Rest ist 0
- Rest ist 1 oder 0

n ist ungerade:

- $n = 2m + 1$ für $m \in \mathbb{M}$
- $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$
- n^2 ist durch 4 teilbar mit Rest 1
- Rest ist 1
- Rest ist 1 oder 0

Damit sind alle Fälle betrachtet und die Aussage bewiesen. \square

Beweis mit Quantoren

Bei universellen Aussagen ($\forall x$) muss man unabhängig von konkreten Werten für die Quantifizierten Variablen Beweisen. Deswegen beginnt und beendet man den Beweis etwas anders:

Bei der Aussage $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ würde man so vorgehen:

1. Sei a ein beliebiger, aber fester Wert aus dem Universum (also der Menge).
2. ¡Beweis!
3. Da a beliebig gewählt werden kann, folgt:
 $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$.

Damit ist die Aussage Bewiesen \square

Bei existenziellen Aussagen $\exists x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ geht man so vor:

1. Sei $a =$ ¡Ein geeignetes Element aus dem Universum!.
2. ¡Beweis!
3. Damit ist die Existenz eines a mit der Eigenschaft $(p(x) \Rightarrow q(x))$ bewiesen.
4. Damit ist die Gültigkeit der Aussage $\exists x : (p(x) \Rightarrow q(x))$ bewiesen.

Definitionen

Induktion: Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte 1 und 3 durchzuführen:

- 1. Induktionsanfang (IA): Man zeigt, dass $A(0)$ richtig ist.
- 2. Induktionsbehauptung (IB): Annahme, dass $A(k)$ für ein festes k richtig ist.
- 3. Induktionsschluss (IS): Man zeigt: Aus der Annahme, dass $A(k)$ richtig ist (Induktionsanker), folgt, dass auch $A(k + 1)$ richtig ist:
 $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$

Dann ist gewährleistet, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wichtig: Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 0$, sondern für ein $n_0 > 0$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

Induktiv erzeugte Menge: Die Menge M wird wie folgt induktiv definiert:

- Basismenge: jedes x mit \sim gehört zu M .
- Erzeugungsregel: Sind m_1 und m_2 Elemente aus M , dann auch das Element $m = randomFunction(m_1, m_2)$.
- Nur Elemente, die so gebildet werden können, gehören zu M .

Wörter/Zeichenketten: Sei Σ ein Alphabet. Die Menge Σ^* aller Wörter über Σ ist induktiv definiert:

- Basismenge: Das leere Wort ϵ gehört zu Σ^* ; das heißt: $\epsilon \in \Sigma^*$
- Erzeugungsregel: Ist w ein Wort in Σ^* und a ein Element von Σ , dann gehört die Konkatenation wa zu Σ^*

Länge eines Wortes: Sei Σ ein Alphabet. Die Länge eines Wortes $w \in \Sigma^*$ ist induktiv definiert durch:

- Die Länge des leeren Wortes ϵ ist 0, $|\epsilon| = 0$
- Sei $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Dann ist $|wa| = |w| + 1$.

Aussagenlogische Formeln: Sei X die Menge der aussagenlogischen Variablen. Die Menge der aussagenlogischen Formeln wird wie folgt definiert:

- Basismenge: Die Konstanten w und f sind aussagenlogische Formeln.
- Basismenge: Jede Aussagenlogische Variable $x \in X$ ist eine aussagenlogische Formel.
- Erzeugungsregel: Sind α und β aussagenlogische Formeln, so sind auch $(\neg \alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta)$ und $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ aussagenlogische Formeln.

Beispiel Induktion

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

- Induktionsanfang (IA): Die Eigenschaft gilt für $n = 0$, denn $\sum_{i=1}^n i = 0$ und $\frac{1}{2}n(n + 1) = 0$.
- Induktionsbehauptung (IB): Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein beliebiges, aber festes k gilt: $\sum_{i=0}^k i = \frac{1}{2}k(k + 1)$.
- Induktionsschluss (IS): Unter der Voraussetzung, dass die IB gilt, wollen wir die Summenformel für $k + 1$ zeigen: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1)$ Dies können wir durch folgende Umformung zeigen:
$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (\sum_{i=0}^k i) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + (2k+2)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Nach dem Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen.

Verallgemeinerte vollständige Induktion

Diese wird genutzt, wenn die Induktionsannahme $A(n)$ nicht genug ist, um den Induktionsschluss $A(n + 1)$ beweisen zu können. Die Aussage $A(n)$ gilt für alle natürlichen Zahlen, wenn sowohl der Induktionsanfang $A(0)$ als auch der Induktionsschritt gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (A(0) \wedge \dots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n + 1)$$

Beispiel:

Sei n eine natürliche Zahl und $n \geq 2$. Dann ist n das Produkt von Primzahlen.

- **IA:** Die Eigenschaft gilt für $n = 2$, denn 2 ist das Produkt von sich selbst, also einer Primzahl.
- **Starke Induktionsbehauptung (IB):** für festes n nehmen wir an, dass sich alle Zahlen $2, 3, \dots, n$ als Produkt von Primzahlen schreiben lassen.
- **Induktionsschluss (IS):** Z.z.: $n + 1$ ist ein Produkt von Primzahlen.

Fall 1: $n + 1$ ist eine Primzahl, dann auch ein Produkt von Primzahlen (sich selbst).

Fall 2: $n + 1$ ist keine Primzahl, dann gibt es mindestens zwei echte Teiler b und c :

Da b und c beide echt kleiner als $n + 1$ sind, gilt die IB für sie:

$$b = p_1 \dots p_k c = q_1 \dots q_l$$

Damit gilt: $n + 1 = b \cdot c = (p_1 \dots p_k) \cdot (q_1 \dots q_l)$
 $n + 1$ ist also ein Produkt von Primzahlen.

Nach dem verallgemeinerten Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

"Induktionsschablone"

- 1. **(IA):** Die Eigenschaft gilt für $n = 0$, denn ...
- 2. **(IB):** Wir nehmen an, dass die Summenformel für ein beliebiges, aber festes k gilt: $\sum_{i=0}^k \dots$
- 3. **(IS):** Unter der Voraussetzung, dass die IB gilt, wollen wir die Summenformel für $k + 1$ zeigen: $\sum_{i=0}^{k+1} \dots$
Nach dem Induktionsprinzip gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen.

Peano-Axiome:

$$0 \cdot m = 0$$

$$(n + 1) \cdot m = (n \cdot m) + m$$

$$n \cdot (m_1 + m_2) = n \cdot m_1 + n \cdot m_2$$

Definitionen

Permutation: Eine Anordnung aller Elemente einer endlichen Menge heißt Permutation.
Ausführlicher: Eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge M auf sich selbst nennt man Permutation der Menge.
 Es gibt also $|M|!$ Permutationen von M .
 Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit S_n . Es gilt somit $|S_n| = n!$.

k -Permutation: Eine k -Permutation einer endlichen Menge S ist eine Permutation einer k -elementigen Teilmenge von S .
 Die Anzahl aller k -Permutationen einer n -elementigen Menge wird mit $[\frac{n}{k}]$ bezeichnet. (auch: $(n)_k$)
 Die Anzahl der k -elementigen Teilmenge einer n -elementigen Menge wird mit $(\frac{n}{k})$ bezeichnet. Dies ist der Binomialkoeffizient gesprochen „ n ber k “
 $(\frac{n}{k})$ kann auch als $\frac{n!}{k!(n-k)}$ dargestellt werden.
Beispiel:
 Sei $S = \{1, 2, 3\}$
 Die 2-Permutation von S ist also:
 $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$
 Der Binomialkoeffizient hier ist: $(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}) = 3$

Begriffserklärungen Wahrscheinlichkeitstheorie: • Der Ereignisraum $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Hier: endlich und diskret.
 • Die Menge der Ereignisse $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, also die Potenzmenge von Ω .
 • Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ seine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu.
 • Ein Laplace-Versuch ist ein Zufallsversuch mit endlich vielen und gleich wahrscheinlichen Ergebnissen. Beispiel: Münzwurf, Würfel
 • Bei Laplace-Versuchen wird das Wahrscheinlichkeitsmaß durch eine Abzählregel definiert (Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Also: $P(A)$ ist das Verhältnis von der Anzahl der (für A) günstigen Fälle und der Anzahl aller insgesamt möglichen Fälle.
 • Man benötigt kombinatorische Prinzipien, um $|A|$ zu bestimmen.

Pascal'sche Gleichung: $(\frac{n}{k}) = (\frac{n-1}{k-1}) + (\frac{n-1}{k})$

