

Treiber · Kesting **Verkehrsdynamik und -simulation**

Daten, Modelle und Anwendungen
der Verkehrsflussdynamik



Springer-Lehrbuch

Für weitere Bände:
<http://www.springer.com/series/1183>

Martin Treiber · Arne Kesting

Verkehrsdynamik und -simulation

Daten, Modelle und Anwendungen der
Verkehrsflussdynamik



Dr. Martin Treiber
TU Dresden
Institut für Wirtschaft und
Verkehr
Würzburger Str. 35
01062 Dresden
Germany
treiber@vwi.tu-dresden.de

Dr. Arne Kesting
TU Dresden
Institut für Wirtschaft
und Verkehr
Würzburger Str. 35
01062 Dresden
Germany
kesting@vwi.tu-dresden.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-05227-9 e-ISBN 978-3-642-05228-6
DOI 10.1007/978-3-642-05228-6
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Verkehr bewegt die Menschen in vielfältiger Weise. Die Wissenschaft ist herausgefordert, die beobachtbaren individuellen und kollektiven Effekte im Straßenverkehr zu beschreiben und zu verstehen. In jüngerer Zeit haben Beiträge aus verschiedenen Fachbereichen für ein immer besseres Verständnis der Verkehrsdynamik gesorgt. Die Relevanz dieses interdisziplinären Gebiets wird in Zukunft für weitere Fortschritte sorgen. Im Fokus stehen dabei mögliche Anwendungen, die von der Entwicklung neuartiger Fahrerassistenzsysteme bis zu immer präziseren Stauprognosen für die dynamische Navigation reichen.

Mit diesem Lehrbuch liegt erstmals eine umfassende und didaktische Darstellung der Dynamik und Modellierung des Straßenverkehrs vor. Wir hoffen, dass dieses anschauliche und faszinierende Gebiet, welches bisher nur in der englischsprachigen Originalliteratur verfügbar war, damit einem breiteren Leserkreis erschlossen wird.

Im ersten Teil des Buches werden Methoden der Datenerhebung über das Verkehrsgeschehen, die die Grundlage jeder Modellierung bilden, vorgestellt. Der zweite Teil widmet sich den verschiedenen Ansätzen und Modellen zur Beschreibung des Verkehrsflusses. Diese basieren zum großen Teil auf Konzepten der Physik – Vierteilchensysteme, Hydrodynamik und klassische Newton'sche Mechanik. Anwendungen wie die Verkehrslageschätzung, Ermittlung von Reisezeiten, Berechnung des Kraftstoffverbrauchs und Verkehrsbeeinflussung werden im dritten Teil dargestellt.

Das vorliegende Buch ist aus der Vorlesungs- und Übungstätigkeit an der Technischen Universität Dresden hervorgegangen und richtet sich an Studierende und Doktoranden in den natur- und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen. Weiterhin soll es Schülern und Lehrern, aber auch Ingenieuren in der Berufswelt einen Einblick in das Fachgebiet der Verkehrsflussmodellierung ermöglichen.

Damit es dem Charakter eines Lehrbuchs gerecht wird, enthält es viele Übungsaufgaben zusammen mit ausführlichen Lösungen. Sie sollen die selbständige Auseinandersetzung mit dem Fachgebiet und das Verständnis fördern. Die vorgestellten Modelle eignen sich auch als Anwendungsbeispiele für Computersimulationen und numerische Methoden.

Unser Dank gilt unseren Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Verkehrsökonometrie und -modellierung der TU Dresden, insbesondere Herrn Prof. Dirk Helbing, für die zahlreichen wissenschaftlichen Anregungen in den vergangenen

Jahren. Herzlich bedanken wir uns bei Marietta Seifert, Christian Thiemann und Stefan Lämmer für die inhaltlichen Vorschläge und Korrekturen bei der Erstellung des Manuskripts. Darüber hinaus haben Martina Seifert, Christine und Hanskarl Treiber, Ingrid, Bernd und Dörte Kesting, Claudia Perlitus und Ralph Germ mit ihren wertvollen Hinweisen wesentlich zum Gelingen des Buches beigetragen. Auch dafür herzlichen Dank.

Dresden,
März 2010

Martin Treiber
Arne Kesting

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
Teil I Verkehrsdaten	
2 Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten	7
2.1 Erfassungsmethoden	7
2.2 Darstellung im Raum-Zeit-Diagramm	8
Übungsaufgaben	10
Literaturhinweise	11
3 Querschnittsdaten	13
3.1 Mikroskopische Erfassung: Einzelfahrzeugdaten	13
3.2 Aggregierung: Makroskopische Daten	15
3.3 Schätzung räumlicher Größen aus Querschnittsdaten	16
3.3.1 Verkehrsdichte	17
3.3.2 Räumliches Geschwindigkeitsmittel	20
3.4 Geschwindigkeit aus Einfach-Schleifendetektoren	22
Übungsaufgaben	23
Literaturhinweise	24
4 Darstellung von Querschnittsdaten	25
4.1 Zeitreihen makroskopischer Größen	25
4.2 Geschwindigkeits-Dichte-Relation	28
4.3 Zeitlückenverteilung	30
4.4 Fluss-Dichte-Diagramm	32
4.5 Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm	36
Übungsaufgaben	36
Literaturhinweise	36
5 Raumzeitliche Rekonstruktion der Verkehrslage	37
5.1 Raumzeitliche Interpolation	37
5.2 Verkehrsadaptives Glättungsverfahren	40

5.2.1	Charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeiten	41
5.2.2	Adaptiver Geschwindigkeitsfilter	42
5.2.3	Parameter und Validierung des Verfahrens	43
5.3	Datenfusion	45
	Übungsaufgaben	47
	Literaturhinweise	48
 Teil II Modellierung der Verkehrsflussdynamik		
6	Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung	51
6.1	Historie und Abgrenzung von verwandten Gebieten	51
6.2	Modellkategorien	52
6.2.1	Inhaltliche Einteilung	52
6.2.2	Mathematische Einteilung	55
6.2.3	Einteilung bezüglich weiterer Kriterien	57
6.3	Nichtmotorisierter Verkehr	58
	Übungsaufgaben	59
	Literaturhinweise	59
7	Kontinuitätsgleichung	61
7.1	Verkehrsdichte und hydrodynamische Fluss-Dichte-Relation	61
7.2	Formulierung der Kontinuitätsgleichung	63
7.2.1	Homogene Strecke	63
7.2.2	Bereiche von Zu- oder Abfahrten	64
7.2.3	Änderung der Fahrstreifenzahl	65
7.2.4	Diskussion	67
7.3	Kontinuitätsgleichung aus Sicht des Autofahrers	68
	Übungsaufgaben	70
8	Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell	73
8.1	Modellgleichung	73
8.2	Ausbreitung kontinuierlicher Dichteschwankungen	75
8.3	Schockwellen	76
8.4	LWR-Modelle mit dreieckigem Fundamentaldiagramm	82
8.4.1	Modellparameter und Eigenschaften	83
8.4.2	Wahl der Streckenabschnitte	89
8.4.3	Modellierung von Engstellen	90
8.4.4	Numerische Lösung des Cell-Transmission-Modells	94
8.4.5	Lösung des Section-Based-Modells	97
8.4.6	Beispiele	101
8.5	Diffusion und Burgers-Gleichung	109
	Übungsaufgaben	110
	Literaturhinweise	113

9 Makromodelle mit dynamischer Geschwindigkeit	115
9.1 Makroskopische Beschleunigungsgleichung	115
9.2 Eigenschaften der Beschleunigungsfunktion	117
9.3 Allgemeine Form der Modellgleichungen	118
9.4 Übersicht über einige Makromodelle zweiter Ordnung.....	123
9.4.1 Payne-Modell	123
9.4.2 Kerner-Konhäuser-Modell	125
9.4.3 GKT-Modell	126
9.5 Numerische Lösung	128
Übungsaufgaben.....	135
Literaturhinweise	137
10 Einfache Fahrzeugfolgemodelle	139
10.1 Allgemeines	139
10.2 Mathematische Beschreibung	140
10.3 Gleichgewichtsbeziehungen und Fundamentaldiagramm	142
10.4 Heterogener Verkehr	143
10.5 Optimal-Velocity-Modell	144
10.6 Full-Velocity-Difference-Modell	147
10.7 Newell-Modell	148
Übungsaufgaben.....	151
Literaturhinweise	153
11 Aus Fahrstrategien hergeleitete Fahrzeugfolgemodelle	155
11.1 Modellkriterien	155
11.2 Gipps-Modell	157
11.2.1 Sichere Geschwindigkeit	157
11.2.2 Modellgleichung	158
11.2.3 Fließgleichgewicht	158
11.2.4 Eigenschaften	159
11.3 Intelligent-Driver-Modell	161
11.3.1 Geforderte Eigenschaften	161
11.3.2 Modellgleichung und mathematische Beschreibung ..	162
11.3.3 Modellparameter	162
11.3.4 Intelligente Bremsstrategie	163
11.3.5 Dynamische Eigenschaften	166
11.3.6 Fließgleichgewicht	168
11.3.7 Verbesserte Beschleunigungsfunktion	169
Übungsaufgaben	170
Literaturhinweise	172
12 Modellierung menschlichen Fahrverhaltens	173
12.1 Unterschied zwischen Mensch und Maschine	173
12.2 Modellierung der Reaktionszeit	174

12.3	Schätzfehler und unvollkommene Fahrweise	176
12.3.1	Modellierung der Schätzfehler	176
12.3.2	Modellierung der Fahrfehler	179
12.4	Zeitliche Antizipation	180
12.5	Berücksichtigung mehrerer Fahrzeuge	180
12.6	Berücksichtigung weiterer menschlicher Faktoren	183
	Übungsaufgaben	185
	Literaturhinweise	185
13	Zelluläre Automaten	187
13.1	Allgemeines	187
13.2	Nagel-Schreckenberg-Modell	189
13.3	Verfeinerte Modelle	192
13.4	Vergleich zellulärer Automaten mit Fahrzeugfolgemodellen	194
	Übungsaufgaben	194
	Literaturhinweise	195
14	Fahrstreifenwechsel und andere diskrete Entscheidungen	197
14.1	Übersicht	197
14.2	Allgemeines Entscheidungsmodell	198
14.3	Fahrstreifenwechsel	199
14.3.1	Sicherheitskriterium	199
14.3.2	Anreizkriterium egoistischer Fahrer	200
14.3.3	Spurwechseln mit Höflichkeit: MOBIL	201
14.3.4	Anwendung auf spezifische Fahrzeugfolgemodelle	202
14.4	Entscheidungssituation beim Annähern an eine Ampel	206
14.5	Einfahren in eine vorfahrtberechtigte Straße	207
	Übungsaufgaben	208
	Literaturhinweise	209
15	Stabilitätsanalyse	211
15.1	Entstehung von Stop-and-Go-Wellen	211
15.2	Relevante Instabilitätskonzepte für den Verkehrsfluss	212
15.3	Lokale Instabilität	217
15.4	Kolonneninstabilität	220
15.4.1	Stabilitätsbedingungen für Fahrzeugfolgemodelle	221
15.4.2	Stabilitätsbedingungen für makroskopische Modelle	226
15.4.3	Anwendungsbeispiele	229
15.5	Konvektive Instabilität	233
15.6	Nichtlineare Instabilitäten und das Stabilitätsdiagramm	237
15.6.1	Stabilitätsklassen	238
	Übungsaufgaben	240
	Literaturhinweise	242

16 Phasendiagramm der Stauzustände	243
16.1 Von geschlossenen zu offenen Systemen	243
16.2 Begründung der Staumuster: Phasendiagramm	244
16.2.1 Stabilitätsklasse 1	245
16.2.2 Stabilitätsklasse 2	248
16.2.3 Stabilitätsklasse 3	249
16.3 Simulierte und reale Staumuster	250
Literaturhinweise	253
 Teil III Anwendungen der Verkehrsmodellierung	
17 Stauentstehung und Stauausbreitung	257
17.1 Drei Faktoren für den Verkehrszusammenbruch	257
17.2 Charakteristische Merkmale der Stauausbreitung	262
17.3 Gibt es den „Stau aus dem Nichts“?	263
17.4 Grundlagen der Verkehrslageschätzung	264
Literaturhinweise	266
18 Schätzung der Reisezeit	267
18.1 Definitionen der Reisezeit	267
18.2 Reisezeitbestimmung in der Mikrosimulation	267
18.3 Kumulierte Fahrzeugzahl	268
18.4 Reisezeitschätzung aus Detektor- und Floating-Car-Daten	269
18.5 Reisezeitbestimmung in der Makrosimulation	271
18.6 Schätzung der Reisezeit aus dem Geschwindigkeitsfeld	272
Übungsaufgaben	272
Literaturhinweise	274
19 Treibstoffverbrauch und Emissionen	275
19.1 Modell-Übersicht	275
19.1.1 Makroskopische Ansätze	275
19.1.2 Mikroskopische Ansätze	276
19.2 Physik-basiertes Modell für den Treibstoffverbrauch	277
19.3 Fahrwiderstand	278
19.4 Motorleistung	278
19.5 Verbrauchsrate	279
19.6 Motorkennfeld und instantane Verbrauchsrate	280
19.7 Auswertung	282
19.7.1 Verbrauch bezogen auf 100 km	282
19.7.2 Berechnung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs	284
19.7.3 Kohlendioxid- und andere Schadstoffemissionen	284
19.8 Ermittlung des Treibstoffverbrauchs mit Makromodellen	284
Übungsaufgaben	285
Literaturhinweise	288

20 Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses	289
20.1 Grundprinzipien	289
20.2 Geschwindigkeitsbeschränkungen	290
20.3 Zuflussdosierung an Auffahrten	292
20.4 Effizientes Fahrverhalten und ACC-Systeme	294
20.5 LKW-Überholverbot und weitere lokale Verkehrsregeln	297
20.6 Zielfunktionen für die Verkehrsoptimierung	298
Literaturhinweise	301
Anhang A Lösungen zu den Übungsaufgaben	303
Sachverzeichnis	363

Kapitel 1

Einleitung

Was wir wissen, ist ein Tropfen; was wir nicht wissen, ein Ozean.

Isaac Newton

In diesem Lehrbuch geht es um die Beschreibung der Dynamik des Straßenverkehrs mit Hilfe mathematischer Modelle. Der mathematische Zugang ist im Bereich der quantitativen Naturwissenschaften außerordentlich erfolgreich. Bereits Isaac Newton bemerkte, dass das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben sei. In der jüngeren Zeit wurde eine mathematische Herangehensweise verstärkt auch zur Beschreibung menschlichen Handelns genutzt. Dies erscheint auf den ersten Blick paradox, da der Mensch als Individuum mit seinen Entscheidungen sicherlich nicht schematisch durch mathematische Formeln beschreibbar ist.

Zwei Aspekte machen die Verkehrsdynamik dennoch einer quantitativen Beschreibung zugänglich. Zum einen gibt es eine Fülle von Daten, die im nichtnaturwissenschaftlichen Bereich wohl nur mit jener der Finanzwirtschaft vergleichbar ist – Messungen reichen vom Verhalten einzelner Fahrer bis hin zur Erfassung zahlreicher Verkehrsgrößen durch Sensoren. Diese Messungen, welche in den Naturwissenschaften den Experimenten entsprechen, bilden die Grundlage jeder Modellierung (vgl. Abb. 1.1). Durch den Vergleich mit den Beobachtungen können Modelle entwickelt und deren Parameter angepasst („kalibriert“) werden.

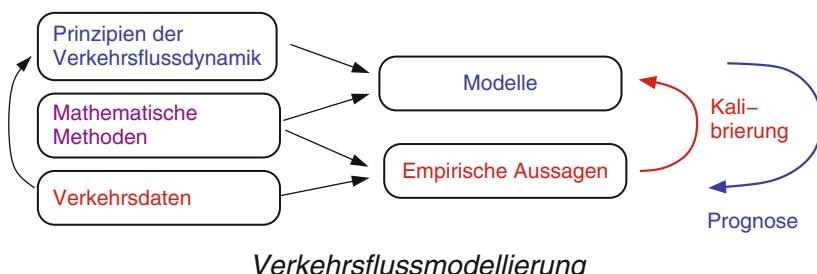


Abb. 1.1 Verkehrsflussmodelle beschreiben die Verkehrsdynamik in der Sprache der Mathematik. Die durch Simulationen gewonnenen Modellaussagen werden mit empirischen Daten verglichen. So werden die Modellparameter kalibriert. Ein kalibriertes Modell kann zur Verkehrsprognose und für weitere Anwendungen eingesetzt werden

Zum anderen umfasst die Verkehrsdynamik das Zusammenwirken vieler Verkehrsteilnehmer, und eine individuelle Beschreibung der Handlungen einzelner Fahrer ist oft nicht notwendig. Vielmehr entstehen aus dem mikroskopischen Zusammenwirken der „elementaren Bausteine“, technisch oft auch als „Fahrer-Fahrzeug-Einheiten“ bezeichnet, neue *kollektive Phänomene*. Diese reichen von der Stauentstehung über die Ausbildung einzelner Stauwellen bis zu komplexen raumzeitlichen Staumustern. Dabei „mitteln“ sich die im Detail oft unvorhersehbaren sowie schwer modellier- und messbaren Aktionen der einzelnen Fahrer weg, so dass es möglich ist, mit Modellen ein auf makroskopischer Ebene richtiges Verhalten zu beschreiben. Dies hat seine Entsprechung in der Thermodynamik. Beispielsweise ist es zur Beschreibung der Schallwellenausbreitung in der Luft nicht nötig, die Kräfte, Beschleunigungen und Wechselwirkungen der einzelnen Sauerstoff-, Stickstoff- oder CO₂-Moleküle zu kennen.

Schließlich unterliegen die individuellen Verhaltensweisen des Autofahrers gewissen Prinzipien und Randbedingungen. So reagieren Fahrer in erster Linie auf ihr unmittelbares Umfeld – die *Wechselwirkungen* sind also, ebenso wie bei Gasen oder Flüssigkeiten, lokal. Darüber hinaus findet die Kinematik, das Bremsen und Beschleunigen, innerhalb gewisser physikalischer Grenzen statt: Zwar sind nicht die Fahrer, wohl aber die Fahrzeuge physikalische Objekte im klassischen Sinn.

Abgrenzung zu anderen Fachgebieten. Eine Abgrenzung zu anderen Gebieten der Verkehrswissenschaften lässt sich anhand der betrachteten Zeitskalen in Tabelle 1.1 vollziehen. Die Modellierung des Verkehrsflusses und der -dynamik umfasst Zeittintervalle, die von ca. einer Sekunde bis zu wenigen Stunden reichen. Menschliche Reaktionszeiten und typische Zeitabstände zwischen Fahrzeugen liegen in der Größenordnung von 1 s, während das Bremsen und Beschleunigen einige Sekunden in Anspruch nimmt. Die Umlaufzeiten von Ampeln betragen ungefähr 1 min und auf Autobahnen werden Perioden von Stop-and-Go-Wellen von bis zu 20 min beobachtet. Die für den Verkehrsfluss relevante *Nachfrage* ändert sich typischerweise innerhalb von 1–2 Stunden.

Tabelle 1.1 Abgrenzung der Verkehrsflussmodellierung von der Fahrzieldynamik und Verkehrsplanung

Zeitskala	Gebiet	Modelle	Verkehrliche Aspekte
<0.1 s	Fahrzieldynamik	submikroskopisch	Motorsteuerung, Bremssystem
1 s			Reaktionszeit, Zeitlücke
10 s	Verkehrsflussmodellierung	Fahrzeugfolgemodelle	Beschleunigen und Bremsen
1 min		Makroskopische Modelle	Umlaufzeit einer Ampel
10 min			Stop-and-Go-Wellen
1 h			Spitzenstunde
1 Tag			tägliches Verkehrsverhalten
1 Jahr	Verkehrsplanung	Verkehrsumlegung Verkehrs nachfrage	Infrastrukturmaßnahmen
5 Jahre		Statistik	Änderung der Raumstruktur
50 Jahre		Prognose	demographischer Wandel

Längere Zeiträume, die von einer Stunde bis zu 50 Jahren reichen können, werden in der *Verkehrsplanung* und *Transportlogistik* betrachtet. Ziel der Verkehrsplanung ist es unter anderem, die in der Verkehrsflussdynamik als extern gegebene Verkehrsnachfrage zu prognostizieren. Dabei werden die *Ursachen* der Mobilität und deren Änderungen betrachtet. Die Transportplanung als Teilgebiet der Logistik unterscheidet sich von der Verkehrsmodellierung durch ihren Zweck: Es werden einzelne Güterströme optimiert, wobei der Verkehr nur die Rolle einer (meist störenden) Randbedingung spielt.

Kleinere Zeiten als in der Verkehrsflussdynamik spielen in der *Fahrzeugdynamik* eine Rolle. Dort werden Zeiten auch deutlich unterhalb einer Sekunde, z.B. bei Airbags oder ESP, relevant.

Anwendungen. Die Anwendungsbereiche der Verkehrsmodellierung sind vielfältig. Sie reichen von der Erzeugung realistischen „Umgebungsverkehrs“ in Fahrsimulatoren bis zur Simulation des gesamten Verkehrsgeschehens in großräumigen Netzen. Modelle werden zur Verkehrslageschätzung und Prognose eingesetzt und dienen als Werkzeug bei der Planung von Infrastrukturmaßnahmen oder zur Optimierung des Verkehrsmanagements. Beispielsweise ist eine Optimierung der Ampelsteuerung in innerstädtischen Netzen nur im Rahmen von Computersimulationen möglich. Das Gleiche gilt für die Untersuchung verkehrlicher Auswirkungen von in der Entwicklung befindlichen neuen Fahrerassistenzsystemen und Verkehrstelematik-Anwendungen.

Gliederung des Buches. Das vorliegende Buch besteht aus drei Hauptteilen. Im ersten Teil werden verschiedene Kategorien von Verkehrsdaten für die Verkehrsflussmodellierung eingeführt und anhand empirischer Daten die Phänomene der Verkehrs dynamik vorgestellt.

Der zweite Teil widmet sich der Beschreibung des Straßenverkehrsflusses mit Hilfe mathematischer Modelle. Nach einer Vorstellung der verschiedenen Modellklassen werden zunächst makroskopische Modelle und anschließend mikroskopische Modelle eingeführt. Während bei den *Mikromodellen* die einzelnen Fahrzeuge betrachtet werden, der Verkehr also als *Vielteilchensystem* aufgefasst wird, beschreiben *Makromodelle* den Systemzustand des Verkehrs durch wenige Variablen wie Verkehrsfluss, Verkehrsdichte und mittlere Geschwindigkeit. Für eine mikroskopische Beschreibung bzw. Simulation des Verkehrs werden Modelle für diskrete Entscheidungen, wie z.B. das Spurwechseln, vorgestellt. Abschließend werden die verschiedenen Arten von *Verkehrsinstabilitäten* analysiert.

Im dritten Teil des Buches werden ausgewählte Anwendungen der dargestellten Konzepte und Modelle thematisiert. Es werden die Entstehung und Ausbreitung von Staus, die Grundlagen der Verkehrslageschätzung, die Berechnung von Reisezeiten, ein Modell zur detaillierten Kraftstoffverbrauchs- und Emissionsberechnung sowie Anwendungen der Verkehrstelematik besprochen.

Für einen schnellen Überblick und eine erste Orientierung ist jedem Kapitel eine kurze Zusammenfassung vorangestellt. Im Haupttext sind die wichtigsten Formeln und Gleichungen hervorgehoben. Zahlreiche Abbildungen illustrieren die Sachverhalte sowie Modelleigenschaften. Kleinere Aufgaben und Fragen im Haupttext sol-

len zur Anregung und Kontrolle des eigenen Verständnisses dienen. Literaturhinweise und zahlreiche Übungsaufgaben dienen der Festigung und Vertiefung des Gelesenen. Ausführliche Lösungen sind in einem Anhang am Ende des Buches zusammengestellt.

Teil I

Verkehrsdaten

Kapitel 2

Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten

*Miss alles, was sich messen lässt, und mach alles messbar,
was sich nicht messen lässt.*

Galileo Galilei

2.1 Erfassungsmethoden

Mit Hilfe von Kameras kann das Verkehrsgeschehen von erhöhten Beobachtungs posten oder Flugzeugen aus direkt erfasst werden. Aus den Video-Bildern oder Foto-Serien lassen sich mit *Tracking-Software* die *Trajektorien* $x_\alpha(t)$, d.h. die Positionen der Fahrzeuge α über die Zeit, verfolgen. Werden die Orts-Zeit-Linien von *allen* Fahrzeugen innerhalb eines raumzeitlichen Bereichs erfasst, spricht man von *Trajektoriendaten*.

Trajektoriendaten stellen damit die detailreichsten Verkehrsinformationen bereit und erlauben als einzige Datenkategorie eine direkte Bestimmung der Verkehrs dichte (vgl. Abschn. 3.3) und der Fahrstreifenwechsel-Ereignisse. Kamerabasierte Messmethoden sind aber in der Regel aufwändige und fehlerträchtige Verfahren, die automatische und robuste Algorithmen zum Fahrzeug-Tracking benötigen. Sie stellen oft auch die teuerste Lösung dar.

Zur Erfassung sogenannter *Floating-Car-Daten* (FC-Daten) werden einzelne Messfahrzeuge (*floating cars*) eingesetzt, die im Verkehrsstrom „mitschwimmen“. Diese Fahrzeuge zeichnen ihre Geschwindigkeiten $v_\alpha(t)$ und teils auch ihren (per GPS bestimmten) Ort $x_\alpha(t)$ auf. Ansonsten errechnet man den Ort durch Integration der Geschwindigkeit. In jüngster Zeit werden FC-Daten auch von Navigationsgeräten erfasst und (anonymisiert) an die Hersteller gesendet. Die Messfahrzeuge können zusätzlich mit weiteren Messsensoren (z.B. Radarsensoren) ausgestattet sein, so dass sich auch Geschwindigkeits- und Abstandsunterschiede zum Vorderfahrzeug erfassen lassen. Eine derartige Ausstattung sowie die Datenauswertung sind recht kostenintensiv. Es besteht außerdem die Gefahr, dass die Daten nicht repräsentativ sind, da ausgestattete Fahrzeuge oftmals auch überdurchschnittlich leistungsfähig sind.

Beide Datenkategorien enthalten den Ort $x_\alpha(t)$ von Fahrzeugen α als Funktion der Zeit, sie unterscheiden sich aber in folgenden Aspekten:

- Während Trajektoriendaten die Orts-Zeit-Kurven $x_\alpha(t)$ aller Fahrzeuge innerhalb eines raumzeitlichen Bereichs enthalten, erhält man im Falle von FC-Daten nur Informationen über einen geringen Teil der Fahrzeuge, nämlich den der ausgestatteten *Floating Cars*.
- Im Gegensatz zu Trajektoriendaten enthalten FC-Daten meist keine Information über den genutzten Fahrstreifen.
- Teilweise sind in FC-Daten weitergehende Informationen wie Abstand zum Vorderfahrzeug, Gaspedalstellung, Bremsdruck, Informationen über gesetzte Blinker etc. enthalten. Im Prinzip können in Floating Cars alle Daten als Zeitreihen aufgezeichnet werden, die über den *CAN-Bus* (eine Schnittstelle über die alle modernen Fahrzeuge verfügen) abgerufen werden können. Derartige Informationen fehlen in den Trajektoriendaten aufgrund der im Allgemeinen optischen Datenerfassung.

2.2 Darstellung im Raum-Zeit-Diagramm

In den Abb. 2.1 und 2.2 sind zwei Beispiele von Trajektoriendaten für jeweils einen Fahrstreifen in einem *Raum-Zeit-Diagramm* aufgetragen. Als Konvention vereinbaren wir eine Auftragung des Ortes (als Ordinate) über der Zeit (Abszisse). Aus einem solchen Trajektorien-Diagramm kann man folgende Informationen entnehmen:

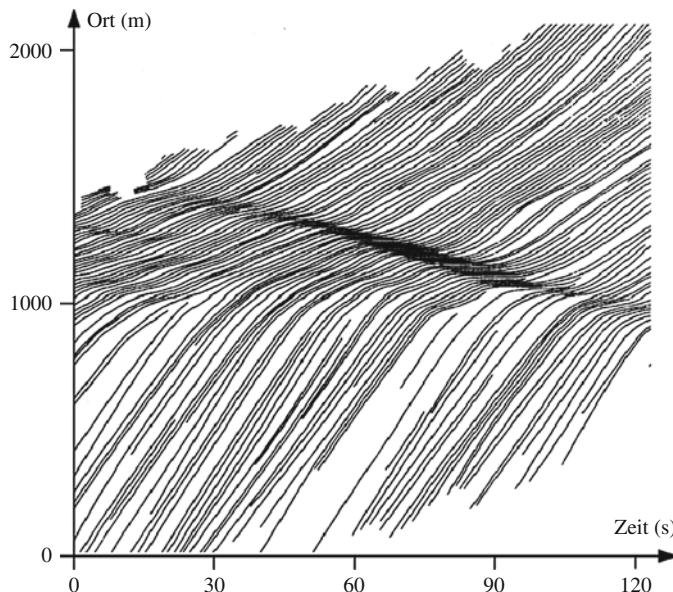


Abb. 2.1 Trajektorien von laufenden Stop-and-Go-Wellen auf einem britischen Autobahnabschnitt
(Quelle: Treiterer et al., 1970)

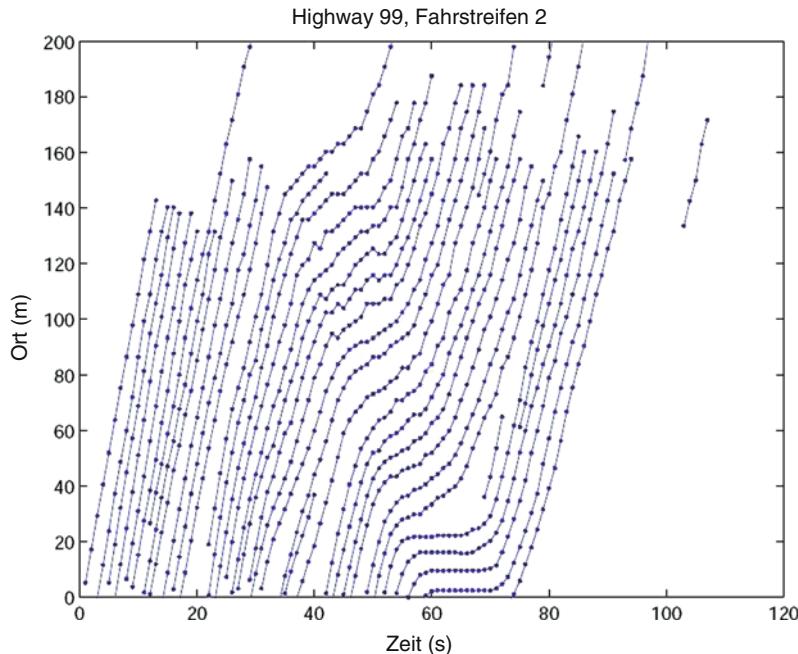


Abb. 2.2 Trajektorien von laufenden Stop-and-Go-Wellen auf dem amerikanischen Highway 99
(Quelle: www.ece.osu.edu/~coifman/shock)

- Die lokale Geschwindigkeit am Ort x zur Zeit t ist durch die Steigung der Trajektorien gegeben. Eine horizontale Trajektorie entspricht der Geschwindigkeit Null.
- Die Brutto-Folgezeit Δt_α (vgl. Abschn. 3.1) ist gleich dem horizontalen Abstand benachbarter Kurven.
- Der Verkehrsfluss lässt sich anhand seiner Definition *Zahl der einen bestimmten Ort pro Zeiteinheit passierenden Fahrzeuge* als Zahl der Trajektorien ablesen, welche ein horizontales Liniensegment kreuzen. Er ist damit gleich dem *zeitlichen Mittel* des Kehrwertes der Bruttoabstände.
- Der räumliche Bruttoabstand zweier Fahrzeuge ist gleich dem vertikalen Abstand der entsprechenden Trajektorien.
- Die Verkehrsdichte lässt sich direkt anhand ihrer Definition *Fahrzeugzahl pro Streckenlänge zu einer bestimmten Zeit* als Zahl der Trajektorien ablesen, welche ein vertikales Liniensegment kreuzen. Sie ist damit gleich dem *räumlichen Mittel* des Kehrwertes der Bruttoabstände (vgl. Abschn. 3.3).
- Das Ende einer Trajektorie entspricht einem Fahrstreifenwechsel auf einen anderen Fahrstreifen. Entsprechend zeigt der Beginn einer Trajektorie einen Wechsel von einem anderen Fahrstreifen an.
- Die Steigung einer Verkehrsverdichtung gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Staus an. Bei den in den Abb. 2.1 und 2.2 zu sehenden Verdichtungen sind die

Steigungen (Geschwindigkeiten) negativ. Es handelt sich um Stauwellen, welche den Fahrzeugen entgegenkommen.

Werden neben den longitudinalen Fahrzeugpositionen $x_\alpha(t)$ zudem die lateralen Positionen $y_\alpha(t)$ ermittelt, erhält man *2D-Trajektoriendiagramme*, aus denen auch die Dauer für das Vollziehen eines Fahrstreifenwechsels sowie seitliche Beschleunigungen ermittelt werden können.

Kann man aus Trajektoriendaten die aktuelle Reisezeit zum Durchfahren einer Strecke bestimmen? Wie würde man eine staubedingte Reisezeitverlängerung berechnen? Unter welcher zusätzlichen Annahme kann man damit die Zeitverluste aller durch den Stau fahrenden Personen abschätzen?

Übungsaufgaben

2.1 Floating-Car-Daten

In Zukunft soll ein gewisser Anteil von mit GPS-Systemen ausgestatteten Fahrzeugen (Genauigkeit: etwa 20 m) in festen Zeitabständen anonymisiert Orte und dazugehörige Zeiten an eine Verkehrszentrale senden. Könnte man mit diesen Daten (1) Trajektorien (Orts-Zeit-Linien) einzelner Fahrzeuge, (2) Orte und Zeiten von Fahrstreifenwechseln, (3) die Verkehrsdichte (Fahrzeuge pro Kilometer), (4) den Verkehrsfluss (Fahrzeuge pro Stunde), (5) die Fahrzeuggeschwindigkeit und (6) die Länge von Staus und Lage von Staufronten rekonstruieren? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

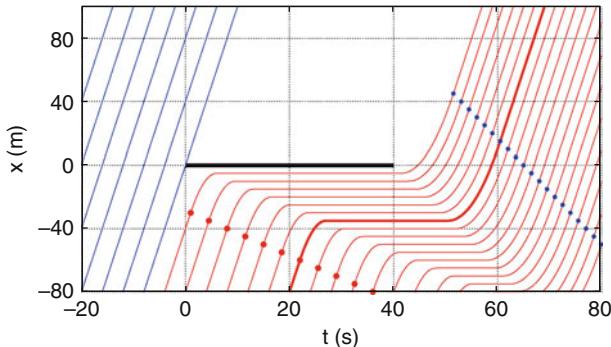
2.2 Auswertung empirischer Trajektoriendaten

Betrachten Sie das Trajektoriendiagramm [2.2](#).

- Bestimmen Sie die Verkehrsdichte (Fahrzeuge pro Strecke), den Verkehrsfluss (Fahrzeuge pro Zeit) und die Geschwindigkeit in ausgewählten raumzeitlichen Bereichen mit freiem und mit gestautem Verkehr. Sie können die Bereiche $[10 \text{ s}, 30 \text{ s}] \times [20 \text{ m}, 80 \text{ m}]$ (freier Verkehr) und $[50 \text{ s}, 70 \text{ s}] \times [20 \text{ m}, 100 \text{ m}]$ (Stau) auswerten.
- Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Stauwelle aus? Propagiert sie in oder entgegen der Fahrtrichtung?
- Welchen Zeitverlust verursacht die Stauwelle einem Fahrzeug, dessen Trajektorie bei $x = 0 \text{ m}$ zur Zeit $t \approx 50 \text{ s}$ startet?
- Schätzen Sie für den gesamten dargestellten raumzeitlichen Abschnitt die typische *Fahrstreifenwechselrate*, d.h. Fahrstreifenwechsel pro Kilometer und pro Stunde, ab. Nehmen Sie dabei an, dass in sechs Fällen Trajektorien innerhalb des Bereichs $[0 \text{ s}, 80 \text{ s}] \times [0 \text{ m}, 140 \text{ m}]$ beginnen oder enden.

2.3 Trajektoriendaten eines Verkehrsflusses mit „Störung“

Gegeben sind die Trajektoriendaten in folgender Abbildung:



1. Welche Verkehrssituation könnte hier dargestellt sein? Welche Rolle spielt der horizontale Balken?
2. Wie groß ist die Verkehrs nachfrage, d.h. der Zufluss für $t \leq 20$ s?
3. Wie groß sind die Verkehrs dichte und die Geschwindigkeit in den Bereichen freien Verkehrs strom aufwärts der „Verkehrsbehinderung“?
4. Wie groß ist die Dichte im Stau?
5. Wie groß ist der Ausfluss nach Aufhebung der Behinderung? Geben Sie auch Dichte und Geschwindigkeit des Ausflusses nach Abschluss der Beschleunigungsphase (in der Abbildung durch Punkte gekennzeichnet) an.
6. Wie groß sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Übergangszonen „freier Verkehr → Stau“ sowie „Stau → freier Verkehr“?
7. Welche Reisezeitverzögerung erfährt das zur Zeit $t = 20$ s bei $x = -80$ m einfahrende Fahrzeug durch die „Behinderung“?
8. Ermitteln Sie schließlich die Bremsverzögerung und die Beschleunigung der Fahrzeuge unter der Annahme konstanter Verzögerungen bzw. Beschleunigungen. Der Beginn der Verzögerung und das Ende der Beschleunigung sind im Diagramm gekennzeichnet.

Literaturhinweise

May, A.D.: Traffic Flow Fundamentals. Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, N.J. (1990)

Treiterer, J., et al.: Investigation of traffic dynamics by aerial photogrammetric techniques. Interim Report EES 278-3, Ohio State University, Columbus, OH (1970)

Thiemann, C., Treiber, M., Kesting, A.: Estimating acceleration and lane-changing dynamics from next generation simulation trajectory data. Transp. Res. Rec. **2088**, 90–101 (2008)

Kapitel 3

Querschnittsdaten

Das Wesen der Dinge hat die Angewohnheit, sich zu verbergen.

Heraklit

3.1 Mikroskopische Erfassung: Einzelfahrzeugdaten

Die Querschnittsdetektion, also die Messung von Verkehrsdaten an einem festen Straßenquerschnitt, kann auf vielerlei Arten erfolgen, beispielsweise pneumatisch (über die Fahrbahn gelegte Schläuche), per Radar oder optisch (Infrarotsensoren oder Lichtschranken). Die höchste Verbreitung haben *Induktionsschleifen*, die unter der Fahrbahndecke der Fahrstreifen positioniert sind. Sie detektieren, ob sich metallische Gegenstände (Fahrzeuge) über ihnen befinden oder nicht (vgl. Abb. 3.1). Eine einzelne Mess-Schleife kann für jeden Fahrstreifen lediglich folgende Größen erfassen:

- Zeitpunkt $t_\alpha = t_\alpha^0$, zu dem die Fahrzeugfront den Messquerschnitt überquert (Flanke des Spannungsabfalls in Abb. 3.1).
- Zeitpunkt t_α^1 , zu dem das Fahrzeugheck den Messquerschnitt überquert (Flanke des Spannungsanstiegs in Abb. 3.1).

Fahrzeuggeschwindigkeiten können Einfach-Induktionsschleifen jedoch nicht direkt messen. Man kann allenfalls mit Hilfe gewisser Annahmen über die mittleren Fahrzeulgängen und bei nicht zu stark schwankenden Geschwindigkeiten Mittelwerte der Geschwindigkeiten mit relativ großen Fehlern abschätzen (wie später in Abschn. 3.4 gezeigt wird).

Doppel-Induktionsschleifendetektoren verfügen über mindestens zwei Induktionsschleifen in einem festen Abstand von z.B. 1 m zueinander. Sie erlauben durch den Zeitversatz der zwei Anstiegsflanken eine direkte Messung der Geschwindigkeit v_α des Fahrzeugs α . Aus den direkt gemessenen Größen lassen sich weitere sekundäre mikroskopische Größen ermitteln (vgl. Abb. 3.2):

- Fahrzeulgänge der einzelnen Fahrzeuge α

$$l_\alpha = v_\alpha(t_\alpha^1 - t_\alpha^0). \quad (3.1)$$

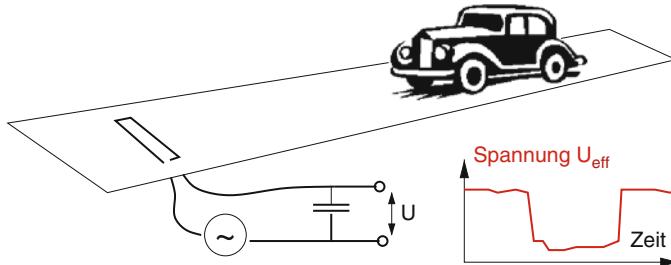


Abb. 3.1 Prinzip des Induktionsschleifendetektors. Ein elektrischer Schwingkreis (mit einer Wechselspannungsquelle, einem externen Kondensator als Kapazität und der Schleife als Induktivität) ist im „unbelegten“ Zustand „in Resonanz“, d.h. es liegt eine hohe Wechselspannung U_{eff} an. Fährt ein Fahrzeug über die Schleife, vergrößert sich aufgrund der Metallteile die Induktivität, so dass der Schwingkreis „verstimmt“ wird und die anliegende Spannung U_{eff} abnimmt

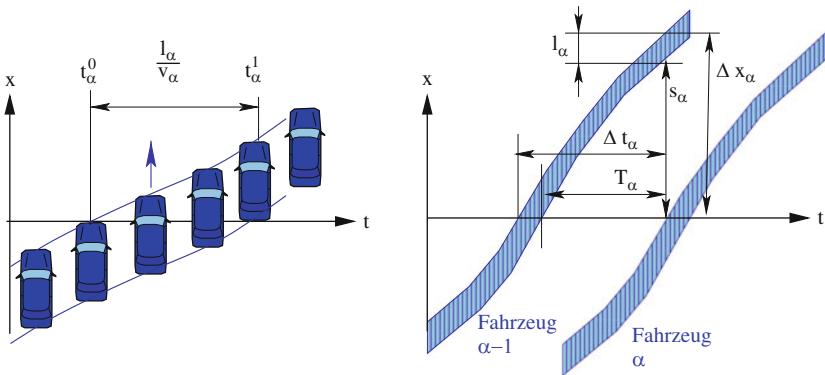


Abb. 3.2 Gewinnung von Einzelfahrzeuggrößen direkt aus dem Induktionssignal von Doppelschleifendetektoren bzw. dem Signal anderer geeigneter Querschnittsdetektoren. Die schraffierten Flächen geben den raumzeitlichen Bereich der Belegung an

- Identifizierung verschiedener *Fahrzeug-Typen* (Zweirad, PKW, LKW, etc.) anhand der Fahrzeug-Längen.
- *Brutto-Zeitlücken* zwischen aufeinander folgenden Fahrzeugen

$$\Delta t_\alpha = t_\alpha^0 - t_{\alpha-1}^0, \quad (3.2)$$

wobei das Vorderfahrzeug den niedrigeren Index ($\alpha - 1$) hat.

- *Netto-Zeitlücken*

$$T_\alpha = t_\alpha^0 - t_{\alpha-1}^1 = \Delta t_\alpha - \frac{v_{\alpha-1}}{l_{\alpha-1}}. \quad (3.3)$$

- *Bruttoabstände*

$$d_\alpha = v_{\alpha-1} \Delta t_\alpha. \quad (3.4)$$

- *Nettoabstände*

$$s_\alpha = d_\alpha - l_{\alpha-1}. \quad (3.5)$$

Dabei wird bei der Bestimmung von räumlichen Größen wie Längen und Abständen implizit eine während der Messung konstante Geschwindigkeit angenommen.

3.2 Aggregierung: Makroskopische Daten

In den meisten Fällen werden die mikroskopischen Einzelfahrzeugdaten bereits am Ort der Erfassung durch Mittelwertbildung über feste Zeitintervalle Δt aggregiert und nur die resultierenden *makroskopischen Daten*, auch *aggregierte Daten* genannt, an die Verkehrszentrale übertragen. Dies spart sowohl Bandbreite bei der Informationsübertragung als auch Speicherplatz bei der Daten-Archivierung. Die mikroskopischen Informationen gehen bei der Aggregierung verloren. Die Mittelungsintervalle liegen zwischen 20 s und 5 min. Am häufigsten wird ein Intervall Δt von 60 s verwendet. Mitteilungen über feste Fahrzeugzahlen (von z.B. $\Delta N = 50$ Fahrzeugen) werden dagegen, obwohl sie statistisch sinnvoll wären, kaum verwendet. Eine oder mehrere der folgende Größen werden an die Zentrale übertragen:

Verkehrsfluss. Unter dem *Verkehrsfluss* versteht man die Anzahl der Fahrzeuge ΔN , die einen am Ort x positionierten Querschnitt innerhalb eines Zeitintervalls Δt überqueren:

$$Q(x, t) = \frac{\Delta N}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

Der Verkehrsfluss wird meist in Einheiten von Fahrzeugen pro Stunde (Fz/h) oder Fahrzeugen pro Minute angegeben.

Belegungsgrad. Der dimensionslose *Belegungsgrad (occupancy)* gibt den zeitlichen Anteil des Mittelungsintervalls an, in dem der Detektorquerschnitt von Fahrzeugen belegt ist:

$$O(x, t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} (t_\alpha^1 - t_\alpha^0). \quad (3.7)$$

Arithmetisches Geschwindigkeitsmittel. Das *arithmetische Mittel* der Geschwindigkeit ergibt sich als Mittelwert aus den Einzelgeschwindigkeiten der ΔN Fahrzeuge, die den Querschnitt bei x im Mittelungsintervall überqueren:

$$V(x, t) = \langle v_\alpha \rangle = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} v_\alpha. \quad (3.8)$$

Die Verwendung des Bezeichners V für die makroskopische Geschwindigkeit dient der Unterscheidung von (mikroskopischen) Fahrzeuggeschwindigkeiten v_α einzelner Fahrzeuge. Im Zusammenhang mit Messungen bezeichnet $\langle \cdot \rangle$ das arithmetische Mittel. Bei statistischen Überlegungen (Abschn. 3.3) bezeichnet es den *Erwartungswert* einer schwankenden Größe.

Harmonisches Geschwindigkeitsmittel. Das *harmonische Mittel* der Geschwindigkeit ist definiert durch

$$V_H(x, t) = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{v_\alpha} \right\rangle} = \frac{\Delta N}{\sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} \frac{1}{v_\alpha}}. \quad (3.9)$$

Geschwindigkeitsvarianz. Die *Geschwindigkeitsvarianz*

$$\text{Var}(v) = \sigma_v^2(x, t) = \langle (v_\alpha - \langle v_\alpha \rangle)^2 \rangle = \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2 \quad (3.10)$$

dient als Maß für die „Streuung“ der Geschwindigkeiten innerhalb des Aggregationsintervalls. Die Streuung ist durch die Standardabweichung σ_v , also die Quadratwurzel der Varianz, gegeben. Der dimensionslose *Variationskoeffizient* σ_v/V gibt die relativen Schwankungen an (vgl. auch Abb. 9.7).

Diskutieren Sie den Vorteil von Mittelungen über feste Fahrzeugzahlen anhand des Geschwindigkeitsmittels im Falle stark schwankender Verkehrsstrome.

3.3 Schätzung räumlicher Größen aus Querschnittsdaten

Während die makroskopischen Größen Fluss Q , Belegungsgrad O und, im Falle von Doppelinduktionsschleifen, das zeitliche Mittel V der Geschwindigkeit direkt zu bestimmen sind, können weitere wichtige Größen nur unter bestimmten Annahmen geschätzt werden. Bei der Bestimmung der *Verkehrsdichte* besteht das Problem darin, dass die Dichte – die Zahl der Fahrzeuge auf einem Streckenabschnitt – als *räumliches* Mittel zu einer festen Zeit definiert ist, während Querschnittsdetektoren nur *zeitliche* Mittel an einem festen Ort, eben dem Querschnitt, liefern. Im Gegensatz zu Fluss und Dichte kann die makroskopische Geschwindigkeit sowohl als zeitliches als auch als räumliches Mittel aufgefasst werden. Im Allgemeinen sind beide Definitionen selbst „im Mittel“ nicht gleichwertig.

3.3.1 Verkehrsdichte

Die Verkehrsdichte $\rho(x, t)$ lässt sich mit Hilfe der „hydrodynamischen Formel“ aus dem Fluss Q und der Geschwindigkeit V abschätzen:

$$\rho(x, t) = \frac{Q(x, t)}{V(x, t)} = \frac{\text{Verkehrsfluss}}{\text{Geschwindigkeit}}. \quad (3.11)$$

Problematisch bei der Anwendung ist jedoch, dass diese Formel gemäß der Dichtedefinition (Abschn. 2.2) nur für *räumliche* Geschwindigkeitsmittel V korrekt ist, nicht aber für die am Querschnitt gemessenen *zeitlichen* Mittelwerte. Vielmehr führt die Umrechnung von zeitlichen in räumliche Größen zu systematischen Fehlern, welche nun anhand Abb. 3.3 verdeutlicht werden. Durch die höhere „Begegnungsfrequenz“ der schnelleren Fahrzeuge mit einem stationären Messquerschnitt ist das messbare zeitliche Geschwindigkeitsmittel größer als das eigentlich erforderliche räumliche Mittel. In Abb. 3.3 ist die Begegnungsrate (bzw. der Fluss) auf beiden Fahrstreifen gleich, so dass sich ein zeitliches Mittel $\langle v_\alpha \rangle = 108 \text{ km/h}$ ergibt. Das räumliche Mittel ist jedoch offensichtlich

$$\frac{2}{3} 72 \text{ km/h} + \frac{1}{3} 144 \text{ km/h} = 96 \text{ km/h}.$$

Damit wird hier die Dichte mit der hydrodynamischen Formel (3.11) um den Faktor 8/9 zu gering geschätzt.

Zur Ermittlung einer besseren Schätzung der Dichte aus Querschnittsdaten gehen wir von der eigentlichen Definition der Dichte, „Fahrzeuge pro Strecke“, aus. Als Funktion mikroskopischer Größen formuliert, ergibt dies den Kehrwert des mittleren Bruttoabstandes der betrachteten Fahrzeuge,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\langle d_\alpha \rangle} = \frac{\Delta N}{\sum_\alpha d_\alpha}. \quad (3.12)$$

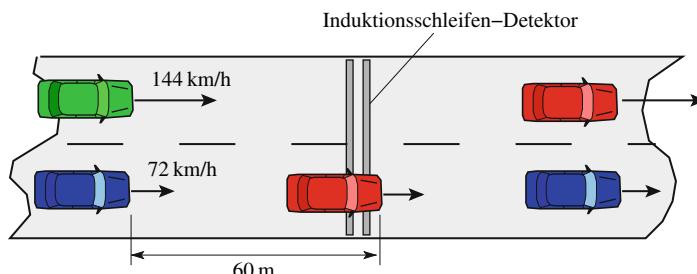


Abb. 3.3 Doppelte Geschwindigkeit bei gleicher Brutto-Folgezeit auf dem linken Fahrstreifen

Ferner drücken wir den Fluss („Fahrzeuge pro Zeiteinheit“) durch mikroskopische Größen aus, d.h. durch den Erwartungswert der Brutto-Folgezeiten. Bei gegebenem Zeitintervall

$$\Delta t = \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} \Delta t_\alpha = \Delta N \langle \Delta t_\alpha \rangle$$

gilt für den Fluss exakt

$$Q = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{\langle \Delta t_\alpha \rangle}. \quad (3.13)$$

Es gibt zwei Arten, die Dichte als Funktion der messbaren Größen Δt_α und v_α auszudrücken. Diese werden im Folgenden diskutiert.

3.3.1.1 Herleitung aus dem Erwartungswert der Dichte

Wir gehen von der Definition des Erwartungswerts der Dichte (3.12) aus und setzen für die rechte Seite der Gleichung die Abschätzung (3.4) ein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \langle d_\alpha \rangle = \langle v_{\alpha-1} \Delta t_\alpha \rangle \\ &\approx \langle v_\alpha \Delta t_\alpha \rangle \\ &= \langle v_\alpha \rangle \langle \Delta t_\alpha \rangle + \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha) \\ &= \frac{V}{Q} + \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha). \end{aligned}$$

Die Umkehrung ergibt

$$\boxed{\rho = \frac{Q}{V} \left(\frac{1}{1 + \frac{Q}{V} \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha)} \right)}. \quad (3.14)$$

Hierbei wurde die *Kovarianz* eingeführt, welche für allgemeine Zufallsgrößen x und y durch

$$\text{Cov}(x, y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (3.15)$$

definiert ist. Die Kovarianz ist positiv, wenn die beiden Größen „positiv korreliert“ sind, also eine Zunahme von x tendenziell mit einer Zunahme von y einhergeht. Das Maß eines linearen Zusammenhangs wird dabei durch den *Korrelationskoeffizienten*

$$r_{x,y} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.16)$$

quantifiziert, der Werte von -1 (exakt entgegengesetzter Zusammenhang) über 0 (kein *linearer* Zusammenhang) bis 1 (exakte Proportionalität) annehmen kann. Damit kann man Gl. (3.14) auch in der *Wardrop-Formel* ausdrücken¹:

$$\rho = \frac{Q}{V} \left(\frac{1}{1 + \frac{\sigma_V}{V} \frac{Q}{\sigma_Q} r_{v_\alpha, \Delta t_\alpha}} \right). \quad (3.17)$$

Die reale Dichte ist also gleich der üblicherweise verwendeten Näherung „Fluss geteilt durch arithmetisches Geschwindigkeitsmittel“, multipliziert mit einem Faktor, der sowohl die Korrelation $r_{v, \Delta t}$ zwischen den Brutto-Zeilücken und der Geschwindigkeit als auch die Variationskoeffizienten (relativen Schwankungen) σ_V / V und σ_Q / Q enthält. Im freien Verkehr ist diese Korrelation offensichtlich nahe Null, da jeder Fahrer unabhängig von den anderen seine eigene Geschwindigkeit wählen kann. In gebundenem Verkehr nimmt die Bruttozeitlücke Δt_α hingegen in der Regel mit *sinkender* Geschwindigkeit zu und wird für stehende Fahrzeuge unendlich. Damit ist die Korrelation negativ und der Nenner in Gl. (3.17) kleiner als 1 . Bei gebundenem Verkehr wird also die wahre Dichte durch die Abschätzung Q/V systematisch *unterschätzt* (siehe auch Abb. 4.10).

3.3.1.2 Herleitung aus dem Erwartungswert des Flusses

Eine weitere Möglichkeit, die Dichte durch direkt messbare Größen auszudrücken, geht von der in diesem Abschnitt hergeleiteten Erwartungswert-Definition (3.13) für den Fluss aus. Wieder wird für die rechte Seite die entsprechende Abschätzung (3.4) eingesetzt:

$$\frac{1}{Q} = \langle \Delta t_\alpha \rangle = \left\langle \frac{d_\alpha}{v_{\alpha-1}} \right\rangle \quad (3.18)$$

$$\approx \left\langle \frac{d_\alpha}{v_\alpha} \right\rangle = \langle d_\alpha \rangle \left\langle \frac{1}{v_\alpha} \right\rangle + \text{Cov} \left(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha} \right) \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{\rho V_H} + \text{Cov} \left(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha} \right). \quad (3.20)$$

Nach Umstellung ergibt sich für die Dichte

$$\rho = \frac{Q}{V_H} \left(\frac{1}{1 - Q \text{Cov}(d_\alpha, 1/v_\alpha)} \right) \quad (3.21)$$

¹ Nicht zu verwechseln mit dem Wardrop-Gleichgewicht der Verkehrsplanung, welches einem Nutzer-Gleichgewicht bei der Routenwahl entspricht.

mit dem harmonischen Geschwindigkeitsmittel V_H , definiert in Gl. (3.9), das die kleinen Geschwindigkeiten stärker gewichtet. Da der Abstand d_α in der Regel mit v_α steigt und daher mit $1/v_\alpha$ sinkt, ist die Kovarianz $\text{Cov}(d_\alpha, 1/v_\alpha)$ negativ und der Korrekturfaktor in Gl. (3.21) kleiner als 1. Damit überschätzt der Ausdruck $\frac{Q}{V_H}$ im Allgemeinen die „wahre“ Dichte.

3.3.1.3 Diskussion der Näherungen für die Dichte

In der Praxis setzt man die Kovarianzen in den Ausdrücken (3.17) und (3.21) näherungsweise gleich Null und verwendet die auch für mehrere Fahrstreifen anwendbaren Ausdrücke

$$\rho^{(1)} = \frac{Q}{V} \quad \text{oder} \quad \rho^{(2)} = \frac{Q}{V_H}. \quad (3.22)$$

Warum ist bei völlig stehendem Verkehr die Bestimmung der Dichte mit stationären Detektoren mit keinem Verfahren möglich?

Für die Fehler dieser beiden Schätzer gelten folgende Aussagen:

1. Im Fall identischer Fahrzeuggeschwindigkeiten v_α ist $V = V_H$ und dementsprechend $\rho = \rho^{(1)} = \rho^{(2)}$.
2. Falls die Brutto-Folgezeiten Δt_α aller Fahrzeuge gleich sind, ist für beliebige Geschwindigkeiten und Abstände $\text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha) = 0$. Damit gilt $\rho = \rho^{(1)} = Q/V$ exakt (vgl. Abb. 3.3). Im Allgemeinen unterschätzt die Formel $\rho^{(1)} = Q/V$ die tatsächliche Dichte ρ , da $\text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha)$ in der Regel negativ ist.
3. Falls aber die räumlichen Abstände d_α aller Fahrzeuge gleich sind, gilt für beliebige Geschwindigkeiten und Folgezeiten $\text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha}) = 0$ und somit $\rho = \rho^{(2)} = Q/V_H$ exakt (vgl. Abb. 3.3). Im Allgemeinen überschätzt die Formel $\rho^{(2)} = Q/V_H$ die tatsächliche Dichte, da $\text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha})$ in der Regel ebenfalls negativ ist.

3.3.2 Räumliches Geschwindigkeitsmittel

Das räumliche bzw. momentane Geschwindigkeitsmittel $\langle V(t) \rangle$ ist das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Fahrzeuge, welche sich zur Zeit t in dem Streckenabschnitt befinden, auf welchen sich die Mittelung bezieht (in Abb. 3.4 der Abschnitt der Länge L um den Detektor):

$$\langle V(t) \rangle = \frac{1}{n(t)} \sum_{\alpha=1}^{n(t)} v_\alpha(t). \quad (3.23)$$

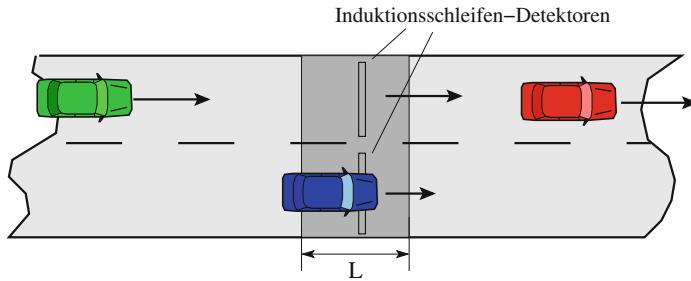


Abb. 3.4 Zur Herleitung der Formel (3.24) für das räumliche bzw. momentane Geschwindigkeitsmittel

Im allgemeinen Fall (mehrere Fahrstreifen und beliebige Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) ist das räumliche (momentane) Mittel nicht sinnvoll aus Detektordaten zu bestimmen, da sich während des Aggregierungsintervalls von z.B. $\Delta t = 1 \text{ min}$ die Identität und Zahl der zur Mittelung nach Gl. (3.23) herangezogenen Fahrzeuge ändert. Insbesondere kann diese Zahl auch $n(t) = 0$ sein.

Eine geeignete Definition erhält man, wenn das momentane Mittel zusätzlich zeitlich über das Aggregierungsintervall Δt gemittelt wird und außerdem der relevante Streckenabschnitt so klein gemacht wird, dass sich die Fahrzeug-Geschwindigkeit während der Überfahrtzeit $\tau_\alpha \approx L/v_\alpha$ kaum ändert und sich weiterhin zu den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ keine Fahrzeuge auf dem Streckenabschnitt befinden. Dann erhält man durch Mittelung von Gl. (3.23) folgenden Ausdruck²:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{\int_t^{t+\Delta t} n(t') \langle V(t') \rangle dt'}{\int_t^{t+\Delta t} n(t') dt'} = \frac{\sum_\alpha \int_{t_\alpha}^{t_\alpha + \tau_\alpha} v_\alpha(t') dt'}{\sum_\alpha \tau_\alpha} \\ &\approx \frac{\sum_\alpha \tau_\alpha v_\alpha}{\sum_\alpha \tau_\alpha} \approx \frac{n L}{\sum_\alpha L/v_\alpha} \\ &= \frac{n}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{v_\alpha}}, \end{aligned}$$

wobei n die Gesamtzahl der innerhalb Δt über den Detektor gefahrenen Fahrzeuge bezeichnet (nicht zu verwechseln mit der momentanen Fahrzeugzahl $n(t)$ im Bezugsabschnitt) und v_α die jeweils dort gemessene Geschwindigkeit ist.

² Man beachte, dass der Nenner dieser Gleichungen gleich der Gesamtreisezeit (Fz-Minuten) der Fahrzeuge im betrachteten raumzeitlichen Intervall ist.

Die zeitlich über ein Aggregierungsintervall und räumlich über einen Streckenabschnitt gemittelte Geschwindigkeit ist also durch das *harmonische Mittel* gegeben:

$$\langle V \rangle = V_H. \quad (3.24)$$

Häufig wird das harmonische Geschwindigkeitsmittel V_H auch, etwas weniger exakt, direkt mit dem momentanen Mittel gleichgesetzt.

3.4 Geschwindigkeit aus Einfach-Schleifendetektoren

Mit Hilfe von Einfach-Induktionsschleifen lassen sich für jedes Fahrzeug nur die Zeiten t_α^0 und t_α^1 zu Beginn und Ende der Belegung (Überfahrt über den Detektor) direkt messen. Bei Kenntnis der Fahrzeulgängen l_α wäre die Geschwindigkeit aus $v_\alpha = l_\alpha / (t_\alpha^1 - t_\alpha^0)$ zu bestimmen. Diese kann aber mit Einfachschleifen nicht ermittelt werden. Unter Annahme einer *mittleren* Fahrzeulgänge $\langle l_\alpha \rangle$ kann man aus der Definition der Belegung (3.7) dennoch eine Näherung für die mittlere Fahrzeuggeschwindigkeit herleiten:

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha} (t_\alpha^1 - t_\alpha^0) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha} \frac{l_\alpha}{v_\alpha} \\ &= \frac{n}{\Delta t} \left[\langle l_\alpha \rangle \left\langle \frac{1}{v_\alpha} \right\rangle + \text{Cov} \left(l_\alpha, \frac{1}{v_\alpha} \right) \right] \\ &= Q \left[\langle l_\alpha \rangle \left\langle \frac{1}{v_\alpha} \right\rangle + \text{Cov} \left(l_\alpha, \frac{1}{v_\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nach Umstellung ergibt sich für $V_H = 1/\langle 1/v_\alpha \rangle$:

$$V_H = \frac{Q \langle l_\alpha \rangle}{O \left[1 - \frac{Q}{O} \text{Cov}(l_\alpha, 1/v_\alpha) \right]}. \quad (3.25)$$

Da im Stau alle Fahrzeuge eine annähernd gleiche Geschwindigkeit haben, ist für hohe Verkehrsdichten die Kovarianz zwischen Fahrzeulgängen und inversen Geschwindigkeiten nahezu Null und man erhält mit dem Quotienten $Q \langle l_\alpha \rangle / O$ direkt eine Abschätzung der *harmonischen* Geschwindigkeit V_H . In Situationen freien Verkehrs hingegen fahren längere Fahrzeuge (LKW) meist langsamer als kürzere (PKW), so dass die Korrelation $r_{l_\alpha, 1/v_\alpha}$ positiv ist und die Näherung $Q \langle l_\alpha \rangle / O$ das harmonische Geschwindigkeitsmittel systematisch unterschätzt. Da das harmonische Mittel aber immer höher als das arithmetische Mittel ist, gibt $Q \langle l_\alpha \rangle / O$ mög-

licherweise für freien Verkehr eine gute Näherung für das arithmetische Mittel an. Für feste Fahrzeuglängen und *beliebige* Geschwindigkeiten ist diese einfache Beziehung zwischen Belegung und harmonischem Geschwindigkeitsmittel ebenfalls exakt. Für all diese Fälle kann man auch die Verkehrsdichte aus der Belegung einfach schätzen und es gilt

$$V_H = \frac{Q}{\tilde{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho} = \frac{O}{\langle l_\alpha \rangle}. \quad (3.26)$$

Zur Anwendung dieser Formeln muss nur unabhängig die mittlere Fahrzeuglänge $\langle l_\alpha \rangle$ bekannt sein.

Übungsaufgaben

3.1 Daten-Aggregierung an einem Querschnitt

Gegeben ist ein 30 s langer Abschnitt von Einzelfahrzeugdaten eines Detektorquerschnitts gemäß folgender Tabelle:

Zeit (in s)	Geschwindigkeit (in m/s)	Fahrstreifen (1=rechts, 2=links)	Fahrzeuglänge (in m)
2	26	1	5
7	24	1	12
7	32	2	4
10	32	2	5
12	29	1	4
18	28	1	4
20	34	2	5
21	22	1	15
25	26	1	3
29	38	2	5

1. Berechnen Sie durch Aggregierung den für dieses Intervall gültigen makroskopischen Verkehrsfluss und die makroskopische Geschwindigkeit (arithmetisches Mittel) getrennt für beide Fahrstreifen.
2. Bestimmen Sie für jeden Fahrstreifen die Dichte unter der (für freien Verkehr realistischen) Annahme, dass es keine Korrelation zwischen den Geschwindigkeiten und zeitlichen Abständen zweier aufeinanderfolgender Fahrzeuge gibt.
3. Bestimmen Sie nun Fluss, Geschwindigkeit und Dichte der gesamten Richtungsfahrbahn auf Höhe des Querschnitts.
4. Wie hoch ist der LKW-Anteil auf dem rechten Fahrstreifen und insgesamt?

3.2 Bestimmung makroskopischer Größen aus Einzelfahrzeug-Daten

Auf einer zweistreifigen Autobahn fahren die Fahrzeuge auf beiden Fahrstreifen im Bruttoabstand von 60 m, links mit einer Geschwindigkeit von 144 km/h und rechts

mit 72 km/h. Sie werden von einem stationären Detektor erfasst (vgl. Abb. 3.3). Als Aggregierungsintervall wird $\Delta t = 60$ s verwendet.

1. Welche Brutto-Zeitlücken Δt_α haben die Fahrzeuge auf beiden Fahrstreifen? Wie groß sind jeweils die Netto-Zeitlücken, wenn alle Fahrzeuge 5 m lang sind?
2. Ermitteln Sie den Verkehrsfluss, den Belegungsgrad, das arithmetische und das harmonische Mittel der Geschwindigkeiten (i) für eine fahrstreifenaufgelöste Detektion und (ii) für den Fall, dass ein Detektor beide Fahrstreifen erfasst. Für welches der Geschwindigkeitsmittel gilt, dass die Geschwindigkeit über beide Fahrstreifen das *arithmetische* Mittel der fahrstreifenaufgelösten Geschwindigkeiten ist?
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvarianz.
4. Zeigen Sie, dass für die auf die gesamte Richtungsfahrbahn bezogene Geschwindigkeitsvarianz σ_V^2

$$\sigma_V^2 = p_1 \left(\sigma_{V1}^2 + (V_1 - V)^2 \right) + (1 - p_1) \left(\sigma_{V2}^2 + (V_2 - V)^2 \right)$$

gilt, wobei $p_1 = \Delta n_1 / (\Delta n_1 + \Delta n_2)$ den Anteil der im Zeitintervall Δt auf dem rechten Fahrstreifen detektierten Fahrzeuge, σ_{V1}^2 bzw. σ_{V2}^2 die Einzelvarianzen der Geschwindigkeiten des rechten bzw. linken Fahrstreifens, V_1 und V_2 die entsprechenden arithmetischen Mittel und $V = p_1 V_1 + (-p_1) V_2$ das Mittel über beide Fahrstreifen bezeichnet. Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck für $p_1 = 1/2$?

Literaturhinweise

- Leutzbach, W.: Introduction to the Theory of Traffic Flow. Springer, Berlin (1988)
 Helbing, D.: Traffic and related self-driven many-particle systems. Rev. Modern Phys. **73**, 1067–1141 (2001)
 Cassidy, M.J.: Traffic flow and capacity. International series in operations research & management science. In: Handbook of Transportation Science, 155–191. Springer, New York , NY (2003)

Kapitel 4

Darstellung von Querschnittsdaten

Das wunderbare am Verkehrsfluss ist, dass er sich ohne Aufwand überall und jederzeit aufstauen lässt.

Siegfried Wache

4.1 Zeitreihen makroskopischer Größen

Trägt man die an einem Querschnitt gemessenen und aggregierten Größen über der Zeit auf, erhält man *Zeitreihen*. Zeitreihen von Fluss, Geschwindigkeit und Dichte über ein Zeitintervall von wenigen Stunden geben Aufschluss über Verkehrszusammenbrüche, Art des Staus (Stillstand oder zähfließender Verkehr) und den Flussabfall nach einem Verkehrszusammenbruch (engl. *capacity drop*), vgl. Abb. 4.1. Zeitreihen des Verkehrsflusses über einen Tag, auch *Tagesganglinien* genannt, geben Aufschluss über die Verkehrsnachfrage, vgl. Abb. 4.2. Man beachte, dass verschiedene Wochentage charakteristische Tagesganglinien aufweisen. Typischerweise kann man zwischen Montag, Dienstag-Donnerstag, Freitag sowie Samstag und Sonntag unterscheiden. Ferien- und Feiertage sowie „Brückentage“ gelten als Sonderfälle. Tagesganglinien gehören allerdings in den Bereich der Verkehrsplanung und werden hier nicht weiter betrachtet.

Bei der Interpretation der Staudynamik anhand von einzelnen Zeitreihen sollte man sich aber vor Fehlinterpretationen hüten, wie die folgende Aufgabe verdeutlichen soll:

Warum kann man von der in Abb. 4.1 gezeigten Zeitreihe nicht schließen, dass der Zusammenbruchszeitpunkt des Verkehrs etwa um 7:00 Uhr liegt? Kann man aus der Abbildung wenigstens folgern, dass die Fahrzeuge im Bereich der Detektorposition im Zeitbereich um 7:00 Uhr abbremsen oder dass die Fahrzeuge um etwa 8:30 Uhr an der Detektorposition wieder beschleunigen? Wenn nicht, was könnten für alternative Situationen vorliegen?

Lösung. Mit nur einer Geschwindigkeits-Zeitreihe, also Informationen von lediglich einem Querschnitt, ist keine eindeutige Aussage über den Zeitpunkt des Verkehrszusammenbruchs oder über die Art des Staus möglich. Die zwei möglichen *raumzeitlichen* Verkehrssituationen sind in der Abb. 4.3 skizziert (vgl. auch

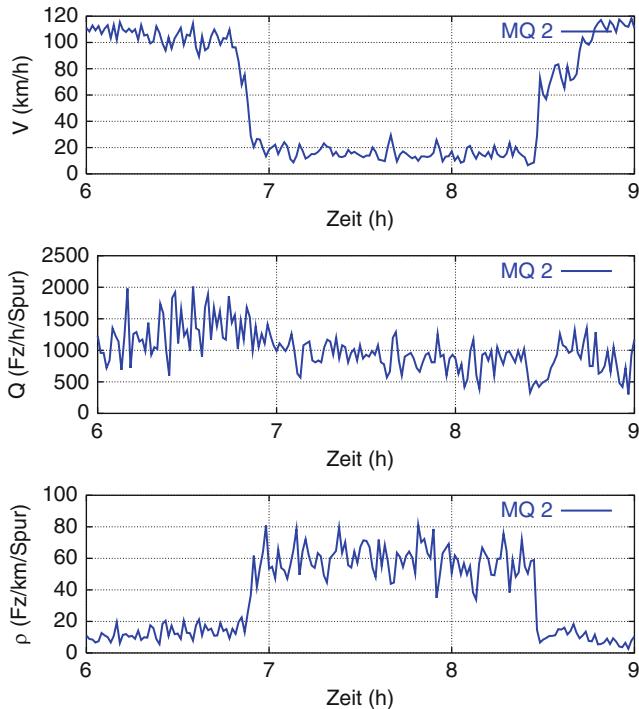


Abb. 4.1 Zeitreihen der arithmetisch gemittelten Geschwindigkeit V , des Flusses Q und der geschätzten Dichte $\rho = Q/V$ (siehe Abschn. 3.3.1) von 1-Minuten-Daten

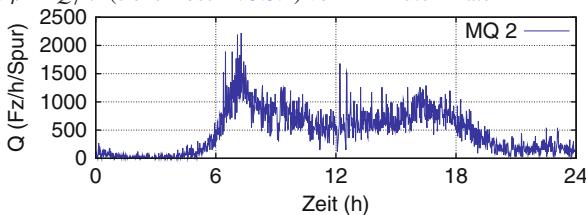


Abb. 4.2 Typische Tagesganglinie des Verkehrsflusses bzw. der Verkehrsnachfrage an einem Werktag (Mittwoch)

Kap. 17): Entweder handelt es sich um einen Stau an einer *permanenten Engstelle* (z.B. einer Auffahrt), bei der die *stromabwärtige Staufront* stationär bleibt, oder die Engstelle ist *temporär* (z.B. verursacht durch einen Unfall), so dass sich nach Auflösung der Engstelle die *stromabwärtige Staufront* entgegen der Fahrtrichtung der Fahrzeuge bewegt.¹ In beiden Fällen bricht der Verkehr deutlich vor 7:00 Uhr (an einem Ort weiter stromabwärts) zusammen.

¹ Als *stromaufwärtige Staufront* bezeichnen wir den Übergang vom freien Verkehr in den Stau, d.h. aus Sicht eines Autofahrers die Einfahrt in den Stau. Der Übergangsbereich vom Stau in den freien

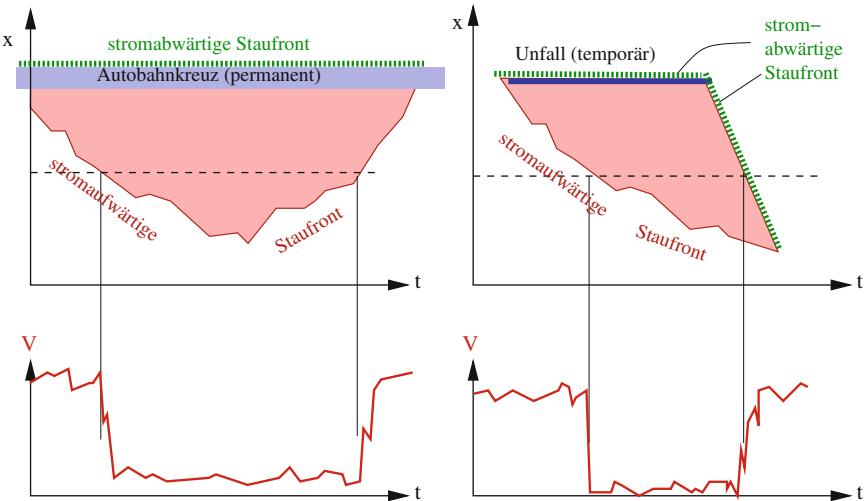


Abb. 4.3 Schematische Zeitreihen der Geschwindigkeit an einem Querschnitt und welche Verkehrssituationen damit verbunden sein können

Nach Abb. 4.3 handelt es sich beim Geschwindigkeitsabfall kurz vor 7:00 Uhr um eine stromaufwärtige Staufront, die sich entgegen der Fahrtrichtung der Fahrzeuge bewegt (der Stau wächst in stromaufwärtiger Richtung). Alternativ wäre eine in Fahrtrichtung wandernde stromabwärts wandernde Staufront denkbar (z.B. verursacht durch einen Schwerlasttransporter bzw. *moving bottleneck*). Diese ist jedoch aus Gründen der Verkehrsdynamik unwahrscheinlich. Daher nehmen wir hier an, dass die Fahrzeuge bremsen.

Beim Anstieg der Geschwindigkeit gegen 8:30 Uhr sind folgende zwei Situationen möglich: (i) Es handelt sich um eine stromabwärts wandernde stromaufwärtige Staufront, d.h. die Ausdehnung des Staus verringert sich. Dies bedeutet, dass die Fahrzeuge kurz nach dem Passieren des Querschnitts *bremsen*, während die Detektorzeitreihe einen *Anstieg* registriert. (ii) Als Alternative kommt auch eine stromaufwärts wandernde stromabwärts wandernende Staufront in Betracht. Eine solche Situation entsteht beispielsweise, wenn eine temporäre staufverursachende Engstelle (unfallbedingte Fahrstreifensperrung) aufgehoben wird oder wenn eine Ampel grün wird und sich die Warteschlange dahinter in Bewegung setzt. In diesem Fall *beschleunigen* die Fahrzeuge. In beiden Situationen kann die Geschwindigkeit dieser Staufront direkt aus dem *Fundamentaldiagramm* hergeleitet werden (vgl. Abschn. 4.4 sowie Teil II).

Verkehr (d.h. aus Fahrersicht die Ausfahrt aus dem Stau) wird als *stromabwärts Staufront* bezeichnet. Dagegen sind die Begriffe „Stauanfang“ und „Stauende“ nicht eindeutig.

4.2 Geschwindigkeits-Dichte-Relation

Werden die aggregierten Geschwindigkeitswerte über der Verkehrsdichte aufgetragen, ergibt sich ein *Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm* (vgl. Abb. 4.4). Mit wachsender Dichte nimmt die mittlere Geschwindigkeit ab. Weiterhin bekommt man einen Überblick über das mittlere Fahrverhalten eines *Fahrer-Fahrzeug-Kollektivs* bei verschiedenen Verkehrsdichten und unter externen Einflüssen wie Tempolimits, Wetterbedingungen etc.

Bei sehr geringen Verkehrsdichten werden die Fahrer in der Regel von anderen Verkehrsteilnehmern nicht beeinflusst. Eine durch die Datenpunkte gelegte *Fitkurve* gibt daher für die Extrapolation $\rho \rightarrow 0$ die mittlere *freie Geschwindigkeit* V_0 des Fahrerkollektivs an (vgl. Abb. 4.5). Diese Geschwindigkeit ist das Minimum aus (i) der tatsächlich gewünschten Geschwindigkeit der Fahrer, (ii) der durch die Motorisierung möglichen Geschwindigkeit der Fahrzeuge (v.a. bei LKW am Berg relevant) und ggf. (iii) einer von einem Tempolimit extern vorgegebenen Geschwindigkeit (zuzüglich einer mittleren Überschreitung). Häufig wird V_0 auch direkt als *Wunschgeschwindigkeit* bezeichnet.

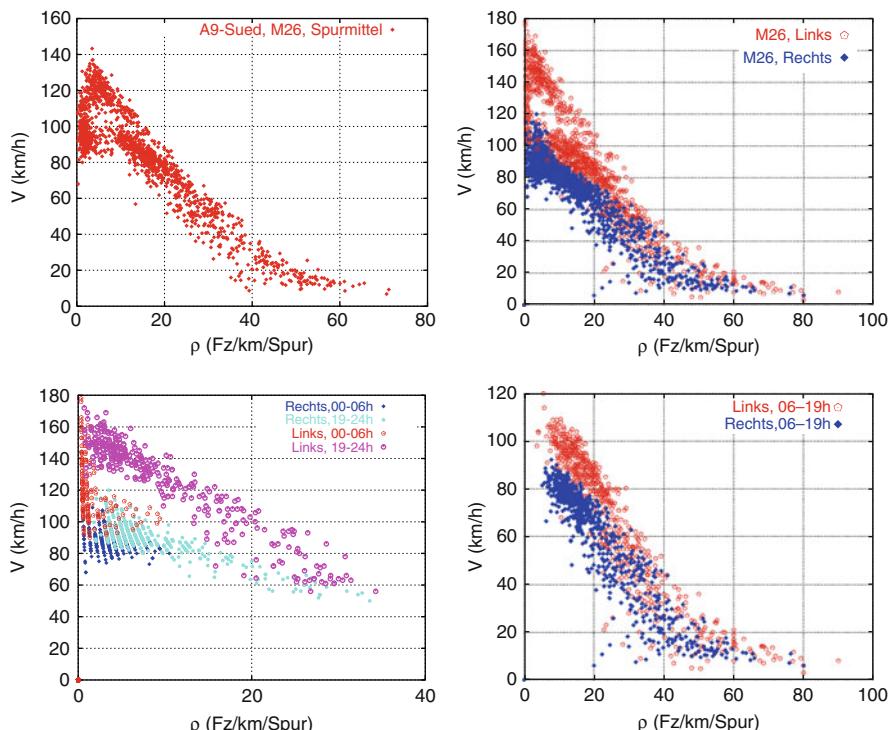


Abb. 4.4 Geschwindigkeits-Dichte-Relationen aus 1-Minuten-Daten von der A9 Nürnberg-München. Links oben: Mittel über alle Fahrstreifen; rechts oben: fahrstreifenaufgelöst; links unten: 19:00 bis 6:00 Uhr; rechts unten: 6:00 bis 19:00 Uhr

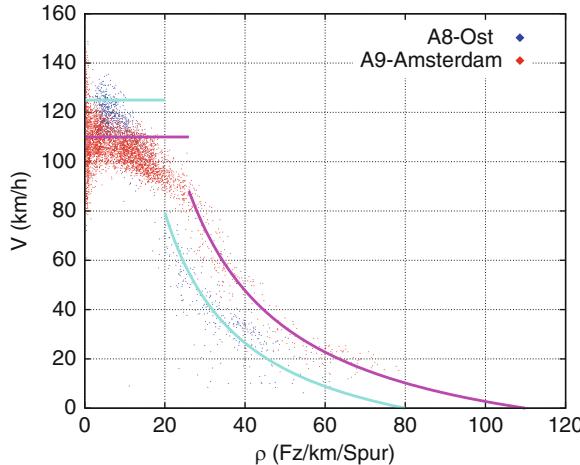


Abb. 4.5 Fahrstreifengemittelte Geschwindigkeits-Dichte-Diagramme für Abschnitte der holländischen A9 von Haarlem nach Amsterdam und der deutschen A8-Ost im Bereich des Irschenbergs

Um aus empirischen Daten eine untere Schranke für die Verteilung der Wunschgeschwindigkeiten eines Fahrerkollektivs zu erhalten, kann man die Geschwindigkeitsverteilungen von Einzelfahrzeugdaten (vgl. Abschn. 3.1) bei geringen Dichten heranziehen (siehe Abb. 4.6). Die Verteilung der Geschwindigkeiten auf dem linken und mittleren Fahrstreifen ist symmetrisch und annähernd gaußförmig, wäh-

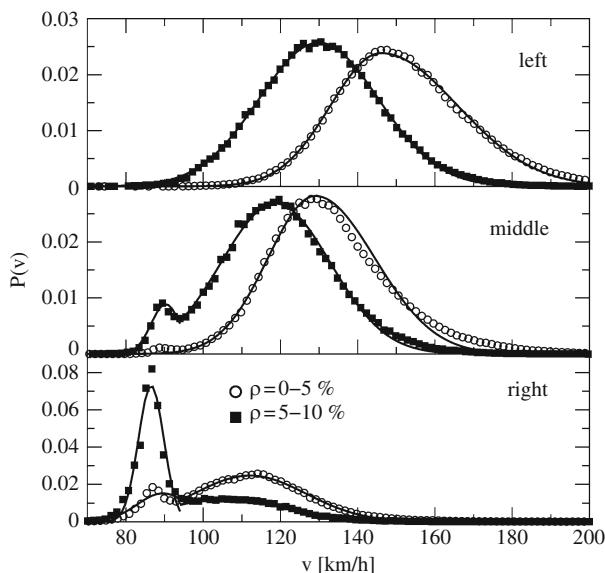


Abb. 4.6 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten $P(v)$ bei sehr geringen Dichten auf der Autobahn A3 (drei Fahrstreifen pro Richtung) (Quelle: Knospe et al., 2002)

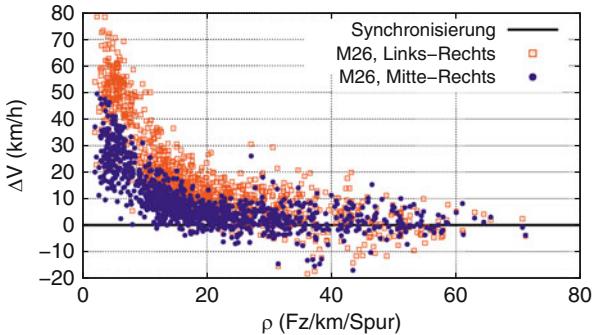


Abb. 4.7 Geschwindigkeitsdifferenz zwischen benachbarten Fahrstreifen (A9-Süd bei München)

rend auf dem rechten Fahrstreifen die Verteilung *bimodal* (doppelgipflig) ist. Dies lässt sich durch die Überlagerung der Geschwindigkeitsverteilungen von PKW und LKW erklären. In der Abb. 4.7 sind die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen verschiedenen Fahrstreifen aufgetragen. Für höhere Verkehrsichten gleichen sich die Geschwindigkeitsunterschiede bezüglich der Fahrstreifen an, so dass man von *Geschwindigkeits-Synchronisierung* spricht.

Bei der Interpretation der Geschwindigkeits-Dichte-Diagramme ist zu beachten, dass durch die Elimination der Zeit möglicherweise *heterogene Fahrerkollektive* sowie unterschiedliche äußere Verhältnisse betrachtet werden. Beispiele hierfür sind unterschiedliche LKW-Anteile zu unterschiedlichen Tageszeiten, verschiedene Witterungsbedingungen (hell-dunkel, trocken-nass) und zeitabhängige Tempolimits, die auf Abschnitten mit Verkehrsbeeinflussungsanlagen aktiviert werden können. Dies gilt ebenso für die im Abschn. 4.4 zu diskutierenden Fluss-Dichte-Diagramme.

- (1) Im linken oberen Plot des (V, ρ) -Diagramms in Abb. 4.4 nimmt die mittlere Geschwindigkeit für sehr kleine Dichten wieder ab. Bedeutet dies, dass die Fahrer „Angst vor der freien Autobahn“ haben? Erklären Sie den Sachverhalt mit statistischen Argumenten.
- (2) Im rechten oberen Plot der Abb. 4.4 gibt es bei Dichten von etwa 10 Fz/km für den linken Fahrstreifen (rote, offene Symbole) eine Anhäufung bei etwa 100 km/h und eine bei etwa 125 km/h. Können Sie eine mögliche Ursache dieser Bimodalität nennen? Vergleichen Sie hierzu auch das Diagramm links unten und berücksichtigen Sie, dass es auf dem betrachteten Autobahnabschnitt eine Verkehrsbeeinflussungsanlage gibt.

4.3 Zeitlückenverteilung

Aus Einzelfahrzeugdaten kann man auch Verteilungen der Zeitlücken erhalten. Abbildung 4.8 zeigt Verteilungen von Netto-Zeitlücken (siehe Gl. (3.3)) für zwei Ge-

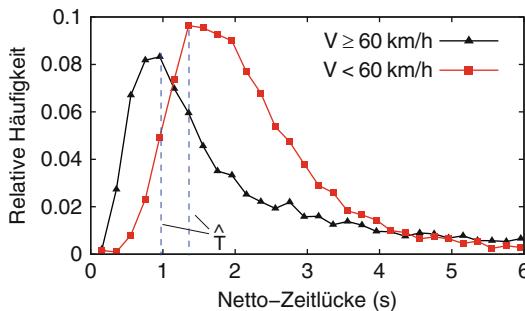


Abb. 4.8 Verteilung der Netto-Zeilücken für zwei Geschwindigkeitsbereiche (freier und gestauter Verkehr) auf der holländischen A9

schwindigkeitsintervalle. Hier sorgte ein zusätzlicher Fluss-Filter dafür, dass lediglich *gebundener* Verkehr (oberhalb eines Mindestflusses Q_c) aufgetragen wurde. Die Zeitlückenverteilungen weisen folgende Merkmale auf:

1. Die Zeitlücken streuen stark. Häufig ist die Standardabweichung größer als das arithmetische Mittel (T) und damit der Variationskoeffizient größer als 1.
2. Die Verteilungen sind stark asymmetrisch. Sowohl im freien als auch im gestauten Verkehr kommen Zeitlücken oberhalb von 10 s vor.
3. Im freien Verkehr, charakterisiert durch Geschwindigkeiten oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit V_c , ist die wahrscheinlichste Folgezeit (*Modalwert*) \hat{T} deutlich kleiner als im gestauten Verkehr.
4. In beiden Geschwindigkeitsbereichen ist \hat{T} wesentlich kleiner als die „Fahr-schulregel“ *Abstand gleich halber Tacho*, die einer Netto-Zeilücke von 1.8 s entspricht.
5. Auch das arithmetische Mittel der Folgezeiten ist im dichten, aber noch freien Verkehr deutlich kleiner als im gestauten Verkehr.

Der mittlere Verkehrsfluss ergibt sich aus dem Kehrwert des arithmetischen Mittels (allerdings) der Bruttofolgezeiten. Daher kann man aus den Folgezeitverteilungen in Abb. 4.8 auch den *Flussabfall nach einem Verkehrszusammenbruch* ablesen. Dieser *capacity drop* bewirkt, dass sich ein einmal entstandener Stau in der Regel nicht so schnell wieder auflöst.

Die beobachteten Zeitlückenverteilungen sind im Allgemeinen nicht identisch zur Verteilung der *gewünschten* Folgezeiten der Fahrer, sondern stellen lediglich eine obere Schranke dar. Dass die tatsächliche Folgezeit größer als die gewünschte Zeitlücke ist, liegt im freien Verkehr an der Tatsache, dass viele Fahrzeuge gar keinem Vorderfahrzeug folgen. Bei einem Fluss von z.B. 360 Fz/h pro Fahrstreifen, welcher einem arithmetischen Mittel der Bruttofolgezeit von 10 s entspricht, liegt der wahrscheinlichste Wert der Nettozeitlücke immer noch unter 1 s. Es gibt aber auch dynamische Ursachen, da aufgrund mangelnder Beschleunigungsfähigkeit und -willigkeit das Vorderfahrzeug „davonfahren“ kann. Diese Effekte erklären, zumindest teilweise, die starke Asymmetrie der Verteilungen.

4.4 Fluss-Dichte-Diagramm

Im Fluss-Dichte-Diagramm wird der Verkehrsfluss über der Verkehrsdichte aufgetragen. Anhand dieser Darstellung sind viele Aussagen über das *makroskopische* (d.h. mittlere) Verhalten eines Fahrer-Fahrzeug-Kollektivs möglich, so dass seine Idealisierung auch als *Fundamentaldiagramm* bezeichnet wird. Für eine konsistente Darstellung sollte man aber sorgfältig zwischen Fluss-Dichte-Daten und Fundamentaldiagramm unterscheiden.

Das *Fundamentaldiagramm* ist die theoretische Beziehung zwischen Dichte und Fluss, wenn sich homogener und stationärer, aus identischen Fahrrern/Fahrzeugen bestehender Verkehr im Gleichgewicht befindet. Das *Fluss-Dichte-Diagramm* ist eine Darstellung aggregierter gemessener Daten von im Allgemeinen instationärem inhomogenem Verkehr außerhalb des Gleichgewichts.

Es gibt also mehrere Gründe, warum Fluss-Dichte-Daten im Allgemeinen nicht auf dem Fundamentaldiagramm liegen, unter anderem, dass

- sich der Einfluss der Messung mit den in Abschn. 3.3 beschriebenen systematischen Messfehlern auswirkt,
- der Verkehrsfluss nicht im Gleichgewicht ist,
- der Verkehrsfluss räumlich nicht homogen ist oder nicht aus identischen Fahrzeugen besteht.

Die im Folgenden beschriebenen bzw. hergeleiteten Aussagen zu Stauausbreitung und Fahrverhaltens-Eigenschaften gelten exakt nur für das Fundamentaldiagramm. Da aber *jeder einzelne* der obigen Faktoren zu starken Abweichungen der mit Gl. (3.11) bestimmten Dichtewerten gegenüber dem Fundamentaldiagramm (teils um den Faktor zwei) führen kann, können aus Fluss-Dichte-Daten hergeleitete Aussagen stark fehlerbehaftet sein. So ist die aus Fluss-Dichte-Daten extrapolierte maximale Dichte der folgenden Beispiele unrealistisch klein. Die aus der Steigung der Fluss-Dichte-Punkte im gestauten Verkehr hergeleiteten Ausbreitungsgeschwindigkeiten (wenn es überhaupt sinnvoll ist, eine Steigung zu definieren) sind hingegen betragsmäßig zu groß. Abbildung 4.10 demonstriert diese Aggregierungsfehler anhand einer Simulation, bei der die Aggregation und Interpretation der Daten mittels „virtueller“ Querschnittsdetektoren mitsimuliert wurden. Rein auf der Messung des Flusses basierende Eigenschaften wie die Bestimmung von Kapazitäten aus Fluss-Dichte-Daten sind hingegen weniger fehlerbehaftet.

Die Abb. 4.9, 4.11 und 4.12 links oben zeigen Beispiele empirischer Fluss-Dichte-Relationen. Daraus lassen sich folgende Größen bestimmen:

1. Die *Wunschgeschwindigkeit* ist gleich der asymptotischen Steigung $Q'(0)$ der Fitkurve $Q(\rho)$ bei $\rho = 0$. Diese Größe lässt sich genauer aus dem Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm bestimmen (vgl. Abschn. 4.2).

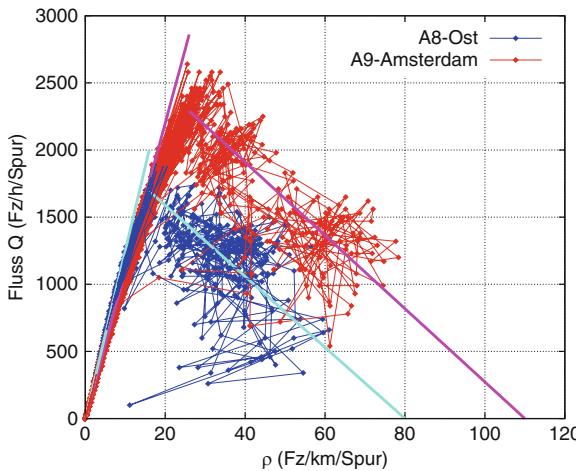


Abb. 4.9 Fahrstreifengemittelte Fluss-Dichte-Diagramme für Abschnitte der holländischen A9 von Haarlem nach Amsterdam und der A8-Ost im Bereich des Irschenbergs

2. Die tatsächliche *mittlere Geschwindigkeit* bei gegebener Dichte ist durch die Steigung der Sekante $Q(\rho)/\rho$ gegeben.
3. Der maximale Wert von $Q(\rho)$ gibt die *Kapazität* der Richtungsfahrbahn pro Fahrstreifen an.
4. Der Kehrwert des von Null verschiedenen kleinsten Dichtewertes ρ_{\max} , bei dem $Q(\rho_{\max}) = 0$ gilt, entspricht der *mittleren Fahrzeuglänge* zuzüglich des mittleren Abstands, der bei Stillstand eingehalten wird.
5. Aus der negativen Steigung von $Q(\rho)$ bei hohen Dichten lässt sich die mittlere *Netto-Folgezeit T* der Fahrer bestimmen (siehe Kap. 8).
6. Aus dem Fluss-Dichte-Diagramm lassen sich die *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Staufronten* sowie von kleinen Schwankungen makroskopischer Größen ablesen (siehe ebenfalls Kap. 8).

Zur Abschätzung der Auswirkung der eingangs erwähnten Fehlerquellen bei der Interpretation von Fluss-Dichte-Daten können Simulationen dienen, bei denen der Messprozess durch *virtuelle Querschnitte* mitsimuliert wird. Abbildung 4.10 zeigt, dass das Fluss-Dichte-Diagramm bei hohen Dichten stark von der verwendeten Mittelungsmethode für die Geschwindigkeit abhängt. Insbesondere unterscheiden sich bei allen Mittelungsmethoden die Dichteschätzungen stark von der realen, in der Simulation natürlich verfügbaren Dichte.

Bisweilen wird beim Verkehrszusammenbruch eine abrupte Abnahme der Kapazität, also des maximal möglichen Verkehrsflusses, beobachtet (*capacity drop*), vgl. Abb. 4.11 und 4.12. In diesem Fall ist die Verkehrsdynamik *hysteretisch*, d.h. das Verhalten hängt bei gleicher Nachfrage von der Vorgeschichte ab. Bricht der Verkehr zusammen, geht der Verkehrszustand im Fluss-Dichte-Diagramm vom „freien Zweig“ in den „gestauten Zweig“ über und der maximal mögliche Durchfluss wird geringer. Dies hat zur Folge, dass ein einmal entstandener Stau sich erst bei sehr viel geringerer Verkehrs nachfrage wieder auflösen kann. Dieses Phänomen

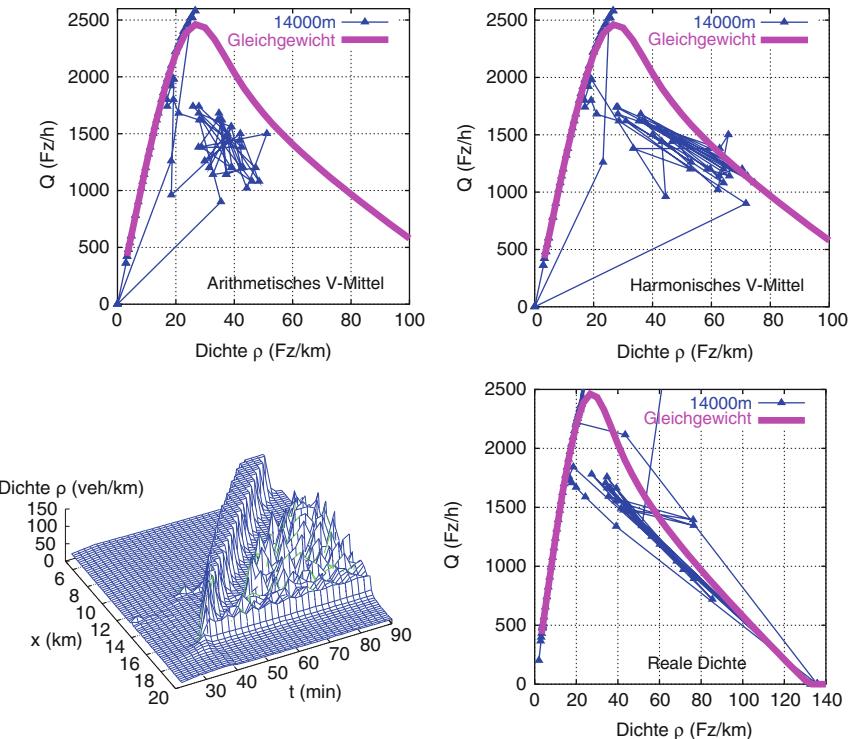


Abb. 4.10 Mikrosimulation eines Verkehrszusammenbruchs mit Stauwellen einschließlich Simulation der Datenerfassung durch „virtuelle Detektoren“. Die Lage der Fluss-Dichte-Punkte hängt bei hohen Dichten stark vom verwendeten Geschwindigkeitsmittel für die Dichteschätzung ab und weicht in jedem Fall stark von der realen räumlichen Dichte ab. Da identische Fahrzeuge simuliert wurden, sind die Streuungen der Fluss-Dichte-Punkte allein auf das Nichtgleichgewicht zurückzuführen

wird aufgrund des Aussehens auch als „gespiegeltes“ griechisches λ (*inverse- λ*) des Fluss-Dichte-Diagramms 4.11 bezeichnet.

Die starke Variation der Zeitlücken (vgl. Abschn. 4.3) erklärt teilweise die starke Streuung der Fluss-Dichte-Daten im behinderten bzw. gebundenen Verkehr. Im freien Verkehr führt eine Variation von Dichte und Zeitlücken zu Variationen der Fluss-Dichte-Daten entlang einer eindimensionalen Kurve ($\approx \rho V_0$). Im gebundenen Verkehr führt eine Variation der Dichte jedoch zu Änderungen der Fluss-Dichte-Daten, die senkrecht zu den durch Variation der Zeitlücken bedingten Änderungen verlaufen. Insgesamt ergibt sich daraus im gebundenen Verkehr ein erratischer Verlauf der Fluss-Dichte-Daten (vgl. Abb. 4.12).

Schließlich ist zu bemerken, dass unterschiedliche Zeitlücken nicht nur durch heterogenen Verkehr, d.h. unterschiedliche Wunschzeitlücken der einzelnen Fahrer, zustande kommen, sondern auch durch *Nichtgleichgewichte* in der Verkehrsdynamik (der *tatsächliche* Abstand entspricht nicht dem *gewünschten* Abstand) sowie durch die bereits diskutierten systematischen Aggregationsfehler (Abb. 4.10).

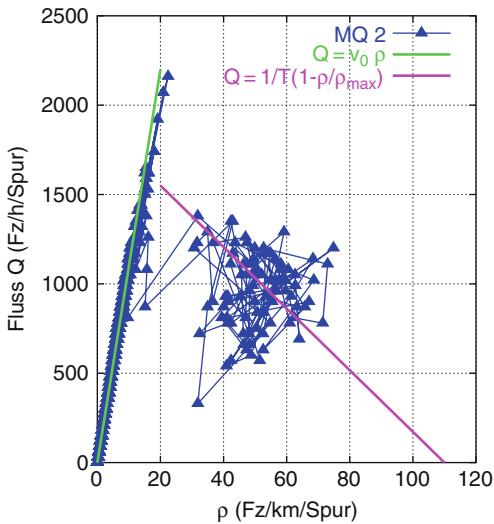


Abb. 4.11 Fluss-Dichte-Diagramm bei hysteretischer Verkehrsdynamik. Zeitreihen dieser Daten sind in Abb. 4.1 dargestellt

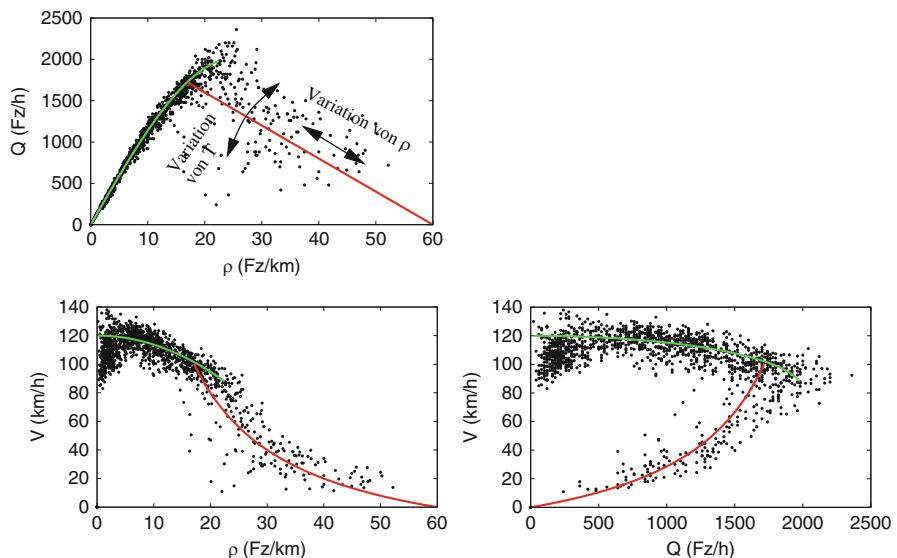


Abb. 4.12 Darstellung derselben 1-Minuten-Daten der Autobahn A5-Nord bei Frankfurt als Geschwindigkeits-Dichte-, Fluss-Dichte- und Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm unter Zugrundelegung des harmonischen Geschwindigkeitsmittels. Die durchgezogenen Linien stellen einen Fit der Punkte-Wolke mit einem *Traffic-Stream*-Modell (siehe Abschn. 6.2.2) dar

4.5 Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm

Eine Auftragung der Geschwindigkeit über dem Fluss ist ebenfalls möglich. Diese Darstellung ist nicht so grundlegend für die Modellierung wie das Fluss-Dichte-Diagramm und auch nicht so anschaulich wie Geschwindigkeits-Dichte-Diagramme. Sie hat den Vorteil, dass nur direkt messbare Größen dargestellt werden, aber auch hier wirken die systematischen Fehler der Geschwindigkeits-Aggregierung. Mittels der hydrodynamischen Relation $Q = \rho V$ sind alle drei Darstellungen äquivalent, vgl. Abb. 4.12.

Übungsaufgaben

4.1 Analytisches Fundamentaldiagramm

Bestimmen und zeichnen Sie das Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm sowie das Fundamentaldiagramm unter folgenden idealisierten Annahmen: (i) Alle Fahrzeuge haben die Länge $l = 5$ m. (ii) Im freien Verkehr (Geschwindigkeit ist nicht durch andere Fahrzeuge beeinflusst) fahren alle Fahrzeuge mit der *Wunschgeschwindigkeit* $V_0 = 120$ km/h. (iii) Im gebundenen Verkehr (Fahrzeug hat die gleiche Geschwindigkeit wie das Vorderfahrzeug) wird der *Nettoabstand* $s(v) = s_0 + vT$ eingehalten, wobei s_0 einem *Mindestabstand* von z.B. 2 m und T einer *Netto-Folgezeit* von z.B. 1.6 s entspricht.

4.2 Fluss-Dichte-Diagramme aus empirischen Daten

Es sind die Geschwindigkeits-Dichte-Diagramme (Abb. 4.5) sowie Fluss-Dichte-Diagramme (Abb. 4.9) der deutschen Autobahn A8-Ost (bei München) und der holländischen A9 (in der Nähe von Amsterdam) gegeben. Bestimmen Sie aus den Diagrammen für beide Autobahnen die Wunschgeschwindigkeit V_0 , die Netto-Folgezeit T und die maximale Dichte ρ_{\max} sowie den *capacity drop* anhand der eingezeichneten Fitgeraden. Welche Aussagen lassen sich damit über das Verhalten der deutschen und holländischen Fahrer (auf den betrachteten Autobahnen, zur jeweiligen Zeit etc.) treffen?

Literaturhinweise

- Helbing, D.: Verkehrsdynamik. Springer, Berlin (1997)
- Hall, F.: Traffic stream characteristics. Traffic Flow Theory. US Federal Highway Administration, Washington, DC (1996)
- Daganzo, C.: Fundamentals of Transportation and Traffic Operations. Pergamon-Elsevier, Oxford, UK (1997)
- Knospe, W., Santen, L., Schadschneider, A., Schreckenberg, M.: Single-vehicle data of highway traffic: microscopic description of traffic phases. Phys. Rev. E **65**, 056133 (2002)

Kapitel 5

Raumzeitliche Rekonstruktion der Verkehrslage

Das Staunen ist der Anfang der Erkenntnis.

Platon

5.1 Raumzeitliche Interpolation

Allgemein besteht die Aufgabe eines zweidimensionalen, raumzeitlichen Interpolationsalgorithmus darin, aus den an bestimmten Orten x_i zu bestimmten Zeitpunkten t_i vorliegenden *diskreten* Geschwindigkeitspunkten $v_i = v(x_i, t_i)$ eine *kontinuierliche, mittlere* Geschwindigkeit $V(x, t)$ als Funktion des Ortes und der Zeit zu schätzen (Abb. 5.1 und 5.2). Als Eingangsgrößen dienen Geschwindigkeits- oder Flusswerte, die zu festen Zeiten an definierten Orten gemessen wurden. Dies können Minutenwerte von stationären Detektoren, aber auch Floating-Car-Daten sein. Als Output erhält man eine kontinuierliche Geschwindigkeitsschätzung als Funktion von Ort und Zeit.

Dieses Problem entspricht einer *diskreten Faltung* mit einem Glättungskern ϕ_0 über alle zu berücksichtigenden Datenpunkte i :

$$V(x, t) = \frac{1}{\mathcal{N}(x, t)} \sum_i \phi_0(x - x_i, t - t_i) v_i. \quad (5.1)$$

Als Wichtungskern ist jede lokalisierte Funktion geeignet, welche für große Werte $|x - x_i|$ bzw. $|t - t_i|$ hinreichend schnell auf Null abfällt. In der vorliegenden Anwendung hat sich die symmetrische Exponentialfunktion

$$\phi_0(x - x_i, t - t_i) = \exp \left[- \left(\frac{|x - x_i|}{\sigma} + \frac{|t - t_i|}{\tau} \right) \right] \quad (5.2)$$

bewährt, wobei σ und τ die Glättungsbreiten in der räumlichen bzw. zeitlichen Koordinate festlegen.¹ Der Nenner \mathcal{N} bezeichnet die Normierung der Wichtungsfunktion, welche sich durch die Summation der Einzelbeiträge ergibt:

¹ Eine bivariate Normalverteilung ist ebenfalls möglich.

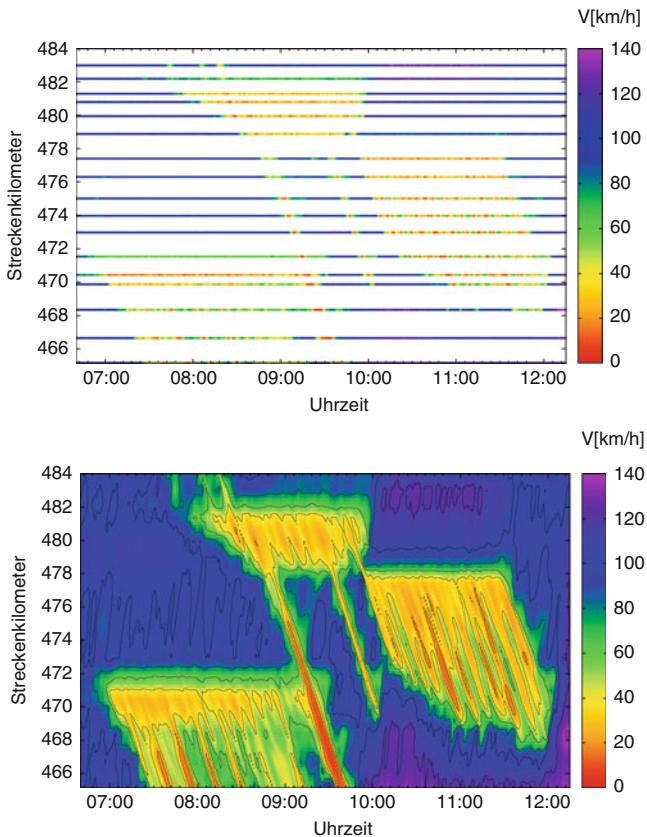


Abb. 5.1 Farbcodierte Geschwindigkeitsdarstellung von stationären Detektoren und daraus rekonstruiertes Geschwindigkeitsprofil für einen Streckenabschnitt der Autobahn A5 bei Frankfurt/Main in Fahrtrichtung Süd am 28.05.2001. Die stauverursachenden Engstellen sind die Zufahrten der beiden Autobahnkreuze sowie eine unfallbedingte Behinderung bei Kilometer 478 zwischen 10:00 und 11:30 Uhr. Das raumzeitliche Interpolationsverfahren wird in Abschn. 5.2 vorgestellt

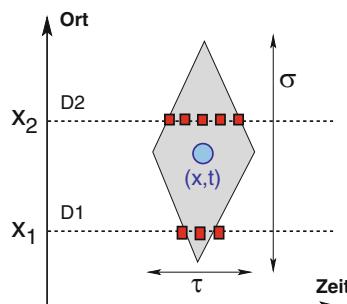


Abb. 5.2 Raumzeitliche Interpolation zur Rekonstruktion des Verkehrszustands am Ort x zur Zeit t (blaue Punkte) mit der isotropen Gewichtung (5.2)

$$\mathcal{N}(x, t) = \sum_i \phi_0(x - x_i, t - t_i). \quad (5.3)$$

Die Exponentialfunktion wirkt als *Tiefpass-Filter*, so dass zeitliche Schwankungen (mit Frequenzen größer als $1/\tau$) und räumliche Fluktuationen (auf der Skala kleiner als σ) geglättet werden. Für die Interpolation von über 1 min aggregierten Detektorwerten eignen sich Werte für τ im Bereich von 30 bis 60 s. Für die Glättung im Raum sollte der Parameter σ Werte annehmen, die in der Größenordnung des halben mittleren Detektorabstands liegen.

Ist der Abstand zwischen zwei Detektorquerschnitten größer als der halbe räumliche Abstand zwischen zwei Stop-and-Go-Wellen, bekommt man mit der *isotropen Mittelung* (5.2) allerdings Artefakte wie das „Eierkarton-Muster“ in Abb. 5.3, welche die Interpretation von Stauwellen zweideutig werden lässt (Abb. 5.4).

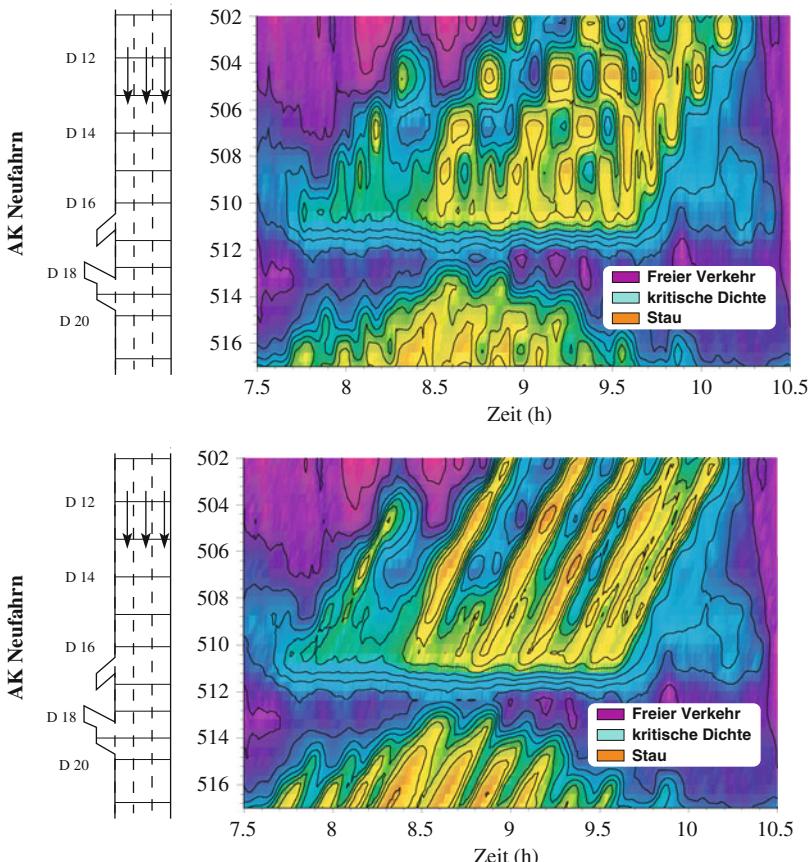


Abb. 5.3 Kontour-Darstellungen der raumzeitlich interpolierten Geschwindigkeitswerte von stationären Detektoren auf einem Streckenabschnitt der A9-Süd nördlich von München. Die Stop-and-Go-Wellen werden durch eine isotrope Mittelung (oberes Diagramm) verzerrt dargestellt, während eine verkehrsadaptive Glättung (unteres Diagramm) die Situation detailliert rekonstruiert

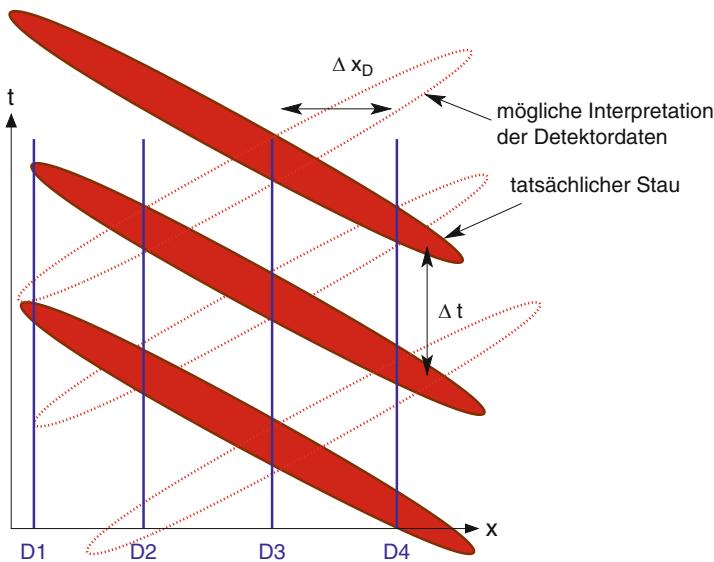


Abb. 5.4 Zweideutigkeit der Interpretation von Stop-and-Go-Wellen aus Querschnittsdaten. Neben den „wahren“ Stop-and-Go-Wellen (ausgefüllt) ist auch die punktiert gezeichnete Interpretation denkbar. Die immer stromaufwärts gerichtete Ausbreitungsbewegung der Stauwellen schließt allerdings die letztere Interpretation aus

Warum erhält man bei der isotropen Rekonstruktion von Stop-and-Go-Verkehr Artefakte wie mit falscher Geschwindigkeit oder sogar *in die falsche Richtung* laufende Stop-and-Go-Wellen, wenn die Detektorabstände die halbe Wellenlänge überschreiten? Verdeutlichen Sie die Situation, indem Sie idealisierte, regelmäßige Stop-and-Go-Wellen der Wellenlänge λ sowie die Positionen mehrerer Messquerschnitte mit gleichem Abstand Δx voneinander in ein Raum-Zeit-Diagramm zeichnen (vgl. Abb. 5.4).

5.2 Verkehrsadaptives Glättungsverfahren

Da Wellenlängen von Stop-and-Go-Wellen oft im Bereich von 2 km liegen, ist die durch den Kern (5.2) beschriebene *isotrope* Glättung für die Anwendung auf Verkehrsdaten bei den in der Praxis meist vorliegenden Detektorabständen oberhalb etwa 1 km nicht geeignet. Im Folgenden wird ein verkehrsadaptives Interpolationsverfahren zur Rekonstruktion der raumzeitlichen Verkehrslage vorgestellt. Mit dieser sogenannten *Adaptive Smoothing Method* können die raumzeitlichen „Strukturen“ anhand der Daten detaillierter und plausibler rekonstruiert werden als mit dem Glättungskern (5.2) (siehe Abb. 5.3).

Der Algorithmus basiert auf einer zweidimensionalen Interpolation in Raum und Zeit (siehe Abschn. 5.1). Im Gegensatz zur isotropen Glättung (5.2) berücksichtigt das Verfahren aber die zwei typischen Geschwindigkeiten, mit denen sich Informationen im freien und gestauten Verkehr ausbreiten.

Zunächst werden daher die raumzeitlich gemittelten Geschwindigkeiten (und weitere makroskopische Größen) mit zwei verschiedenen Wichtungskernen („Filtern“) bestimmt, welche die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen im freien bzw. gestauten Verkehr berücksichtigen (siehe Abschnitt 5.2.1). Anschließend wird anhand der beiden Filter bestimmt, ob am betrachteten Punkt (x, t) eher Stau oder eher freier Verkehr vorliegt. Dazu wird ein „Stauungsgrad“ w mit Werten zwischen 0 und 1 berechnet. Das Ergebnis für die Geschwindigkeit (oder eine andere Größe) ergibt sich unter Berücksichtigung von w aus der Summe der Filter für freien und gestauten Verkehr (siehe Abschn. 5.2.2). Zur Validierung der Methode dient eine Verkehrslageschätzung mit reduzierter Information (weggelassene Messquerschnitte), die mit der vollen Information verglichen wird (siehe Abschn. 5.2.3).

5.2.1 Charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Die *Adaptive Smoothing Method* berücksichtigt, dass alle Störungen im Verkehrsfluss, also „Strukturen“ in der raumzeitlichen Geschwindigkeitsdarstellung, entweder stationär sind oder sich mit einer von zwei bemerkenswert reproduzierbaren Geschwindigkeiten ausbreiten: (i) Im *freiem Verkehr* breiten sich Störungen gemäß empirischer Beobachtungen im Wesentlichen *mit dem Verkehrsfluss* aus. Die damit verbundene charakteristische Geschwindigkeit ergibt sich aus der mittleren Geschwindigkeit der Fahrzeuge. (ii) Bei *gestautem Verkehr* breiten sich Störungen im Verkehrsfluss (bedingt durch Reaktionen der Fahrer auf das jeweilige Vorderfahrzeug) *entgegen* der Fahrtrichtung aus. Aus empirischen Daten ist bekannt, dass die Geschwindigkeit mit etwa -15 km/h als erstaunlich konstant angesehen werden kann. Insbesondere breiten sich die stromabwärtigen Fronten von einzelnen Stauwellen mit dieser charakteristischen Geschwindigkeit aus (vgl. Kap. 17).

Um diese wesentlichen Eigenschaften der Verkehrsdynamik zu berücksichtigen, werden nun *zwei* geglättete Geschwindigkeitsfelder mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in freiem und gestautem Verkehr, c_{free} und c_{cong} , betrachtet² (vgl. Abb. 5.5):

$$V_{\text{free}}(x, t) = \frac{1}{N_{\text{free}}(x, t)} \sum_i \phi_0 \left(x - x_i, t - t_i - \frac{x - x_i}{c_{\text{free}}} \right) v_i, \quad (5.4)$$

$$V_{\text{cong}}(x, t) = \frac{1}{N_{\text{cong}}(x, t)} \sum_i \phi_0 \left(x - x_i, t - t_i - \frac{x - x_i}{c_{\text{cong}}} \right) v_i. \quad (5.5)$$

² Das Subskript „cong“ kommt vom englischen Ausdruck *congested* für „verstaut“. Ferner werden systematisch Ausbreitungsgeschwindigkeiten mit c und Fahrzeuggeschwindigkeiten mit V (makroskopisch) bzw. v (mikroskopisch) bezeichnet.

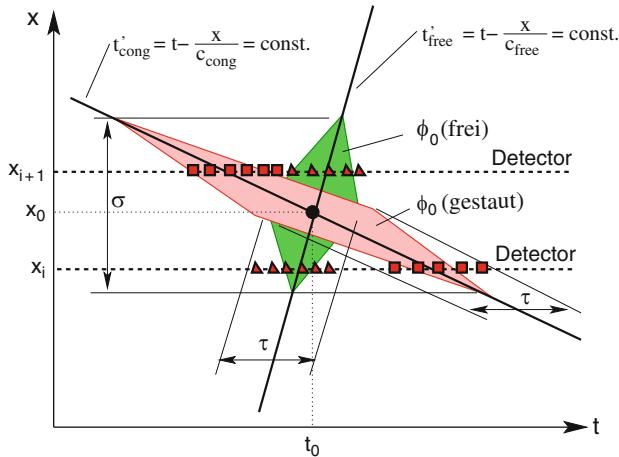


Abb. 5.5 Geschwindigkeitsfilter der *Adaptive Smoothing Method* für freien und gestauten Verkehr zur Rekonstruktion des Verkehrszustands am betrachteten Ort x_0 zur Zeit t_0 . Die Rauten geben den raumzeitlichen Bereich an, in dem die Wichtungsfunktion ϕ_0 jeweils Werte wesentlich ungleich Null annimmt. Die Lage der Rauten wird durch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen in freiem und in gestautem Verkehr bestimmt. Die Symbole auf den Raum-Zeit-Linien der Detektoren geben die Minutenraten der jeweiligen Detektoren an, die bei der Interpolation hauptsächlich berücksichtigt werden

Hierbei werden $\mathcal{N}_{\text{free}}$ und $\mathcal{N}_{\text{cong}}$ in Analogie zu Gl. (5.3) gebildet. Während die charakteristische Geschwindigkeit im freien Verkehr positiv ist und etwas niedriger als die mittlere Fahrzeuggeschwindigkeit anzusetzen ist (z.B. $c_{\text{free}} = 70 \text{ km/h}$ für Autobahnen), berücksichtigt der Parameter $c_{\text{cong}} = -15 \text{ km/h}$ die Ausbreitung von Störungen im gestauten Verkehr *entgegen der Fahrtrichtung*. Diese Transformation der Zeitkoordinate entspricht einer Scherung des Glättungskerns $\phi_0(x - x_i, t - t_i)$ mit den Raten $1/c_{\text{free}}$ bzw. $1/c_{\text{cong}}$. Im Grenzfall $c_{\text{free}} = c_{\text{cong}} \rightarrow \infty$ geht die verkehrsadaptive Interpolation in die isotrope Interpolation (5.2) über.

5.2.2 Adaptiver Geschwindigkeitsfilter

Durch die unterschiedlichen Glättungsrichtungen in freiem und gestautem Verkehr wird die mittlere Geschwindigkeit nun als Überlagerung der beiden Geschwindigkeitsfelder V_{cong} und V_{free} aufgefasst:

$$V(x, t) = w(x, t) V_{\text{cong}}(x, t) + [1 - w(x, t)] V_{\text{free}}(x, t). \quad (5.6)$$

Der Gewichtungsfaktor $w(x, t)$ hängt von den beiden mittleren Geschwindigkeiten V_{free} und V_{cong} ab.

Offensichtlich soll bei niedrigen Geschwindigkeiten w ungefähr 1 gelten, während bei hohen Geschwindigkeiten $w = 0$ zu fordern ist. Der unscharfe Übergang zwischen diesen beiden Grenzfällen ist durch folgende s -förmige nichtlineare Funktion charakterisiert:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{V_c - V^*}{\Delta V} \right) \right]. \quad (5.7)$$

Der Prädiktor $V^*(x, t) = \min[V_{\text{free}}, V_{\text{cong}}]$ wurde dabei durch die Minimumsfunktion so definiert, dass gestauter Verkehrszustände durch den resultierenden nichtlinearen Filter besser geglättet werden als freie. Der Übergang dieser s -förmigen Funktion wird durch die Breite ΔV charakterisiert, während der Schwellwert zwischen gestautem und freiem Verkehr durch V_c festgelegt ist. Geeignete Werte sind z.B. $V_c = 60 \text{ km/h}$ und $\Delta V = 20 \text{ km/h}$.

5.2.3 Parameter und Validierung des Verfahrens

Die sechs Parameter des verkehrsadaptiven Interpolationsverfahrens sind in der Tabelle 5.1 zusammengefasst. Eine Kalibrierung im engeren Sinne ist bei diesem datenbasierten Verfahren zur Rekonstruktion und Interpretation der Verkehrslage nicht möglich, aber auch nicht zwingend erforderlich. Die Glättungsparameter τ und σ sind weiterhin für die Darstellung verantwortlich und daher hinsichtlich der Anwendung frei wählbar.

Eine Möglichkeit zur Validierung der vorgestellten Interpolationsmethode besteht darin, dass man sie auf unvollständige Detektordaten anwendet und das Ergebnis mit der auf Basis der vollständigen Information rekonstruierten Verkehrslage vergleicht. Hierfür betrachten wir einen Abschnitt der A9 bei München, für den Minutenwerte von neun stationären Detektoren zur Verfügung stehen. Während der morgendlichen Belastungsspitze kommt es in Richtung München zu einem Stau mit ausgeprägtem Stop-and-Go-Verkehr. Die rekonstruierte Verkehrslage auf der Basis der neun Querschnitte ist in den Abb. 5.6a, b für die verkehrsadaptive und naive isotrope Glättung dargestellt. Die berücksichtigten Messquerschnitte sind

Tabelle 5.1 Parameter des verkehrsadaptiven Interpolations- und Glättungsverfahrens (*Adaptive Smoothing Method*) mit typischen Werten

Parameter	Wert
Glättungsbreite im Ort σ	$\Delta x/2$, z.B. 600 m
Glättungsbreite in der Zeit τ	$\Delta t/2$, z.B. 30 s
Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen im freien Verkehr c_{free}	70 km/h
Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen im gestauten Verkehr c_{cong}	-15 km/h
Übergangsschwelle vom freien in gestauten Verkehr V_c	60 km/h
Übergangsbreite vom freien in gestauten Verkehr ΔV	20 km/h

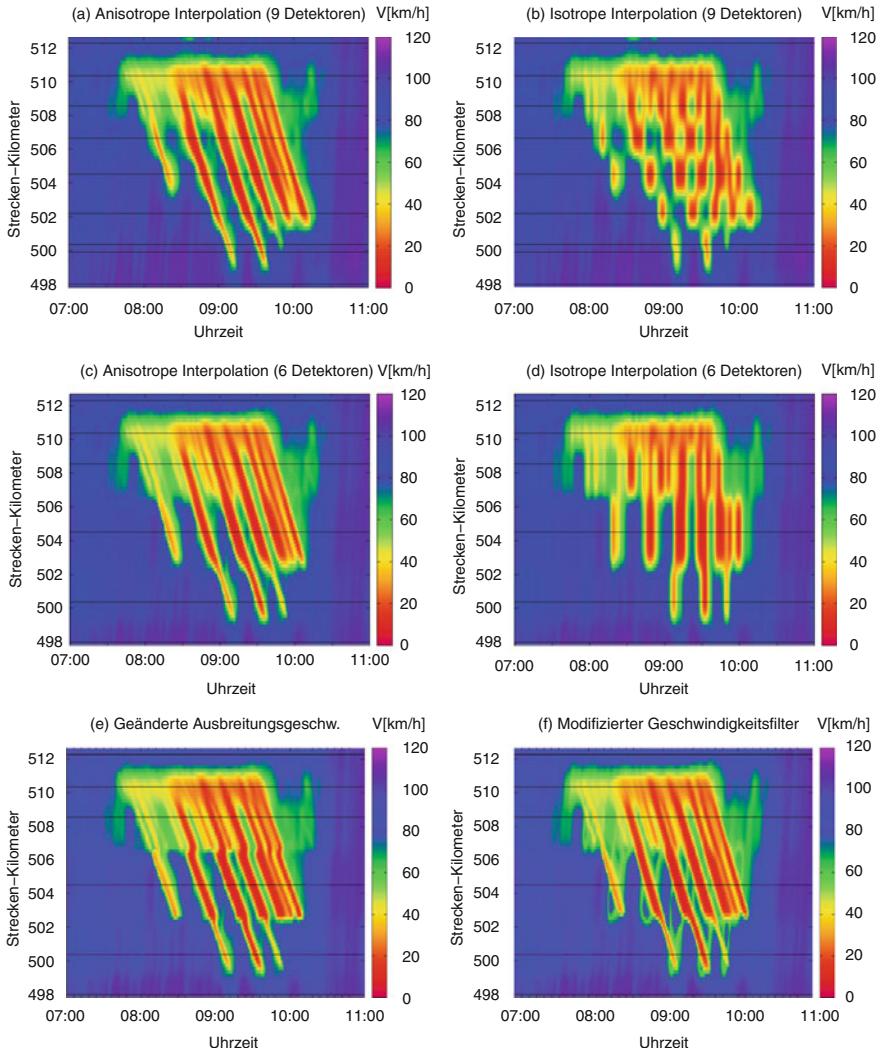


Abb. 5.6 Validierung des verkehrsadaptiven Interpolationsverfahrens (*Adaptive Smoothing Method*) und Vergleich mit isotroper Interpolation am Beispiel von Detektordaten auf der A9 bei München in Fahrtrichtung Süd

durch horizontale Linien gekennzeichnet. Die verwendeten Parameterwerte sind in der Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Die rekonstruierte Verkehrslage unter Verwendung von lediglich 6 der 9 Detektoren ist in den Abb. 5.6c und d dargestellt. Zum einen wird deutlich, in welcher Weise die Informationen benachbarter Messquerschnitte bei der Interpolation berücksichtigt werden. Zum anderen wird gezeigt, dass das verkehrsadaptive Glättungsverfahren die Information über die Verkehrslage plausibel rekonstruieren

kann. Das isotrope Verfahren führt dagegen z.B. zu einer fehlerhaften Zuordnung der Geschwindigkeitseinbrüche bei Streckenkilometer 500.

Durch eine Variation der Referenzwerte aus Tabelle 5.1 kann man überprüfen, wie „robust“ die Verkehrslageschätzung ist bzw. wie sensitiv das Ergebnis von den verwendeten Parameterwerten abhängt. Im Diagramm 5.6e sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten gegenüber den Referenzwerten in Tabelle 5.1 variiert worden zu $c_{\text{free}} = 200 \text{ km/h}$ und $c_{\text{cong}} = -12 \text{ km/h}$. Schließlich ist im Diagramm (f) der nichtlineare Filter deutlich sensitiver eingestellt ($\Delta V = 5 \text{ km/h}$) und der Schwellwert ($V_c = 45 \text{ km/h}$) verschoben worden. Die resultierende mittlere Geschwindigkeit, insbesondere die Unterscheidung von freiem und gestautem Verkehr, hängt in beiden Fällen nur schwach von den verwendeten Parameterwerten ab. Der wichtigste Einfluss ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen im gestauten Verkehr. Ein zu hoher Wert (mit dem Grenzfall der isotropen Interpolation) wie auch ein zu niedriger Wert (kleiner als 12 km/h) führen zu artifiziellen, diskreten Stufen.

5.3 Datenfusion

Mit dem Begriff *Datenfusion* bezeichnet man die gemeinsame Berücksichtigung verschiedenartiger Daten aus heterogenen Datenquellen wie z.B. Querschnittsdaten, Floating-Car-Daten, sogenannte „Floating-Phone-Daten“, Meldungen der Polizei etc. Jede dieser Datenkategorien beschreibt im Allgemeinen andere Aspekte des Verkehrszustands und unter Umständen können sich die verschiedenen Datenquellen sogar widersprechen. Das Ziel der Datenfusion ist daher, den maximalen Nutzen aus den verfügbaren Information zu ziehen, vgl. die Abb. 5.7 und 5.8. Eine besondere Herausforderung stellen *Realtime*-Anwendungen der Verkehrslageschätzung (z.B. für aktuelle Stauinformationen) dar, da dann natürlich Datenpunkte zu zukünftigen Zeitpunkten nicht verwendet werden können.

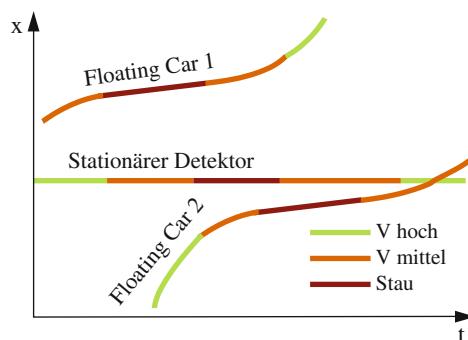


Abb. 5.7 Beispiel heterogener Datenquellen: Querschnittsdaten und Floating-Car-Daten

Wodurch können Inkonsistenzen bei heterogenen Datenquellen entstehen?
Wo treten sie in Abb. 5.7 auf?

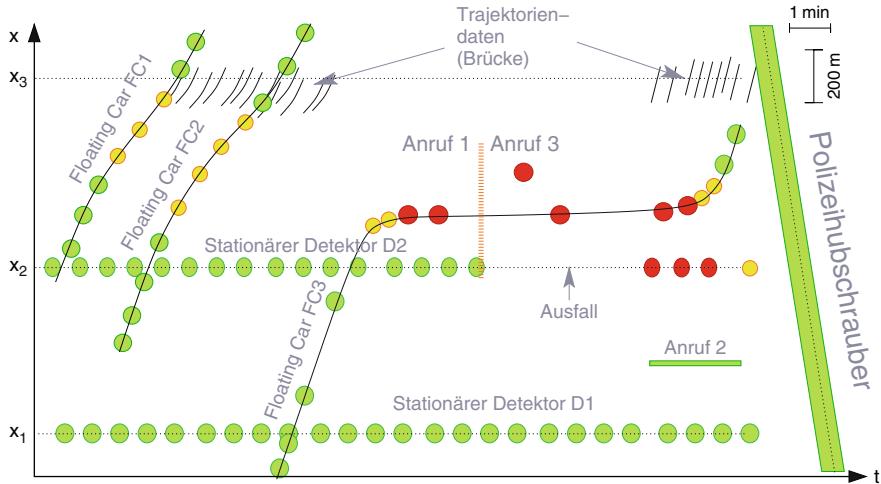


Abb. 5.8 Beispiel für die Vielfalt möglicher Datenquellen im Raumzeit-Diagramm zur Rekonstruktion der Verkehrssituation. Die waagerechten gepunkteten Linien stellen zwei stationäre Detektoren an den Positionen x_1 und x_2 dar, die minütlich Daten senden (grüne Kreise=freier Verkehr, gelb=dichter Verkehr, rot=Stau). Drei Floating Cars durchqueren das raumzeitliche Gebiet und senden ebenfalls Daten, aber nicht in festen Abständen, sondern ereignisorientiert. Auf einer Brücke bei $x = x_3$ ist eine Kamera samt Videoauswertung installiert, die in einem begrenzten Bereich Trajektoriendaten liefert (schwarze Kurvenstücke). Per Mobiltelefon wurde ein Unfall gemeldet (Anruf 1), der Anrufer konnte den Unfallort jedoch nur innerhalb des gestrichelten Bereichs lokalisieren. Anrufer 2 beobachtete von einer Brücke aus während eines Zeiträums freien Verkehr und Anrufer 3 sagte, dass er um 14:55 bei km 435.5 im Stau sitzt. Schließlich beobachtete ein (in negativer x -Richtung) darüberfliegender Hubschrauber freien Verkehr

Das im Abschn. 5.2 vorgestellte Glättungsverfahren kann auch als ein Algorithmus zur Datenfusion aufgefasst werden, weil die Summation über alle Datenkategorien mit einer raumzeitlichen Geschwindigkeitsinformation $v_i = v(x_i, t_i)$ erfolgen kann. Bei der Betrachtung verschiedener Datenquellen spielt aber deren Gewichtung eine wichtige Rolle. In den „Datenfusionsformeln“ (5.4) und (5.5) hängen die Wichtungen

$$w_i(x, t) = \frac{\phi_0(x - x_i, t - t_i)}{\sum_j \phi_0(x - x_j, t - t_j)} \quad (5.8)$$

nur vom Abstand des betrachteten (Gitter-)Punktes (x, t) zu den Datenpunkten (x_i, t_i) ab. Es werden also alle Datenpunkte als gleich wichtig betrachtet. Daher ist es sinnvoll, neben dieser raumzeitlichen Wichtung auch eine Wichtung nach der *Daten-Zuverlässigkeit* durchzuführen, also zuverlässigere Datenquellen gegenüber

weniger zuverlässigen Daten stärker zu gewichten. Ansonsten kann in ungünstigen Fällen eine Fusion sogar zu einer Verschlechterung des Ergebnisses führen.

Die Bestimmung entsprechender Wichtungskoeffizienten α_m für verschiedene Datenkategorien wie z.B. Induktionsschleifen-Detektoren, Infrarot-Detektoren, Floating-Cars etc. ist im Allgemeinen schwierig. Einen Anhaltspunkt kann das nun herzuleitende analytische Ergebnis liefern. Dazu werden folgende idealisierte Annahmen gemacht: (i) Die verschiedenen Datenkategorien m weisen keine systematischen Fehler auf, (ii) die Varianz θ_m der zufälligen Fehler ist bekannt und (iii) die Fehler der verschiedenen Datenkategorien sind nicht korreliert.

Entkoppelt man die Wichtung nach Zuverlässigkeit von der räumlichen Wichtung (5.8) durch Produktbildung, d.h. $w_i(x, t)\alpha_{m(i)}$, lautet das *restringierte Optimierungsproblem* für die Wahl der Wichtungskoeffizienten α_m : Minimiere die Varianz der Fehler der Datenfusion,

$$\theta(\{\alpha_m\}) = \sum_m \alpha_m^2 \theta_m, \quad (5.9)$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_m \alpha_m = 1. \quad (5.10)$$

Hierbei folgt die Fehlervarianz (5.9) direkt aus der Varianz einer Linearkombination unabhängiger Zufallsgrößen, während durch die Nebenbedingung gefordert wird, dass sich die Gewichte zu 1 summieren.

Solche restriktierten Extremwertprobleme können mit dem Verfahren der *Lagrange-Multiplikatoren* gelöst werden. Hierfür wird jede Nebenbedingung in der Form $B_n = 0$ formuliert und bekommt einen Lagrange-Multiplikator λ_n . Die Funktion $L = \theta - \sum_n \lambda_n B_n$ wird nach den unabhängigen Variablen (d.h. den $\{\alpha_m\}$) minimiert und anschließend werden die bisher unbekannten Multiplikatoren λ_n durch direktes Einsetzen der Nebenbedingungen bestimmt.

In unserem Fall liegt nur eine Nebenbedingung vor und die zu minimierende Funktion ist gegeben durch $L = \theta - \lambda (\sum_m \alpha_m - 1)$. Die Minimierung ergibt

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_m} = 2\alpha_m \theta_m - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_m = \frac{\lambda}{2\theta_m}.$$

Bestimmt man nun λ durch die Nebenbedingung (5.10), erhält man als Ergebnis

$$\alpha_m = \frac{\frac{1}{\theta_m}}{\sum_{m'} \frac{1}{\theta'_{m'}}}. \quad (5.11)$$

Die Wichtung ist also proportional zum Kehrwert der Fehlervarianz.

Übungsaufgaben

5.1 Rekonstruktion der Verkehrslage mit einem Unfall

Für einen 10 km langen Autobahn-Abschnitt mit den Koordinaten $0 \leq x \leq 10$ km treffen Informationen aus verschiedenen Quellen ein, die Indizien für einen Unfall mit Streckensperrung liefern: (i) Um 16:00 Uhr fährt ein Floating-Car in das Gebiet ein und durchfährt es mit 120 km/h. (ii) Ein weiteres gleich schnelles Floating Car trifft um 16:19 Uhr bei $x = 5$ km auf stehenden Verkehr. (iii) Bei den Streckenkilometern 4 und 8 gibt es stationäre Detektoren, welche nur den Verkehrsfluss (nicht aber die Geschwindigkeit) bestimmen. Der Detektor bei $x = 4$ km registriert verschwindenden Verkehrsfluss von 16:25 bis 16:58 Uhr, der Detektor bei $x = 8$ km von 16:14 bis 16:51 Uhr. (iv) Ein Mobilfunker meldet um 16:40 Uhr, dass er bei $x = 5$ km seit einigen Minuten im Stau steckt. (v) Ein weiterer Mobilfunker in der Gegenrichtung meldet um 16:30 Uhr eine leere Strecke bei $x = 7$ km.

1. Zeichnen Sie die verschiedenen Informationen in ein Raum-Zeit-Diagramm. Kennzeichnen Sie jeweils, ob es sich um die Information „freier Verkehr“ oder „Stau“ handelt.
2. An welchem Ort und zu welcher Zeit findet der Unfall statt? Gehen Sie davon aus, dass ein Unfall vorliegt, der zur sofortigen Streckensperrung führt, und dass sich der Stau mit konstanter Geschwindigkeit stromaufwärts ausbreitet. Geben Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit an.
3. Wann wird die Streckensperrung aufgehoben? Berücksichtigen Sie dabei die universelle Ausbreitungsgeschwindigkeit stromabwärtiger Staufronten, welche hier -15 km/h beträgt.

5.2 Behandlung inkonsistenter Informationen

Wenn ein Floating Car die Position x_D eines stationären Detektorquerschnitts (zur Zeit t_D) passiert, gibt es für den raumzeitlichen Punkt (x_D, t_D) zwei im Allgemeinen sich widersprechende Informationen. Es ist nun bekannt, dass die FC-Geschwindigkeitsdaten V_2 eine doppelt so hohe Ungenauigkeit (Standardabweichung) σ_2 aufweisen wie die stationären Detektoren (Geschwindigkeit V_1 , Standardabweichung $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_2$). Ferner sind die Fehler unabhängig voneinander und es gibt keine systematischen Fehler. Wie verbessert bzw. verschlechtert sich der Fehler, wenn man die beiden Datentypen (i) gleich, (ii) optimal nach Gl. (5.11) gewichtet?

Literaturhinweise

Treiber, M., Helbing, D.: Reconstructing the spatio-temporal traffic dynamics from stationary detector data. Coop. Transp. Dyn. **1**, 3.1–3.24 (2002) (Internet Journal, www.TrafficForum.org/journal).

Kesting, A., Treiber, M.: Datengestützte Analyse der Stauentstehung und -ausbreitung auf Autobahnen. Straßenverkehrstechnik **1**, 5–11 (2010)

van Lint, J., Hoogendoorn, S.P.: A robust and efficient method for fusing heterogeneous data from traffic sensors on freeways. Comput. Aided Civil Infrastruct. Eng. **24**, 1–17 (2009)

Teil II

Modellierung der Verkehrsflussdynamik

Kapitel 6

Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.

Albert Einstein

6.1 Historie und Abgrenzung von verwandten Gebieten

Die Modellierung der Verkehrsflussdynamik begann bereits in den 1930er Jahren des letzten Jahrhunderts; der erste Pionier war wohl der Amerikaner Bruce D. Greenshields (Abb. 6.1). Erst in den 1930er Jahren führten die steigende Verkehrsbelastung, die bessere Datenlage und der zunehmend einfacheren Zugriff auf hohe Rechenleistung zu verstärkten Aktivitäten.

Neben der *Verkehrsflussmodellierung* gehört die *Verkehrsplanung* zu den Methoden der Verkehrsmodellierung. Sowohl die Verkehrsflussdynamik als auch die Verkehrsplanung umfassen zeitlich veränderliche Verkehrspheomene. Die Gebiete unterscheiden sich jedoch in folgenden Aspekten:

- *Zeitlicher Aspekt*: In der Verkehrsflussdynamik werden meist wenige Stunden betrachtet, während es bei der Verkehrsplanung um Tage bis Jahre geht (vgl. Kap. 1).

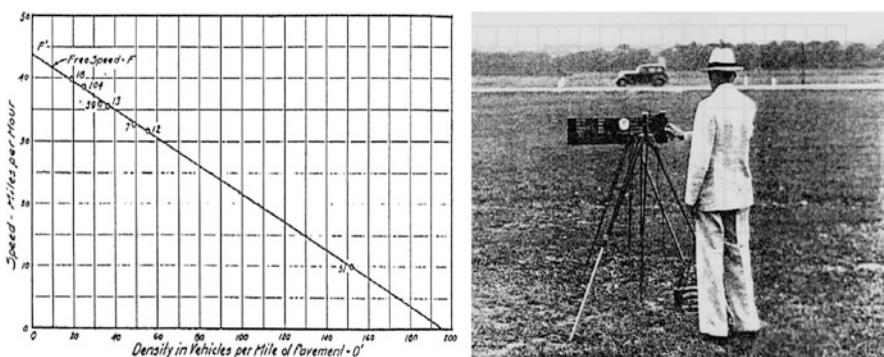


Abb. 6.1 Verkehrstheorie in den 1930er Jahren: Historisches Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm und dazugehörige Messung von Bruce D. Greenshields (Quelle: Greenshields, 1935)

- *Objektiver Aspekt:* Die Verkehrsflussdynamik setzt eine extern gegebene Verkehrs nachfrage sowie eine feste Infrastruktur voraus, während die Verkehrsplanung die Dynamik der Nachfrage selbst sowie Auswirkungen einer Veränderung der Infrastruktur modelliert.
- *Subjektiver Aspekt:* In der Verkehrsflussdynamik wird das menschliche *Fahrverhalten* (Beschleunigen, Bremsen, Fahrstreifenwechseln, Abbiegen etc.) untersucht, während die übergeordneten Aktionen wie Anzahl und Art der zurückgelegten Wege einschließlich Zielwahl (Entfernung), Verkehrsmittelwahl und Routenwahl in das Gebiet der Verkehrsplanung fallen.

Man beachte, dass „Dynamik“ allein kein Unterscheidungsmerkmal ist, da auch in der Verkehrsplanung zunehmend eine *dynamische Verkehrsumlegung* (d.h. verkehrs- und zeitabhängige Routenwahl) modelliert wird. Ferner sind auf den in der Verkehrsplanung betrachteten Zeitskalen auch *Angebot* (Infrastruktur) und *Nachfrage* selbst „dynamisch“. Der Begriff *Verkehrs dynamik* umfasst beide Ansätze, so dass man spezifischer von Verkehrsflussdynamik spricht, wenn die Modellierung von Beschleunigungen, Verzögerungen, Fahrstreifenwechseln und Richtungsänderungen gemeint ist.

Die Unterschiede zwischen den Ansätzen spiegeln sich in typischen Anwendungsbereichen wider. Beispielsweise kann die Wahrscheinlichkeit von Staus entweder durch Verkehrsbeeinflussungen wie Tempolimits, Zuflosskontrollen, LKW-Überholverbote und Wechselwegweisungen verringert werden oder indem die Autofahrer zum Umsteigen auf andere Verkehrsmittel bewegt werden, die Spaltenstunden entzerrt oder die Verkehrs nachfrage (z.B. mit politischen Maßnahmen) insgesamt verringert wird. Während in den ersten Fällen mit Modellen der Verkehrs dynamik simuliert wird, werden im letzteren Fall Methoden der Verkehrsplanung angewandt.

6.2 Modellkategorien

Verkehrsflussmodelle können nach verschiedenen Ordnungsprinzipien eingeteilt werden: inhaltlich, mathematisch oder konzeptionell. Im Folgenden werden die wichtigsten Modellierungsklassen vorgestellt.

6.2.1 Inhaltliche Einteilung

Das reale Verkehrsgeschehen kann auf verschiedene Arten inhaltlich abstrahiert und damit modelliert werden (Abb. 6.2):

Makroskopische Modelle betrachten den Verkehrsfluss in Analogie zu einer strömenden Flüssigkeit oder einem Gas. Deshalb werden sie gelegentlich als *hydrodynamische Modelle* bezeichnet. Die dynamischen Größen sind *lokal aggregierte* Größen wie Verkehrsdichte $\rho(x, t)$, Fluss $Q(x, t)$, mittlere Geschwindigkeit $V(x, t)$ oder Geschwindigkeitsvarianz $\sigma_v^2(x, t)$. Da die Aggregation nur lokal erfolgt, sind

diese Größen räumlich und zeitlich veränderlich. Daher können Staus und Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen im Verkehrsfluss mit Makromodellen beschrieben werden. Weiterhin sind Makromodelle geeignet,

- wenn Effekte, die sich nur schwer mikroskopisch beschreiben lassen (z.B. Fahrstreifenwechsel, verschiedene Fahrer-Fahrzeug-Typen), keine Rolle spielen,
- wenn man ohnehin nur an makroskopischen Größen interessiert ist,
- wenn die Simulationsgeschwindigkeit kritisch ist, wie z.B. in Realtime-Anwendungen (spielt mit wachsender Rechnerleistung eine immer geringere Rolle),
- wenn die zur Verfügung stehenden Eingangsgrößen aus heterogenen Datenquellen kommen und/oder inkonsistent sind.

Eine Realtime-Fähigkeit und die Fähigkeit zur Auswertung heterogener Datenquellen sind insbesondere beim Anwendungsbereich *Verkehrslageschätzung* notwendig. Dabei werden die Daten zu Informationen aufbereitet, welche über Verkehrsfunk weitergegeben werden können oder als Basis für verkehrsadaptive Navigationssysteme dienen.¹

Mikroskopische Modelle oder *Fahrzeugfolgemodelle* gehen von den einzelnen „Fahrer-Fahrzeug-Teilchen“ α aus, die als Kollektiv den Verkehrsstrom ausmachen. Sie beschreiben die Reaktion eines jeden Fahrers (beschleunigen, bremsen, Spur wechseln) in Abhängigkeit von seinen Nachbarn. Die entsprechenden Größen sind die Positionen $x_\alpha(t)$, Geschwindigkeiten $v_\alpha(t)$ und Beschleunigungen $\dot{v}_\alpha(t)$.

Mikromodelle sind die „Modellklasse der Wahl“ bei folgenden Anwendungsbereichen:

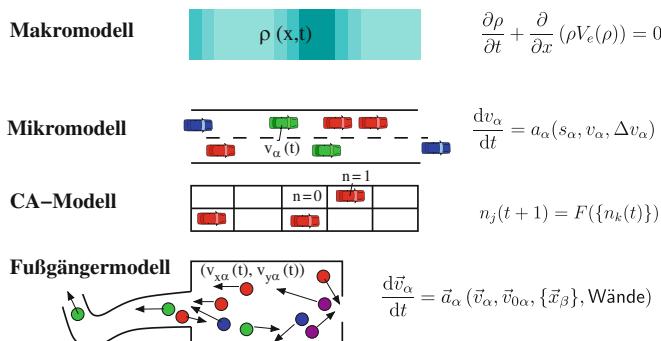


Abb. 6.2 Vergleich der verschiedenen Kategorien von Verkehrsmodellen mit jeweils einer repräsentativen Modellgleichung

¹ In diesem Anwendungsbereich sind Verkehrsflussmodellierung und die zur Verkehrsplanung gehörende dynamische Routenwahl miteinander verzahnt: Die Verkehrsflussmodellierung bietet eine Entscheidungsgrundlage für die Routenwahl.

- Modellierung des Einflusses einzelner Fahrzeuge auf den Verkehr. Dies wird bei einigen *Fahrerassistenzsystemen* wie adaptiven Beschleunigungsreglers (*Adaptive Cruise Control, ACC*) mit ihrer wachsenden Verbreitung zunehmend bedeutsam.
- Aufgabenstellungen, bei denen die Heterogenität des Verkehrs eine wichtige Rolle spielt wie bei der Simulation der Auswirkung von Tempolimits, LKW-Überholverboten etc. Wie in Kap. 20 noch gezeigt wird, ist dies bei der Simulation *aller* Maßnahmen zur Verkehrsbeeinflussung der Fall: Grundprinzip ist dabei nämlich immer die Homogenisierung des Verkehrs.
- Beschreibung des menschlichen Fahrverhaltens (einschließlich Schätzfehler, Reaktionszeiten, Zeiten der Unaufmerksamkeit sowie Antizipation). Damit kann man Aussagen darüber bekommen, wie sich verschiedene Fahrstile auf die Verkehrsleistungsfähigkeit und -stabilität auswirken.
- Darstellung der Interaktion verschiedener Verkehrsteilnehmer, wie PKW, LKW, Busse, Radfahrer und Fußgänger.

Mesoskopische Modelle verknüpfen mikroskopische und makroskopische Ansätze, z.B. indem (i) die Parameter des Mikromodells von makroskopischen Größen wie der Verkehrsdichte abhängen, (ii) makroskopische Größen wie Staubbeginn und Stauende durch mikroskopische Ratengleichungen (sogenannte „Master-Gleichungen“) für die ein- und ausfahrenden Fahrzeuge beschrieben werden, und (iii) in gaskinetischen Verkehrsmodellen die Änderungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Verkehrsflusses durch idealisierte „Stoß-Wechselwirkungen“ beschrieben werden. Ansonsten stellen die mesoskopischen Modelle eine bunte Vielfalt ohne weitere Gemeinsamkeiten dar. Sie werden hier nicht näher betrachtet.

Aggregierung und Disaggregierung. Bei der Auswahl der Modellklasse sollte man beachten, dass man aus Mikromodellen durch lokale *Aggregierung* häufig makroskopische Größen, also die Dynamik von Dichte, Fluss oder mittlerer Geschwindigkeit, gewinnen kann (vgl. Abb. 6.3). Voraussetzung ist, dass sich in der mikroskopischen Verkehrsdynamik räumliche Bereiche definieren lassen, die einerseits *mikroskopisch groß* sind, also mehrere Fahrzeuge enthalten, über die gemittelt werden kann. Einige makroskopische Größen wie Dichte oder Geschwindigkeitsvarianz sind prinzipiell nur für mehrere Fahrzeuge definiert. Andererseits müssen die Bereiche aber auch *makroskopisch klein* sein, d.h. kleiner als die typischen Ausdehnungen der Strukturen (Staus, Stop-and-Go-Wellen, Unterschiede im Verkehrsfluss etc.), die man beschreiben möchte. Eine besondere Form der Aggregierung stellt eine simulative Nachbildung der empirischen Verkehrsmessung durch *virtuelle Detektoren* dar, deren Messungen man mit den in den Kap. 3 und 4 vorgestellten Methoden weiter analysieren kann.

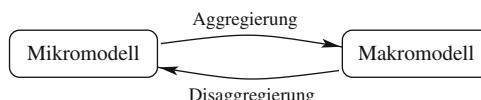


Abb. 6.3 Aggregierung und Disaggregierung bei Modellen

Die umgekehrte Richtung, d.h. die Gewinnung von Einzelfahrzeuginformationen aus makroskopischen Verkehrsgrößen durch die sogenannte *Disaggregierung*, ist problematischer und nur mit sehr einschränkenden Annahmen möglich.

Eine Anwendung der Aggregierung und Disaggregierung stellt auch die *simultane Verwendung von Mikro- und Makromodellen* dar, bei der man z.B. kritische Streckenabschnitte wie Streckeninhomogenitäten mikroskopisch und den Rest der Strecke makroskopisch modelliert. Dazu benötigt man einen korrespondierenden Satz aus einem Mikro- und einem Makromodell, wobei beide Modelle dieselben Modellparameter besitzen und die aggregierten Ergebnisse des Mikromodells möglichst gut denen des Makromodells entsprechen sollten. Weiterhin werden ein *Mikro-Makro-Link* für die Übergänge vom Mikro- zum Makromodell an einer ortsfesten Stelle (Aggregierung) und ein *Makro-Mikro-Link* für die entsprechende Disaggregierung benötigt. Ein Beispiel für die Herleitung eines Makromodells aus einem Fahrzeugfolgemodell wird in Abschn. 9.4.1 vorgestellt.

6.2.2 Mathematische Einteilung

Verkehrsflussmodelle können auch nach ihrer mathematischen Form unterschieden werden.

Partielle Differentialgleichungen. Bei dieser Modellklasse sind sowohl Ort x als auch Zeit t kontinuierlich und dienen als unabhängige Variable von kontinuierlichen Zustandsfunktionen wie Geschwindigkeit $V(x, t)$ oder Verkehrsichte $\rho(x, t)$. Die Modellgleichungen enthalten neben den Zustandsfunktionen auch Ableitungen nach beiden unabhängigen Variablen, was das definierende Merkmal von partiellen Differentialgleichungen ist. Sie sind geeignet zur Formulierung makroskopischer Modelle. Trotz ihrer komplizierteren Form erlaubt diese Modellklasse die einfachste Darstellung vieler Sachverhalte wie das Fundamentaldiagramm oder die Ausbreitung von Stauwellen sowie eine schnelle numerische Lösung.

Gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen. Hier hängen die kontinuierlichen Zustandsgrößen (z.B. Ort $x_\alpha(t)$ oder Geschwindigkeit $v_\alpha(t)$ des Fahrzeugs α) nur von einer Variablen, nämlich der Zeit t , ab. Die Modellgleichungen enthalten neben den Zustandsgrößen auch deren Zeitableitungen (Kennzeichen einer gewöhnlichen Differentialgleichung) und sind an die Gleichungen des Nachbarfahrzeugs gekoppelt. Diese mathematische Form ist zur Beschreibung zeitkontinuierlicher Mikromodelle, sogenannter *Fahrzeugfolgemodelle* geeignet.

Gekoppelte iterierte Abbildungen. Ist das Modell nicht in kontinuierlicher Zeit, sondern mit diskreten Zeitschritten Δt formuliert, während die Zustandsvariablen aber nach wie vor kontinuierlich sind, so gehen die Differentialgleichungen in iterierte Abbildungen (*iterated maps* oder *coupled maps*) über. Konkret sind die Zustandsgrößen des neuen Zeitschritts als Funktion dieser Größen im alten Zeitschritt und eventuell weiterer vergangener Zeitschritte gegeben.

Iterierte Abbildungen werden für Mikro- und für Makromodelle eingesetzt. Im Falle von Makromodellen ist der Ort diskret und in Zellen eingeteilt, während er bei Mikromodellen zusammen mit der Geschwindigkeit eine kontinuierliche Zustandsvariable (die Fahrzeugposition) darstellt. *Formal* sind iterierte Abbildungen identisch zu den Differentialgleichungen in Verbindung mit einem expliziten numerischen Lösungsverfahren für die Zeitintegration. *Konzeptionell* hingegen besteht ein Unterschied: In iterierten Abbildungen ist die Zeitschrittweite Δt ein Modellparameter und die Genauigkeit der numerischen Lösung wird nur durch die numerischen Rundungsfehler beschränkt. Bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen hingegen stellt der Zeitschritt keinen Bestandteil des Modells, sondern eine Hilfsgröße des Lösungsverfahrens dar. Die mathematische Lösung wird für $\Delta t \rightarrow 0$ erreicht (zumindest, wenn das Integrationsverfahren *konsistent* ist), während die reale Lösung für $\Delta t > 0$ mehr oder weniger große Fehler aufweist.

Zelluläre Automaten. In dieser Modellklasse liegen alle Größen diskretisiert vor. Der *Ort* ist in feste Zellen untergliedert, die *Zeit* wird in festen Zeitschritten aktualisiert, und der *Zustand* jeder Zelle ist entweder 0 (kein Fahrzeug) oder 1 (Zelle enthält ein Fahrzeug oder einen Teil eines Fahrzeugs). In jedem Zeitschritt wird die Besetzung der Zellen aus den bisherigen Besetzungen neu bestimmt. Zelluläre Automaten (engl. *cellular automata*, CA) werden hauptsächlich für mikroskopische Modelle eingesetzt, prinzipiell lassen sich aber auch makroskopische Modelle so beschreiben.

Diskrete Zustände, kontinuierliche Zeit. Dies ist die mathematische Form der weitaus meisten Spurwechsel-Submodelle, auch bei zeitkontinuierlichen Mikromodellen: Es wird nur ein ganzzahliger Fahrstreifenindex unterschieden, so dass der Wechsel der Fahrstreifen (unrealistisch) als *instantaner Wechsel* dargestellt wird.² Auch die mittels Master-Gleichungen formulierten mesoskopischen Modelle gehören zu dieser Kategorie.

Statische Modelle. Diese Modellklasse, englisch auch als *Traffic Stream Models* bezeichnet, beschreibt eine paarweise Beziehung zwischen den Größen Dichte, Fluss, Geschwindigkeit oder Belegung. Beispiele sind die bereits in Teil I behandelte Geschwindigkeits-Dichte-Beziehung $V(\rho)$ oder das Fundamentaldiagramm $Q(\rho)$. Im Rahmen der Verkehrsflussmodellierung sind statische Modelle meist Bestandteile makroskopischer Modelle, um die Geschwindigkeit oder den Fluss als Funktion der Dichte auszudrücken und so die Komplexität zu reduzieren. Im Rahmen der Verkehrsplanung kommt beispielsweise bei der Routenwahl eine Geschwindigkeits-Fluss-Beziehung zum Einsatz. Diese sogenannte *Kapazitätsbeschränkungsfunktion* (*capacity restraint*, CR-Funktion) modelliert die bei zunehmender Verkehrsbelastung ansteigende Reisezeit.

² Bei Mikromodellen, die als iterierte Abbildungen formuliert sind, hat das Spurwechsel-Submodell die mathematische Form eines zellulären Automaten.

6.2.3 Einteilung bezüglich weiterer Kriterien

Je nach Problemstellung können Verkehrsmodelle auch gemäß weiterer Kriterien unterschieden werden.

Konzeptionelle Grundlage. Man unterscheidet *heuristische Modelle* von *First-Principles*-Modellen.³ Heuristische Modelle bestehen aus einfachen mathematischen Ansätzen (z.B. multivariat-linear oder polynomial in den unabhängigen Variablen), deren Koeffizienten die Rolle von Modellparametern spielen. Sie werden z.B. durch Regression an die Daten angepasst und haben im Allgemeinen keine anschauliche Bedeutung. *First-Principles*-Modelle hingegen werden aus bestimmten geforderten Eigenschaften abgeleitet. Bei Fahrzeugfolgemodellen kann dies ein Fahrverhalten sein, welches durch Zielwerte (Wunschwerte) für Geschwindigkeit, Beschleunigung, Verzögerung, Folgezeit sowie Mindestabstand bestimmt ist. Idealerweise ist jeder dieser Forderungen ein Modellparameter zugeordnet, dessen Wert dadurch, im Gegensatz zu den heuristischen Modellen, anschaulich ist. Auch diese Modelle werden natürlich an die Daten angepasst. Bei „guten“ *First-Principles*-Modellen ergeben sich kalibrierte Werte im erwarteten Bereich, also z.B. 1 s bis 2 s bei der Folgezeit oder 0.8 m/s² bis 2.5 m/s² bei den Beschleunigungen.

Einfluss des Zufalls. Zufallsterme sind eine Möglichkeit, Aspekte des Verkehrsflusses zu beschreiben, welche nicht bekannt, nicht modellierbar, nicht messbar oder „echt“ zufällig sind. Bei der Implementierung der Modelle in Computern werden die stochastischen Terme durch den Einsatz von (Pseudo-)Zufallsgeneratoren realisiert. Man unterscheidet *deterministische Modelle* ohne jede Zufallskomponente von *stochastischen Modellen* mit Zufallsanteilen, welche auch Rauschtermen oder stochastische Terme genannt werden. Der Zufall kann dabei an verschiedenen Stellen in das Modell eingreifen:

- Mit *Beschleunigungsrauschen* kann man phänomenologisch eine gewisse Unvorhersehbarkeit bzw. Irrationalität des Fahrverhaltens abbilden („der Mensch ist ja keine Maschine“). Die meisten zellulären Automaten benötigen derartige Rauschanteile, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern.
- Durch ein *Verrauschen des Inputs* kann man die Beschreibung menschlicher Unvollkommenheiten wie Wahrnehmungs- und Schätzfehler eine Stufe tiefer ansetzen: Während beim Beschleunigungsrauschen die Beschleunigung nachträglich verrauscht wird, hängen hier die die *Eingangsgrößen* der dann deterministischen Beschleunigungsfunktion zufällig von der Zeit ab.
- Schließlich können auch die Randbedingungen (Zuflüsse und Abflüsse), die Infrastruktur (Streckenkapazitäten) sowie die Zusammensetzung der Fahrzeugflotte stochastische Anteile enthalten.

³ Da es sich bei Verkehrsmodellen immer auch um Verhaltensmodelle handelt, sind die hier gemeinten *first principles* allerdings nicht so universell und unveränderlich wie z.B. *first principles* in der Physik.

Eigenschaften der Fahrzeugflotte. Man unterscheidet Modelle mit identischen Fahrer-Fahrzeug-Einheiten von Modellen, welche *heterogenen Verkehr* beschreiben, bei denen also mehrere Fahrzeugtypen (wie Krafträder, PKW, LKW) und eventuell für jeden Fahrzeugtyp mehrere Parametrisierungen (vorsichtige/agile PKW-Fahrer oder voll beladene/leere LKW) simuliert werden (*inter-driver variability*).

Dynamische Fahrverhaltensparameter. Die gewählten, üblicherweise konstanten Parameter bestimmen das Fahrverhalten eines Fahrer-Fahrzeug-Typs. Für die Beschreibung eines sich ändernden Fahrverhaltens können einzelne Parameter auch als zeitabhängige, d.h. dynamische, Größen aufgefasst werden (*intra-driver variability*). Damit lassen sich z.B. Fahrverhaltensänderungen („Resignationseffekte“) modellieren, die durch ein längeres Fahren im Stau hervorgerufen werden.

Berücksichtigung der Spurwechsel. Werden mehrere Fahrstreifen und entsprechende Wechsel zwischen ihnen berücksichtigt, besteht das Verkehrsflussmodell aus den Subkomponenten *Längsdynamik* (Beschleunigungsmodell) und *Querdynamik* (Spurwechselmodell). Bei manchen Modellen ist die Querdynamik integriert, während reine Längsdynamikmodelle mit einer Auswahl an geeigneten Fahrstreifenwechselmodellen erweitert werden können. In Kap. 14 wird ein solches Modell vorgestellt.

Welche Kategorien von Modellen sind für folgende Aufgabenstellungen am geeignetsten?

1. Modellgestützte Verkehrslageschätzung für Stauwarnungen oder Routing-Anwendungen,
2. Modellierung von menschlichen Fahrern, einschließlich verschiedener Fahrstile,
3. Entwicklung eines adaptiven Beschleunigungsreglers (*Adaptive Cruise Control, ACC*),
4. Modellierung der „verkehrlichen Auswirkungen“ von ACC und anderen Fahrerassistenzsystemen,
5. Modellierung sehr großer Netze wie z.B. das gesamte deutsche Autobahnnetz,
6. Modellierung komplizierter Stadtverkehrsnetze,
7. Modellierung der Auswirkungen von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen wie Tempolimits oder Gebote, bestimmte Fahrstreifen zu nutzen,
8. Modellierung von Baustellen und anderer Engstellen.

6.3 Nichtmotorisierter Verkehr

Neben der Verkehrsdynamik von motorisiertem Straßenverkehr wird auch die Dynamik von Fußgängerströmen mit meist mikroskopischen *Fußgängermodellen* abgebildet. Wie beim Straßenverkehr unterscheidet man dabei Modelle

mit kontinuierlichen Größen, sogenannte *soziale Kräftemodelle*, von diskreten zellulären Automaten. Im Gegensatz zu Kfz-Verkehr können sich Fußgänger frei in *zwei* Raumdimensionen bewegen. Es gibt also zwei gleichwertige Ortskoordinaten x und y und z.B. neben der Wunschgeschwindigkeit auch eine Wunsch(ziel)richtung.

Fußgängermodelle werden beispielsweise bei dem Design und der Dimensionierung von Flughäfen, großen Plätzen, Einkaufszentren und der Infrastruktur für Massenveranstaltungen angewendet. Weiterhin werden sie auch genutzt, um Evakuierungs-Szenarien (aus Gebäuden, Fußballstadien, Schiffen etc.) zu simulieren. Ein bekanntes Beispiel einer Verkehrsflussmodellierung von Fußgängern sind die Pilgerströme bei der jährlichen Hadsch von Mekka in Saudi-Arabien mit dem Ziel, den Verkehrsfluss durch eine geeignete Routenführung der Pilger zu verbessern und Gedränge bzw. Staus zu vermeiden.

Für die Verkehrsflussmodellierung weiterer Verkehrsarten wie Radfahrer, Läufer oder Inline-Skater existieren im Gegensatz zur Verkehrsplanung nahezu keine Verkehrsflussmodelle, obwohl dafür durchaus Bedarf besteht. Als Beispiele seien die Modellierung von Radverkehr und motorisiertem Zweirad- und Dreiradverkehr in Schwellenländern oder Flussmodelle für Läufer und Inlineskater als Planungs- und Organisationstool für Großveranstaltungen wie Stadtmarathons, Skatingveranstaltungen oder Skilanglauf-Massenveranstaltungen wie dem *Wasa-Lauf* in Schweden genannt. Die Modelle könnten zur Bewertung der Streckenführung, Erkennung von Engstellen und ggf. Festlegung einer Teilnehmerbegrenzung dienen.

Übungsaufgaben

6.1 Tempolimit auf Autobahnen?

Es wird immer wieder für eine Einführung von Tempo 130 auf deutschen Autobahnen argumentiert. Dabei werden vor allem folgende Gesichtspunkte betrachtet: (i) Bei Tempo 130 geht die Zahl der Unfälle zurück (*Sicherheitswirkung*). (ii) Bei gleicher Verkehrs nachfrage wird durch Tempo 130 die dynamische Streckenkapa zität erhöht bzw. die Verkehrsstaus reduziert (*Verkehrsauswirkung*). (iii) Tempo 130 reduziert den Treibstoffverbrauch, die CO₂-Emissionen, den Lärm usw. (*Umwelt auswirkung*). (iv) Die volkswirtschaftlichen internen und externen Kosten (Zeitver brauch, Treibstoffverbrauch, Kosten durch Unfälle usw.) gehen zurück (*Makroökonomische Auswirkung*).

Über welche dieser Aspekte kann man mit Verkehrsflussmodellen quantitative Aussagen machen? Welche Modellkategorie ist dafür geeignet?

Literaturhinweise

Greenshields, B.D.: A study of traffic capacity. In: Proceedings of the Highway Research Board, Vol. 14. Highway Research Board, Washington, DC 1935 448–477

- Helbing, D.: Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Modern Phys.* **73**, 1067–1141 (2001)
- Hoogendoorn, S., Bovy, P.: State-of-the-art of vehicular traffic flow modelling. *Proc. Inst. Mech. Eng. I J. Syst. Control Eng.* **215**, 283–303 (2001)

Kapitel 7

Kontinuitätsgleichung

Die ganze Natur überhaupt ist eigentlich nichts anderes, als ein Zusammenhang von Erscheinungen nach Regeln; und es gibt überall keine Regellosigkeit.

Immanuel Kant

7.1 Verkehrsdichte und hydrodynamische Fluss-Dichte-Relation

Die Verkehrsdichte wird durch die Zahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit definiert (vgl. Abschn. 3.3.1). Für die Beschreibung des Verkehrsflusses auf Richtungsfahrbahnen mit $I > 1$ Fahrstreifen sind folgende Verkehrsdichten wichtig:

- Die *Einzeldichte* $\rho_i(x, t)$ auf dem Fahrstreifen i ,
- die *Gesamtdichte* $\rho_{\text{tot}}(x, t)$ der Richtungsfahrbahn,
- und die über alle Fahrstreifen $i = 1, \dots, I$ gemittelte Dichte $\rho(x, t)$.

Diese Dichten hängen über die Beziehung

$$\rho_{\text{tot}}(x, t) = \sum_{i=1}^I \rho_i(x, t) = I\rho(x, t) \quad (7.1)$$

zusammen. Die mittlere Dichte ist also durch das ungewichtete arithmetische Mittel definiert. Je nach Aufgabenstellung ist mal die eine, mal die andere Dichtedefinition günstiger: Die Kontinuitätsgleichung ist für die Gesamtdichte ρ_{tot} besonders einfach formulierbar, da die Fahrzeugbilanz nur für die gesamte Richtungsfahrbahn und nicht für die einzelnen Fahrstreifen gilt. Hingegen lassen sich Eigenschaften von Makromodellen am einheitlichsten mit über alle Fahrstreifen gemittelten Größen formulieren, da die Eigenschaften und die Dynamik der gemittelten Größen wie das Fundamentaldiagramm oder die Kapazität nur schwach von der Fahrstreifenzahl abhängen.¹

¹ Beispielsweise ist infolge der anteilig geringeren Störeinflüsse langsamer Fahrzeuge (LKW) die Kapazität einer Richtungsfahrbahn mit drei Fahrstreifen etwas mehr als das 1.5-fache der Kapazität bei zwei Fahrstreifen.

Da es sich bei allen in Makromodellen vorkommenden Dichte-Variablen um *echte* räumliche Dichtewerte handelt, gelten für jeden Fahrstreifen getrennt exakt die in Abb. 7.1 veranschaulichten „hydrodynamischen“ Fluss-Dichte-Beziehungen²

$$Q_i(x, t) = \rho_i(x, t) V_i(x, t), \quad (7.2)$$

wobei $Q_i(x, t)$ die Flüsse auf Fahrstreifen i an der Stelle x zur Zeit t sowie $V_i(x, t)$ die entsprechenden, über einen gewissen räumlichen Bereich Δx um x *lokal* gemittelten Fahrzeuggeschwindigkeiten darstellen.

Definiert man die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit $V(x, t)$ durch ein mit den Dichten *gewichtetes* arithmetisches Mittel

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i V_i(x, t), \quad w_i = \frac{\rho_i(x, t)}{\rho_{\text{tot}}(x, t)} \quad (7.3)$$

und den mittleren Fluss durch das *einfache* arithmetische Mittel³

$$Q(x, t) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}}{I}, \quad (7.4)$$

so gelten formal die gleichen hydrodynamischen Relationen auch für die Mittelwerte und die Gesamtgrößen:

$$Q(x, t) = \rho(x, t) V(x, t) \quad \text{Hydrodynamische Flussbeziehung} \quad (7.5)$$

bzw.

$$Q_{\text{tot}}(x, t) = \rho_{\text{tot}}(x, t) V(x, t). \quad (7.6)$$

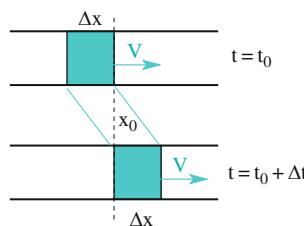


Abb. 7.1 Veranschaulichung der hydrodynamischen Relation $Q = \rho V$. Im schattierten Bereich sind $\Delta n = \rho \Delta x$ Fahrzeuge. Innerhalb der Zeit $\Delta t = \Delta x / V$ bewegt sich dieser Bereich komplett über einen festen Punkt x_0 , so dass an diesem Punkt der Fluss $Q = \Delta n / \Delta t = \rho \Delta x / \Delta t = \rho V$ herrscht

² Wenn man Diffusion außer Acht lässt, vgl. Abschn. 8.5.

³ Fluss und Dichte sind *extensive* Größen, die sich mit der Größe des betrachteten Systems (hier: der Fahrstreifenzahl) ändern und bei denen eine Summenbildung sinnvoll ist. Für *intensive* Größen wie der Geschwindigkeit gilt dies nicht. Allgemein ergeben sich sinnvolle Mittelwerte extensiver Größen durch einfache arithmetische Mittel und Mittelwerte intensiver Größen durch gewichtete Mittel.

7.2 Formulierung der Kontinuitätsgleichung

Die Form der Kontinuitätsgleichung hängt nicht vom konkret verwendeten makroskopischen Modell, wohl aber von der Geometrie der Infrastruktur ab. In der Reihenfolge steigender Komplexität werden folgende Fälle betrachtet: (i) homogene Strecke, (ii) Bereich von Zu- oder Abfahrten, (iii) Bereiche mit Änderungen der Fahrstreifenzahl.

7.2.1 Homogene Strecke

Wir betrachten einen Streckenabschnitt der Länge Δx (Abb. 7.2 oben) ohne Zu- fahrten, Abfahrten oder andere geometrische Inhomogenitäten, wie z.B. eine Änderung der Fahrstreifenzahl.⁴ Dabei soll die Länge Δx einerseits *mikroskopisch groß* sein, so dass genügend Fahrzeuge zur Gewinnung makroskopischer Größen enthalten sind. Andererseits sei Δx aber auch *makroskopisch klein*, so dass Dichten und Flussgradienten in diesem Bereich angenähert konstant sind.⁵ Dann gilt für die Fahrzeugzahl $n(t)$ zur Zeit t im betrachteten Bereich:

$$n(t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho_{\text{tot}}(x', t) dx' \approx \rho_{\text{tot}}(x, t) \Delta x . \quad (7.7)$$

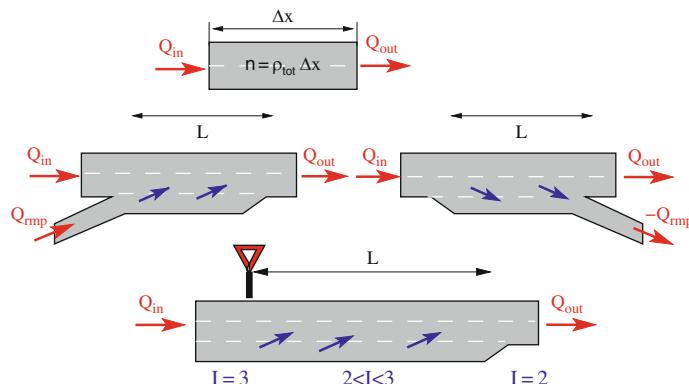


Abb. 7.2 Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichungen (7.8), (7.11) und (7.15) in den drei Fällen (i) homogene Strecke, (ii) Zu- oder Abfahrten, (iii) Änderung der Fahrstreifenzahl. In Fall (iii) bezieht sich Gl. (7.15) auf Mittelwerte über die $I = 2$ durchgängigen Fahrstreifen

⁴ Änderungen des Fahrverhaltens, beispielsweise hervorgerufen durch eine Steigung, ein Tempolimit oder eine Fahrstreifenverengung ohne Änderung der Fahrstreifenzahl, sind aber zugelassen.

⁵ Diese Annahmen sind typischerweise für Abschnitte der Länge $\Delta x \approx 100$ m erfüllt.

Da im Falle homogener Abschnitte eine Änderung der Fahrzeugzahl nur durch Zuflüsse Q_{in} und Abflüsse Q_{out} an den Abschnittsgrenzen erfolgen kann (vgl. Abb. 7.2 oben) und diese durch die raumzeitlichen Flüsse $Q_{\text{tot}}(x, t)$ bzw. $Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t)$ an den jeweiligen Querschnitten gegeben sind, ergibt sich folgende Fahrzeuggbilanzgleichung:

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) = Q_{\text{tot}}(x, t) - Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t).$$

Kombiniert man diese Gleichung mit der nach der Zeit abgeleiteten Gl. (7.7), $\frac{dn}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{tot}}\Delta x) = \Delta x \frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t}$, erhält man

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dn}{dt} = -\frac{Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t) - Q_{\text{tot}}(x, t)}{\Delta x} \approx -\frac{\partial Q_{\text{tot}}(x, t)}{\partial x},$$

oder mit der hydrodynamischen Fluss-Geschwindigkeits-Beziehung $Q_{\text{tot}} = \rho_{\text{tot}}V$ und Weglassen der expliziten Kennzeichnung der Orts- und Zeitabhängigkeiten

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{\text{tot}}V)}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0.} \quad (7.8)$$

Da im Fall einer homogenen Strecke $\rho = \rho_{\text{tot}}/I$ und I konstant sind, sieht die Gleichung für ρ wie die für ρ_{tot} aus.

Ist das makroskopische Modell als gekoppelte iterierte Abbildung formuliert, so wird der Streckenabschnitt in mehrere Zellen k der Länge L_k aufgeteilt und die diskrete Version der Kontinuitätsgleichung (7.8) genutzt. Sie lautet

$$\boxed{\rho_k(t + \Delta t) = \rho_k(t) + \frac{1}{L_k} \left(Q_k^{\text{up}} - Q_k^{\text{down}} \right) \Delta t.} \quad (7.9)$$

Hierbei werden die Zu- und Abflüsse Q_k^{up} bzw. Q_k^{down} in Abhängigkeit der Nachbarzellen gemäß der in Abschn. 8.4.4 vorgestellten *Supply-Demand-Methode* berechnet.

7.2.2 Bereiche von Zu- oder Abfahrten

Hier kommen zur Flussbilanz neben den Zu- und Abflüssen auf und von den Hauptfahrstreifen noch der Zufluss bzw. Abfluss $Q_{\text{rmp}}(t)$ von bzw. zu den Rampen hinzu (vgl. Abb. 7.2 Mitte). Die Flussbilanz lautet nun

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) + Q_{\text{rmp}}(t).$$

Der Rampenfluss Q_{rmp} ist positiv für eine Zufahrt und negativ für eine Abfahrt. Bei Zu- oder Abfahrten mit mehreren Fahrstreifen ist Q_{rmp} gleich der Summe

der Flüsse über alle Fahrstreifen der Rampen. Nimmt man an, dass sich die Zu- bzw. Abflüsse gleichmäßig auf die gesamte Länge $\Delta x = L_{\text{rmp}}$ der Rampe verteilen, erhält man *innerhalb des Rampenbereichs* einen zusätzlichen Flussgradienten $dQ_{\text{rmp}}/dx = Q_{\text{rmp}}/L_{\text{rmp}}$. Die Kontinuitätsgleichung lautet damit

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{\text{tot}} V)}{\partial x} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{L_{\text{rmp}}} = I v_{\text{rmp}}(x, t) \quad (7.10)$$

und für die fahrstreifengemittelte Dichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = v_{\text{rmp}}(x, t)$$

(7.11)

mit

$$v_{\text{rmp}}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{IL_{\text{rmp}}} & \text{falls } x \text{ auf Höhe einer Rampe,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.12)$$

Im Fall einer Formulierung als gekoppelte iterierte Abbildung modelliert man den Rampenbereich am besten als eine Zelle k , deren Länge L_k gleich der Länge der Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsstreifen ist und erweitert die Fahrzeuggbilanz von Gl. (7.9) entsprechend:

$$\rho_k(t + \Delta t) = \rho_k(t) + \frac{1}{L_k} \left(Q_k^{\text{up}} - Q_k^{\text{down}} + \frac{Q_{\text{rmp}}}{I} \right) \Delta t. \quad (7.13)$$

Häufig wechseln die Autofahrer bereits am Anfang einer Auffahrt auf die Hauptstrecke, vor allem bei freiem Verkehr. Wie würde man das modellieren?

Bei Auffahrten mit kurzen Beschleunigungsrampen müssen Fahrzeuge häufig mit vergleichsweise niedriger Geschwindigkeit auf die Hauptfahrbahnen wechseln. Kann man die dadurch verursachten Störungen im Rahmen der Kontinuitätsgleichung modellieren?

7.2.3 Änderung der Fahrstreifenzahl

Bei einer Fahrstreifenreduktion wechseln die Fahrer bereits im Vorfeld auf die durchgehenden Fahrstreifen.⁶ Auf Autobahnen wird bereits typischerweise 200 bis 1000 m vor der Position der Sperrung die Spur gewechselt, in der Stadt später.

⁶ Nach der StVO sollte man erst unmittelbar davor wechseln, den Fahrstreifen also „ausnutzen“.

Steht ein neuer Fahrstreifen zur Verfügung, wird dieser innerhalb weniger 100 m nach der Erweiterung belegt wie ein durchgehender Fahrstreifen.

Würde man bei der makroskopischen Modellierung für jeden Fahrstreifen eine separate Gleichung der Dichte aufstellen, so erhielte man Quellterme analog zu denen in Gl. (7.10), welche die Gleichungen der verschiedenen Fahrstreifen miteinander koppeln. Insbesondere wirkt eine Reduktion der Fahrstreifenzahl auf den benachbarten Fahrstreifen wie eine Zufahrt und eine Erhöhung wie eine Ausfahrt.

Wie bisher betrachten wir bei der makroskopischen Modellierung jedoch nur die Dynamik der Gesamtdichte bzw. der mittleren Dichte, also sogenannte *effektive Modelle*. Hierbei werden die Fahrstreifenwechsel unmittelbar vor einer Sperrung bzw. nach einer Erweiterung durch eine *nicht ganzzahlige* und *mit dem Ort veränderliche* Fahrstreifenzahl $I(x)$ modelliert (vgl. Abb. 7.2). Alle Mittelwerte extensiver (additiver) Variablen, also Fluss und Dichte, werden auf diese variable Fahrstreifenzahl bezogen:

$$Q(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}, \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}. \quad (7.14)$$

Die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit $V(x, t)$ ist hingegen unverändert durch Gl. (7.3) gegeben und auch die hydrodynamische Beziehung (7.5), d.h. $Q = \rho V$, bleibt gültig.

Ein Wert $I = 2.2$ gibt beispielsweise an, dass der dritte Fahrstreifen kaum noch (oder noch kaum) benutzt wird, da der Fluss auf diesem Fahrstreifen nur das 0.2-fache des Flusses der anderen Fahrstreifen beträgt. Damit ist auch klar, dass das Geschwindigkeitsmittel (7.3) konsistent ist, da es in diesem Beispiel die Geschwindigkeit des dritten Fahrstreifens nur mit dem Faktor 0.2 gewichtet. Die *Länge* des Bereichs mit nichtganzzahliger Fahrstreifenzahl sollte ebenso lang sein wie die typische „Wechselzone“ von bzw. auf den nicht durchgehenden Fahrstreifen.

Die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtdichte ρ_{tot} ist dieselbe wie Gl. (7.8) bzw. im Falle von zusätzlichen Rampen Gl. (7.10). Da die Fahrdynamik jedoch mit *fahrstreifenbezogenen* Flüssen und Dichten formuliert wird, muss man die Kontinuitätsgleichung für die Fahrstreifen-Mittelwerte $\rho = \rho_{\text{tot}}/I(x)$ und $Q_{\text{tot}}/I(x)$ formulieren. Setzt man $\rho_{\text{tot}} = I(x)\rho$ und $Q_{\text{tot}} = I(x)Q$ in Gl. (7.10) ein (und lässt man die expliziten Orts- und Zeitabhängigenzen der makroskopischen Größen zur besseren Übersicht wieder weg), so erhält man folgende Version der Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(I\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(IQ)}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ I\frac{\partial\rho}{\partial t} + Q\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial Q}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}} \end{aligned}$$

und mit $Q = \rho V$ schließlich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = -\frac{\rho V}{I} \frac{\partial I}{\partial x} + v_{\text{rmp}}(x) \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (7.15)$$

Die Kontinuitätsgleichung (7.15) beschreibt den allgemeinsten Fall. Gegenüber Gl. (7.10) sieht man, dass zum Rampen-Quellterm v_{rmp} ein zusätzlicher Quellterm $v_I = -\frac{Q}{I} \frac{\partial I}{\partial x}$ hinzugekommen ist, welcher die Nettoflüsse von den zu sperrenden Fahrstreifen und auf die neuen Fahrstreifen beschreibt. Natürlich sind die Terme auf der rechten Gleichungsseite nur im Bereich der Wechselzone vor und nach Fahrstreifensperrungen bzw. -erweiterungen und auf Höhe von Zu- oder Abfahrten wirksam.

Im Fall einer Formulierung als gekoppelte iterierte Abbildung modelliert man die Wechselzone am besten wieder als eine Zelle k der Länge L_k und erhält mit den Fahrstreifenzahlen I_{up} und I_{down} am Anfang bzw. Ende der Zelle

$$\rho_k(t + \Delta t) = \rho_k(t) + \frac{1}{L_k} \left(Q_k^{\text{up}} - Q_k^{\text{down}} + \frac{Q_{\text{rmp}}}{I_{\text{down}}} + \frac{I_{\text{up}} - I_{\text{down}}}{I_{\text{down}}} Q_k^{\text{up}} \right) \Delta t. \quad (7.16)$$

Das gewichtete Geschwindigkeitsmittel (7.3) über alle Fahrstreifen bleibt unverändert gültig, wenn man im Falle nichtganzzahliger Fahrstreifenzahlen die Summenobergrenze als die bezüglich I nächsthöhere *ganze* Zahl definiert. Machen Sie sich für den Fall einer Reduktion der Fahrstreifenzahl von 3 auf 2 klar, dass sich trotz des unstetigen Sprungs des maximalen Summationsindex (z.B. 3 bei $I = 2.01$, aber 2 bei $I = 2$) das Geschwindigkeitsmittel (7.3) stetig verhält.

7.2.4 Diskussion

Zunächst gilt folgende wichtige Bemerkung:

Aufgrund ihrer Herleitung allein aus der Fahrzeugerhaltung ist die Kontinuitätsgleichung Bestandteil *aller* makroskopischen Modelle! Ihre Form hängt nur von der Infrastruktur und vom mathematischen Modellierungsansatz (partielle Differentialgleichung oder gekoppelte iterierte Abbildung) ab.

Quellfreie Kontinuitätsgleichung. Ohne Zu- oder Abfahrten gilt $\partial \rho_{\text{tot}} / \partial t = -\partial Q_{\text{tot}} / \partial x$: Die Fahrzeugzahl kann sich nur durch Zu- und Abflüsse an den Streckengrenzen ändern. Fließen mehr Fahrzeuge heraus als hinein, also $\partial Q_{\text{tot}} / \partial x > 0$, so ist die Dichteänderung negativ. Ist (beispielsweise wegen einer plötzlichen Störung) der Abfluss über eine längere Zeit kleiner als der Zufluss, dann führt die daraus resultierende beständig positive Änderungsrate der Dichte früher oder später zum Stau. Bei konstanter Fahrstreifenzahl und ohne Zu- oder Abfahrten

gilt die quellfreie Kontinuitätsgleichung auch für die über die Richtungsfahrbahn gemittelten Größen ρ bzw. Q , also $\partial\rho/\partial t = -\partial Q/\partial x$.

Fahrstreifenreduktion. Verringert sich die Fahrstreifenzahl und betrachtet man Dichte und Fluss als Mittel über die *durchgängigen* Fahrstreifen, so bewirken die Wechsel von den zu sperrenden auf die betrachteten Fahrstreifen, denen keine entgegengesetzten Wechsel gegenüberstehen, einen Netto-Zufluss. Dieser bewirkt über den dann positiven Term $-\frac{Q}{I} \frac{\partial I}{\partial x}$ einen Dichteanstieg. Betrachtet man die Gesamtdichten und -flüsse, gibt es hingegen keine „Quellterme“.

Auf- und Abfahrten. Neben den Flussgradienten bewirken auch die Zu- und Abflüsse der Zu- und Abfahrten auf der Hauptstrecke eine Dichteänderung, die allerdings nur im Bereich der Rampen wirksam ist. Die Quellterme sind proportional zu den Rampenflüssen. Der skalierte Rampenfluss $v_{rmp}(x)$ steigt mit sinkender Rampenlänge (da dann auf jedem Abschnitt fester Länge mehr Fahrzeuge wechseln müssen) und sinkt mit steigender Fahrstreifenzahl (da sich dann der Rampenfluss auf mehrere Fahrstreifen aufteilen kann).

7.3 Kontinuitätsgleichung aus Sicht des Autofahrers

In der Regel wird die Kontinuitätsgleichung aus Sicht eines ortsfesten Beobachters dargestellt, also in Form von partiellen Zeitableitungen der Dichte bei festgehaltenem Ort. Diese, auch *Eulersche Darstellung* genannte Formulierung beschreibt Dichteänderungen, wie sie ein ortsfester Detektor messen würde. Aus Sicht eines im Verkehrsfluss „mitschwimmenden“ Autofahrers hingegen besteht die wahrgenommene Dichteänderung nicht nur aus der Änderung an einem festen Ort, sondern hat wegen der Fahrzeuggeschwindigkeit auch einen Anteil proportional zu den räumlichen Dichteänderungen. Diese Sicht wird auch *Lagrangische Darstellung* genannt und lautet (vgl. Abb. 7.3)

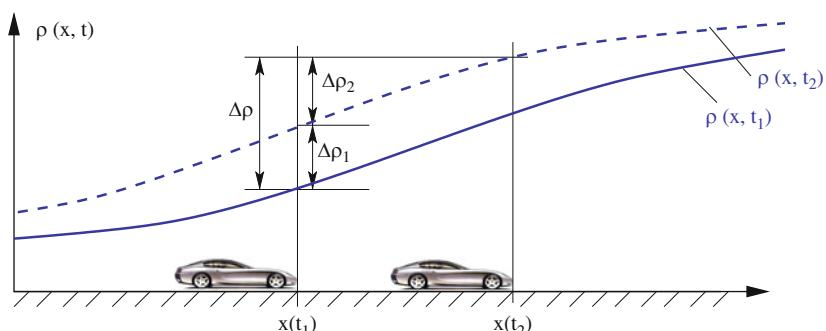


Abb. 7.3 Die Dichteänderung $\Delta\rho = \frac{d\rho}{dt} \Delta t$ aus Fahrersicht setzt sich aus der Änderung $\Delta\rho_1 \approx \frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1) \Delta t$ am Ausgangsort $x_1 = x(t_1)$ und aus dem durch die Ortsveränderung verursachten Beitrag $\Delta\rho_2 = \rho(x_2, t_2) - \rho(x_1, t_2) \approx \frac{\partial\rho}{\partial x} \Delta x \approx V \frac{\partial\rho}{\partial x} \Delta t$ zusammen

$$\Delta\rho \approx \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + V \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) \Delta t.$$

Bei stetig differenzierbarer Dichtefunktion $\rho(x, t)$ ist im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ und $\Delta x = V \Delta t \rightarrow 0$ die Rate der Dichteänderung aus Fahrersicht gegeben durch

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial\rho}{\partial x}. \quad (7.17)$$

Mit $\frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial\rho}{\partial x}$ kann man die Kontinuitätsgleichung (7.8) für homogene Streckenabschnitte in Lagrangescher Darstellung (Fahrersicht) auch schreiben als

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + V \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Gleichung (7.18) besagt, dass sich die Dichte erhöht, wenn der Geschwindigkeitsgradient $\partial V / \partial x$ negativ ist, im mikroskopischen Bild das Vorderfahrzeug also langsamer fährt. Dadurch verringert sich der Abstand (die mikroskopische Entsprechung einer erhöhten Dichte). Außerdem kann die Dichte nicht negativ werden, denn $\rho(x, t) = 0$ impliziert $d\rho/dt = 0$. Negative Autos wären aber auch eine absurde Vorstellung. Die unterschiedlichen Sichtweisen der Eulerschen und Lagrangeschen Darstellung werden auch in Abb. 7.4 verdeutlicht. Dargestellt ist eine ortsfeste, stromabwärtige Staufront, bei der sich die Dichte (in der linken Grafik der Abbildung schattiert dargestellt) und die Geschwindigkeit (symbolisiert durch die Steigung der Trajektorien) an gegebener Position x nicht ändern, d.h. $\partial\rho(x, t)/\partial t = 0$

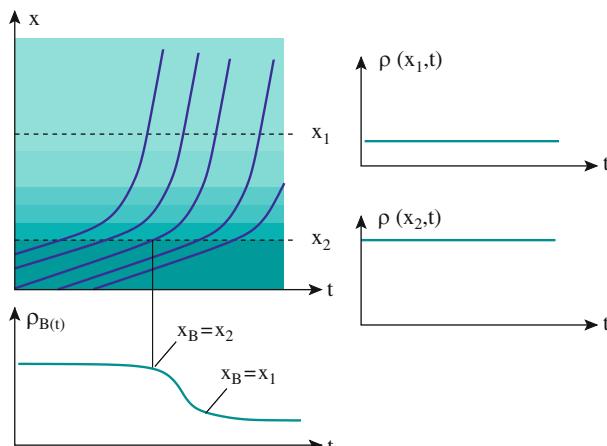


Abb. 7.4 Dichteänderung $\frac{d\rho_B}{dt} = \frac{d\rho(x, t)}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + V \frac{\partial\rho}{\partial x}$ bei Ausfahrt aus dem Stau aus der Sicht eines ausfahrenden Autofahrers B (mittlere Trajektorie). Da hier eine stehende Stauwelle dargestellt ist, gilt $\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} = 0$

und $\partial V(x, t)/\partial t = 0$ (vgl. die Zeitreihen im rechten Teil der Abbildung, welche z.B. von Detektorquerschnitten stammen könnten).

Die einzelnen Fahrer hingegen fahren aus dem Stau heraus, so dass sich aus ihrer Sicht die Dichte sehr wohl ändert: $\frac{d\rho}{dt} = V \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$ (vgl. die untere Zeitreihe der Abb. 7.4). Mit der Kontinuitätsgleichung bei stationären Verhältnissen auf homogener Strecke, $\frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0$, gilt natürlich auch $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x} < 0$.

Der Zusammenhang zwischen den Zeitableitungen im ortsfesten und im mitbewegten System gilt nicht nur für die Dichte, sondern für *beliebige* stetig differenzierbare Felder $F(x, t)$,

$$\boxed{\frac{dF(x, t)}{dt} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}.} \quad (7.19)$$

Insbesondere gilt die Beziehung für die Geschwindigkeit $V(x, t)$ selbst, was bei der Formulierung von makroskopischen Modellen mit dynamischer Geschwindigkeitsgleichung im Kap. 9 genutzt werden wird.

Übungsaufgaben

7.1 Fluss-Dichte-Geschwindigkeitsbeziehungen

Zeigen Sie die Gültigkeit der hydrodynamischen Relationen (7.5) bzw. (7.6). Zeigen Sie auch, dass diese bei ungewichteten oder flussgewichteten Geschwindigkeiten der einzelnen Fahrstreifen *nicht* gelten.

7.2 Fahrzeugerhaltung

Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass sich die Gesamt-Fahrzeugzahl auf einer Kreisstrecke mit variabler Fahrstreifenzahl $I(x)$, aber ohne Zu- und Abfahrten, nicht ändert.

7.3 Kontinuitätsgleichung I

Gegeben ist eine Autobahn mit einer $L = 300$ m langen Zufahrt, die bei $x = 0$ beginnt. Der Zufluss beträgt 600 Fahrzeuge pro Stunde. Formulieren Sie die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtverkehrsdichte für $0 \leq x \leq L$ sowie für $x > L$. (i) Nehmen Sie an, dass sich der Zustrom der Zufahrt gleichmäßig über deren ganze Länge verteilt. (ii) Häufig wechseln die Autofahrer (vor allem im freien Verkehr) bereits am Anfang einer Auffahrt auf die Hauptstrecke bzw. am Anfang einer Abfahrt auf den Verzögerungs-Fahrstreifen. Wie würde man das modellieren?

7.4 Kontinuitätsgleichung II

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung den Verkehrsfluss $Q(x)$ für stationäre Verhältnisse, d.h. $\partial \rho / \partial t = 0$ und konstantes, spurgemitteltes Verkehrsaufkommen $Q(x = 0, t) = Q_0$ am Zufluss bei $x = 0$. Betrachten Sie folgende zwei Fälle: (i) Die Strecke weist keine Zu- und Abfahrten, aber eine variable Spurzahl $I(x)$ auf. (ii) Die Strecke weist konstant I Spuren auf sowie

eine Abfahrt zwischen $x = 300$ m und 500 m mit konstantem Abfluss Q_{ab} und eine Auffahrt zwischen $x = 700$ m und 1000 m mit konstantem Zufluss Q_{zu} .

2. Auf einer dreispurigen Autobahn mit konstantem Verkehrsaufkommen $Q_{tot} = 3600$ Fz/h gibt es aufgrund einer Baustelle eine Reduktion von 3 auf 2 Fahrstreifen. Die damit verbundenen Spurwechsel finden zwischen $x = 0$ und $x = L = 500$ m statt. Geben Sie die mittlere Dichte ρ und den mittleren Fluss Q bezogen auf die beiden durchgängigen Spuren an. Setzen Sie eine dichteunabhängige Geschwindigkeit von 108 km/h voraus.
3. Vergleichen Sie nun die im vorherigen Aufgabenteil untersuchte Auswirkung einer Fahrstreifensperrung auf die verbleibenden zwei Fahrstreifen mit der einer Zufahrt der Länge $L = 500$ m auf eine zweispurige Autobahn. Für welchen Rampenfluss Q_{zu} und für welchen, möglicherweise auch innerhalb des Rampenbereichs $0 \leq x \leq 500$ m variablen Rampenquellterm $v_{rmp}(x)$ ist die Kontinuitätsgleichung identisch zu der aus Teilaufgabe 2?

7.5 Parabolisches Fundamentaldiagramm

Gegeben ist die Geschwindigkeits-Dichte-Relation $V(\rho) = V_0(1 - \rho/\rho_{max})$ mit der Wunschgeschwindigkeit V_0 und der maximalen Dichte ρ_{max} .

1. Geben Sie die Gleichung für das Fundamentaldiagramm $Q(\rho)$ an.
2. Bei welcher Dichte wird der maximale Fluss erreicht und wie hoch ist er? Geben Sie beides als Funktion von V_0 und ρ_{max} an.

Kapitel 8

Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Nichts ist mächtiger als eine Idee zur richtigen Zeit.

Victor Hugo

8.1 Modellgleichung

Die für alle Makromodelle gültige Kontinuitätsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung oder eine Differenzengleichung für die makroskopischen Größen ρ (Dichte) und V (Geschwindigkeit) bzw. Q (Fluss). Für eine vollständige Beschreibung wird noch eine zusätzliche Gleichung für den Fluss oder die Geschwindigkeit benötigt.

Da die Kontinuitätsgleichung durch die Streckengeometrie und die Art der mathematischen Formulierung vorgegeben ist, unterscheiden sich die verschiedenen Makromodelle nur in der Art, wie die Geschwindigkeit bzw. der Fluss modelliert wird.

In den Jahren 1955 und 1956 schlossen Lighthill und Whitham sowie unabhängig von ihnen Richards die als partielle Differentialgleichung formulierte Kontinuitätsgleichung durch die statische *Gleichgewichtsannahme* (engl. *equilibrium*)

$$Q(x, t) = Q_e(\rho(x, t)) \quad \text{bzw.} \quad V(x, t) = V_e(\rho(x, t)). \quad (8.1)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Verkehrsfluss $Q(x, t)$ bzw. die Geschwindigkeit $V(x, t)$ durch jeweils eine statische Beziehung an die Fahrzeugdichte $\rho(x, t)$ gekoppelt ist. Als Funktionen für die Geschwindigkeits-Dichte-Relation $V_e(\rho)$ (vgl. Abb. 8.1) und das *Fundamentaldiagramm* $Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho)$ dienen in der Regel Fitfunktionen, die an empirische Geschwindigkeits-Dichte- oder Fluss-Dichte-Daten angepasst werden (siehe beispielsweise Abb. 4.12).¹

¹ Geschwindigkeits-Dichte- und Fluss-Dichte-Diagramme sind eine der wichtigsten Darstellungsformen aggregierter Verkehrsdaten und wurden bereits in den Abschn. 4.2 und 4.4 behandelt. Im engeren Sinne bezeichnet das Fundamentaldiagramm nur die theoretische Fitfunktion an die Daten,

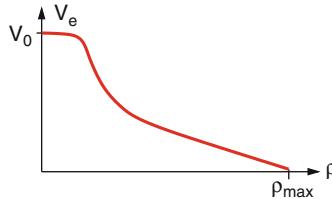


Abb. 8.1 Beispiel einer Gleichgewichtsrelation $V_e = f(\rho)$ für die Geschwindigkeit im Lighthill-Whitham-Richards- (LWR-) Modell (vgl. auch die empirischen Daten in den Abb. 4.4 und 4.12)

Setzt man die Gleichgewichtsannahme (8.1) in die Kontinuitätsgleichung (7.8) für homogene Strecken ein, so erhält man unter Verwendung der Kettenregel $\frac{\partial Q_e}{\partial x} = \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ das *Lighthill-Whitham-Richards-Modell*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{LWR-Modell.} \quad (8.2)$$

Im Falle inhomogener Strecken wird die Gleichgewichtsannahme entsprechend in die Kontinuitätsgleichungen (7.11) oder (7.15) eingesetzt. Da die Gleichung $Q_e(\rho)$ für das Fundamentaldiagramm hier nicht festgelegt werden muss und viele (mehr oder weniger realistische) konkrete Beziehungen vorgeschlagen wurden, stellt Gl. (8.2) kein Modell im engeren Sinne, sondern eine ganze *Modellklasse* dar. Deshalb spricht man auch von den *LWR-Modellen* in der Mehrzahl. In dieser Modellklasse gibt es mit der Kontinuitätsgleichung nur *eine* dynamische Gleichung. Deshalb werden Modelle dieser Klasse auch als makroskopische *Modelle erster Ordnung* (*first-order models*) bezeichnet. Im Gegensatz dazu haben die im Kap. 9 behandelten Modelle zweiter Ordnung eine weitere dynamische Gleichung für die Geschwindigkeit.

Die Gl. (8.2) für homogene Strecken kann auch in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(V_e + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (8.3)$$

geschrieben werden. Zu- und Abfahrten sowie Änderungen der Zahl der Fahrstreifen kann man durch die zusätzlichen Terme der allgemeinen Kontinuitätsgleichung (7.15) beschreiben, wobei auch in diesen Termen immer $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$ gilt.

die in einem Modell das mögliche Gleichgewicht des Verkehrsflusses darstellt. Oft werden aber bereits die (streuenden) Fluss-Dichte-Daten selbst als Fundamentaldiagramm bezeichnet.

8.2 Ausbreitung kontinuierlicher Dichteschwankungen

Die partiellen Differentialgleichungen (8.2) und (8.3) sind *nichtlineare Wellengleichungen*, welche die Ausbreitung sogenannter *kinematischer Wellen* beschreiben. Wir ermitteln nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit \tilde{c} dieser Wellen bzw. allgemeiner, kontinuierlicher Dichteschwankungen für das LWR-Modell. Dazu setzen wir den allgemeinen Wellen-Ansatz

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - \tilde{c}t)$$

in die Gleichung des LWR-Modells ein. In dieser Funktion bedeutet $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$ die Anfangsverteilung der Dichte und die Gleichung selbst sagt aus, dass sich diese Anfangsverteilung gleichförmig mit der Geschwindigkeit \tilde{c} ausbreitet. Definieren wir mit $\rho'_0(x)$ die Ableitung der (von einer Variablen) abhängenden Funktion ρ_0 nach ihrem Argument (hier x), erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\tilde{c}\rho'_0(x - \tilde{c}t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'_0(x - \tilde{c}t).$$

Setzt man dies in Gl. (8.2) ein, erhält man die Beziehung

$$-\tilde{c}\rho'_0(x - \tilde{c}t) + \frac{dQ_e}{d\rho} \rho'_0(x - \tilde{c}t) = 0.$$

Diese Beziehung ist nur dann für alle Orte und Zeiten gültig, falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit \tilde{c} von der Dichte abhängt und gegeben ist durch

$$\tilde{c}(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho} = \frac{d(\rho V_e(\rho))}{d\rho}.$$

(8.4)

Bezeichnet man wieder die Ableitung nach dem (einzigsten) Argument einer Funktion mit einem Hochkomma, $f'(x) = \frac{df}{dx}$, kann man dies auch schreiben als

$$\tilde{c}(\rho) = Q'_e(\rho) = V_e(\rho) + \rho V'_e(\rho). \quad (8.5)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\tilde{c}(\rho)$ von Dichteschwankungen im festen Koordinatensystem hängt also von der Dichte ab und ist proportional zur Steigung der Fluss-Dichte-Relation im Gleichgewicht (Fundamentaldiagramm). Insbesondere können sich Dichteschwankungen *in Fahrtrichtung* ausbreiten (freier Verkehr, linker Bereich des Fundamentaldiagramms, vgl. Abb. 8.2) oder *gegen die Fahrtrichtung* (gestauter Verkehr, rechter Bereich des Fundamentaldiagramms).

Wie hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v zusammen? Dazu betrachten wir die auf die Fahrzeuggeschwindigkeit bezogene *relative* Ausbreitungsgeschwindigkeit und setzen Gln. (8.4) und (8.5) ein:

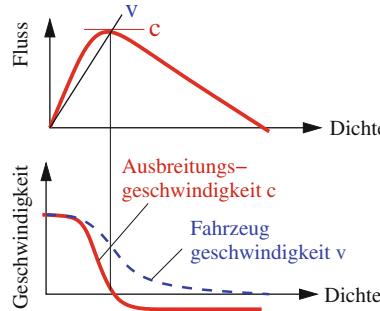


Abb. 8.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit $\tilde{c} = \frac{dQ_e}{d\rho}$ von Dichteschwankungen im LWR-Modell im Vergleich mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v . Im Fundamentaldiagramm (oben) ist \tilde{c} durch die Tangentensteigung und v durch die Steigung der Ursprungsgeraden gegeben

$$\tilde{c}_{\text{rel}}(\rho) = \tilde{c}(\rho) - V = \tilde{c}(\rho) - V_e(\rho) = \rho V'_e(\rho).$$

Da $V'_e(\rho)$ für alle realistischen Fälle negativ oder höchstens Null ist (vgl. Abb. 4.4 und 4.12), gilt $\tilde{c}_{\text{rel}} \leq 0$. Aus Fahrersicht können sich Dichtestörungen also nur *rückwärts* ausbreiten. Dies hat in vielen mikroskopischen Modellen seine Entsprechung darin, dass die Fahrer nur auf das *Vorderfahrzeug*, nicht jedoch auf das Hinterfahrzeug reagieren (siehe Kap. 10).

8.3 Schockwellen

Entstehung Gleichungen der Form (8.2) beschreiben Dichtewellen, deren Amplituden sich nicht verändern, die sich aber lokal unterschiedlich schnell fortbewegen, und zwar umso schneller, je geringer die lokale Dichte ist. Zur Veranschaulichung kann man sich die über den Ort aufgetragene Verkehrsdichte als einen Stapel bestehend aus vielen horizontalen Schichten vorstellen, wobei sich jede Schicht mit einer der jeweiligen Dichte entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeit (8.4) unabhängig von den anderen bewegt: Die höheren Schichten bewegen sich also langsamer oder sogar rückwärts (vgl. Abb. 8.3 oben, siehe auch Abb. 8.4). Bei einer „Stop-and-Go-Welle“ bedeutet dies, dass die stromaufwärtige Wellenfront immer steiler und die stromabwärtige immer flacher wird (Abb. 8.3 Mitte). Aus Sicht des Autofahrers bedeutet dies, dass der Übergang freier Verkehr → Stau immer abrupter wird, während die Fahrzeuge bei Übergang Stau → freier Verkehr immer langsamer aus dem Stau heraus beschleunigen.²

² In der mathematischen Literatur wird diese Aufweichung der Wellenfront auch als *dispersion fan* bezeichnet.

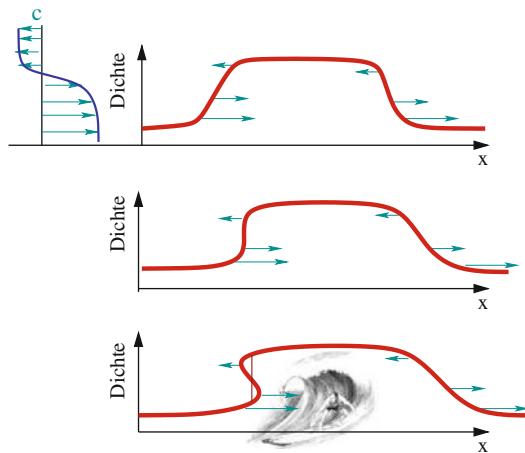


Abb. 8.3 Ausbildung von Schockfronten durch die Dichteabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im LWR-Modell

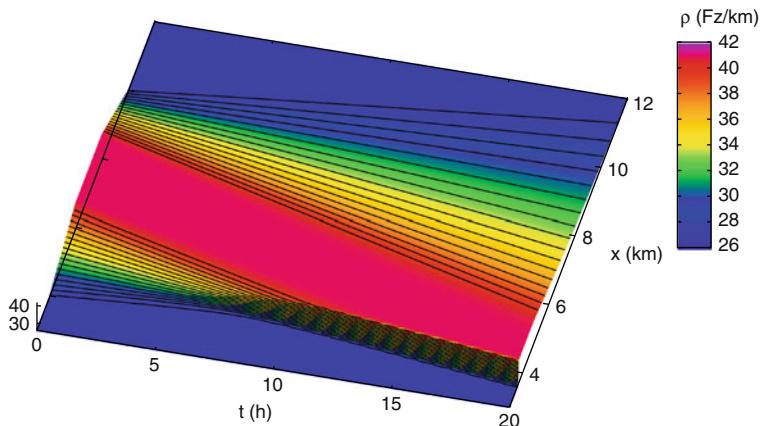


Abb. 8.4 Lösung des LWR-Modells mit einem Bereich gestauten Verkehrs (rot) mit freiem Verkehr (blau) davor und danach als Anfangsbedingung der Simulation (linker Rand). Man sieht, dass sich beim Übergang freier Verkehr \rightarrow Stau eine Schockfront ausbildet, beim Übergang Stau \rightarrow frei aber nicht. Die „Höhenlinien“ konstanter Dichte verlaufen gerade. Da außerdem Linien gleicher Dichte stets parallel zueinander bleiben, entspricht die Dynamik einer gleichmäßigen Verschiebung der Schichten konstanter Dichte relativ zueinander

Auf der stromaufwärtigen Seite kommt irgendwann der Zeitpunkt, in dem die Steigung $\partial\rho/\partial x$ unendlich wird und sich mathematisch die Wellen danach „überschlagen“ (vgl. Abb. 8.3 unten). Da es an einem Ort zu einer gegebenen Zeit nur eine definierte Dichte geben kann, ergeben „sich überschlagende“ Wellen keinen

Sinn. Es bildet sich stattdessen ein unstetiger Übergang aus, der in Abb. 8.3 (unten) durch eine senkrechte Linie gekennzeichnet wurde. Solche unstetigen Übergänge werden auch in der Simulation beobachtet: In der Abb. 8.4 steilt sich der Übergang von geringerer zu höherer Dichte auf, ehe sich, etwa zur Zeit $t = 10 \text{ min}$ bei $x = 4 \text{ km}$, ein unstetiger Übergang ausbildet. Diese in allen LWR-Modellen entstehenden diskontinuierlichen Dichtesprünge werden auch als *Schockwellen* bezeichnet. Sie entsprechen natürlich keinem realen Verkehrsgeschehen, so dass das Modell in dieser Hinsicht unrealistisch ist.

Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit Während die Details der Übergänge frei → gestaut und auch gestaut → frei in LWR-Modellen unrealistisch sind,³ beschreibt diese Modellklasse die Ausbreitung der Übergangszone *als Ganzes* sehr realistisch, so dass diese Modelle für großräumige Betrachtungen nützlich sind. Insbesondere stellt die im Folgenden berechnete Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen auch eine gute Näherung für die Ausbreitung endlicher, realistischer Übergänge dar.

Wir betrachten einen unstetigen Übergang vom Zustand 1 (freier Verkehr) in den Zustand 2 (gebundener Verkehr), vgl. Abb. 8.5. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir einen Fahrstreifen.⁴ Nimmt man einen hinreichend kleinen ortsfesten Streckenabschnitt $0 \leq x \leq L$ um die Lage der Schockfront $x_{12}(t)$ an, so kann man die Flüsse und Dichten vor und nach der Front als konstant annehmen, also

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1 & \text{für } x \leq x_{12}(t), \\ \rho_2 & \text{für } x > x_{12}(t). \end{cases}$$

Die Lage $x_{12}(t)$ der Schockfront *selbst* hingegen ist von der Zeit abhängig. Um nun die Geschwindigkeit $c_{12} = \frac{dx_{12}}{dt}$ zu berechnen, wird die Änderung $\frac{dn}{dt}$ der Fahrzeugzahl im Streckenabschnitt auf zweierlei Weise ausgedrückt. Aus der Fahrzeughaltung ergibt sich die Bilanzgleichung

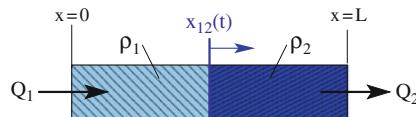


Abb. 8.5 Zur Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen

³ Die persönliche Erfahrung sagt uns, dass es bei Lauf-, Inlineskate- und Skilanglauf-Massenveranstaltungen nach dem Startschuss eine teils drastische Aufweichung der stromabwärtigen Front des vom Startfeld gebildeten „Riesenstaus“ gibt. Beim Kfz-Verkehr hingegen bleibt die Aufweichung eng begrenzt.

⁴ Bei $I > 1$ Fahrstreifen würde man in den folgenden Gleichungen n durch n/I ersetzen, das Ergebnis bliebe aber dasselbe.

$$\frac{dn}{dt} = Q_1 - Q_2.$$

Und mit der Definition der Dichte kann man die Fahrzeugzahl auch ausdrücken durch

$$n = \rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12}).$$

Ableiten dieser Gleichung nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \frac{d}{dt} (\rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12})) \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \frac{dx_{12}}{dt} \\ &= (\rho_1 - \rho_2) c_{12}.\end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke für $\frac{dn}{dt}$, erhält man schließlich

$$c_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q_e(\rho_1) - Q_e(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{Ausbreitung von Schockwellen.} \quad (8.6)$$

Das erste Gleichheitszeichen in Gl. (8.6) gilt nicht nur für die LWR-Gleichung, sondern allgemein immer dann, wenn Übergänge zwischen zwei Verkehrszuständen 1 und 2 hinreichend abrupt sind, so dass die Übergangszonen vernachlässigt werden können.

Fahrzeug- und Ausbreitungsgeschwindigkeiten Im Rahmen des LWR-Modells können alle relevanten Geschwindigkeiten aus dem Fundamentaldiagramm entnommen werden (vgl. Abb. 8.6).

1. Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Dichteschwankungen* $\tilde{c}(\rho)$, Gl. (8.4), ist durch die Tangentensteigung gegeben. Für freien Verkehr, also einer Dichte ρ unterhalb der Dichte ρ_K beim Flussmaximum (Zustand ① in Abb. 8.6) ist diese Geschwindigkeit positiv. Für gestauten Verkehr ($\rho > \rho_K$, Zustand ② in Abb. 8.6) ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit negativ.
2. Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockfronten* c_{12} , Gl. (8.6), ist durch die Steigung der Sekante gegeben, welche die Zustände $(\rho_1, Q_e(\rho_1))$ und $(\rho_2, Q_e(\rho_2))$ vor und nach der Schockfront schneidet.
3. Die *Fahrzeuggeschwindigkeit* $Q_e(\rho)/\rho$ ist durch die Steigung der durch den Punkt $(\rho, Q_e(\rho))$ gehenden Ursprungsgerade gegeben.

Die verschiedenen Geschwindigkeiten lassen sich durch die Steigungen der Tangenten, Sekanten und Ursprungsgeraden an bzw. zwischen den in Abb. 8.7

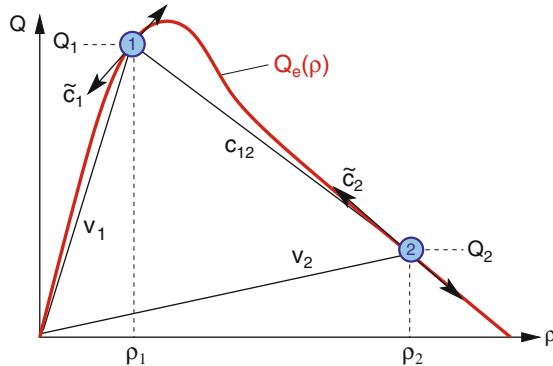


Abb. 8.6 Ablesen der Ausbreitungsgeschwindigkeiten $\tilde{c}(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho}$ von Dichteschwankungen, der Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_{12} von Schockfronten (hier vom Zustand ① in den Zustand ②) und der Fahrzeuggeschwindigkeiten $V_e = Q_e/\rho$ aus dem Fundamentaldiagramm $Q = Q_e(\rho)$

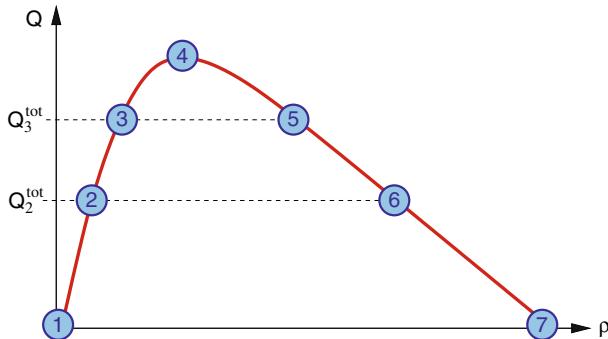


Abb. 8.7 Schematisches Fundamentaldiagramm. Die verschiedenen Punkte bzw. Zustände und die eingetragenen Verkehrsflüsse entsprechen den in Abb. 8.8 skizzierten Verkehrszuständen

dargestellten, durch die Symbole ① bis ⑦ beschriebenen Verkehrszuständen verdeutlichen. Eine mögliche, diesen Zuständen entsprechende Verkehrsdynamik ist in Abb. 8.8 dargestellt. Anhand der beiden Abbildungen lassen sich unter anderem folgende Fälle unterscheiden:

- Die temporäre Engstelle A reduziert den Fluss auf $K_A = Q_2^{\text{tot}}$. Da $Q_{\text{in}} > K_A$ ist, bricht der Verkehr zusammen. Stromabwärts resultiert daraus freier Verkehr (Zustand ②), während sich stromaufwärts ein Stau bildet (Zustand ⑥) mit der sich ausbreitenden stromaufwärtigen Front (Sekantensteigung $c_{36} < 0$) und einer an der Engstelle stationären, stromabwärtigen Front (Sekantensteigung $c_{62} = 0$). Die Geschwindigkeit $V_6 = Q_6/\rho_6$ im Stau ist hingegen positiv. Weiterhin bildet sich im stromabwärtigen Verkehr (in der Abbildung ganz links oben) ein Über-

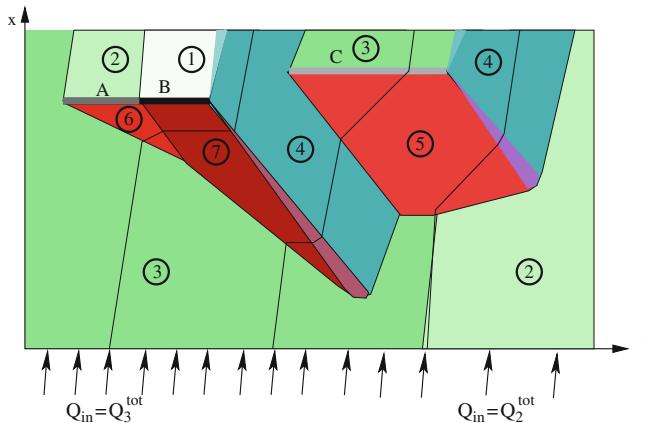


Abb. 8.8 Raumzeitliche Verkehrsdynamik eines LWR-Modells mit einem Fundamentaldiagramm gemäß Abb. 8.7. Der Zufluss Q_{in} entspricht anfangs dem Punkt ③ dieses Fundamentaldiagramms, nimmt später ab und entspricht dann Punkt ②. Ferner gibt es drei temporäre Engstellen: Engstelle A (beispielsweise unfallbedingt) hat eine Kapazität $K_A = Q_3^{tot}$, Engstelle B repräsentiert eine Vollsperrung (z.B. während des Wegtransports der Unfallfahrzeuge) und die weniger starke Engstelle C hat eine Kapazität $K_C = Q_2^{tot}$. Die Steigung der drei eingezeichneten Trajektorien kennzeichnet die Fahrzeuggeschwindigkeit. Die Übergänge von höheren zu geringeren Dichten „weichen“ mit der Zeit etwas auf, die anderen bleiben „scharf“

gang von Zustand ② zu Zustand ③, dessen Geschwindigkeit c_{23} nur geringfügig langsamer ist als die beiden Fahrzeuggeschwindigkeiten V_2 und V_3 .

- Die Totalsperrung (Engstelle B) reduziert den Verkehrsfluss sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts auf Null, nur dass stromaufwärts die maximale Dichte (Zustand ⑦) vorherrscht, während die Fahrbahn stromabwärts leer ist (Zustand ①). Dies ergibt einige neue Übergänge mit Geschwindigkeiten $c_{67} < c_{37} < c_{36} < 0$ und natürlich $c_{71} = 0$.
- Die Aufhebung der Vollsperrung produziert einen mit der Geschwindigkeit $c_{74} \approx c_{67} < 0$ sich ausbreitenden Übergang vom Stillstand zum Maximalflusszustand. Zu beachten ist, dass im Allgemeinen hier betrachteten Fall mit konkavem Fundamentaldiagramm (die zweite Ableitung ist nie positiv) die Übergänge von gestauten zu freien Zuständen allmählich aufweichen, nicht jedoch die umgekehrten Übergänge (vgl. auch Abb. 8.4). Das auch als *Dispersion* bezeichnete Phänomen der Aufweichung ist jedoch nicht immer realistisch.
- Schließlich erzeugt die schwächste temporäre Engstelle C stromaufwärts und stromabwärts Flüsse $Q_3^{tot} = Q_5^{tot}$, also $c_{53} = 0$ und je nach Zufluss eine stromaufwärts wachsende Staufront ($c_{45} < 0$), einen stationären Übergang ($c_{35} = 0$) und eine in Fahrtrichtung schrumpfende Staufront ($c_{25} > 0$). Nach Aufhebung dieser Engstelle ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie nach Aufhebung der Vollsperrung, d.h. einen sich mit der Geschwindigkeit c_{54} ausbreitenden Übergang Stau → Maximalflusszustand, der schließlich auf die stromaufwärtige Staufront trifft und damit die Auflösung des Staus markiert.

8.4 LWR-Modelle mit dreieckigem Fundamentaldiagramm

Die einfachsten und am effizientesten zu simulierenden Modelle aus der Klasse der Lighthill-Whitham-Richards- (LWR-) Modelle haben ein „dreieckiges“ Fundamentaldiagramm folgender Form (vgl. Abb. 8.9):

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} V_0 \rho & \rho \leq \rho_K = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}} \quad (\text{freier Verkehr}), \\ \frac{1}{T} \left[1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right] & \rho_K < \rho \leq \rho_{\max} \quad (\text{gebundener Verkehr}). \end{cases} \quad (8.7)$$

In der kontinuierlichen Version (8.2) wird es auch als *Section-Based*-Modell bezeichnet. Dieser Name röhrt daher, da es dank seiner speziellen Eigenschaften – nur zwei feste Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen, eine für freien und eine für gestauten Verkehr – besonders schnell lösbar ist, wenn man geeignete „road sections“ (Streckenabschnitte) definiert. Dann muss nämlich nicht die Kontinuitätsgleichung bzw. die Modellgleichung (8.2) für alle Orte x gelöst werden, sondern für jeden Streckenabschnitt nur eine Bewegungsgleichung für die Lage der einzigen Staufront, die es innerhalb eines jeden Streckenabschnitts maximal geben kann. Die Einteilung erfolgt so, dass jeder Streckenabschnitt stromabwärts durch Inhomogenitäten bzw. Engstellen begrenzt und stromaufwärts an andere Abschnitte oder an stromaufwärtige Randbedingungen angebunden ist.

Eine weitere Konsequenz der festen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ist das Fehlen von Dispersion (Aufweichungen) bei Übergängen von höherer zu geringerer Dichte durch den in Abb. 8.3 dargestellten Mechanismus (siehe auch Abb. 8.8 und 8.11). Zwar wird teilweise eine geringe Aufweichung in der Realität beobachtet; das Fehlen einer solchen Dispersion ist dennoch realistischer als die viel zu starke Dispersion, die durch die meisten anderen Fundamentaldiagramme hervorgerufen wird.

Wie die anderen LWR-Modelle kann man auch das Section-Based-Modell bezüglich des Ortes (Zellen) und der Zeit (Zeitschritte) gemäß Gl. (7.9) diskretisieren. Die resultierende, gekoppelte iterierte Abbildung wird als *Cell-Transmission-Modell* (CTM) bezeichnet. Das CTM findet wegen seiner numerischen Effizienz und

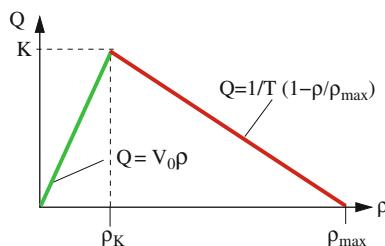


Abb. 8.9 Dreieckiges Fundamentaldiagramm, wie es beim Cell-Transmission-Modell und beim Section-Based-Modell verwendet wird

der Möglichkeit einer einfachen Erweiterung auf Netzwerke (vgl. Abschn. 8.4.4) breite Anwendung, vor allem bei der modellgestützten Verkehrslageschätzung.

8.4.1 Modellparameter und Eigenschaften

Die drei Modellparameter des Section-Based-Modells und des diskretisierten Cell-Transmission-Modells (CTM) sind zusammen mit typischen Werten in der Tabelle 8.1 zusammengestellt. Da das CTM auch zur großräumigen Modellierung von Fußgängerströmen eingesetzt wird (z.B. bei der Planung und Organisation der Pilgerströme bei der *Hadsch* in Mekka), sind auch dafür Parameter angegeben.⁵

Wie bei allen makroskopischen Modellen sind die Parameter als *Mittelwerte* der einzelnen Fahrzeuge oder Fußgänger zu verstehen. Die maximale Dichte entspricht dem Kehrwert des minimalen Bruttoabstandes l_{eff} , welcher sich aus (Mittelwerten) der Fahrzeulgänge und des Minimalabstandes s_0 im Stau zusammensetzt:

$$l_{\text{eff}} = s_0 + l = \frac{1}{\rho_{\max}}. \quad (8.8)$$

8.4.1.1 Charakteristische Eigenschaften auf homogener Strecke

Die numerische Effizienz und Einfachheit des Section-Based-Modells und des CTM beruhen auf einer Reihe von Eigenschaften, die sie gegenüber anderen LWR-Modellen auszeichnen:

Umkehrfunktion des Fundamentaldiagramms. Die zentrale Eingangs- und Steuergröße bei realen, d.h. offenen Systemen ist der Verkehrsfluss, während sich die Verkehrsdichte aus dem Fluss ergibt. Nun ist die Umkehrfunktion des Fundamentaldiagramms $Q_e(\rho)$, also die Dichte-Fluss-Relation $\rho(Q)$, nicht eindeutig, da zu gegebenem Verkehrsfluss der Verkehr frei oder gebunden sein kann. Dementsprechend gibt es zwei Dichtewerte, die als *freier Zweig* $\rho_{\text{free}}(Q)$ und *gestauter Zweig* $\rho_{\text{cong}}(Q)$ der Dichte-Fluss-Relation bezeichnet werden. Im Section-Based-Modell

Tabelle 8.1 Modellparameter des Section-Based-Modells und des diskretisierten Cell-Transmission-Modells (CTM) zusammen mit typischen Werten zur Beschreibung von Autobahn-, Stadt- und Fußgängerverkehr

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr	Typ. Wert Fußgänger
Wunschgeschwindigkeit V_0	110 km/h	50 km/h	1.3 m/s
Folgezeit T	1.4 s	1.2 s	0.5 sm
Maximale Dichte ρ_{\max}	120 Fz/km	120 Fz/km	4 Fußg/m ²

⁵ Die Anwendung dieses Modells funktioniert nur, wenn alle Fußgänger in eine Richtung gehen. Da Fußgängerströme zweidimensional sind, ändern sich die Einheiten von T und ρ_{\max} . Der Kehrwert der Folgezeit ist hier als Fluss pro Meter Wegbreite zu verstehen.

ergeben sich die Gleichgewichtsdichten zu

$$\rho_{\text{free}}(Q) = \frac{Q}{V_0}, \quad (8.9)$$

$$\rho_{\text{cong}}(Q) = \frac{1 - QT}{l_{\text{eff}}} = \rho_{\text{max}}(1 - QT). \quad (8.10)$$

Kapazität. Das Flussmaximum Q_{max} , also die Kapazität K pro Fahrstreifen auf homogener Strecke, ergibt sich aus dem gestauten und dem freien Zweig des Fundamentaldiagramms so, dass keine Unstetigkeiten oder Hysterese-Effekte auftreten. Der Schnittpunkt der beiden Zweige ergibt den Ausdruck

$$\frac{K}{I} = Q_{\text{max}} = \frac{1}{T + \frac{l_{\text{eff}}}{V_0}}. \quad (8.11)$$

Die Kapazität ist also *immer kleiner als der kehrwert der mittleren Folgezeit bzw. Nettozeitlücke T* .⁶ Sie steigt mit V_0 und sinkt mit T und l_{eff} (vgl. Abb. 8.10). Außerdem kann man zeigen, dass bei gegebener Folgezeit das Section-Based-Modell von allen Modellen die größte Kapazität aufweist.⁷ Der dazugehörige Wert ρ_K der Dichte bei maximalem Fluss ist

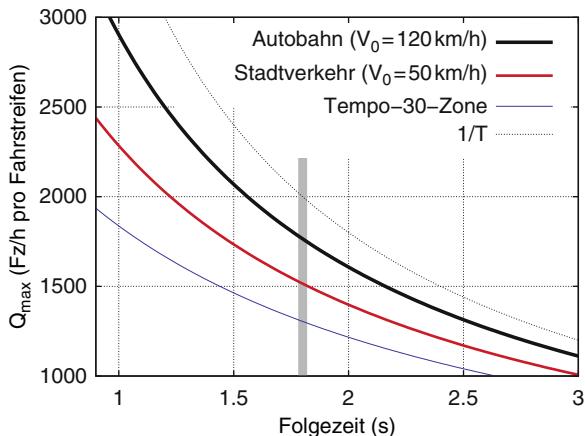


Abb. 8.10 Fahrstreifenbezogene Kapazität Q_{max} des dreieckigen Fundamentaldiagramms für eine effektive Fahrzeulgänge von 8 m ($\rho_{\text{max}} = 125$ Fz/km). Der senkrechte Balken bei $T = 1.8$ s entspricht der *Halben-Tacho-Abstandsregel*

⁶ Der Parameter T hat nichts mit einer Reaktionszeit zu tun, vgl. den Unterabschnitt „Beziehung zu einem Fahrzeugfolgemodell“ auf S. 87.

⁷ Insbesondere bei den später behandelten Modellen mit dynamischer Geschwindigkeit kann sie durch Instabilitäten effektiv auch niedriger sein.

$$\rho_K = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}. \quad (8.12)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeiten im freien Verkehr. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Fluss-, Dichte- und Geschwindigkeitsschwankungen im freien Verkehr sind gegeben durch die Steigung des freien Zweigs des Fundamentaldiagramms:

$$c_{\text{free}} = \left. \frac{dQ_e}{d\rho} \right|_{\rho < \rho_K} = V_0. \quad (8.13)$$

Die Schwankungen pflanzen sich also mit derselben Geschwindigkeit wie die Fahrzeuge selbst fort und diese Geschwindigkeit ist außerdem gleich der Wunschgeschwindigkeit V_0 . Im Rahmen dieser Modellklasse findet im freien Verkehr keinerlei Wechselwirkung statt. Andernfalls würden die Fahrer auf den Verkehr stromabwärts reagieren, wodurch sich Störungen relativ zur Fahrzeuggeschwindigkeit nach hinten fortpflanzen. Dies gilt auch für größere Störungen und Sprünge $\rho_1 \rightarrow \rho_2$, solange die Dichten ρ_1 und ρ_2 unterhalb der Dichte ρ_K am Flussmaximum liegen (vgl. Gl. (8.12)).

Ausbreitungsgeschwindigkeiten im gebundenen Verkehr. Auf der „gestauten“ Seite des Fundamentaldiagramms sind die Geschwindigkeiten von Geschwindigkeits-, Fluss- und Dichteschwankungen konstant und durch

$$c_{\text{cong}} = c = \left. \frac{dQ_e}{d\rho} \right|_{\rho > \rho_K} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T} = -\frac{1}{\rho_{\max} T} \quad (8.14)$$

gegeben. Dasselbe gilt für Sprünge, sofern sich auf beiden Seiten des Sprungs die Dichten im gestauten Bereich $\rho > \rho_K$ des Fundamentaldiagramms befinden. Diese konstante, gegen die Fahrtrichtung gerichtete Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch empirische Beobachtungen bestätigt. Sie gilt nur für dreieckige Fundamentaldiagramme (vgl. Abb. 8.11). Darüber hinaus gibt diese Gleichung die wesentlichen Einflussfaktoren dieser Geschwindigkeit an: Der Betrag von c ist gleich einer effektiven Fahrzeulgänge, die innerhalb einer Folgezeit (Nettozeitlücke) zurückgelegt wird. Der Wert $|c|$ beträgt in Europa etwa 14–16 km/h und in den USA eher 18–20 km/h.

Diskutieren Sie die Beobachtung, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Dichteschwankungen in gebundenem Verkehr in den USA etwas größer ist als in Europa. Betrachten Sie dabei bekannte Unterschiede in den Fahrzeugflotten in diesen Regionen.

Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs freier \rightarrow gebundener Verkehr. Bezeichnet man den stromaufwärtigen freien und den stromabwärtigen gebundenen

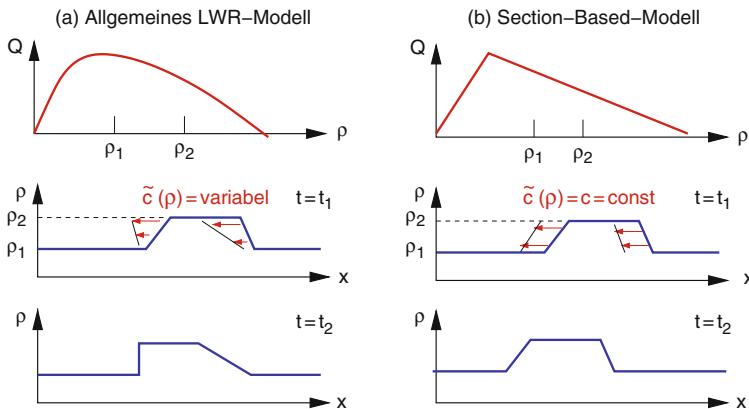


Abb. 8.11 Ausbreitung von Störungen in allgemeinen LWR-Modellen (*linke Spalte*) und dem Section-Based-Modell als Spezialfall (*rechte Spalte*). Gezeigt sind jeweils das Fundamentalsdiagramm (*oben*), eine Anfangsstörung innerhalb gebundenen Verkehrs zur Zeit t_1 (*Mitte*) und das Aussehen der Störungen einige Zeit später, $t_2 > t_1$ (*unten*). Nur im Section-Based-Modell breiten sich Störungen mit konstanter Geschwindigkeit aus

Verkehr mit den Indizes 1 und 2, so pflanzt sich die resultierende *stromaufwärtige Staufront* mit der Geschwindigkeit

$$c_{\text{up}} = c_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_{\max}(1 - Q_2 T) - Q_1 / V_0} \quad (8.15)$$

fort. Diese Geschwindigkeit kann alle Werte zwischen c und V_0 annehmen, sich insbesondere also auch in beide Richtungen (wachsende bzw. schrumpfende Staus) bewegen.

Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs gebundener Verkehr \rightarrow Maximalflusszustand. In allen LWR-Modellen ist der Ausfluss aus dem Stau durch den *Maximalflusszustand* (ρ_K, Q_{\max}) gegeben. Allerdings ist der Maximalflusszustand im Fall einer Engstelle und der damit verbundenen stationären Staufront relativ zur Engstelle zu sehen (siehe den folgenden Abschn. 8.4.3). Allgemein ist der Übergang entweder stationär an eine Engstelle gebunden oder er breitet sich stromaufwärts (entgegen der Fahrtrichtung) aus. Auf homogenen Strecken gibt es nur die letztere Möglichkeit. Wie man anhand Abb. 8.9 sieht, ist bei dreieckigem Fundamentalsdiagramm die Geschwindigkeit identisch zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten innerhalb von Staus durch c gegeben:

$$c_{\text{down}} = c = -\frac{1}{\rho_{\max} T} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T}. \quad (8.16)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Section-Based-Modells kann man folgendermaßen zusammenfassen:

In LWR-Modellen mit dreieckigen Fundamentaldiagrammen kommen auf homogenen Strecken ausschließlich die drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten $c_{\text{free}} = V_0$ (freier Verkehr), $c_{\text{cong}} = c_{\text{down}} = c = -l_{\text{eff}}/T$ (gebundener Verkehr und stromabwärtige Staufront) und c_{up} nach Gl. (8.15) (stromaufwärtige Staufront) vor. Auf inhomogenen Strecken gibt es zusätzlich noch stationäre Staufronten ($c_{\text{down}} = 0$). Dies gilt für beliebige kleine und große sowie kontinuierliche oder unstetige Änderungen der Größen ρ , V und Q .

Beziehung zu einem Fahrzeugfolgemodell. Bei gegebenen makroskopischen Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern können Fahrzeugtrajektorien $x_i(t)$ von Fahrzeugen i direkt aus den Definitionen der Dichte (d.h. dem inversen Bruttoabstand zweier Fahrzeuge) und der Geschwindigkeit (d.h. der Tangentensteigung der durch den raumzeitlichen Punkt (x, t) verlaufenden Trajektorie) generiert werden (vgl. Abb. 8.12):

$$x_i(t_0) = x_0, \quad \int_{x_{i+1}(t_0)}^{x_i(t_0)} \rho(x, t_0) dx = 1, \quad \frac{dx_i}{dt} = V(x_i, t). \quad (8.17)$$

Durch Vorgabe eines einzigen Punktes (x_0, t_0) , durch den eine Trajektorie verlaufen soll, sind für beliebige zeitkontinuierliche makroskopische Modelle im gesamten

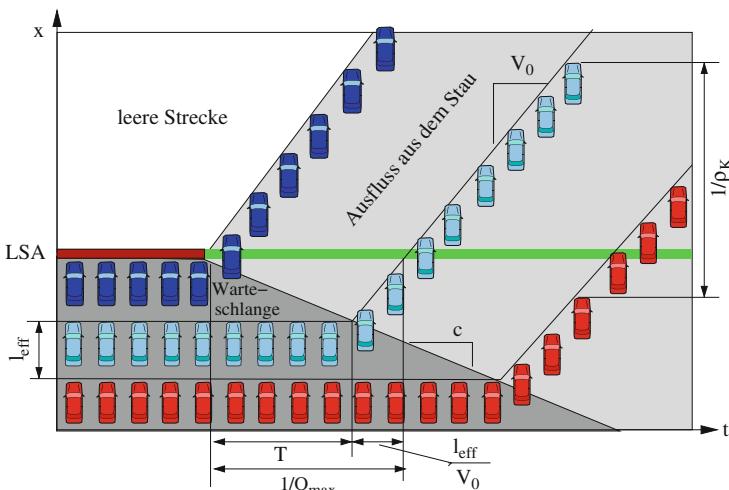


Abb. 8.12 Trajektorien dreier Fahrzeuge, welche mit Gl. (8.17) aus makroskopischen Dichte- und Geschwindigkeitsfeldern erzeugt wurden. Der in Graustufen hinterlegte Dichteverlauf (je dunkler, desto höher die Dichte) entspricht der Lösung des Section-Based-Modells für eine Situation, in der eine Lichtsignalanlage (LSA) von rot auf grün springt und sich die Warteschlange auflöst

raumzeitlichen Gebiet, in dem die makroskopischen Größen vorliegen, *alle* Trajektorien zu *allen* Zeiten definiert.

Für das Section-Based-Modell (und nur für dieses) entsprechen die derart erzeugten Trajektorien für beliebige, gebundene Verkehrszustände ($\rho(x, t) > \rho_K$) folgendem, *Newell-Modell* genannten Fahrzeugfolgemodell (vgl. Kap. 10.7):

$$v_i(t + T) = v_{i-1}(t).$$

Dies bedeutet, dass nach einer Zeit T der Fahrer des Fahrzeugs i seine Geschwindigkeit auf einen Schlag gleich der Geschwindigkeit des vor ihm fahrenden Fahrzeugs $i - 1$ setzt (vgl. Abb. 8.12).

Für das Section-Based-Modell kann man also in diesem Fall die Folgezeit T (Nettozeitlücke) gleich der Reaktionszeit setzen. Dies gilt aber nur für Übergänge innerhalb gebundenen Verkehrs einschließlich des Maximalfluss-Zustandes. Beispielsweise fährt in Abb. 8.12 das erste Fahrzeug hinter der LSA mit Reaktionszeit Null an (indem es instantan auf die Wunschgeschwindigkeit beschleunigt).

8.4.1.2 Formulierung des Modells mit messbaren Größen

Das dreieckige Fundamentaldiagramm wurde in Gl. (8.7) mit Hilfe von Parametern formuliert, welche direkt den Bezug zu einzelnen Fahrzeugen und dem Fahrverhalten herstellen: Ein Parameter für das Verhalten im freien Verkehr (Wunschgeschwindigkeit V_0), einer für gebundenen Verkehr (Folgezeit T) und einer für das Fahrzeug (effektive Länge $l_{\text{eff}} = 1/\rho_{\max}$). Abgesehen von der Wunschgeschwindigkeit lassen sich diese Parameter jedoch nicht mit den meist vorliegenden aggregierten Querschnittsdaten messen. Für die Messung der Folgezeit benötigt man Einzelfahrzeugdaten, während die Dichtebestimmung mit großen systematischen Fehlern behaftet ist (vgl. Abschn. 3.3.1). Insbesondere lässt sich die maximale Dichte prinzipiell nicht aus Querschnittsdaten bestimmen.

Mit Hilfe der Beziehungen (8.14) und (8.11) lassen sich jedoch T und l_{eff} durch die leichter messbaren makroskopischen Größen Kapazität Q_{\max} pro Fahrstreifen und Ausbreitungsgeschwindigkeit c ausdrücken:

$$\frac{1}{l_{\text{eff}}} = \rho_{\max} = Q_{\max} \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{c} \right), \quad T = \frac{1}{Q_{\max} \left(1 - \frac{c}{V_0} \right)}. \quad (8.18)$$

Die Kapazität ist annähernd durch den Ausfluss nach einem Verkehrszusammenbruch gegeben, oder alternativ durch den maximalen Fluss, der über einen hinreichend langen Zeitraum (z.B. einer halben Stunde) ohne Zusammenbruch möglich ist.⁸ Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch die Zeitdifferenz berechnet, in-

⁸ Da ein Verkehrszusammenbruch 10 min und länger von der Entstehung bis zur sichtbaren Ausprägung benötigt, sind über kürzere Zeiträume wesentlich höhere Flüsse möglich. Diese sind jedoch für LWR-Modelle, die prinzipiell keine Instabilitäten modellieren können, nicht relevant.

nerhalb der Stauwellen von aufeinanderfolgenden Detektoren registriert werden. Unter Verwendung dieser Variablen lässt sich das „dreieckige“ Fundamentaldiagramm ausdrücken durch

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} V_0 \rho & \text{falls } \rho \leq \frac{Q_{\max}}{V_0} \text{ (freier Zweig),} \\ Q_{\max} \left[1 - \frac{c}{V_0} \right] + c\rho & \text{sonst (gestauter Zweig).} \end{cases} \quad (8.19)$$

Zur modellgestützten Verkehrslagebestimmung wird das Section-Based-Modell oder das diskrete Cell-Transmission-Modell vorwiegend in dieser Form formuliert. Insbesondere lassen sich so die Modelle direkt anhand der Daten kalibrieren, die Modellparameter also anhand der gemessenen Werte festlegen.

8.4.2 Wahl der Streckenabschnitte

Sowohl im Section-Based-Modell als auch im Cell-Transmission-Modell (CTM) wird eine Richtungsfahrbahn in mehrere Abschnitte (Zellen) k aufgeteilt. Der Index k wird dabei in stromabwärtiger Richtung als steigend definiert.

8.4.2.1 Aufteilung im Section-Based-Modell

Bei der Wahl der Streckenabschnitte im Section-Based-Modell nutzt man aus, dass, abgesehen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_{up} der stromaufwärtigen Staufront, *alle* Ausbreitungsgeschwindigkeiten konstant sind (mit einem der drei Werte c , 0 oder V_0). Dadurch reduziert sich die gesamte raumzeitliche Dynamik auf Bewegungsgleichungen für die variable Geschwindigkeit und der sich damit ergebenden Position der stromaufwärtigen Staufront. Die Streckenabschnitte des Section-Based-Modells werden nun so definiert, dass es in jedem Abschnitt nur eine einzige derartige Staufront geben kann:

Eine *road section* k des Section-Based-Modells ist ein homogener Streckenabschnitt der Länge $L^{(k)}$ und Kapazität $K^{(k)}$, welcher stromabwärts durch eine *Streckeninhomogenität* oder *Engstelle (Bottleneck)* der Kapazität $K_B^{(k)}(t)$ begrenzt ist. Eine Engstelle ist ein Abschnitt mit lokal reduzierter Kapazität.

8.4.2.2 Aufteilung im Cell-Transmission-Modell

Simuliert man mit dem von vornherein diskreten CTM, so verwendet man in der Regel Streckenabschnitte (Zellen, engl. *cells*) einheitlicher Länge, die im Gegensatz zum Section-Based-Modell deutlich kürzer sind (100–500 m gegenüber 5 km und mehr) und keine innere Struktur aufweisen. Innerhalb der CTM-Zelle herrscht

daher eine einheitliche Dichte. Da keine der Fahrzeuggeschwindigkeiten und Ausbreitungsgeschwindigkeiten innerhalb eines Aktualisierungs-Zeitintervalls Δt zu Distanzen größer als einer Zellenlänge führen dürfen, gilt für die Zeit-Schrittweite $\Delta t < L/V_0$.⁹ Daher steigt bei gegebenem Straßennetz die Rechengeschwindigkeit umgekehrt proportional zum Quadrat der Zellenlänge. Mit der Zellenlänge steigen aber auch die Diskretisierungsfehler, vor allem die in Abschn. 9.5 besprochene *numerische Diffusion*.

8.4.3 Modellierung von Engstellen

Die wichtigsten Engstellen bzw. Streckeninhomogenitäten sind in Abb. 8.13 dargestellt. Die Engstellen $k = 1, 2, 5$ und 6 sind sogenannte *flusserhaltende Engstellen*, während die Ausfahrt ($k = 3$) und Einfahrt ($k = 4$) zusätzliche Rampenflüsse enthalten.

- Bei *flusserhaltenden Engstellen* (*flow-conserving bottleneck*) gehen alle Fahrzeuge des Abschnitts k in den stromabwärtigen Abschnitt $k + 1$ über und Abschnitt $k + 1$ erhält keine Fahrzeuge aus anderen Quellen.
- Bei *nicht flusserhaltenden Engstellen* gibt es Quellen und Senken in Form von Zufahrten, Abfahrten oder Kreuzungen. In der Sprache des Wirtschaftlers ändert sich in diesem Fall an der Engstelle nicht das „Angebot“ (Kapazität), sondern die „Nachfrage“.

Ferner können die Engstellen *permanent* (in der Abbildung die Engstellen 1–4 sowie Engstelle 5 in der Ausprägung „Baustelle“) oder *temporär* sein (Engstelle 5 in der Ausprägung „Unfall“ sowie die nur in den Rotphasen aktive Ampel-Engstelle 6).

Eine zentrale Rolle bei der Modellierung spielt, unabhängig von der Ausprägung und Art der Engstelle, ein einziges Merkmal, die „Engstellenstärke“ (vgl. auch Kap. 17):

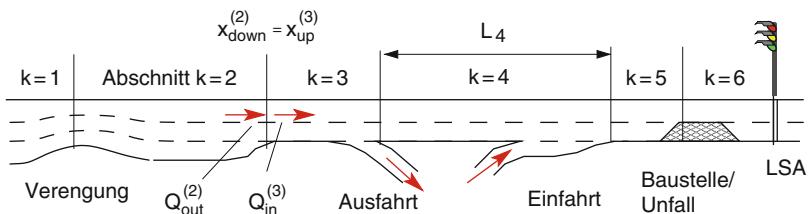


Abb. 8.13 Definitionen der Abschnitte (*sections*) bei LWR-Modellen mit dreieckigem Fundamentaldiagramm mit den hier besprochenen Typen von Engstellen. Jeder Abschnitt besteht aus einer homogenen Strecke mit einer Engstelle bzw. Inhomogenität am stromabwärtigen Rand

⁹ Ansonsten kann die Simulation instabil werden und zu negativen Dichten führen; siehe auch die Diskussion der numerischen Stabilität in Absch. 9.5 und insbesondere Gl. (9.33).

Im Rahmen von LWR-Modellen werden die Auswirkungen einer Engstelle auf die Verkehrsdynamik allein durch die mit der Engstelle einhergehende Reduktion der Kapazität, also der *Engstellenstärke* $\Delta K > 0$, bestimmt.

Im Folgenden wird die Modellierung verschiedener Engstellen beschrieben und insbesondere ΔK bestimmt.

8.4.3.1 „Klassische“ Engstellen

„Klassische“ Engstellen werden verursacht durch *lokale Änderungen von Streckeneigenschaften* (Inhomogenitäten) wie Steigungen, Gefälle, Kurven, Tempolimits und Fahrbahnverschwenkungen oder -verengungen. Eine Kombination dieser Engstellen ist oft bei Baustellen anzutreffen. Das gemeinsame Merkmal dieser Engstellen ist eine *lokale, fahrstreifenbezogene Reduktion der Kapazität*, ohne dass Fahrstreifensperrungen, Zu- oder Abfahrten vorliegen.¹⁰ Die daraus resultierende Kapazitätsreduktion ΔK wird durch lokal geänderte Parameter modelliert.¹¹ Im Fall des dreieckigen Fundamentaldiagramms kann ΔK durch eine lokal vergrößerte Folgezeit T und ggf. zusätzlich durch eine lokal reduzierte Wunschgeschwindigkeit V_0 erreicht werden. Beschreibt man mit den Indizes 1 und 2 die Situation vor und nach der Engstelle, gilt

$$\Delta K_{\text{cl}} = I \left(\frac{V_{01}}{V_{01}T_1 + l_{\text{eff}}} - \frac{V_{02}}{V_{02}T_2 + l_{\text{eff}}} \right). \quad (8.20)$$

Die Streckenabschnitte werden dabei so gewählt, dass ΔK immer positiv ist, ein Abschnitt also wirklich mit einer Kapazitätsreduktion endet. Die danach eventuell folgende Kapazitätserweiterung liegt im nächsten stromabwärtigen Abschnitt.¹²

Abbildung 8.14 zeigt die Verhältnisse für eine gleichzeitige Änderung der Parameter T und V_0 . Die dünnen, grauen Linien zeigen das Fundamentaldiagramm vor und nach (bzw. innerhalb) der Engstelle. Die dicken Linien zeigen mögliche statioäre Zustände freien Verkehrs innerhalb und außerhalb der Engstelle. Die Punkte zeigen die Verhältnisse nach einem Zusammenbruch: (i) freier Verkehr stromab-

¹⁰ Neben „klassischen“, d.h. baulichen „Verengungen“ gibt es auch Engstellen, die allein durch das Fahrverhalten induziert werden („verhaltensinduzierte Engstelle“). So ist denkbar, dass ein Stau bzw. Unfall *in der Gegenrichtung* zu einem geänderten Fahrverhalten (und damit zu einer Kapazitätsreduktion) auf einer ansonsten homogenen Strecke führt.

¹¹ Man beachte, dass die *Ursache* einer „klassischen“ Engstelle in einer (baulichen) Streckeninhomogenität liegt. Das veränderte Verhalten der Fahrer wird durch die Inhomogenität bewirkt, ist also lediglich eine *Folge*. Für eine Modellierung der Engstelle, d.h. der Kapazitätsreduktion, sind lokal veränderte Parameter aber sehr effektiv.

¹² Eine Kapazitätserweiterung führt aber im Rahmen der LWR-Modelle nicht zu neuer Dynamik: An ihr können Staus weder entstehen noch sich auflösen.

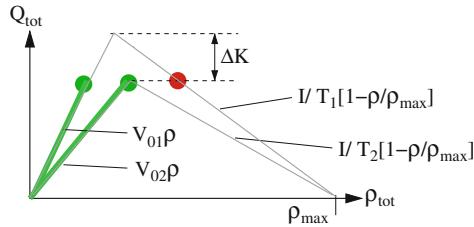


Abb. 8.14 Modellierung einer „klassischen“ Engstelle ohne Spurzahlreduktion oder Zuflüsse durch Änderung der Parameter T und V_0 . Die Punkte zeigen die stationären Verkehrsflüsse nach einem Verkehrszusammenbruch an (siehe Haupttext)

wärts (linker Punkt), (ii) Maximalflusszustand im Bereich der Engstelle (mittlerer Punkt) und (iii) Stau/gebundener Verkehr stromaufwärts (rechter Punkt). Zu beachten ist, dass zur Bestimmung der Verhältnisse nach einem Verkehrszusammenbruch im Allgemeinen immer das Fundamentaldiagramm der *Gesamtgrößen* $Q_{\text{tot}}(\rho_{\text{tot}})$ und nicht der gemittelten Größen Q und ρ relevant ist. Während dies hier keine Rolle spielt (da sich die Fahrstreifenzahl nicht ändert), wird es für die folgenden Engstellentypen relevant werden.

8.4.3.2 Reduktion der Fahrstreifenzahl

Lässt man lokale Änderungen des Fahrverhaltens außer Betracht, wird durch eine Spurzahlreduktion $I_1 \rightarrow I_2$ das Fundamentaldiagramm der Gesamtgrößen um den Faktor I_2/I_1 skaliert (vgl. Abb. 8.15).¹³ Die Kapazität reduziert sich damit um den Betrag

$$\Delta K_{\text{lanes}} = (I_1 - I_2)\rho_{\text{max}} . \quad (8.21)$$

Wieder ist der nach einem Verkehrszusammenbruch resultierende Stau durch die Kapazität der Engstelle charakterisiert. Zu beachten ist, dass der ggf. entstehende Verkehrszusammenbruch nur von der Kapazitätsreduktion *am Ort der Reduktion* abhängt, so dass die verkehrlich relevante Engstelle genau dort (und nicht etwa weiter stromabwärts) liegt. Da an der Stelle von Spurzahlreduktionen meist auch Tempolimits vorliegen und im Mittel vorsichtiger gefahren wird, wird man in der Regel die Spurzahlreduktion mit einer „klassischen“ Engstelle (Reduktion von V_0 , Erhöhung von T) kombinieren.

¹³ Verkehringenieure verwenden für eine Fahrspur nahezu ausschließlich den Begriff „Fahrstreifen“. In unserem Kontext bedeuten beide Begriffe exakt dasselbe, aber „Fahrstreifen“ lässt sich in Wortzusammensetzungen (Spurzahlreduktion, Spurwechselmodell, Mehrspurmodell, Spurwechselassistent etc.) weniger elegant verwenden als der kürzere Begriff „Spur“. Wir verwenden deshalb beide Begriffe gleichermaßen.

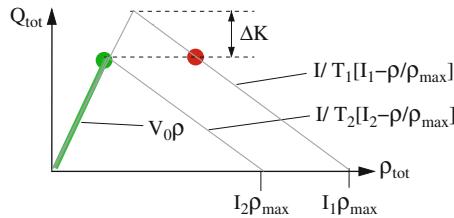


Abb. 8.15 Änderung des Fundamentaldiagramms der Gesamtgrößen bei einer Spurzahlreduktion von I_1 nach I_2 . Die Punkte bezeichnen die nach einem Zusammenbruch resultierenden stationären Zustände stromabwärts (links) und stromaufwärts (rechts)

8.4.3.3 Ausfahrten

Bei Ausfahrten oder einer Erhöhung der Zahl der Fahrstreifen scheint es sich auf den ersten Blick nicht um Engstellen zu handeln, denn schließlich wird hier die Nachfrage reduziert bzw. die Kapazität durch einen zusätzlichen Fahrstreifen erhöht. Im Vorfeld der Abfahrt kommt es jedoch meist zu erhöhten Fahrstreifen-Wechselraten, die zur Unruhe im Verkehrsfluss sowie zur ineffektiveren Fahrstreifennutzung beitragen, so dass de facto die Kapazität lokal reduziert wird. Dies erklärt die Tatsache, dass auch Abfahrten als Ursache von Verkehrszusammenbrüchen vorkommen.¹⁴ Allerdings kann diese Ursache einer Kapazitätsreduktion im Rahmen von LWR-Modellen nicht ohne zusätzliche *ad-hoc*-Annahmen sinnvoll modelliert werden.

8.4.3.4 Zufahrten und Kreuzungen

Bei dieser Art der Streckeninhomogenität wird der Engpass nicht durch eine Angebotsreduktion (Reduktion der Kapazität K), sondern durch einen Anstieg der *Nachfrage* durch die einfahrenden Fahrzeuge verursacht. Geht man davon aus, dass sowohl bei freiem Verkehr als auch nach einem Verkehrszusammenbruch alle einfahrenden Fahrzeuge auf die Hauptfahrbahn gelangen, ist der stabile Verkehrsfluss stromaufwärts der Engstelle auf den Wert $K - Q_{\text{rmp}}$ begrenzt, die *Engstellenstärke*

$$\Delta K_{\text{rmp}} = Q_{\text{rmp}} \quad (8.22)$$

also durch den Verkehrsfluss Q_{rmp} auf der Zufahrt gegeben und damit zeitlich veränderlich (vgl. Abb. 8.16).

Stromabwärts der Engstelle ist der Fluss nach Zusammenbruch wieder durch den Maximalflusszustand gegeben. Auch eine Zufahrts- (oder Abfahrts-) Engstelle wird in der Regel mit einer fahrverhaltensinduzierten Engstelle, also einer lokalen Erhöhung der Folgezeit oder Reduktion der Wunschgeschwindigkeit, kombiniert.

¹⁴ Teils wird ein Stau an einer Ausfahrt auch durch Überlastung derselben verursacht, so dass sich der ausfahrende Verkehr auf die Hauptfahrbahn zurückstaut. In diesem Fall liegt eine (temporäre) Fahrstreifensperrung vor und die Stauursache ist offensichtlich.

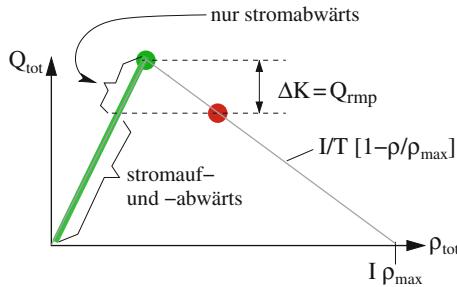


Abb. 8.16 Modellierung einer durch eine Zufahrt gebildeten Engstelle. Stromaufwärts ist stabiler, freier Verkehr nur für Flüsse unterhalb von $K - Q_{rmp}$ möglich

8.4.3.5 Lichtsignalanlagen

Im Rahmen von Makromodellen lassen sich Ampeln (Lichtsignalanlagen, LSA) in natürlicher Weise durch zeitlich veränderliche Engstellen modellieren: Während der Rotphasen, zu denen man ggf. einen Teil der Gelbphasen hinzurechnet, ist die Kapazität gleich Null, ansonsten verschwindet die Engstelle.¹⁵ Folglich ergibt sich die Kapazitätsreduktion zu

$$\Delta K_{LSA} = \begin{cases} K & \text{LSA ist rot,} \\ 0 & \text{LSA ist grün.} \end{cases} \quad (8.23)$$

8.4.4 Numerische Lösung des Cell-Transmission-Modells

Prinzipiell ist die Kontinuitätsgleichung (7.8) bzw. (7.10) für den Gesamtfluss zu lösen. Im Falle des Cell-Transmission-Modells (CTM) wird die Dichte innerhalb der Zellen als homogen angenommen und man kann direkt die diskretisierte Kontinuitätsgleichung (7.9) anwenden. Die Bestimmung der Randflüsse Q_{up} und Q_{down} hängt jedoch davon ab, ob die eigene Zelle und/oder die Nachbarzellen „verstaut“ sind, also Dichten oberhalb der Dichte ρ_K beim Kapazitätsmaximum aufweisen. Diese Abhängigkeiten werden am übersichtlichsten durch die *Supply-Demand*-Methode dargestellt, wobei anschaulich die jeweiligen Flüsse als Minimum aus dem Angebot (*supply D*) und der Nachfrage (*demand D*) gegeben sind. Der konkrete Updateschritt von Zeit t nach $t + \Delta t$ sieht dann folgendermaßen aus (wobei das Zeitschritt-Argument t der Übersichtlichkeit halber weggelassen wird):

¹⁵ Verkehrsingenieure benutzen statt Rotphase den Begriff „Sperrzeit“, statt Gelbphase „Übergangszeit“ und statt Grünphase „Freigabezeit“. Wir werden aber die intuitiveren Begriffe Rot-, Gelb- und Grünphase beibehalten. Weiterhin verwenden wir Ampel und „Lichtsignalanlage (LSA)“ synonym, obwohl, streng genommen, eine Ampel als einzelnes Signal nur ein Element einer LSA ist.

Bestimmung von Angebot (Supply) und Nachfrage (Demand). Das Angebot (der maximal mögliche Fluss an der Zellengrenze in Fahrtrichtung) ist in jedem Fall durch die modellierte Kapazität beider benachbarter Zellen beschränkt, kann aber durch einen Rückstau eines stromabwärtigen Staus weiter reduziert werden (vgl. Abb 8.17). An der Zellengrenze $k \rightarrow k + 1$ gilt daher die Angebotsfunktion¹⁶

$$S_k = \begin{cases} \min(K_k, K_{k+1}, Q_{k+1}^{\text{tot}}) & \text{falls Zelle } k+1 \text{ verstaут, } \rho_{k+1} > \rho_K, \\ \min(K_k, K_{k+1}) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.24)$$

Die Nachfrage ist bei freiem Verkehr gleich dem tatsächlichen Fluss und bei Stau gleich dem maximalen Fluss. Dies berücksichtigt die Eigenschaft der LWR-Modelle, dass beim Übergang Stau \rightarrow freier Verkehr immer der Maximalflusszustand angenommen wird:

$$D_k = \begin{cases} Q_k^{\text{tot}} & \text{falls Zelle } k \text{ nichtverstaут, } \rho_k \leq \rho_K, \\ K_k & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.25)$$

Bestimmung der Randflüsse. Es wird die jeweils stärkere Restriktion angewandt:¹⁷

$$Q_k^{\text{up}} = Q_{k-1}^{\text{down}} = \min(S_{k-1}, D_{k-1}), \quad (8.26)$$

$$Q_k^{\text{down}} = Q_{k+1}^{\text{up}} = \min(S_k, D_k). \quad (8.27)$$

Aktualisierung des Zelleninhalts. Der Updateschritt nach Gl. (7.9) lautet

$$\rho_k^{\text{tot}}(t + \Delta t) = \rho_k^{\text{tot}}(t) + \frac{1}{L_k} (Q_k^{\text{up}} - Q_k^{\text{down}}) \Delta t. \quad (8.28)$$

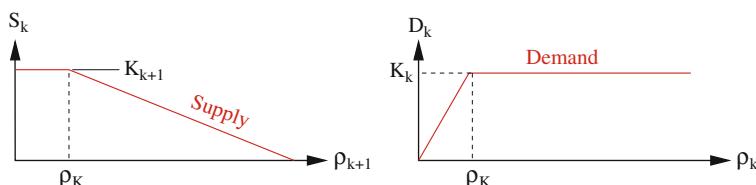


Abb. 8.17 Supply- und Demandfunktionen in Abhängigkeit der Dichten der eigenen und der Nachbarzelle

¹⁶ Die Kapazität K_k in der Minimumsfunktion ist nur bei punktuellen Engstellen relevant, die nicht durch eine eigene Zelle modelliert werden wie bei einer LSA (Abschn. 8.4.6.1).

¹⁷ Dies ist wie beim Handel: Ein Geschäft kommt nur dann zustande, wenn ein vorhandenes Angebot auch nachgefragt wird.

Indem man die *Supply-Demand-Methode* auf die totalen und nicht die fahrstreifen-gemittelten Größen anwendet, werden flusserhaltende Engstellen automatisch durch die dann reduzierten Kapazitäten berücksichtigt.

Anwendung der Supply-Demand-Methode auf Knotenpunkte. Im Fall von Zufahrten erweitert man die Gln. (8.24), (8.25), (8.26), (8.27) und (8.28) in naheliegender Weise, z.B. für die Geometrie in Abb. 8.18:

$$S_{12,3} = \begin{cases} \min(K_1 + K_2, K_3, Q_3^{\text{tot}}) & \text{falls } \rho_3 > \rho_K, \\ \min(K_1 + K_2, K_3) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.29)$$

$$D_{12,3} = \begin{cases} Q_1 & \text{falls } \rho_1 \leq \rho_K, \\ K_1 & \text{sonst,} \end{cases} + \begin{cases} Q_2 & \text{falls } \rho_2 \leq \rho_K, \\ K_2 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.30)$$

$$Q_3^{\text{up}} = \min(S_{12,3}, D_{12,3}), \quad (8.31)$$

$$\rho_3^{\text{tot}}(t + \Delta t) = \rho_3^{\text{tot}} + \frac{1}{L_3} (Q_3^{\text{up}} - Q_3^{\text{down}}) \Delta t. \quad (8.32)$$

Der Randfluss Q_3^{down} wird dabei nach Gl. (8.26) bestimmt. Zu beachten ist, dass durch die Bedingung (8.31) nur die Summe $Q_{13} + Q_{23} = Q_3^{\text{up}}$ festgelegt ist, so dass die Zellen 1 und 2 nicht eindeutig aktualisierbar sind, zumindest wenn die Supplyfunktion $S_{12,3}$ begrenzend wirkt (Rückstau in die Verzweigung hinein). In diesem Fall muss man zusätzliche Annahmen treffen, wie z.B. immer den Fluss der Zufahrt vollständig zu berücksichtigen (die einfahrenden Fahrer drängen sich schon irgendwie auf die Hauptstrecke) oder den Nachfrageüberschuss $D_{12,3} - S_{12,3}$ anteilig zu begrenzen. Im Stadtverkehr kann man auch die Vorfahrtsregeln berücksichtigen.

Im Falle von abfließendem Verkehr bzw. Abfahrten benötigt man als zusätzliche Information die *Abbiegewahrscheinlichkeiten*. Falls stromabwärts an beiden Strecken freier Verkehr herrscht, wird der Zellenfluss anteilig auf die beiden Ausflüsse aufgeteilt, ansonsten (bei Rückstau an den Abflüssen) benötigt man wieder zusätzliche Regeln zur Behandlung des Nachfrage-Überschusses.

Mit diesen zusätzlichen Regeln für Zusammenflüsse und Verzweigungen kann man mit dem CTM (und auch dem Section-Based-Modell) ganze Streckennetze modellieren.

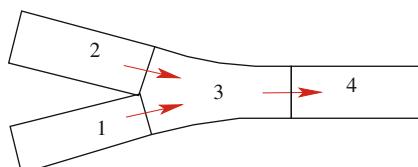


Abb. 8.18 Eine Beispieldiagramm zur Erklärung der Gln. (8.29), (8.30), (8.31), und (8.32)

8.4.5 Lösung des Section-Based-Modells

Folgende spezielle Eigenschaften der Ausbreitung von Dichteschwankungen sind die Grundlage für die numerische Effizienz bei der Simulation des Section-Based-Modells:

1. Innerhalb der Bereiche „freier Verkehr“ und „gebundener Verkehr“ bleiben beliebige Dichteschwankungen in ihrer Form unverändert, während sie sich mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten V_0 (gleich der Wunschgeschwindigkeit) bzw. c fortpflanzen (vgl. Abb. 8.11). Da $V_0 > 0$ und $c < 0$, wird damit der Bereich freien Verkehrs nur von den stromaufwärtigen Randbedingungen (d.h. dem Zufluss) kontrolliert. Der gestaute Bereich wird dagegen ausschließlich vom stromabwärtigen Rand, also der Kapazität $K_B(t)$ der dort vorhandenen Engstelle, dominiert (Abb. 8.19).
2. Eine eventuell vorhandene Grenze freier Verkehrs → gebundener Verkehr ist immer unstetig und wird durch die Schockwellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit (8.6) beschrieben. Diese kann Werte zwischen c und V_0 annehmen, und damit sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts wandern.
3. Der Übergangsbereich gestaut → frei ist entweder stationär und dann zwingend an einer Engstelle, also am stromabwärtigen Ende einer *road section*, fixiert oder er breitet sich mit der festen Geschwindigkeit c stromaufwärts aus. Der letztere Fall kann nur auftreten, wenn der Engpass plötzlich verschwindet (grüne Ampel oder Räumung einer Unfallstelle). Da dann der Ausfluss identisch zum maximalen Ausfluss ist, kann man den Ausflussbereich einer laufenden, stromabwärtigen Staufront sowohl dem freien als auch dem gebundenen Verkehr zuordnen (Spitze des Fundamentaldiagramms).

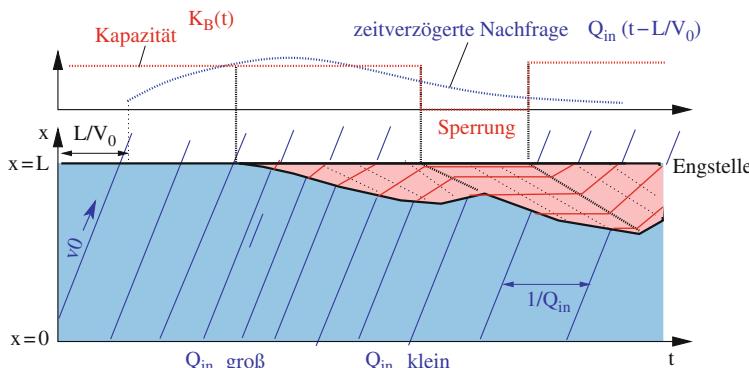


Abb. 8.19 Verkehrsdynamik eines mit dem Section-Based-Modell modellierten Abschnitts der Länge L . Dargestellt sind die Bereiche freien bzw. gebundenen Verkehrs (blaue bzw. rote Flächen), einige Fahrzeugtrajektorien (blaue bzw. rote durchgezogene Linien), die Ausbreitung von Störungen im Stau (punktige Linien) sowie die zeitlich veränderliche Kapazität $Q_{out}(t)$ und die zeitverzögerte Nachfrage $Q_{in}(t)$ (rote bzw. blaue punktige Linien im oberen Koordinatensystem). Ein Stau bildet sich, wenn die blaue die rote punktige Linie von unten nach oben schneidet

Damit ergibt sich folgende Schlussfolgerung:

Ordnet man den *Maximalfluss-Zustand* an der Spitze des Fundamentaldiagramms dem gebundenen Verkehr zu, so kann es innerhalb jeder *road section* höchstens einen Übergang frei → gestaut geben. Ein möglicher Übergang gestaut → frei ist *immer* stationär und befindet sich am stromabwärtigen Ende einer *road section*. Jede *road section* kann also genau einen der drei Zustände annehmen: (i) komplett frei, (ii) teilgestaut mit freiem Verkehr stromaufwärts vom gebundenen Verkehr, (iii) komplett gebundener Verkehr bzw. zugestaut. Andere Möglichkeiten (wie mehrere Staus oder Übergänge gestaut→ frei) gibt es im Road-Section-Modell nicht.

8.4.5.1 Dynamik innerhalb des Streckenabschnitts

Für die analytische Beschreibung bzw. numerische Simulation haben die Eigenschaften des dreieckigen Fundamentaldiagramms (vgl. Abschn. 8.4.5) zur Folge, dass man die raumzeitliche Dynamik in der *gesamten* Zelle direkt durch die Randbedingungen und durch die Bewegungsgleichung maximal einer Staufront beschreiben kann – die explizite Lösung der Kontinuitätsgleichung (also einer partiellen Differentialgleichung) ist nicht nötig. Zur Formulierung der Lösung für die drei Zustände des Streckenabschnitts sei zunächst der Zufluss $Q_{\text{in}}(t)$ am stromaufwärtsigen Ende bei x_{up} sowie der Ausfluss $Q_{\text{out}}(t)$ am stromabwärtigen Ende bei x_{down} des Streckenabschnitts vorgegeben (vgl. Abb. 8.13). Der Zellenindex k wird hier der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Zustand 1: Freier Verkehr auf der gesamten road section. Hier ist nur die stromaufwärtsige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnitts k zunächst den Fluss und mit Gl. (8.9) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_{\text{free}}(x, t) &= \frac{1}{l} Q_{\text{in}}(t'), & t' &= t - \frac{x - x_{\text{up}}}{V_0}, \\ \rho_{\text{free}}(x, t) &= \rho_{\text{free}}(Q_{\text{free}}(x, t)). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Zustand 2: Gestauter Verkehr auf der gesamten road section. Hier ist nur die stromabwärtige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnitts zunächst den Fluss und mit Gl. (8.10) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_{\text{cong}}(x, t) &= \frac{1}{l} Q_{\text{out}}(t') = \frac{1}{l} K_B(t'), & t' &= t - \frac{x_{\text{down}} - x}{|c|}, \\ \rho_{\text{cong}}(x, t) &= \rho_{\text{cong}}(Q_{\text{cong}}(x, t)). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Zustand 3: Freier und gestauter Verkehr. Hier sind beide Randbedingungen relevant und für die freien und gebundenen Anteile gelten die jeweiligen obigen Gleichungen. Zusätzlich gilt für die Position $x^*(t)$ des Übergangs frei → gestaut die

Schockwellenausbreitungsgeschwindigkeit (8.15), welche hier die Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung für x^* annimmt:

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{Q_2^* - Q_1^*}{\rho_{\text{cong}}(Q_2^*) - \rho_{\text{free}}(Q_1^*)} = \frac{Q_2^* - Q_1^*}{\rho_{\max}(1 - Q_2^*T) - Q_1^*/V_0}. \quad (8.35)$$

Die Bewegungsgleichung des Übergangs $x^*(t)$ hängt nur von den Flüssen am Rand des Streckenabschnitts zu vergangenen Zeiten ab:

$$\begin{aligned} Q_2^* &= Q_{\text{cong}}(x^*, t) = \frac{1}{l} K_B \left(t - \frac{x_{\text{down}} - x^*}{|c|} \right) = \frac{1}{l} K_B (t - \rho_{\max} T (x_{\text{down}} - x^*)) , \\ Q_1^* &= Q_{\text{free}}(x^*, t) = \frac{1}{l} Q_{\text{in}} \left(t - \frac{x^* - x_{\text{up}}}{V_0} \right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Die Randbedingungen können beispielsweise von stationären Detektoren gemessene Flüsse und errechnete Dichten sein, so dass man Gl. (8.35) zur Verkehrslageschätzung und Kurzzeitprognose verwenden kann. Warum ist es für derartige Anwendungen besser, nur die Flüsse zu verwenden (rechte Seite der Gl. (8.35)), auch wenn Geschwindigkeiten zur Schätzung der Verkehrsichten verfügbar sind und man sich damit das Kalibrieren der Parameter des Fundamentalsdiagramms ersparen könnte?

Abbildung 8.19 verdeutlicht die Situation mit $x_{\text{up}} = 0$ und $x_{\text{down}} = L$ und zeitlich veränderlicher Nachfrage bzw. Zufluss $Q_{\text{in}}(t)$ (*Rush Hour*) und einem Ausfluss, welcher durch das variable Angebot in Form einer Engstellen-Kapazität $K_B = K - \Delta K$ mit zusätzlicher temporärer Streckensperrung (Erhöhung der Engstellenstärke ΔK) beschränkt ist. Sobald bei anfangs freiem Verkehr die zeitversetzte Nachfrage $Q_{\text{in}}(t - L/V_0)$ größer wird als die Kapazität $K_B(t)$, bildet sich ein Stau. Die Geschwindigkeit der entstehenden Staufront hängt nun gemäß Gl. (8.35) von den zeitverzögerten Werten der Nachfrage und der Kapazität ab. Zunächst sinkt die Nachfrage bei konstanter Engstellenkapazität, so dass die sich anfänglich entgegen der Fahrtrichtung bewegende Staufront schließlich ihre Richtung umkehrt, der Stau sich also aufzulösen beginnt. Die dann einsetzende Vollsperrung ($K_B(t) = 0$) führt – entsprechend zeitverzögert – noch einmal zu einem Anwachsen, ehe die Aufhebung der Sperrung und die nun geringere Nachfrage nach einer der Staulänge entsprechenden Verzögerungszeit zu einer raschen Auflösung des Staus führen.

Abbildung 8.20 veranschaulicht die Geschwindigkeiten der Staufront mit echten Verkehrsdaten (zur Gewinnung dieser raumzeitlichen Darstellung siehe Kap. 5.2). Anhand der parallelen Strukturen des raumzeitlichen Geschwindigkeitsverlaufs sieht man zunächst, dass sich die Geschwindigkeitsänderungen im freien bzw. gestauten Verkehr mit nahezu gleicher Geschwindigkeit ausbreiten. Dies ist in Übereinstimmung mit der Modellierung mit einem dreieckigen Fundamentaldiagramm. In dieser Abbildung ist zu erkennen, wie sich die Geschwindigkeit der Staufront

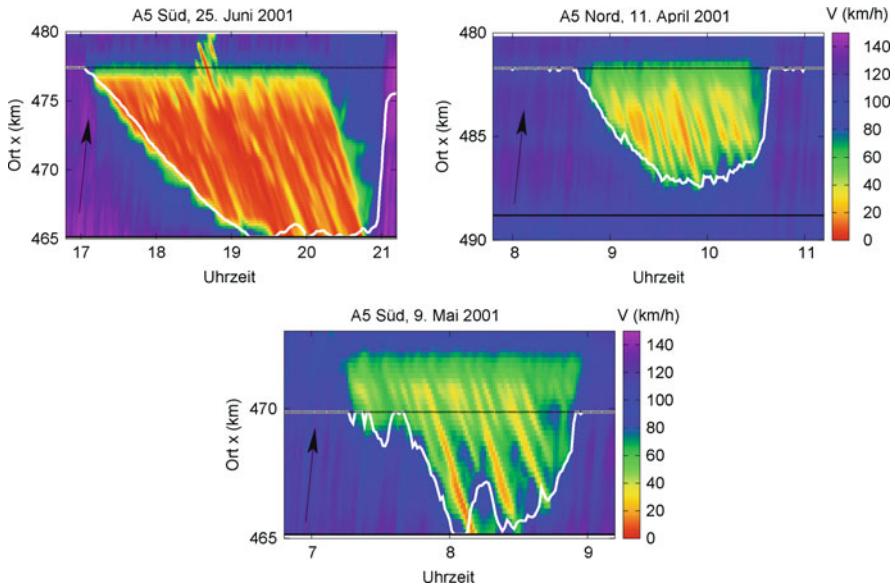


Abb. 8.20 Veranschaulichung der Schockwellendynamik der Abb. 8.19 mit realen Daten der deutschen Autobahn A5 (weiße Linien) mit einer temporären Engstelle (Unfall, links oben) und permanenten Engstellen (rechts oben und unten). Als Randbedingungen der Gl. (8.35) dienen Flussdaten von Detektoren, welche an den schwarzen Linien (stromaufwärtsige Grenzen des Abschnitts) und gestrichelten Linien (stromabwärtsige Grenzen) positioniert sind. Der dargestellte raumzeitliche Geschwindigkeitsverlauf dient hier nur zur Veranschaulichung und zur Kalibrierung des dreieckigen Fundamentaldiagramms ($V_0 = 100 \text{ km/h}$, $T = 2 \text{ s}$ und $\rho_{\max} = 100 \text{ Fz/h}$ in den beiden oberen Plots, $T = 1.5 \text{ s}$ und $\rho_{\max} = 80 \text{ Fz/h}$ im unteren Plot), wurde aber nicht direkt zur Berechnung der Staufront verwendet

(dicke weiße Linien) in Abhängigkeit der Schwankungen der Nachfrage (Fluss an der punktiert gezeichneten Detektorposition) und des Angebots (gestrichelte Detektorposition) ändert. Zudem beügt man nur Informationen, die bis zu 40 min (entsprechend 10 km Stau im linken oberen Teilbild der Abb. 8.20) in der Vergangenheit liegen. In den beiden oberen Teilbildern erkennt man, dass das durch die Gln. (8.35) und (8.36) beschriebene Verfahren automatisch auch beim Übergang von freiem Verkehr zum Maximalflusszustand funktioniert: In Einklang mit den Beobachtungen (beispielsweise in der Darstellung links oben etwa um 21:00 Uhr) wandert dieser Übergang nahezu mit der Fahrzeuggeschwindigkeit stromabwärts. Diese Beobachtung rechtfertigt die formale Zuordnung des Maximalflusszustandes zu den Zuständen gebundenen Verkehrs.

8.4.5.2 Dynamik der Randbedingungen

Die Randbedingungen einer jeden *road section* vermitteln die Kopplungen der einzelnen Abschnitte untereinander und führen zu den bei der Betrachtung der Dynamik innerhalb einer road section als gegeben angenommenen Randbedingun-

gen $Q_{\text{in}}(t)$ und $Q_{\text{out}}(t)$. Ebenso wie im Cell-Transmission-Modell (CTM) gilt im Section-Based-Modell die Bedingung, dass der Ausfluss $Q_{\text{out}}^{(k)}$ aus Zelle k gleich dem Zufluss $Q_{\text{in}}^{(k+1)}$ der nächsten Zelle in Fahrtrichtung ist. Falls keine gemessenen Detektorflüsse oder externen Annahmen über den Fluss vorliegen (diese sind zumindest als Zufluss des stromaufwärtigsten Abschnitts und Abfluss des stromabwärtigsten Abschnitts zwingend notwendig), werden die Randflüsse wie im CTM durch die *Supply-Demand*-Methode, Gl. (8.26), bestimmt. Im Falle einer Zufahrt wird die dann relevante Gl. (8.31) durch die Bedingung ergänzt, dass im Falle eines Staus die Nachfrage der Zufahrt vollständig berücksichtigt wird, so dass sich nur auf der Hauptstrecke ein Stau bildet.

Im Gegensatz zum CTM haben aber die Abschnitte des Section-Based-Modells innere Zustände (frei, teilverstaut oder totalverstaut), die sich ggf. als Konsequenz der *Supply-Demand*-Methode ändern:

1. Falls $D_k(t) > S_k(t)$ und Abschnitt k bisher vollständig frei war, ist dieser Abschnitt nun teilverstaut.
2. Falls $D_k(t) < S_k(t)$ und Abschnitt $k+1$ bisher vollständig verstaute war, ist dieser Abschnitt nun nur noch teilverstaut.
3. Eine teilverstaute Zelle mit einer Staugrenze x^* geht in den vollständig verstaute Zustand über, wenn die Staugrenze den stromaufwärtigen Zellenrand erreicht. Erreicht x^* hingegen den stromabwärtigen Zellenrand, ändert sich der Zellenzustand in „frei“.

8.4.6 Beispiele

Die kompakte Darstellung der Lösungen (8.33), (8.34), und (8.35) des Section-Based-Modells erlaubt eine aufschlussreiche Einsicht in die Dynamik von Verkehrsstaus.

Die allgemeine Situation ist in Abb. 8.21 gezeigt. Die Engstelle dieser Abbildung führt lokal zu einer Kapazitätsreduktion von K auf $K_B = K - \Delta K$, einem sogenannten *Kapazitätsloch*. Falls $Q_{\text{in}} > K_B$ (wie in der Abbildung dargestellt) gilt, führt dies zu einem wachsenden Stau stromaufwärts der Engstelle. Dementsprechend ist im Fundamentaldiagramm die Sekantensteigung zwischen Zustand ① (Zufluss) und Zustand ② (Stau) negativ. Aus den *Supply-Demand*-Randbedingungen folgt, dass innerhalb der Engstelle *kein Stau* mehr herrscht, sondern vielmehr der Maximalflusszustand ③. Erst stromabwärts der Engstelle herrscht freier Verkehr im eigentlichen Sinne (Zustand ④). Da die Flüsse der Zustände ②, ③ und ④ alle gleich hoch sind, sind die entsprechenden Übergänge nach der Schockwellen-Formel (8.6) ortsfest. Im Folgenden wird die Dynamik anhand von Beispielen steigender Komplexität erläutert.

8.4.6.1 Rückstau an einer Lichtsignalanlage

Gegeben ist eine Situation mit konstantem Zustrom $Q_{\text{in}} < K$ bei $x = 0$ und einer Lichtsignalanlage (LSA) bei $x = L$, welche anfangs ($t = 0$) grün ist, zur Zeit

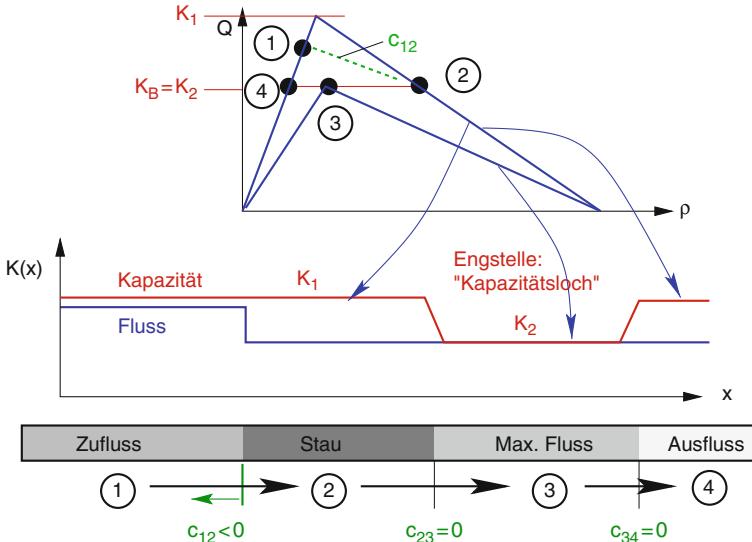


Abb. 8.21 Stauausbreitung im Section-Based-Modell: Gezeigt ist der Fall einer flusserhaltenden Engstelle, bei der sich innerhalb der Engstelle das Fundamentaldiagramm ändert und sich insbesondere die Kapazität von K_1 auf K_2 reduziert. Fahrzeuge durchlaufen nacheinander die mit ① bis ④ auf dem Streckenabschnitt und im Fundamentaldiagramm bezeichneten Zustände. Der Übergang ① → ② bewegt sich stromaufwärts, während die anderen Übergänge stationär sind

t_1 nach Rot und zum Zeitpunkt t_2 wieder nach Grün schaltet. Anfänglich herrscht auf der Strecke mit einem Fahrstreifen ($I = 1$) freier Verkehr. Außerdem gibt es während der gesamten Zeit keinen Rückstau auf dem Abschnitt stromabwärts der LSA. Damit ist bei der Berechnung der Randbedingungen mit der *Supply-Demand*-Methode (8.26) das Angebot S stets durch die „Engstellen-Kapazität“ der LSA gegeben (vgl. Abb. 8.22):

$$S(t) = K - \Delta K_{LSA} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t_1 < t < t_2 (\text{LSA ist rot}), \\ K & \text{falls } t \geq t_2 (\text{LSA ist grün}). \end{cases} \quad (8.37)$$

Phase 1: LSA ist grün, freier Verkehr. Der Abschnitt ist anfangs staufrei, also ist die Nachfrage (*demand*) durch $D = Q_{\text{in}}$ gegeben. Da $D < S$ ist, bleibt dieser Zustand bis $t = t_1$ unverändert bestehen.

Phase 2: LSA ist rot, Bildung einer Warteschlange. Für $t_1 < t \leq t_2$ ist $S = 0$ und damit $D > S$. Die *road section* geht in den Zustand „teilverstaut“ über und die stromabwärtige Randbedingung ist durch $Q_{\text{out}} = 0$ gegeben. Gleichung (8.35) für die Staufront zwischen den Bereichen ① und ② (vgl. Abb. 8.22) wird mit $Q_1^*(t) = Q_{\text{in}}$ und $Q_2^*(t) = 0$ zu

$$\frac{dx^*}{dt} = c_{12} = \frac{-Q_{\text{in}}}{\rho_{\max} - \frac{Q_{\text{in}}}{V_0}}.$$

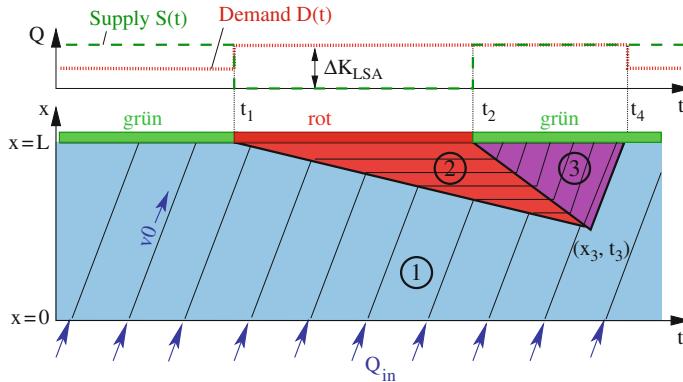


Abb. 8.22 Modellierung eines Rückstaus hinter einer Ampel bzw. Lichtsignalanlage (LSA). Unterschieden werden die Bereiche freier Verkehr (Bereich ①, hellblau), gestauter Verkehr bzw. Warteschlange (Bereich ②, rot) und Ausfluss aus dem Stau (Bereich ③, violett). Das obere Koordinatensystem veranschaulicht die Berechnung der Randbedingungen mit dem *Supply-Demand*-Modell. Die Fahrzeugtrajektorien (schwarze Linien) dienen lediglich zur Veranschaulichung

Ohne Zufluss ($Q_{\text{in}} = 0$) gilt $c_{12} = 0$, da sich dann natürlich auch bei roter Ampel kein Stau bildet. Bei maximalem Zufluss, also $Q_{\text{in}} = K = 1/(T + l_{\text{eff}}/V_0)$, gilt hingegen (unter Ausnutzung von $\rho_{\max} = 1/l_{\text{eff}}$)

$$c_{12}^{\max, \text{Zufluss}} = \frac{-l_{\text{eff}}}{T} = c.$$

Die Staufront-Geschwindigkeit bei maximalem Fluss ist demnach gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen innerhalb gestauter Zustände. In jedem Fall gilt $c \leq c_{12} \leq 0$.

Phase 3: LSA ist grün, Stauauflösung. Das Angebot (*supply*) ist für $t \geq t_2$ wieder durch $S(t) = K = Q_{\max}$ gegeben. Wegen der Warteschlange ist die Nachfrage ebenfalls durch $D(t) = K = Q_{\max}$ gegeben. Damit gilt die Randbedingung $Q_{\text{out}} = K$ und es bildet sich ein Übergang „stehender Verkehr“ → „maximaler Fluss“, der sich stromaufwärts ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt

$$c_{23} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{Q_{\max} - 0}{\rho_{\text{cong}} - \rho_{\max}} = -\frac{1}{\rho_{\max} T} = c.$$

Da der Maximalflusszustand dem gestauten Bereich zugeordnet werden kann, ist dies in Übereinstimmung mit der allgemeinen Regel, dass es innerhalb eines Streckenabschnitts keine Übergänge Stau → freier Verkehr geben kann und sich außerdem alle Zustandsänderungen im Stau mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Es gibt also nun zwei Übergänge:

- Der Übergang ① → ② (frei → gestaut) am Ort $x_{12}(t) = L + c_{12}(t - t_1)$ breitet sich nach wie vor mit der Geschwindigkeit c_{12} aus.

- Der Übergang ② → ③ (gestaut → maximaler Fluss) am Ort $x_{23}(t) = L + c(t - t_2)$ breitet sich mit der Geschwindigkeit c aus.

Zur Zeit

$$t_3 = \frac{c_{12}t_1 - ct_2}{c_{12} - c} = t_1 + \left(\frac{-c}{c_{12} - c} \right) (t_2 - t_1)$$

treffen sich die beiden Staufronten und der Bereich stehenden Verkehrs. Folglich hat sich die Warteschlange am Ort

$$x_3 = L + c(t_3 - t_2)$$

aufgelöst. Man beachte, dass c negativ ist, der Ort sich also wie erwartet *stromaufwärts* der LSA befindet.

Phase 4: Auflösung des Maximalfluss-Zustandes. Zur Zeit $t > t_3$ hat sich zwar die Warteschlange aufgelöst, es gibt aber für die Zeitspanne $t_3 < t \leq t_4$ noch „Nachwirkungen“ der roten Ampelphase in Form des Maximalflusszustandes. Setzt man $Q_2 = Q_{\max}$ in Gl. (8.35) ein, erhält man für die Geschwindigkeit c_{13} des Übergangs ① → ③ (Zuflussbereich → Bereich mit maximalem Fluss)

$$c_{13} = \frac{Q_{\max} - Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(Q_{\max}) - \rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}})} = V_0.$$

Dieser Übergang passiert die Haltelinie zur Zeit

$$t_4 = t_3 + \frac{x_3}{V_0} = t_2 + (t_2 - t_1) \frac{Q_{\text{in}}}{Q_{\max} - Q_{\text{in}}}.$$

Bei mehreren Ampelzyklen und konstanter Nachfrage stellen sich stationäre Verhältnisse nur dann ein, wenn die nächste Rotphase zur Zeit t_4 oder später beginnt. Ansonsten wachsen die Warteschlangen mit der Zeit immer mehr an.

Machen Sie sich anhand von beispielhaften Werten für Q_{in} und $K > Q_{\text{in}}$ klar, dass an der Grenze der Stationarität, bei der die zweite Rotphase zur Zeit t_4 beginnt, genau die Verhältnisgleichung

$$\frac{\text{Grünphase}}{\text{Umlaufzeit}} = \frac{t_4 - t_2}{t_4 - t_1} = \frac{Q_{\text{in}}}{K}$$

gilt. Was bedeuten diese Verhältnisse anschaulich?

8.4.6.2 Mehrere Lichtsignalanlagen hintereinander: Grüne Welle

Im einfachsten und hier betrachteten Fall lässt man zunächst die Nebenstrecken außer Acht und nimmt, abgesehen von den Ampeln selbst, eine homogene Hauptstrecke an, auf der insbesondere die Kapazität überall dieselbe ist. Alle Lichtsignalanlagen (LSA) haben dann einen einfachen Rot-Grün-Zyklus mit den Zeitdauern τ_r bzw. τ_g . Ferner wird eine einheitliche Umlaufzeit $\tau_{\text{uml}} = \tau_r + \tau_g$ angenommen. Selbst in diesem einfachen Fall kann man nicht nur eine *Grüne Welle* durch Anpassung der relativen Phasen optimieren (also der Zeitpunkte $t_r^{(k)}$, zu denen die Rotphasen bei der LSA k beginnen). Zusätzlich kann man simulieren, (i) wie stabil die entstehende Grüne Welle gegenüber Schwankungen der Nachfrage ist, (ii) wie bereits eine einzelne, nicht eingetaktete Fußgängerampel die Welle zerstört, (iii) wann die Welle zusammenbricht (z.B. durch Rückstaus und dadurch hervorgerufene Ineffizienzen) und (iv) wie schnell sich bei Reduktion der Nachfrage aus einem Verkehrszusammenbruch heraus wieder eine Grüne Welle einstellt.

In Abb. 8.23 ist ein Beispiel mit zwei aufeinanderfolgenden Ampeln gleicher Rot- und Grünphasendauer gezeigt. Da hier die Warteschlange der stromaufwärtigen LSA während der Grünphase komplett abfließt, ist prinzipiell bei allen folgenden LSA eine Grüne Welle ohne weitere Warteschlangen möglich, zumindest wenn die Rot- und Grünzeiten identisch sind. Im Beispiel ist jedoch die Versatzzeit (relative Verschiebung der Rot- und Grünphasen) von -10 s nicht optimal eingestellt. Der optimale Wert beträgt hier vielmehr $(x_2 - x_1)/V_0 = 20\text{ s}$. Anhand dieses Beispiels lassen sich die Prinzipien verstehen. Eine Erweiterung auf weniger idealisierte Situationen ist im Rahmen von Simulationen problemlos möglich.

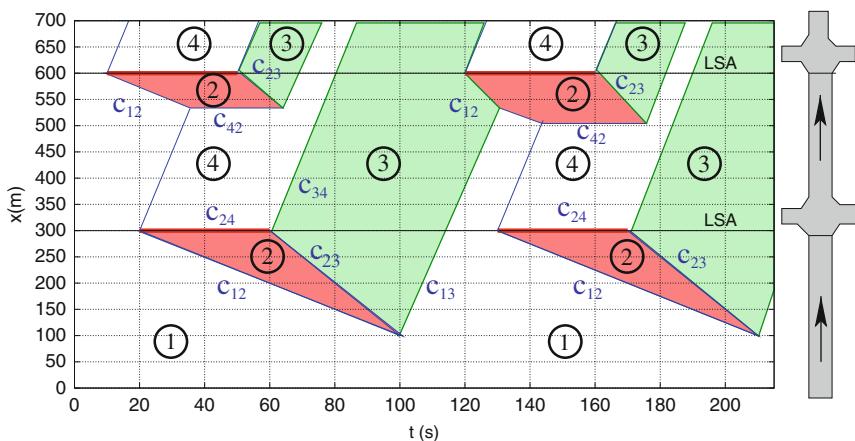


Abb. 8.23 Modellierung des Verkehrs über zwei aufeinanderfolgenden, mit Lichtsignalanlagen (LSA) ausgestatteten Kreuzungen mit dem Section-Based-Modell. Die LSA haben jeweils 40 s Rot- und 70 s Grünphasen und die Phasen sind um 10 s gegeneinander versetzt. Der Einfachheit halber ist angenommen, dass während der Rot-Phasen kein Verkehr von den Nebenstrecken auf die Hauptstrecke einfährt. Die raumzeitlichen Bereiche kennzeichnen (den als konstant angenommenen) Zufluss ①, die Warteschlange ②, den Ausfluss ③ und die leere Fahrbahn ④

8.4.6.3 Zufahrt während einer Rush Hour

Es sei ein Streckenabschnitt (I Fahrstreifen) mit einer Zufahrt (Länge L_{rmp} , konstante Verkehrsbelastung Q_{rmp}) auf Höhe $x = L$ der Hauptfahrbahn gegeben. Die Verkehrsnachfrage auf der Hauptstrecke sei während der Rush Hour abrupt erhöht:

$$Q_{\text{in}} = \begin{cases} Q_{\text{rush}} & t_{\text{beg}} < t < t_{\text{end}}, \\ Q_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei beim Zufluss Q_0 permanente Staufreiheit möglich, während es in der Rush Hour beim größeren Fluss Q_{rush} zum Stau kommt (Abb. 8.24).

Phase 1: Freier Verkehr für $t < t_{\text{beg}}$. Die Engstellenstärke beträgt nach Gl. (8.22) $\Delta K = Q_{\text{rmp}}$ und die Engstellenkapazität damit $K_B = K - Q_{\text{rmp}}$. Es muss also gelten:

$$Q_0 < K_B = K - Q_{\text{rmp}} = I Q_{\text{max}} - Q_{\text{rmp}}.$$

Phase 2: Zusammenbruch und Ausbreitung eines Staus während $t_1 \leq t < t_2$. Die staufreie Phase geht zu Ende, sobald die höhere Nachfrage $Q_{\text{rush}} > K_B$ den Ort der Zufahrt erreicht. Nach Gl. (8.33) ist dies zur Zeit

$$t_1 = t_{\text{beg}} + \frac{L}{V_0}$$

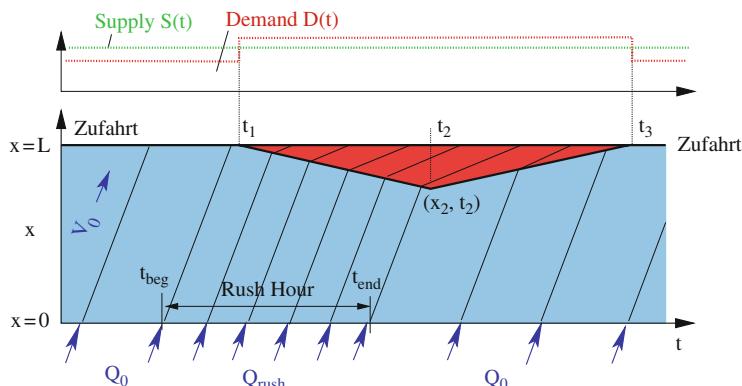


Abb. 8.24 Modellierung eines durch Überlastung verursachten Verkehrszusammenbruchs an einer Zufahrt. Im Gegensatz zum LSA-Beispiel ist hier die Kapazität der Störstelle (d.h. der Rampenfluss) konstant und der Stau wird durch eine erhöhte Verkehrsbelastung auf der Hauptfahrbahn (Rush Hour) provoziert

der Fall.¹⁸ Der für Zeiten $t > t_1$ entstehende Bereich gestauten Verkehrs stromaufwärts der Zufahrt ist charakterisiert durch die fahrstreifenbezogenen Größen

$$Q_{\text{cong}} = \frac{K_B}{I} = Q_{\max} - \frac{Q_{\text{rmp}}}{I}, \quad \rho_{\text{cong}} = \rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T), \quad V_{\text{cong}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{\rho_{\text{cong}}}.$$

Der Bereich freien Verkehrs weiter stromaufwärts ist gegeben durch

$$Q_{\text{free}} = Q_{\text{rush}}, \quad \rho_{\text{free}} = \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}, \quad V_{\text{free}} = V_0.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront in Phase 2 ist genau wie in den vorhergehenden Beispielen durch die Schockfrontgleichung gegeben:

$$c_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q_{\text{cong}} - Q_{\text{rush}}}{\rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T) - \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}}.$$

Phase 3: Stauauflösung während $t_2 < t \leq t_3$. Zunächst muss die Zeit t_2 bestimmt werden. Die Phase des Stauwachstums ($c_{12} < 0$) endet, wenn der Übergang $Q_{\text{rush}} \rightarrow Q_0$, welcher das Ende der Rush Hour einleitet, die stromaufwärtige Front des Staus trifft. Nach Gl. (8.33) breitet sich der Übergang mit der Geschwindigkeit V_0 aus, die Position ist in Abhängigkeit der Zeit durch

$$x_{\text{end}}(t) = V_0(t - t_{\text{end}})$$

gegeben. Die Schnittbedingung $x_{\text{end}}(t) = x_{12}(t)$ mit der Staufrontposition $x_{12}(t) = L + c_{12}(t - t_1)$ liefert die Zeit

$$t_2 = \frac{L - c_{12}t_1 + V_0t_{\text{end}}}{V_0 + c_{12}}$$

und die maximale Staulänge (vgl. Abb. 8.21)

$$L_{\max}^{\text{cong}} = L - x_{12}(t_2) = -c_{12}(t_2 - t_1).$$

Danach wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront positiv:

$$c_{12}^* = \frac{Q_{\text{cong}} - Q_0}{\rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T) - \frac{Q_0}{V_0}}.$$

¹⁸ Dies gilt streng genommen nur für vernachlässigbare Längen L_{rmp} der Beschleunigungsstreifen, in hinreichend guter Näherung aber auch für endliche Rampenlängen.

Schließlich erreicht die Staugrenze die Rampe zur Zeit

$$t_3 = t_2 + \frac{L_{\max}^{\text{cong}}}{c_{12}^*} = t_2 - \frac{c_{12}(t_2 - t_1)}{c_{12}^*}.$$

Zu diesem Zeitpunkt löst sich der Stau auf. Da $c_{12} < 0$, aber $c_{12}^* > 0$ ist, gilt $t_3 > t_2$, wie es aus Konsistenzgründen auch sein muss.

8.4.6.4 Reduktion der Fahrstreifenzahl

Bei einer Reduktion von I_1 auf $I_2 < I_1$ Fahrstreifen reduziert sich die Kapazität gemäß Gl. (8.21) und Abb. 8.15 um den Betrag $(I_2 - I_1)Q_{\max}$. Sobald die Nachfrage Q_{in} die Engstellenkapazität

$$K_B = K - \Delta K = I_2 Q_{\max} \quad (8.38)$$

überschreitet, bricht der Verkehr zusammen. Beim resultierenden Stau steht für jeden der I_1 stromaufwärtigen Fahrstreifen die anteilige Kapazität

$$Q_{\text{cong}} = \frac{K_B}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} Q_{\max} \quad (8.39)$$

zur Verfügung. Die resultierende, spurbezogene Dichte ist damit (vgl. Abb. 8.15)

$$\rho_{\text{cong}} = \rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}} T) = \rho_{\max} \left(1 - \frac{I_2}{I_1} Q_{\max} T\right). \quad (8.40)$$

Dies entspricht einer Geschwindigkeit im Stau stromaufwärts der Spurssperrung von

$$V_{\text{cong}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{\rho_{\text{cong}}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{\rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}} T)} = \frac{I_2 V_0}{I_1 + (I_1 - I_2) \rho_{\max} V_0 T}. \quad (8.41)$$

Beispiel: Für $V_0 = 144$ km/h, $T = 1.5$ s und $l_{\text{eff}} = 1/\rho_{\max} = 7$ m ergeben sich für die verschiedenen Situationen folgende Geschwindigkeiten im Stau:

Übergang 3 auf 2 Fahrstreifen: $V_{\text{cong}} = 0.17 V_0 = 24.9$ km/h,

Übergang 3 auf 1 Fahrstreifen: $V_{\text{cong}} = 0.05 V_0 = 7.1$ km/h,

Übergang 2 auf 1 Fahrstreifen: $V_{\text{cong}} = 0.09 V_0 = 13.6$ km/h.

Steht man in einem unfallbedingten Stau, kann man also grob anhand der gefahrenen Geschwindigkeiten abschätzen, ob eine oder zwei Fahrstreifen gesperrt sind. Die berechneten Geschwindigkeiten hängen nur schwach von V_0 ab. Für $V_0 = 72$ km/h ergeben sich Staugeschwindigkeiten von 19.8 km/h, 6.2 km/h und 11.5 km/h.

Begründen Sie die bisweilen als gegenintuitiv empfundene Beobachtung, dass man in einer verstaute Situation mit einer sukzessiven Reduktion der Fahrstreifenzahl von 3 über 2 auf 1 nach jeder Spurzahlreduktion schneller vorankommt, obwohl die durchgängige Spur jedes Mal zusätzliche Fahrzeuge aufnehmen muss.

8.5 Diffusion und Burgers-Gleichung

Die Schockwellen sind nicht ganz realistisch und bereiten Probleme bei der numerischen Lösung – zumindest für andere Fundamentaldiagramme als das des Section-Based-Modells. Zu ihrer Glättung kann ein Diffusionsterm $D\partial^2\rho/\partial x^2$ mit $D > 0$ als Diffusionskonstante eingeführt werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{LWR-Modell mit Diffusion.} \quad (8.42)$$

Diese nichtlineare, partielle Differentialgleichung lässt sich im Allgemeinen nur numerisch lösen (vgl. Abschn. 9.5). Im Spezialfall einer linearen Geschwindigkeits-Dichte-Relation (also einer Parabel als Fundamentaldiagramm, siehe Übungsaufgabe 7.5) kann man die dann „Burgers-Gleichung“ genannte Gleichung mittels der sogenannten *Cole-Hopf-Transformation* auf eine lineare Diffusionsgleichung abbilden und exakt lösen.

Linearisiert man die Burgers-Gleichung für kleine Dichteschwankungen (oder nimmt man lineare Fluss-Dichte-Relationen wie z.B. Gl. (8.7) an) und befindet man sich überall oberhalb oder unterhalb der kritischen Dichte ρ_K des Übergangs von freiem zu gebundenem Verkehr, so wird die Gl. (8.42) zur linearen *Diffusions-Transport-Gleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \tilde{c} \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (8.43)$$

wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit \tilde{c} nach Gl. (8.4) gegeben ist durch $\tilde{c} = Q'_e(\rho)$.

Abbildung 8.25 zeigt für das dreieckige Fundamentaldiagramm eine Lösung der Gl. (8.43) für freien Verkehr ($\tilde{c} = V_0$), falls anfangs auf einem bestimmten Streckenabschnitt eine endliche Dichte und außerhalb die Dichte Null (entsprechend einer leeren Strecke) herrscht.

Allgemein kann man für konstante Ausbreitungsgeschwindigkeiten \tilde{c} und homogene, hinreichend von Rändern oder Inhomogenitäten entfernte Streckenabschnitte die Lösung für beliebige Anfangsbedingungen $\rho(x, t_0)$ exakt angeben:

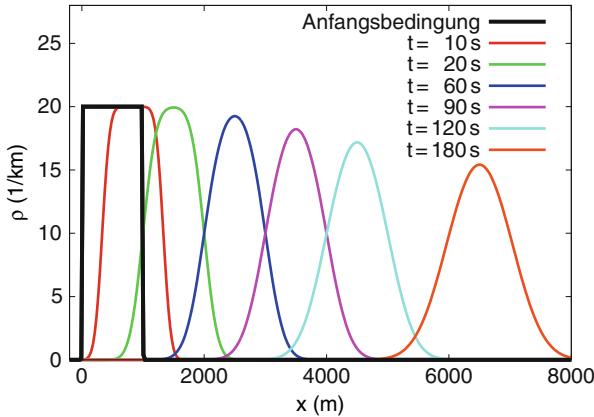


Abb. 8.25 Lösung der Diffusions-Transport-Gleichung (8.43) für die (mit stärkeren Linien gekennzeichnete) Anfangsbedingung $\rho(x, 0)$

$$\rho(x, t) = \int \rho(x', t_0) g(x - x', t - t_0) dx'. \quad (8.44)$$

Hierbei ist die *Greens-Funktion*

$$g(x, t) = F_N^{(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp \left[-\frac{(x - \tilde{c}t)^2}{4Dt} \right] \quad (8.45)$$

die Lösung für eine punktuelle Anfangs-Dichte (entsprechend der punktuellen Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Fahrzeugs) an der Stelle $x = 0$. Die Lösung $g(x, t)$ ist die Dichte einer Normal- bzw. Gaußverteilung $f_N(x)$ mit dem zeitabhängigen Erwartungswert $\mu(t) = \tilde{c}t$ und der Varianz $\sigma^2(t) = 2Dt$.

Anhand der Lösung (8.44) sieht man direkt, dass der Dichteverlauf des Systems in Abb. 8.25 durch integrierte Dichtefunktionen der Gaußverteilung, also durch (kumulierte) Gaußverteilungsfunktionen selbst, dargestellt werden kann (vgl. Aufgabe 8.7).

Warum ist D für „vernünftige“ Verkehrsmodelle nie negativ? Diskutieren Sie dies anhand der Lösung (8.44).

Zeigen Sie durch Einsetzen (d.h. Differenzieren), dass der Dichteverlauf (8.45) tatsächlich die Diffusions-Transport-Gleichung (8.43) für alle $t > 0$ löst. Wie verändert sich die „Breite“ dieser Dichteverteilung, definiert als Standardabweichung, mit der Zeit?

Übungsaufgaben

8.1 Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs frei → gestaut

Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit (8.6) einer Übergangszone frei → gestaut (stromaufwärtige Staufront) im LWR-Modell mit dreieckigem Fundamentaldiagramm Werte zwischen c und V_0 annimmt. Unter welchen Bedingungen werden die Extremwerte realisiert?

8.2 Ausbreitungsgeschwindigkeiten bei freiem Verkehr

Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten haben im LWR-Modell mit dreieckigem Fundamentaldiagramm für freien Verkehr alle die Geschwindigkeit V_0 (vgl. Gl. (8.13)). Was bedeutet dies für die Wechselwirkung der Fahrer untereinander?

8.3 Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs gestaut → frei

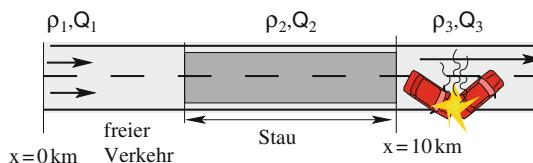
Die Geschwindigkeit von Dichteänderungen im gebundenen Verkehr ist im LWR-Modell mit dreieckigem Fundamentaldiagramm durch $c = -l_{\text{eff}}/T$ gegeben (vgl. Gl. (8.14)). Ferner ist die Folgezeit T in etwa so groß wie die Reaktionszeit. Versuchen Sie sich die Gleichung für c am Beispiel des Anfahrens der hinter einer Ampel stehenden Fahrzeuge, nachdem die Ampel auf „Grün“ gesprungen ist.

8.4 Gesamt-Wartezeit hinter einer Ampel während eines Umlaufs

Ermitteln Sie die durch eine LSA-Rotphase verursachte Gesamt-Wartezeit aller betroffenen Fahrzeuge in Abhängigkeit der Dauer τ_r des Rotlichts. Nehmen Sie dabei die Verhältnisse des Beispiels Abschn. 8.4.6.1 an, also einen konstanten Zufluss Q_{in} , einen vollständigen Abfluss der LSA-Warteschlange vor jeder Rotphase und keinerlei Behinderung durch Rückstaus.

8.5 Staudynamik I: Unfall

Untersucht wird der Verkehrsfluss auf einem Fernstraßenabschnitt mit zwei Fahrstreifen zwischen Strecken-Kilometer 0 und 10 während und nach der Sperrung eines Fahrstreifens infolge eines Unfalls bei Kilometer 10 um 15:00 Uhr. Im betrachteten Zeitraum liegt die Verkehrsnachfrage auf diesem Abschnitt konstant bei 3024 Fz/h. Die Fahrstreifensperrung dauert bis zur Räumung des Unfalls um 15:30 Uhr an.



Der Verkehrsfluss wird mit dem Section-Based-Modell unter Verwendung der Parameter $s_0 = 4 \text{ m}$, $T = 1.5 \text{ s}$, $V_0 = 28 \text{ m/s}$ und einer mittleren Fahrzeuglänge von 4 m modelliert.

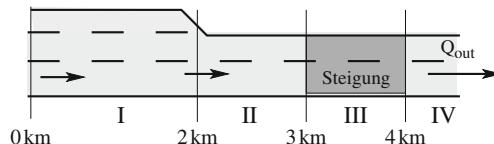
1. Berechnen Sie zunächst die Streckenkapazität pro Fahrstreifen und die Gesamtkapazität vor dem Unfall. Ist die Kapazität ausreichend? Welche Verkehrsfläche

herrscht auf der Strecke? Wie hoch ist die Reisezeit zum Durchfahren des 10 km langen Abschnitts?

2. Zeigen Sie, dass die Kapazität eines Fahrstreifens geringer als die Nachfrage ist, es also ab 15 Uhr an der Unfallstelle zu einem Stau kommt. Wie hoch ist die Verkehrsdichte im Bereich gestauten Verkehrs? Berücksichtigen Sie dabei, dass (wie immer in LWR-Modellen) der Ausfluss aus dem Stau gleich dem maximal möglichen Fluss ist und sich die Fahrzeuge, wo dies möglich ist, gleichmäßig auf beide Fahrstreifen verteilen.
3. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die stromaufwärtige Staufront aus? Falls Sie (b) nicht gerechnet haben, rechnen Sie im Stau mit einer Dichte von 72.5 Fz/km pro Fahrstreifen und einem Fluss von 1008 Fz/h pro Fahrstreifen. *Hinweis:* Unterscheiden Sie sorgfältig Verkehrsdichten und Flüsse auf der Gesamtfahrbahn und fahrstreifenbezogene Dichten und Flüsse.
4. Nach Räumung der Unfallstelle sind beide Fahrstreifen wieder frei und der Stau löst sich von der Unfallstelle her auf. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Übergang Stau → freier Verkehr stromaufwärts? Wann löst sich der Stau vollständig auf?
5. Zeichnen Sie die Grenzen des Verkehrsstaus in ein raumzeitliches Diagramm.
6. Berechnen Sie die Reisezeit zum Durchfahren der 10 km langen Strecke für ein um 15:30 Uhr in den Streckenabschnitt einfahrendes Fahrzeug.

8.6 Staudynamik II: Steigung und Fahrstreifenreduktion

Untersucht wird die Staudynamik auf einer Fernstraße mit Steigungsstrecke sowie Reduktion der Fahrstreifenzahl:



Wegen hohen LKW-Aufkommens beträgt die mittlere freie Geschwindigkeit im Bereich der Steigung nur $V_0^{(2)} = 60 \text{ km/h}$, während davor und danach $V_0^{(1)} = 120 \text{ km/h}$ gilt. Die Folgezeit wird im Bereich der Steigung von $T_1 = 1.5 \text{ s}$ auf $T_2 = 1.9 \text{ s}$ erhöht. Die effektive Fahrzeulgänge einschließlich Mindestabstand beträgt $l_{\text{eff}} = 10 \text{ m}$. Das Fahrverhalten wird gemäß des Lighthill-Whitham-Richards-Modells mit folgender Geschwindigkeitsrelation modelliert:

$$V_e(\rho) = \min \left[V_0, \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\rho} - l_{\text{eff}} \right) \right].$$

1. Zeigen Sie, dass die maximale Kapazität pro Fahrstreifen außerhalb der Steigungszone 2000 Fz/h beträgt, aber in der Steigungszone auf 1440 Fz/h abfällt.

2. Zwischen 15:00 und 16:00 Uhr herrscht bei $x = 0$ ein konstanter, über alle Fahrstreifen summierter Zufluss von 2000 Fz/h und überall ist freier Verkehr. Geben Sie die Verkehrsichten und Geschwindigkeiten in den Bereichen I bis IV an.
3. Um 16 Uhr erhöht sich das Gesamt-Verkehrsaufkommen bei $x = 0$ schlagartig auf 3600 Fz/h. Bricht der Verkehr zusammen? Wenn ja, wann und wo?
4. Nehmen Sie nun einen Zusammenbruch bei $x = 3$ km an und betrachten Sie zwei Situationen: (i) Die stromaufwärtige Staufront liegt im Bereich I bei $x = 1$ km, (ii) die Staufront liegt im Bereich II bei $x = 2.5$ km. Ermitteln Sie für beide Fälle die Flüsse und Dichten auf der Gesamtstrecke.
5. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Staufront in den Situationen (i) und (ii) aus Aufgabenteil (4) aus? Welche Reisezeit ist in Situation (i) für die Strecke von $x = 0$ bis $x = 4$ km zu veranschlagen?

8.7 Diffusions-Transport-Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Diffusions-Transport-Gleichung (8.43) für konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit \tilde{c} und die Anfangsbedingungen (vgl. Abb. 8.25)

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_0 & 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Literaturhinweise

- Lighthill, M.J., Whitham, G.B.: On kinematic waves: II. A theory of traffic on long crowded roads. Proc. R. Soc. A **229**, 317–345 (1955)
- Richards, P.: Shock waves on the highway. Oper. Res. **4**, 42–51 (1956)
- Daganzo, C.F.: The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. Transp. Res. B Methodol. **28**, 269–287 (1994)
- Daganzo, C.F.: The cell transmission model part II: network traffic. Transp. Res. B Methodol. **29**, 79–93 (1995)
- Helbing, D.: A section-based queueing-theoretical traffic model for congestion and travel time analysis in networks. J. Phys. A Math. Gen. **36**, L593–L598 (2003)

Kapitel 9

Makromodelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Wer einen Fehler gemacht hat und ihn nicht korrigiert, begeht einen zweiten.

Konfuzius

9.1 Makroskopische Beschleunigungsgleichung

Die bisher betrachteten makroskopischen Verkehrsmodelle (LWR-Modelle) bestanden alle aus einer einzigen dynamischen Gleichung (partielle Differentialgleichung oder iterierte Abbildung) für die Verkehrsdichte. Die Geschwindigkeit $V(x, t)$ dieser Gleichungen hatte keine eigene Dynamik, sondern ergab sich als statische Funktion direkt aus der Dichte. Dies entspricht einer instantanen Geschwindigkeitsanpassung an die bestehenden Verkehrsverhältnisse (Dichte und Dichtegradient) und ist damit wegen der endlichen Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit von Fahrzeugen unrealistisch. Dies wird auch daran ersichtlich, dass mit den LWR-Modellen keine *Verkehrsinstabilitäten*, also *wachsende Stauwellen* simuliert werden können, die jedoch bei gebundenem Verkehr (also auf der gestauten Seite des Fundamentaldiagramms) fast immer in den Detektordaten beobachtet werden (siehe Kap. 17). Die LWR-Modelle können von diesen charakteristischen, raumzeitlichen Eigenschaften lediglich die konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit c reproduzieren (und natürlich die Tatsachen, dass Staus an Engstellen entstehen und stromabwärtige Staufronten entweder stationär sind oder mit c stromaufwärts wandern). In realistischeren Modellen wird deshalb nicht die Geschwindigkeit, sondern die *Beschleunigung* als Funktion der Verkehrsverhältnisse (beschrieben durch Dichte und Geschwindigkeit sowie deren Gradienten, d.h. räumliche Ableitungen) angenommen.¹ Die Geschwindigkeit ist nun eine zweite dynamische Variable, weshalb solche Modelle im englischen Sprachgebrauch auch *Second-Order-Models* genannt werden, im

¹ Auf die *Kontinuitätsgleichung* hat dies keinen Einfluss, da sie direkt aus der Fahrzeugerhaltung folgt und damit für *alle* makroskopischen Verkehrsflussmodelle gilt. Je nach Streckengeometrie kommt eine der Kontinuitätsgleichungen aus Abschnitt 7.2 zum Einsatz.

Gegensatz zu den LWR-Modellen, welche auch als *first-order models* bezeichnet werden.

Die Geschwindigkeit ist durch eine zusätzliche *Beschleunigungsgleichung* der Form

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) V(x, t) = A(\rho(x, t), V(x, t)) \quad (9.1)$$

charakterisiert. Diese Gleichung besagt, dass die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$ vom *mitfahrenden Fahrzeug aus gesehen* (linke Seite der Gleichung, vgl. Abb. 9.1) gleich einer *Beschleunigungsfunktion* $A(x, t)$ ist (rechte Gleichungsseite). Die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$ heißt auch *konvektive Ableitung* oder *Lagrangesche Ableitung* und wurde bereits in Kap. 7 bzw. Abb. 7.3 näher diskutiert.

Die verschiedenen (zeitkontinuierlich formulierten) Modelle zweiter Ordnung unterscheiden sich nur durch die Beschleunigungsfunktion. Diese modelliert die Beschleunigung eines Fahrzeug-Fahrer-Kollektivs in Abhängigkeit des lokalen Verkehrszustands. Neben der Verkehrsdichte $\rho(x, t)$ und der Geschwindigkeit $V(x, t)$ am betrachteten Ort können dies auch die Gradienten $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ sein. Ferner kann die Beschleunigungsfunktion auch *Nichtlokalitäten* enthalten, d.h. die Dichte oder die Geschwindigkeit wird nicht am Bezugsort x , sondern an einem Ort $x_a > x$, also vor dem Fahrzeug, ausgewertet. Dadurch kann man berücksichtigen, dass Fahrer – im wahrsten Sinne des Wortes – *vorausschauend* fahren.

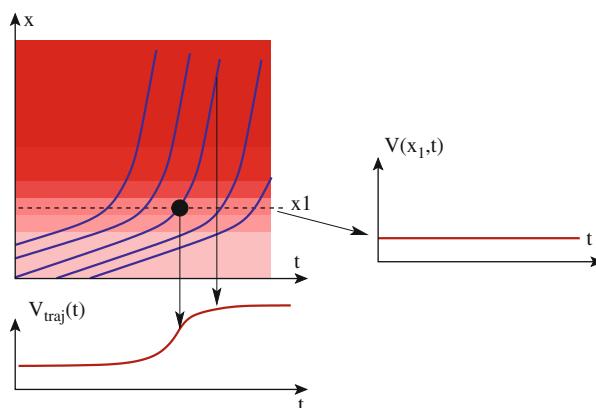


Abb. 9.1 Veranschaulichung der konvektiven Ableitung (Lagrangesche Ableitung) entlang einer Fahrzeug-Trajektorie im Vergleich zu der partiellen (Eulerschen) Ableitung im ortsfesten System. Entlang einer durch $x(t)$ gegebenen Trajektorie gilt $\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$. Hier ist die Situation einer stationären ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) stromabwärtigen Staufront gezeigt, bei der die Fahrzeuge beschleunigen ($\frac{dV}{dt} > 0$). Die Situation entspricht der in Abb. 7.4

9.2 Eigenschaften der Beschleunigungsfunktion

Zunächst beinhalten auch die meisten Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit einen stationär-homogenen Gleichgewichtszustand und damit, ebenso wie die LWR-Modelle, ein Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho)$ bzw. eine Gleichgewichtsgeschwindigkeits-Dichte-Relation $V_e(\rho)$.² Da im stationär-homogenen Fall die linke Seite der Beschleunigungsgleichung (9.1) verschwindet, muss auch die rechte Seite verschwinden:

$$A(\rho, V_e(\rho)) = 0, \quad \text{falls} \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (9.2)$$

Dies ist eine implizite Gleichung für die Funktion der Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V_e(\rho)$ bzw. das Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho)$. Die Bedingungen an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit sind dieselben wie bei den LWR-Modellen, also $\frac{dV_e}{d\rho} \leq 0$, $V_e(0) = V_0$ und $V_e(\rho_{\max}) = 0$ (vgl. Abb. 8.1).

Im Gegensatz zu den LWR-Modellen ist im Allgemeinen $V(x, t) \neq V_e(\rho(x, t))$. Die Beschleunigungsfunktion sollte aber das Bestreben der Fahrer modellieren, sich der Gleichgewichtsgeschwindigkeit anzunähern. Im homogenen Fall (keine Dichte- oder Geschwindigkeitsgradienten) ergibt sich für alle sinnvollen Beschleunigungsfunktionen die Bedingung

$$A(\rho, V) < 0, \quad \text{falls} \quad V > V_e(\rho), \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (9.3)$$

Analog gilt $A(\rho, V) > 0$ falls $V < V_e(\rho)$. Beide Bedingungen kann man zusammenfassen und auch auf den Fall mit Gradienten und Nichtlokalitäten verallgemeinern, indem man fordert

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial V} < 0. \quad (9.4)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass bei Erhöhung der Geschwindigkeit die Beschleunigung abnimmt, zumindest falls in der lokalen Umgebung alle anderen Größen (wie Dichte, Dichtegradienten, Geschwindigkeitsgradienten) unverändert bleiben.³

Wie später im Kap. 15 gezeigt wird, reicht es nicht aus, dass ein Gleichgewicht vorhanden ist (Gl. (9.2)) und die Fahrer versuchen, dieses zu erreichen (Gl. (9.4)). Denn ohne zusätzliche Bedingungen wäre das Modell (9.1) immer instabil. Es würden also immer Stop-and-Go-Wellen entstehen, auch in Situationen wie freiem Verkehr, wo diese nicht beobachtet werden! Dies ist genauso unrealistisch wie die vollständige Abwesenheit solcher Instabilitäten in den LWR-Modellen. Die in

² Es gibt auch Modelle „ohne“ Fundamentaldiagramm. Diese werden aber höchst kontrovers diskutiert und hier nicht betrachtet.

³ Die Bedingung, dass alles andere unverändert bleibt, wird auch als *ceteris paribus* (lat. für „alles Übrige bleibt gleich“) bezeichnet.

der Realität beobachteten Instabilitäten entstehen nur in gewissen *Dichtebereichen*, welche in der Regel gebundenem Verkehr entsprechen. Genau dies wird durch Modellierung einer zusätzlichen *Anticipation* erreicht, bei der die Fahrer die zukünftige Verkehrssituation vorwegnehmen bzw. die Situation weiter stromabwärts betrachten. Dies kann durch die Abhängigkeit der Beschleunigungsfunktion von *Gradienten* realisiert werden, wobei:

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)} \geq 0. \quad (9.5)$$

Alternativ zur Bedingung (9.5) kann man eine *Nichtlokalität* einführen, indem man die Beschleunigungsfunktion nicht nur in Abhängigkeit der Größen $\rho = \rho(x, t)$ und $V = V(x, t)$ am aktuellen Ort definiert, sondern noch Abhängigkeiten von den Verkehrsgrößen $\rho_a = \rho(x_a, t)$ und $V_a = V(x_a, t)$ an einer vorweggenommenen (zukünftigen) Position $x_a > x$ einführt. Dann muss gelten (vgl. auch Abb. 9.3)

$$\frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial \rho_a} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial V_a} \geq 0. \quad (9.6)$$

Zumindest eine der vier Bedingungen der Gleichungen (9.5) und (9.6) muss als strikte Ungleichung erfüllt sein. Die Gradienten-Bedingungen (9.5) können als Grenzfall der nichtlokalen Bedingungen (9.6) für den Fall $x_a \rightarrow x$ (analog zur Ableitung des Grenzfalls eines Differenzenquotienten für verschwindende Differenzen) aufgefasst werden. Im Allgemeinen sind Modelle mit nichtlokalen Beschleunigungsfunktionen realistischer und gleichzeitig effizienter zu simulieren als solche mit Gradienten in der Beschleunigungsfunktion, auch wenn sie – immerhin handelt es sich um nichtlokale, partielle Differentialgleichungen – zunächst komplizierter aussehen.

9.3 Allgemeine Form der Modellgleichungen

Auch die Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit gehorchen der *Kontinuitäts-Gleichung*, im allgemeinsten Fall also Gl. (7.15). Dies folgt aus der modellunabhängigen Herleitung dieser Gleichung aus der Bilanz der Fahrzeugzahlen. Die *Beschleunigungsgleichung* enthält im Allgemeinen neben den bereits diskutierten Anteilen auch einen „Rampenterm“, der den Einfluss einfahrender und ausfahrender Fahrzeuge auf die mittlere Geschwindigkeit beschreibt. Sowohl in der Kontinuitäts- als auch in der Beschleunigungsgleichung sind weiterhin sogenannte „Diffusionssterme“ möglich. Zusammenfassend kann man fast alle in kontinuierlichen Orts- und Zeitvariablen, also als partielle Differentialgleichungen formulierten Modelle, in folgender allgemeinen Form darstellen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\rho V}{I} \frac{dI}{dx} + v_{rmp}(x, t) \quad (9.7)$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e - V}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial V}{\partial x} \right) + A_{\text{rmp}}(x, t).} \quad (9.8)$$

Im Folgenden werden die einzelnen Beiträge näher beschrieben.

Diffusionsterme. Sowohl in der Kontinuitätsgleichung als auch in der Beschleunigungsgleichung können Diffusionsterme verwendet werden, um allzu scharfe Übergänge und Schockfronten „aufzuweichen“. In der Kontinuitätsgleichung beschreibt eine Diffusionskonstante $D > 0$ mikroskopisch einen *Random Walk* der einzelnen Fahrzeuge, also eine erratische und abrupte Änderung der Positionen.⁴ Der „Viskositätssterm“ in Gl. (9.8) mit der „Viskosität“ $\eta \geq 0$ bzw. der Geschwindigkeits-Diffusionskonstanten $D_v = \eta/\rho$ führt, analog zur Diffusion in der Kontinuitätsgleichung, zur Aufweichung abrupter Geschwindigkeitsübergänge.⁵ Der Term beschreibt erratische Geschwindigkeitsänderungen, welche beispielsweise durch Unaufmerksamkeit oder Fehleinschätzungen der Fahrer verursacht sind. Meist wird dieser Term stärker angenommen, als es realistischen, erratischen Beschleunigungsänderungen entspricht. Auf mikroskopischer Ebene entsprechen die Diffusionsterme damit keiner realen Eigenschaft des Verkehrs. Makroskopisch können sie dennoch nützlich sein, (i) zur Verbesserung der numerischen Eigenschaften des Modells, (ii) zur Eliminierung der ebenfalls unrealistischen abrupten Übergänge (Schockwellen), die einige Modelle aufweisen, (iii) zur Untersuchung der Auswirkung der sogenannten *numerischen Diffusion*, welche zwangsläufig bei der näherungsweisen Lösung der Bewegungsgleichungen auf dem Computer auftritt (vgl. Abschn. 7.2). Schließlich sei noch angemerkt, dass die Diffusion der Dichte nicht die Bedingung der Fahrzeugerhaltung verletzt.

Einflüsse durch Zu- und Abfahrten. Während die Quellterme $-\frac{\rho V}{I} \frac{\partial I}{\partial x}$ und $v_{\text{rmp}}(x, t)$ der Kontinuitätsgleichung direkt aus der Fahrzeugbilanz folgen (vgl. Kap. 7.2) und damit modellunabhängig sind, hängt der Rampenterm A_{rmp} der Beschleunigungsgleichung von Annahmen über die Geschwindigkeit der ein- und ausfahrenden Fahrzeuge im Moment des Spurwechsels auf die Hauptfahrbahn und von der Hauptfahrbahn ab. Im einfachsten Fall nimmt man an, dass die Fahrzeuge mit einer konstanten, mittleren Geschwindigkeit $V_{\text{rmp}} < V$ auf die Hauptfahrbahn einscheren bzw. bereits vor Verlassen der Hauptfahrbahn auf diese Geschwindigkeit abbremsen. Dadurch wird die mittlere Geschwindigkeit $V(x, t) = \langle v_i \rangle$ der Fahrzeuge i in der lokalen Umgebung verändert, was zu folgender makroskopischen Geschwindigkeits-Änderungsrate führt (vgl. Abb. 9.2 und Übungsaufgabe 9.1):

⁴ In seiner Arbeit über den *Random Walk* erklärte Einstein 1905 die unter dem Mikroskop bereits seit langem beobachtete Zitterbewegung von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten (*Brown'sche Bewegung*) durch erratische Bewegungen der Flüssigkeitsmoleküle und klärte damit gleichzeitig die Natur der Diffusion auf.

⁵ Für Hydrodynamiker: Hätte man keinen Autoverkehr, sondern eine reale Flüssigkeit oder ein reales Gas, so beschreibe η die dynamische und D_v die kinematische Kompressionsviskosität.

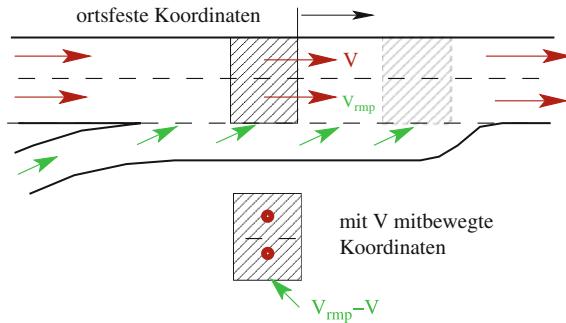


Abb. 9.2 Zur Begründung des Rampenterms (9.9). Im mitbewegten Koordinatensystem sind die Fahrzeuge der Hauptfahrbahn ortsfest (Punkte im schraffierten Volumenelement), während die auffahrenden Fahrzeuge mit der Geschwindigkeit $V_{\text{rmp}} - V$ in das schraffierte Volumenelement einfahren

$$A_{\text{rmp}}(x, t) = \frac{(V_{\text{rmp}} - V)}{\rho} |v_{\text{rmp}}(x, t)| = \frac{(V_{\text{rmp}} - V)|Q_{\text{rmp}}|}{\rho I L}. \quad (9.9)$$

Ebenso wie der Rampenterm der Kontinuitätsgleichung ist $A_{\text{rmp}}(x, t)$ nur auf Höhe von Zu- oder Abfahrten ungleich Null.

Geschwindigkeitsanpassung. Der *Geschwindigkeits-Anpassungsterm* oder *Relaxationsterm* $(V_e - V)/\tau$ beschreibt, im Gegensatz zu allen bisher betrachteten Termen, eine tatsächliche, mittlere Beschleunigung der Fahrzeuge in der lokalen Umgebung. Modelliert wird eine Anpassung der Geschwindigkeit V an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit V_e der LWR-Modelle innerhalb des Zeitrahmens τ . Damit werden die Bedingungen (9.2) und (9.4) an die Beschleunigungsfunktion erfüllt. Die Wirkung eines solchen Beitrags wird in Abb. 9.3 veranschaulicht: Befindet man sich außerhalb des Gleichgewichts (Punkte ② oder ③), führt der Anpassungsterm zu einer Beschleunigung (Pfeile) in Richtung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit. Je nach Verkehrssituation (Stadt, Autobahn, Abweichung von der angestrebten Geschwindigkeit) liegt die Anpassungszeit zwischen wenigen Sekunden und etwa 40 s, wird aber oft konstant angenommen.

Antizipatorische Geschwindigkeitsanpassung. Man kann eine antizipierende (d.h. vorausschauende) Fahrweise auch mit dem Geschwindigkeits-Anpassungsterm beschreiben, indem man ihn als Funktion der Dichte $\rho(x_a, t)$ an einer stromabwärtigen Stelle $x_a > x$ formuliert. Der resultierende nichtlokale Anpassungsterm

$$A_{\text{nl}}(x, t) = \frac{V_e(\rho(x_a, t)) - V(x, t)}{\tau} \quad (9.10)$$

entspricht einer vorausschauenden Fahrweise und ist konsistent mit der allgemeinen Bedingung (9.6) an die Beschleunigungsfunktion. Die Wirkung ist wieder in Abb. 9.3 gezeigt: Nähert man sich einem Stau (Zustand ④ in der Abbildung, entsprechend $\rho(x_a, t) - \rho(x, t) > 0$ bzw. $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$), dann bewirkt die Antizipation eine

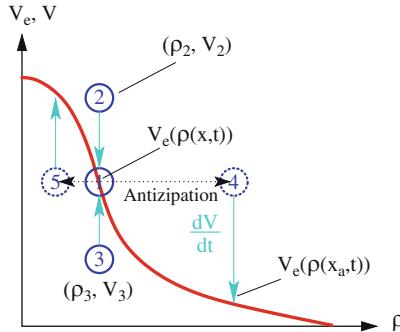


Abb. 9.3 Wirkung der Anpassungs- und Antizipationsterme in Gl. (9.8). Die Punkte ① bis ③ charakterisieren Wertepaare von Dichten ρ und Geschwindigkeiten V an einem bestimmten Ort. Punkt ① bezeichnet die Gleichgewichtssituation, während die Pfeile von den Punkten ② und ③ nach ① eine Anpassung der Geschwindigkeit beschreiben. Die virtuellen Punkte ④ und ⑤ bezeichnen reale Geschwindigkeiten, aber Verkehrsichten, wie sie an einem antizipierten Ort $x_a > x$ herrschen

Verzögerung. Fährt man hingegen aus dem Stau heraus (Punkt ⑤), ergibt sich eine Beschleunigung.

Spezialfall einer verschwindenden Anpassungszeit. Multipliziert man die Beschleunigungsgleichung (9.8) mit τ , so sieht man leicht, dass sich im Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ diese Gleichung auf die LWR-Bedingung $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$ reduziert. Man erhält in diesem Grenzfall also eine fest an die Dichte gekoppelte Geschwindigkeit, also ein Modell erster Ordnung (LWR-Modell).

Druckterm. Der Druckterm $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ mit dem „Verkehrsdruck“ $P(\rho(x, t), V(x, t))$ beschreibt eine Reaktion auf Dichte- und in manchen Modellen auch Geschwindigkeitsgradienten. Die entsprechende Beschleunigung enthält dadurch Gradienten, welche den allgemeinen Bedingungen (9.5) an die Beschleunigungsfunktion genügen sollten. Der Druckterm kann verschiedene reale und auch statistische verkehrliche Effekte beschreiben: einerseits eine antizipatorische Reaktion der Fahrer auf Gradienten der Geschwindigkeit und/oder der Dichte, andererseits einen rein kinematischen Effekt einer endlichen Geschwindigkeitsvarianz:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\text{antiz}}(\rho, V)}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\text{kin}}(\rho, V)}{\partial x}. \quad (9.11)$$

Den antizipatorischen Beitrag des Verkehrsdrucks zur Beschleunigung kann man auch schreiben als

$$A_{\text{antiz}} = -\beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\text{antiz}}}{\partial \rho}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\text{antiz}}}{\partial V} \quad (9.12)$$

mit nichtnegativen, im Allgemeinen von ρ und/oder V abhängigen Sensitivitäten β_1 und β_2 . Die Sensitivität β_1 auf Dichtegradienten sagt aus, dass man stärker bremst

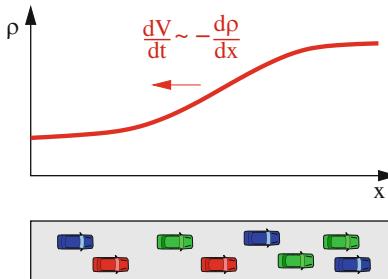


Abb. 9.4 Sensitivität auf Dichtegradienten am Beispiel bei Einfahrt in einen Stau. Neben der Anpassung der Geschwindigkeit an die aktuelle Dichte gibt es einen zusätzlichen, negativen Beschleunigungsbeitrag $A_{\text{antiz}} = -\beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x}$

bzw. weniger beschleunigt, wenn die Verkehrsdichte voraus ansteigt (vgl. Abb. 9.4), während die Sensitivität β_2 bezüglich Geschwindigkeitsgradienten ein Verhalten modelliert, bei dem man selbst umso stärker beschleunigt (bzw. weniger bremst), je mehr der Umgebungsverkehr beschleunigt ($\frac{\partial V}{\partial x} > 0$).

Im Gegensatz zum antizipatorischen Teil des Druckterms, welcher reale Beschleunigungen der einzelnen Fahrer widerspiegelt, ist die Beschleunigung durch den kinematischen Druckanteil,

$$A_{\text{kin}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\text{kin}}}{\partial x}, \quad P_{\text{kin}} = \rho \sigma_V^2(x, t), \quad (9.13)$$

allein eine Folge einer endlichen Geschwindigkeitsvarianz

$$\sigma_V^2(x, t) = \langle (v_i - V(x, t))^2 \rangle \quad (9.14)$$

der Fahrzeuge i im unmittelbaren Umfeld des Ortes x zur Zeit t . Die Varianz wird mit genau den Fahrzeugen gebildet, deren Einzelgeschwindigkeiten v_i auch zur makroskopischen Geschwindigkeit $V(x, t) = \langle v_i \rangle$ an diesem Ort beitragen. Der kinematische Beschleunigungsterm ist nur wirksam, wenn es unterschiedlich schnelle Fahrzeuge ($\sigma_V^2(x, t) > 0$) sowie endliche Dichtegradienten ($\partial P_{\text{kin}} / \partial x \neq 0$) gibt. Dann ändert sich nämlich die Zusammensetzung an schnellen und langsamen Fahrzeugen i in den makroskopischen Volumenelementen, was letztendlich zu einer Änderung der makroskopischen Geschwindigkeit $V(x, t) = \langle v_i \rangle(x, t)$ führt, ohne dass ein einziges Fahrzeug beschleunigt oder bremst (vgl. Abb. 9.5 und Übungsaufgabe 9.2). Ebenso wie der Rampenterm A_{rmp} ist dieser Beschleunigungsbeitrag also rein kinematischer Natur.

Verdeutlichen Sie sich den Effekt der kinematischen Dispersion anhand einer Verkehrssituation, bei der zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Übergang von fließendem Verkehr (stromaufwärts) zu einer leeren Fahrbahn (stromabwärts) vorliegt.

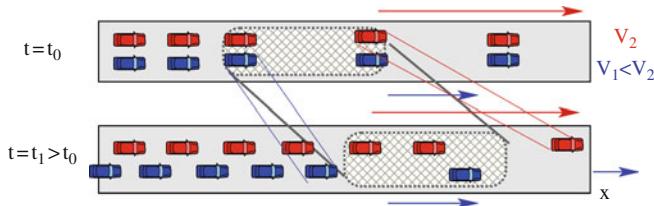


Abb. 9.5 Wirkung der kinematischen Dispersion: Anfangs ($t = t_0$) herrscht eine konstante makroskopische Geschwindigkeit $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ und Varianz $\sigma_V^2 = \frac{1}{4}(V_1 - V_2)^2$ sowie ein Dichtegradient $\frac{d\rho}{dx} < 0$. Die Änderung $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$ der Geschwindigkeit wird in einem mit V mitbewegten Volumenelement (schraffiert) gemessen. Die langsameren blauen Fahrzeuge fahren mit der Relativgeschwindigkeit $V_1 - V < 0$ rückwärts durch das Volumenelement, während die schnelleren Fahrzeuge das Volumenelement mit der Relativgeschwindigkeit $V_2 - V_1$ vorwärts durchqueren. Auf diese Weise erhöht sich im Falle $\frac{d\rho}{dx} < 0$ der Anteil der schnelleren Fahrzeuge. Die makroskopische Geschwindigkeitsänderung $\frac{dV}{dt}$ hat also im mitbewegten System einen Anteil proportional zu $-\sigma_V^2 \frac{d\rho}{dx}$

Die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge variieren zwischen $v_{\min} < V < v_{\max}$ (mit der mittleren, makroskopischen Geschwindigkeit V) und kein Fahrzeug beschleunigt. Welche makroskopische Geschwindigkeit herrscht für $t > 0$ an den Stellen, an denen die Dichte erstmals von Null verschieden ist?

9.4 Übersicht über einige Makromodelle zweiter Ordnung

Im Folgenden werden einige konkrete Makromodelle zweiter Ordnung vorgestellt und diskutiert.

9.4.1 Payne-Modell

Ein einfaches Beispiel eines makroskopischen Modells mit dynamischer Geschwindigkeitsgleichung ist das *Payne-Modell* mit der Beschleunigungsgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{Payne-Modell.} \quad (9.15)$$

Das Payne-Modell ist ein Spezialfall der allgemeinen Gl. (9.8) für konstante Geschwindigkeitsanpassungszeit τ , einem durch $P = -V_e(\rho)/2\tau$ gegebenen variablen Verkehrsdruck und verschwindender Diffusionskonstante. Die Funktion $V_e(\rho)$ für die Gleichgewichtsgeschwindigkeit spezifiziert verschiedene Modellvarianten.

Ohne die Beschleunigungsgleichung zu verändern, kann man den Verkehrsdruck um eine Konstante auf die Form

$$P_{\text{Payne}} = \frac{V_0 - V_e(\rho(x, t))}{2\tau}$$

erweitern und ihn damit als ein Maß der Interaktion zwischen den Fahrern auffassen, welche naturgemäß für $\rho \rightarrow 0$ und damit $V = V_0$ verschwindet.⁶ Im Falle von Zu- und Abfahrten kommt der modellunabhängige Rampenterm A_{rmp} hinzu. Wie jedes Modell zweiter Ordnung wird das Payne-Modell durch die Kontinuitätsgleichung vervollständigt.

Im Abschn. 10.7 wird das Payne-Modell aus einem einfachen *Fahrzeugfolgmodell*, dem *Newell-Modell*, hergeleitet.

Das Payne-Modell verhält sich in der Simulation sehr instabil (vgl. Kap. 15). Ferner folgt aus der mikroskopischen Herleitung, dass die Anpassungszeit τ gleich der mikroskopischen Reaktionszeit T_r gesetzt wurde, während in Wirklichkeit die Zeiten deutlich unterschiedliche Werte annehmen: Die Reaktionszeit T_r beträgt etwa 1 s, während τ durchaus Werte von 10 s und mehr annehmen kann. Üblicherweise werden für die Simulation für τ Werte zwischen 1 s und 5 s angenommen.

Grenzfall einer verschwindenden Anpassungszeit. Da im Payne-Modell die Anpassungszeit auch im Nenner des Druckterms auftritt, ergibt sich, im Gegensatz zu anderen Modellen, im Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ nicht einfach $V = V_e$ und damit ein gewöhnliches LWR-Modell. Vielmehr folgt nach Multiplikation mit τ und Nullsetzen eine nicht nur von der Dichte, sondern auch vom Dichtegradienten abhängige Geschwindigkeit

$$V = V_e(\rho) + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Setzt man dies in die entsprechende Kontinuitätsgleichung ein, z.B. in die Gl. (7.8) für homogene Streckenabschnitte, erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_e(\rho) + \frac{V'_e(\rho)}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0.$$

Dies ist die Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion, was durch Umstellen der Gleichung noch offensichtlicher wird:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_e(\rho))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (9.16)$$

Der Diffusionskoeffizient

⁶ Ein kompressibles, eindimensionales Gas wird mit demselben Ausdruck für den Druck beschrieben. Die Analogie ist dennoch rein formaler Natur (vgl. die Diskussion in Abschn. 9.3).

$$D = D(\rho) = \frac{-V'_e(\rho)}{2}$$

ist in diesem Fall eine variable Größe.

9.4.2 Kerner-Konhäuser-Modell

Die Beschleunigungsgleichung des Kerner-Konhäuser-Modells (KK-Modell) ist gegeben durch

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{\theta_0}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{KK-Modell.} \quad (9.17)$$

Dieses Modell wurde nicht aus einem mikroskopischen Modell hergeleitet. Vielmehr ist es einem eindimensionalen, kompressiblen Gas nachempfunden mit einem konstanten Druck θ_0 und einer Geschwindigkeitsdiffusion $D_v = \eta/\rho$, welche formal einer konstanten dynamischen Kompressionsviskosität η entspricht. Wie beim Payne-Modell entspricht das KK-Modell je nach verwendetem Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho)$ einer ganzen Klasse von Modellen. Typische Werte der Modellparameter sind (abgesehen von denen des Fundamentaldiagramms) $\tau = 10$ s, $\theta_0 = 200$ m²/s² und $\eta = 150$ m/s.

Die Diffusion wurde eingeführt, um unrealistische Geschwindigkeitsverläufe zu verhindern. Allerdings verhindert sie in vielen Fällen eine effiziente Simulation, da sich bei der numerischen Integration sogenannte *numerische Instabilitäten* einstellen, sofern man den numerischen Aktualisierungs-Zeitschritt nicht hinreichend klein wählt (vgl. Abschn. 9.5). Solche Instabilitäten führen immer zu einem Abbruch der Simulation und müssen daher, im Gegensatz zu den durchaus erwünschten physikalischen Instabilitäten (immerhin führen diese zu den beobachteten Stop-and-Go-Wellen) möglichst vermieden werden. In Abschn. 9.5 wird gezeigt, dass aufgrund der Diffusion keine Aktualisierungszeitschritte Δt erlaubt sind, welche die „CFL-Bedingung“ $\Delta t < (\Delta x)^2/(2D_v)$ verletzen.

Beispiel: Mit einer räumlichen Diskretisierung in Zellen der Länge $\Delta x = 50$ m und $\eta = 150$ m/s ergibt sich bei einer Dichte von $\rho = 15$ Fz/km = 0.015 Fz/m eine kinematische Diffusion $D_v = 10\,000$ m²/s und damit die Bedingung $\Delta t < 0.125$ s. Im Vergleich dazu kann man bei derselben Zellenlänge Modelle ohne Diffusion mit Zeitschritten von bis zu einer Sekunde simulieren. Da $D \rightarrow \infty$ für $\rho \rightarrow 0$, muss außerdem D auf einen Maximalwert begrenzt werden.

Abbildung 9.6 zeigt eine Simulation eines Autobahnabschnitts mit einer Zufahrt als Engstelle. Die linke Grafik zeigt Fluss-Dichte-Punkte, welche aus 1-Minuten-Daten von „virtuellen Detektoren“ gewonnen wurden. „Virtuelle Detektoren“ sind definierte Orte, an denen die in der Simulation vorbeikommenden Fahrzeuge genauso registriert und aggregiert werden wie in der Realität (siehe Kap. 3). Man sieht, dass die Fluss-Dichte-Punkte sich nicht mit dem Fundamentaldiagramm decken,

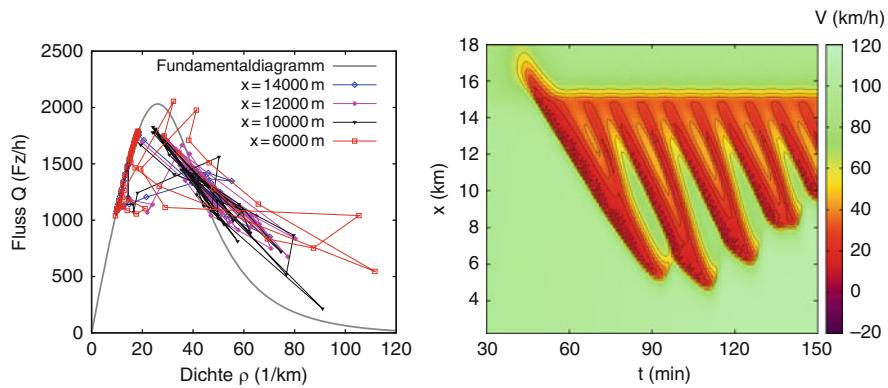


Abb. 9.6 Simulation einer Richtungsfahrbahn mit einer Auffahrt (Rampenfluss 400 Fz/h) mit dem KK-Modell. Links: Fundamentaldiagramm (graue Linie) und Fluss-Dichte-Daten (gezackte Linien) von virtuellen Detektoren an verschiedenen Stellen; rechts: raumzeitlicher Geschwindigkeitsverlauf

da die Geschwindigkeit und damit auch der Fluss nun eigenständige dynamische Variablen sind.⁷ Die in der rechten Grafik der Abb. 9.6 gezeigte raumzeitliche Dynamik der Geschwindigkeit zeigt wachsende und entgegen der Fahrtrichtung sich ausbreitende Stop-and-Go-Wellen, also Merkmale, die zumindest qualitativ den beobachteten realen Instabilitäten entsprechen (vgl. Abb. 5.1).

9.4.3 GKT-Modell

Das *Gaskinetic-Based-Traffic*-Modell (GKT-Modell) ist eines der wenigen makroskopischen Modelle zweiter Ordnung, welches aus einem mikroskopischen Modell unter Berücksichtigung der Heterogenität der Verkehrsteilnehmer hergeleitet wird. Die Heterogenität wird hierbei durch die empirisch messbare makroskopische Geschwindigkeitsvarianz charakterisiert, welche im GKT-Modell in der Form

$$\sigma_V^2(\rho) = \alpha(\rho)[V_e(\rho)]^2 \quad (9.18)$$

angenommen wird. Abbildung 9.7 zeigt ein Beispiel. Der Variationskoeffizient (d.h. die relative Schwankungsbreite, vgl. Abschn. 3.2) $\sqrt{\alpha(\rho)}$ der Geschwindigkeit liegt dabei typischerweise zwischen 5–10% (freier Verkehr) und 20% (gestauter Verkehr).

Im Mikromodell beschleunigen die Fahrzeuge mit der Beschleunigung $\dot{v}_i = (v_{0i} - v_i)/\tau$ so lange, bis der Sicherheitsabstand $v_i T$ zum Vorderfahrzeug unter-

⁷ In realen Fluss-Dichte-Daten ist die Streuung im gebundenem Verkehr aber meist wesentlich größer. Dies kann man nur simulieren, wenn man zusätzlich explizit Heterogenität durch zeitlich veränderliche Modellparameter annimmt oder mikroskopisch modelliert (vgl. Kap. 12).

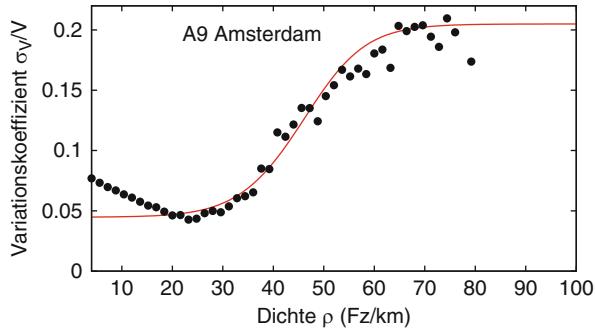


Abb. 9.7 Beobachtete Variationskoeffizienten σ_V/V der Geschwindigkeit und modellierte Funktion $\sqrt{\alpha(\rho)}$ des GKT-Modells

schritten wird. Dann wird die Geschwindigkeit auf die des Vorderfahrzeugs gesetzt. Ferner wird die das durch den Variationskoeffizient festgelegte Ausmaß an Geschwindigkeitsdifferenzen permanent durch Zufallsbeschleunigungen aufrechterhalten. Die Herleitung aus diesem Modell erfolgt mit Methoden, welche auch bei den kinetischen Gleichungen von Gasen eingesetzt werden, woher dieses Modell seinen Namen hat. Die resultierende Beschleunigungsgleichung lautet

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e^*(\rho, \rho_a, V, V_a) - V}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}} \quad \text{GKT-Modell.} \quad (9.19)$$

Der Druckterm

$$P(x, t) = \rho \sigma_V^2(\rho) \quad (9.20)$$

röhrt allein von der Geschwindigkeitsvarianz her. Ferner gibt es keine Geschwindigkeitsdiffusion. Alle Beschleunigungen des Fahrzeugkollektivs (sowohl die Geschwindigkeitsanpassung als auch die Antizipation) sind in der „dynamischen Zielgeschwindigkeit“ V_e^* enthalten, welche von der Verkehrslage (ρ, V) sowohl am aktuellen Ort als auch von der Situation (ρ_a, V_a) an einem *antizipierten Ort* $x_a > x$ abhängt. Dabei gilt

$$\rho_a = \rho(x_a, t), \quad V_a = V(x_a, t), \quad x_a = x + \gamma V(x, t)T. \quad (9.21)$$

Der antizipierte Ort ist ein Vielfaches γ (typische Werte zwischen 1 und 1.5) des „Sicherheitsabstandes“ VT vor der eigenen Fahrzeugposition. Die dynamische Zielgeschwindigkeit hat die Form

$$V_e^*(\rho, \rho_a, V, V_a) = V_0 \left[1 - \frac{\alpha(\rho)}{\alpha(\rho_{\max})} \left(\frac{\rho_a V T}{1 - \rho_a / \rho_{\max}} \right)^2 B \left(\frac{V - V_a}{\sigma_V} \right) \right] \quad (9.22)$$

mit dem von der normierten Geschwindigkeitsdifferenz $(V - V_a)/\sigma_V$ abhängigen und monoton ansteigenden „Boltzmann-Faktor“

$$B(x) = 2 \left[x f_N(x) + (1 + x^2) F_N(x) \right]. \quad (9.23)$$

Dieser enthält die Dichte $f_N(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2)$ der Standardnormalverteilung und die entsprechende Verteilungsfunktion $F_N(x) = \int_{-\infty}^x f_N(x') dx'$.

Im Gegensatz zu den anderen Modellen zweiter Ordnung ist die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V_e(\rho)$ nicht explizit gegeben, sondern ergibt sich aus der dynamischen Zielgeschwindigkeit V_e^* (vgl. Aufgabe 9.4). Die ersten drei Parameter sind dieselben wie in den Payne- und KK-Modellen, wenn man dort ein dreieckiges Fundamentaldiagramm gemäß Gl. (8.7) annimmt.

Das GKT-Modell ist *robust* in dem Sinne, dass geringe Änderungen der Modellparameter auch nur zu geringen Änderungen der Simulationsergebnisse führen. Ferner enthält es *anschauliche Modellparameter*, welche auch mit *realistischen Wertebereichen* simuliert werden können (siehe Tabelle 9.1).

Trotz seiner komplizierten Form lässt sich das GKT-Modell leichter und schneller simulieren als das Payne-Modell oder das KK-Modell. Ein Beispiel einer Simulation mit einer Ausfahrt-Einfahrt-Kombination (Anschluss-Stelle oder Autobahnkreuz) als Engstelle ist in der Abb. 9.8 dargestellt. Die in der simulierten, raumzeitlichen Dynamik auftretenden Stop-and-Go-Wellen sehen ähnlich wie die real beobachteten in der Abb. 5.1 aus, welche aus dem Stau am Bad-Homburger Kreuz hervorgegangen sind.

Tabelle 9.1 Typische Modellparameter des GKT-Modells

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit V_0	120 km/h	50 km/h
Folgezeit T	1.4 s	1.2 s
Maximale Dichte ρ_{\max}	160 Fz/km	160 Fz/km
Geschwindigkeits-Anpassungszeit τ	20 s	8 s
Antizipationsparameter γ	1.2	1.0

9.5 Numerische Lösung

Bei der numerischen Lösung von makroskopischen Modellen, auch „numerische Integration“ genannt, kommt nahezu ausschließlich die Methode der *finiten Differenzen* zum Einsatz.⁸ Dabei werden die zu simulierenden Richtungsfahrbahnen in Zellen der Länge Δx eingeteilt und die in den Modellen vorkommenden Ableitungen durch Differenzenquotienten angenähert. Ausgehend vom „alten“

⁸ Wir werden hier nur die für die direkte Anwendung relevanten Aspekte betrachten. Für eine Vertiefung dieses Themas sei auf die weiterführende Literatur im Anhang verwiesen.

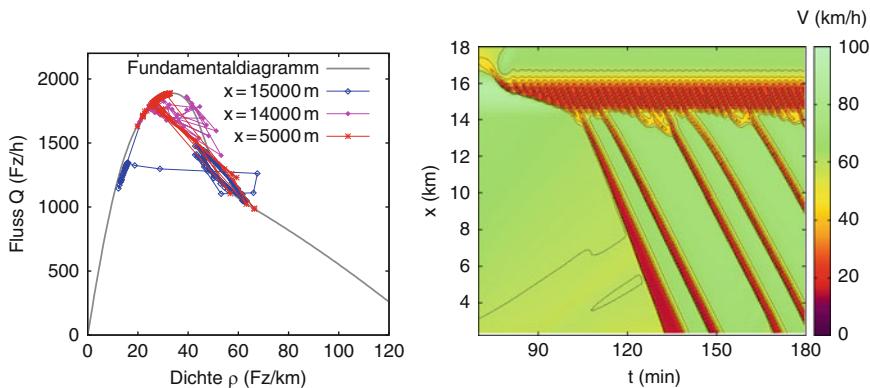


Abb. 9.8 Simulation einer Richtungsfahrbahn mit Autobahnkreuz mit dem GKT-Modell. Das Autobahnkreuz besteht aus einer Ausfahrt und einer 1.5 km stromabwärts gelegenen Einfahrt. Die Länge der Verzögerungs- und Beschleunigungsspuren ist jeweils 500 m und die Rampenflüsse –500 Fz/h bzw. 500 Fz/h. Links: Fundamentaldiagramm (graue Linie) und Fluss-Dichte-Daten (gezackte Linien) von virtuellen Detektoren an verschiedenen Stellen; rechts: raumzeitlicher Geschwindigkeitsverlauf

Verkehrsflusszustand zur Zeit t wird mit einem meist festen und für das gesamte zu modellierende Verkehrsgeschehen gültigen *Aktualisierungs-Zeitschritt* Δt ein neuer Verkehrszustand zur Zeit $t + \Delta t$ berechnet. Dies wird bis zum Ende der simulierten Zeit fortgesetzt. In diesem Sinne kann das im Abschn. 8.4 behandelte Cell-Transmission-Modell als ein LWR-Modell mit zusätzlich spezifiziertem Lösungsverfahren (Abschn. 8.4.4) angesehen werden.

Zum Lösen der Modellgleichung für einen Zeitschritt gibt es *explizite* und *implizite* Verfahren. Bei letzteren wird die Aktualisierung nicht nur mit Hilfe der „alten“, sondern auch mit den „neuen“, noch unbekannten Werten der Verkehrsflussvariablen durchgeführt. Man erhält damit für jeden Zeitschritt ein gekoppeltes Gleichungssystem für die aktualisierten Größen, welches man separat lösen muss. Im Gegensatz dazu werden bei den expliziten Verfahren zum Aktualisieren nur die alten, bekannten Werte verwendet, so dass man als Ergebnis direkt die Werte für den neuen Zeitschritt bekommt. Explizite Verfahren sind einfacher zu programmieren und meist schneller, aber auch instabiler als viele implizite Verfahren. Sobald die Streckengeometrien komplizierter werden, stoßen jedoch die impliziten Verfahren an ihre Grenzen, so dass in der Verkehrsflussmodellierung nahezu ausschließlich explizite Verfahren eingesetzt werden.⁹ Diese werden im Folgenden näher betrachtet.

Da makroskopische Verkehrsmodelle aus Fahrzeug- und Flussbilanzen hergeleitet werden und damit eine Erhaltung der Fahrzeugzahl (und ohne Beschleunigung auch eine Erhaltung des Gesamtflusses) gewährleisten, ist es wichtig, sie in einer

⁹ Dies gilt allgemein für die numerische Lösung von *hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen*, zu denen auch die makroskopischen Verkehrsmodelle gehören.

Form zu lösen, in der diese Erhaltungsgrößen automatisch berücksichtigt werden.¹⁰ Dies wird erreicht, indem die Modellgleichungen in der sogenannten *flusserhaltenen Form* (engl. *conservation equation*) formuliert werden, also mit den Variablen ρ (Verkehrsdichte) und Q (Fluss) anstelle von ρ und V (Geschwindigkeit). Die allgemeinen Gleichungen (9.7) und (9.8) mit $D = 0$ werden damit zu (vgl. Übungsaufgabe 9.5)¹¹

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = v_{\text{rmp}} - \frac{Q}{I} \frac{dI}{dx}, \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{\rho} + P - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\rho} \right) \right] = \frac{\rho V_e^* - Q}{\tau} + S_{\text{inh}}. \quad (9.25)$$

mit dem durch Streckeninhmoogenitäten verursachten Quellterm

$$S_{\text{inh}} = \frac{Q^2}{\rho I} \frac{dI}{dx} - \frac{Q v_{\text{rmp}}}{\rho} + \rho A_{\text{rmp}}. \quad (9.26)$$

In vektorieller Form kann man dies kürzer schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (9.27)$$

mit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\rho} + P - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\rho} \right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} v_{\text{rmp}} - \frac{Q}{I} \frac{dI}{dx} \\ \frac{\rho V_e^* - Q}{\tau} + S_{\text{inh}} \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

Hierbei bezeichnen \mathbf{u} den Verkehrszustand, \mathbf{f} die verallgemeinerten Flüsse und \mathbf{s} die verallgemeinerten Quellen. Um auch Modelle mit verallgemeinerter Zielgeschwindigkeit V_e^* wie das GKT-Modell (9.19) zu berücksichtigen, wurden die verallgemeinerten Quellen mit dieser formuliert. Für die Payne- und KK-Modelle gilt $V_e^*(\rho, \rho_a, Q, Q_a) = V_e(\rho)$. Von den vielen verfügbaren Lösungsverfahren haben sich für die numerische Lösung der makroskopischen Modelle zweiter Ordnung im Wesentlichen zwei Integrationsverfahren als nützlich erwiesen: Die einfache *Upwind-Methode* ist für Modelle mit Nichtlokalitäten wie dem GKT-Modell geeignet. Die *McCormack-Methode* eignet sich für alle anderen Modelle zweiter

¹⁰ Aufgrund der Beschleunigungen der Fahrzeuge ist der Fluss bei Verkehrsmodellen keine Erhaltungsgröße. Man kann aber zeigen, dass die daraus resultierenden „Quellterme“, beispielsweise der Geschwindigkeitsanpassungsterm, unproblematisch sind. Dasselbe trifft auch für die Rampen-Quellterme $\eta(x, t)$ oder A_{rmp} zu. Das Wesentliche dabei ist, dass die Ableitungen keine variablen Vorfaktoren haben. Bei der Wahl der Geschwindigkeit als dynamische Variable ist diese Bedingung auf jeden Fall beim Advektionsterm $V \frac{dV}{dx}$ verletzt.

¹¹ Mit $D \neq 0$ ist eine Formulierung in flusserhaltender Form nicht möglich.

Ordnung. Wir teilen die Strecke in Zellen der Länge Δx ein und integrieren mit der konstanten Zeitschrittweite Δt . Bezeichnet man den Verkehrszustand $\mathbf{u}(x, t)$ am Ort $j \Delta x$ und zur Zeit $n \Delta t$ mit $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(j \Delta x, n \Delta t)$ und definiert \mathbf{f}_j^n und \mathbf{s}_j^n auf dieselbe Weise, so lauten die beiden Methoden:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j^{n+1} &= \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_j^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{s}_j^n && \text{Upwind-Methode,} \\ \tilde{\mathbf{u}}_j^{n+1} &= \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_j^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{s}_j^n && \text{McCormack-Prädiktor,} \\ \mathbf{u}_j^{n+1} &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}_j^{n+1} + \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{j+1}^{n+1} - \tilde{\mathbf{f}}_j^{n+1}) + \Delta t \tilde{\mathbf{s}}_j^{n+1}}{2} && \text{McCormack-Korrektor.}\end{aligned}\quad (9.29)$$

Bei der McCormack-Methode wird also ein Upwind-Schritt als erster Schätzer („Prädiktor“) berechnet und dann als Verfeinerung („Korrektor“) das arithmetische Mittel zwischen dem Prädiktor und dem Ergebnis einer eigentlich implizite Methode verwendet, welche zur Berechnung der rechten Seite die neuen Werte $\tilde{\mathbf{f}}_j^{n+1}$ und $\tilde{\mathbf{s}}_j^{n+1}$ verwendet. Da diese noch nicht bekannt sind, werden stattdessen die Prädiktorwerte eingesetzt, so dass man insgesamt ein explizites Verfahren erhält.

Enthalten die Flüsse Gradienten (was der Fall ist, wenn das Verkehrsmodell Diffusionen enthält), dann werden diese ebenfalls mit asymmetrischen Differenzenquotienten approximiert, aber „anders herum“. Gilt also für einen Flussanteil $f^D = \frac{\partial g}{\partial x}$, dann gilt $f_j^D = (g_{j+1} - g_j)/\Delta x$ bei der Upwind-Methode und dem McCormack-Prädiktor, aber $f_j^D = (g_j - g_{j-1})/\Delta x$ beim McCormack-Korrektor. Für die Wahl eines geeigneten Verfahrens werden folgende Kriterien diskutiert:

Informationsfluss. Die Upwind-Methode berücksichtigt beim Aktualisierungsschritt nur Informationen der jeweils betrachteten Zelle und der entgegen der Fahrtrichtung benachbarten Zelle. Damit kann sie nur bei Modellen eingesetzt werden, deren *charakteristische Geschwindigkeiten* ausschließlich in Fahrtrichtung verlaufen. Die charakteristischen Geschwindigkeiten sind die Verallgemeinerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit $Q'_e(\rho)$ der Modelle erster Ordnung und werden weiter unten näher betrachtet. Im GKT-Modell verlaufen sie immer in Fahrtrichtung, während sie im Payne-Modell je nach Parametrisierung auch entgegen der Fahrtrichtung laufen können. Damit kommt das Upwind-Verfahren nur für das GKT-Modell und allgemein für Modelle mit Antizipation in Betracht, während Modelle ohne Antizipation besser mit dem McCormack-Verfahren simuliert werden. Im GKT-Modell werden eventuell sich stromaufwärts ausbreitende Informationen (wie Stauwellen) durch die Nichtlokalität berücksichtigt, welche automatisch Informationen von Zellen in Fahrtrichtung verwendet.¹²

¹² Zur Berechnung der nichtlokalen Variablen ist eine lineare Interpolation ausreichend: $\mathbf{u}_a(j \Delta x, n \Delta t) = \beta \mathbf{u}_{j+1}^n + (1 - \beta) \mathbf{u}_j^n$ mit $\beta = (x_a - x)/\Delta x$. Falls $\beta > 1$ (dann ist aber im Allgemeinen die Zellenlänge unnötig klein gewählt) werden entsprechend dem ganzzahligen Teil von β Zellen weiter stromabwärts herangezogen.

Will man bei Modellen ohne Nichtlokalität und auch bei LWR-Modellen eine einfache Methode mit unsymmetrischen Differenzenquotienten wie dem Upwind-Verfahren verwenden, ist, je nach Situation, ein explizites „Umschalten“ von der Upwind- in eine „Downwind“-Methode nötig. Genau dies wird bei den LWR-Modellen mit der in Abschn. 8.4.4 beschriebenen „Supply-Demand-Methode“ realisiert. Allgemein entsprechen Methoden erster Ordnung mit einem derartigen „Umschalten“ sogenannten *Godunov-Verfahren*. Es erweist sich bei Modellen zweiter Ordnung ohne Nichtlokalität (also auch bei Modellen mit Diffusion) generell als besser, das McCormack-Verfahren anzuwenden.

Konsistenzordnung. Ein Verfahren hat die Konsistenzordnung p , wenn der lokale Diskretisierungsfehler der numerischen Lösung sich bei sehr kleinen und im Grenzfall verschwindenden Aktualisierungssintervallen Δt wie $(\Delta t)^{-p}$ verhält. Dabei wird bei partiellen Differentialgleichungen wie den Verkehrsflussmodellen vorausgesetzt, dass gleichzeitig Δx verfeinert wird, wobei der Quotient $\Delta x / \Delta t$ konstant gehalten wird. Für differenzierbare Dichte- und Geschwindigkeitsverläufe hat die Upwind-Methode die Konsistenzordnung 1 und die McCormack-Methode die Ordnung 2. Halbiert man also Δx und gleichzeitig Δt , so halbiert bzw. viertelt sich der Fehler bei der Upwind- bzw. McCormack-Methode, zumindest im Limes $\Delta t \rightarrow 0$.

Genauigkeit. Die Konsistenzordnung besagt, wie der Fehler bei kleinen Diskretisierungssintervallen mit denselben skaliert, sie sagt jedoch nichts über den Vorfaktor aus. Deshalb kann durchaus eine Methode mit Konsistenzordnung 1 genauer oder zumindest numerisch effizienter sein als eine Methode höherer Ordnung. Dies führt letztendlich zu den obigen Empfehlungen (Upwind für Modelle mit Nichtlokalitäten, McCormack für die sonstigen Modelle).

Numerische Stabilität. Bei expliziten Lösungsverfahren gibt es mehrere Arten von *numerischen Instabilitäten*, wenn gewisse Bedingungen an die Zeitschrittweite Δt oder Zellenlänge Δx nicht erfüllt sind. Solche Instabilitäten führen in jedem Fall zu einem Abbruch der Simulation und müssen daher vermieden werden. Die numerischen Instabilitäten sind von den *physikalischen Instabilitäten*, also der Bildung von Stop-and-Go-Wellen, zu unterscheiden. Letztere sind in der Simulation durchaus unter gewissen Bedingungen erwünscht, denn das simulierte Modell soll ja die Realität abbilden. Für die Verkehrsflussmodellierung sind folgende numerische Instabilitäten relevant:

(1) *Konvektive Instabilität.* Diese tritt auf, wenn Fluss- oder Geschwindigkeitsänderungen innerhalb eines Zeitschritts von im Aktualisierungsschritt nicht berücksichtigten Zellen in die betrachtete Zelle gelangen können. Dies beinhaltet die bereits erwähnte Instabilität bei Nichtberücksichtigung der Informationsrichtung. Die relevanten Ausbreitungsgeschwindigkeiten, auch *charakteristische Geschwindigkeiten* genannt, können für nichtlineare Modelle nur im Grenzfall kleiner Schwankungen berechnet werden. Dazu linearisiert man die Modellgleichungen (9.27) um den Gleichgewichtspunkt $\rho(x, t) = \rho_0$, $Q(x, t) = Q_0 = Q_e(\rho_0)$ und erhält für kleine Störungen $\mathbf{v} = (\rho(x, t) - \rho_0, Q(x, t) - Q_0)^T$ auf (der Einfachheit halber)

homogene Strecken die linearen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{v} \quad (9.30)$$

mit

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V^2 + \frac{\partial P}{\partial \rho} & 2V + \frac{\partial P}{\partial Q} \end{pmatrix}, \quad (9.31)$$

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(\tilde{V}_e + \rho \frac{\partial \tilde{V}_e}{\partial \rho} \right) & \frac{1}{\tau} \left(\rho \frac{\partial \tilde{V}_e}{\partial Q} - 1 \right) \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

Hierbei gilt $\tilde{V}_e = V_e(\rho)$ für die Payne- und KK-Modelle und $\tilde{V}_e = V_e^*(\rho, \rho, Q, Q)$ für das GKT-Modell. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten ergeben sich als Eigenwerte der Matrix $\underline{\mathbf{C}}$. Man erhält für das Payne-Modell die Geschwindigkeiten $c_{1,2} = V \pm \sqrt{-V'_e(\rho)/2\tau}$, für das KK-Modell $c_{1,2} = V \pm \sqrt{\theta}$ und für das GKT-Modell $c_{1,2} = V(1 \pm \sqrt{3\alpha})$ zuzüglich vernachlässigbarer Beiträge, die proportional αV sind. Das Verbot der Ausbreitung über mehr als eine Zelle pro Zeitschritt führt daher zu der Bedingung

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max |c|} \quad (9.33)$$

mit $\max |c| \approx V_0$ für das GKT- und das Payne-Modell und $\max |c| = V_0 + \sqrt{\theta_0}$ für das KK-Modell.

(2) *Diffusive Instabilität*. Diffusionsterme beinhalten effektive Ausbreitungsgeschwindigkeiten $c_{\text{diff}}^{\text{eff}} = \sqrt{2D/\Delta t}$, welche vor allem bei kleinen Zellenlängen relevant werden. Dies führt zu den zusätzlichen Bedingungen

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2D_v}, \quad \Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2D}. \quad (9.34)$$

Die Bedingungen (9.33) und (9.34) werden auch als *Courant-Friedrichs-Lowy*-Bedingungen (CFL-Bedingungen) bezeichnet.

(3) *Instabilität durch den Anpassungsterm*. Die zeitliche Schrittweite darf nicht größer sein als die kleinste Anpassungszeit. Diese „klassische“ Instabilität der Re gelungstechnik führt zu

$$\Delta t < \frac{1}{\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)}, \quad (9.35)$$

wobei λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte der Matrix $\underline{\mathbf{L}}$, Gl. (9.32) sind.¹³ Für die Payne- und KK-Modelle ergibt sich daraus die Bedingung

$$\Delta t < \tau. \quad (9.36)$$

Für das GKT-Modell ist die Bedingung (9.35) sehr viel einschränkender (vgl. Übungsaufgabe 9.6). Bei sehr hohen Dichten nahe der maximalen Dichte gilt

$$\Delta t < \tau \left(1 + \frac{V_0 T \rho_{\max}}{1 - \rho / \rho_{\max}} \right)^{-1}. \quad (9.37)$$

(4) *Nichtlineare Instabilitäten.* Alle bisherigen Instabilitätstypen wurden für kleine Schwankungen der Geschwindigkeit und des Flusses hergeleitet. Bei ausgeprägten Schwankungen, vor allem Stop-and-Go-Wellen, können weitere nichtlineare Instabilitäten auftreten. Diese können nicht weiter charakterisiert werden, es hilft nur *Trial and Error*.

Numerische Diffusion. Die in den numerischen Integrationsmethoden zwangsläufig enthaltenen Diskretisierungsfehler machen sich am deutlichsten durch die sogenannte *numerische Diffusion* bemerkbar: Die numerische Lösung verhält sich in zweiter Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t)^2$ wie die exakte Lösung einer sogenannten *modifizierten Modellgleichung*, die zusätzliche Diffusionen enthält. Es sei $\mathbf{v}(x, t')$ die exakte Lösung der ursprünglichen Linearisierung (9.30) für $t' \geq t$ mit $\mathbf{u}(x, t)$ als Anfangsbedingung. Dann sind die Diffusionen in Form einer Diffusionsmatrix $\underline{\mathbf{D}}$ gegeben durch

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{v}(x, t + \Delta t)] = \underline{\mathbf{D}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \quad (9.38)$$

Die Diffusionen hängen vom Modell, von der Verkehrsdichte, vom numerischen Verfahren und von den gewählten Schrittweiten Δx , Δt ab. Für die beiden betrachteten Methoden gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}_{\text{num}} &= \frac{\Delta x}{2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \left(\vec{1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \underline{\mathbf{C}} \right) && \text{Upwind-Methode,} \\ \underline{\mathbf{D}}_{\text{num}} &= 0 && \text{McCormack-Methode.} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Im GKT-Modell mit dem Upwind-Verfahren führt das im Wesentlichen auf eine Diffusionskonstante

$$D = V \frac{\Delta x}{2} \left(1 - V \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \quad (9.40)$$

¹³ Dies gilt für eine homogene Strecke. Eventuelle zusätzliche Quellen durch Rampen oder Spurzahländerungen bewirken aber keine wesentlichen Änderungen.

in beiden Gleichungen. Interessanterweise werden die Diffusionen genau dann negativ (genauer gesagt: mindestens ein Eigenwert der Diffusionsmatrix wird negativ), wenn die Upwind-Methode konvektiv instabil wird.

Das McCormack-Verfahren hat keine numerische Diffusion, aber Fehler höherer Ordnung („numerische Dispersion“), welche bei starken Gradienten zu künstlichen, hochfrequenten Wellen führen.

Übungsaufgaben

9.1 Rampenterm der Geschwindigkeitsgleichung

Zeigen Sie, dass eine Auffahrt der Länge L_{rmp} , von der ein Fluss Q_{rmp} mit der mittleren Geschwindigkeit V_{rmp} auf die Autobahn (I Fahrstreifen pro Richtung) fließt, zu einem effektiven Beschleunigungsterm in der Geschwindigkeitsgleichung für Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit von

$$A_{\text{rmp}} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{IL_{\text{rmp}}\rho} (V_{\text{rmp}} - V)$$

für alle x parallel zur Zufahrt führt (vgl. Gl. (9.9)).

9.2 Kinematische Dispersion

Auf einer Fernstraße herrsche zur Zeit $t = 0$ die (fahrstreifengemittelte) Verkehrs-dichte (ρ in Fz/km, x in km)

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 15, & x < 0 \\ 15 - 100x, & 0 \leq x \leq 0.1 \\ 5, & x > 0.1. \end{cases}$$

Ferner ist die Dichte auf beiden Fahrstreifen gleich. Alle Fahrzeuge fahren auf dem rechten Fahrstreifen konstant mit 72 km/h und auf dem linken mit 144 km/h, d.h. $V(x, 0) = 108 \text{ km/h} = \text{const.}$ Für alle vorkommenden Verkehrsichten sei $V_e(\rho) = V(x, 0) = 108 \text{ km/h}$ ebenfalls konstant, so dass die Fahrzeuge zur Zeit $t = 0$ nicht beschleunigen.

1. Welche Geschwindigkeitsvarianz $\sigma_V^2(x)$ herrscht auf der Strecke?
2. Welcher „Beschleunigung“ $A(x, 0)$ entspricht der Anteil $P_\theta = \rho\theta$ des Verkehrs-drucks zur Zeit $t = 0$?
3. Erläutern Sie, wie es zu einer makroskopischen Beschleunigung kommen kann, ohne dass ein einziges Einzelfahrzeug beschleunigt!
4. Erläutern Sie anhand des qualitativen Verhaltens der Lösung für $t > 0$ für ein beliebiges Makromodell mit $P = P_\theta$ und $D = 0$ eine der prinzipiellen Grenzen der Makromodellierung bei heterogenem Verkehr.

9.3 Modellierung der Antizipation durch den Druckterm

Eine vorausschauende Fahrweise kann man durch den Anpassungsterm modellieren, wenn man $(dV/dt)_{\text{relax}} = (V_e - V)/\tau$ nicht für die aktuelle Position x , sondern

(um einen Fahrzeugabstand d) „vorausschauend“ für eine Position $x_a = x + d$ berechnet:

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{\text{relax}} = \frac{V_e(\rho(x_a, t)) - V(x, t)}{\tau}. \quad (9.41)$$

1. Drücken Sie d durch makroskopische Größen aus.
2. Zeigen Sie, dass der Antizipationsanteil im Anpassungsterm (9.41) näherungsweise auch durch einen Anteil

$$P_a = -\frac{V_e(\rho(x, t))}{\tau}$$

des Verkehrsdrucks P modelliert werden kann, indem Sie am Anpassungsterm eine Taylorentwicklung bis einschließlich erster Ordnung um (x, t) bezüglich x durchführen und die Dichte nährungsweise als konstant annehmen.

3. Gegeben ist eine Verkehrssituation, in der die fahrstreifenbezogene Dichte innerhalb von 200 m von 20 Fz/km auf 40 Fz/km steigt und die Gleichgeschwindigkeits-Dichte-Relation durch

$$V_e(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$$

gegeben ist. Berechnen Sie explizit den Beschleunigungsunterschied, der sich aus der vorausschauenden Fahrweise gegenüber der nichtvorausschauenden Fahrweise ($x_a = x$) ergibt, wenn man die Antizipation (i) durch den Anpassungsterm und (ii) durch den Anteil P_a im Druckterm modelliert.

9.4 Gleichgewichtsgeschwindigkeit des GKT-Modells

Berechnen Sie für das GKT-Modell die Beziehung $V_e(\rho)$ zwischen Geschwindigkeit und Dichte bei stationären (d.h. „ $\frac{d}{dt} = 0$ “) und homogenen („ $\frac{d}{dx} = 0$ “) Verhältnissen.

9.5 Herleitung der flusserhaltenden Form der Makromodelle

Leiten Sie die flusserhaltende Form (Gln. (9.24) und (9.25)) der allgemeinen Gleichungen (9.7) und (9.8) für $D = 0$ her. Eliminieren Sie V in der Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der hydrodynamischen Relation $Q = \rho V$. Multiplizieren Sie die Beschleunigungsgleichung mit ρ und ersetzen Sie $\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} - V \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Eliminieren Sie dann die Zeitableitung der Dichte mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und fassen Sie die resultierenden Terme zusammen.

9.6 Simulation des GKT-Modells

Das GKT-Modell soll mit den Parametern der Tabelle 9.1 unter Verwendung einer Zellenlänge von 50 m mit der Upwind-Methode simuliert werden. Dabei wird ein konstanter Geschwindigkeits-Variationskoeffizient $\sqrt{\alpha} = 10\%$ angenommen. Die maximal auftretende Dichte sei 100 Fz/km. Wie hoch ist der maximale numerische

Aktualisierungszeitschritt, um alle linearen numerischen Instabilitäten zu vermeiden? Wie hoch ist die numerische Diffusion bei einer Geschwindigkeit von 72 km/h und $\Delta t = 1$ s?

Literaturhinweise

- Payne, H.: Models of freeway traffic and control. In: Bekey, G.A. (ed.): Mathematical Models of Public Systems, vol. 1, 51–61. Simulation Council, La Jolla, CA (1971)
- Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D.: Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, non-local traffic model. Phys. Rev. E **59**, 239–253 (1999)
- Kerner, B., Konhäuser, P.: Structure and parameters of clusters in traffic flow. Phys. Rev. E **50**, 54–83 (1994)
- LeVeque, R.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, Basel (1992)

Kapitel 10

Einfache Fahrzeugfolgemodelle

Fortschritt ist eine Verwirklichung von Utopien.

Oscar Wilde

10.1 Allgemeines

Fahrzeugfolgemodelle beschreiben das Fahrverhalten aus der Perspektive einzelner Fahrer bzw. *Fahrer-Fahrzeug-Einheiten*. Die ersten Fahrzeugfolgemodelle wurden 1950 von Reuschel und 1953 von Pipes entwickelt. Sie enthalten ein wesentliches Element der mikroskopischen Verkehrsmodellierung: Der Mindestabstand zum Vorderfahrzeug sollte proportional zur Geschwindigkeit sein oder, anders formuliert, die „Zeitlücke“ sollte einem vorgegebenen Zielwert entsprechen.

Fahrzeugfolgemodelle sind die wichtigsten Vertreter mikroskopischer Verkehrsmodelle (vgl. Kap. 6). Gemäß der Aktionsmöglichkeiten eines Fahrers unterscheidet man zwischen Modellen der *Längsdynamik (Longitudinalmodelle)*, welche Beschleunigungen und Bremsmanöver modellieren, und Modellen der *Querdynamik (Spurwechselmodelle)*, siehe Kap. 14). In komplexen, möglichst realitätsnahen Modellen werden die meisten, teils subtilen Wechselwirkungen zwischen Beschleunigung und Fahrstreifenwechsel berücksichtigt und beide Komponenten zu einer Einheit verknüpft. Sie bilden oft den Kern kommerzieller Simulationssoftware.

In diesem Kapitel werden Minimalmodelle der Längsdynamik vorgestellt. Sie können kein reales Fahrverhalten beschreiben, da im Vergleich zur Realität meist viel zu hohe Beschleunigungen auftreten. Sie lassen sich aber einfach und effizient implementieren und in einfachen Fällen auch analytisch lösen. Hier dienen sie zur Einführung der wesentlichen Konzepte, während für Anwendungen die in den folgenden Kapiteln dargestellten, detaillierteren Modelle notwendig sind.

Einige der Minimalmodelle sind nicht *vollständig* in dem Sinne, dass sie für alle Verkehrssituationen (freie Fahrt, Folgefahrt, Annäherungen an langsame oder stehende Fahrzeuge) anwendbar wären. Beispiele sind die ersten Fahrzeugfolgemodelle von Reuschel und Pipes, bei denen die Abstandsregel nur für die Folgefahrt anwendbar ist, diese auf freier Strecke jedoch keinen Sinn ergibt. Zudem können Annäherungen an langsame oder stehende Fahrzeuge bzw. Hindernisse nicht beschrieben werden, da die Geschwindigkeitsanpassung in diesen Modellen augenblicklich, also de facto mit unendlicher Beschleunigung erfolgt.

Im Sinne der Einteilung von Abschn. 6.2 handelt es sich bei den Minimalmodellen dieses Kapitels um *heuristische Modelle*. Die in Kap. 13 behandelten zellulären Automaten gehören ebenso dazu. Dagegen sind die in Kap. 11 behandelten strategiebasierten Modelle den *First-Principles*-Modellen zuzuordnen.

10.2 Mathematische Beschreibung

In Fahrzeugfolgemodellen wird jedes Fahrzeug α durch den Ort x_α , die Geschwindigkeit v_α ¹ und die Beschleunigung \dot{v}_α in Abhängigkeit der Zeit beschrieben. Dabei zählt der Fahrzeugindex α entgegen der Fahrtrichtung (vgl. Abb. 10.1), also in der Reihenfolge, in der Fahrzeuge von einem feststehenden Beobachter wahrgenommen bzw. von einem Querschnittsdetektor gemessen werden. Aus den Positionen x_α der Fahrzeugfront und den Fahrzeulgängen l_α ergeben sich die für das Fahrverhalten wesentlichen *Nettoabstände* gemäß

$$s_\alpha = x_{\alpha-1} - l_{\alpha-1} - x_\alpha = x_l - l_l - x_\alpha. \quad (10.1)$$

Zur kompakteren Darstellung wird das Vorderfahrzeug $\alpha - 1$ oft auch mit dem Index l (*leader*) bezeichnet.

Die Fahrer-Reaktion ist in den Minimalmodellen (und auch in vielen der realistischeren Modelle der nächsten Kapitel) in Abhängigkeit des Abstandes s_α , der eigenen Geschwindigkeit v_α und der Geschwindigkeit v_l des Vorderfahrzeugs gegeben. Formuliert man die Zeit kontinuierlich, werden die Fahrer-Reaktionen direkt durch eine *Beschleunigungsfunktion* a_{mic} modelliert und man erhält gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Form

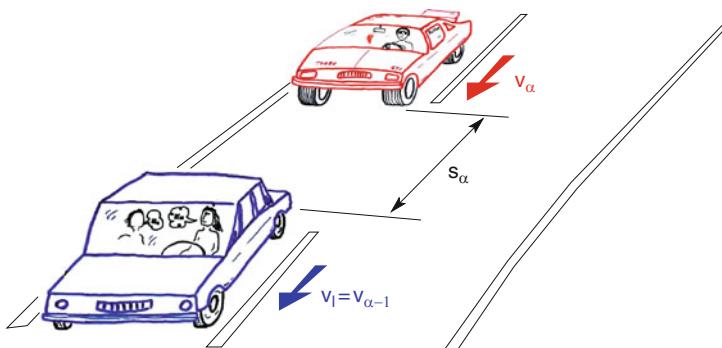


Abb. 10.1 Die wichtigsten Größen in Fahrzeugfolgemodellen

¹ Zur Unterscheidung von der Geschwindigkeit von Makromodellen wird die Geschwindigkeit von Mikromodellen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Im Allgemeinen gilt die Mikro-Makro-Beziehung $V = \langle v_\alpha \rangle$.

$$\dot{x}_\alpha(t) = \frac{dx_\alpha(t)}{dt} = v_\alpha(t), \quad (10.2)$$

$$\dot{v}_\alpha(t) = \frac{dv_\alpha(t)}{dt} = a_{\text{mic}}(s_\alpha, v_\alpha, v_l) = \tilde{a}_{\text{mic}}(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha). \quad (10.3)$$

In den meisten Modellen kommt die Geschwindigkeit v_l des Vorderfahrzeugs nur als Geschwindigkeitsdifferenz (Annäherungsrate)

$$\Delta v_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1} = v_\alpha - v_l \quad (10.4)$$

vor. Die entsprechenden Modelle werden kompakter durch die Beschleunigungsfunktion $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v) = a_{\text{mic}}(s, v, v - \Delta v)$ formuliert. Mit Gl. (10.1) kann man (10.2) auch formulieren als

$$\dot{s}_\alpha(t) = \frac{ds_\alpha(t)}{dt} = v_l(t) - v_\alpha(t) = -\Delta v_\alpha(t) \quad (10.5)$$

und erhält damit gekoppelte Gleichungen für die Abstände s_α und Geschwindigkeiten v_α aller Fahrzeuge.

Wird die Zeit diskret in festen Zeitschritten Δt modelliert, ergeben sich anstelle von Differentialgleichungen gekoppelte iterierte Abbildungen der allgemeinen Form

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_{\text{mic}}(s_\alpha(t), v_\alpha(t), v_l(t)), \quad (10.6)$$

$$x_\alpha(t + \Delta t) = x_\alpha(t) + \frac{v_\alpha(t) + v_\alpha(t + \Delta t)}{2} \Delta t. \quad (10.7)$$

Die Fahrer-Reaktionen werden also nicht durch eine Beschleunigungsfunktion modelliert, sondern durch eine *Geschwindigkeitsfunktion* v_{mic} , welche die im nächsten Zeitschritt anvisierte Zielgeschwindigkeit beschreibt. Da die Gl. (10.2) bzw. (10.7) – analog zu der Kontinuitätsgleichung der Makromodelle – immer gültige kinematische Tatsachen darstellen, wird das konkrete Mikromodell allein durch die Beschleunigungsfunktion a_{mic} oder die Geschwindigkeitsfunktion v_{mic} definiert.

Die zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Formulierungen hängen über die bei zeitkontinuierlichen Modellen notwendigen Integrationsverfahren zur numerischen Lösung zusammen. Nimmt man bei der numerischen Lösung der Gln. (10.2) und (10.3) ebenfalls eine konstante Integrationsschrittweite Δt an, so ist ein einfaches, aber effizientes Lösungsverfahren durch folgende Aktualisierungsvorschrift gegeben:²

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_\alpha(t) + a_{\text{mic}}(s_\alpha(t), v_\alpha(t), v_l(t)) \Delta t, \quad (10.8)$$

$$x_\alpha(t + \Delta t) = x_\alpha(t) + \frac{v_\alpha(t) + v_\alpha(t + \Delta t)}{2} \Delta t. \quad (10.9)$$

² Bei Fahrzeugfolgmodellen ist dieses Verfahren bei gleicher Genauigkeit um etwa den Faktor zwei effizienter als die Standardmethode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen (Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung).

Die Kombination eines zeitkontinuierlichen Fahrzeugfolgemodells mit dieser Aktualisierungsvorschrift ist *mathematisch* äquivalent zu zeitdiskreten Modellen. Es gilt folgende Entsprechung:

$$a_{\text{mic}}(s, v, v_l) = \frac{v_{\text{mic}}(s, v, v_l) - v}{\Delta t}. \quad (10.10)$$

Hingegen ergibt sich ein *konzeptioneller* Unterschied: Während bei zeitdiskreten Modellen die Schrittweite Δt einen Modellparameter darstellt (der beispielsweise Folgezeiten, Reaktionszeiten oder Anpassungszeiten beschreiben kann), ist die numerische Schrittweite der Gleichungen (10.8) und (10.9) eine reine Hilfsgröße und die eigentliche Lösung ergibt sich im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$.

10.3 Gleichgewichtsbeziehungen und Fundamentaldiagramm

Da es sich bei den Fahrer-Fahrzeug-Einheiten der Mikromodellierung mathematisch um „getriebene Teilchen“ handelt, ist kein Gleichgewicht im engeren Sinne möglich, sondern nur ein Zustand, bei dem die ein- und ausgehenden Kraft- bzw. Energieflüsse gleich groß sind. Dies wird auch als Fließgleichgewicht bezeichnet. Bei Mikromodellen kann ein Fließgleichgewicht nur dann eindeutig beschrieben werden, wenn man identische Fahrer-Fahrzeug-Einheiten auf homogener Strecke annimmt.³ Für die mathematische Modellierung bedeutet dies, dass die Parameter der die Modelle charakterisierenden Funktionen a_{mic} bzw. v_{mic} für alle Fahrzeuge dieselben sind. Das Fließgleichgewicht wird durch zwei Bedingungen charakterisiert:

- *Homogener Verkehr*: Alle Fahrzeuge haben denselben Abstand voneinander ($s_\alpha = s$) und fahren gleich schnell ($v_\alpha = v$).
- *Keine Beschleunigungen*, also $\dot{v}_\alpha = 0$ bzw. $v_\alpha(t + \Delta t) = v_\alpha(t)$ für alle Fahrzeuge α .

Für zeitkontinuierliche Modelle mit Beschleunigungsfunktionen a_{mic} bzw. \tilde{a}_{mic} folgt aus diesen Bedingungen

$$a_{\text{mic}}(s, v, v) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, 0) = 0, \quad (10.11)$$

während für zeitdiskrete Modelle der Art (10.6) die Bedingung

$$v_{\text{mic}}(s, v, v) = v \quad (10.12)$$

gilt.

³ Es sind Modelle vorstellbar, die auch in diesem Fall keine eindeutige Gleichgewichtsrelation haben, was verschiedentlich gefordert wird, aber umstritten ist.

Mikroskopisches Fundamentaldiagramm. Aus den Gleichungen (10.11) oder (10.12) ergibt sich jeweils eine eindimensionale Vielfalt möglicher Fließgleichgewichte, die durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s)$ in Abhängigkeit des Abstandes s beschrieben werden kann. Die Funktion $v_e(s)$ nennt man auch *mikroskopisches Fundamentaldiagramm*.

Übergang zu makroskopischen Beziehungen. Direkt aus der Definition der Dichte als Zahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit ergibt sich bei gegebener Fahrzeuglänge l eine *Mikro-Makro-Beziehung* zwischen dem Nettoabstand s und der Dichte ρ :

$$s_\alpha = s = \frac{1}{\rho} - l. \quad (10.13)$$

Ferner ist im Gleichgewicht die Geschwindigkeit der Einzelfahrzeuge gleich der makroskopischen Geschwindigkeit:

$$V(x, t) = \langle v_\alpha(t) \rangle = v_e(s). \quad (10.14)$$

Damit folgen aus dem mikroskopischen Fundamentaldiagramm $v_e(s)$ das makroskopische Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm und das Fundamentaldiagramm:

$$V_e(\rho) = v_e \left(\frac{1}{\rho} - l \right), \quad Q_e(\rho) = \rho v_e \left(\frac{1}{\rho} - l \right). \quad (10.15)$$

10.4 Heterogener Verkehr

Während Fundamentaldiagramme nur für homogene Fahzeugpopulationen berechnet werden können, spielen mikroskopische Modelle ihre Stärke bei der Modellierung unterschiedlicher Fahrzeuge und Fahrstile aus. Diese unter dem Begriff *heterogener Verkehr* zusammengefasste Verschiedenartigkeit hat Auswirkungen auf die Kapazität und Stabilität des Verkehrs. Heterogener Verkehr kann mit Fahrzeugfolgemodellen auf zweierlei Arten modelliert werden:

1. Jede Fahrer-Fahrzeug-Einheit wird mit demselben Modell, aber unterschiedlichen Parametrisierungen beschrieben. Diese können sowohl klassenbezogen (beispielsweise geringere Beschleunigungen und Geschwindigkeiten bei LKW), als auch für jedes Fahrzeug individuell (z.B. aus Verteilungsfunktionen gezogene Werte) gewählt werden.
2. Es kommen für die unterschiedlichen Fahrzeugtypen unterschiedliche Modelle zum Einsatz. Damit können unterschiedliche Charakteristika, z.B. zwischen adaptiven Beschleunigungsreglern (ACC-Systemen) und Menschen, direkt berücksichtigt werden.

Die Modellierung heterogenen Verkehrs ist nur im Verbund mit Fahrstreifenwechseln sinnvoll, da sich ansonsten eine große Schlange hinter dem langsamsten

Fahrzeug bilden würde. Zur Modellierung der verschiedenen Fahrstile sind anschauliche Modellparameter (wie die der in Kap. 11 vorgestellten Modelle) hilfreich.

10.5 Optimal-Velocity-Modell

Das *Optimal-Velocity-Modell* (OVM) ist ein zeitkontinuierliches Modell der Form $a_{\text{mic}}(s, v)$. Die Beschleunigungsfunktion lautet

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} \quad \text{Optimal-Velocity-Modell.} \quad (10.16)$$

Diese Gleichung beschreibt die Anpassung der aktuellen Geschwindigkeit v_α an die abstandsabhängige *optimale Geschwindigkeit* $v_{\text{opt}}(s)$ auf einer durch die *Anpassungszeit* τ gegebenen Zeitskala. Diese *Optimal-Velocity*- bzw. OV-Funktion $v_{\text{opt}}(s)$ gehorcht den unmittelbar einsichtigen Bedingungen

$$v'_{\text{opt}}(s) \geq 0, \quad v_{\text{opt}}(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} v_{\text{opt}}(s) = v_0. \quad (10.17)$$

Sie ist ansonsten beliebig, so dass die Beschleunigungsgleichung (10.16) eine ganze Klasse von Modellen definiert, deren Vertreter sich in ihrer OV-Funktion unterscheiden. Die von Bando et al. vorgeschlagene OV-Funktion

$$v_{\text{opt}}(s) = v_0 \frac{\tanh\left(\frac{s}{\Delta s} - \beta\right) + \tanh \beta}{1 + \tanh \beta} \quad (10.18)$$

verwendet Tangens-Hyperbolus-Funktionen mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 , der Übergangsbreite Δs und dem „Formfaktor“ β (siehe Abb. 10.2).⁴

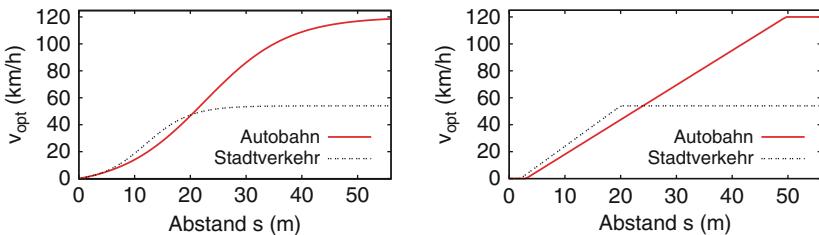


Abb. 10.2 Optimale Geschwindigkeits-Funktionen nach Gl. (10.18) (links) bzw. (10.19) (rechts) für die Parameterwerte aus Tabelle 10.1

⁴ Die Formulierung wurde gegenüber den Originalpublikationen so angepasst, dass v_0 die Bedeutung einer Wunschgeschwindigkeit hat.

Eine anschaulichere OV-Funktion leitet sich aus den Bedingungen eines Mindestabstandes s_0 bei stehendem Verkehr, einer Folgezeit T im gebundenen Verkehr und der Wunschgeschwindigkeit v_0 im freien Verkehr her:

$$v_{\text{opt}}(s) = \max \left[0, \min \left(v_0, \frac{s - s_0}{T} \right) \right]. \quad (10.19)$$

Diese Relation ist die mikroskopische Entsprechung des dreieckigen Fundamentaldiagramms der Section-Based- und Cell-Transmission-Modelle (vgl. Abb. 10.2). Typische Parameterwerte beider OV-Funktionen sind in Tabelle 10.1 gegeben.

Modelleigenschaften.

Abbildung 10.3 zeigt zwei Simulations-Szenarien, die zusammen einen Überblick über die Modelleigenschaften geben. In der linken Spalte wird eine Auto-

Tabelle 10.1 Modellparameter des Optimal-Velocity-Modells (OVM) (Fahrzeulgänge 5 m)

Parameter	Typischer Wert Autobahn	Typischer Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h	54 km/h
Anpassungszeit τ	0.65 s	0.65 s
Übergangsbreite Δs [v_{opt} gemäß Gl. (10.18)]	15 m	8 m
Formfaktor β [v_{opt} gemäß Gl. (10.18)]	1.5	1.5
Folgezeit T [v_{opt} gemäß Gl. (10.19)]	1.4 s	1.2 s
Minimalabstand s_0 [v_{opt} gemäß Gl. (10.19)]	3 m	2 m

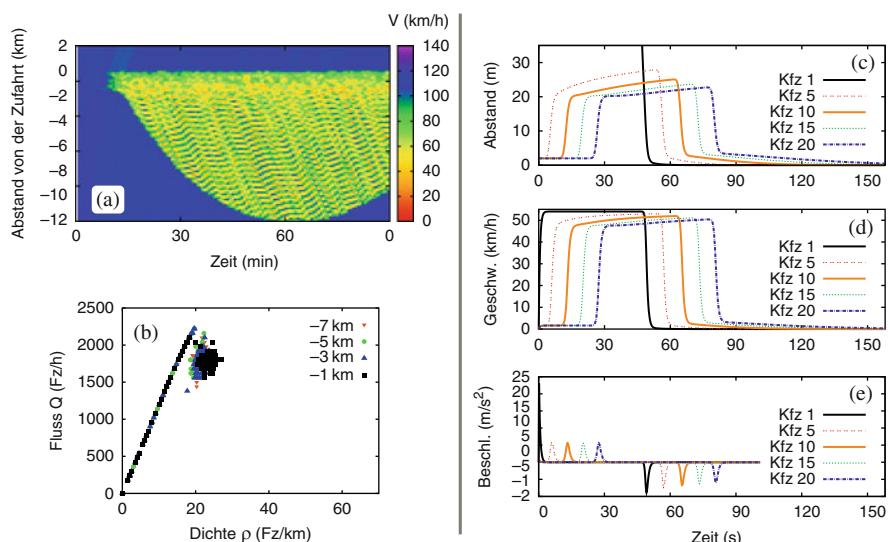


Abb. 10.3 Simulation des OVM mit der Geschwindigkeitsfunktion (10.19) und Parametern gemäß Tabelle 10.1. Links: Autobahn mit Zufahrt (500 Fz/h) als Geschwindigkeitsfeld $V(x, t)$ (a) und Fluss-Dichte-Relationen virtueller Detektoren (b). Rechts: Städtisches Start-Stopp-Szenario zwischen zwei Ampeln im Abstand von 1 km

bahnsituation dargestellt, bei der durch hohes Verkehrsaufkommen an einer Zufahrt (Streckenkilometer $x = 0$) ein Stau entsteht.⁵ Das Teilbild (a) zeigt das aus den Geschwindigkeiten v_α der einzelnen Fahrzeuge rekonstruierte raumzeitliche *makroskopische Geschwindigkeitsfeld*

$$V(x, t) = \frac{x - x_\alpha(t)}{x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t)} v_\alpha(t) + \frac{x_{\alpha-1}(t) - x}{x_{\alpha-1}(t) - x_\alpha(t)} v_{\alpha-1}(t), \quad (10.20)$$

wobei die Fahrzeugindizes so zu wählen sind, dass $x_\alpha(t) \leq x < x_{\alpha-1}(t)$ gilt. Nach ca. 10 min entsteht an der Zufahrt ein Verkehrszusammenbruch mit Stauwellen, die sich stromaufwärts ausbreiten. Mit dieser Simulation wird das Fahren im freien Verkehr, das Folgeverhalten im gebundenen Verkehr, sowie das Ein- und Ausfahren in und aus Staus getestet. Ferner ergeben sich auch die Stabilitätseigenschaften freien und gestauten Verkehrs und ggf. die Eigenschaften der Stauwellen wie Ausbreitungsgeschwindigkeiten, Amplituden, Wellenlängen und Wachstumsraten (vgl. auch Kap. 15).

Teilbild (b) zeigt Fluss-Dichte-Daten an verschiedenen Querschnitten. Um das Ergebnis mit realen Daten vergleichen zu können, wurde der Datenerfassungsprozess mittels *virtueller Detektoren* simuliert: Die Schnittpunkte der simulierten Trajektorien mit den Detektorpositionen ergeben zunächst *virtuelle Einzelfahrzeugdaten*. Diese werden gemäß Abschn. 3.2 aggregiert (Intervall von 1 Minute), die Dichte gemäß Abschn. 3.3.1 durch arithmetische Mittelwertbildung bestimmt und schließlich Fluss und Dichte wie im Abschn. 4.4 dargestellt.

Die rechte Spalte der Abb. 10.3 zeigt eine typische Stadtsituation. Eine vor einer Lichtsignalanlage (LSA) wartende Fahrzeugkolonne fährt nach Umspringen auf Grün ($t = 0$) an, die LSA der nächsten Kreuzung (Abstand 1 km) ist aber bei Ankunft der Kolonne rot, so dass die Fahrzeuge wieder anhalten müssen. Dabei werden die drei grundsätzlichen Verkehrssituationen getestet: (i) Beschleunigung und *cruising* mit der Wunschgeschwindigkeit bei freier Fahrt (erstes Fahrzeug, wenn die LSA noch weit entfernt ist), (ii) Folgefahrt (alle weiteren Fahrzeuge der Kolonne) und (iii) dynamische Annäherung (hier an ein stehendes, die rote LSA repräsentierendes virtuelles Fahrzeug).

In beiden Simulationen ist der Wert der Geschwindigkeitsanpassungszeit $\tau = 0.65$ s unrealistisch klein gewählt. Dies führt im Autobahn-Szenario zu nicht wirklichkeitsgetreuen kurzen Periodendauern der Stop-and-Go-Wellen von ca. 1–2 min und im Stadt-Szenario zu extremen, nicht realisierbaren Beschleunigungen im Bereich von -10 bis 22 m/s^2 .⁶ Bei lediglich um 5% höheren Werten von τ ergeben sich jedoch im Verlauf der Simulationen negative Werte der Abstände s_α , was simulierten *Unfällen* entspricht. Bei etwas geringeren Werten von τ herrscht hingegen

⁵ Die bei der Zufahrt notwendigen Spurwechsel auf die Hauptfahrbahn werden in Kap. 14 beschrieben.

⁶ In der Realität sind Beschleunigungen oberhalb von 4 m/s^2 (entspricht 7 s von Null auf 100 km/h) und unterhalb von -9 m/s^2 (entspricht einer Notbremsung auf trockener Straße) nicht möglich. Die normalerweise realisierten Beschleunigungen sind meist weitaus kleiner.

gen absolute Kolonnenstabilität (vgl. Kap. 15), was zu ebenfalls nicht realistischen Staus ohne jede Wellenstruktur führt. Bei derart empfindlichen Abhängigkeiten der Dynamik von den Parametern sagt man auch, dass Modell sei nicht *robust*.

Diese Ergebnisse sind vor dem Hintergrund zu verstehen, dass das OVM *nicht* die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeuges berücksichtigt. Es reagiert allein auf den Abstand s , unabhängig davon, ob man sich dem Vorderfahrzeug mit hoher Geschwindigkeit nähert oder nicht. Dies entspricht einer extrem „kurzsichtigen“ Fahrweise.

Fließgleichgewicht. Beim OVM führt die Fließgleichgewichts-Bedingung (10.11) zu $v_e(s) = v_{\text{opt}}(s)$. Das mikroskopische Fundamentaldiagramm ist also direkt durch die OV-Funktion gegeben (siehe Abb. 10.4). Für eine Funktion $v_{\text{opt}}(s)$ gemäß Gl. (10.19) ergibt sich aus (10.15) das schon bekannte „dreieckige“ makroskopische Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min \left(v_0 \rho, \frac{1 - \rho(l + s_0)}{T} \right).$$

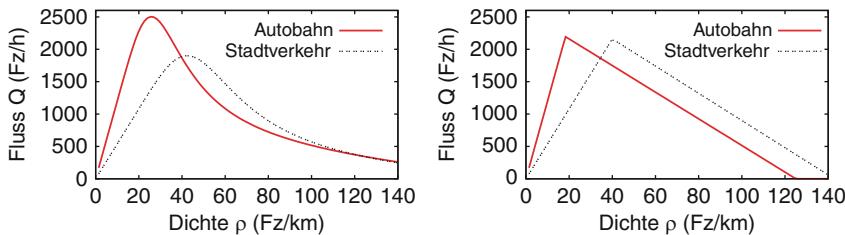


Abb. 10.4 Fundamentaldiagramme des OVM nach Gl. (10.18) (links) bzw. Gl. (10.19) (rechts) für die Parameterwerte aus Tabelle 10.1

10.6 Full-Velocity-Difference-Modell

Da das OVM wegen der fehlenden Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen zu Unfällen neigt, besteht eine Erweiterung darin, zusätzlich die Geschwindigkeitsdifferenz als linearen Stimulus zu berücksichtigen:

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \gamma \Delta v \quad \text{Full-Velocity-Difference-Modell.}$$

(10.21)

Dieses als *Full-Velocity-Difference-Modell* (FVDM) bezeichnete Modell ist bei geeigneten Werten des Sensitivitätsparameters γ im Bereich von 0.5 s^{-1} auch für Werte der Zeitkonstanten τ von deutlich oberhalb einer Sekunde unfallfrei. Während das Fundamentaldiagramm identisch zu dem des OVM ist, ergibt das FVDM im Vergleich zum OVM realistischere Beschleunigungen im Stadt-Szenario. Die

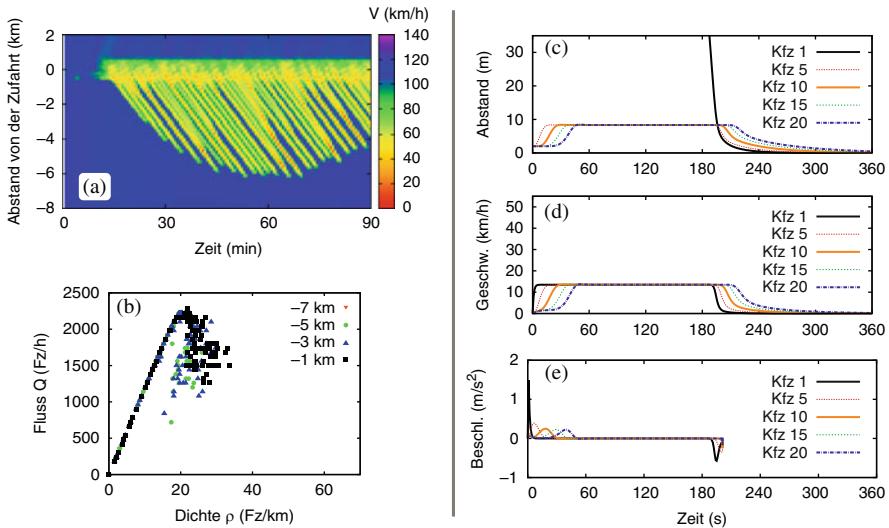


Abb. 10.5 Simulation des Full-Velocity-Difference-Modells (FVDM), Gl. (10.21), mit der optimalen Geschwindigkeitsfunktion (10.19) und $\gamma = 0.6 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 5 \text{ s}$ sowie den restlichen Parametern v_0 , β und Δs gemäß Tabelle 10.1. Die Simulationsszenarien sind dieselben wie in Abb. 10.3

Dynamik des Autobahn-Szenarios sieht ebenfalls realistischer aus (Abb. 10.5). Zwar sind die Stop-and-Go-Wellen immer noch sehr kurz, aber sie sind realistischer als beim OVM (vgl. Abb. 10.3).

Allerdings ist das Modell, im Gegensatz zum OVM, nicht *vollständig* in dem Sinne, dass sowohl freier Verkehr als auch Folgefahrten und dynamische Annäherungsfahrten modelliert werden können. Dies liegt an der fehlenden Abstandsabhängigkeit der Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen. Ein langsameres Fahrzeug oder eine durch ein stehendes Fahrzeug modellierte rote Ampel führen dazu, dass die Wunschgeschwindigkeit auch bei beliebig großen Entfernungen nicht erreicht wird (siehe Übungsaufgabe 10.4).

10.7 Newell-Modell

Das Newell-Modell ist der einfachstmögliche Vertreter der zeitdiskreten Modelle. Die Geschwindigkeitsfunktion $v_{\text{mic}}(s, v, v_l) = v_{\text{opt}}(s)$ ist direkt durch die optimale Geschwindigkeit gegeben und die Aktualisierungsgleichung lautet

$$v(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s(t)) \quad \text{Newell-Modell.} \quad (10.22)$$

Als Aktualisierungs- bzw. Geschwindigkeitsanpassungszeit wird meist $\Delta t = 1 \text{ s}$ gewählt. Dieses Modell hat mehrere interessante Eigenschaften:

Beziehung zum Optimal-Velocity-Modell. Gemäß Gl. (10.10) ist das Newell-Modell mathematisch äquivalent zum OVM (10.16). Es liefert identische Simulationser-

gebnisse, falls man die Anpassungszeit τ des OVM mit der Aktualisierungszeit Δt des Newell-Modells gleichsetzt und die Fahrzeugpositionen mit (10.9) bzw. (10.7) aktualisiert. Allerdings wird das OVM meist mit wesentlich kleineren Zeitschritten integriert. Auch in diesem Fall sind die Fließgleichgewichte und damit die Fundamentaldiagramme der beiden Modelle identisch.

Beziehung zum Section-Based-Modell. Disaggregiert man das im Abschn. 8.4 beschriebene makroskopische Section-Based-Modell, indem man aus einer beliebigen, gebundenem Verkehr entsprechenden Lösung dieses Modells Trajektorien gemäß (8.17) erzeugt, so sind diese Trajektorien gleichzeitig Lösungen des Newell-Modells mit der OV-Funktion (10.19) (vgl. Abb. 10.6).

Interpretation der Zeiten. Für die optimale Geschwindigkeit (10.19) ist die Lösung des Newell-Modells im gebundenen Verkehr durch die rekursiven Beziehungen

$$x_\alpha(t + \Delta t) = x_{\alpha-1}(t) + c_{\text{cong}} \Delta t \quad \text{und} \quad v_\alpha(t + \Delta t) = v_{\alpha-1}(t) \quad (10.23)$$

allein in Abhängigkeit der Trajektorie des Führungsfahrzeugs $\alpha - 1$ gegeben. Dies entspricht einer exakten, aber um die Zeitspanne $T_r = \Delta t$ verzögerten Anpassung an die Geschwindigkeit des jeweiligen Führungsfahrzeugs (Abb. 10.6). Berücksichtigt man die Beziehung zum OVM, kann ein und dieselbe Zeit auf vier grundsätzlich verschiedene Arten interpretiert werden:

1. als *Reaktionszeit* $\Delta t = T_r$ gemäß Gl. (10.23),
2. als durch endliche Beschleunigungen verursachte *Geschwindigkeits-Anpassungszeit* $\Delta t = \tau$ gemäß Gl. (10.22) und der Beziehung zum OVM,
3. direkt als numerisches Aktualisierungintervall Δt gemäß Gl. (10.22)
4. und als Folgezeitlücke $\Delta t = T$.

Während die Interpretation als Reaktionszeit nur für gebundenen Verkehr und für das dreieckige Fundamentaldiagramm gültig ist, kann die Interpretation als Folgezeit durch die Definition $T(s) = s/v_{\text{opt}}(s)$ leicht auf andere OV-Funktionen $v_{\text{opt}}(s)$

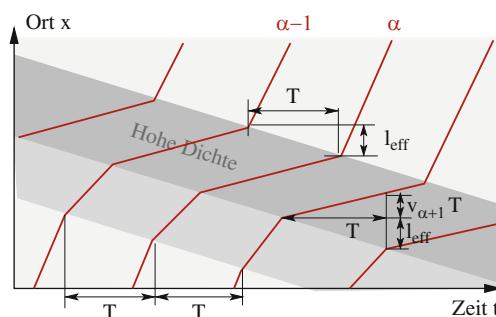


Abb. 10.6 Beziehung des Newell-Modells zum Section-Based-Modell: Die Schattierungen geben ein Beispiel eines sich mit $c_{\text{cong}} = -l_{\text{eff}}/T$ ausbreitenden makroskopischen Dichteverlaufs an. Die dazugehörigen Trajektorien des Newell-Modells haben die Steigung $v_e(\rho) = (1/\rho - l_{\text{eff}})/T$

erweitert werden. Die Interpretationen als Anpassungs- oder als numerische Aktualisierungszeit (*update time*) sind immer anwendbar. Den geringsten Anwendungsbereich hat die Interpretation als Reaktionszeit, dennoch wird Δt meist in diesem Sinne interpretiert.

Beziehung zum Payne-Modell. Zur Herleitung der Geschwindigkeitsgleichung des Payne-Modells werden die linke und rechte Seite des Newell-Modells durch makroskopische Größen ausgedrückt und ggf. Taylorentwicklungen durchgeführt.

Linke Seite $v_\alpha(t + \Delta t)$: Zunächst folgt aus Gl. (10.20) für die makroskopische Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v_\alpha(t) = V(x_\alpha(t), t) = V(x, t).$$

Hierbei wurde die Ortskoordinate $x = x_\alpha(t)$ gleich der Position der Trajektorie α zur „alten“ Zeit t gesetzt. Für die neue Zeit $t + \Delta t$ ergibt eine Taylorentwicklung erster Ordnung

$$\begin{aligned} v_\alpha(t + \Delta t) &= V(x_\alpha + v_\alpha \Delta t, t + \Delta t) \\ &= V(x_\alpha, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} v_\alpha \Delta t + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \Delta t \\ &= V(x, t) + \left(V(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Rechte Seite $v_{opt}(s_\alpha(t))$: Zunächst gilt nach Gl. (10.15) $v_{opt}(s) = v_e(s) = V_e(\rho)$. Hier ist $\rho = \rho(x, t)$ vom Ort abhängig und die Ortskoordinate muss so bestimmt werden, dass der Fehler durch die Taylorentwicklung minimal ist. Da der Bruttoabstand $d_\alpha = s_\alpha + l_{\alpha-1} = 1/\rho$ den Abstand zwischen den Fahrzeugen α und $\alpha - 1$ bezeichnet, wird ρ an der Stelle $x_\alpha + d_\alpha/2 = x + d_\alpha/2$ ausgewertet (Abb. 10.7). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} v_{opt}(s_\alpha(t)) &= V_e(\rho(x + d_\alpha/2, t)) \\ &= V_e(\rho(x, t)) + V'_e(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d_\alpha}{2} \\ &= V_e(\rho(x, t)) + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

In der zweiten Zeile wurde die Taylorentwicklung erster Ordnung und die Kettenregel angewandt und in der dritten Zeile $\frac{d_\alpha}{2}$ durch $\frac{1}{2\rho(x,t)}$ ausgedrückt.⁷ Gleichsetzen von (10.24) und (10.25) führt zu

⁷ Wir machen eine Taylorentwicklung erster Ordnung für $\rho(x + \frac{d}{2}, t)$ um x . Da der durch die Dichte auszudrückende Abstand d_α bereits in einem Term der ersten Ordnung der Taylorentwicklung steht, genügt es, innerhalb dieses Terms zur weiteren Umformung die nullte Ordnung, also $d_\alpha(t) = 1/\rho(x, t)$, anzuwenden.

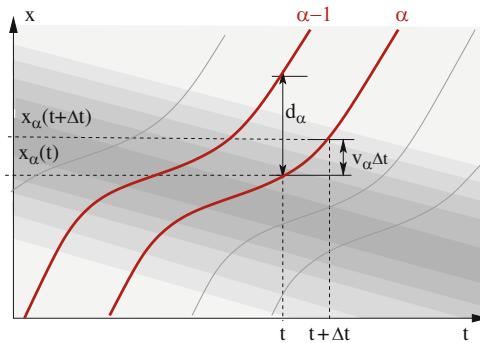


Abb. 10.7 Zur Herleitung des Payne-Modells: Trajektorien $x_\alpha(t)$ und $x_{\alpha-1}(t)$ des betrachteten Fahrzeugs α und seines Vorderfahrzeugs $\alpha - 1$ sowie (schattiert) die makroskopische Dichte. Die geringsten Fehler werden gemacht, wenn man den Kehrwert des Bruttoabstands als Dichte an der Stelle $x_\alpha + d_\alpha/2$ definiert

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\Delta t} + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho \Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Mit der Identifikation $\Delta t = \tau$ entspricht dies dem Payne-Modell (9.15). Das Newell-Modell ist also immer *angenähert* äquivalent zum Payne-Modell. Gleichzeitig ist es unter einschränkenden Bedingungen (gebundener Verkehr, dreieckiges Fundamentaldiagramm) *exakt* äquivalent zum Section-Based-Modell.

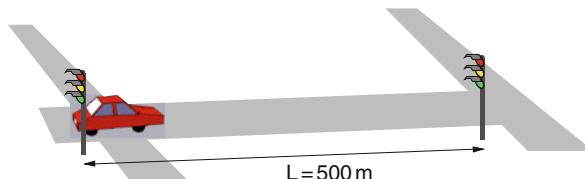
Übungsaufgaben

10.1 Beschleunigen und Bremsen zwischen zwei Lichtsignalanlagen

Das Anfahren an einer grünen Ampel und das Anhalten an der nächsten roten Ampel soll mit Hilfe eines Fahrzeugfolgemodells mit folgender Beschleunigungsgleichung modelliert werden:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} \frac{v_0 - v}{\tau} & \text{falls } \Delta v \leq \sqrt{2b(s - s_0)}, \\ -b & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist s der Abstand zum nächsten Fahrzeug bzw. zur nächsten roten Ampel und Δv die entsprechende Geschwindigkeitsdifferenz.



1. Was bedeuten die Modellparameter v_0 , τ , s_0 und b ? Wie sieht qualitativ die Beschleunigungsphase und das Abbremsen vor der nächsten roten Ampel aus? Welche vor allem beim Anfahren wesentliche menschliche Eigenschaft wird in diesem Modell nicht berücksichtigt?
2. Die erste Ampel schaltet zum Zeitpunkt $t = 0$ auf Grün und das betrachtete Fahrzeug fährt von der Position $x = 0$ los. Berechnen Sie Geschwindigkeit, Ort und Beschleunigung als Funktion der Zeit für zunächst allgemeine Werte von v_0 und τ unter der Bedingung, dass die zweite Ampel grün ist und bleibt.
3. Es sei nun $s_0 = 2 \text{ m}$ und $b = 2 \text{ m/s}^2$ und die zweite Ampel sei rot. Das Fahrzeug nähert sich mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h der nächsten roten Ampel. Wieviele Meter vor dieser Ampel beginnt der Fahrer zu bremsen? Wie hoch ist die Bremsverzögerung? Wieviel Meter vor der Ampel kommt der Fahrer mit dem Fahrzeug zum Stehen?
4. Es sei nun außerdem $v_0 = 50 \text{ km/h}$ und $\tau = 5 \text{ s}$. Geben Sie die Trajektorie und den gesamten Geschwindigkeitsverlauf des Autos für die 500 m lange Strecke für den Fall an, dass die zweite Ampel rot ist.
Hinweis: Sie müssen zunächst den Ort und den Zeitpunkt der ersten Reaktion des Fahrers auf die rote Ampel bestimmen. Nehmen Sie näherungsweise an, dass das Fahrzeug an diesem Ort die Wunschgeschwindigkeit bereits erreicht hat.

10.2 OVM-Beschleunigung auf freier Strecke

Betrachten Sie ein einzelnes Fahrzeug, welches gemäß des *Optimal-Velocity-Modells* (OVM) auf leerer Strecke beschleunigt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0 - v}{\tau}.$$

- (i) Wann wird die maximale Beschleunigung erreicht? (ii) Bestimmen Sie τ für eine Wunschgeschwindigkeit von 120 km/h und eine Maximalbeschleunigung von 2 m/s^2 . (iii) Nach welcher Zeit wird eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreicht (Wunschgeschwindigkeit $v_0 = 120 \text{ km/h}$)?

10.3 Beschleunigen mit dem Optimal-Velocity-Modell

Auf einer geschlossenen Kreisstrecke steht zur Zeit $t = 0$ eine Kolonne von Fahrzeugen, wobei alle Fahrzeuge einen konstanten Nettoabstand von 20 m voneinander haben. Berechnen Sie für das OVM mit der OV-Funktion (10.19) die Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit. Nehmen Sie $\tau = 1 \text{ s}$, eine Wunschgeschwindigkeit von 72 km/h , einen Mindestabstand von 2 m und eine Folgezeit $T = 1.8 \text{ s}$ an.

10.4 Full-Velocity-Difference-Modell

Im Stadt-Szenario (siehe Abb. 10.5) beschleunigen die mit dem FVDM modellierten Fahrzeuge nicht auf 54 km/h , obwohl dies die Wunschgeschwindigkeit ist. Was ist die Ursache dafür? Wie hoch ist die maximal erreichbare Geschwindigkeit, wenn in beliebiger Entfernung eine durch ein stehendes virtuelles Fahrzeug modellierte rote LSA existiert? Berechnen Sie das Ergebnis allgemein und für die Parameterwerte $v_0 = 54 \text{ km/h}$, $\tau = 5 \text{ s}$ und $\gamma = 0.6 \text{ s}^{-1}$.

10.5 Einfaches Modell für eine Notbremsung

Kritische Situationen, die eine Notbremsung erfordern, können durch folgendes Fahrverhaltensmodell beschrieben werden:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < T_r, \\ -b_{\max} & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Geben Sie die anschauliche Bedeutung der Modellparameter T_r und b_{\max} an.
2. Es sei nun $b_{\max} = 8 \text{ m/s}^2$ und $T_r = 1 \text{ s}$. Berechnen Sie jeweils Anhalte- und Bremsweg für eine anfängliche Geschwindigkeit von 50 km/h und 70 km/h.
Hinweis: Der Anhalteweg setzt sich aus dem eigentlichen Bremsweg und der Strecke zusammen, welche das Fahrzeug während der Reaktionszeit fährt.
3. Ein Kind läuft plötzlich aus einer Parklücke vor das Auto. Der Fahrer schafft es bei der gefahrenden Geschwindigkeit von 50 km/h gerade noch anzuhalten. Mit welcher Geschwindigkeit würde er es erfassen, wenn die Geschwindigkeit des Fahrzeugs anfangs 70 km/h betrüge?

Literaturhinweise

- Reuschel, A.: Fahrzeugbewegungen in der Kolonne. Österreichisches Ingenieur-Archiv **4**, 193–215 (1950)
- Pipes, L.A.: An operational analysis of traffic dynamics. J. Appl. Phys. **24**, 274–281 (1953)
- Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., Sugiyama, Y.: Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. Phys. Rev. E **51**, 1035–1042 (1995)
- Jiang, R., Wu, Q., Zhu, Z.: Full velocity difference model for a car-following theory. Phys. Rev E **64**, 017101 (2001)
- Newell, G.F.: A simplified car-following theory: a lower order model. Transp. Res. B Methodol. **36**, 195–205 (2002)

Kapitel 11

Aus Fahrstrategien hergeleitete Fahrzeugfolgemodelle

Ideen sind wie Kinder: Die eigenen liebt man am meisten.

Lothar Schmidt

11.1 Modellkriterien

Die hier vorgestellten Modelle haben dieselbe mathematische Form wie die Minimalmodelle (vgl. Kap. 10). Sie werden durch eine Beschleunigungsfunktion a_{mic} (Gl. (10.3)) oder eine Geschwindigkeitsfunktion v_{mic} (Gl. (10.6)) beschrieben. Die Beschleunigungsfunktion sollte mindestens folgende Aspekte modellieren:

1. Beschleunigung auf die *Wunschgeschwindigkeit* v_0 , falls es keine Behinderungen durch andere Fahrzeuge gibt und auch andere Hindernisse hinreichend weit entfernt sind:

$$\frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v} < 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a_{\text{mic}}(s, v_0, v_l) = 0 \quad \text{für alle } v_l. \quad (11.1)$$

2. Im gebundenen Verkehr sollte bei sonst gleichen Bedingungen die Beschleunigung abnehmen (bzw. die Bremsverzögerung zunehmen), je geringer der Abstand zum Vorderfahrzeug ist:

$$\frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial s} \geq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial s} = 0 \quad \text{für alle } v_l. \quad (11.2)$$

Das Gleichheitszeichen der linken Ungleichung ist gültig, wenn andere Fahrzeuge so weit entfernt sind, dass sie das Fahrverhalten nicht beeinflussen.

3. Bei dynamischen Annäherungen sollte die Beschleunigung umso geringer (bzw. die Verzögerung umso stärker) sein, je höher bei sonst gleichen Bedingungen die Annäherungsrate an das Vorderfahrzeug ist bzw. je schneller dieses fährt:

$$\frac{\partial \tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)}{\partial \Delta v} \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v_l} \geq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial a_{\text{mic}}(s, v, v_l)}{\partial v_l} = 0. \quad (11.3)$$

Wieder gilt das Gleichheitszeichen für den Fall, dass keine Behinderungen auftreten.

4. In einer Warteschlange sollte ein gewisser Mindestabstand s_0 zum Vorderfahrzeug gewahrt werden:

$$a_{\text{mic}}(s, 0, v_l) = 0 \quad \text{für alle } v_l \geq 0, s \leq s_0. \quad (11.4)$$

Die Bedingungen an die Geschwindigkeitsfunktion v_{mic} ergeben sich aus jenen für die Beschleunigungsfunktion durch die aus Gl. (10.10) gewonnene Beziehung $v_{\text{mic}} = v + a_{\text{mic}} \Delta t$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, ist ein Fahrzeugfolgemodell *vollständig* in dem Sinne, dass prinzipiell alle in der Längsdynamik auftretenden Situationen konsistent modelliert werden können. Insbesondere folgt daraus (i) die endliche Reichweite aller Wechselwirkungen, (ii) das Fehlen eines *Mitzieheffekts*,

$$a_{\text{mic}}(s, v, v_l) \leq a_{\text{mic}}(\infty, v, 0) \quad \text{für alle } v_l \quad (11.5)$$

und (iii) die Existenz einer Gleichgewichtsgeschwindigkeit¹ $v_e(s)$, welche die bereits für die OV-Funktion in Gl. (10.17) geforderten Bedingungen erfüllt (vgl. Übungsaufgabe 11.1):

$$v'_e(s) \geq 0, \quad v_e(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} v_e(s) = v_0. \quad (11.6)$$

Diese Konsistenzbedingungen sind notwendig, jedoch nicht hinreichend. Beispielsweise muss zusätzlich die Beschleunigung auf als komfortabel empfundene bzw. physikalisch mögliche Werte eingegrenzt werden. Bei dynamischen Annäherungen müssen kinematische Tatsachen wie die quadratische Abhängigkeit des Bremsweges von der Geschwindigkeit berücksichtigt werden und ggf. vorausschauend Bremsmanöver eingeleitet werden. Schließlich sollte das Modell zwar Instabilitäten und damit die Ausbildung von Stop-and-Go-Verkehr zulassen, jedoch keine Unfälle.²

Welche der im Kap. 10 vorgestellten Modelle erfüllen die Konsistenzbedingungen (11.1), (11.2), (11.3), und (11.4)?

¹ Schwächt man Bedingung (11.1) auf $\partial a_{\text{mic}} / \partial v \leq 0$ ab, sind auch Modelle *ohne* Fundamentaldiagramm möglich, die gelegentlich postuliert werden.

² Verkehrsflussmodelle stellen die normalen Verhältnisse dar. Unfälle sind fast immer durch grobe Fahrfehler verursacht, die gerade nicht dem zu modellierenden Verhalten entsprechen, so dass sie außerhalb des Beschreibungsbereiches der hier behandelten Modelle liegen.

11.2 Gipps-Modell

Die hier vorgestellte Version des Gipps-Modells ist gegenüber der Formulierung in der Originalarbeit vereinfacht, aber nicht konzeptionell geändert. Es ist vermutlich das einfachstmögliche, vollständige sowie unfallfreie Modell mit realistischen Werten der Beschleunigung (wenngleich auch nicht realistischem Beschleunigungsverhalten).

11.2.1 Sichere Geschwindigkeit

Die Bedingung der Unfallfreiheit ist mittels einer maximalen, von Abstand und Geschwindigkeit des Führungsfahrzeugs abhängigen „sicheren Geschwindigkeit“ $v_{\text{safe}}(s, v_l)$ formuliert. Diese wird aus folgenden Annahmen hergeleitet:

1. Es wird mit einer konstanten Verzögerung b gebremst. Eine Unterscheidung zwischen komfortabler und maximaler Verzögerung gibt es nicht.
2. Es gibt eine konstante „Reaktionszeit“ Δt .
3. Es wird der *Worst Case* betrachtet: Der Fahrer des Führungsfahrzeugs bremst unvermittelt und bis zum Stillstand. Unter dieser Bedingung soll Kollisionsfreiheit herrschen. Um ein Berühren „Stoßstange-an-Stoßstange“ zu vermeiden, sollte ein Minimalabstand s_0 nicht unterschritten werden.³

Unter den Bedingungen 1 und 3 beträgt der Bremsweg des Führungsfahrzeugs

$$\Delta x_l = \frac{v_l^2}{2b}.$$

Beim betrachteten Fahrzeug muss neben dem Bremsweg auch der während der Reaktionszeit zurückgelegte „Reaktionsweg“ berücksichtigt werden (Bedingung 2). Der resultierende *Anhalteweg* (Summe aus Reaktions- und Bremsweg) ist gegeben durch⁴

$$\Delta x = v \Delta t + \frac{v^2}{2b}.$$

Das Fahrzeug kommt kollisionsfrei mit einem Mindestabstand s_0 zum Stehen, falls der anfängliche Abstand s größer ist als s_0 zuzüglich der Differenz zwischen dem eigenen Anhalteweg und dem Bremsweg des Führungsfahrzeugs,

³ Diese in der Originalarbeit nicht enthaltene Bedingung ist notwendig, um Unfallfreiheit auch bei Diskretisierungsfehlern zu gewährleisten.

⁴ Hier ist, im Gegensatz zur Formulierung in der Originalarbeit, nicht berücksichtigt, dass sich während der Reaktionszeit die Geschwindigkeit ändern kann.

$$s - s_0 \geq v \Delta t + \frac{v^2}{2b} - \frac{v_l^2}{2b}.$$

Für die gerade noch sichere Geschwindigkeit $v = v_{\text{safe}}$ gilt das Gleichheitszeichen. Lösen der resultierenden quadratischen Gleichung ergibt

$$v_{\text{safe}}(s, v_l) = -b \Delta t + \sqrt{b^2 \Delta t^2 + v_l^2 + 2b(s - s_0)}. \quad (11.7)$$

11.2.2 Modellgleichung

Die „sichere Geschwindigkeit“ (11.7) ist die wesentliche Komponente des als iterierte Abbildung formulierten, vereinfachten Gipps-Modells :

$$v(t + \Delta t) = \min [v + a \Delta t, v_0, v_{\text{safe}}(s, v_l)] \quad \text{Gipps-Modell.} \quad (11.8)$$

Diese Aktualisierungsgleichung spiegelt folgendes Fahrverhalten wider:

- Falls die aktuelle Geschwindigkeit oberhalb der sicheren Geschwindigkeit liegt, wird auf diese im nächsten Schritt abgebremst.⁵ Der Aktualisierungszeitschritt wird dabei gleich der Reaktionszeit gewählt.
- Ansonsten wird mit einem konstanten Wert a beschleunigt, bis entweder die sichere Geschwindigkeit oder die Wunschgeschwindigkeit v_0 erreicht ist.

11.2.3 Fließgleichgewicht

Im Fließgleichgewicht gilt $v(t + \Delta t) = v_l = v$ und damit

$$v = \min(v_0, v_{\text{safe}}) = \min \left(v_0, -b \Delta t + \sqrt{b^2 \Delta t^2 + v^2 + 2b(s - s_0)} \right).$$

Dies führt zur Gleichgewichts-Geschwindigkeitsfunktion

$$v_e(s) = \max \left[0, \min \left(v_0, \frac{s - s_0}{\Delta t} \right) \right] \quad (11.9)$$

und mit der Fahrzeulgänge l zum bereits bekannten „dreieckigen“ Fundamentaldiagramm

⁵ Dabei ist die Bremsverzögerung $(v - v_{\text{safe}})/\Delta t$ nicht auf b begrenzt. Sie kann, beispielsweise nach Einscheren eines anderen Fahrzeuges (passiver Spurwechsel), auch deutlich höher sein. Ohne Spurwechsel kann eine solche Situation nicht auftreten.

$$Q_e(\rho) = \min \left(v_0 \rho, \frac{1 - \rho(l + s_0)}{\Delta t} \right). \quad (11.10)$$

Daraus folgt, dass der Parameter Δt wie im Newell-Modell vierfach interpretiert werden kann: (i) als Reaktionszeit gemäß der Herleitung von v_{safe} , (ii) als numerische Aktualisierungszeit oder (iii) als Geschwindigkeitsanpassungszeit jeweils nach Gl. (11.8) und schließlich (iv) als Folgezeit im gebundenen Verkehr nach dem Fundamentaldiagramm (11.9).

11.2.4 Eigenschaften

Im Gegensatz zu den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Minimalmodellen hat das Gipps-Modell eine nachvollziehbare Herleitung aus wenigen Grundannahmen und anschauliche Parameter, die auch die richtige Größenordnung besitzen (Tabelle 11.1). Ferner ist das Modell – anders als die Minimalmodelle – *robust* in dem Sinne, dass es in einem weiten Parameterbereich mit sinnvollen Ergebnissen simuliert werden kann.

Das simulierte Autobahn-Szenario (Abb. 11.1 links) stellt eine deutlich realitätsnähere Dynamik als das OVM oder das Newell-Modell dar: Das Geschwindigkeitsfeld, Teilbild (a), zeigt kleine Störungen, die durch Spurwechsel bei der Einfahrt entstehen und im Verlauf ihrer Ausbreitung entgegen der Fahrtrichtung zu Stop-and-Go-Wellen anwachsen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist konstant und von der Größenordnung (etwa -15 km/h) in Einklang mit den Beobachtungen. Ferner weicht die Wellenlänge (etwa 1–1.5 km) nicht zu stark von den Beobachtungen (etwa 1.5–3 km) ab.

Das aus den virtuellen Detektoren erzeugte Fluss-Dichte-Diagramm, Teilbild (b), weist im gebundenen Verkehr die im realen Verkehr beobachtete weite Streuung auf (vgl. hierzu Abb. 4.11 und 4.12). Betrachtet man die Punktewolken verschiedener virtueller Detektoren, beobachtet man eine deutliche Verschiebung des Schwerpunktes der Punktewolken in Richtung höherer Dichte und in Richtung des Fundamentaldiagramms, je näher der virtuelle Detektor an der stauverursachenden Engstelle liegt. Nur im Bereich des stationären Verkehrsflusses (gefüllte Quadratssymbole in Teilbild (b)) liegen die Daten nahezu auf dem Fundamentaldiagramm des Gipps-Modells (obere Begrenzung der Daten). Diese offensichtliche Dichteerhöhung nahe des Stau-Ausflusses wird häufig in realen Daten beobachtet und als

Tabelle 11.1 Modellparameter des vereinfachten Gipps-Modells

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h	54 km/h
Anpassungs-/Reaktionszeit Δt	1.1 s	1.1 s
Beschleunigung a	1.5 m/s^2	1.5 m/s^2
Verzögerung b	1.0 m/s^2	1.0 m/s^2
Minimalabstand s_0	3 m	2 m

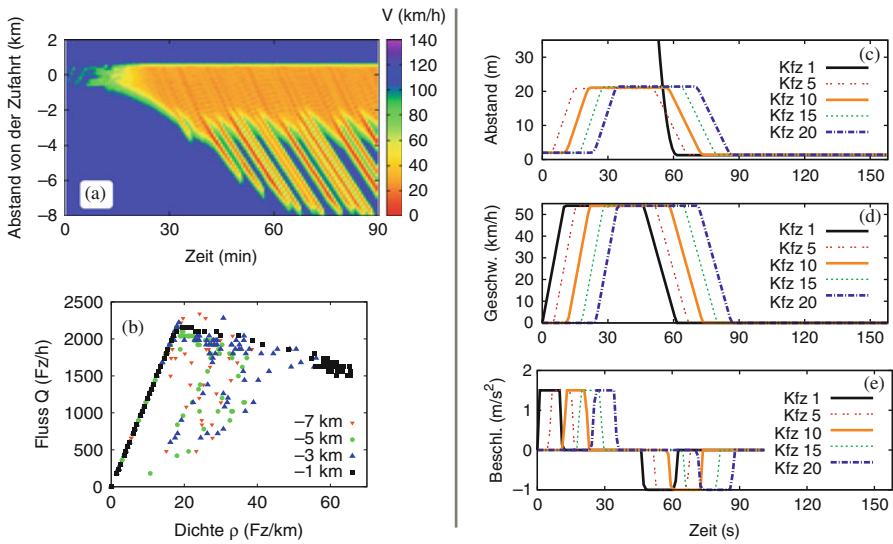


Abb. 11.1 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem Gipps-Modell (Gln. (11.8) und (11.7)) unter Verwendung der Parameter aus Tabelle 11.1

Pinch-Effekt (engl. *to pinch*: einzwängen) bezeichnet. Die mit der Schwankungsbreite zunehmende systematische Unterschätzung der Dichte legt jedoch nahe, dass die tatsächliche Dichtezunahme geringer ist oder gar nicht stattfindet. Dies wird durch die Simulation bestätigt. Daraus folgt eine wichtige Aussage:

Um dynamische Phänomene des Verkehrsflusses zu verstehen, muss man nicht nur die Verkehrsdynamik, sondern auch die Datenerfassung und -auswertung simulieren. Das gilt auch umgekehrt, wenn man die Leistungsfähigkeit und Aussagekraft von Modellen anhand von realen Verkehrsdaten bestimmen will.

Das städtische LSA-Szenario ist deutlich näher an der Wirklichkeit als bei den bisher betrachteten Modellen. Allerdings ist der Beschleunigungsverlauf unrealistisch. Zwar liegen die durch die Parameter a und b einstellbaren Werte von Beschleunigung und Verzögerung im realistischen Bereich. Es gibt aber, wie im Teilbild (e) veranschaulicht, für sämtliche Fahrsituationen nur drei mögliche Beschleunigungen: $v = a, b$, oder Null. Das Fahrverhalten ist also übertrieben schematisch und die „roboterhaft“ abrupten Übergänge sind unrealistisch.

Das Gipps-Modell unterscheidet nicht zwischen komfortabler und maximal möglicher Verzögerung. Interpretiert man den Parameter b in Formel (11.7) für die sichere Geschwindigkeit als maximale Verzögerung, ist das Modell immer unfallfrei, aber es wird immer maximal, d.h. sehr unkomfortabel verzögert. Interpretiert man b

hingegen als komfortable Verzögerung, kann das Modell bei heterogenem Verkehr doch wieder Unfälle produzieren, wenn (mit anderen Modellen oder Parametern simulierte) Vorderfahrzeuge stärker bremsen.

In Anbetracht seiner Einfachheit zeigt das Gipps-Modell gute Ergebnisse. Es wird in abgewandelter Form in vielen Simulatoren eingesetzt.

11.3 Intelligent-Driver-Modell

Das zeitkontinuierliche *Intelligent-Driver-Model* (IDM) ist vermutlich das einfachste, vollständige und unfallfreie Modell, welches in allen Verkehrssituationen realistische Beschleunigungswerte und ein zumindest plausibles Beschleunigungsverhalten modelliert.

11.3.1 Geforderte Eigenschaften

Als ein typischer Vertreter eines aus Grundannahmen hergeleiteten Modells (*First-Principles-Modells*) ist das IDM im Wesentlichen durch folgende Liste von zu modellierenden Eigenschaften bestimmt:

1. Die Beschleunigung gehorcht den allgemeinen Plausibilitätsbedingungen (11.1), (11.2), (11.3), und (11.4).
2. Der Gleichgewichtsabstand bei der Folgefahrt sollte einen durch einen Mindestabstand s_0 und eine Zeitlücke T definierten „Sicherheitsabstand“ $s_0 + vT$ nicht unterschreiten.
3. Die Annäherung an langsame oder stehende Fahrzeuge bzw. Hindernisse geschieht mit einer kollisionsvermeidenden *intelligenten Bremsstrategie*:
 - Ist die Situation „unter Kontrolle“, wird „weich“ gebremst, wobei eine gewisse komfortable Verzögerung allmählich aufgebaut und kurz vor dem Stillstand wieder abgebaut wird.
 - Ist die Situation kritisch, wird stärker als mit der komfortablen Verzögerung gebremst und so die Situation wieder unter Kontrolle gebracht. Danach wird ggf. mit der komfortablen Verzögerung weiter abgebremst.
4. Bei der Folgefahrt und beim Annähern sollte es sanfte Übergänge geben. Der als Zeitableitung der Beschleunigung definierte *Ruck J* (engl. *Jerk*) sollte daher endlich bleiben.⁶ Dies entspricht einer nach allen Variablen stetig differenzierbaren Beschleunigungsfunktion $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ bzw. $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$.
5. Das Modell sollte möglichst einfach sein und anschauliche Modellparameter besitzen. Jeder Parameter sollte möglichst nur einen Aspekt des Fahrverhaltens beschreiben und plausible Werte annehmen.

⁶ Typische Werte für eine als angenehm empfundene Ruckbegrenzung liegen bei $|J| \leq 1.5 \text{ m/s}^3$.

11.3.2 Modellgleichung und mathematische Beschreibung

Die geforderten Eigenschaften werden durch folgende Beschleunigungsgleichung erfüllt:

$$\boxed{\dot{v} = a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right]} \quad \text{IDM.} \quad (11.11)$$

Die IDM-Beschleunigung ist in der Form $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$ formuliert. Einerseits wird die aktuelle Geschwindigkeit v mit der Wunschgeschwindigkeit v_0 und andererseits der aktuelle Abstand s mit dem *Wunschabstand* s^* verglichen. Der Wunschabstand

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + \max \left(0, vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}} \right) \quad (11.12)$$

enthält neben dem Gleichgewichtsanteil $s_0 + vT$ auch einen *dynamischen Anteil* $v\Delta v/(2\sqrt{ab})$, der die „intelligente“ Bremsstrategie realisiert (siehe Abschn. 11.3.4).

11.3.3 Modellparameter

Die Modellparameter können anhand folgender drei Standardsituationen veranschaulicht werden: (i) Das *Beschleunigen* auf freier Strecke geschieht mit der Maximalbeschleunigung a , die beim Annähern an die Wunschgeschwindigkeit v_0 in einer durch δ beschriebenen Weise gegen Null geht. Je größer δ ist, desto später wird die Beschleunigung reduziert. (ii) Das *Folgefahren* geschieht mit einem durch die Folgezeit T charakterisierten Abstand zuzüglich eines Minimalabstandes s_0 bei stehendem Verkehr. (iii) Beim *Annähern* an langsamere oder stehende Fahrzeuge wird in Normalsituationen die komfortable Verzögerung b nicht überschritten. Zwischen den drei Situationen bestehen im Beschleunigungsverhalten kontinuierliche Übergänge.

Jeder Modellparameter beschreibt eine klar abgrenzbare Eigenschaft (Abb. 11.2). Beispielsweise kann man deshalb den Übergang von einer Autobahn- zu einer Stadt-situation allein durch Änderung der Wunschgeschwindigkeit beschreiben (Tabelle 11.2). Die restlichen, den Fahrstil charakterisierenden Parameter bleiben unverändert. Damit wird modelliert, dass ein auf Autobahnen aggressiv oder vorsichtig agierender Autofahrer seinen Fahrstil im Stadtverkehr vermutlich nicht ändern wird.

Das IDM enthält *keine* explizite Reaktionszeit. Zusammen mit der stetig differenzierbaren Beschleunigungsfunktion entspricht es eher den Eigenschaften eines adaptiven Beschleunigungsreglers (*Adaptive Cruise Control*, ACC) als denen eines menschlichen Fahrers. Es kann zusätzlich um spezifisch menschliche Aspekte wie Schätzfehler, Reaktionszeiten, aber auch um Berücksichtigung mehrerer Vorderfahrzeuge erweitert werden (siehe Kap. 12).

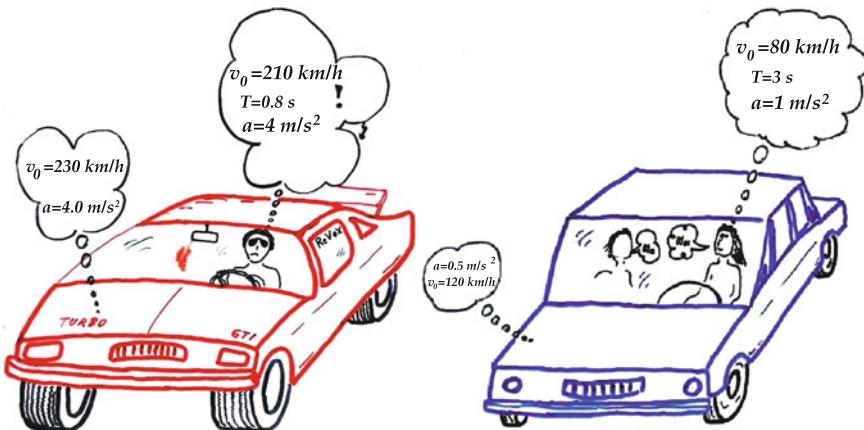


Abb. 11.2 Mit anschaulichen Modellparametern wie jenen des Gipps-Modells oder des Intelligent-Driver-Modells (IDM) kann man verschiedene Aspekte des Fahrstils (und der Leistungsgrenzen des Fahrzeugs) direkt durch unterschiedliche Parameterwerte abbilden

Tabelle 11.2 Modellparameter des Intelligent-Driver-Modells (IDM)

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit v_0	120 km/h	54 km/h
Folgezeit T	1.0 s	1.0 s
Minimalabstand s_0	2 m	2 m
Beschleunigungsexponent δ	4	4
Beschleunigung a	1.0 m/s ²	1.0 m/s ²
Verzögerung b	1.5 m/s ²	1.5 m/s ²

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Modellen sind im IDM die Folgezeit T , die Geschwindigkeitsanpassungszeit v_0/a und die (nur in der später beschriebenen Modellerweiterung vorhandene) Reaktionszeit klar voneinander getrennt. Dadurch kann man den Unterschied zwischen ACC-Reglern und menschlichen Fahrern im Modell nachvollziehen. Weiterhin können die Fahrstilkombinationen „eher träge, aber dennoch dicht auffahrend“ und „agil, aber auf ausreichenden Sicherheitsabstand achtend“ unterschieden werden.⁷

11.3.4 Intelligente Bremsstrategie

Das dynamische Annäherungsverhalten wird durch den Beitrag $v\Delta v/(2\sqrt{ab})$ des dynamischen Wunschabstandes (11.12) modelliert. Aufgrund der geforderten kon-

⁷ Offensichtlich fördert der erste, durch kleine Werte von a und T beschriebene Fahrstil Verkehrsinstabilitäten. Dies wird durch die Stabilitätsanalyse in Kap. 15 bestätigt.

tinuierlichen Übergänge ist allerdings immer auch der Gleichgewichtsanteil $s_0 + vT$ wirksam. Um die Bremsstrategie isoliert zu betrachten, setzt man den Gleichgewichtsanteil gleich Null und lässt den auf freier Strecke wirkenden Beschleunigungsanteil $a_F(v) = a[1 - (v/v_0)^\delta]$ unberücksichtigt. Ferner betrachtet man beispielsweise eine Annäherung an ein stehendes Fahrzeug oder eine rote Ampel, also $\Delta v = v$. Unter diesen Bedingungen ist die IDM-Beschleunigung gegeben durch

$$\dot{v} = -a \left(\frac{s^*}{s} \right)^2 = -\frac{av^2(\Delta v)^2}{4abs^2} = -\left(\frac{v^2}{2s} \right)^2 \frac{1}{b}.$$

Definiert man die *kinematische Verzögerung* durch

$$b_{\text{kin}} = \frac{v^2}{2s}, \quad (11.13)$$

ergibt sich die IDM-Beschleunigung dieses Spezialfalls zu

$$\dot{v} = -\frac{b_{\text{kin}}^2}{b}. \quad (11.14)$$

Bei einem Abbremsvorgang mit der Verzögerung b_{kin} ist der Bremsweg gleich dem aktuellen Abstand. Die kinematische Verzögerung stellt also die zur Kollisionsvermeidung mindestens notwendige Verzögerung dar. Damit erschließt sich aus Gl. (11.14) die selbstregulierende Bremsstrategie des IDM:

- Eine „kritische Situation“ ist dadurch charakterisiert, dass die kinematische Verzögerung größere Werte annimmt als die komfortable Verzögerung b .
- Ist die Situation kritisch, wird *noch etwas stärker* als mit der kinematischen Verzögerung gebremst: $|\dot{v}| = b_{\text{kin}}^2/b > b_{\text{kin}}$. Damit wird die kinematische Verzögerung in Richtung der komfortablen Verzögerung reduziert, also die Situation „unter Kontrolle“ gebracht.
- Ist die Situation unkritisch und ein Bremsen noch gar nicht notwendig, $b_{\text{kin}} < b$, ist die aktuelle Verzögerung $b_{\text{kin}}^2/b < b_{\text{kin}}$ *noch* geringer. Dadurch steigt b_{kin} in Richtung der komfortablen Verzögerung.

Das Abbremsverhalten ist also *dynamisch selbstregulierend* im Hinblick auf eine Situation, bei der die kinematische Verzögerung gleich der komfortablen Verzögerung ist. Man kann zeigen (siehe Übungsaufgabe 11.4), dass diese Selbstregulierung explizit durch die Differentialgleichung

$$\frac{db_{\text{kin}}}{dt} = \frac{v b_{\text{kin}}}{s b} (b - b_{\text{kin}}) \quad (11.15)$$

gegeben ist. Die kinematische Verzögerung nähert sich daher *unabhängig von der Situation* der komfortablen Verzögerung b .

Bei diesen Überlegungen wurden Teile der IDM-Beschleunigung nicht berücksichtigt. Die Simulation in Abb. 11.4e zeigt anhand einer Annäherung an ein anfangs weit entfernt stehendes Hindernis ($b_{\text{kin}} \ll b$) die komplette Dynamik. Zunächst wird die Verzögerung gemäß Gl. (11.15) annähernd auf die komfortable Verzögerung aufgebaut. Aufgrund des konservativen Charakters der anderen, in dieser Überlegung vernachlässigten Beschleunigungsanteile wird diese Verzögerung beim ersten Fahrzeug nicht ganz erreicht und die Verzögerung vor dem Stillstand sanft abgebaut. Das Fahrzeug kommt „auf den Punkt“ im Abstand $s = s_0$ zum Stehen. Bei den weiteren Fahrzeugen der Kolonne wird die komfortable Verzögerung etwas überschritten. Es kommt aber nie zu Notbremsungen oder gar Unfällen.

Abbildung 11.3 zeigt den Effekt der selbstregulierenden Bremsstrategie anhand einer Situation, bei der plötzlich gebremst werden muss. Für $b = 1 \text{ m/s}^2$ ist die Situation für den IDM-Fahrer bereits „kritisch“, da $b_{\text{kin}} = v^2/(2s) = 1.9 \text{ m/s}^2$, so dass er mit noch stärkerer Verzögerung versucht, die Situation unter Kontrolle zu bekommen. Für $b = 4 \text{ m/s}^2$ hingegen ist die komfortable Verzögerung weit oberhalb der anfangs kinematisch notwendigen. Der simulierte Fahrer bremst anfangs deutlich schwächer, als es b_{kin} entspricht, so dass b_{kin} zunächst deutlich steigt. Wieder bewirken die anderen IDM-Terme, dass die Wunschverzögerung nicht ganz erreicht wird.

Warum verhalten sich durch das IDM modellierte Fahrer umso vorausschauender, je kleiner b ist? Warum sind sehr kleine Werte von b (unterhalb von 1 m/s^2) dennoch nicht sinnvoll?

Machen Sie sich klar, dass in der beschriebenen Annäherungssituation der durch den dynamischen Teil von s^* vermittelte Beschleunigungsanteil wesentlich größer ist als der aller anderen Anteile und dass außerdem diese Anteile fast immer negativ sind, also ein defensives Fahrverhalten modellieren.

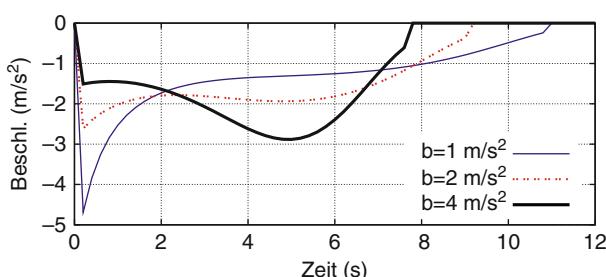


Abb. 11.3 Auswirkung der komfortablen Verzögerung auf das Verhalten bei Annäherung (Anfangsgeschwindigkeit 54 km/h) an eine LSA, die bei einem Abstand von 60 m zur Haltelinie auf rot schaltet

11.3.5 Dynamische Eigenschaften

Abbildung 11.4 zeigt die IDM-Simulationen der beiden Standardszenarien „Verkehrszusammenbruch auf einer Autobahn mit einer Zufahrt als Engstelle“ und „Beschleunigen und Anhalten im Stadtverkehr“. Das Geschwindigkeitsfeld des Autobahnszenarios (Teilbild (a)) zeigt eine ähnliche Dynamik wie das Gipps-Modell in Abb. 11.1: Nach dem Zusammenbruch entsteht nahe der Engstelle stationärer gestauter Verkehr. Weiter stromaufwärts kommt es zu Stauwellen, die sich mit etwa -15 km/h ausbreiten. Die Wellenlänge ist tendenziell kleiner als die realer Stauwellen, ansonsten wird die raumzeitliche Dynamik gut reproduziert. Die sich vergrößernden Stauwellen sind die Folge einer simulierten Verkehrsinstabilität. Je nach Parameter und Verkehrsdichte ist das IDM instabil gegenüber Stauwellen (kolloneninstabil, siehe Kap. 15) oder absolut stabil. Außer bei extrem unrealistischen Parameterwerten kommt es jedoch nie zu Unfällen.

Das Fluss-Dichte-Diagramm der virtuellen Detektorquerschnitte in Teilbild (b) zeigt die typischen Merkmale realer Fluss-Dichte-Daten (vgl. Kap. 4):

- Bei freiem Verkehr liegen die Daten nahezu auf einer Kurve, während die gebundenem Verkehr zuzuordnenden Datenpunkte über einen weiten zweidimensionalen Fluss-Dichte-Bereich streuen.
- Die Fluss-Dichte-Punkte des freien Verkehrs liegen nicht auf einer Geraden, sondern auf einer nahe des Flussmaximums stärker gekrümmten Kurve.
- Die Punkte nahe des Flussmaximums sind in Form eines gespiegelten griechischen λ (*inverse- λ -Form*) angeordnet. Dies bedeutet, dass in einem gewissen

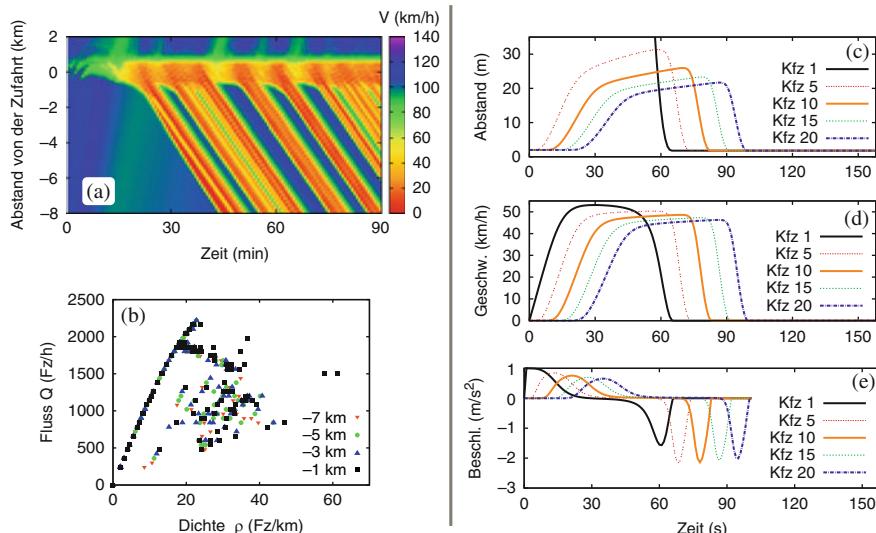


Abb. 11.4 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem Intelligent-Driver-Modell (11.11) unter Verwendung der Parameter aus Tabelle 11.2

Dichtebereich (hier von etwa 18 bis 25 Fz/km) sowohl freier, als auch gebundener Verkehr möglich ist. Damit zeigt das IDM die in der Realität beobachtete Bistabilität und daraus resultierende Hysterese-Effekte wie einen Kapazitätsabfall (*capacity-drop*). Er beträgt hier etwa 300 Fz/h bzw. 15%.

Der Vergleich mit realen Daten in Abb. 11.5 zeigt eine nahezu quantitative Übereinstimmung im Fluss-Dichte-, Geschwindigkeits-Dichte- und Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm. Im Gegensatz zum Gipps-Modell wird auch die Krümmung der jeweils freien Zweige richtig wiedergegeben. Damit ist das IDM geeignet, die Herkunft der kontrovers diskutierten ausgeprägten Streuung der Fluss-Dichte-Daten zu hinterfragen. Ein Vergleich mit der in der Simulation natürlich verfügbaren echten Dichte in Abb. 11.5b zeigt, wie vorsichtig man bei der Interpretation der Fluss-Dichte-Daten sein muss.⁸

Die Simulation des Stadtszenarios, Abb. 11.4c–e, zeigt einen realistischen glatten Beschleunigungs- und Verzögerungsverlauf. Allerdings tritt beim Folgeverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit eine etwas unrealistische Situation auf: Die

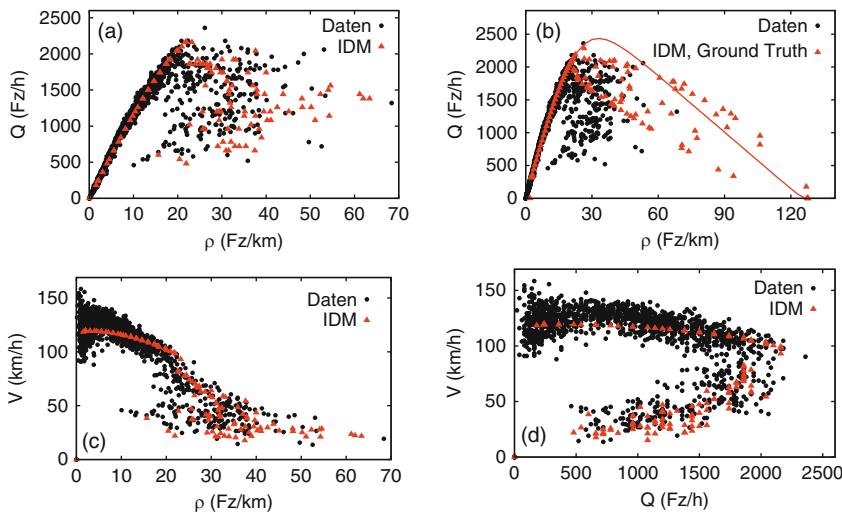


Abb. 11.5 (a) Fundamentaldiagramm, (c) Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm und (d) Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm eines virtuellen Detektors der in Abb. 11.4 gezeigten Autobahnsimulation (1 km stromaufwärts der Rampe) im Vergleich mit Daten eines realen Querschnitts auf der A5 in der Nähe von Frankfurt. Sowohl bei den Daten als auch in der Simulation wurden arithmetische Geschwindigkeitsmittel zugrundegelegt. (b) Fluss-Dichte-Diagramm des IDM unter Verwendung der echten (lokalen) Dichte

⁸ Selbst die Streuung der Daten gestauten Verkehrs als solche ist eine Frage der Darstellung: Während bei der Fluss-Dichte-Darstellung nur die Daten gestauten Verkehrs weit gestreut erscheinen, streuen im Geschwindigkeits-Fluss-Diagramm 11.5d die zu freiem Verkehr gehörigen empirischen Datenpunkte etwa gleich stark wie die gestauten Verkehrs, obwohl es sich in beiden Darstellungen um dieselben Daten handelt.

hinteren Fahrzeuge erreichen nicht die Wunschgeschwindigkeit und demnach vergrößert sich ihr Abstand bis zum Beginn der Bremsphase immer weiter. Dies liegt daran, dass aufgrund der kontinuierlichen Beschleunigungsfunktion der (immer in Richtung Verzögerung wirkende) Einfluss des Vorderfahrzeugs oberhalb des nominalen Wunschabstandes $s^*(v, 0) = s_0 + vT$ nicht schlagartig auf Null geht. Deshalb wird der tatsächliche Gleichgewichtsabstand nahe der Wunschgeschwindigkeit deutlich größer. Dies wird im nächsten Unterabschnitt weiter untersucht und im Abschn. 11.3.7 wird eine Lösung vorgeschlagen.

11.3.6 Fließgleichgewicht

Für das Fließgleichgewicht $\dot{v} = \Delta v = 0$ erhält man aus der IDM-Beschleunigungs-Gl. (11.11) die Bedingung

$$1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s_0 + vT}{s} \right)^2 = 0.$$

Für allgemeine Werte des Beschleunigungsexponenten δ lässt sich dieser Ausdruck nur nach s auflösen (vgl. Abb. 11.6),

$$s = s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta}}. \quad (11.16)$$

Man erhält das Fließgleichgewicht als Gleichgewichts-Nettoabstand $s_e(v)$ mit der Geschwindigkeit als unabhängige Variable anstelle einer Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s)$ in Abhängigkeit des Abstandes. Mit der Mikro-Makro-Beziehung (10.15), $s_e = \frac{1}{\rho_e} - l$, $v = V$ und $Q_e = \rho_e V$, bekommt man das in Abb. 11.6 dargestellte Geschwindigkeits-Dichte- sowie das Fundamentaldiagramm.

Zu beachten ist, dass wegen des kontinuierlichen Übergangs des Fahrzustands „Folgefahrt“ in den Zustand „freie Fahrt“ der Gleichgewichtsabstand $s_e(v)$ *nicht* durch $s^*(v, 0) = s_0 + vT$ gegeben ist. Vielmehr ist er wegen des Nenners in

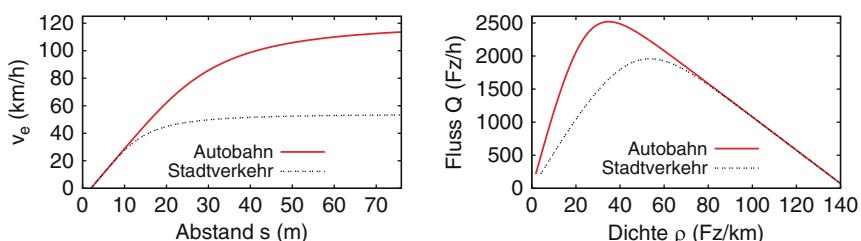


Abb. 11.6 Mikroskopisches (links) bzw. makroskopisches Fundamentaldiagramm (rechts) des IDM mit den zwei Parametersätzen der Tabelle 11.2

Gl. (11.16) in der Nähe der Wunschgeschwindigkeit wesentlich höher. Daher ist das Fundamentaldiagramm auch nicht dreieckig, sondern in der Spitze abgerundet. Dies führt zu der beobachteten Krümmung der makroskopischen Geschwindigkeits-Dichte- und der Fluss-Dichte-Diagramme (Abb. 11.5), aber bei identischen Fahrstilen und Fahrzeugen nahe der Wunschgeschwindigkeit auch zu unrealistischem Folgeverhalten.

11.3.7 Verbesserte Beschleunigungsfunktion

In diesen Abschnitt wird ein mögliches Vorgehen bei der Modellentwicklung gezeigt. Die Zielsetzung ist, das in den Abb. 11.4c, d dargestellte unbefriedigende Abstandsverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit zu verbessern. Die Aufgabenstellung erfordert eine Verschärfung des zweiten Punktes der Anforderungsliste des Abschn. 11.3.1: Der Gleichgewichtsabstand $s_e(v) = s^*(v, 0)$ soll für $v < v_0$ exakt durch $s_0 + vT$ gegeben sein. Um die gewünschten und sinnvollen Eigenschaften des IDM, insbesondere bei Annäherungsvorgängen, nicht zu beeinträchtigen, sollte die Modifikation nur in der Nähe des Gleichgewichts und gleichzeitig nahe der Wunschgeschwindigkeit eine merkliche Auswirkung haben. Hingegen sollte die Beschleunigungsfunktion für die Fälle $v \ll v_0$ sowie für $z(s, v, \Delta v) := s^*(v, \Delta v)/s \ll 1$ und $z \gg 1$ weitgehend unverändert bleiben.

Dies kann durch eine Fallunterscheidung zwischen $z < 1$ (der tatsächliche Abstand ist größer als der dynamische Wunschabstand) und $z \geq 1$ realisiert werden. Die neue Bedingung fordert $\tilde{a}_{\text{mic}} = 0$ für alle Kombinationen der unabhängigen Variablen, für die $z(s, v, \Delta v) = 1$ und außerdem $v < v_0$ ist. Die übrigen Bedingungen der „Anforderungsliste“, insbesondere die stetige Differenzierbarkeit nach allen Variablen sowie die Bedingungen (11.1), (11.2), (11.3), und (11.4), erfordern an der Übergangsstelle $z = 1$ stetige Differenzierbarkeit bezüglich z mit $\partial \tilde{a}_{\text{mic}} / \partial z < 0$ und außerdem $\tilde{a}_{\text{mic}} < 0$ für $z > 1$. Vermutlich die einfachste Beschleunigungsfunktion, die alle diese Bedingungen erfüllt, ist gegeben durch

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a(1 - z^2) & z = \frac{s^*}{s} \geq 1, \\ a_F \left(1 - z^{\frac{2a}{a_F}}\right) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (11.17)$$

mit der freien IDM-Beschleunigung

$$a_F(v) = \lim_{s \rightarrow \infty} a_{\text{IDM}}(s, v, \Delta v) = a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta \right]. \quad (11.18)$$

Dieses *Improved-Intelligent-Driver-Modell* (IIDM) hat denselben Satz von Modellparametern wie das IDM und, abgesehen vom Folgeverhalten nahe der Wunschgeschwindigkeit, die gleichen dynamischen Eigenschaften. Die Wiederholung der Simulation des Stadt-Szenarios mit diesem IIDM ergibt das gewünschte Verhal-

ten: Alle Fahrzeuge der Kolonne erreichen die Wunschgeschwindigkeit (Abb. 11.7 links). Die anderen Eigenschaften des IDM, insbesondere die selbststabilisierende Bremsstrategie und die Bedeutung der komfortablen Verzögerung, bleiben hingegen qualitativ unverändert (Abb. 11.7 rechts).

Allerdings ist das Fundamentaldiagramm nun exakt dreieckig. Eine Simulation des Autobahn-Szenarios ergibt deshalb für freien Verkehr keine Krümmung des Schwerpunktverlaufes der Punktewolken im Fluss-Dichte-, Geschwindigkeits-Fluss- und Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm – im Gegensatz zu den Daten und dem ursprünglichen IDM (vgl. Abb. 11.5). Woher eine solche Krümmung anderweitig stammen kann, wird in Aufgabe 11.6 diskutiert.

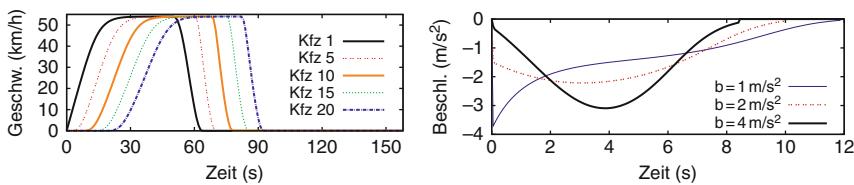


Abb. 11.7 Simulation des Stadt-Szenarios (links) und der in Abb. 11.3 gezeigten Situation mit dem IIDM bei unveränderten Parametern

Übungsaufgaben

11.1 Bedingungen an das mikroskopische Fundamentaldiagramm

Leiten Sie aus den Konsistenzbedingungen (11.1), (11.2), (11.3), und (11.4) die Bedingungen (11.6) an das mikroskopische Fundamentaldiagramm her.

11.2 Faustregeln für Abstand und Bremsweg

1. Welcher Folgezeit T entspricht die Fahrschulregel „Abstand (in m) gleich halber Tacho (in km/h)“?
2. Interpretieren Sie auch die amerikanische Regel „*For every five miles per hour you drive faster, add a car length to your safety gap*“. Teilweise wird diese Regel auch mit *ten miles per hour* zitiert.
3. Eine Faustformel für den Bremsweg zum Stillstand (ohne Reaktionszeit) lautet „Tachowert quadrieren und durch 100 teilen“. Welcher Bremsverzögerung entspricht dies?

11.3 Reaktion auf einscherende Fahrzeuge

Durch Fahrstreifenwechsel eines anderen Fahrzeugs (Geschwindigkeit gleich der bisherigen Gleichgewichtsgeschwindigkeit) wird der Gleichgewichtsabstand kurzfristig um 50% unterschritten. Bestimmen Sie die gemäß dem vereinfachten Gipps-Modell (mit $\delta t = 1 \text{ s}$, $b = 2 \text{ m/s}^2$) und dem IDM die daraus resultierende Bremsverzögerung, falls $a = 1 \text{ m/s}^2$, $\Delta = 4$ und alle beteiligten Fahrzeuge mit konstanter Geschwindigkeit $v = v_0/2 = 72 \text{ km/h}$ fahren. Weitere Parameter des Gipps-Modells oder des IDM werden nicht benötigt.

11.4 IDM-Bremsstrategie

Leiten Sie für die Annäherungssituation an ein stehendes Hindernis ($\Delta v = v$) unter isolierter Betrachtung des dynamischen IDM-Bremsanteils $\dot{v} = -b_{\text{kin}}^2/b$ die Gl. (11.15) der selbstregulierenden Bremsstrategie her. Berücksichtigen Sie die immer gültige Beziehung $\dot{s} = -\Delta v$.

11.5 Analyse eines Mikromodells

Gegeben ist ein Fahrzeugfolgmodell, das durch folgende Beschleunigungsgleichung beschrieben wird:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a & \text{falls } v < \min(v_0, v_{\text{safe}}), \\ 0 & \text{falls } v = \min(v_0, v_{\text{safe}}), \\ -a & \text{sonst,} \end{cases} \quad v_{\text{safe}} = -aT + \sqrt{a^2 T^2 + v_l^2 + 2a(s - s_0)}.$$

Hierbei bedeuten v_l die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs und s der Stoßstange-zu-Stoßstange-Abstand zu diesem.

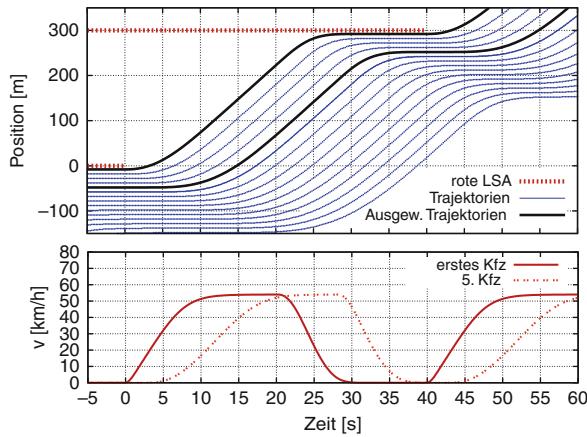
1. Erläutern Sie die Bedeutung der Modellparameter a , s_0 , v_0 und T , indem Sie (i) die Beschleunigung bei freier Strecke, (ii) das Folgeverhalten bei gleichbleibendem Abstand und konstanter Geschwindigkeit, (iii) das Abbremsen vor einem einzelnen stehenden Fahrzeug betrachten.
2. Es sei nun $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $a = 1 \text{ m/s}^2$, $T = 1.6 \text{ s}$ und $s_0 = 3 \text{ m}$. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s)$ als Funktion des Abstandes sowie das Fundamentaldiagramm für 5 m lange Fahrzeuge. Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm.
3. Nehmen Sie nun $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $a = 1 \text{ m/s}^2$, $T = 0$ und $s_0 = 3 \text{ m}$ an. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für ein zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ aus dem Stillstand anfahrendes Fahrzeug, welches vor einer roten Ampel bei $x = 603 \text{ m}$ wieder anhalten muss. *Hinweis:* Die Ampel wird durch ein stehendes, „virtuelles“ Fahrzeug modelliert; im Verlauf der Fahrt wird die Wunschgeschwindigkeit erreicht.

11.6 Heterogener Verkehr

Das modifizierte IDM mit exakt dreieckigem Fundamentaldiagramm führt bei der Simulation identischer Fahrzeuge nicht zu der in den Daten (Abb. 11.5) beobachteten Absenkung der Geschwindigkeit bereits vor dem Verkehrszusammenbruch. Kann dieser Effekt durch die Kombination von unterschiedlichen Wunschgeschwindigkeiten und einer Möglichkeit zum Überholen erreicht werden?

11.7 Stadtverkehr mit dem modifizierten IDM

Gegeben sind die Simulationsergebnisse einer Stadtsituation mit zwei Lichtsignalanlagen (LSA), in der mehrere wartende Fahrzeuge nach Grünwerden der ersten LSA zur zweiten LSA fahren und wieder anhalten, bis auch diese LSA grün wird. Das obere Teilbild stellt die Trajektorien aller 15 Fahrzeuge sowie die Rotphasen der Ampeln (waagerechte Linien) dar. Das untere Diagramm zeigt die Geschwindigkeiten der beiden dicker gezeichneten Trajektorien. Für die Simulation wurde das modifizierte Intelligent-Driver-Modell (IIDM) verwendet.



1. Schätzen Sie die Kapazität K der freien Strecke (ohne Ampeln) durch den maximalen Fluss ab.
2. Wieviele Fahrzeuge würden in einer Grünphase der Ampel bei $x = 0$ durchkommen, wenn diese (i) 5 s, (ii) 15 s oder (iii) 40 s lang ist? Leiten Sie daraus eine „Bemessungsregel“ der notwendigen Grünzeit τ für n durchkommende Fahrzeuge in der Form $\tau(n) = \tau_0 + \beta n$ ab, d.h. bestimmen Sie τ_0 und β . Kann man β mit der Kapazität K in Beziehung setzen?
3. Schätzen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{cong} des Übergangs Warteschlange → anfahrende Fahrzeuge aus dem Trajektoriendiagramm ab.
4. Schätzen Sie die verwendeten IDM-Modellparameter v_0 , $l_{\text{eff}} = l_{\text{Kfz}} + s_0$, $T = 1/(\rho_{\max} c_{\text{cong}})$, a und b . Legen Sie zur Bestimmung der Beschleunigungen geeignete Tangenten in das Geschwindigkeitsdiagramm.

Literaturhinweise

- Gipps, P.G.: A behavioural car-following model for computer simulation. *Transp. Res. B Methodol.* **15**, 105–111 (1981)
- Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D.: Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Phys. Rev. E* **62**, 1805–1824 (2000)

Kapitel 12

Modellierung menschlichen Fahrverhaltens

Der Vordermann fährt immer miserabel. Frag deinen Hintermann.

Paul Mommertz

12.1 Unterschied zwischen Mensch und Maschine

Die in den Kap. 10 und 11 vorgestellten Fahrzeugfolgemodelle verarbeiten als Eingangsgrößen die eigene Geschwindigkeit v , den Abstand s zum Vorderfahrzeug sowie dessen Geschwindigkeit v_l . Sie geben die Beschleunigung $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ bzw. bei zeitdiskreten Modellen die aktualisierte Geschwindigkeit $v_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ aus. Interessanterweise entspricht dies im Wesentlichen den Eigenschaften automatischer Beschleunigungsregler (*Adaptive Cruise Control, ACC*): Die Eingangsgrößen werden direkt im Fahrzeug sowie durch Radar- und Infrarot-Sensoren gemessen. Die Ausgangsgröße a_{mic} entspricht bei den ACC-Systemen beschleunigungsäquivalenten Signalen für die Motor- und die Bremssteuerung.

Insgesamt sind die durch Modelle der Form $\dot{v} = a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ bzw. $v(t + \Delta t) = v_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ beschriebenen oder von ACC-Systemen generierten „Fahrstile“ charakterisiert durch vernachlässigbare Schätzfehler beim Bestimmen der Eingangsgrößen, einer zu vernachlässigenden Reaktionszeit und einer durch nichts zu erschütternden Aufmerksamkeit. Andererseits entspricht die Beschränkung der Eingangsgrößen auf v , s und v_l einer gewissen „Kurzsichtigkeit“ (nur das Vorderfahrzeug wird berücksichtigt und keine Fahrzeuge weiter voraus), einem „Tunnelblick“ (auf benachbarten Streifen fahrende Fahrzeuge und die lokale Umgebung werden nicht berücksichtigt) und Ignoranz (weitere Signale wie Bremslichter, Blinker oder Hupen bleiben außen vor). Im Gegensatz dazu haben menschliche Fahrer folgende, bisher nicht explizit berücksichtigte Eigenschaften, die in den folgenden Abschnitten modelliert werden:

- *Endliche Reaktionszeit*: Sie beträgt etwa 1 s; bei mangelnder Aufmerksamkeit kann sie auch bedeutend größer sein.
- *Schätzfehler*: Das Bestimmen von Abständen und Geschwindigkeiten ist nur mit endlichen Fehlern möglich.
- *Zeitliche Antizipation*: Verkehrssituationen werden, vor allem bei erfahrenen Fahrrern, zeitlich vorweggenommen bzw. antizipiert.

- *Multiantizipation bzw. räumliche Antizipation:* Der Fahrer berücksichtigt nicht nur das Vorderfahrzeug, sondern weitere Fahrzeuge davor. Teilweise werden auch Fahrzeuge auf den Nachbarfahrstreifen oder das Fahrzeug dahinter berücksichtigt (welches durch dichtes Auffahren oder Lichthupen durchaus einen Einfluss ausüben kann).
- *Kontextabhängigkeit:* Das Fahrverhalten hängt von der aktuellen und vergangenen lokalen Verkehrssituation ab (*Memory-Effekt*). Beispielsweise vergrößern sich im Stau allmählich die Zeitlücken und es wird zögerlicher angefahren. In der Nähe von Fahrstreifensperrungen wird ebenfalls das Verhalten geändert und insbesondere reagiert man gelassener auf Fahrzeuge, die sich mit geringem Abstand „hineinquetschen“.

Bemerkenswerterweise zeigt sich, dass die destabilisierenden Eigenschaften der menschlichen „Unvollkommenheiten“ als Fahrzeuglenker zu einem großen Teil durch stabilisierende Antizipationsfähigkeiten und Kontextsensitivität kompensiert werden. Dies erlaubt und rechtfertigt in vielen Situationen die direkte Anwendung von auf Gl. (10.3) basierenden Fahrzeugfolgemodellen zur Beschreibung realer Verkehrssituationen.

Wenn man detailliert und quantitativ den Einfluss menschlicher Stärken und Schwächen sowie menschlicher Fahrstrategien auf die Effizienz und Stabilität des Verkehrsflusses untersuchen möchte, kommen die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Modelle zum Einsatz. Diese sind, ebenso wie die in Kap. 14 vorstellten Spurwechselmodelle, durchgängig als *Modellerweiterungen* bestehender ACC-artiger Fahrzeugfolgemodelle (wie dem IDM oder dem vereinfachten Gipps-Modell) formuliert.

12.2 Modellierung der Reaktionszeit

Die Reaktionszeit T_r enthält aus Sicht des Verkehrsmodellierers (i) die sensorische Erfassungszeit („es geschieht etwas“), (ii) das Treffen einer Entscheidung (z.B. „ich muss bremsen“) und (iii) deren Umsetzung (z.B. Fuß vom Gas nehmen und die Bremse drücken).

Bei der Modellierung nimmt man an, dass die Reaktion, also die Beschleunigung a_{mic} bzw. die neue Zielgeschwindigkeit v_{mic} , gegenüber den Eingangsstimuli (Abstand und Geschwindigkeiten) um T_r zeitverzögert ist.¹ Bei zeitkontinuierlichen Modellen mit Beschleunigungsfunktion $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ bzw. $\ddot{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$ lässt sich dies direkt formulieren:

$$\dot{v}(t) = a_{\text{mic}}[s(t - T_r), v(t - T_r), v_l(t - T_r)]. \quad (12.1)$$

¹ Man kann argumentieren, dass die eigene Geschwindigkeit ohne Verzögerung bekannt ist, da man über sie vollständige Kontrolle hat. Dies würde in Gl. (12.1) einem Argument $v(t)$ statt $v(t - T_r)$ entsprechen, stimmt aber nicht exakt, da man dann auch die Beschleunigungen bis zur Gegenwart kennen müsste. Die aktuelle Geschwindigkeit kann aber sehr gut aus der *vergangenen* Beschleunigung $\dot{v}(t - T_r)$ abgeschätzt werden, siehe Abschn. 12.4.

Die Beschleunigungsgleichung wird damit zu einer *Delay-Differentialgleichung*.²

Die Gl. (12.1) ist zwar nicht analytisch, aber problemlos numerisch lösbar. Dies gilt auch, wenn die Reaktionszeit T_r kein Vielfaches der Aktualisierungszeit Δt der numerischen Integration (10.8), (10.9) ist. Man nähert dabei die Größe $u(t - T_r)$ (wobei u für s , v oder v_l stehen kann) im Aktualisierungsschritt $i = t / \Delta t$ durch lineare Interpolation an:

$$u(t - T_r) = r u_{i-j-1} + (1 - r) u_{i-j}, \quad j = \text{int}\left(\frac{T_r}{\Delta t}\right), \quad r = \frac{T_r}{\Delta t} - j. \quad (12.2)$$

Hierbei steht $\text{int}(x)$ für den ganzzahligen Teil von x und r für den Rest. Um diese Formel anwenden zu können, muss man die $j+1$ vergangenen Werte u_{i-j-1}, \dots, u_i der dynamischen Variablen u in einem Puffer zwischenspeichern. Mit dieser Interpolationsformel kann man nicht nur einheitliche, sondern auch *individuell verschiedene* und situationsabhängige Reaktionszeiten modellieren.

Eine Modellierung der Reaktionszeiten gemäß Gl. (12.1) entspricht einem ideal aufmerksamen Fahrer: Es werden beständig Informationen verarbeitet und mit der Verzögerung T_r umgesetzt. Ein anderer Ansatz geht davon aus, dass die Fahrer eingehende Informationen instantan verarbeiten und in Beschleunigungen umsetzen können, dies aber nur zu festen Zeitpunkten mit Abständen Δt tun. Zu anderen Zeiten sind sie „unaufmerksam“ und fahren mit der im letzten Zeitpunkt gewählten Beschleunigung weiter. Dies entspricht der Modellierung als iterierte Abbildung gemäß Gln. (10.6) und (10.7).

Sowohl die eigentliche Reaktionszeit T_r als auch die Aufmerksamkeitsspanne Δt tragen zur für den Verkehrsfluss relevanten *effektiven Reaktionszeit* T_{eff} bei. Beide Beiträge lassen sich mit zeitkontinuierlichen Fahrzeugfolgemodellen direkt simulieren, wobei man Δt nicht mehr als möglichst klein zu wählende numerische Hilfsgröße auffasst, sondern als eigenständigen Modellparameter. Abbildung 12.1 zeigt die Reaktion einer mit der IDM-Beschleunigungsfunktion modellierten Fahrzeugkolonne auf ein langsamer werdendes Führungsfahrzeug (Kfz 1), welches nicht überholt werden kann. Die durchgezogene dicke Linie im zentralen Diagramm markiert die Stabilitätsgrenze bei Reaktion auf lediglich das Vorderfahrzeug ($n_a = 1$) in Abhängigkeit der Reaktionszeit T_r und der Aufmerksamkeitsspanne Δt . Für diese Grenze gilt in einem weiten Bereich in guter Näherung (dünne durchgezogene Kurven)

$$T_r + \frac{\Delta t}{2} = T_{\text{eff}} = \text{const.} \quad (12.3)$$

Die destabilisierende Wirkung von T_r ist also etwa *doppelt* so groß wie die von Δt . Dies lässt sich leicht durch die *mittlere* verzögernde Wirkung beider Einflussfaktoren begründen: Unmittelbar nach einer Aktualisierung, also zu Zeiten $t = i \Delta t$, spiegelt die Beschleunigung verzögerungsfrei die aktuellen Verhältnisse wider, während kurz vor einer Aktualisierung die Eingangsgrößen der Beschleunigung die maxi-

² Aus der Regelungstechnik ist bekannt, dass Systeme mit steigenden Reaktionszeiten (*Totzeiten*) instabiler werden.

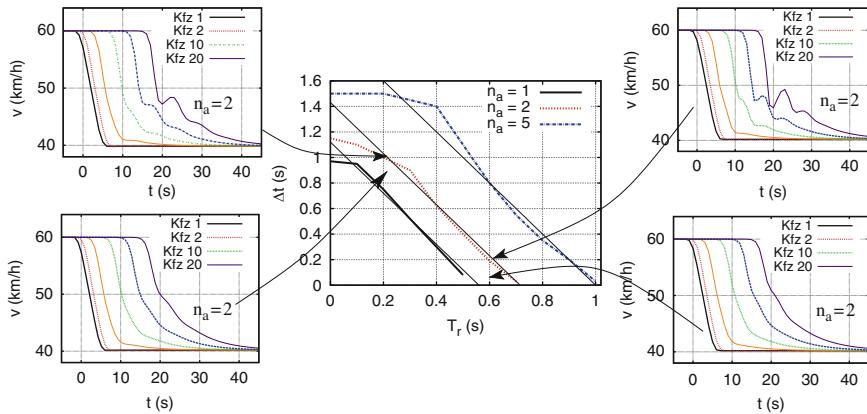


Abb. 12.1 Einfluss der Reaktionszeit T_r , der Aktualisierungszeit Δt und der Zahl n_a der berücksichtigten Fahrzeuge auf die Stabilität des Verkehrsflusses, gezeigt anhand der Reaktion einer Kolonne auf ein sich verlangsamt Führungsfahrzeug (Kfz 1). Das Diagramm in der Mitte zeigt die Grenzen, ab der merkliche Schwingungen auftreten. Die vier Zeitreihen zeigen Simulationen für $n_a = 2$ und mit den durch die Pfeile gekennzeichneten Werten von T_r und Δt

male Verzögerung Δt aufweisen. Falls die destabilisierende Wirkung linear mit Δt wächst, ergibt sich daraus im Mittel eine effektive Verzögerung $\Delta t/2$. Die Abb. 12.1 verdeutlicht, dass diese Annahme nur bei sehr großen Werten von Δt nicht erfüllt ist. Daraus folgt, dass die oft als Reaktionszeiten interpretierten Aktualisierungsintervalle der iterierten Abbildungen (Newell-Modell und Gipps-Modell) in Wirklichkeit nur der *halben* effektiven Reaktionszeit entsprechen.

12.3 Schätzfehler und unvollkommene Fahrweise

Abgesehen vom Zeitverzug durch Reaktionszeiten weicht das menschliche Fahrverhalten in zweierlei Hinsicht von der durch die Beschleunigungsfunktion a_{mic} modellierten „deterministischen“ Fahrweise ab. Zum einen können die Argumente s , v und v_l der Beschleunigungsfunktion nur mit Fehlern abgeschätzt werden. Zum anderen ist das Fahrverhalten nicht vollständig rational, d.h. die Beschleunigungsfunktion *selbst* ist von Störungen überlagert.

12.3.1 Modellierung der Schätzfehler

Bei isolierter Betrachtung der Schätzfehler bleibt die Beschleunigungsfunktion a_{mic} unverändert,³ aber anstelle der tatsächlichen Eingangsgrößen s und v_l werden deren

³ Die Formulierung mit a_{mic} stellt keine Beschränkung auf zeitkontinuierliche Modelle dar, da nach Gl. (10.10) die Geschwindigkeitsfunktion zeitdiskreter Modelle (Gl. (10.6)) über die Beziehung $a_{\text{mic}} = (v_{\text{mic}} - v)/\Delta t$ mit der Beschleunigungsfunktion zusammenhängt.

Schätzwerte s^{est} und v_l^{est} verwendet. Da die Geschwindigkeit durch Blick auf den Tacho relativ genau abgeschätzt werden kann, werden Schätzfehler von v vernachlässigt.⁴ Die Größe der Schätzfehler $s^{\text{est}} - s$ und $v_l^{\text{est}} - v_l$ hängt von der Fahrsituation ab und kann beispielsweise anhand von Experimenten in einem Fahrsimulator bestimmt werden.⁵

Schätzfehler des Abstandes. In den meisten Fahrsituationen erweist sich der *relative* Schätzfehler des Abstandes bzw. der Fehler der logarithmierten Abstände als weitgehend konstant:

$$\ln s^{\text{est}} - \ln s = V_s w_s(t). \quad (12.4)$$

Hierbei beschreibt der Modellparameter V_s die mittlere relative Abweichung vom tatsächlichen Wert, also den Variationskoeffizienten von s_{est} . Typische Werte liegen um 10%. Die (0,1)-gaußverteilte Zufallsgröße $w_s(t)$ beschreibt die Zeitabhängigkeit des Schätzfehlers. Ihre statistischen Eigenschaften werden weiter unten beschrieben.

Schätzfehler der Geschwindigkeit des Führungsfahrzeugs. Die Geschwindigkeit v_l wird anhand der (genau bekannten) eigenen Geschwindigkeit über die wahrgenommene Änderung der optischen Winkelausdehnung $\phi = b/s$ des Vorderfahrzeugs der Breite b geschätzt. Dabei wird der Schätzfehler der *relativen Änderungsrate* r dieser Winkelausdehnung als konstant angenommen,

$$r = \frac{d\phi/dt}{\phi} = \frac{\frac{b}{s^2} \Delta v}{b/s} = \frac{\Delta v}{s} = \frac{1}{\tau_{\text{TTC}}}. \quad (12.5)$$

Interessanterweise ist r gleich dem Kehrwert der *Time-to-Collision* (TTC) $\tau_{\text{TTC}} = \Delta v/s$. Bei positiven Annäherungsraten und unveränderten Geschwindigkeiten gibt die TTC die hypothetische Zeitspanne bis zur Kollision an. Sie gilt als wichtiger Sicherheitsindikator.⁶ Die Annahme einer konstanten Standardabweichung σ_r der relativen Änderungsrate r (Größenordnung 0.01 s^{-1}) führt zu

$$v_l^{\text{est}} - v_l = -(\Delta v^{\text{est}} - \Delta v) = -s \left(\frac{1}{\tau_{\text{TTC}}^{\text{est}}} - \frac{1}{\tau_{\text{TTC}}} \right) = -s \sigma_r w_l(t). \quad (12.6)$$

Genau wie bei der Schätzung des Abstandes beschreibt die Zufallsgröße $w_l(t)$ die Zeitabhängigkeit des Schätzfehlers, die nun besprochen wird.

⁴ Tatsächlich ist die von Tachos angezeigte Geschwindigkeit um bis zu 3% zu hoch. Dies ist aber ein systematischer Fehler, der bei einer Modellkalibrierung automatisch mit berücksichtigt würde.

⁵ Im Übrigen stellt die Modellierung des Umgebungsverkehrs in einem Fahrsimulator auch ein Anwendungsfeld für mikroskopische Verkehrsflussmodelle dar.

⁶ Oft wird eine gefährliche Situation durch $0 < \tau_{\text{TTC}} \leq 4 \text{ s}$ definiert.

Modellierung der Zeitabhängigkeit des Schätzfehlers. Mit den Gln. (12.4) und (12.6) werden die Schätzfehler des Abstandes und der Geschwindigkeitsdifferenz auf standardisierte zeitabhängige Zufallsgrößen $w(t) = w_s(t)$ und $w_l(t)$ zurückgeführt. Jeder Fahrer hat seinen eigenen Satz von Zufallsgrößen $w_s(t)$ und $w_l(t)$, die alle voneinander unabhängig sind. Wir nehmen zu jedem Zeitpunkt eine Standardnormalverteilung an, also insbesondere

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w^2(t) \rangle = 1. \quad (12.7)$$

Die Schätzfehler sind im Mittel also gleich Null. Dies stellt keine Einschränkung dar, da systematische Schätzfehler auf die Modellparameter der Beschleunigungsfunktion abgebildet werden können. Eine einzelne gaußverteilte Zufallsgröße ist durch Erwartungswert und Varianz eindeutig definiert. Da die Werte $\{w(t)\}$ aber eine ganze Zeitreihe von Zufallsgrößen (einen sogenannten *stochastischen Prozess*) darstellen, muss zusätzlich noch die Autokorrelationsfunktion (AKF) festgelegt werden. Dazu nutzt man aus, dass der Schätzfehler eine gewisse *Persistenz* zeigt: Unterschätzt man beispielsweise den Abstand zu gegebener Zeit, wird man ihn kaum in der nächsten Sekunde oder Millisekunde überschätzen. Vielmehr gibt es eine gewisse Persistenzzeit $\tilde{\tau}$ mit Werten von wenigen Sekunden bis zu etwa einer Minute. Die dazugehörige AKF lautet

$$\langle w(t)w(t') \rangle = \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tilde{\tau}}\right). \quad (12.8)$$

Man kann zeigen (vgl. Übungsaufgabe 12.1), dass eine zeitliche Folge von Zufallsgrößen $\{w(t)\}$ mit den geforderten Eigenschaften aus einer *Wiener-Prozess* genannten stochastischen Differentialgleichung gewonnen werden kann. Diese lautet

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w}{\tilde{\tau}} + \sqrt{\frac{2}{\tilde{\tau}}} \xi(t) \quad (12.9)$$

mit

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t'). \quad (12.10)$$

Die Diracsche δ -Funktion $\delta(t)$ ist gleich Null für alle $t \neq 0$. Für $t = 0$ divergiert sie so stark, dass das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ ist.⁷ Die stochastische Differentialgleichung (12.9) erlaubt eine einfache und effiziente numerische Aktualisierungsregel zur Generierung der Größen $w_i = w(i \Delta t)$ im i -ten Aktualisierungszeitschritt:

⁷ Streng genommen ist $\delta[\cdot]$ ein Funktional, d.h. eine Abbildung einer Funktion $f(x)$ auf eine Zahl: $\delta[f(x)] = f(0)$. Dies kann man als Integral einer δ -„Funktion“ schreiben: $\delta[f(x)] = \int \delta(x) f(x) dx = f(0)$. Die δ -Funktion ergibt also nur innerhalb eines Integrals einen Sinn.

$$w_i = e^{-\Delta t/\tilde{\tau}} w_{i-1} + \sqrt{\frac{2\Delta t}{\tilde{\tau}}} \eta_i, \quad (12.11)$$

wobei die Menge $\{\eta_i\}$ vom Computer generierte Pseudo-Zufallszahlen mit Erwartungswert Null und einer Varianz von eins darstellt.⁸ Als Anfangswert $w_0 = \eta_0$ kann man ebenfalls eine (für jeden Fahrer unterschiedliche) Realisierung einer Pseudo-Zufallszahl einsetzen.

Verdeutlichen Sie sich, dass für eine Persistenzzeit $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ nicht mehr Schätzfehler, sondern de facto heterogener Verkehr simuliert wird: Jede Fahrer-Fahrzeug-Einheit hat zwar eine konstante, aber im Allgemeinen unterschiedliche Beschleunigungsfunktion.

12.3.2 Modellierung der Fahrfehler

Fahrfehler und Unregelmäßigkeiten im Fahrstil wirken sich direkt auf die Beschleunigungsfunktion aus. Im einfachsten Fall wird zu der deterministischen Beschleunigung a_{mic} eine *Zufallsbeschleunigung* der Standardabweichung σ_a hinzugefügt, deren Zeitabhängigkeit durch einen weiteren Wiener-Prozess $w_a(t)$ gemäß Gl. (12.9) modelliert wird. Einschließlich der Schätzfehler lautet die Beschleunigungsgleichung nun

$$\dot{v}(t) = a_{\text{mic}}(s^{\text{est}}, v, v_l^{\text{est}}) + \sigma_a w_a(t). \quad (12.12)$$

Die bezüglich der verschiedenen Fahrer unabhängige Zufallsbeschleunigung kann nicht nur Fahrfehler, sondern auch nicht berücksichtigte Einflussgrößen sowie Modellierungsfehler repräsentieren.⁹

Häufig wird die Zeitabhängigkeit der Zufallsbeschleunigung nicht mittels eines gedächtnisbehafteten Wiener-Prozesses $w_a(t)$, sondern mit zeitlich unabhängigen (δ -korrelierten) Zufallsvariablen modelliert. Insbesondere ist dies bei fast allen zellulären Automaten (vgl. Kap. 13) der Fall, aber auch bei vielen Varianten des Gipps-Modells. Da Fahrfehler, ebenso wie Schätzfehler, eine gewisse Persistenzzeit haben, ist dies aber eher unrealistisch.

⁸ Diese können gaußverteilt sein, müssen es aber nicht. Für $\tilde{\tau} \gg \Delta t$ sorgt der Zentrale Grenzwertsatz dafür, dass Gl. (12.11) auch mit anders verteilten (beispielsweise gleichverteilten) Pseudo-Zufallszahlen annähernd gaußverteilte Realisierungen $\{w_i\}$ mit den geforderten Eigenschaften erzeugt.

⁹ In diesem Sinne stellt der Zufallsterm ein „Bekenntnis zur Unkenntnis“ dar.

12.4 Zeitliche Antizipation

Bemerkenswerterweise fahren menschliche Fahrer trotz Schätz- und Fahrfehlern meist unfallfrei und in Situationen dichten, aber noch nicht gebundenen Verkehrs sogar schwingungsfrei, selbst wenn der zeitliche Abstand *kleiner* als die effektive Reaktionszeit T_r ist (vgl. Abb. 4.8). Simulationen zeigen, dass dazu nicht nur die Berücksichtigung mehrerer Fahrzeuge notwendig ist (vgl. Abschn. 12.5). Vielmehr muss zusätzlich der durch die Reaktionszeit verursachte Zeitverzug durch eine Kurzzeitprognose der Verkehrssituation für die nächsten Sekunden überbrückt werden. Dieser sogenannte „siebte Sinn“ der Autofahrer kann näherungsweise durch einfache *Heuristiken*¹⁰ mathematisch beschrieben werden:

1. Für das eigene Fahrzeug ist nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung gut abschätzbar. Ferner trifft es in den meisten Situationen zu, dass sich die Beschleunigung innerhalb einer Reaktionszeit wenig ändert.¹¹ Es ist daher sinnvoll, die Reaktionszeit durch die *Heuristik konstanter Beschleunigung* bzw. der linearen Fortschreibung der Geschwindigkeitsänderungen zu überbrücken:

$$v^{\text{prog}}(t) = v^{\text{est}}(t - T_r) + T_r \dot{v}(t - T_r). \quad (12.13)$$

Dabei ist $\dot{v}(t - T_r)$ die zur Zeit $t - T_r$ realisierte Beschleunigung.

2. Die Beschleunigung des Vorderfahrzeugs lässt sich hingegen nur grob, z.B. durch den binären Zustand des Bremslichts (an oder aus), abschätzen. In den meisten Modellen werden Reaktionen auf Bremslichter gar nicht berücksichtigt. Die einfachste Annahme ist daher die *Heuristik der unveränderten Geschwindigkeit*, welche in linearer Ordnung bezüglich der Reaktionszeit gleichzeitig einer linearen Fortschreibung der Abstandsänderungen entspricht:

$$v_l^{\text{prog}}(t) = v_l^{\text{est}}(t - T_r), \quad s^{\text{prog}} = s^{\text{est}} - T_r \Delta v^{\text{est}}(t - T_r). \quad (12.14)$$

12.5 Berücksichtigung mehrerer Fahrzeuge

Menschliche Fahrer bilden nicht nur Hypothesen über die nächsten Sekunden (zeitliche Antizipation), sondern berücksichtigen, wann immer dies möglich ist, auch

¹⁰ Eine Heuristik ist eine nicht begründbare Annahme, welche der Erfahrung nach häufig zutrifft und daher eine sinnvolle Basis für Entscheidungen mit unvollständiger Information bildet.

¹¹ Dies entspricht im Wesentlichen, dass der Fahrer keine aktiven Handlungen durchführt, wie das Gaspedal stärker durchzudrücken oder ein Bremsmanöver einzuleiten.

mehrere voraus fahrende Fahrzeuge.¹² Diese Vorausschau wird auch als räumliche Antizipation bzw. *Multiantizipation* bezeichnet.

Um dies mathematisch im Rahmen einer Modellerweiterung zu formulieren, wird die Beschleunigungsfunktion $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ (bzw. die Geschwindigkeitsfunktion $v_{\text{mic}}(s, v, v_l) = v + \Delta t a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ zeitdiskreter Modelle) in eine *freie Beschleunigung* a_{free} und einen *Wechselwirkungsanteil* a_{int} aufgrund der Behinderung durch andere Fahrzeuge aufgespaltet:

$$a_{\text{mic}}(s, v, v_l) = a_{\text{free}}(v) + a_{\text{int}}(s, v, v_l), \quad a_{\text{free}}(v) = \lim_{s \rightarrow \infty} a_{\text{mic}}(s, v, v_l). \quad (12.15)$$

Zur Berücksichtigung von $n_a \geq 1$ Vorderfahrzeugen $\alpha - 1, \dots, \alpha - n_a$ werden im einfachsten Fall alle Wechselwirkungsanteile addiert und dabei die jeweils dazwischenliegenden Fahrzeuge ignoriert.¹³ Für die resultierende Beschleunigung des Fahrzeugs α gilt also¹⁴

$$\dot{v}_\alpha = a_{\text{free}}(v_\alpha) + \sum_{\beta=\alpha-n_a}^{\alpha-1} a_{\text{int}}(s_{\alpha\beta}, v_\alpha, v_\beta), \quad s_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{\beta-1} s_{\alpha-j}. \quad (12.16)$$

Da die Fahrzeuglängen für die Dynamik keine Rolle spielen, werden bei der Bestimmung der gegenseitigen Abstände nur die *Nettoabstände* $s_{\alpha\beta}$ zusammengezählt.

Machen Sie sich klar, dass bei Basismodellen, welche die im Abschn. 11.1 dargestellten allgemeinen Plausibilitätskriterien erfüllen, das unmittelbare Vorderfahrzeug nach wie vor den größten Einfluss ausübt.

Die direkte Verwendung dieses Ansatzes hat jedoch den Nachteil, dass durch die aufsummierte Wechselwirkung die Gleichgewichtsabstände zunehmen und sich damit das Fundamentaldiagramm verändert. Um Ansätze mit und ohne Multiantizipation vergleichbar zu machen, sollte das Fundamentaldiagramm aber unverändert bleiben. Deshalb werden alle Wechselwirkungsbeschleunigungen mit einem gemeinsamen (eventuell von der Geschwindigkeit abhängigen) Faktor $c \leq 1$ multipliziert, so dass im Fließgleichgewicht (Geschwindigkeit $v_\alpha = v$, $s_\alpha = s_e(v)$) gilt:

¹² Meist ist es möglich, durch das Vorderfahrzeug hindurch oder an ihm vorbei den Verkehr voraus zu beobachten. Falls dies nicht möglich ist, beispielsweise hinter LKWs oder Lieferfahrzeugen, wird das Fahren meist als unangenehmer empfunden und der Abstand messbar vergrößert.

¹³ In der Physik entspricht diese Annahme einer abschirmungsfreien additiven Überlagerung der Kräfte wie beispielsweise bei der Gravitationskraft oder der elektrostatischen Kraft bei nicht polarisierbaren geladenen Teilchen.

¹⁴ Hier sind die Fahrzeugindizes wesentlich, die bisher der Übersichtlichkeit halber weggelassen wurden; im Falle heterogenen Verkehrs haben nicht nur die Argumente, sondern auch die Beschleunigungsfunktionen selbst einen Index. Dieser wird aber weiterhin weggelassen.

$$c \sum_{j=1}^{n_a} a_{\text{int}}(js_e(v), v, v) = a_{\text{int}}(s_e(v), v, v). \quad (12.17)$$

Für das IDM führt dies (vgl. Übungsaufgabe 12.3) zum geschwindigkeitsunabhängigen Reduktionsfaktor

$$c_{\text{IDM}} = \left(\sum_{j=1}^{n_a} \frac{1}{j^2} \right)^{-1}, \quad (12.18)$$

was selbst bei Berücksichtigung unendlich vieler Vorderfahrzeuge einen endlichen Wert $c_\infty = 6/\pi^2$ ergibt. Als Ergebnis erhält man bei Berücksichtigung der Multiantizipation die Beschleunigungsfunktion

$$a_{\text{multi}}(s_\alpha, v_\alpha, \{s_\beta\}, \{v_\beta\}) = a_{\text{free}}(v_\alpha) + c \sum_{\beta=\alpha-n_a}^{\alpha-1} a_{\text{int}}(s_{\alpha\beta}, v_\alpha, v_\beta). \quad (12.19)$$

Bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Schätzfehlern und zeitlicher Antizipation setzt man für die Argumente die geschätzten und prognostizierten Werte gemäß Gln. (12.13) und (12.14) ein.

Abbildung 12.2 zeigt Simulationen der beiden Standardszenarien „Autobahnverkehr“ und „Stadtverkehr mit LSA“, wenn man alle bisherigen Erweiterungen auf das IDM anwendet. Als auffälligste Veränderung gegenüber dem originalen IDM (vgl. Abb. 11.4) erkennt man im Autobahn-Szenario die größeren und nunmehr realistischen Wellenlängen des Stop-and-Go-Verkehrs und im Stadt-Szenario die raschere Abnahme der maximalen Bremsverzögerungen. Beides wird maßgeblich durch die Multiantizipation verursacht. Die endliche Reaktionszeit und die zeitliche Antizipation heben sich im Wesentlichen auf, während die Schätzfehler bei der simulierten Größenordnung (10% Ungenauigkeit bei der Abstandsschätzung und 0.01 s bei der Schätzung der inversen TTC) noch wenig Auswirkungen haben. Wesentlich größere Schätzfehler haben drastische Auswirkungen, die bis zu Unfällen führen können.

Abbildung 12.1 verdeutlicht, dass die Grenze, bis zu der trotz Unaufmerksamkeits-Spannen Δt oder Reaktionszeiten T_r in Fahrzeugkolonnen noch stabiler Verkehr möglich ist, stark von der Multiantizipation abhängt: Berücksichtigt man statt lediglich das direkte Vorderfahrzeug fünf vorausfahrende Fahrzeuge, ist bei gleicher Stabilität eine etwa doppelt so große effektive Reaktionszeit $T_r + \Delta t/2$ möglich. Mehr als fünf antizipierte Fahrzeuge ändern hingegen die Dynamik nur noch unwesentlich.

Abschließend bleibt noch zu bemerken, dass die Modellerweiterungen mit wenigen neuen Modellparametern formuliert wurden. Abgesehen von der Modellierung der Schätzfehler gibt es nur zwei zusätzliche Parameter: die Reaktionszeit und die Zahl der berücksichtigten Vorderfahrzeuge.

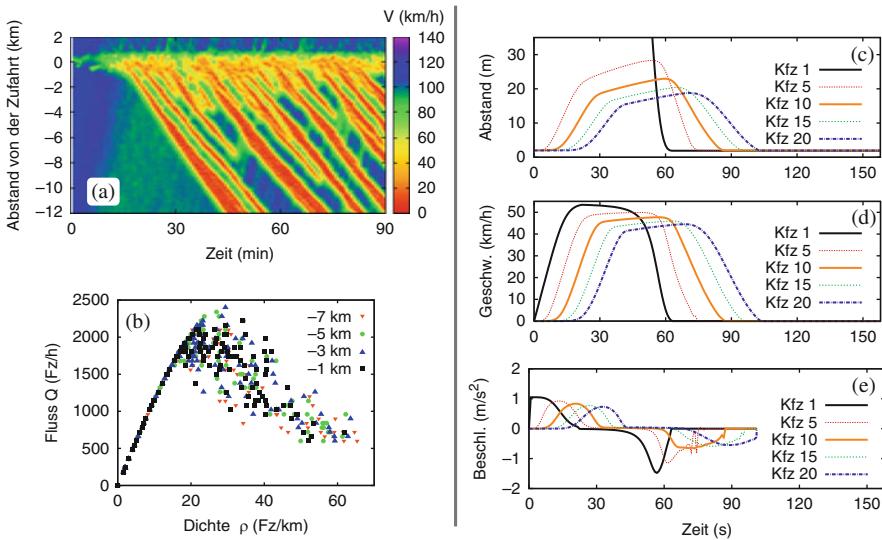


Abb. 12.2 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) unter Berücksichtigung von Reaktionszeiten, Schätzfehlern, zeitlicher Antizipation und Multiantizipation mit Modellparametern gemäß Tabelle 12.1. Basis ist das Intelligent-Driver-Modell (11.11) mit Parametern aus Tabelle 12.2

Tabelle 12.1 Modellparameter der Modellderweiterungen für menschliches Fahrverhalten

Parameter	Typischer Wert
Reaktionszeit T_r	0.6 s
Zahl der berücksichtigten Vorderfahrzeuge n_a	5
Variationskoeffizient der Abstandsschätzung V_s	10%
Schätzfehler der inversen TTC σ_r	0.01 s^{-1}
Größe der Zufallsbeschleunigung σ_a	0.1 m/s^2
Persistenzzeiten der Schätzfehler $\tilde{\tau}$	20 s
Persistenzzeit der Zufallsbeschleunigung $\tilde{\tau}_a$	1 s

12.6 Berücksichtigung weiterer menschlicher Faktoren

Bisweilen werden auch weitere menschliche Eigenschaften modelliert. Die wichtigsten Aspekte sind hier die Berücksichtigung zusätzlicher verkehrsrelevanter Größen und der lokale Verkehrskontext.

Zusätzliche verkehrsrelevante Größen. Vor allem bei zellulären Automaten (siehe Kap. 13) werden *Bremslichter* als weiterer diskreter Zustand betrachtet. Bremst ein Fahrzeug, wird eine binäre Zustandsvariable „Bremslicht“ auf „ein“ gesetzt. Auf diesen Status können die Fahrzeuge im nächsten Zeitschritt durch defensivere Fahrweise bzw. Anpassung der Antizipations-Heuristik reagieren. Analog können im Rahmen von Spurwechselmodellen (Kap. 14) Blinker zur „Kommunikation“ des Spurwechselwunsches oder im Rahmen von „rückwärts“ gerichteter Multiantizipa-

tion die Verwendung der Lichthupe, die das Vorderfahrzeug zum Beschleunigen oder Spurwechseln animieren soll, modelliert werden.

Berücksichtigung des lokalen Verkehrskontextes. Häufig beobachtet man in den empirischen Daten nach längerer Fahrt im Stau einen gewissen „Resignationseffekt“: Das Fahrverhalten wird weniger agil und die Beschleunigungen geringer. Dies führt zu einer weniger effizienten Fahrweise und einer Selbstverstärkung des Staus durch den damit verbundenen *Capacity drop*. Abbildung 12.3 zeigt ein Beispiel: Trotz konstanter Verkehrs nachfrage auf der Hauptstrecke und der Zufahrt wird der Stau mit der Zeit immer dichter.

Umgekehrt kann man durch Berücksichtigung des Verkehrskontextes auch wünschenswerte verkehrsadaptive Fahrstiländerungen wie eine Erhöhung der Agilität im Bereich von Engstellen oder eine defensivere Fahrweise bei Annäherung an Baustellen oder Staus modellieren (Abschn. 20.4). Im weiteren Sinne werden auch lokal gültige Tempolimits, der Wirkungsbereich sonstiger Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen sowie der Unterschied zwischen Stadtverkehr und Autobahnverkehr als lokaler Verkehrskontext aufgefasst.

Die Modellierung eines neuen Kontextes erfolgt durch Änderung der Parameter: entweder auf langen Zeitskalen von mehreren Minuten, beispielsweise in Abhängigkeit von der in den letzten Minuten gefahrenen Durchschittsgeschwindigkeit (*Memory-Effekt*, vgl. Abb. 12.3), oder ereignisorientiert bei Beginn eines Tempolimits, beim Durchfahren eines Engstellenbereichs und bei der Abfahrt von der Autobahn in den Stadtverkehr.

Das Wiedemann-Modell. Ein bekanntes Modell, welches den lokalen Verkehrskontext berücksichtigt, ist das zeitkontinuierliche *Wiedemann-Modell*. Es dient als Basis einiger kommerzieller Verkehrsfluss-Simulatoren. Dieses Modell versucht, psychophysische Aspekte des Fahrverhaltens durch vier diskrete Fahrmodi zu modellieren: (i) Freies Fahren, (ii) Annähern an langsamere Fahrzeuge, (iii) Folgefahrt und (iv) Situationen, welche stärkeres Bremsen erfordern. In jedem dieser vier Fahrzustände k gilt eine unterschiedliche Beschleunigungsfunktion der Form $a_{\text{mic}}^{(k)}(s, v, v_f)$. Die Übergänge zwischen den Zuständen werden von Schwellwertfunktionen ver-

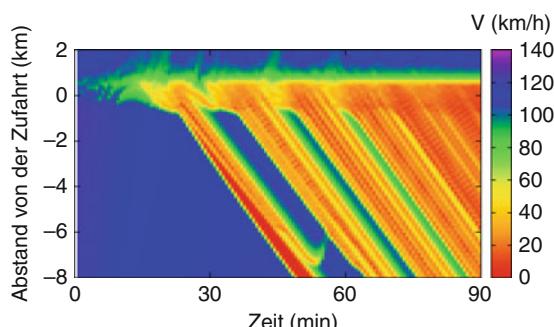


Abb. 12.3 Simulation des Autobahn-Standardszenarios mit dem IDM und *Memory-Effekt*: Während der Fahrt im Stau wird allmählich die Beschleunigung a reduziert und die Folgezeit T erhöht

mittelt, welche ebenfalls von s , v und Δv abhängen. Zusätzlich werden Zufallsbeschleunigungen der in Abschn. 12.3.2 beschriebenen Art überlagert. Trotz seines psycho-physischen Charakters enthält das Modell keine expliziten Reaktionszeiten. Das Modell ist komplex, da vier Beschleunigungsfunktionen $a_{\text{mic}}^{(k)}(s, v, v_l)$ sowie die Schwellwertflächen im Zustandsraum (s, v, v_l) definiert werden müssen. Ferner enthält das Modell viele Parameter.

Übungsaufgaben

12.1 Statistische Eigenschaften des Wiener-Prozesses

Zeigen Sie, dass die stochastische Differentialgleichung (12.9) für die Zufallsgröße $w(t)$ zur Autokorrelationsfunktion (12.8) führt. Verwenden Sie dazu die formale Lösung

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\tau}}} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tilde{\tau}} \xi(t') dt'$$

und werten Sie $\langle w(t)w(t') \rangle$ mit $t' \leq t$ unter Berücksichtigung von $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)$ aus.

12.2 Auswirkung von Schätzfehlern

Gegeben sei eine aus mehreren Fahrzeugen α bestehende Kolonne, welche gleichmäßig mit $v_\alpha = 80 \text{ km/h}$ hinter einem LKW fährt. Wie wirkt sich eine konstante Überschätzung des Abstandes um $V_s w_s = 10\%$ auf den tatsächlichen Gleichgewichtsabstand im Optimal-Velocity-Modell (dreieckiges Fundamentaldiagramm, $s_0 = 0$, $T = 1.4 \text{ s}$, $v_0 = 120 \text{ km/h}$) aus? Wie wirkt sich bei einer Anpassungszeit von $\tau = 0.65 \text{ s}$ eine im Fall $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ konstante Zufallsbeschleunigung von 0.4 m/s^2 aus?

12.3 Multiantizipation beim IDM

Leiten Sie Gl. (12.18) für den Reduktionsfaktor c her und zeigen Sie, dass man anstelle einer Multiplikation der Interaktionsbeschleunigungen mit c auch die Modellparameter s_0 und T mit dem Faktor \sqrt{c} „renormieren“ könnte.

Literaturhinweise

- Green, M.: "How long does it take to stop?" Methodological analysis of driver perception-brake times. *Transp. Hum. Fact.* **2**, 195–216 (2000)
- Treiber, M., Kesting, A., Helbing, D.: Delays, inaccuracies and anticipation in microscopic traffic models. *Physica A* **360**, 71–88 (2006)
- Treiber, M., Helbing, D.: Memory effects in microscopic traffic models and wide scattering in flow-density data. *Phys. Rev. E* **68**, 046119 (2003)
- Treiber, M., Kesting, A., Helbing, D.: Understanding widely scattered traffic flows, the capacity drop, and platoons as effects of variance-driven time gaps. *Phys. Rev. E* **74**, 016123 (2006)
- Wiedemann, R.: Simulation des Straßenverkehrsflusses. In: Heft 8 der Schriftenreihe des IfV. Institut für Verkehrswesen, Universität Karlsruhe, Karlsruhe (1974)

Kapitel 13

Zelluläre Automaten

Das, wobei unsere Rechnungen versagen, nennen wir Zufall.

Albert Einstein

13.1 Allgemeines

Zelluläre Automaten (*cellular automata*, CA) beschreiben dynamische Systeme ausschließlich durch (meist kleine) ganzzahlige Variablen (vgl. Abb. 13.1):

- Der physikalische Ort x_{phys} ist in Zellen der Länge Δx eingeteilt und wird durch den Zellenindex i beschrieben: $x_{\text{phys}} = i \Delta x$. Im Falle mehrerer Fahrstreifen gibt es einen zusätzlichen Spurindex (vgl. Abb. 13.1 und 6.2).
- Wie bei iterierten Abbildungen ist die Zeit in Zeitschritte der Länge Δt eingeteilt. Die physikalische Zeit ergibt sich aus dem ganzzahligen *Zeitindex* t durch $t_{\text{phys}} = t \Delta t$.
- Jede Zelle kann zu einem Zeitpunkt im Zustand $\rho_i(t) = 1$ (besetzt) oder $\rho_i(t) = 0$ (leer) sein. Besetzte Zellen haben im Verkehrskontext meist weitere Zustandsvariablen wie z.B. die Geschwindigkeit. Dabei bedeutet der ganzzahlige Zustand $v_i(t)$, dass am Ort $i \Delta x$ zur Zeit $t \Delta t$ ein Fahrzeug (Mikromodell) bzw. der Verkehrsfluss (Makromodell) die (mittlere) Geschwindigkeit $v_{\text{phys}} = v \Delta x / \Delta t$ hat. Werden makroskopische Modelle als CA formuliert, kann eine Zelle auch mehrfach besetzt sein ($\rho_i(t) > 1$).

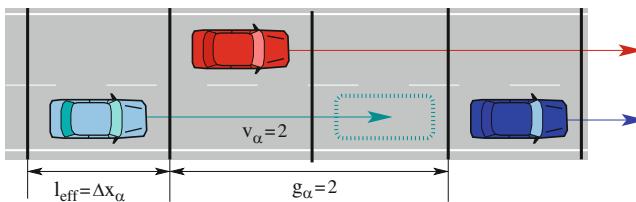


Abb. 13.1 Bei zellulären Automaten ist die Strecke in feste „Zellen“ der Länge Δx eingeteilt

Der Zusammenhang zwischen den bisher betrachteten Modellklassen und der Art der Variablen ist in Tabelle 13.1 zusammengefasst.

Tabelle 13.1 Zusammenhang von Modellklassen und Variablen

Modellklasse	Zeit	Ort	Zustandsvariable
Zeitkontinuierliche Modelle	kontinuierlich	kontinuierlich	kontinuierlich
Iterierte Abbildungen	diskret	kontinuierlich	kontinuierlich
Cell-Transmission-Modell	diskret	diskret	kontinuierlich
Zellulärer Automat	diskret	diskret	diskret

Allgemeine Modellgleichungen. Als allgemeine Modelle zur Erzeugung komplexer Muster wurden CA bereits um 1940 formuliert.¹ Die ursprüngliche Formulierung ist zellenbasiert und entspricht formal einem makroskopischen Verkehrsmodell:

$$\begin{aligned}\rho_i(t+1) &= \rho_{\text{CA}}(\{\rho_j(t)\}, \{Z_j(t)\}, \xi(t)), \\ Z_i(t+1) &= Z_{\text{CA}}(\{\rho_j(t)\}, \{Z_j(t)\}, \xi(t)).\end{aligned}\quad (13.1)$$

Hierbei hängen die rechten Seiten meist nur von den Besetzungen $\{\rho_j\}$ und Zuständen $\{Z_j\}$ weniger Zellen j in der Nachbarschaft von i ab. Die Wechselwirkung ist also, wie bei den anderen Verkehrsflussmodellen, *lokal*. Bei Verkehrsflussmodellen hat $Z_i(t)$ meist die Bedeutung einer Geschwindigkeit V_i .² Ferner sind verkehrsbezogene CA fast immer stochastische Modelle mit einem Zufallsanteil $\xi(t)$.

Mikroskopische CA. Meist werden CA für die Formulierung mikroskopischer Modelle verwendet. Anstelle der allgemeinen *zellenbezogenen* Aktualisierungsgleichung (13.1) ist dann eine *fahrzeugbezogene* Formulierung vorteilhafter. In dieser Formulierung werden nicht alle Zellen i aktualisiert, sondern nur die Positionen $i_\alpha = x_\alpha$ besetzter Zellen bzw. Fahrzeuge α :

$$\begin{aligned}v_\alpha(t+1) &= v_{\text{CA}}(\{x_{\alpha'}(t)\}, \{v_{\alpha'}(t)\}, \{z_{\alpha'}(t)\}, \xi(t)), \\ x_\alpha(t+1) &= x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1), \\ z_\alpha(t+1) &= z_{\text{CA}}(\{x_{\alpha'}(t+1)\}, \{v_{\alpha'}(t+1)\}, \{z_{\alpha'}(t)\}).\end{aligned}\quad (13.2)$$

Die Zellenlänge Δx wird in den meisten Fällen mit der effektiven Fahrzeulgänge l_{eff} identifiziert. Es gibt aber auch CA, bei denen ein Fahrzeug mehrere Zellen besetzt (siehe Abschn. 13.3). Fast immer sind die Wechselwirkungen lokal, d.h. die rechten Seiten hängen nur von wenigen Fahrzeugen $\{\alpha'\}$ in der Umgebung des Fahrzeugs α ab.³ Die Zustandsvariablen z_α und die dritte Gleichung in (13.2) sind nur notwendig, wenn die Fahrzeuge neben der Position und der Geschwindigkeit weitere Zustands-

¹ Die Anwendung auf die Verkehrsflussmodellierung erfolgte erstmals mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell im Jahr 1992 (siehe Abschn. 13.2).

² Streng genommen könnte man auf die Besetzungszahl ρ_i verzichten und alles durch einen erweiterten Zustand Z_i ausdrücken, der Besetzungen und Geschwindigkeiten enthält (z.B. $Z_i = (V_{\max} + 1)\rho_i + V_i$). Dies wäre die Formulierung eines CA in „Reinform“.

³ Ohne Multiantizipation sind dies nur das eigene Fahrzeug ($\alpha' = \alpha$) und das Vorderfahrzeug ($\alpha' = \alpha - 1$).

variablen besitzen. Ein Beispiel ist $z = (f, b)$ mit $f = 0$ bzw. 1 für normale oder defensive Fahrweise und $b = 0$ bzw. 1 für aus- oder eingeschaltete Bremslichter.

Machen Sie sich klar, dass sich, abgesehen von den möglichen Werten der Variablen, die fahrzeugbezogene Formulierung eines CA nicht grundsätzlich von einem als iterierte Abbildung formulierten Fahrzeugfolgemodell unterscheidet (auch Fahrzeugfolgemodelle können zusätzliche Zustandsvariablen z_α aufweisen). Pro Zeitschritt werden die Fahrzeuge allerdings um die Strecke $v_\alpha(t+1)$ und nicht um $\frac{1}{2}(v_\alpha(t) + v_\alpha(t + \Delta t))\Delta t$ fortbewegt. Warum nimmt man nicht den „genauer“ Mittelwert aus alter und neuer Geschwindigkeit?

13.2 Nagel-Schreckenberg-Modell

Das erste, bekannteste und einfachste CA-Verkehrsmodell ist das *Nagel-Schreckenberg-Modell* (NSM). In seiner Grundform gilt es für einen Fahrstreifen und ist durch folgende *Update-Gleichungen* definiert (Abb. 13.2):

1. Deterministisches Beschleunigen bzw. Bremsen in Abhängigkeit vom Nettoabstand bzw. von der Zahl der leeren Zellen $g_\alpha = x_{\alpha-1} - x_\alpha - 1$ (*gap*) und der Wunschgeschwindigkeit v_0 :

$$v_\alpha^*(t+1) = \min(v_\alpha(t) + 1, v_0, g_\alpha). \quad (13.3)$$

2. „Trödeln“ als spontanes, unbegründetes Bremsen mit einer gewissen „Trödelwahrscheinlichkeit“ p :

$$v_\alpha(t+1) = \begin{cases} \max(v_\alpha^*(t+1) - 1, 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ v_\alpha^*(t+1) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13.4)$$

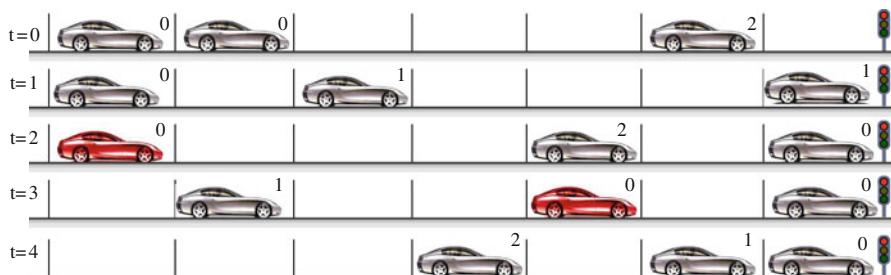


Abb. 13.2 Veranschaulichung der Fortbewegungsregeln des Nagel-Schreckenberg-Modells für $v_0 = 2$. Die Zahlen in den Kästchen sind die im vergangenen Zeitpunkt realisierten Geschwindigkeiten. Die Fahrer der roten Fahrzeuge haben im letzten Zeitschritt „getrödelt“

3. Fortbewegen:

$$x_\alpha(t+1) = x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1). \quad (13.5)$$

Verdeutlichen Sie sich die Bedeutung der Modellgleichungen des NSM aus Sicht eines Fahrers: Wie hoch ist die maximale Beschleunigung und die maximale Verzögerung? Reagieren die modellierten Fahrer auf Geschwindigkeitsdifferenzen? Ist das Modell unfallfrei? Wie groß ist die maximale Dichte?

Die beim NSM üblicherweise verwendete Diskretisierung ist $\Delta x = 7.5 \text{ m}$ (vgl. Tabelle 13.2). Dies entspricht in etwa der effektiven Fahrzeuglänge l_{eff} , also der physikalischen Länge zuzüglich eines Mindestabstandes. Die Zeitdiskretisierung von einer Sekunde lässt nur eine sehr grobe Modellierung der Dynamik zu, da Geschwindigkeiten nur Vielfache von 7.5 m/s und Beschleunigungen nur Vielfache von 7.5 m/s^2 annehmen können.

Abbildung 13.3 stellt die Simulationsergebnisse der zwei Standardsituationen „Autobahn mit Zufahrt“ und „Stadtverkehr mit LSA“ dar, anhand derer auch die Modelle der beiden vorhergehenden Kapitel getestet wurden. Aus makroskopischer Sicht zeigt das Autobahn-Szenario einige nachvollziehbare Ergebnisse: Das Geschwindigkeitsfeld, Teilbild (a), zeigt einen Stau, der durch die bei Streckenkilometer Null gelegene Einfahrt verursacht wird. Ferner breiten sich Strukturen im stromaufwärts entstehenden Stau entgegen der Fahrtrichtung ungefähr mit der korrekten Geschwindigkeit von etwa 15 km/h aus. In Übungsaufgabe 13.5 wird gezeigt, dass die negativste Ausbreitungsgeschwindigkeit durch

$$c_{\text{cong}}^{\text{NSM}} = -(1-p) \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (13.6)$$

gegeben ist. Man kann also über die Wahl des Trödelfaktors p (und über Δx und Δt) die Ausbreitungsgeschwindigkeiten kalibrieren. Allerdings sind in Abb. 13.3a auch betragsmäßig deutlich kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeiten zu sehen, die letztlich dazu führen, dass der Stau im NSA nicht aus langlebigen Stauwellen, sondern aus kurzlebigen statistischen Strukturen besteht. Ferner entstehen spontan einige

Tabelle 13.2 Modellparameter des Nagel-Schreckenberg-Modells und einer *Slow-to-Start*-Erweiterung mit zusätzlichem Parameter p_0 (siehe Abschn. 13.3)

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Zellenlänge $\Delta x = l_{\text{eff}}$	7.5 m	7.5 m
Zeitschrittweite Δt	1 s	1 s
Wunschgeschwindigkeit v_0	5	2
Trödelwahrscheinlichkeit p	0.2	0.1
Trödelwahrscheinlichkeit p_0	0.4	0.2

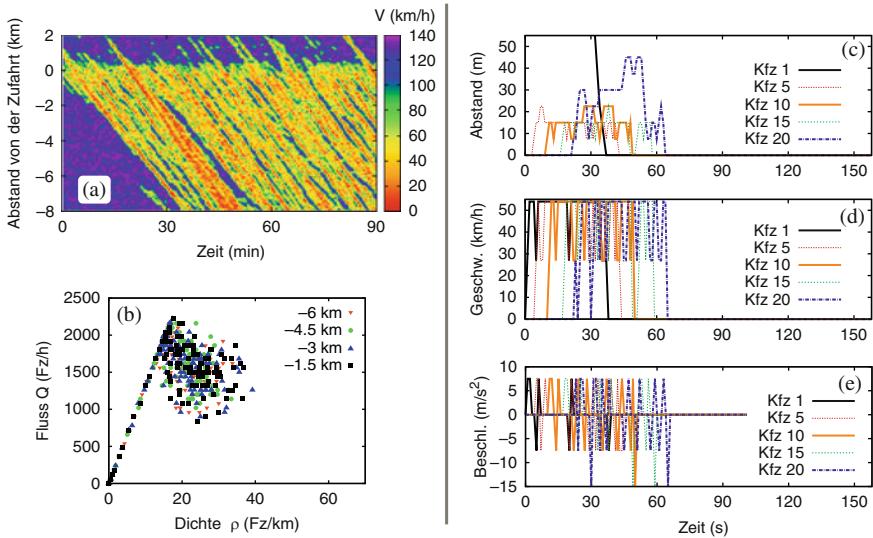


Abb. 13.3 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell und den Parametern aus Tabelle 13.2

kurzlebige, wie Stauwellen aussehende Strukturen an Stellen, wo diese eigentlich nicht auftreten sollten: im freien Verkehr stromabwärts der Einfahrt ($x > 0$) sowie stromaufwärts vor der eigentlichen Stauentstehung (beispielsweise bei $x \approx -6 \text{ km}$ zur Zeit $t \approx 20 \text{ min}$). Diese Strukturen stellen *Artefakte* des Modells dar.

Obwohl die Zufallskomponente des Modells immer wirksam ist, zeigt das Fundamentaldiagramm in Abb. 13.3b stärkere Streuungen nur im gebundenen Verkehr – in Übereinstimmung mit realen Verkehrsdaten. Erklären lässt sich dies dadurch, dass die Zufallskomponente für ungebundenen Verkehr (linker Zweig des Fundamentaldiagramms) nur Geschwindigkeitsschwankungen der Standardabweichung $p(1-p)\Delta x/\Delta t$ bewirkt, während Wechselwirkungen abrupte Schwankungen im gesamten Geschwindigkeitsbereich verursachen.

Man beachte, dass man aufgrund der stochastischen Natur des NSM das Fundamentaldiagramm nicht anhand eines Fließgleichgewichts formulieren kann. Vielmehr muss man bei gegebener globaler Dichte Erwartungswerte von Geschwindigkeiten berechnen (siehe Übungsaufgaben 13.4 und 13.5).

Die Simulation des Stadtverkehrs (Abb. 13.3c–e) zeigt die Grenzen des NSM: Aufgrund der groben Diskretisierung – nur drei Geschwindigkeits- und vier Beschleunigungswerte sind möglich – ergeben die Zeitreihen von Abstand, Geschwindigkeit und Beschleunigung kein realistisches Bild. Trotz seiner Eigenschaft als mikroskopisches Modell ist das NSM also nur für die Simulation der makroskopischen Dynamik einsetzbar. Meist wird es daher nicht direkt verwendet, sondern dient als Basismodell für Erweiterungen. Ein einfaches und ein komplexes Modell werden im nächsten Abschnitt behandelt.

13.3 Verfeinerte Modelle

Barlovic-Modell. Eine einfache Erweiterung ist die erstmals von Barlovic formulierte Einführung einer *Slow-to-Start*-Regel. Hierbei wird die Verzögerungswahrscheinlichkeit in Gl. (13.4) geschwindigkeitsabhängig formuliert:

$$p(v) = \begin{cases} p & v > 0, \\ p_0 > p & v = 0. \end{cases} \quad (13.7)$$

Dies modelliert eine einfache Form von Kontextabhängigkeit: Stehen die Fahrer im Stau, werden sie träger und fahren zögerlicher an. Dadurch verstärken sich einmal entstandene Stauwellen selbst, wodurch das Problem der kurzlebigen Stauwellen des NSM behoben werden soll.

Das Geschwindigkeitsfeld der Autobahnsimulation in Abb. 13.4 zeigt tatsächlich langlebige Stauwellen, welche eher der Realität entsprechen. Allerdings gibt es auch hier aus freiem Verkehr ohne Störung entstehende „Stauwellen aus dem Nichts“ im Bereich stromabwärts der Zufahrt $x > 0$.

KKW-Modell. Als Beispiel eines komplexen CA mit sehr feiner Zellenaufteilung kann das von Kerner, Klenov und Wolf formulierte KKW-Modell dienen. In diesem Modell sind die Zellen nur noch 0.5 m lang, wodurch ein einziges Fahrzeug mehrere Zellen besetzt (meist wird mit einer effektiven Fahrzeulgänge von 15 Zellen simuliert, entsprechend $l_{\text{eff}} = 7.5$ m wie im NSM). Als Zeitschrittweite wird, wie im NSM, meist $\Delta t = 1$ s angenommen. Die sich dadurch ergebenden Geschwindigkeitsstufen von $0.5 \text{ m/s} = 1.8 \text{ km/h}$ und Beschleunigungsstufen von 0.5 m/s^2 erlauben eine differenziertere und realistischere Simulation dieser Größen als mit dem NSM. Bei einer Wunschgeschwindigkeit von $v_0 = 120 \text{ km/h}$ im Autobahn-Szenario ergeben sich 67 Geschwindigkeitsstufen, so dass sich das KKW-Modell de facto einem als iterierte Abbildung formulierten Fahrzeugfolgemodell annähert.

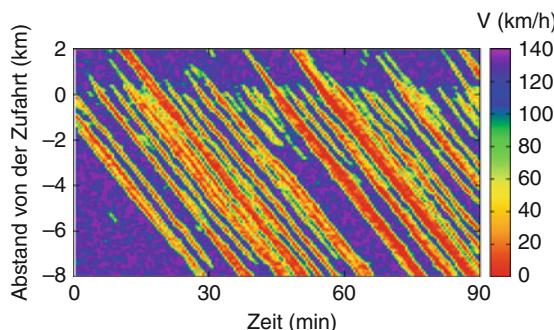


Abb. 13.4 Simulation des Autobahn-Standardszenarios für das Barlovic-Modell mit Parametern aus Tabelle 13.2

Die Modellgleichungen würden den Rahmen dieses Buches sprengen und werden daher nur qualitativ beschrieben.⁴ Im Gegensatz zu den bisherigen CA hängt das Fahrverhalten des KKW-Modells von der Geschwindigkeitsdifferenz ab. Ferner gibt es, im Gegensatz zu allen bisher vorgestellten Modellen, bei gebundenem Verkehr einen Indifferenzbereich des Abstandes: Bei gleichmäßiger Folgen unterhalb der Wunschgeschwindigkeit ($v = v_l < v_0$) finden im deterministischen Teil des Modells keine Beschleunigungen statt, sofern die Nettozeitlücke zwischen $T_{\min} = \Delta t$ und $T_{\max} = kT_{\min}$ (mit dem Modellparameter k für den Indifferenzbereich, siehe unten) liegt. Das Modell besitzt also auch ohne Zufallsanteile kein eindeutiges Fundamentaldiagramm. Wie bei den anderen CA wird der deterministische Teil durch eine Zufallsbeschleunigung überlagert. Diese ist hier in Abhängigkeit von v und v_l formuliert und enthält fünf verschiedene Wahrscheinlichkeiten als Modellparameter.

Die Simulation des Standardszenarios „Autobahnverkehr“ in Abb. 13.5 zeigt ein deutlich realistischeres Verhalten als das NSM, vor allem im Fluss-Dichte-Diagramm und im Bereich der ab einer Simulationszeit $t = 30$ min entstehenden Stop-and-Go-Wellen. Allerdings sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten im gleichmäßigen gebundenen Zustand davor (strukturloser heller Bereich

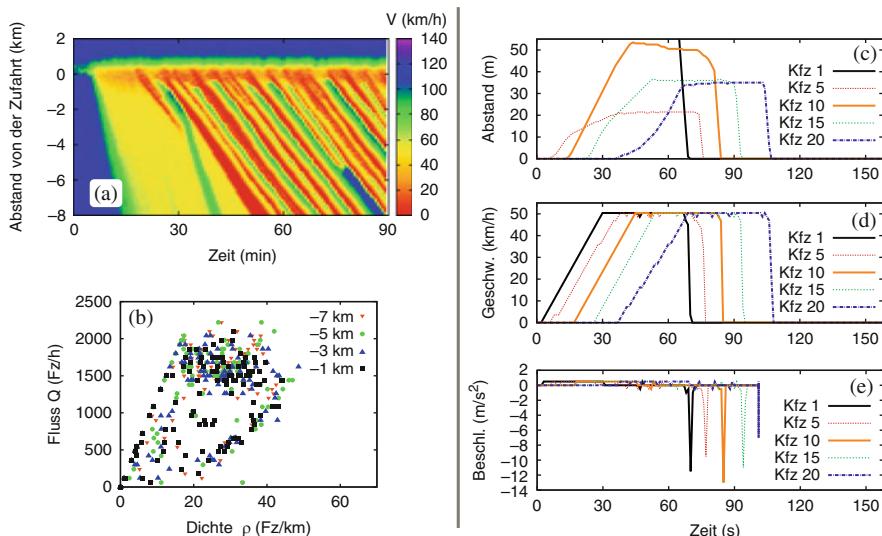


Abb. 13.5 Simulation der beiden Standardszenarien „Autobahn“ (links) und „Stadtverkehr“ (rechts) mit dem KKW-Modell. Die Modellparameter sind im Wesentlichen der Literatur entnommen. Für den Autobahnverkehr wurde die Wunschgeschwindigkeit auf $v_0 = 67$ (entspricht 120 km/h) verändert. Für den Stadtverkehr wurden die v_0 auf 28, sowie der Modellparameter v_p auf den Wert 14 gesetzt

⁴ Für Details siehe S. 411ff. in Kerner (2004).

im Geschwindigkeitsfeld, auch „synchronisierter Verkehr“ genannt) betragsmäßig deutlich zu groß.⁵

Die Simulation des Stadtverkehrs in Abb. 13.5 verdeutlicht die Wirkung der feineren Diskretisierung. Man kann nun auch in sinnvoller Weise Geschwindigkeiten und Beschleunigungen einzelner Fahrzeuge modellieren. Allerdings sind die Bremsverzögerungen vor dem Ampelstopp viel zu hoch.

13.4 Vergleich zellulärer Automaten mit Fahrzeugfolgemodellen

Bei Fahrzeugfolgemodellen sind Ort, Zeit und Geschwindigkeit kontinuierliche Größen, bei CA sind dagegen alle Größen diskret (vgl. Tabelle 13.1). Lediglich der Fahrstreifenindex ist in beiden Kategorien diskret.

CA sind konzeptionell einfacher und bei komplexen Infrastrukturen meist schneller zu implementieren als kontinuierliche Modelle. Ferner haben die meisten CA gegenüber zeitkontinuierlichen Mikromodellen einen Geschwindigkeitsvorteil bei der Ausführung, vor allem bei Berücksichtigung mehrerer Fahrstreifen und bei der Simulation von Fußgängerströmen. Für die neueren, detaillierteren Modelle nimmt dieser Vorteil jedoch wegen der feineren Diskretisierung und zusätzlicher Regeln um etwa eine Zehnerpotenz ab und kommt damit in den Bereich von Fahrzeugfolgemodellen.⁶

Die CA-Modellparameter sind häufig wenig anschaulich oder haben unrealistische Werte. Ferner zeigen die meisten CA ohne ad-hoc hinzugefügte stochastische Terme (wie dem „Trödeln“ im NSM) Artefakte oder extreme Abhängigkeiten von Modellparametern und Anfangsbedingungen. Diese mangelnde *Robustheit* macht ein Modell für viele Anwendungen unbrauchbar. Wegen der groben Diskretisierung eignen sich einfache CA wie das NSM trotz ihrer Formulierung als Mikromodell nicht zur Modellierung der Dynamik einzelner Fahrzeuge. Auch verfeinerte Modelle, die schon eher den Charakter von Fahrzeugfolgemodellen haben, zeigen teilweise unrealistisches Verhalten, beispielsweise beim Annähern an langsame oder stehende Hindernisse. Sie eignen sich deshalb nicht zur Simulation verschiedener Fahrstile oder zur simulationsgestützten Bewertung der Wirkung von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen (siehe Kap. 20).

Da sich auf großen Skalen viele Details „wegmitteln“, ist eine Anwendung von CA bei der modellgestützten Verkehrszustandsprognose (vgl. Kap. 17) sinnvoll und wird bereits realisiert (siehe www.autobahn.nrw.de). Allerdings konkurrieren CA in diesem Bereich mit den makroskopischen Verkehrsflussmodellen, vor allem dem Cell-Transmission-Modell.

⁵ Dieser Artefakt verschwindet allerdings, wenn man den (die relative Größe des Indifferenzbereichs beschreibenden) Parameter k vom Literaturwert 2.55 auf $k = 2$ reduziert.

⁶ Zudem nimmt durch immer höhere Rechenleistungen der Computer die Bedeutung der Ausführungsgeschwindigkeit ab.

Übungsaufgaben

13.1 Dynamische Eigenschaften des Nagel-Schreckenberg-Modells

Welchen tatsächlichen Wunschgeschwindigkeiten entsprechen die in Tabelle 13.2 angegebenen Werte von v_0 ? Welche Zeit vergeht bei Verwendung der Autobahnparameter für eine freie Beschleunigung „von Null auf hundert“ (km/h) (i) im deterministischen Modell $p = 0$ und (ii) im Mittel im stochastischen Modell mit $p = 0.4$?

13.2 Annäherung des NSM an eine rote Ampel

Wie würde sich ein gemäß dem deterministischen NSM ($p = 0$) agierender Fahrer auf einer ansonsten freien Strecke einer roten Ampel annähern?

13.3 Fundamentaldiagramm des deterministischen NSM

Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm des deterministischen NSM für $v_0 = 2$ (Stadtverkehr) und $v_0 = 5$ (Autobahn). Wie hoch sind, in physikalischen Einheiten, die Wunschgeschwindigkeit, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen im gebundenen Verkehr, die Folgezeit und die maximale Dichte? Welche qualitativen Änderungen sind für das stochastische Modell („Trödelfaktor“ $p > 0$) zu erwarten?

13.4 Makroskopische Wunschgeschwindigkeit

Zeigen Sie, dass bei vollständig freiem Verkehr (keine Wechselwirkungen) die maximale makroskopische (d.h. über viele Fahrzeuge und/oder die Zeit gemittelte) Geschwindigkeit $V = \langle v_\alpha \rangle$ des NSM in physikalischen Einheiten gegeben ist durch

$$V_{\max} = \frac{(v_0 - p)\Delta x}{\Delta t}.$$

13.5 Stau-Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die negativste Ausbreitungsgeschwindigkeit wird beim Anfahren aus einer stehenden Warteschlange ($\rho_{\max} = 1$) erreicht. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Übergangs Warteschlange → Ausfluss aus dem Stau in physikalischen Einheiten durch Gl. (13.6) gegeben ist.

Literaturhinweise

Von Neumann, J., Burks, A.: Theory of self-reproducing automata. University of Illinois Press, Urbana, IL (1966)

Chowdhury, D., Santen, L., Schadschneider, A.: Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. Phys. Rep. **329**, 199–329 (2000)

Maerivoet, S., DeMoer, B.: Cellular automata models of road traffic. Phys. Rep. **419**, 1–64 (2005)

Nagel, K., Schreckenberg, M.: A cellular automaton model for freeway traffic. J. Phys. I France **2**, 2221–2229 (1992)

Barlovic, R., Santen, L., Schadschneider, A., Schreckenberg, M.: Metastable states in cellular automata for traffic flow. Euro. Phys. J. **5**, 793 (1998)

Kerner, B.S.: The physics of traffic: empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory. Springer, New York, NY (2004)

Kapitel 14

Fahrstreifenwechsel und andere diskrete Entscheidungen

Phantasie ist wichtiger als Wissen, denn Wissen ist begrenzt.

Albert Einstein

14.1 Übersicht

Aus Fahrersicht gibt es drei unmittelbare, die Dynamik beeinflussende Aktionen: Beschleunigen, Bremsen und Lenken. Die Dynamik des Lenkens ist eher im Bereich der Fahrzeugdynamik und damit bei den submikroskopischen Modellen angesiedelt (vgl. Tabelle 1.1). Bei der Modellierung der *Verkehrsdynamik* wird deshalb eine Stufe höher angesetzt und es werden direkt die verkehrlich relevanten Auswirkungen wie Spurwechseln oder Abbiegen modelliert. Auf dieser Ebene ist der Zustandsraum fast immer diskret. Beispielsweise werden nur diskrete Fahrstreifenindizes unterschieden, während die Wechsel selbst als instantan angenommen werden.¹

In der Längsdynamik gibt es neben den kontinuierlichen, durch Beschleunigungsfunktionen wie $a_{mic}(s, v, v_l)$ modellierten Aktionen diskrete Entscheidungssituationen. Nähert man sich einer LSA, die von Grün auf Gelb springt, muss man sich entscheiden, ob man anhält oder weiterfährt. Außerdem beeinflussen Fahrstreifenwechsel, vor allem wenn sie zum Zweck des Überholens durchgeführt werden, nicht nur die Querdynamik, sondern ebenso die Längsdynamik. Allgemein kann man bei diskreten Entscheidungen im Verkehr mehrere Ebenen unterscheiden:

1. Die *strategische Phase* wie Zielwahl, Verkehrsmittelwahl und Routenwahl ist Gegenstand der Verkehrsplanung (vgl. Tabelle 1.1).
2. Die *taktische Phase* beinhaltet antizipatorische Maßnahmen wie Beschleunigen, Bremsen oder eine Lücke schaffen mit dem Ziel, eine bestimmte Aktion wie Abbiegen oder einen Fahrstreifenwechsel zu erleichtern bzw. zu ermöglichen. Dies

¹ In der Realität liegen typische Zeitspannen für Fahrstreifenwechsel in der Größenordnung von wenigen Sekunden. In vielen Simulatoren wird der Fahrstreifenwechsel grafisch zwar kontinuierlich dargestellt, bezüglich der Entscheidungslogik jedoch ein instantaner Fahrstreifenwechsel zu Beginn des visualisierten Fahrstreifenwechsels angenommen.

kann auch ein fremdes Fahrzeug betreffen, vor allem bei erzwungenen Wechseln in gestauten Situationen (Reißverschlussprinzip).

3. Die *operative Entscheidung* legt fest, welche von mehreren diskreten Alternativen im nächsten Zeitschritt verfolgt wird.
4. In der *Realisierungsphase* wird die Konsequenz der operativen Entscheidung modelliert, beispielsweise das Anhalten bei Gelb an einer Ampel.

Die Darstellung in diesem Kapitel beschränkt sich auf die *operative Entscheidungsebene*.² Es wird ein einheitlicher, auf Nutzenfunktionen basierender Modellierungsansatz beschrieben. Die *Nutzenfunktionen* sind im Wesentlichen durch die (zunächst hypothetischen) Beschleunigungen der zugeordneten Realisierungsphasen definiert. Dadurch wird einerseits die Kompatibilität des Längsdynamikmodells mit dem Entscheidungsmodell gewährleistet, andererseits ist der Ansatz ökonomisch bezüglich der Zahl der Annahmen und Modellparameter: Entspricht das Beschleunigungsmodell beispielsweise einem aggressiven Fahrer, überträgt sich dieser Fahrstil in natürlicher Weise auf das Spurwechsel- oder Abbiegeverhalten. Ebenso werden antizipative Elemente des Beschleunigungsmodells übernommen. Naturgemäß sind die Grenzen dieses Ansatzes dann erreicht, wenn taktische Maßnahmen und *Kooperation* unabdingbar sind wie bei erzwungenen Fahrstreifenwechseln in gebundenem Verkehr.

14.2 Allgemeines Entscheidungsmodell

Es wird angenommen, dass den Fahrern in einem konkreten Zeitschritt zwei oder mehr Entscheidungsmöglichkeiten k zur Verfügung stehen, beispielsweise ein Wechsel nach links, nach rechts oder kein Wechsel, aber auch die Alternativen zwischen Abbiegen auf eine Vorfahrtsstraße oder Warten, bis die Straße frei wird. Ferner wird angenommen, dass die Fahrer die Konsequenz ihrer Entscheidung in Form der dann möglichen Beschleunigungen des eigenen Fahrzeugs sowie aller beteiligten Fahrzeuge antizipieren können. Die Beschleunigungen werden mit dem zugrundeliegenden Längsdynamikmodell (Fahrzeugfolgemodell, aber auch ein zellulärer Automat ist möglich) berechnet und dienen zur Formulierung folgender, die Entscheidungsgrundlage ausmachender Kriterien:

Sicherheitskriterium. Keiner der beteiligten Fahrer β (einschließlich des Entscheiders α) darf als Konsequenz der Entscheidung zu Alternative k gezwungen sein, ein sicherheitskritisches Bremsmanöver durchzuführen:

$$a_{\text{mic}}^{(\beta,k)} > -b_{\text{safe}}. \quad (14.1)$$

² In komplexen Modellen, die den Kern kommerzieller Simulationssoftware bilden, wird die taktische Phase ebenfalls berücksichtigt. Die Beschreibung der Modellierung der teils subtilen Wechselwirkungen zwischen Beschleunigung und Fahrstreifenwechsel würde allerdings den Rahmen dieses Buches sprengen.

Der Modellparameter b_{safe} bezeichnet dabei die gerade noch zulässige Bremsverzögerung. Sie liegt in der Größenordnung der komfortablen Bremsverzögerung des IDM (um 2 m/s^2).

Anreizkriterium. Von allen sicheren Alternativen k' wird vom Entscheider α diejenige gewählt, welche den höchsten individuellen Nutzen (*utility*) U hat:

$$k = \arg \max_{k'} U^{(\alpha, k')}. \quad (14.2)$$

Wie bei den meisten Modellen diskreter Entscheidungen liegt dem Anreizkriterium (engl. *incentive criterion*) die Annahme des rationalen Entscheiders bzw. Nutzenmaximierers (*Homo Oeconomicus*) zugrunde. Im einfachsten Fall ist der Nutzen direkt durch die Beschleunigungsfunktion gegeben,³

$$U^{(\alpha, k)} = a_{\text{mic}}^{(\alpha, k)}. \quad (14.3)$$

Je nach Situation kommt aber noch eine Schwelle hinzu, die verhindert, dass man wegen marginaler Vorteile eine andere Alternative als jene im letzten Zeitschritt wählt. Diese Schwelle verhindert beispielsweise ständige Spurwechsel oder unentzlossenes Zurücknehmen einmal getroffener Entscheidungen. Auch Verkehrsregeln wie ein Rechtsfahrgebot können in die Nutzenfunktion einfließen. Schließlich kann man in der Nutzenfunktion auch die nicht vom Sicherheitskriterium erfassten Belange anderer Fahrer berücksichtigen, indem man sie durch einen *Höflichkeitsfaktor* einführt (Abschn. 14.3.3).

14.3 Fahrstreifenwechsel

Die allgemeine Situation bei einem Fahrstreifenwechsel ist in Abb. 14.1 dargestellt. Betrachtet wird das dunklere Fahrzeug auf dem mittleren Fahrstreifen mit aktueller Geschwindigkeit v_α . Die drei Alternativen sind „Wechsel nach rechts“, „kein Wechsel“ und „Wechsel nach links“. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden nur die beiden letzten Alternativen betrachtet.

14.3.1 Sicherheitskriterium

Das Sicherheitskriterium bezieht sich auf die Beschleunigung \hat{a}_{hz} des hinteren Fahrzeugs (Index h) auf der Zielspur (Index z , vgl. Abb. 14.1). Für den betrachteten hypothetischen Wechsel (Größen nach dem Wechsel werden mit einem Dach ver-

³ In Modellen der diskreten Wahltheorie wie dem *Multinomial-Logit-Modell* setzt sich der Nutzen meist aus einem deterministischen Nutzen und einem Zufallsnutzen zusammen. Bei stochastischen Beschleunigungsmodellen hat dies in der Zufallsbeschleunigung eine direkte Entsprechung.

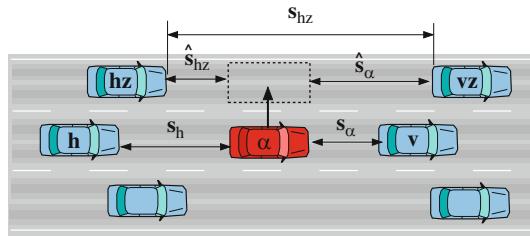


Abb. 14.1 Illustration der Größen bei einem Spurwechsel nach links. Die Größen mit Dach gelten nach dem (möglicherweise nur hypothetischen) Wechsel

sehen) auf den linken Fahrstreifen ist also das wechselnde Fahrzeug α das neue Führungsfahrzeug. Damit wird Gl. (14.1) zu

$$\hat{a}_{hz} = a_{\text{mic}}(\hat{s}_{hz}, v_{hz}, v_\alpha) > -b_{\text{safe}} \quad \text{Sicherheitskriterium.} \quad (14.4)$$

Der Modellparameter b_{safe} gibt die gerade noch zulässige Bremsverzögerung an⁴ (vgl. Übungsaufgabe 14.2). Im Falle heterogenen Verkehrs mit individuellen Beschleunigungsfunktionen wird die Beschleunigung \hat{a}_{hz} des hinteren Fahrzeugs auf der Zielpur mit den Parametern dieses Fahrzeugs bzw. Fahrers berechnet.⁵

14.3.2 Anreizkriterium egoistischer Fahrer

Bei den meisten Modellen wird das Anreizkriterium ausschließlich aus Fahrersicht formuliert. Die Vor- und Nachteile anderer Fahrer bleiben unberücksichtigt. Auch unter dieser vereinfachenden Annahme hängt die Modellierung der Nutzenfunktion stärker als bei den Beschleunigungsmustern von länderspezifischen Regelungen und Fahrgewohnheiten ab. Auf europäischen Autobahnen ist vor allem das *Rechtsüberholverbot* relevant.⁶ Einfacher wird die Modellierung im Stadtverkehr oder auf amerikanischen Autobahnen, da in diesen Fällen die Fahrstreifenwechsel im Wesentlichen symmetrisch ablaufen.⁷ Das egoistische Anreizkriterium für den

⁴ Damit die Implementierung ohne weitere Fallunterscheidung auch Wechsel verhindert, wenn sich auf der Zielpur auf nahezu gleicher Höhe ein Fahrzeug befindet (negativer Nettoabstand), muss die Beschleunigungsfunktion $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ für diesen Fall eine betragsmäßig sehr hohe negative „Strafbeschleunigung“ ergeben.

⁵ Man mag einwenden, dass man – in Ermangelung der Fähigkeit zum Gedankenlesen – die Beschleunigungsfunktion des Hintermanns gar nicht kennt. Der Augenschein lässt aber meist eine grobe Abschätzung zu. Zumindest kann man LKW von PKW und normale von offensichtlich „sportlichen“ Fahrern unterscheiden.

⁶ Dies wird hier nicht weiter behandelt. Wir verweisen auf die Literatur (Kesting et al., 2007).

⁷ Auch auf amerikanischen Autobahnen sollten die langsameren Fahrzeuge rechts fahren. De facto wird dies aber nicht streng eingehalten und auch rechts überholt.

Tabelle 14.1 Parameter der Spurwechselmodellierung

Parameter	Typischer Wert
Sichere Verzögerung b_{safe}	2 m/s^2
Wechselschwelle Δa	0.1 m/s^2
Asymmetriebeitrag (Rechtsfahrgesetz) a_{bias}	0.3 m/s^2
Höflichkeitsfaktor (Wechselmodell MOBIL) p	0 bis 1

symmetrischen Fall lautet

$$\hat{a}_\alpha - a_\alpha > \Delta a, \quad \text{mit } a_\alpha = a_{\text{mic}}(s_\alpha, v_\alpha, v_l) \text{ und } \hat{a}_\alpha = a_{\text{mic}}(\hat{s}_\alpha, v_\alpha, v_{vz}). \quad (14.5)$$

Die Wechselschwelle Δa verhindert unnötige Spurwechsel, welche nur einen marginalen Vorteil bringen (vgl. Tabelle 14.1). Eine einfache Form asymmetrischen Wechselverhaltens lässt sich durch einen zusätzlichen Asymmetriebeitrag a_{bias} auf einer Seite der Ungleichung (14.5) realisieren. Bei einem Rechtsfahrgesetz wäre dieser Beitrag bei der Bewertung eines potenziellen Wechsels nach links auf der rechten Seite von (14.5) zu addieren. Der Asymmetriebeitrag ist vergleichsweise klein, aber größer als die Wechselschwelle.

Zu beachten ist, dass das Anreizkriterium auch einen Sicherheitsaspekt enthält, nämlich für das eigene Fahrzeug (in der allgemeinen Gl. (14.1) bedeutet dies $\beta = \alpha$). Wechsel werden nämlich insbesondere dann verhindert, wenn auf der Zielpur das Vorderfahrzeug einen sicherheitskritisch kleinen Abstand hat oder auf nahezu gleicher Höhe fährt, so dass $\hat{s}_\alpha < 0$.⁸

Das Stau-Paradoxon. Eine Motivation, im Stau die Fahrstreifen zu wechseln, resultiert häufig aus dem Eindruck, dass es auf den benachbarten Fahrstreifen zügiger vorangeht. In Aufgabe 14.1 wird gezeigt, dass dies oft ein Trugschluss ist: Aus statistischen Gründen ist der Zeitanteil, in dem man im Stau von Fahrzeugen der Nachbarfahrstreifen überholt wird, größer als der Zeitanteil, in dem man selber andere Fahrzeuge überholt. Der Trugschluss ist, dass man aus diesen Zeitanteilen auf höhere mittlere Geschwindigkeiten der benachbarten Fahrstreifen im Vergleich zum eigenen schließt. Da die hier vorgestellten Wechselkriterien keine taktische Komponente enthalten, trifft diese Tendenz unnötiger Wechsel auch auf sie zu.

14.3.3 Spurwechseln mit Höflichkeit: MOBIL

Im durch die Gl. (14.4) und (14.5) definierten Wechselmodell werden die anderen Fahrer nur durch das Sicherheitskriterium berücksichtigt. Willkürliche (nicht durch Fahrstreifensperrungen oder Ähnliches erzwungene) Wechsel werden jedoch auch bei erfülltem Sicherheitskriterium vermieden, wenn die Behinderung anderer Fahrer

⁸ Auch hier wird gefordert, dass $a_{\text{mic}}(s, v, v_l)$ für $s < 0$ eine betragsmäßig sehr hohe negative „Strafbeschleunigung“ ergibt.

in keinem Verhältnis zum eigenen Nutzen steht. Zur Modellierung werden in der Nutzenfunktion die Belange anderer Fahrer berücksichtigt, allerdings gewichtet mit einem *Höflichkeitsfaktor* p , welcher in der Regel wesentlich kleiner als 1 ist:

$$\hat{a}_\alpha - a_\alpha + p (\hat{a}_{hz} - a_{hz} + \hat{a}_h - a_h) > \Delta a \quad \text{MOBIL-Anreizkriterium.} \quad (14.6)$$

Für den Spezialfall einer Gleichgewichtung der Belange anderer Fahrer ($p = 1$) und ohne Wechselschwelle ($\Delta a = 0$) wird genau dann gewechselt, wenn sich die Summe aller Beschleunigungen erhöht bzw. die Summe aller Verzögerungen minimiert. Dies kommt in folgendem Akronym zum Ausdruck:

MOBIL – Minimizing overall braking deceleration induced by lane changes.

Die zentrale Komponente des MOBIL-Kriteriums ist der Höflichkeitsfaktor, welcher das Maß an – über die Sicherheit hinausgehende – Rücksichtnahme auf andere Verkehrsteilnehmer angibt: Für $p = 0$ erhält man, wie in den meisten anderen Modellen, egoistische Fahrer. Für $p = 1$ werden die Bedürfnisse der anderen ebenso gewichtet wie die eigenen. Sinnvolle Werte von p liegen im Wertebereich um 0.2.⁹

Wie schätzen Sie den Wert des Höflichkeitsfaktors für die beiden in Abb. 11.2 dargestellten Fahrer ein? Kann man mit p auch altruistische Fahrer sowie „Schulmeister“ modellieren, welche absichtlich, unter Inkaufnahme eigener Nachteile, andere Verkehrsteilnehmer behindern?

14.3.4 Anwendung auf spezifische Fahrzeugfolgemodelle

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Spurwechselmodelle ergeben erst im Verbund mit einem Beschleunigungsmodell explizite Wechselregeln. Im Prinzip sind das Sicherheitskriterium (14.4) und die Anreizkriterien (14.5) bzw. (14.6) kompatibel mit jedem Modell der Längsdynamik, bei dem eine Beschleunigungsfunktion a_{mic} entweder direkt gegeben ist oder indirekt über Differenzenquotienten (Geschwindigkeitsänderung geteilt durch Zeitschrittweite) definiert werden kann. Im Folgenden wird die Anwendung auf drei Modelle vorgestellt.

⁹ Auf der Webseite www.traffic-simulation.de kann man dieses Modell mit verschiedenen Höflichkeitsfaktoren ausprobieren. Als zugrundeliegendes Fahrzeugfolgemodell wurde dort das IDM eingesetzt (siehe Abschn. 14.3.4).

Regeln für das Optimal-Velocity-Modell. Setzt man die OVM-Beschleunigung $\dot{v} = (v_{\text{opt}}(s) - v)/\tau$ in das Sicherheitskriterium (14.4) ein, erhält man folgende Bedingung für den Abstand des hinteren Fahrzeugs auf der Zielspur,

$$\hat{a}_{\text{hz}} = \frac{v_{\text{opt}}(\hat{s}_{\text{hz}}) - v_{\text{hz}}}{\tau} > -b_{\text{safe}}.$$

Nach dem zunächst hypothetischen Wechsel muss die Lücke \hat{s}_{hz} zum hinteren Fahrzeug auf der Zielspur mindestens so groß sein, dass die neue Wunschgeschwindigkeit dieses Fahrzeugs die Bedingung $v_{\text{opt}}(\hat{s}_{\text{hz}}) > v_{\text{hz}} - \tau b_{\text{safe}}$ erfüllt. Mit der Umkehrfunktion $s_e(v)$ der optimalen Geschwindigkeitsfunktion (Gleichgewichtsabstand bei gegebener Geschwindigkeit) ergibt sich daraus

$$\hat{s}_{\text{hz}} > s_e(v_{\text{hz}} - \tau b_{\text{safe}}). \quad (14.7)$$

Analog folgt aus dem Anreizkriterium (14.5) die Bedingung $v_{\text{opt}}(\hat{s}_\alpha) - v_{\text{opt}}(s_\alpha) > \Delta a \tau$ bzw. mit der Umkehrfunktion $s_e(v)$ eine Bedingung für die vordere Lücke auf der Zielspur:

$$\hat{s}_\alpha > s_e(v_{\text{opt}}(s_\alpha) + \Delta a \tau). \quad (14.8)$$

Speziell ergeben sich für das dreieckige Fundamentaldiagramm (10.19) bzw. $s_e(v) = s_0 + vT$ für $v < v_0$ die drei Bedingungen¹⁰

$$\hat{s}_{\text{hz}} > s_0 + v_{\text{hz}} T - b_{\text{safe}} \tau T, \quad \hat{s}_\alpha > s_\alpha + \Delta a \tau T, \quad s_\alpha < s_0 + v_0 T - \Delta a \tau T.$$

Da sowohl T als auch τ in der Größenordnung von 1 liegen (vgl. Tabelle 10.1), sind alle Beiträge, welche das Produkt τT enthalten, von der Größenordnung 1 m und damit gegenüber den Lücken s_α , \hat{s}_α und \hat{s}_{hz} vernachlässigbar. Im Ergebnis bekommt man die Bedingungen

$$\hat{s}_{\text{hz}} > s_e(v_{\text{hz}}), \quad \hat{s}_\alpha > s_\alpha, \quad v_{\text{opt}}(s_\alpha) < v_0. \quad (14.9)$$

Für einen Spurwechsel muss also (i) eine Behinderung vorliegen ($v_{\text{opt}}(s_\alpha) < v_0$), (ii) die vordere Lücke auf der Zielspur größer sein als auf der eigenen, und (iii) die hintere Lücke auf der Zielspur größer sein als der Sicherheitsabstand. Solche nur von (geschwindigkeitsabhängigen) Mindestlücken abhängigen Wechselkriterien gehören zur Klasse der *Gap-Acceptance-Modelle*. Die obige Herleitung der Gap-Acceptance-Kriterien (14.9) für den Fall $b_{\text{safe}} = \Delta a = 0$ gilt nicht nur für das

¹⁰ Die dritte Bedingung kommt daher, dass ansonsten das Argument der Umkehrfunktion $s_e(v)$ auf der rechten Seite von Gl. (14.8) einer Geschwindigkeit oberhalb der Wunschgeschwindigkeit entspricht, wofür $s_e(v)$ nicht definiert ist. Da diese Situation freiem Verkehr entspricht, kann man formal $s_e(v) \rightarrow \infty$ setzen, so dass das Anreizkriterium nicht erfüllt ist. Einfacher sieht man das direkt an den Beschleunigungen.

OVM, sondern generell für alle Beschleunigungsmodelle ohne Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdifferenz wie das Newell-Modell (Abschn. 10.7), aber auch für das Nagel-Schreckenberg-Modell (Abschn. 13.2).

Die Einfachheit dieser Regeln macht sie aber gleichzeitig unrealistisch, denn in der Realität macht es speziell unter dem Sicherheitsaspekt einen großen Unterschied, ob sich das hintere Fahrzeug auf der Zielpur mit hoher Geschwindigkeit nähert oder mit ähnlicher Geschwindigkeit wie man selbst fährt (vgl. Aufgabe 14.3). Deshalb ist eine Anwendung der Wechselregeln auf Modelle sinnvoll, welche Geschwindigkeitsdifferenzen berücksichtigen. Dies wird nun betrachtet.

Regeln für das Full-Velocity-Difference-Modell. Die Beschleunigung des im Abschn. 10.6 vorgestellten Full-Velocity-Difference-Modells (FVDM) ergibt sich aus der OVM-Beschleunigung durch Addition des zusätzlichen, von der Geschwindigkeitsdifferenz (Annäherungsrate) Δv abhängigen Anteils $-\gamma \Delta v$. Die Anwendung der Spurwechselbedingungen (14.4) und (14.5) liefert die Kriterien

$$\hat{s}_{hz} > s_e(v_{hz} - \tau b_{safe} + \gamma \tau (v_{hz} - v_\alpha)) \quad \text{Sicherheit}, \quad (14.10)$$

$$\hat{s}_\alpha > s_e(v_{opt}(s_\alpha) + \tau \Delta a + \gamma \tau (v_{hz} - v_\alpha)) \quad \text{Anreiz}. \quad (14.11)$$

Die hinteren und vorderen Mindestlücken \hat{s}_{hz} bzw. \hat{s}_α auf der Zielpur hängen nun also auch von der Geschwindigkeitsdifferenz ab. In diesem Sinne sind die Wechselkriterien konsistent mit den entsprechenden Beschleunigungsmodellen.

Regeln für das Intelligent-Driver-Modell. Generell ergibt sich für alle Mikromodelle, welche den im Abschn. 11.1 vorgestellten Konsistenzbedingungen genügen, aus dem Sicherheitskriterium (14.4) eine von der eigenen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Hinterfahrzeugs auf der Zielpur abhängige *hintere* Mindestlücke. Das Sicherheitskriterium kann daher als verallgemeinerte *Gap-Acceptance*-Regel formuliert werden, die nicht nur von der Geschwindigkeit v_{hz} , sondern auch von der Differenzgeschwindigkeit $v_{hz} - v_\alpha$ bzw. der Geschwindigkeit v_α abhängt:

$$\hat{s}_{hz} = x_\alpha - l_\alpha - x_{hz} > s_{safe}(v_{hz}, v_\alpha). \quad (14.12)$$

Dies ist für alle Modelle explizit formulierbar, bei denen sich die Beschleunigungsformel nach dem Abstand auflösen lässt. Für das IDM ist dies (im Gegensatz zu den meisten Versionen des OVM oder des FVDM) der Fall und ergibt

$$s_{safe}(v_h, v) = \frac{s^*(v_h, v_h - v)}{\sqrt{\frac{a_{free}(v_h)}{a} + \frac{b_{safe}}{a}}}. \quad (14.13)$$

Im verbesserten IDM (IIDM, Abschn. 11.3.7) ist die Beziehung sogar einfacher,

$$s_{safe}(v_h, v) = \frac{s^*(v_h, v_h - v)}{\sqrt{1 + \frac{b_{safe}}{a}}}. \quad (14.14)$$

In jedem Fall ist der Mindestabstand im Wesentlichen durch den dynamischen Wunschabstand s^* nach Gl. (11.12) gegeben.

Die Abb. 14.2 zeigt die hintere Mindestlücke (14.13) für die IDM-Parameter aus Tabelle 11.2 sowie $b_{\text{safe}} = b = 1.5 \text{ m/s}^2$. Wenn beispielsweise sowohl das betrachtete Fahrzeug als auch das Hinterfahrzeug auf der Zielpur mit 50 km/h fahren, dann muss nach dem Sicherheitskriterium die hintere Lücke mindestens etwa 10 m betragen. Bei diesem Grenzabstand würde das neue Hinterfahrzeug nach dem Wechsel mit der Verzögerung b_{safe} bremsen.¹¹ Fährt das Hinterfahrzeug jedoch mit 70 km/h, nähert sich also mit $\Delta v = 20 \text{ km/h}$ an, so ergibt das Sicherheitskriterium bzw. Abb. 14.2 einen Mindestabstand von etwa 40 m. Im IDM hängt das Wechselskriterium damit entscheidend von der Geschwindigkeitsdifferenz ab.

Das Anreizkriterium (14.5) ist für das IDM ebenfalls analytisch auswertbar. Für alle plausiblen Mikromodelle lässt sich zunächst das Anreizkriterium als allgemeine Funktion für die *vordere* Mindestlücke auf der Zielpur formulieren,

$$\hat{s}_\alpha > \hat{s}_{\text{inc}}(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha, v_{\text{vz}}). \quad (14.15)$$

Für das IDM und auch das IIMD ergibt sich der konkrete Ausdruck

$$\hat{s}_{\text{inc}}(s, v, \Delta v, v_z) = \frac{s^*(v, v - v_z)}{\sqrt{\left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s}\right)^2 - \frac{\Delta a}{a}}}. \quad (14.16)$$

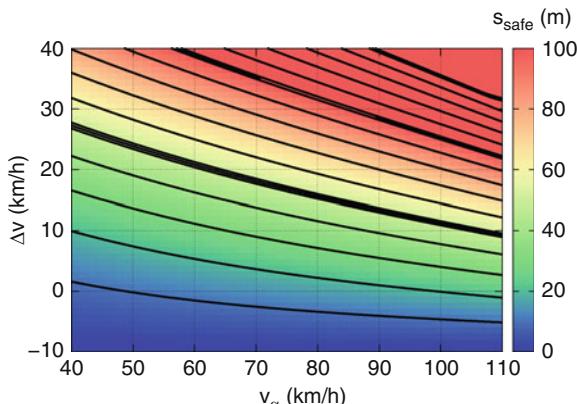


Abb. 14.2 Hintere Mindestlücke (14.13) des IDM in Abhängigkeit der eigenen Geschwindigkeit v_α und der Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta v = v_{\text{hz}} - v_\alpha$. Die dünnen Linien entsprechen einer Abstandsänderung von 10 m und die dicken von 50 m

¹¹ Untersuchungen an Trajektoriendaten zeigen, dass man in der Realität kurzfristig geringere Lücken akzeptiert. Das Hinterfahrzeug verzögert nur geringfügig, bis sich allmählich der gewünschte Abstand einstellt. Dies ist jedoch Teil des taktischen Verhaltens, welches hier nicht behandelt wird.

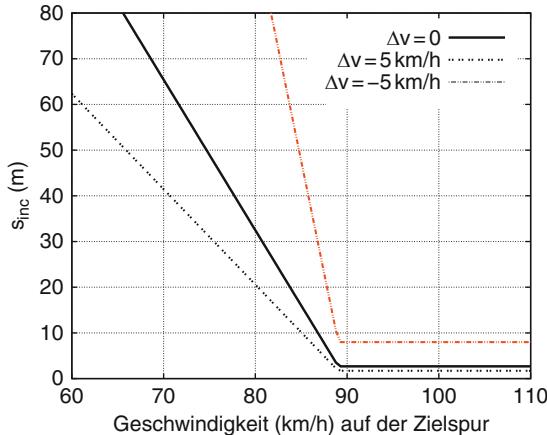


Abb. 14.3 Mindestlücke zum Vorderfahrzeug auf dem Zielstreifen für einen Anreiz zum Wechselen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit auf der Zielspur. Die Ausgangssituation ist durch $s_\alpha = 30 \text{ m}$ und $v_\alpha = 80 \text{ km/h}$ gegeben

Auch hier hängt die Mindestlücke stark von den Geschwindigkeitsdifferenzen zum jeweiligen Vorderfahrzeug auf dem alten und neuen Fahrstreifen ab (vgl. Abb. 14.3).

14.4 Entscheidungssituation beim Annähern an eine Ampel

Nähert man sich einer LSA an, die von Grün auf Gelb springt, so muss man sich entscheiden, ob man noch über das Gelblicht fährt oder ob man abbremst und an der Haltelinie zum Stehen kommt. Diese Situation kann mit dem beschleunigungsisierten Entscheidungsmodell modelliert werden. Das Anreizkriterium entfällt. Gemäß des Sicherheitskriteriums wird nur dann angehalten, wenn dadurch eine sichere bzw. komfortable Verzögerung b_{safe} im Verlauf nicht überschritten wird. Für Modelle mit plausibler Bremsstrategie genügt es, die Verzögerung zum Entscheidungspunkt (Gelbwerden des Signals, ggf. zuzüglich einer Reaktionszeit) zu betrachten.¹²

Bezeichnet man gemäß Abb. 14.4 den Abstand zur Haltelinie mit s und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Entscheidung mit v (hier sind keine Indizes nötig), ergibt sich das einfache Kriterium

$$\begin{aligned} a_{mic}(s, v, v) &< -b_{safe} && \text{Weiterfahren,} \\ a_{mic}(s, v, v) &\geq -b_{safe} && \text{Anhalten.} \end{aligned} \quad (14.17)$$

¹² Ist aus kinematischen Gründen eine Verzögerung oberhalb der komfortablen bzw. sicheren Verzögerung unvermeidbar, so wird diese in solchen Modellen bereits zu Beginn des Manövers angewandt, um die Situation „unter Kontrolle“ zu bringen.

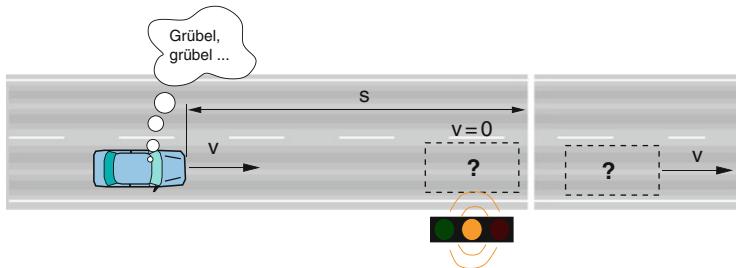


Abb. 14.4 Illustration der Entscheidungssituation „Anhalten oder Weiterfahren“ an einer gelb wendenden LSA

Die Abb. 14.5 zeigt, dass der kritische Abstand im Wesentlichen quadratisch mit der Geschwindigkeit steigt, während die kritische TTC (Time-to-Collision, hier: Zeit bis zum Erreichen der Haltelinie bei unveränderter Geschwindigkeit), außer bei sehr langsamer Fahrt linear mit der Geschwindigkeit zunimmt. Die kritische TTC von 3 s bei 50 km/h und 4 s bei 70 km/h sind konsistent mit gesetzlichen Vorschriften zur Mindestdauer der Gelbphase bei den jeweiligen Höchstgeschwindigkeiten (vgl. Übungsaufgabe 14.2).¹³

14.5 Einfahren in eine vorfahrtsberechtigte Straße

Die Situation beim Einbiegen auf eine vorfahrtsberechtigte Straße ist im Prinzip analog zur Situation an der LSA, nur dass das Sicherheitskriterium nicht das eigene Fahrzeug betrifft, sondern für das von hinten herannahende Fahrzeug (Index h) auf

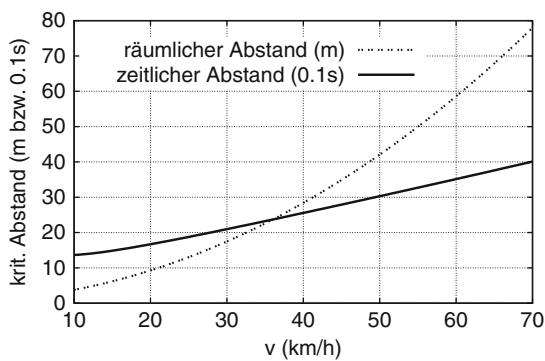


Abb. 14.5 Kritischer Abstand zur Haltelinie zum Entscheidungszeitpunkt bei gelber LSA in Abhängigkeit der Geschwindigkeit ($b = 2 \text{ m/s}^2$, $b_{\text{safe}} = 3 \text{ m/s}^2$; weitere Parameter gemäß Tabelle 11.2)

¹³ Zu der TTC kommt allerdings noch die Reaktionszeit $T_r \approx 1 \text{ s}$ hinzu.

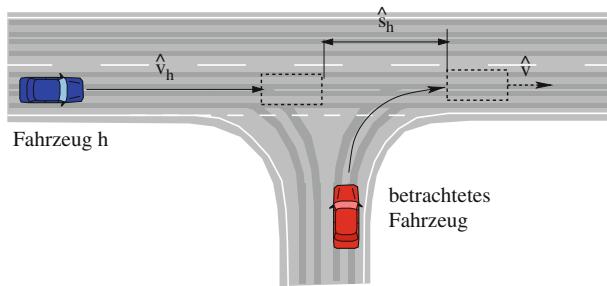


Abb. 14.6 Illustration der Entscheidungssituation „Warten oder Einfahren“ auf eine vorfahrtsberechtigte Straße

der Hauptfahrbahn gilt. Es wird angenommen, dass der einbiegende Fahrer sowohl seine Geschwindigkeit \hat{v}_α , als auch die Lücke \hat{s}_h und die Geschwindigkeit \hat{v}_h des Fahrzeugs h zum Zeitpunkt des erstmaligen Konflikts der Trajektorien abschätzen kann (Abb. 14.6). Dann lautet das Sicherheitskriterium

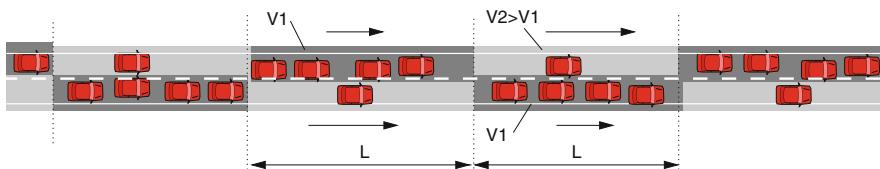
$$\hat{s}_h > s_{\text{safe}}(\hat{v}_h, \hat{v}). \quad (14.18)$$

Das „Anreizkriterium“ (14.15) ist in dieser Situation immer erfüllt, solange das einbiegende Fahrzeug nicht mit dem gerade vorbeifahrenden Fahrzeug (Vorderfahrzeug auf der Hauptfahrbahn) kollidiert ($\hat{s}_v < 0$) bzw. dessen Abstand zum Konfliktzeitpunkt der Trajektorien extrem gering ist. Insgesamt sind die Abbiegekriterien lediglich Spezialfälle der Spurwechselkriterien.

Übungsaufgaben

14.1 Das Stau-Paradoxon

Begründen Sie, warum man im Stau unabhängig von der Wahl des Fahrstreifens tendenziell den größeren Zeitanteil auf der langsameren Spur verbringt. Betrachten Sie dabei die folgende Situation:



Die Abbildung zeigt versetzte Stauwellen auf Streckenintervallen der Länge L mit mittlerer Geschwindigkeit $\langle v_\alpha \rangle = V_1$ und schneller fließenden, aber immer noch gebundenen Verkehr mit Geschwindigkeit $V_2 > V_1$ auf den gleich langen Intervallen dazwischen. Nehmen Sie ein dreieckiges Fundamentaldiagramm und

vernachlässigbare Geschwindigkeitsanpassungszeiten an, wie sie beispielsweise für das Newell-Modell oder das OVM zutreffen. Berechnen Sie den Zeitanteil p_{slow} , in dem man sich auf dem langsameren Fahrstreifen befindet, als Funktion von V_1 und V_2 und der Modellparameter T und l_{eff} und staunen Sie über das Ergebnis.

14.2 Bremsen vor Lichtsignalanlagen

Eine bezüglich Bremsverzögerungen optimale und gesetzeskonforme Verhaltensstrategie vor von Grün auf Gelb schaltenden Lichtsignalanlagen ist wie folgt: Zunächst wird abgeschätzt, ob die Ampel bei unveränderter Geschwindigkeit noch bei Gelb passiert werden kann. Falls ja, wird diese Alternative gewählt, ansonsten wird gleichmäßig (mit konstanter Verzögerung) bis zur Haltelinie abgebremst. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h beträgt die vorgeschriebene minimale Gelbphasendauer $\tau_g = 3$ s. Welche maximale Bremsverzögerung wird einem Fahrer vom Gesetzgeber zugemutet, wenn man als komplexe Reaktionszeit (Erkennen der Situation, Entscheidungsfindung und Umsetzung) 1 s veranschlagt?

14.3 Baustelleneinfahrt

An einer Baustelleneinfahrt einer Autobahn muss man praktisch aus dem Stand auf die Hauptfahrbahn wechseln. Das entsprechende Sicherheitskriterium soll mit dem OVM mit dreieckigem Fundamentaldiagramm und $b_{\text{safe}} = 0$ modelliert werden. Auf der Hauptfahrbahn nähert sich ein Fahrzeug mit 72 km/h. Zum Entscheidungszeitpunkt ist das Sicherheitskriterium gerade noch erfüllt. Mit welcher mittleren Verzögerung muss das sich nähernde Fahrzeug zur Vermeidung eines Auffahrungsfalls mindestens bremsen, wenn das einfahrende Fahrzeug zunächst mit 2 m/s^2 beschleunigt? Ist das OVM-Kriterium also wirklich „sicher“?

14.4 Einfahren auf eine vorfahrtsberechtigte Straße

Formulieren Sie das IDM-Sicherheitskriterium für eine Einfahrt mit Stopperschild, d.h. die anfängliche Geschwindigkeit ist nahe Null. Wie groß muss der Abstand von mit 50 km/h fahrenden Fahrzeugen auf der Hauptfahrbahn mindestens sein, falls die Modellkombination IDM/MOBIL mit den Parametern $a = b = b_{\text{safe}} = 2 \text{ m/s}^2$, $T = 1 \text{ s}$, $v_0 = 50 \text{ km/h}$ und $s_0 = 0 \text{ m}$ verwendet wird?

Literaturhinweise

- Ben-Akiva, M., Lerman, S.: Discrete choice analysis: theory and application to travel demand. MIT Press, Cambridge, MA (1993)
- Gipps, P.G.: A model for the structure of lane-changing decisions. Transp. Res. B Methodol. **20**, 403–414 (1986)
- Kesting, A., Treiber, M., Helbing, D.: General lane-changing model MOBIL for car-following models. Transp. Res. Rec. **1999**, 86–94 (2007)
- Nagel, K., Wolf, D., Wagner, P., Simon, P.: Two-lane traffic rules for cellular automata: a systematic approach. Phys. Rev. E **58**, 1425–1437 (1998)
- Redelmeier, D., Tibshirani, R.: Why cars in the next lane seem to go faster. Nature **401**, 35 (1999)

Kapitel 15

Stabilitätsanalyse

Bücher ohne Zahlen beunruhigen mich.

Alexander von Humboldt

15.1 Entstehung von Stop-and-Go-Wellen

Instabilitäten und in der Folge Stauwellen entstehen durch Reaktionszeiten der Fahrer sowie durch die endliche Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit der Fahrzeuge. Beides führt zu einer verzögerten Anpassung der Geschwindigkeit an die Zielgeschwindigkeit, die bei hinreichend großem Verkehrsaufkommen zu einem „Teufelskreis“ führen kann. Dieser wird zunächst anhand der Abb. 15.1 anschaulich erklärt (vgl. auch Abb. 15.4):

- In der dargestellten Situation wird anfangs eine Fahrzeugkolonne im Gleichgewicht ($s_\alpha = s_e$, $v_\alpha = v_e$) angenommen. Aus irgendeinem Grunde bremst zur Zeit $t = t_0$ Fahrzeug 1 leicht auf die Geschwindigkeit $v_1 < v_e$ und behält diese neue Geschwindigkeit bei.
- Damit ist auch für das nachfolgende Fahrzeug 2 die neue optimale Geschwindigkeit durch v_1 gegeben. Der Fahrer dieses Fahrzeugs kann aber seine Geschwindigkeit erst in endlicher Zeitspanne (zur Zeit t_1) von v_e auf v_1 anpassen.
- Ist der Verkehr dicht genug oder die Geschwindigkeitsanpassungszeit lang genug, verringert sich während dieser Zeit der Abstand stärker als es dem Gleichgewichtsabstand $s_e(v_1)$ bei der neuen Geschwindigkeit entspricht. Um wieder auf den Wunschabstand zu kommen, muss der Fahrer 2 seine Geschwindigkeit vorübergehend weiter auf $v_2 < v_1$ absenken (Zeit t_1 bis t_2).
- Der nächste Fahrer 3 kann auf die Verzögerung des Fahrzeugs 2 von v_e auf v_2 ebenfalls nicht sofort reagieren und sein Abstand wird bei hinreichender Verkehrsichte kleiner als der Wunschabstand $d_e(v_2)$. Er muss also auf $v_3 < v_2$ abbremsen, um den Abstand wieder zu erreichen (Zeit t_2).
- Dieser Mechanismus setzt sich beim nachfolgenden Fahrzeug fort, welches erstmals komplett anhalten muss (Zeit t_3). Die entstehende Stauwelle löst sich erst auf, wenn die Zahl der neu einfahrenden Fahrzeuge (also der Verkehrsfluss stromaufwärts) geringer wird.

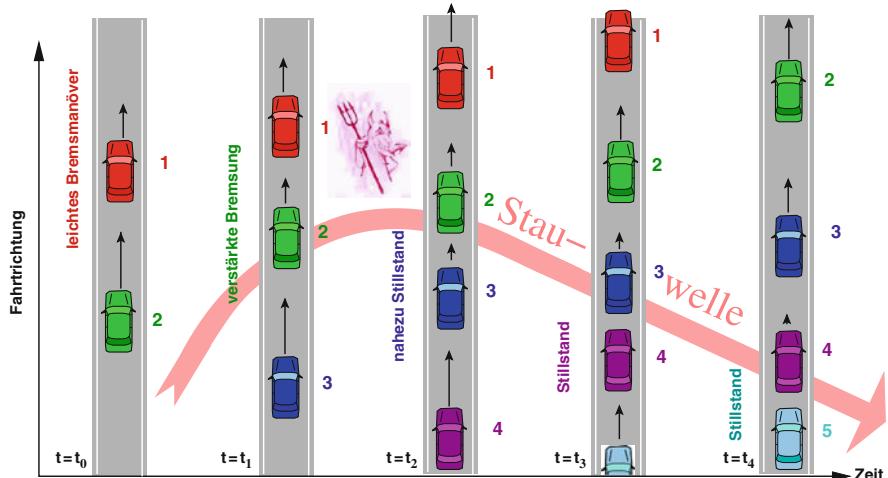


Abb. 15.1 Der Teufelskreis: Jedes Fahrzeug muss auf eine niedrigere Geschwindigkeit abbremsen als das jeweilige Fahrzeug davor. Die Zahlen neben den Fahrzeugen bezeichnen den Fahrzeugindex

Im Ergebnis ist eine *Stop-and-Go-Welle* scheinbar „aus dem Nichts“ entstanden (vgl. auch Abschn. 17.3). Bei geringer Verkehrsichte wird der Teufelskreis durchbrochen, denn dann nähert sich ein nachfolgendes Fahrzeug, z.B. Fahrzeug 3, erst dann dem Vorderfahrzeug (z.B. Fahrzeug 2) an, wenn dieses seinerseits bereits den Gleichgewichtsabstand wieder erreicht hat. Auch die Fahrzeuge 3, 4 etc. müssen in diesem Fall ihre Geschwindigkeit nur auf die Geschwindigkeit v_1 des Störungs-Verursachers reduzieren, so dass der „Stop-and-Go-Mechanismus“ nicht wirksam ist. Bei einer Anpassungszeit von Null, wie im LWR-Modell, ist dieser Mechanismus natürlich unabhängig von der Dichte nie wirksam. Konsequenterweise können bestehende Verkehrsstörungen im LWR-Modell oder verwandten Modellen *nicht wachsen* und damit kein Stop-and-Go-Verkehr aus kleinen Störungen entstehen. Lediglich vorhandene Dichteunterschiede können sich zu Schockwellen „aufsteilen“, ohne aber dabei die Amplitude zu vergrößern.

Die Stabilitätsanalyse in den folgenden Abschnitten zeigt, dass sich, in Übereinstimmung mit dieser qualitativen Argumentation, die Neigung zu Verkehrsinstabilitäten mit der Anpassungszeit, der Fahrzeughichte und der Abstandssensitivität $|v'_e(s)|$ bzw. $V'_e(\rho)$ erhöht.

15.2 Relevante Instabilitätskonzepte für den Verkehrsfluss

Alle im weiteren Verlauf dieses Kapitels besprochenen Instabilitäten bedeuten Neigung zu Schwingungen, Stop-and-Go-Verkehr und dergleichen, nicht aber notwendigerweise Unfälle (die in den Modellen durch negative Nettoabstände oder Dichten oberhalb ρ_{\max} charakterisiert sind). Simulierte Unfälle finden meist erst dann statt, wenn die Instabilitätsgrenzen weit überschritten sind. Umgekehrt sind linear stabile

Modelle (wie das OVM in bestimmten Parameterbereichen) nicht notwendigerweise unfallfrei. Die hier behandelten Instabilitäten haben ebenfalls nichts mit den numerischen Instabilitäten zu tun.¹

Je nach Bedingungen für das Auftreten der Instabilität und Art der entstehenden Staumuster unterscheidet man die Instabilitäten gemäß folgender Kriterien:

Zahl der beteiligten Fahrzeuge. Untersucht man die Folgefahrt eines einzelnen Fahrzeugs (oder weniger Fahrzeuge) hinter einem Führungsfahrzeug mit vorgegebenem Geschwindigkeitsverlauf (häufig Konstantfahrt), dann spricht man von *lokaler Instabilität*, wenn sich die anfänglichen Abstands- oder Geschwindigkeitsschwankungen mit der Zeit aufzuschaukeln (vgl. Abb. 15.2). Ansonsten ist die Folgefahrt lokal stabil. Diese Stabilitätskategorie lässt sich sinnvoll nur für mikroskopische

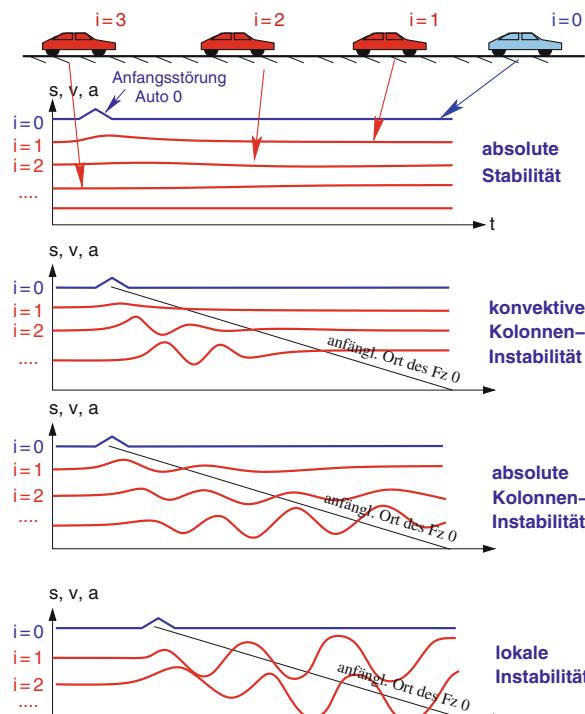


Abb. 15.2 Veranschaulichung der Instabilitätskategorien: Bei konvektiver Instabilität schaukeln sich die Störungen von Fahrzeug zu Fahrzeug auf. Jedes einzelne Fahrzeug fährt aber bereits wieder gleichmäßig, wenn es den Anfangsort der Störung überquert. Bei absoluter Kolonneninstabilität sind die Schwingungen beim Überqueren der Anfangsortes noch nicht abgeklungen und bei lokaler Instabilität klingen sie überhaupt nicht mehr ab

¹ Insbesondere gibt es sowohl bei den numerischen als auch bei den hier behandelten physikalischen Instabilitäten sogenannte „konvektive Instabilitäten“ (Abschn. 9.5 bzw. 15.5), die keinerlei Beziehung zueinander haben.

Modelle definieren und ist vor allem bei der Entwicklung von Reglern für ACC-Systeme bedeutsam.²

Die im Verkehrsfluss beobachtete Instabilität, vor allem der Stop-and-Go-Verkehr, entspricht hingegen einer *Kolonneninstabilität* (*String stability*). Der Verkehrsfluss ist kolonnenstabil, wenn sich Schwankungen auch bei beliebig langen Fahrzeugkolonnen nicht aufschaukeln. Kolonnenstabilität ist ein viel strengeres Kriterium als lokale Stabilität: Selbst wenn bei einer Folgefahrt Schwankungen schnell abklingen und subjektiv nahezu kein Überschwingen feststellbar ist, ja selbst bei absoluter Schwingungsfreiheit (überdämpftes Verhalten), kann der modellierte Verkehrsfluss kolonneninstabil sein. Dies wird in den beiden mittleren Situationen der Abb. 15.2 und in Abb. 15.3 veranschaulicht (vgl. Aufgabe 15.3). Als kollektives Phänomen ist Kolonnenstabilität sowohl für mikroskopische als auch makroskopische Modelle anwendbar.³

Größe der Störung. Klingt kleine Störungen ab, spricht man von *linearer Stabilität*. Verschwinden auch beliebig große Störungen mit der Zeit (z.B. die Störung des Verkehrsflusses nach einer Vollbremsung), ist das Modell *nichtlinear stabil*. Oft

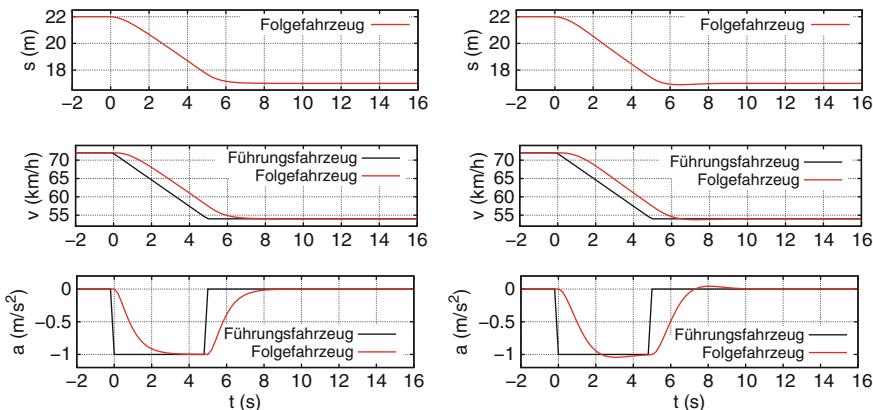


Abb. 15.3 Mit dem Optimal-Velocity-Modell (OVM) modellierte Reaktion eines Folgefahrzeugs, nachdem das Führungsfahrzeug von 72 km/h auf 54 km/h abgebremst hat. Links: Grenze zur lokal absolut schwingungsfreien Reaktion ($v_e' = 1 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 0.25 \text{ s}$). Rechts: Grenze zur Kolloneninstabilität ($v_e' = 1 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 0.5 \text{ s}$). Im Prinzip können alle drei Größen s , v und \dot{v} zur Analyse herangezogen werden, bei den Beschleunigungen sind die Schwingungen aber meist am ausgeprägtesten

² Zumindest solange der Ausstattungsgrad dieser Systeme klein bleibt. Ansonsten ist auch Kolonnenstabilität wichtig.

³ Einige Autoren unterscheiden zwar die mikroskopische *string stability* von der makroskopischen *flow stability*, doch das ist eine Konsequenz nicht perfekter Übereinstimmungen der verwendeten mikroskopischen und makroskopischen Modelle. Konzeptionell gibt es keinerlei Unterschied. Man kann sogar umgekehrt als notwendige Bedingung für die dynamische Äquivalenz zwischen Mikro- und Makromodellen fordern, dass *string* und *flow stability* äquivalent sind, also dieselben Stabilitätsgrenzen aufweisen.

haben Fahrzeugfolgemodelle oder makroskopische Modelle zweiter Ordnung Parameterbereiche, in denen der simulierte Verkehrsfluss linear stabil und gleichzeitig nichtlinear instabil ist. Kleine Störungen klingen also ab, während sich große aufschaukeln. Man spricht dann von *Metastabilität*. Damit ist automatisch eine Pfadabhängigkeit bzw. *Hysterese* verbunden. Der Verkehrsfluss verhält sich nach kleinen Störungen – auch nach sehr langer Zeit – qualitativ anders als nach großen.

Damit sich aus großen Störungen eine Stauwelle entwickeln kann, dürfen aus ihr nur weniger Fahrzeuge heraus- als hineinfahren, so dass der Ausfluss aus dem Stau (dynamische Kapazität) geringer als der maximal mögliche Fluss bei freiem Verkehr und kleinen Störungen (statische Kapazität). Typische beobachtete Werte dieses sogenannten *capacity drop* liegen um 10% (vgl. Kap. 4). In Bereichen mit Metastabilität gibt es also zu gegebener Dichte zwei Flusswerte bzw. die Zweige des Fundamentaldiagramms für freien und gestauten Verkehr überlappen sich. Dies führt zu der typischen Form eines „gespiegelten“ griechischen λ (*inverse lambda*), siehe Abb. 4.11 und 4.12.

Formal kann man lineare bzw. nichtlineare Kolonneninstabilität durch die Entwicklung der Amplitude $U(x, t)$ der Störgröße (beispielsweise Abweichung von der Gleichgewichtsgeschwindigkeit) auf einem unendlich langen Streckenabschnitt mit Gleichgewichts-Verkehrsdichte ρ_e in Abhängigkeit der Größe ε der Anfangsstörung in den Anfangsbedingungen definieren:

$$U(x, 0) = A_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } |x| < \frac{1}{2\rho_e}, \varepsilon > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad x \in IR, \quad (15.1)$$

Dies entspricht mikroskopisch der Störung durch einen einzigen Fahrer, der z.B. seine Geschwindigkeit um den Betrag $|\varepsilon|$ absenkt. Der Verkehrsfluss ist linear instabil falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x U(x, t) > 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0. \quad (15.2)$$

Er ist nichtlinear instabil bzw. *metastabil*, falls eine Mindeststörung $\varepsilon_{nl} > 0$ existiert, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x U(x, t) = \begin{cases} U_0 > 0 & \text{falls } \varepsilon > \varepsilon_{nl}, \\ 0 & \text{falls } \varepsilon \in [0, \varepsilon_{nl}]. \end{cases} \quad (15.3)$$

An der Grenze zur linearen Instabilität geht $\varepsilon_{nl} \rightarrow 0$, während an der Grenze zur *absoluten Stabilität* die notwendige Störung betragsmäßig maximal wird, z.B. $|\varepsilon| = V$ im Falle von Störungen durch Bremsmanöver.

Ausbreitungsrichtung der Störung. Ist der Verkehrsfluss (linear oder nichtlinear) kolonneninstabil, so können sich die dann wachsenden Störungen, vom ortsfesten System aus betrachtet, entweder in beide Richtungen ausbreiten oder nur in eine, also nur stromaufwärts bzw. -abwärts. Breiten sie sich in beide Richtungen aus, spricht man von *absoluter Instabilität*. In diesem Fall ist früher oder später der

Verkehrsfluss auf der ganzen Strecke von der anfänglich räumlich eng begrenzten Störung betroffen.

Der Verkehrsfluss ist ein *offenes System*. Daher ist es auch möglich, dass die Störungen zwar wachsen, aber sich nur in eine Richtung ausbreiten und so letztendlich aus dem System (bzw. dem betrachteten Streckenabschnitt) wandern. In diesem Fall spricht man von *konvektiver Instabilität*. Natürlich muss man bei der Betrachtung der konvektiven Instabilität ein ruhendes Bezugssystem annehmen. Aus Fahrersicht breiten sich die Störungen *immer* nach hinten aus (vgl. die zweite Situation in Abb. 15.2).

Konvektive Instabilitäten wurden ursprünglich in fließenden Flüssigkeiten wie Rohrströmungen beobachtet. In diesem Fall fließen die Störungen in Flussrichtung aus dem System heraus, daher auch der Name konvektive Instabilität (von lat. *convehi*: mitfahren, mitfließen). In Verkehrsflüssen hingegen beobachtet man häufig, dass die Störungen nur *entgegen* der Flussrichtung wachsen und letztendlich den Streckenabschnitt über die stromaufwärtige Begrenzung verlassen. Insbesondere gilt dies natürlich für einzelne laufende Stop-and-Go-Wellen.⁴

Das Phänomen ist sehr weit verbreitet. Beispielsweise sind die in Abb. 5.1 gezeigten Instabilitäten und Stauwellen auf der Autobahn A5 *alle* konvektiver Natur. Sie wachsen also nur entgegen der Fahrtrichtung. Die Sörungen werden fortlaufend an der Engstelle bzw. dem Staukopf erzeugt (beispielsweise durch die dort notwendigen Fahrstreifenwechsel). Da sie jedoch anfangs klein sind und während ihres Wachstums stromaufwärts wandern, bleiben die Schwankungen am Entstehungsort (Staukopf) klein. Aus einer Vielzahl von Beobachtungen auf Autobahnen in Europa und den USA kann man folgern:

Die überwiegende Mehrzahl aller Verkehrsinstabilitäten auf Fernstraßen ist konvektiver Natur.

Formal kann konvektive Instabilität wieder mit der Dynamik der Amplitude $U(x, t)$ bei gegebener Anfangsbedingung $A_\epsilon(x)$ nach Gl. (15.1) definieren: Homogener Verkehrsfluss ist bezüglich dieser Anfangsstörung konvektiv instabil, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x U(x, t) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(0, t) = 0. \quad (15.4)$$

Die erste Bedingung besagt, dass der Verkehrsfluss (linear oder nichtlinear) kolonneninstabil ist. Die zweite Bedingung besagt, dass die Störung am Ursprungsort letztendlich verschwindet.⁵ Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, handelt es sich

⁴ Auch in Verkehrsflussmodellen sind sich in Flussrichtung ausbreitende konvektive Instabilitäten möglich. Sobald jedoch die Amplitude der Instabilität hinreichend groß wird, führen Nichtlinearitäten zu einer Umkehr der Ausbreitungsrichtung. Im Ergebnis ist dieser Typ der konvektiven Instabilität nicht *robust* und damit für die Verkehrsökonomik nicht relevant.

⁵ Dies gilt sogar allgemeiner für jeden *festen* Ort x .

um eine absolute Instabilität. Durch Kombination mit der Bedingung (15.3) kann man in natürlicher Weise auch eine *konvektive Metastabilität* definieren.

Wellenlänge der Störung. Da der Verkehrsfluss ein ausgedehntes System darstellt, gibt es prinzipiell eine unendliche Vielzahl von Störungen bezüglich derer der Fluss instabil ist. In Abschn. 15.4 wird gezeigt, dass man diese nach zwei Typen und jeweils unendlich vielen Wellenlängen ordnen kann. Für die Praxis wichtig sind aber nur die Störungsformen, welche *als erstes* instabil werden: Wegen der Nichtlinearitäten (wie dem *capacity drop*) unterdrücken nämlich bereits entstandene Störungen alle weiteren, sobald sie hinreichend groß sind. Man unterscheidet zwei Typen: Bei *Kurzwellen-Instabilitäten* hat die zuerst instabil werdende Störung eine endliche, meist kurze Wellenlänge von wenigen Fahrzeugabständen. Hingegen wird bei *Langwellen-Instabilitäten* zuerst eine Störung mit einer gegen unendlich gehenden Wellenlänge instabil. Da jedoch aufgrund der Fahrzeugerhaltung die Wachstumsrate von Störungen mit gegen unendlich steigender Wellenlänge gegen Null geht, werden in der Praxis Störungen endlicher, aber großer Wellenlängen (von der Größenordnung 1 km und mehr) das Rennen machen.

Generell gilt, dass in kontinuierlicher Zeit und ohne explizite Reaktionszeit formulierte Mikro- und Makromodelle (wie das IDM und das KK-Modell) prinzipiell den Langwellenlängen-Instabilitätstyp aufweisen, während bei iterierten Abbildungen (Gipps-Modell), bei expliziten Reaktionszeiten (Abschn. 12.2) oder bei Modellen mit nichtlokalen Anteilen (GKT-Modell) auch Kurzwellenlängen-Instabilitäten auftreten können, aber nicht müssen. Die im realen Verkehr beobachteten Instabilitäten sind immer vom Langwellen-Typ, so dass man sich auch bei der Stabilitätsanalyse darauf beschränken kann. Beobachtet man hingegen bei Simulationen Kurzwellenlängen-Instabilitäten (beispielsweise tritt beim Gipps-Modell in der ursprünglichen Formulierung zuerst eine Instabilität mit der minimal möglichen Wellenlänge von zwei Fahrzeugabständen auf), muss dies als Unzulänglichkeit des Modells angesehen werden.

15.3 Lokale Instabilität

Wir untersuchen kleine Abstandsschwankungen $y(t)$ und Geschwindigkeitsschwankungen $u(t)$ eines einzelnen Fahrzeugs, welches hinter einem mit konstanter Geschwindigkeit $v_l(t) = v_e < v_0$ fahrenden Führungsfahrzeug folgt:

$$s(t) = s_e + y(t), \quad (15.5)$$

$$v(t) = v_e + u(t). \quad (15.6)$$

Setzt man diesen Ansatz in die allgemeine Form (10.3) zeitkontinuierlicher Mikromodelle ein, ergeben sich in nullter Ordnung (also $y = u = 0$) die bereits bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$a_{\text{mic}}(s_e, v_e, v_e) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_{\text{mic}}(s_e, v_e, 0) = 0. \quad (15.7)$$

Diese definieren das „mikroskopische“ Fundamentaldiagramm in Form der Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s_e)$ als Funktion des Gleichgewichtsabstandes s_e (vgl. Abschn. 10.3).

In erster Ordnung bezüglich der Störvariablen y und u ergibt sich aus der Abstandsgleichung $\frac{ds}{dt} = v_l - v$ und Gl. (10.3) folgendes System aus zwei linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dt} = u_l - u = -u, \quad (15.8)$$

$$\frac{du}{dt} = a_s y + a_v u + a_{v_l} u_l = a_s y + a_v u. \quad (15.9)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass wegen der vorausgesetzten Konstantfahrt des Führungsfahrzeugs $y_l = u_l = 0$ ist. Die Linearisierung wurde mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung der Beschleunigungsfunktion bezüglich ihrer drei unabhängigen Variablen s , v und v_l um den Gleichgewichtspunkt durchgeführt:

$$a_{\text{mic}}(s, v, v_l) = a_{\text{mic}}(s_e, v_e, v_e) + a_s y + a_v u + a_{v_l} u_l + \text{höhere Ordnungen} \quad (15.10)$$

mit den Taylorkoeffizienten

$$\boxed{a_s = \left. \frac{da_{\text{mic}}}{ds} \right|_e, \quad a_v = \left. \frac{da_{\text{mic}}}{dv} \right|_e, \quad a_{v_l} = \left. \frac{da_{\text{mic}}}{dv_l} \right|_e.} \quad (15.11)$$

Das Subskript e bedeutet, dass die Ableitungen am Gleichgewichtspunkt ausgewertet werden, also $s = s_e$ und $v = v_l = v_e(s_e)$.

Aufgrund der Gleichgewichtsbedingung (15.7) sind die Taylorkoeffizienten a_s und a_v nicht unabhängig voneinander. Die Gleichgewichtsbedingung beschreibt nämlich eine eindimensionale Vielfalt von Gleichgewichtslösungen $v_e(s)$. Bewegt man sich auf der Gleichgewichtskurve durch den durch die unabhängigen Variablen s , v , v_l aufgespannten Raum, gilt

$$a_s ds + (a_v + a_{v_l}) dv_e = a_s ds + (a_v + a_{v_l}) v'_e(s) ds = 0, \quad (15.12)$$

also

$$a_s = -v'_e(s)(a_v + a_{v_l}). \quad (15.13)$$

Betrachtet man Beschleunigungsfunktionen $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v)$, erhält man ein lineares Gleichungssystem von der Form wie die Gln. (15.8) und (15.9), wenn man a_s , a_v und a_{v_l} folgendermaßen durch die entsprechenden Ableitungen der Beschleunigungsfunktion \tilde{a} ersetzt:

$$a_s = \tilde{a}_s, \quad a_v = \tilde{a}_v + \tilde{a}_{\Delta v}, \quad a_{v_l} = -\tilde{a}_{\Delta v}. \quad (15.14)$$

Dies gilt für alle Formeln dieses Kapitels. Beispielsweise ergibt sich für die Abhängigkeiten der Ableitungen aufgrund der Gleichgewichtsbedingung anstelle von Gl. (15.13) die Bedingung

$$\tilde{a}_s = -v'_e(s)\tilde{a}_v. \quad (15.15)$$

Die Gln. (15.8) und (15.9) kann man zu einer einzigen Gleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillatator zusammenfassen:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\eta \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (15.16)$$

mit

$$\eta = -\frac{a_v}{2} = -\frac{(\tilde{a}_v + \tilde{a}_{\Delta v})}{2}, \quad \omega_0^2 = a_s = \tilde{a}_s. \quad (15.17)$$

Mit dem Exponentialansatz

$$y = y_0 e^{\lambda t} \quad (15.18)$$

bekommt man eine quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\eta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (15.19)$$

für den im Allgemeinen komplexen Wert der Wachstumsrate $\lambda = \sigma + i\omega$ mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}. \quad (15.20)$$

Lokale Stabilität ist gegeben, wenn keine dieser beiden Lösungen wächst, also kein Realteil der Wachstumsraten positiv ist, d.h. $\sigma_{1/2} = \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) \leq 0$. Daraus folgt mit Gl. (15.17) und der für alle sinnvollen Modelle gültigen Bedingung $a_s \geq 0$ das Kriterium

$$a_v \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_v + \tilde{a}_{\Delta v} \leq 0 \quad \text{Lokale Stabilität.} \quad (15.21)$$

Zusätzlich erfolgt die Anpassung an den Gleichgewichtsabstand ohne Schwingungen, wenn die Wachstumsraten keine Imaginärteile haben, d.h. $\omega_0^2 < \eta^2$, also $a_s \leq a_v^2/4$. Drückt man a_s wieder durch die Ableitung $v'_e(s)$ der Gleichgewichtsgeschwindigkeit aus und verwendet (15.14), erhält man eine weitere Formulierung:

$$a_s \leq \frac{a_v^2}{4} \quad \text{bzw.} \quad v'_e(s) \leq \frac{-\tilde{a}_v}{4} \left(1 + \frac{\tilde{a}_{\Delta v}}{\tilde{a}_v}\right)^2 \quad \text{Schwingungsfreiheit.} \quad (15.22)$$

Zusammenfassend kann man folgende Aussagen bezüglich der lokalen Stabilität treffen:

- Da für alle sinnvollen Modelle $a_v < 0$ gilt, sind Mikromodelle in Differentialgleichungsform ohne Reaktionszeit *immer* lokal stabil.
- Die Bedingung (15.22) der Schwingungsfreiheit ist deutlich schärfer. Beispielsweise gilt für das Optimal-Velocity-Modell (OVM) mit $\tilde{a}_v = a_v = -1/\tau$ die Bedingung

$$v'_e(s)_{\text{OVM}} < \frac{1}{4\tau}. \quad (15.23)$$

Diese Bedingung ist doppelt so scharf wie die im folgenden Abschnitt herzuleitende Bedingung $v'_e(s)_{\text{OVM}} < 1/(2\tau)$ für Kolonnenstabilität. Dies gilt allgemein für Modelle ohne Sensitivität auf Geschwindigkeitsdifferenzen.

- Aber auch bei der Grenze zur Kolonneninstabilität sind die Schwingungen bei der Annäherung an das lokale Gleichgewicht nahezu unmerklich (vgl. Abb. 15.3). Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass Modelle bzw. ACC-Regler, die beim Folgen eines einzelnen Fahrzeugs wahrnehmbare Schwingungen aufweisen, mit großer Sicherheit kolonneninstabil sind. Es ist sogar möglich, dass ein lokal völlig schwingungsfreies Modell kolonneninstabil ist (vgl. die Aufgabe 15.3).

Im Gegensatz zu obigen Ergebnissen für zeitkontinuierliche Modelle der Form (10.3) können zeitkontinuierliche Modelle mit *endlicher Reaktionszeit* oder als iterierte Abbildungen formulerte Modelle sehr wohl lokal instabil werden. Führt man die Stabilitätsanalyse beispielsweise für Modelle des Typs (12.1) durch, also $\frac{d}{dt}v(t + T_r) = a_{\text{mic}}(s(t), v(t), \Delta v(t))$, erhält man anstelle der quadratischen Gleichung (15.19) die transzendentale (nicht analytisch lösbar) Gleichung

$$\lambda^2 + e^{-\lambda T_r} \left(2\eta\lambda + \omega_0^2 \right) = 0. \quad (15.24)$$

Die Analyse der Lösungen dieser Gleichung ist trotz des einfachen Aussehens relativ unübersichtlich. Insbesondere werden bei hinreichend hohen Reaktionszeiten T_r (von 1 s oder mehr) die Modelle in der Regel lokal instabil.

15.4 Kolonneninstabilität

Auch wenn eine Folgefahrt hinter einem einzelnen Fahrzeug weit im stabilen Bereich liegt, können sich dennoch Schwingungen von Fahrzeug zu Fahrzeug aufschaukeln (vgl. Abb. 15.2 sowie Abb. 15.4).

In der Regel haben die bei Kolonneninstabilitäten entstehenden Schwingungen bzw. Wellen eine Wellenlänge von mindestens einem Kilometer, so dass eine einzige Stauwelle sehr viele Fahrzeuge enthält. Es liegt daher eine *Langwelleninstabilität* vor. Dieser Umstand ermöglicht kompakte und analytisch formulierbare Kriterien für die Stabilitätsgrenzen bei Fahrzeugfolge- und bei Makromodellen.

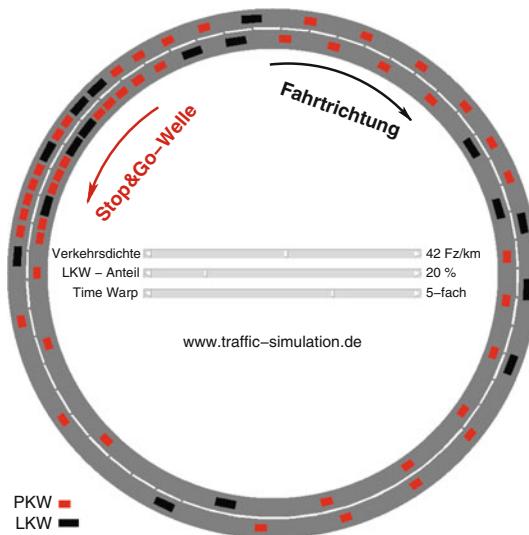


Abb. 15.4 Interaktive Simulation von Stop-and-Go-Wellen mit dem Intelligent-Driver-Modell (IDM) auf der Webseite der Autoren

15.4.1 Stabilitätsbedingungen für Fahrzeugfolgemodelle

Wir gehen von der allgemeinen Form (10.5) bzw. (10.3) zeitkontinuierlicher Fahrzeugfolgemodelle ohne Multi-Antizipation aus, betrachten aber identische Fahrer und Fahrzeuge auf homogener Strecke, also identische Modellparameter.⁶ In diesem Fall benötigt die Beschleunigungsfunktion a_{mic} keinen zusätzlichen Index α mehr und die allgemeinen Gleichungen lauten

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = v_{\alpha-1} - v_\alpha, \quad (15.25)$$

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = a_{\text{mic}}(s_\alpha(t), v_\alpha(t), v_{\alpha-1}(t)). \quad (15.26)$$

Wir gehen vom stationär-homogenen Zustand mit gleichen Nettoabständen s_e und zugehöriger Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e(s_e)$ aus und betrachten kleine Abstandsschwankungen y_α und Geschwindigkeitsschwankungen u_α um diesen stationären Zustand:

⁶ Auf Multi-Antizipation wird nur der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Man kann die komplette Stabilitätsanalyse auch mit Berücksichtigung zusätzlicher Vorder- und auch Folgefahrzeuge ausgehend von Gl. (12.19) durchführen. Die erforderlichen Verallgemeinerungen sind offensichtlich.

$$s_\alpha = s_e + y_\alpha(t), \quad (15.27)$$

$$v_\alpha = v_e + u_\alpha(t). \quad (15.28)$$

In nullter Ordnung bezüglich der Störvariablen y_α und u_α ergibt sich dieselbe Gleichgewichtsbedingung wie bei der Analyse der lokalen Stabilität. Damit bleiben das mikroskopische Fundamentaldiagramm $v_e(s)$ und die Beziehungen (15.13), (15.14) und (15.15) gültig.

In erster Ordnung ergibt sich folgendes System von linearen, gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = u_{\alpha-1} - u_\alpha, \quad (15.29)$$

$$\frac{du_\alpha}{dt} = a_s y_\alpha + a_v u_\alpha + a_{v_l} u_{\alpha-1}, \quad (15.30)$$

wobei die Ableitungen a_s , a_v und a_{v_l} wieder durch (15.11) gegeben sind. Diese Gleichungen stellen gekoppelte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar und werden durch einen *Fourier-Ansatz* folgender Form gelöst:

$$\begin{pmatrix} y_\alpha(t) \\ u_\alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{pmatrix} e^{\lambda t + i \alpha k}. \quad (15.31)$$

Dieser Ansatz entspricht gleichförmigen Stauwellen kleiner Amplitude. Die Größen haben folgende Bedeutung:

- $i = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit.
- $\lambda = \sigma + i\omega$ ist eine komplexwertige Wachstumsrate. Der Realteil σ gibt an, wie schnell die Stauwellen mit der Zeit anwachsen, während der Imaginäranteil ω angibt, wie schnell sich die Phase der Welle *aus Sicht des Autofahrers* ändert. Er durchfährt eine komplette Welle in der Zeit $2\pi/\omega$.
- Als einheitenlose Größe gibt k die Phasenverschiebung der Wellen pro Fahrzeug an und liegt im Bereich $[-\pi, \pi]$. Die Zahl der Fahrzeuge in einer Welle ist durch $2\pi/k$ gegeben. Die räumliche Wellenlänge beträgt also $(s_e + l)2\pi/k$. Die Phasengeschwindigkeit ist durch eine konstante Phase von $\exp(\lambda t + i\alpha k)$, also durch einen konstanten Imaginärteil $\omega t + \alpha k$ des Exponenten definiert. Der Fahrzeugfluss durch beispielsweise einen Wellenberg ist damit gegeben durch $\dot{\alpha} = -\omega/k$. Dies ergibt im physikalischen Raum eine Wellenausbreitungsgeschwindigkeit⁷

$$\tilde{c}_{\text{rel}} = (s_e + l) \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\rho_e k}. \quad (15.32)$$

⁷ Der Fahrzeugindex steigt entgegen der Fahrtrichtung, deshalb dreht sich das Vorzeichen um.

Auch diese Geschwindigkeit ist relativ zur Fahrzeuggeschwindigkeit zu verstehen.

- Die Stauwellen beinhalten sowohl Abstands- als auch Geschwindigkeitsänderungen. Der Quotient \hat{u}/\hat{y} der Vorfaktoren gibt deren relative Anteile an. Eine Welle mit $\hat{y} = 0$ würde beispielsweise nur aus Geschwindigkeits- und nicht aus Abstandsschwankungen bestehen.

Setzt man diesen „Stauwellenansatz“ in das lineare System ein, ergibt sich das linear-homogene 2×2 Gleichungssystem für die Amplitudenanteile

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 - e^{-ik} \\ -a_s & \lambda - (a_v + a_{v_l} e^{-ik}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0. \quad (15.33)$$

Dieses System ist nur lösbar, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Die resultierende quadratische Gleichung für die komplexe Wachstumsrate hat die Lösung

$$\lambda(k) = -\frac{p(k)}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q(k)}{p^2(k)}} \right] \quad (15.34)$$

mit den Koeffizienten

$$p(k) = -a_v - a_{v_l} e^{-ik}, \quad (15.35)$$

$$q(k) = a_s \left(1 - e^{-ik} \right). \quad (15.36)$$

Diese Lösbarkeitsbedingung besagt, dass für gegebene Phasenverschiebung k nur zwei mögliche Wachstumsraten der Stauwelle möglich sind. Zu jeder der beiden Wachstumsraten sind relative Amplitudenanteile der Geschwindigkeits- und Abstandsschwankungen \hat{u} bzw. \hat{y} (der sogenannte Eigenvektor) zugeordnet.

Das Modell ist nur dann kolonnenstabil, wenn der Realteil σ der Wachstumsrate λ für beide Lösungen (15.34) und alle möglichen Werte von $k = 0$ bis $|k| = \pi$ nicht-positiv ist. Für Modelle ohne explizite Reaktionszeit wird die Kolonne, in Übereinstimmungen mit den Beobachtungen, jedoch immer zuerst gegenüber Störungen mit sehr großer Wellenlänge $\propto 1/k$ instabil. Man muss also Gl. (15.34) nur im Limes $k \rightarrow 0$ untersuchen. Die Vorfaktoren der quadratischen Gleichung werden dazu in eine Taylor-Reihe um $k = 0$ entwickelt:

$$\begin{aligned} p(k) &= p_0 + p_1 k + \mathcal{O}(k^2), \\ q(k) &= q_1 k + q_2 k^2 + \mathcal{O}(k^3), \end{aligned} \quad (15.37)$$

mit

$$\begin{aligned}
p_0 &= -(a_v + a_{v_l}) = -\tilde{a}_v, \\
p_1 &= ia_{v_l} = -i\tilde{a}_{\Delta v}, \\
q_1 &= ia_s = i\tilde{a}_s = iv'_e(s_e)p_0, \\
q_2 &= \frac{a_s}{2} = \frac{\tilde{a}_s}{2} = \frac{v'_e(s_e)}{2}p_0.
\end{aligned} \tag{15.38}$$

Die Vorfaktoren p_0 und q_2 sind reellwertig, während p_1 und q_1 rein imaginär sind. Die durch die jeweils letzten Gleichheitszeichen in den Ausdrücken für q_1 und q_2 gegebenen Entsprechungen folgen aus den Bedingung (15.13) bzw. (15.15).

Da $q(k)$ keine Terme nullter Ordnung hat und $p_0 = -\tilde{a}_v$ gemäß den allgemeinen Kriterien an die Beschleunigungsfunktion strikt positiv ist, kann λ nur für das negative Vorzeichen der Wurzel in Gl. (15.34) positiv werden, so dass wir nur diesen Fall betrachten. Entwickelt man nun die Wachstumsrate (15.34) selbst um $k = 0$ und nutzt die für kleine (komplexwertige) ε gültige Beziehung

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

aus, erhält man bis einschließlich der zweiten Ordnung

$$\lambda = -\frac{q_1}{p_0}k + \left(\frac{q_1 p_1}{p_0^2} - \frac{q_2}{p_0} - \frac{q_1^2}{p_0^3} \right) k^2 + \mathcal{O}(k^3) \tag{15.39}$$

bzw. mit den Koeffizienten (15.38)

$$\lambda = -iv'_e k + \frac{v'_e}{a_v + a_{v_l}} \left[\frac{1}{2}(a_{v_l} - a_v) - v'_e \right] k^2 + \mathcal{O}(k^3). \tag{15.40}$$

Die Wachstumsrate λ verschwindet für $k = 0$. Dies ist direkt eine Folge der Kontinuitätsgleichung: Aufgrund der Fahrzeugerhaltung können sich Dichteschwankungen unendlicher Wellenlänge nicht mehr auflösen, denn in diesem Grenzfall können die Fahrzeuge nirgendwo hin.

Der in k lineare Term ist rein imaginär und beschreibt damit die *Ausbreitungseigenschaft* der Wellen für kleine Phasenverschiebungen. Aus $\lambda = \sigma + i\omega$ folgt direkt $\omega = -v'_e k$ und damit für die relative Ausbreitungsgeschwindigkeit (15.32) der einfache Ausdruck

$$\tilde{c}_{\text{rel}} = (s_e + l) \frac{\omega}{k} = -(s_e + l)v'_e(s_e). \tag{15.41}$$

In dieser Gleichung geht die Beschleunigungsfunktion des Modells nur indirekt über die Ableitung $v'_e(s)$ der Gleichgewichtsrelation ein. Da $v'_e(s) \geq 0$, gilt $\tilde{c}_{\text{rel}} \leq 0$, die Störungen breiten sich also, bezogen auf die Fahrzeugbewegung, nach hinten aus. Dies ist plausibel, da in der betrachteten Klasse der Fahrzeugfolgemodelle nur auf die Vorderfahrzeuge, nicht aber auf die Hinterfahrzeuge reagiert wird.

Der Term zweiter Ordnung ist rein reellwertig und beschreibt damit die *Wachstumseigenschaften* der Wellen. Insbesondere ist der Verkehrsfluss (linear) kolonnenstabil, falls dieser Term negativ ist. Da $v'(s_e) > 0$ und der Nenner $a_v + a_{v_l} = \tilde{a}_v < 0$ ist, muss die eckige Klammer der Gl. (15.40) positiv sein. Daraus folgt direkt die Stabilitätsbedingung

$$v'_e(s_e) \leq \frac{1}{2} (a_{v_l} - a_v) \quad \text{Kolonnenstabilität für } \dot{v}_\alpha = a_{\text{mic}}(s_\alpha, v_\alpha, v_{\alpha-1}). \quad (15.42)$$

Für Modelle mit Beschleunigungsfunktionen in der Form $\tilde{a}(s, v, \Delta v)$ erhält man daraus mit Gl. (15.14) die alternative Bedingung

$$v'_e(s_e) \leq -\frac{\tilde{a}_v}{2} - \tilde{a}_{\Delta v} \quad \text{Kolonnenstabilität für } \dot{v}_\alpha = \tilde{a}_{\text{mic}}(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha). \quad (15.43)$$

Diskussion. Anhand dieser Stabilitätsbedingungen für mikroskopische Modelle kann man direkt die drei stabilitätsbestimmenden Einflussfaktoren ablesen. Zunächst setzt eine Instabilität einen hinreichend großen Sensitivität $v'_e(s) > 0$ der Gleichgewichtsgeschwindigkeit vom Abstand voraus. Ohne diese Sensitivität würde der in Abschn. 15.1 diskutierte Entstehungsmechanismus von Stop-and-Go-Wellen bereits im ersten Schritt zusammenbrechen, denn die nachfolgenden Fahrzeuge reagieren auf Abstandsänderungen kaum. Dies ist natürlich nur bei geringer Verkehrsichte realistisch und erklärt, warum es für Instabilitäten eines hinreichend großen Verkehrsaufkommens bedarf.

Bei hohem Verkehrsaufkommen und auch bei gebundenem Verkehr ist $v'_e(s)$ generell hoch ($1/v'_e$ hat die Größenordnung der modellierten Folgezeit) und Instabilität kann nur verhindert werden, wenn die Sensitivität der Fahrer auf Änderungen der eigenen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs hinreichend hoch ist. Die Sensitivität $a_v < 0$ auf die eigene Geschwindigkeit modelliert eine Anpassung an die gerade aktuelle Gleichgewichtsgeschwindigkeit. Der Betrag von $1/a_v$ ist damit durch die Anpassungszeit der Größenordnung 10 s gegeben. Da die Folgezeit kaum mehr als 1 s beträgt und damit bei gebundenem Verkehr $-a_v/2$ deutlich kleiner als v'_e ist, reicht selbst eine schnelle Anpassung an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit, also eine hohe *Agilität* der Autofahrer nicht allein aus, um Stabilität zu erreichen.

Zusätzlich ist eine Reaktion auf das Vorderfahrzeug nötig. Die entsprechenden Sensitivitäten a_{v_l} bzw. $a_{\Delta v}$ müssen betragsmäßig deutlich größer sein als $-a_v$, um Kolonnenstabilität zu erreichen. Dies entspricht einem *vorausschauenden* Fahrstil. Im Stop-and-Go-Mechanismus des Abschn. 15.1 bedeutet dies, dass die nachfolgenden Fahrzeuge frühzeitig auf die Bremsaktion des ersten Fahrzeugs reagieren. Damit ergeben sich höhere „Zeitpolster“ und die Stauwelle bekommt von hinten weniger „Nachschub“. Zusätzlich beschleunigen die Fahrzeuge an der Vorderseite der Stauwelle umso frühzeitiger und zügiger, je höher a_{v_l} ist. Dadurch fahren mehr

Fahrzeuge aus dem Stau heraus als stromaufwärts hinein, so dass sich sogar bereits vorhandene Stauwellen auflösen können.

15.4.2 Stabilitätsbedingungen für makroskopische Modelle

Bei der Untersuchung der Kolonnenstabilität makroskopischer Modelle gehen wir von der allgemeinen Formulierung zeitkontinuierlicher Modelle zweiter Ordnung aus (Gln. (9.7) und (9.8)). Zur effizienteren Darstellung fassen wir den lokalen bzw. nichtlokalen Anpassungsterm, den Druckterm und den Geschwindigkeitsdiffusionsterm zu einer allgemeinen makroskopischen Beschleunigungsfunktion zusammen. Ferner beschränken wir uns auf homogene Strecken.⁸ Die Ausgangsgleichungen lauten somit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (15.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = A(\rho, V, \rho_a, V_a, \rho_x, V_x, \rho_{xx}, V_{xx}). \quad (15.45)$$

Hierbei bedeuten

$$\rho_x = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}, \quad \rho_{xx} = \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \quad \rho_a = \rho(x_a, t) \text{ mit } x_a > x \quad (15.46)$$

und entsprechende Definitionen für V_x , V_{xx} und V_a . Genau wie bei den Mikromodellen werden die Modellgleichungen zunächst um den stationär-homogenen Zustand (ρ_e, V_e) mit $V_e = V_e(\rho_e)$ linearisiert. Der Ansatz

$$\rho(x, t) = \rho_e + \tilde{\rho}(x, t), \quad (15.47)$$

$$V(x, t) = V_e + \tilde{V}(x, t) \quad (15.48)$$

mit $A(\rho_e, V_e, \rho_e, V_e, 0, \dots) = 0$ führt zu den linearen partiellen, im Allgemeinen nichtlokalen Gleichungen

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_e \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} - V_e \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2}, \quad (15.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = & -V_e \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + A_\rho \tilde{\rho} + A_V \tilde{V} + A_{\rho_a} \tilde{\rho}_a + A_{V_a} \tilde{V}_a \\ & + A_{\rho_x} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + A_{V_x} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + A_{\rho_{xx}} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} + A_{V_{xx}} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (15.50)$$

⁸ Andernfalls lässt sich der Fouriermoden-Ansatz nicht durchführen.

Die bei der Linearisierung verwendeten Taylorkoeffizienten sind definiert durch die Ableitung der Beschleunigungsfunktion nach den jeweiligen Argumenten, also

$$A_\rho = \left. \frac{\partial A}{\partial \rho} \right|_e, \quad A_{\rho_a} = \left. \frac{\partial A}{\partial \rho_a} \right|_e, \quad A_{\rho_x} = \left. \frac{\partial A}{\partial \rho_x} \right|_e, \quad A_{\rho_{xx}} = \left. \frac{\partial A}{\partial \rho_{xx}} \right|_e \quad (15.51)$$

und analoge Definitionen für die Ableitungen nach V , V_a oder nach Gradienten von V . Das Subskript „e“ bedeutet, dass die Ableitungen am Gleichgewichtspunkt (ρ_e, V_e) ausgewertet werden.

Der allgemeine „Stauwellenansatz“ zur Lösung dieser Gleichungen lautet

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}(x, t) \\ \tilde{V}(x, t) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{V} \end{pmatrix} e^{\lambda t - ikx} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{V} \end{pmatrix} e^{(\sigma + i\omega)t - ikx}. \quad (15.52)$$

Im Gegensatz zum mikroskopischen Ansatz (15.31) ist dieser Ansatz im ortsfesten System formuliert. Außerdem ist die Größe k , im Gegensatz zur Darstellung bei den Mikromodellen, dimensionsbehaftet mit der Einheit m^{-1} . Sie entspricht der in der Physik üblichen Definition der *Wellenzahl*. Die Wellenlänge der beschriebenen Stauwellen ist also direkt durch $2\pi/k$ und nicht, wie im mikroskopischen Fall, durch $(s_e + I)2\pi/k$ gegeben. Bei I Fahrstreifen enthält eine Stauwelle somit $I\rho_e 2\pi/k$ Fahrzeuge und breitet sich mit der Geschwindigkeit $\tilde{c} = \omega/k$ bezüglich des ortsfesten Systems aus.

Setzt man den Ansatz (15.52) in die Gln. (15.44) und (15.45) ein, erhält man wie im mikroskopischen Fall ein algebraisches lineares Gleichungssystem für die beiden Amplituden $\hat{\rho}$ und \hat{V} :

$$\begin{aligned} \lambda \hat{\rho} &= (ikV_e - Dk^2)\hat{\rho} + ik\rho_e \hat{V}, \\ \lambda \hat{V} &= (A_\rho + A_{\rho_a} e^{-iks_a} - ikA_{\rho_x} - k^2 A_{\rho_{xx}}) \hat{\rho} \\ &\quad + (ikV_e + AV + AV_a e^{-iks_a} - ikAV_x - k^2 AV_{xx}) \hat{V}. \end{aligned}$$

Hier ist $s_a = x_a - x$ die Anticipations-Entfernung im Falle nichtlokaler Modelle.

Der weitere Verlauf der Analyse, also die Entwicklung nach langen Wellenlängen bzw. kleinen Wellenzahlen k , ist identisch zur Analyse der im Abschn. 15.4.1 beschriebenen Fahrzeugfolgemodelle. Am Ende gelangt man wieder zur Gl. (15.39) mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} p_0 &= -(AV + AV_a), \\ p_1 &= i(AV_x + s_a AV_a - 2V_e), \\ q_1 &= iV_e(AV + AV_a) - i\rho_e(A_\rho + A_{\rho_a}) = -iQ'_e p_0, \\ q_2 &= V_e(AV_x + s_a AV_a) - \rho_e(A_{\rho_x} + s_a A_{\rho_a}) - V_e^2 - DA_V. \end{aligned} \quad (15.53)$$

Das zweite Gleichheitszeichen beim Ausdruck für q_1 folgt aus der Tatsache, dass die makroskopischen Gleichungen beliebig viele, mit ρ_e parametrisierte Gleichgewichtslösungen $(\rho_e, V_e(\rho_e))$ besitzen. Aus den jeweiligen Gleichgewichtsbedingungen $A(\dots) = 0$ folgt durch Ableiten nach ρ

$$(A_\rho + A_{\rho_a}) d\rho + (A_V + A_{V_a}) \frac{dV_e}{d\rho} d\rho = 0$$

und damit

$$\frac{dV_e}{d\rho} = V'_e = -\frac{A_\rho + A_{\rho_a}}{A_V + A_{V_a}},$$

also

$$q_1 = -i V_e p_0 - i \rho_e V'_e = -i (V_e + \rho_e V'_e) p_0 = -i Q'_e p_0.$$

Aus der ersten Ordnung der Taylorentwicklung (15.39) nach Wellenzahlen bekommt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{k} = -\frac{\text{Im}(q_1)}{p_0} = Q'_e. \quad (15.54)$$

Genau wie bei den LWR-Modellen ist also auch in Modellen zweiter Ordnung die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen (zumindest bei großen Wellenlängen, $k \ll 1$) durch die Steigung des Fundamentaldiagramms gegeben. In Aufgabe 15.2 wird gezeigt, dass dies auch für Mikromodelle gilt.

Zur Stabilitätsanalyse betrachten wir wieder den Term zweiter Ordnung in Gl. (15.39). Aus der Bedingung, dass für Kolonnenstabilität der Vorfaktor (die runde Klammer in dieser Gleichung) nicht positiv sein darf, erhält man die makroskopische Stabilitätsbedingung

$$(Q'_e)^2 - i p_1 Q'_e - q_2 \leq 0. \quad (15.55)$$

Lokale Modelle. Für lokale Modelle ($A_{\rho_a} = A_{V_a} = 0$) erhält man durch Einsetzen der Koeffizienten in Gl. (15.55) und der Ersetzung $Q'_e = V_e + \rho_e V'_e$ die allgemeine Stabilitätsbedingung

$(\rho_e V'_e)^2 \leq -\rho_e (V'_e A_{V_x} + A_{\rho_x}) - D A_V$
Stabilitätsbedingung für
lokale Makromodelle.

(15.56)

Kann das lokale makroskopische Modell in der Form (9.8) geschrieben werden (alle Gradienten der Beschleunigungsfunktion können als Gradient $-1/\rho \partial P/\partial x$ eines nur von ρ abhängigen Verkehrsdrucks $P(\rho(x, t))$ geschrieben werden), spezialisiert sich Gl. (15.56) zur Bedingung

$$(\rho_e V'_e)^2 \leq P'_e - D A_V \quad \text{mit} \quad P'_e = P'(\rho_e). \quad (15.57)$$

Nichtlokale Modelle. Da die nichtlokalen Terme dieselbe Rolle spielen wie die Gradienten bei den lokalen Modellen, sind in diesem Fall in der Beschleunigungsfunk-

tion keine zusätzlichen Gradiententerme sinnvoll – zumindest keine, welche Beschleunigungen einzelner Fahrzeuge entsprechen. Schließlich repräsentieren nichtlokale Modelle genau diese Gradienten auf eine stabilere Weise. Damit gilt bei den allgemeinen Koeffizientengleichungen (15.53) $A_{\rho_x} = 0$, $A_{V_x} = 0$ und $D = 0$. Allerdings können auch durch die statistischen Eigenschaften der mikroskopischen Geschwindigkeitsdifferenzen in den makroskopischen Gleichungen Gradiententerme in Form des Druckterms $-1/\rho \frac{\partial P}{\partial x}$ auftreten (vgl. Abschn. 9.3), so dass dieser in der Form $P(x, t) = P(\rho(x, t))$ mitgeführt wird. Eine Auswertung von Gl. (15.55) führt zur allgemeinen Stabilitätsbedingung für nichtlokale Modelle wie dem GKT-Modell:

$$(\rho_e V'_e)^2 \leq P'_e - \rho_e s_a (V'_e A_{V_a} + A_{\rho_a}) \quad \begin{array}{l} \text{Stabilitätsbedingung für} \\ \text{nichtlokale Makromodelle.} \end{array} \quad (15.58)$$

Diskussion. Wie bei den Mikromodellen wächst die Neigung zu Instabilitäten mit den Sensitivitäten $|V'_e(\rho)|$ der Gleichgewichtsgeschwindigkeit bezüglich des Abstandes bzw. der Dichte. Bemerkenswerterweise taucht die Sensitivität A_V bezüglich der Gewichtsgeschwindigkeit nur gekoppelt mit der Dichtediffusion D auf, die meist gleich Null angenommen wird. Ohne Gradienten oder nichtlokale Terme, d.h. ohne irgendeine Form von Antizipation, sind die Modelle damit bedingungslos instabil! Die Gradiententerme auf der rechten Seiten der Gln (15.56) bzw. der Druckgradient der Gl. (15.57) wirken immer stabilisierend. Die nichtlokalen Terme in Gl. (15.58) sind die direkte Entsprechung der Gradiententerme in Gl. (15.56) und haben einen ähnlich stabilisierenden Effekt auf den Verkehrsstrom.

Weiterhin hängt die lineare Stabilität *nicht* von der Geschwindigkeitsdiffusion η oder anderen Diffusionstermen in der Geschwindigkeitsgleichung ab; die entsprechenden Ableitungen $A_{V_{xx}}$ oder $A_{\rho_{xx}}$ der Beschleunigungsfunktion treten nicht in den Stabilitätsbedingungen auf. Die Diffusion stabilisiert aber größere Störungen, welche nicht in den Gültigkeitsbereich von Gl. (15.56) fallen. Deshalb wird sie in einigen Modellen wie z.B. dem Kerner-Konhäuser-Modell (KK-Modell) verwendet.

15.4.3 Anwendungsbeispiele

Die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten allgemeinen Stabilitätskriterien werden nun auf die in den Kap. 9 und 10 vorgestellten makroskopischen und mikroskopischen Modelle angewandt.

Payne-Modell. Mit der Modellgleichung (9.15) ergibt sich die Beschleunigungsfunktion zu

$$A(x, t) = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Mit $A_{\rho_x} = V'_e/(2\rho\tau)$, $A_{V_x} = 0$ und $D = 0$ ergibt die Stabilitätsbedingung (15.56)

$$\rho V_e'^2 \leq -A_{\rho_x} = -\frac{V_e'}{2\rho\tau}$$

und damit (man beachte bei der Ungleichung $V_e'(\rho) < 0$)

$$-V_e'(\rho) = |V_e'(\rho)| \leq \frac{1}{2\rho^2\tau}. \quad (15.59)$$

Je agiler die Fahrer (je kleiner die kollektive Anpassungszeit τ), desto stabiler ist der Verkehrsfluss in diesem Modell.

LWR-Modelle. Im Grenzfall $\tau \rightarrow 0$ resultiert aus dem Payne-Modell das LWR-Modell mit Diffusion (vgl. Abschn. 9.4.1). Dieses ist gemäß den obigen Überlegungen bedingungslos stabil. Das klassische LWR-Modell ohne Diffusion hingegen hat nach den Kriterien unbestimmte Stabilitätseigenschaften. Da aber eine noch so kleine Dichtediffusionskonstante das Modell global stabil macht und bei der numerischen Integration immer numerische Diffusion auftritt (vgl. Abschn. 9.5, Seite 134), ist es in der praktischen Anwendung ebenfalls global stabil (theoretisch ist es marginal stabil).

Kerner-Konhäuser-Modell. Hier ist das Stabilitätskriterium (15.57) am günstigsten anzuwenden. Mit $P = \rho\theta_0$, $P'(\rho) = \theta_0$ und $D = 0$ ergibt sich

$$\rho^2(V_e')^2 \leq \theta_0. \quad (15.60)$$

GKT-Modell. Trotz der scheinbar komplexen GKT-Beschleunigungsgleichung lassen sich die zum Einsetzen in Gl. (15.58) notwendigen Ableitungen der Beschleunigungsfunktion relativ kompakt ausdrücken:

$$A_{\rho_a} = \frac{\partial A}{\partial \rho_a} = -\frac{2(V_0 - V_e)\rho_{\max}}{\tau\rho_e(\rho_{\max} - \rho_e)}, \quad (15.61)$$

$$A_{v_a} = \frac{\partial A}{\partial V_a} = \frac{2(V_0 - V_e)}{\tau\sigma_V(\rho_e)\sqrt{\pi}}. \quad (15.62)$$

Hierbei ist die Geschwindigkeitsvarianz, Gl. (9.18), durch $\sigma_V^2(\rho) = \alpha(\rho)V_e^2(\rho)$ gegeben. Einsetzen in Gl. (15.58) ergibt die GKT-Stabilitätsbedingung

$$(\rho_e V_e')^2 - P'_e + \frac{2s_a(V_0 - V_e)}{\tau} \left[\frac{\rho_e V_e'}{\sigma_V \sqrt{\pi}} - \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\max} - \rho_e} \right] \leq 0, \quad (15.63)$$

mit $s_a = \gamma V_e T$ und $P'_e = \sigma_V^2 + \rho\alpha'(\rho)V_e^2$ an der Stelle $\rho = \rho_e$.

Optimal-Velocity-Modell und Erweiterungen. Bei den mikroskopischen Modellen betrachten wir zunächst das verallgemeinerte Optimal-Velocity-Modell (OVM) mit Antizipation (Full Velocity-Difference-Modell, Abschn. 10.6). Seine Beschleunigungsfunktion $\tilde{a}_{\text{mic}}(s, v, \Delta v) = (v_{\text{opt}}(s) - v)/\tau - \gamma \Delta v$ ist als Funktion der

Geschwindigkeitsdifferenzen formuliert, weshalb Bedingung (15.43) zur Anwendung kommt. Mit $\tilde{a}_v = -1/\tau$ und $\tilde{a}_{\Delta v} = -\gamma$ erhält man direkt durch Einsetzen

$$v'_e(s) \leq \frac{1}{2\tau} + \gamma. \quad (15.64)$$

Da im gebundenen Verkehr $v'_e(s)$ von der Größenordnung der Folgezeit ist, erfordert die Stabilitätsbedingung für das OVM Anpassungszeiten τ von der Größenordnung einer halben Sekunde. Damit ist ein mit dem OVM modellierter Verkehrsfluss nur für unrealistisch agile Fahrer stabil und eine Modellerweiterung um eine Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen mit γ in der Größenordnung 1s^{-1} notwendig.

Newell-Modell. Für iterierte Abbildungen wie dem Newell-Modell (10.22) kann die Herleitung des Stabilitätskriteriums im Prinzip wie im Abschn. 15.4.1 durchgeführt werden. Man erhält allerdings anstelle von Gl. (15.34) eine transzendente Gleichung für die Wachstumsraten $\lambda(k)$, welche ähnlich wie Gl. (15.24) aussieht. Daraus lässt sich kein kompakt formulierbares Stabilitätskriterium ableiten, zumal für solche Modelle auch zuerst Instabilitäten mit kurzer Wellenlänge auftreten können. Nimmt man hingegen von vorneherein nur Instabilitätsmuster an, deren Periodendauer (im mit dem Fahrer mitbewegten System) viele Zeitschritte umfasst, verändert der Übergang von Differenzen- zu Differentialquotienten nicht die Stabilitätseigenschaften. Anstelle des Newell-Modells $v_\alpha(t+T) = v_e(s_\alpha(t))$ wird also gemäß der Entsprechung (10.10) die kontinuierliche Version mit der Beschleunigungsfunktion

$$a_{\text{mic}}^{\text{Newell}}(s, v) = \frac{v_e(s) - v}{T} \quad (15.65)$$

untersucht. Diese ist identisch zum OVM, wenn man die Geschwindigkeitsanpassungszeit gleich der Reaktionszeit setzt. Das Modell ist somit stabil, falls

$$v'_e(s) \leq \frac{1}{2T}. \quad (15.66)$$

Vereinfachtes Gipps-Modell. Hier gelten bei der Stabilitätsuntersuchung dieselben Einschränkungen wie beim Newell-Modell. Die Instabilitäten können auch kurze Wellenlängen haben. Beim ursprünglichen Gipps-Modell sind dies in der Tat die ersten Instabilitäten. In der vereinfachten Version (11.8) mit Gl. (11.7) hingegen treten zuerst Störungen mit langen Wellenlängen auf, die mit dem zeitkontinuierlichen Effektivmodell ohne explizite Reaktionszeit erfasst werden können. Dessen Beschleunigungsfunktion $a(s, v, v_l)$ ist im gebundenen Verkehr⁹ gegeben durch

⁹ Ansonsten können keine Instabilitäten auftreten.

$$a_{\text{mic}}^{\text{Newell}}(s, v, v_l) = \frac{v_{\text{safe}}(s, v_l) - v}{T} = \frac{\sqrt{b^2 T_r^2 + v_p^2 + 2bs} - bT_r - v}{T}. \quad (15.67)$$

Daraus ergibt sich für $v < v_0$ (d.h. gebundenen Verkehr)

$$v'_e(s) = \frac{1}{T}, \quad a_s = \frac{b}{T(bT + v_e)}, \quad a_v = -\frac{1}{T}, \quad a_{v_l} = \frac{v_e}{bT + v_e}. \quad (15.68)$$

Die Stabilitätsbedingung (15.42) ist damit gegeben durch

$$\frac{1}{T} \leq \frac{1}{2T} \left(1 + \frac{v_e}{v_e + bT} \right). \quad (15.69)$$

Da diese Bedingung nie erfüllt ist, ist ein durch dieses Modell dargestellter gebundener Verkehr also immer instabil! Allerdings ist die Instabilität immer konvektiver Natur (siehe Abschn. 15.5). Außerdem sind bei kleinen Werten des Verzögerungsparameters b die Wachstumsraten so klein ($1/\sigma$ ist dann von der Größenordnung einer Stunde), dass Störungen erst über viele Kilometer merklich wachsen (vgl. Abb. 11.1). Dann haben die Störungen aber in der Regel den Staubereich bereits verlassen und sich danach aufgelöst. Damit ist das Modell bei kleinen Werten von b (etwa unterhalb 1 m/s^2) de facto marginal stabil.

Intelligent-Driver-Modell. Die Beschleunigungsfunktion des Intelligent-Driver-Modells (IDM) ist vom Typ $\tilde{a}(s, v, \Delta v)$. Da die Ableitung \tilde{a}_v bezüglich v einen deutlich längeren Ausdruck ergeben würde als die bezüglich des Nettoabstandes s , wird mit Hilfe der Relation (15.15) $\tilde{a}_v = -\tilde{a}_s/v'_e(s)$ gesetzt. Damit lautet Gl. (15.43)

$$v'_e(s_e) \leq \frac{\tilde{a}_s}{2v'_e(s_e)} - \tilde{a}_{\Delta v}. \quad (15.70)$$

Mit den Ableitungen

$$\tilde{a}_s^{\text{IDM}} = \frac{2a}{s_e} \left(\frac{s_0 + v_e T}{s_e} \right)^2 \quad \text{und} \quad \tilde{a}_{\Delta v}^{\text{IDM}} = -\frac{v_e}{s_e} \sqrt{\frac{a}{b}} \left(\frac{s_0 + v_e T}{s_e} \right) \quad (15.71)$$

ergibt sich schließlich (Abb. 15.5)

$$(v'_e)^2 \leq \frac{a(s_0 + v_e T)}{s_e^2} \left[\frac{s_0 + v_e T}{s_e} + \frac{v_e v'_e}{\sqrt{ab}} \right]. \quad (15.72)$$

Die Stabilität wächst also mit dem Beschleunigungsparameter a (die rechte Seite von Gl. (15.72) wird größer, vgl. auch Abb. 15.5) und sinkt mit s_0 (die rechte Seite wird kleiner).

Insbesondere gilt im Grenzfall $v_e \rightarrow 0$ mit $s_e \rightarrow s_0$ und $v'_e(s_e) = 1/T$ die Bedingung

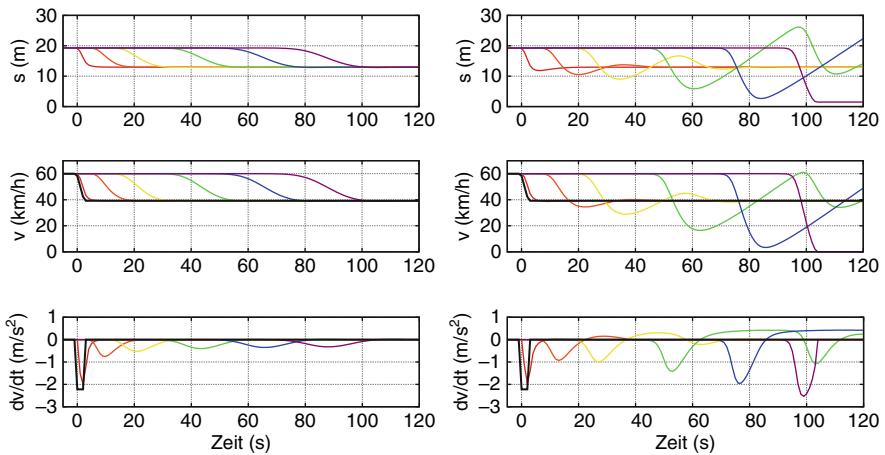


Abb. 15.5 Kolonneninstabilität beim IDM bei der Reaktion auf ein Bremsmanöver des Führungs-fahrzeugs (schwarze, dicke Linien). Gezeigt ist das erste, 10., 20., 40., 60. und 80. Fahrzeug der anfänglich im Gleichgewicht deutlich unterhalb der Wunschgeschwindigkeit ($v_0 = 120\text{ km/h}$) fahrenden Kolonne. *Linke Spalte:* Kolonnenstabile Verhalten (Parameter $T = 1\text{ s}$, $s_0 = 2\text{ m}$, $a = b = 2\text{ m/s}^2$). *Rechte Spalte:* Das IDM wird durch Reduktion des Beschleunigungsparameters auf $a = 0.6\text{ m/s}^2$ kolonneninstabil

$$a \geq \frac{s_0}{T^2}. \quad (15.73)$$

Falls das IDM für höhere Geschwindigkeiten bzw. Abstände kolonneninstabil wird, aber Gl. (15.73) erfüllt ist, spricht man auch von *Restabilisierung*. In diesem Fall würde gebundener Verkehr mit höheren Flüssen instabil sein, aber durch sehr starke Engstellen verursachte Staus mit dementsprechend sehr geringen Geschwindigkeiten stabil, so dass der Verkehr dann „zähfließend“ ist. Dies wird in Abschn. 16.2 ausführlich diskutiert.

15.5 Konvektive Instabilität

Um zumindest näherungsweise ein analytisches Kriterium für den Unterschied zwischen konvektiver und absoluter Instabilität zu erhalten, geht man direkt von der Definition (15.4) aus. Man untersucht also, ob sich eine anfangs nahezu punktförmige Störung stromaufwärts und -abwärts ausbreitet (absolute Instabilität) oder ausschließlich in eine Richtung, also entweder stromaufwärts oder stromabwärts (konvektive Instabilität). Da alle folgenden Überlegungen von Langwelleninstabilitäten ausgehen und auf der linearen Wachstumsrate $\lambda(k)$ in der Form (15.34) aufzubauen, die sich jeweils aus den mikroskopischen und makroskopischen Lösbarkeitsbedingungen (15.33) bzw. (15.4.2) ergibt, sind die Ergebnisse gleichermaßen für Mikro- und Makromodelle gültig.

Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen werden nun die Wachstumsraten nicht um $k = 0$ Taylor-entwickelt, sondern um die Wellenzahl

$$k_0 = \arg \max_k (\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}(k))) \quad (15.74)$$

der Störung, welche am schnellsten anwächst. Die dazugehörige maximale Wachstumsrate

$$\sigma_0 = \sigma(k_0) = \operatorname{Re}(\lambda(k_0)) \quad (15.75)$$

ist wegen der Voraussetzung linearer Kolonneninstabilität natürlich positiv. Abbildung 15.6 zeigt für das IDM, dass die Wellenzahl ungleich Null ist und mit dem Abstand von der linearen Stabilitätsgrenze (diese entspricht hier einem Wert von $a = 1.10 \text{ m/s}^2$) zunimmt. Dies kommt daher, dass aufgrund der Fahrzeugerhaltung die Störung mit der Wellenzahl $k = 0$ immer die Wachstumsrate Null hat und aus Symmetrie- und Stetigkeitsgründen die Tangentensteigung $\sigma'(0)$ ebenfalls verschwindet. Die Instabilität bleibt aber langwelliger Natur: Der Wert $k_0 = 0.132$ der mittleren Kurve in Abb. 15.6 (Grenze zwischen konvektiver und absoluter Instabilität) entspricht Stauwellen mit $2\pi/k_0 \approx 47$ Fahrzeugen pro Welle und Fahrstreifen bzw. einer Wellenlänge von knapp 1.3 km. Die dazugehörige Wachstumsrate $\sigma_0 = 0.0017 \text{ s}^{-1}$ entspricht einem Wachstum um den Faktor e alle zehn Minuten.¹⁰

Die Amplitude $U(x, t)$ der Störungen ergibt sich aus der lokalen, durch Gl. (15.1) beschriebenen Anfangsstörung und der durch Gl. (15.34) gegebenen komplexen Wachstumsrate (mit dem Minuszeichen vor der Quadratwurzel) in folgenden Schritten:

- Aufteilen der Anfangsbedingung in Anteile mit verschiedenen Wellenzahlen durch Fouriertransformation und der Näherung $k \ll 1$ (Mikromodelle) bzw. $k \ll \rho_e$ (Makromodelle).

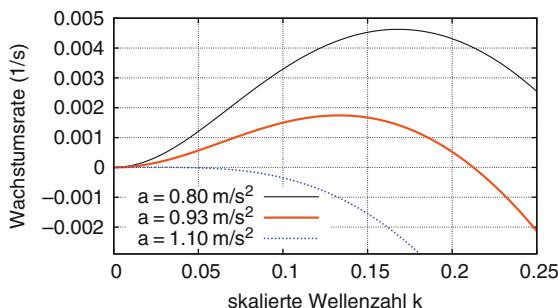


Abb. 15.6 Lineare Wachstumsrate des Intelligent-Driver-Modells (IDM) bei gebundenem Verkehr der Geschwindigkeit $v_e = 48 \text{ km/h}$ in Abhängigkeit der auf den Wertebereich $[-\pi, \pi]$ skalierten Wellenzahl k und des IDM-Parameters a . Die restlichen IDM-Parameter sind $v_0 = 120 \text{ km/h}$, $T = 1.5 \text{ s}$, $s_0 = 2 \text{ m}$, $b = 1.3 \text{ m/s}^2$ bei einer Fahrzeuglänge von $l = 5 \text{ m}$

¹⁰ Auch ein Indiz dafür, dass es sehr lange dauern kann, bis aus einer Störung ein richtiger Stau entsteht.

- Zeitentwicklung der Anteile mit Wellenzahl k durch Gl. (15.31) für Mikromodelle bzw. Gl. (15.52) für Makromodelle.
- Im Falle von Mikromodellen Transformation in ein ortsfestes Bezugssystem mit Metern anstatt des Gleichgewichts-Bruttoabstandes als Einheit des Ortes.
- Zusammenfassen der Anteile mit verschiedenen Wellenzahlen (inverse Fouriertransformation).

Dieser letzte Schritt lässt sich analytisch durchführen, wenn man die Wachstumsrate um die Wellenzahl k_0 bis einschließlich der zweiten Ordnung Taylor-entwickelt und das entstehende komplexe Gaußintegral ausführt. Als Ergebnis erhält man die raumzeitliche Ausbreitung der anfangs eng umgrenzten Störung in der Form $U(x, t) = \operatorname{Re}(\tilde{U}(x, t))$ mit der komplexen Störungsgröße (vgl. Abb. 15.8)

$$\tilde{U}(x, t) \propto \exp\left[i(k_0^{\text{phys}} x - \omega_0 t)\right] \exp\left[\left(\sigma_0 + \frac{(v_g - \frac{x}{t})^2}{2(i\omega_{kk} - \sigma_{kk})}\right)t\right]. \quad (15.76)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind in folgender Tabelle gegeben:

Größe in (15.76)	Mikromodelle	Makromodelle
k_0^{phys}	$\rho_e \arg \max_k \operatorname{Re} \lambda(k)$	$k_0 = \arg \max_k \operatorname{Re} \lambda(k)$
σ_0	$\operatorname{Re} \lambda(k_0)$	$\operatorname{Re} \lambda(k_0)$
ω_0	$v_e \rho_e k_0 + \operatorname{Im} \lambda(k_0)$	$\operatorname{Im} \lambda(k_0)$
v_g	$v_e + \operatorname{Im} \lambda'(k_0)/\rho_e$	$\operatorname{Im} \lambda'(k_0)$
σ_{kk}	$\operatorname{Re} \lambda''(k_0)/\rho_e^2$	$\operatorname{Re} \lambda''(k_0),$
ω_{kk}	$\operatorname{Im} \lambda''(k_0)/\rho_e^2$	$\operatorname{Im} \lambda''(k_0).$

Anhand von Ausdruck (15.76) sieht man, dass sich einzelne Wellen mit der *Phasengeschwindigkeit* $v_\phi = \omega_0/k_0^{\text{phys}}$ bewegen (erster Faktor dieser Gleichung), während sich die Störung als ganzes mit der *Gruppengeschwindigkeit* v_g ausbreitet (zweiter Faktor) und die Amplitude im Zentrum mit der Rate σ_0 wächst. Abbildung 15.7 zeigt, dass sich beide Geschwindigkeiten im Allgemeinen voneinander und von der LWR-Ausbreitungsgeschwindigkeit $\tilde{c} = \lim_{k \rightarrow 0} v_\phi(k)$ unterscheiden.

In Abb. 15.8 sieht man direkt die Konsequenzen dieser unterschiedlichen Geschwindigkeiten: Da hier v_g wesentlich weniger negativ ist als v_ϕ , entstehen die einzelnen Wellen am stromabwärtigen Rand der Störung und laufen mit der Phasengeschwindigkeit durch die Störung hindurch. Die Abbildung zeigt, dass trotz der vielen verwendeten Näherungen der analytische Ausdruck (15.76) bis in die Einzelheiten mit der Simulation übereinstimmt.

Wendet man nun auf die Lösung (15.76) direkt die Definition (15.4) konvektiver Instabilität an, so erhält man folgende Bedingungen:

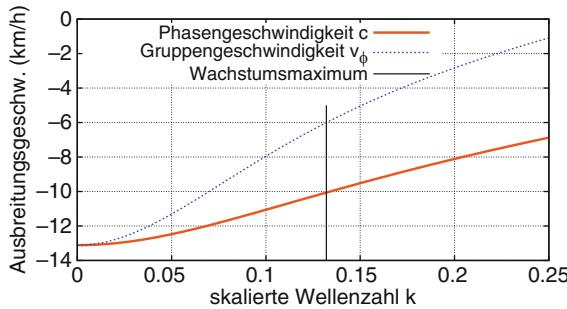


Abb. 15.7 Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_\phi(k)$ und Gruppengeschwindigkeit $v_g(k)$ für das IDM mit $a = 0.93 \text{ m/s}^2$ und den restlichen IDM-Parametern sowie v_e wie in Abb. 15.6

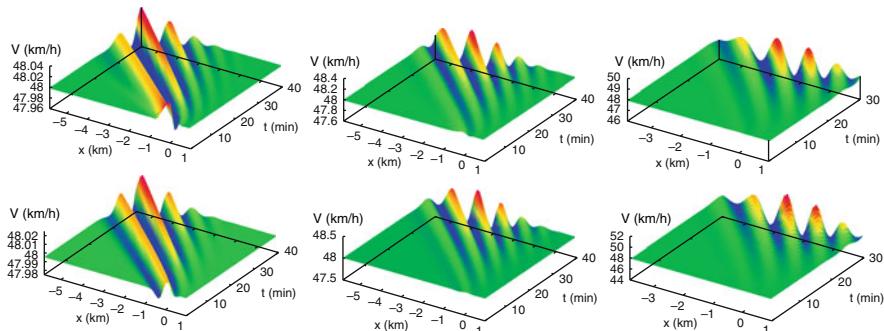


Abb. 15.8 Raumzeitliche Ausbreitung einer anfänglich nahezu punktförmigen Störung $U(x, t)$ der Gleichgewichtsgeschwindigkeit $v_e = 48 \text{ km/h}$ im konvektiv instabilen Bereich (*links*, IDM-Parameter $a = 1 \text{ m/s}^2$), an der aus (15.77) berechneten Grenze zur absoluten Instabilität (*Mitte*, $a = 0.93 \text{ m/s}^2$) und im Bereich absoluter Instabilität (*rechts*, $a = 0.85 \text{ m/s}^2$) gemäß analytischer Näherung (15.76) (*oben*) und aus einer IDM-Simulation (*unten*). Die weiteren IDM-Parameter sind dieselben wie in Abb. 15.6

$$0 < \sigma_0 \leq \frac{v_g^2}{2D_2}, \quad D_2 = -\sigma_{kk} \left(1 + \frac{\omega_{kk}^2}{\sigma_{kk}^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Konvektive} \\ \text{Instabilität.} \end{array} \quad (15.77)$$

Das erste Ungleichheitszeichen besagt, dass der Verkehrsfluss linear instabil ist, während das zweite Ungleichheitszeichen aussagt, dass die Instabilität keine absolute ist. Als wesentliches Ergebnis erhalten wir, dass der Bereich der Wachstumsraten mit konvektiver Instabilität mit dem *Quadrat* der Gruppengeschwindigkeit wächst und umgekehrt proportional zur Dispersion zweiter Ordnung D_2 ist. Diese Dispersion hat dieselbe Einheit, Größenordnung ($100 \text{ m}^2/\text{s}$) und Wirkung wie Diffusionsterme in Makromodellen. Ist man hinreichend weit auf der „gestauten“ Seite des Fundamentaldiagramms, so ist v_g betragsmäßig groß, die Dispersionswerte sind klein und als Ergebnis sind die Instabilitäten *fast immer* konvektiver Natur. Gleichung (15.77)

erlaubt auch eine sich in Flussrichtung ausbreitende konvektive Instabilität ($v_g > 0$) wie in den ursprünglichen hydrodynamischen Systemen. Da aber die in diesem Fall anfänglich vorwärtslaufenden Stauwellen bei Einsetzen der Nichtlinearitäten ihre Richtung umkehren (ein Beispiel ist in Abb. 17.3 zu sehen), ist dieser Fall für die Verkehrsdynamik nicht bedeutsam. Für negative Gruppengeschwindigkeiten hingegen wird die konvektive Natur nicht von den nun zu besprechenden Nichtlinearitäten beeinträchtigt.

15.6 Nichtlineare Instabilitäten und das Stabilitätsdiagramm

Alle bisherigen Analysen bezogen sich auf kleine Störungen und damit auf *lineare Stabilität*. Für große Störungen, insbesondere für einmal entstandene Stop-and-Go-Wellen, sind nur wenige analytische Aussagen möglich. Vielmehr untersucht man diese in der Regel direkt durch Simulationen in möglichst einfachen, wohldefinierten Systemen. Das für diese Zwecke am häufigsten verwendete *toy system* ist eine geschlossene homogene Ringstraße mit einem Fahrstreifen und identischen Fahrzeugen und Fahrern. Um eine Abhängigkeit vom Umfang des Rings zu vermeiden (*finite-size effects*), sollte der Ring 500 Fahrzeuge oder mehr enthalten. Der einzige Steuerparameter (*control parameter*) ist die globale Dichte ρ_e . Untersucht man das Modellverhalten, indem man den Wertebereich $[0, \rho_{\max}]$ des Steuerparameters durchfährt, erhält man ein sogenanntes *Stabilitätsdiagramm*.

Obwohl dieses System nicht realistisch ist (in realen Systemen wirkt der Fluss und nicht die Dichte als Steuerparameter; außerdem fehlen Engstellen sowie die Möglichkeit für konvektive Instabilitäten), lassen sich aus dem Stabilitätsdiagramm weitgehende Aussagen auch über reale offene Systeme mit Engstellen machen (Abschn. 16.2). Der große Vorteil des Stabilitätsdiagramms ist, dass es ausschließlich Modelleigenschaften und Parameterwerte, aber keine Systemeigenschaften widerspiegelt.

Zur Erstellung von Stabilitätsdiagrammen wie denen der Abb. 15.9 wird die Simulation bei gegebener globaler Dichte einmal mit einer sehr kleinen und einmal mit einer maximalen anfänglichen Störung gestartet¹¹ und festgestellt, ob sich permanente, den Ring umkreisende Stauwellen bilden oder sich die Störung auflöst. Dies wird mit anderen Werten der globalen Dichte wiederholt und so der Wertebereich des Steuerparameters abgetastet. Das resultierende Stabilitätsdiagramm hat im Allgemeinen folgende Bereiche:

- Absolute Stabilität bei globalen Dichten ρ_e unterhalb von ρ_1 ,
- *Metastabilität* im Bereich $\rho_1 \leq \rho_e < \rho_2$. In diesem Bereich lösen sich hinreichend kleine Störungen auf, während sich große Störungen zu permanenten Stop-and-Go-Wellen entwickeln (Abb. 15.10),

¹¹ Anstelle der Simulation bei kleiner Störung kann man natürlich die analytischen Ergebnisse heranziehen. Es bietet sich aber an, durch Vergleich der analytischen und numerischen Resultate die Simulation (und die Annahmen hinter den analytischen Formeln) zu testen.

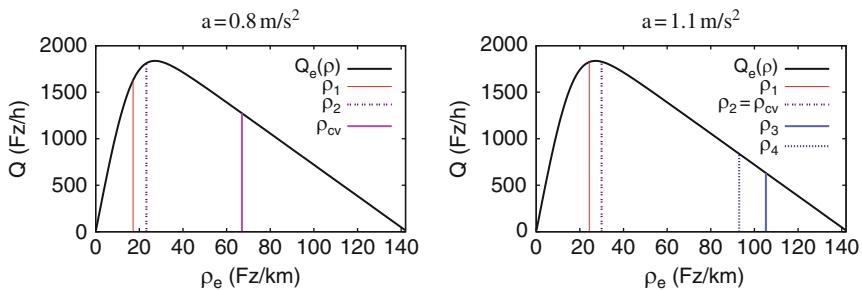


Abb. 15.9 Stabilitätsdiagramm des IDM für zwei Werte des IDM-Beschleunigungsparameters und sonstigen Parametern wie in den Abb. 15.6, 15.7, und 15.8)

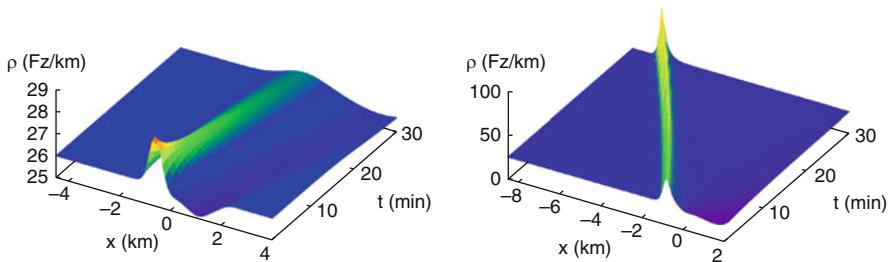


Abb. 15.10 Ein metastabiler Dichtebereich des Stabilitätsdiagramms der Abb. 15.9 ($\rho = 26 \text{ Fz/km}$): Kleine Störungen vergehen (links), während große zu beständig umlaufenden Stauwellen führen (rechts)

- absolute lineare Instabilität im Bereich $\rho_2 \leq \rho_e < \rho_{cv}$,
- konvektive lineare Instabilität,¹² im Bereich $\rho_{cv} \leq \rho_e < \rho_3$.
- konvektive Metastabilität im Bereich $\rho_3 \leq \rho_e < \rho_4$,
- und absolute Stabilität für $\rho_e \geq \rho_4$.

15.6.1 Stabilitätsklassen

Die Bereiche folgen fast immer in dieser Reihenfolge¹³, also $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_{cv} \leq \rho_3 \leq \rho_4$, aber im Allgemeinen weisen nicht alle Modelle und alle Kombinationen der Modell-Parameter alle Bereiche auf. In Abb. 15.9 fehlen beispielsweise im linken Diagramm die Bereiche oberhalb der Grenze ρ_3 , während das rechte Stabilitätsdia-

¹² Dazu benötigt man theoretisch einen unendlichen Umfang des Rings. In der Praxis muss der Umfang so groß sein, dass während der Simulationszeit kein Fahrzeug um das System fahren kann.

¹³ In einem engen Parameterbereich ist ein an beiden Seiten von konvektiver Instabilität eingebetteter Dichtebereich absoluter Instabilität möglich.

gramm keinen Bereich absoluter Instabilität aufweist. Generell können bis auf den ersten Bereich alle Bereiche weitgehend unabhängig voneinander auch verschwinden.¹⁴ Bei der Analyse realer offener Systeme mit Engstellen zeigt sich, dass die wesentliche raumzeitliche Dynamik von nur wenigen Kombinationen existierender Bereiche abhängt. Allerdings spielt zusätzlich die relative Lage dieser Bereiche zum Maximalflusszustand ($\rho_e = \rho_K$) eine Rolle. Dies führt zur Einteilung in folgende *Stabilitätsklassen*:

Klasse 1a: Das Modell wird bereits vor dem Flussmaximum instabil und bleibt es im gesamten Bereich des gestauten Verkehrs: $\rho_2 < \rho_K$, $\rho_3 = \rho_4 = \rho_{\max}$. Da in der Nähe des Kapazitätsmaximums die Ausbreitungsgeschwindigkeiten verschwinden, ist die Instabilität dort gemäß Gl. (15.77) eine absolute. Sie bleibt meist in einem größerem Dichtebereich absolut, ist aber nahe der maximalen Dichte normalerweise konvektiv.

Klasse 1b: Der Verkehrsfluss „restabilisiert“ sich für sehr hohe Dichten, d.h. gleichmäßig „zähfließender“ Verkehr ist möglich: $\rho_2 < \rho_K < \rho_{cv} < \rho_3 < \rho_{\max}$.

Klasse 2a: Das Modell wird erst bei gestautem Verkehr (also auf der rechten Seite des Fundamentaldiagramms) instabil und es gibt keine Restabilisierung: $\rho_2 > \rho_K$, $\rho_3 = \rho_4 = \rho_{\max}$. Die Instabilität ist meist im gesamten Dichtebereich konvektiver Natur, kann aber in der Nähe von ρ_K einen kleinen Bereich absoluter Instabilität aufweisen.

Klasse 2b: Wie Klasse 2a, aber mit Restabilisierung, $\rho_3 < \rho_{\max}$.

Klasse 3: Absolute Stabilität, $\rho_1 = \rho_{\max}$.

Im Allgemeinen kann ein bestimmtes Modell je nach Parameterkombination verschiedene Stabilitätsklassen aufweisen. Abbildung 15.11 zeigt, dass das IDM sogar alle Stabilitätsklassen annehmen kann. An diesem Modell lassen sich auch die wichtigsten Einflussfaktoren der Stabilitätsklassen diskutieren:

Agilität: Je höher der Beschleunigungsparameter a , desto agiler ist der Fahrer und desto kleiner ist die Geschwindigkeitsanpassungszeit. Mit steigender Beschleunigung reicht deshalb das Modell von Klasse 1 (selbst bei freiem Verkehr sind Instabilitäten möglich) über Klasse 2 (Instabilitäten nur bei gebundenem Verkehr) bis zur Klasse 3 (absolute Stabilität in allen Situationen, vgl. auch Abb. 15.5).

Netto-Zeitlücke: Je kleiner die Nettozeitlücke, desto höher ist die Kapazität. Da die Fahrer dann aber auch weniger Spielraum zum Reagieren haben, wird der Verkehrsfluss instabiler. Bemerkenswerterweise betrifft dies aber nur die Restabilisierung bei hohen Dichten, während die Möglichkeit von Instabilitäten bei freiem Verkehr weitgehend von a beeinflusst wird.

¹⁴ Es ist allerdings schwierig, Modelle und Parameterkombinationen zu finden, die absolut stabile und metastabile, nicht aber instabile Bereiche enthalten.

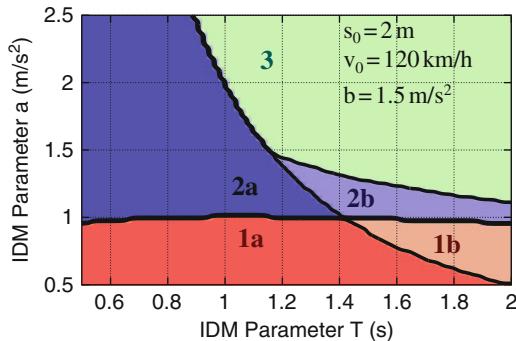


Abb. 15.11 Stabilitätsklassendiagramm des IDM im Parameterraum. Gezeigt ist die Zugehörigkeit zu einer der Stabilitätsklassen in Abhängigkeit des Folgezeitparameters T und der maximalen Beschleunigung a (Fahrzeuglänge 5 m)

Antizipation: Durch Skalierung des IDM kann man zeigen (vgl. Aufgabe 15.7), dass sich an der Stabilitätsklasse bei Erniedrigung der Wunschverzögerung (entspricht einer Erhöhung der Antizipation) um den Faktor $f_b < 1$ nichts ändert, wenn man die Klasse in Abb. 15.11 an der Stelle $T\sqrt{f_b}$ und a/f_b abliest sowie die Wunschgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{f_b}$ reduziert. Erhöht man beispielsweise die Antizipation durch Halbierung von b , so ist der dadurch hervorgerufene Effekt derselbe, als wenn man b unverändert ließe, aber a verdoppelt, sowie T und v_0 um den Faktor $\sqrt{2}$ reduziert. Gemäß der Abbildung wirkt dies erwartungsgemäß stabilisierend.¹⁵

Übungsaufgaben

15.1 Charakterisierung von Instabilitätsmustern

Betrachten Sie die in Abb. 15.1 schematisch gezeigte Instabilität. Handelt es sich um eine lokale oder eine Kolonneninstabilität? Ist sie absolut oder konvektiv, linear oder nichtlinear?

15.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stauwellen in Mikromodellen

Zeigen Sie, dass sich aus der mikroskopischen Ausbreitungsgeschwindigkeit (15.41) die Beziehung $\tilde{c}(\rho) = Q'_e(\rho)$ für die Ausbreitungsgeschwindigkeit makroskopischer Wellen ergibt. Geben Sie dazu die Ausbreitungsgeschwindigkeit im ortsfesten System an und drücken Sie mikroskopische durch makroskopische Größen aus.

15.3 Stabilitätsgrenzen beim Velocity-Difference-Modell

Gegeben ist die Modellgleichung (10.21) des Velocity-Difference-Modells mit einer

¹⁵ Es ändert sich allerdings nichts an der Restabilisierung, die nicht von b abhängt: Gilt $a \geq s_0/T^2$, so fällt das Modell in eine der Klassen 1b, 2b oder 3, ansonsten in die Klassen 1a oder 2a.

Geschwindigkeitsanpassungszeit $\tau = 5$ s und einem dreieckigen Fundamentaldiagramm mit der mikroskopischen Relation $v_e(s) = \min(s/T, v_0)$ mit $T = 1$ s. Wie hoch muss die Sensitivität γ auf Geschwindigkeitsdifferenzen mindestens sein, um (i) lokale Stabilität, (ii) Schwingungsfreiheit bei der Folgefahrt, (iii) Kolonnenstabilität zu gewährleisten?

15.4 Stabilität des Optimal-Velocity-Modells im Vergleich zum Payne-Modell

Zeigen Sie durch entsprechende Transformation der Funktionen der optimalen Geschwindigkeit (10.19), dass für das OVM das Kriterium für Kolonnenstabilität äquivalent zur Stabilitätsbedingung (15.59) des Payne-Modells ist.

15.5 Stabilitätsbereiche im Payne- und im Kerner-Konhäuser-Modell

Betrachten Sie das Payne- und das Kerner-Konhäuser- (KK-) Modell mit jeweils dreieckigem Fundamentaldiagrammen für $Q_e(\rho) = \min(V_0\rho, 1/T(1 - l_{\text{eff}}\rho))$ und den Parametern $l_{\text{eff}} = 6$ m, $V_0 = 144$ km/h und $T = 1.1$ s. (i) Zeigen Sie, dass das Payne-Modell für beliebige Dichten stabil ist, falls $\tau < T/2$. (ii) Legen Sie die Geschwindigkeitsvarianz θ_0 im KK-Modell so fest, dass das Modell in dem Dichtebereich von 20 Fz/km bis 50 Fz/km instabil ist.

15.6 Stabilität des GKT-Modells

Betrachten Sie hohe Verkehrsdichten, so dass der Variationskoeffizient σ_V der Geschwindigkeiten als konstant angesehen werden kann. Zeigen Sie, dass das GKT-Modell ohne Antizipation ($\gamma = 0$ bzw. Antizipationsdistanz $s_a = 0$) immer instabil ist, ansonsten aber bei hinreichend hohen Verkehrsdichten immer stabil wird bzw. bleibt.

15.7 Stabilitätsklassen-Diagramm des IDM für andere Werte von b und s_0

Zeigen Sie, dass sich bei Änderung des Parameters b des Intelligent-Driver-Modells (IDM) um den Faktor f_b und des Parameters s_0 um den Faktor f_s an der Stabilitätsklasse des IDM in Abb. 15.11 nichts ändert, wenn man gleichzeitig a mit dem Faktor f_b , T mit dem Faktor $\sqrt{f_s/f_b}$, v_0 mit dem Faktor $\sqrt{f_s f_b}$ sowie die Fahrzeuglänge mit dem Faktor f_s multipliziert. Formulieren Sie dazu das IDM mit einheitenlosen Orts- und Zeitvariablen, welche das Vielfache der Einheitslänge s_0 bzw. Einheitszeit $\sqrt{s_0/b}$ angeben.

15.8 Fundamentaldiagramm mit Hysterese

Ausgehend von Verkehrsmessungen und Detektordaten wurden auf einem Autobahnabschnitt folgende Größen ermittelt: mittlere Fahrzeuglänge $l = 4.67$ m, mittlerer Abstand bei zähfließendem Verkehr $s = s_0 + vT$ mit $s_0 = 2$ m und $T = 1.6$ s, (konstante) Geschwindigkeit bei freiem Verkehr 120 km/h, Verkehrsdichte beim Zusammenbruch freier Verkehr \rightarrow Stau 20 Fz/km pro Fahrstreifen. Aus den Angaben folgt, dass es in einem gewissen Dichtebereich zwei Werte des Verkehrsflusses geben kann.

1. Bei welchem Verkehrsfluss bricht freier Verkehr (im Mittel) zusammen, d.h., bei welchem Fluss endet der „freie Zweig“ des Fundamentaldiagramms?
2. Ermitteln Sie den „gestauten Zweig“ des Fundamentaldiagramms. Für welche Verkehrsdichte schneidet dieser den freien Zweig?

3. Am Staukopf herrschen stationäre Verhältnisse und beim Ausfluss ändern sich Fluss und Dichte annähernd entlang des gestauten Zweigs des Fundamentaldiagramms. Wie groß ist der Ausfluss aus den Stau? Wie groß ist die Dichte im freien Verkehr hinter der Ausflusszone? Wie groß ist der „Capacity drop“ in Fz/h pro Fahrstreifen und relativ? Für welchen Bereich der Dichte („bistabiler Bereich“) sind also zwei Flusswerte möglich?
4. Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm.

Literaturhinweise

Helbing, D.: Verkehrsdynamik. Springer, Berlin (1997)

Wilson, R.: Mechanisms for spatio-temporal pattern formation in highway traffic models. Philos. Trans. R. Soc. A **366**, 2017–2032 (2008)

Huerre, P., Monkewitz, P.: Local and global instabilities in spatially developing flows. Annu. Rev. Fluid Mech. **22**, 473–537 (1990) 473–537

Kapitel 16

Phasendiagramm der Stauzustände

Menschen mit einer neuen Idee gelten so lange als Spinner, bis sich die Sache durchgesetzt hat.

Mark Twain

16.1 Von geschlossenen zu offenen Systemen

Im vorhergehenden Kapitel wurden die Stabilitätseigenschaften von Verkehrsflussmodellen im einfachsten System, einer geschlossenen homogenen Ringstrecke, untersucht und die Ergebnisse in Form eines *Stabilitätsdiagramms* zusammengefasst (Abschn. 15.6). Für ein Verständnis der Dynamik des realen Straßenverkehrs ist jedoch die Übertragung dieser Ergebnisse auf offene, inhomogene Strecken nötig.

Dies gelingt, indem die Erkenntnisse der Modellierung von Engstellen in LWR-Modellen (Abschn. 8.4.3) und der im Stabilitätsdiagramm zusammengefassten Stabilitätseigenschaften kombiniert werden. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass im Fall gebundenen Verkehrs die Engstelle durch ihre Kapazität den Verkehrsfluss vorgibt. Allerdings ist diese Kapazität im Allgemeinen nicht, wie bei den LWR-Modellen, durch das Maximum des an der Engstelle gültigen Fundamentaldiagramms (bei Zufahrten abzüglich des Rampenflusses) gegeben. Vielmehr existiert bei Modellen mit dynamischen Instabilitäten in der Regel eine Flussreduktion an der Engstelle, sobald der Verkehr zusammengebrochen ist. Für die Stauausbreitung ist damit die kleinere *dynamische Kapazität* K_B^{dyn} der Engstelle entscheidend:

$$K_B^{\text{dyn}} = K_B(1 - \varepsilon). \quad (16.1)$$

Sie unterscheidet sich von der für LWR-Modelle relevanten *statischen Kapazität* $K_B = IQ_{\max}^B$ durch einen *capacity drop* genannten relativen Beitrag ε , der in der Größenordnung von 10% liegt und im Allgemeinen nur numerisch bestimmt werden kann. Dies hat seine Entsprechung in der gespiegelten λ -Form gemessener Fluss-Dichte-Daten und ist insofern in Übereinstimmung mit den empirischen Beobachtungen (Abschn. 4.4), aber auch mit simulierten Fluss-Dichte-Daten wie denen in Abb. 11.5.

Wie bei den LWR-Modellen ist im gebundenen Verkehr der „gestauten“ Zweig $\rho_{\text{cong}}(Q)$ des Fundamentaldiagramms relevant. Insbesondere ergibt sich nach einem

Verkehrszusammenbruch stromaufwärts der Engstelle der Gleichgewichtszustand

$$Q_e = \frac{K_B^{\text{dyn}}}{I}, \quad \rho_e = \rho_{\text{cong}}(Q_e) \quad \text{Fließgleichgewicht im Stau.} \quad (16.2)$$

Hier bezeichnet I die Zahl der Fahrstreifen am betrachteten Ort.

Die dem gestauten Zweig des Fundamentaldiagramms entsprechende Gleichgewichtsdichte $\rho_{\text{cong}}(Q)$ spielt eine zentrale Rolle beim Übergang von geschlossenen zu offenen Systemen: Die Dynamik *offener* Systeme wird durch die Verkehrs nachfrage und die Inhomogenitäten (Engstellen) mit ihren *Flüssen* und Kapazitäten gesteuert, während bei *geschlossenen* Systemen die Dynamik maßgeblich von der *Dichte* beeinflusst wird. Die Beziehung (16.2) „übersetzt“ die Steuerparameter der beiden Systeme, indem sie die Dichte als Funktion der Kapazität bzw. Engstellen stärken ausdrückt.

16.2 Begründung der Staumuster: Phasendiagramm

Mit der Beziehung (16.2) lassen sich die theoretisch erwarteten Staumuster in offenen Systemen herleiten. Die beiden wichtigsten Steuerparameter sind die Verkehrs nachfrage und die Engstellenstärke.

Verkehrs nachfrage. Die auf einen Fahrstreifen bezogene Nachfrage Q_{main} gibt den potenziellen mittleren Verkehrsfluss auf der Hauptstrecke an. Nach einem Zusammenbruch ist der *tatsächliche* mittlere Verkehrsfluss nur stromaufwärts des dann entstandenen Staus gleich Q_{main} .

Engstellenstärke. Die verkehrsbehindernde Auswirkung der Engstelle δQ (engl. *bottleneck strength*) wird durch die Differenz der statischen Kapazität $K = I Q_{\text{max}}$ der homogenen Strecke stromaufwärts der Engstelle und der dynamischen Engstellenkapazität (16.1) charakterisiert und auf die Zahl I der Fahrstreifen des homogenen Abschnitts bezogen:

$$\delta Q = \frac{K - K_B^{\text{dyn}}}{I} \quad \text{Engstellenstärke.} \quad (16.3)$$

Zu beachten ist, dass sich die Engstellenkapazitäten immer auf den möglichen Fluss auf der Hauptstrecke beziehen. Im Falle einer Zufahrt wird diese Kapazität naturgemäß umso niedriger, je höher der Rampenfluss Q_{rmp} ist. Die *statische Kapazität* (maximal möglicher Fluss auf der Hauptfahrbahn bei freiem Verkehr bzw. vor dem Zusammenbruch) ist damit bei unveränderter Fahrstreifenzahl der Hauptfahrbahn durch $K_B = I Q_{\text{max}} - Q_{\text{rmp}} = K - Q_{\text{rmp}}$ gegeben. Nach dem Zusammenbruch, also bei „aktivierter“ Engstelle, ergibt sich mit (16.1) die um den *capacity drop* ε reduzierte dynamische Kapazität $K_B^{\text{dyn}} = K_B(1 - \varepsilon)$. Mit der Definition (16.3) resultiert daraus eine Engstellenstärke

$$\delta Q = \frac{K - K_B^{\text{dyn}}}{I} = \frac{K - K_B(1 - \varepsilon)}{I} = \frac{Q_{\text{rmp}}(1 - \varepsilon)}{I} + \varepsilon Q_{\text{max}}. \quad (16.4)$$

Für $I = 1$ Fahrstreifen und vernachlässigbaren Reduktionsfaktor ε ergibt sich

$$\delta Q \approx Q_{\text{rmp}}, \quad (16.5)$$

aber auch sonst ist Q_{rmp} ein Maß für die Engstellenstärke, so dass man das Phasendiagramm bei als Engstellen wirkenden Zufahrten auch direkt durch Q_{rmp} anstelle von δQ aufspannen kann.

Mit der Definition (16.3) und der Beziehung (16.2) kann man den mittleren Fluss und die mittlere Dichte im Bereich des gebundenen Verkehrs stromaufwärts der Engstelle auch schreiben als

$$Q_e = Q_{\text{max}} - \delta Q, \quad \rho_e = \rho_{\text{cong}}(Q_{\text{max}} - \delta Q). \quad (16.6)$$

Dies gilt, falls der Verkehr nicht zu inhomogen ist, also nicht aus einzelnen Stop-and-Go-Wellen besteht. An dieser Formel sieht man, dass der *Fluss* und nicht etwa die Dichte die den Zustand kontrollierende Variable (Steuervariable) ist. Teilt man den durch Q_{main} und δQ aufgespannten Raum in Bereiche auf, in denen qualitativ gleichartige Staumuster („dynamische Phasen“) entstehen, enthält man ein *Phasendiagramm*.¹ Im Folgenden werden die Phasendiagramme für die verschiedenen Stabilitätsklassen hergeleitet.

16.2.1 Stabilitätsklasse 1

Nach Abschn. 15.6 ist die Dynamik in dieser Stabilitätsklasse dadurch charakterisiert, dass Verkehr an der statischen Kapazität linear instabil ist, $\rho_2 < \rho_K$. Daraus lassen sich, in Abhängigkeit des Hauptflusses Q_{main} , der Engstellenstärke δQ und ggf. der Vorgeschichte, folgende *Staumuster* und die zugehörige Phasen ableiten (vgl. Abb. 16.1):

Geringe Engstellenstärke, hohe Nachfrage. In diesem Fall ist nach Gl. (16.6) die Verkehrsdichte $\rho_e = \rho_{\text{cong}}(Q_{\text{max}} - \delta Q)$ nach dem Zusammenbruch nur etwas höher als die Dichte ρ_K an der statischen Kapazität. Dies folgt aus $\rho_K = \rho_{\text{cong}}(Q_{\text{max}})$ und dem nach Voraussetzung kleinen Wert der Engstellenstärke δQ . Ferner ist für diese Stabilitätsklasse und diesen Dichtebereich die Instabilität meist eine absolute, d.h. Störungen breiten sich innerhalb des gebundenen Verkehrs in beide Richtungen aus. Daraus resultieren Stauwellen im gesamten Bereich des gebundenen Verkehrs bis hin zum Staukopf (Abb. 16.2 links).

¹ Es handelt sich hierbei nicht um Phasen im thermodynamischen Sinn, welche nur im Gleichgewicht definiert sind, sondern um die bereits erwähnten dynamischen Phasen.

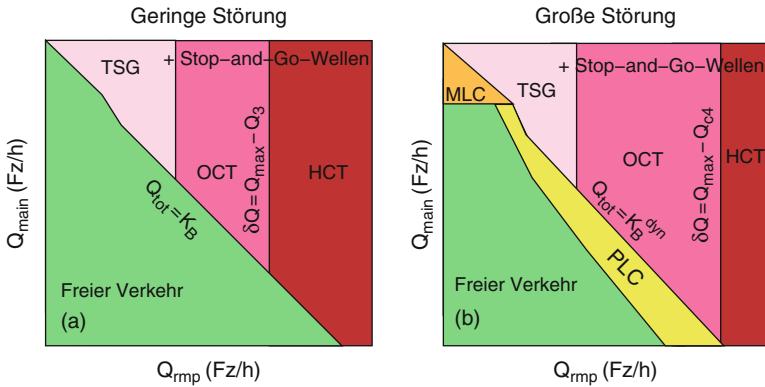


Abb. 16.1 Für Modelle der Stabilitätsklasse 1b hergeleitetes qualitatives Phasendiagramm in Abhängigkeit der Verkehrsstärke Q_{main} und der Engstellenstärke δQ bzw. des Rampenflusses Q_{rmp} . Das linke Phasendiagramm gilt für eine sich allmählich steigernde Nachfrage ohne große Störungen, während das rechte Phasendiagramm die resultierenden Staumuster nach großen Störungen (beispielsweise eine passierende, anderswo entstandene Stauwelle) darstellt. Für die Stabilitätsklasse 1a entfällt der Bereich der homogen gestauten Zustände hoher Dichte (HCT). Bei sehr hohen Nachfragen Q_{main} ist der freie Verkehr oberhalb des Staus metastabil oder instabil. Dadurch sind in diesem Bereich unabhängig vom eigentlichen Staumuster Stop-and-Go-Wellen möglich

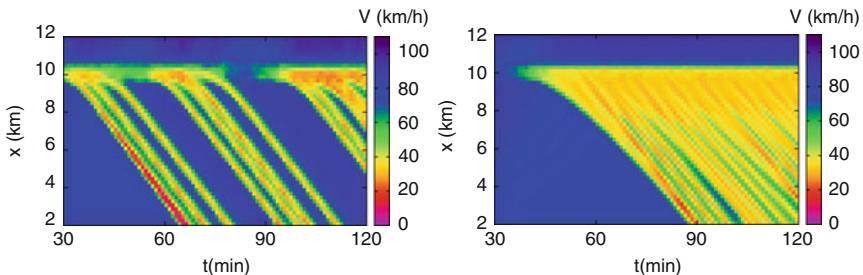


Abb. 16.2 IDM-Simulation mit einer Zufahrt ($Q_{\text{rmp}}/I = \delta Q = 100 \text{ Fz/h}$) und Parametern, welche absoluter Instabilität (links) bzw. konvektiver Stabilität (rechts) entsprechen. Im Diagramm der Abb. 15.11 sind dies die Punkte ($T = 1.5 \text{ s}, a = 0.75 \text{ m/s}^2$) (links) und ($T = 1.5 \text{ s}, a = 1.0 \text{ m/s}^2$) (rechts)

Da der Ausfluss Q_{out} aus den Stauwellen kaum größer ist als die Engstellenkapazität, benötigt der Aufbau von neuen Stauwellen an der Engstelle verhältnismäßig viel Zeit, so dass zwischen den Wellen freier Verkehr herrscht.² Im Ergebnis erhält man einzelne, sich an der Engstelle aufbauende und sich dann ablösende Stauwellen, die man auch als „getriggerte“ Stop-and-Go-Wellen (*Triggered Stop-and-Go*, TSG) bezeichnet. Üblicherweise werden TSG-Muster durch größere Störungen im Verkehrsfluss ausgelöst, beispielsweise durch passierende Stauwellen, welche

² Damit ist der Gültigkeitsbereich von Gl. (16.6) eigentlich überschritten. Die Überlegungen gelten deshalb für geringe Engstellenstärke nur qualitativ.

anderswo erzeugt wurden. Ist die Engstellenstärke jedoch sehr schwach, kann die Engstellenkapazität durchaus höher sein als der Ausfluss Q_{out} aus Stauwellen. Damit können sich anderswo entstandene Stauwellen durch die Engstelle ausbreiten, ohne einen neuen Zusammenbruch zu provozieren oder, anders formuliert, die Engstelle zu *aktivieren*. Man spricht dann auch von *Moving Localized Clusters* (MLC).

Höhere Engstellenstärken. Je größer die Engstellenstärke, desto geringer ist nach Gl. (16.6) der Fluss und desto höher die zugehörige Gleichgewichtsdichte $\rho_e = \rho_{\text{cong}}(Q_{\max} - \delta Q)$. Wegen der nun höheren Differenz zwischen Q_{out} und der Engstellenkapazität entstehen die Stauwellen an der Engstelle in schnellerer Folge, bis letztendlich kein freier Verkehr mehr zwischen ihnen existiert. Der Zustand wird dann als *Oscillating Congested Traffic* (OCT) bezeichnet.³

Hohe Engstellenstärke. Im Falle der Unterkasse 1a ändert sich prinzipiell nichts bis zur höchsten möglichen Engstellenstärke $\delta Q = Q_{\max}$ bzw. $K_B^{\text{dyn}} = 0$: Solange der Verkehr überhaupt noch fließt, führen Instabilitäten zu einem (hochfrequenten) OCT-Zustand. Unterhalb einer gewissen Flussstärke Q_{cv} bzw. oberhalb der dazugehörigen Dichte ρ_{cv} ist die Instabilität allerdings nicht mehr absoluter, sondern konvektiver Natur (vgl. Abb. 15.9 links). Dies hat zur Folge, dass sich nahe des Staukopfes ein im Wesentlichen homogener gestauter Bereich bildet und die Oszillationen erst weiter stromaufwärts größere Amplituden erreichen. Dies wird in Abschn. 16.2.2 ausführlicher diskutiert.

Im Falle der Stabilitätsklasse 1b ist der Verkehrsfluss für Dichten $\rho > \rho_3$ bzw. hohe Engstellenstärken, welche der Bedingung

$$\delta Q > Q_{\max} - Q_3$$

genügen, wieder metastabil und für $\rho > \rho_4$ bzw. $\delta Q > Q_{\max} - Q_4$ sogar absolut stabil. Durch diese *Restabilisierung* entsteht zähfließender, homogener Verkehr, welcher auch *Homogeneous Congested Traffic* (HCT) genannt wird.

Nachfrage etwas unterhalb der Engstellenkapazität. Die bisher betrachteten TSG-, OCT- und HCT-Zustände entsprechen *ausgedehnten Staumustern*, welche entstehen, wenn die Nachfrage Q_{main} die fahrstreifenbezogene dynamische Engstellenkapazität $Q_e = K_B^{\text{dyn}}/I = Q_{\max} - \delta Q$ überschreitet. Liegt die Nachfrage jedoch geringfügig unterhalb der dynamischen Kapazität, so kann sich nach einer externen Störung (verursacht beispielsweise durch eine vorbeikommende laufende Stauwelle) selbstorganisiert eine *stehende Stauwelle* bilden, welche an die Engstelle gebunden ist (*Pinned Localized Cluster*, PLC). Konsequenterweise ist bei dieser „mildesten“ Stauform der Ausfluss aus dem Stau nicht durch die dynamische Engstellenkapazität gegeben, sondern er ist gleich der Nachfrage (bzw. bei Zufahrten gleich der Summe $Q_{\text{main}} + Q_{\text{rmp}}$), also etwas geringer. Der Mindestwert, bei dem

³ Es gibt allerdings kein diskretes bzw. qualitatives Kriterium zur Unterscheidung der OCT- und TSG-Zustände.

PLC möglich ist, lässt sich nicht herleiten. Die variable dynamische Kapazität jedoch, die PLC erst ermöglicht, lässt sich anhand einer Zufahrt mit großer Rampenlänge plausibel machen: Stromabwärts der Rampe ist der Fluss so hoch, dass Instabilitäten und letztendlich stromaufwärts laufende Wellen entstehen. Je weiter diese Welle auf Höhe der Zufahrt stromaufwärts propagiert, desto geringer ist der Fluss (da die auffahrenden Fahrzeuge noch nicht auf die Hauptfahrbahn gewechselt haben), bis der Fluss kleiner wird als der Ausfluss Q_{out} aus der Stauwelle, so dass diese schließlich „verhungert“ und ihre Richtung umkehrt. Dadurch bewegt sie sich wieder stromabwärts in Regionen höherer Flüsse, kehrt abermals die Richtung um, bis sich ein stationärer Zustand in Form einer stehenden Welle einstellt.

16.2.2 Stabilitätsklasse 2

Im Unterschied zur Stabilitätsklasse 1 ist in der Klasse 2 der Verkehrsfluss an der Kapazität (Dichte ρ_K , Fluss Q_{\max}) stabil oder metastabil, es gibt also (meta-)stabilen gebundenen Verkehr mit relativ geringer Dichte im Bereich $\rho_e \in [\rho_K, \rho_2]$, entsprechend hohen Flüssen im Bereich $Q_e \in [Q_2, Q_{\max}]$. Gemäß Gl. (16.6) entspricht dies homogenem gebundenen Verkehr hinter Engstellen geringer Stärke. Dieser Zustand wird auch als *Homogeneous Synchronized Traffic* (HST) bezeichnet (vgl. Abb. 16.3).⁴

Die qualitativen Eigenschaften sind dieselben wie beim HCT, welcher aber nur bei großen Engstellenstärken entstehen kann und im Phasendiagramm durch die

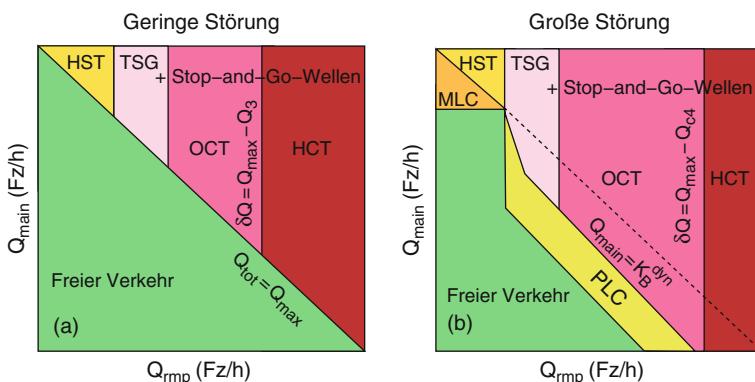


Abb. 16.3 Für Modelle der Stabilitätsklasse 2b hergeleitete qualitativen Phasendiagramm in Abhängigkeit der Verkehrsstärke Q_{main} und des Rampenflusses Q_{rmp} . Für die Stabilitätsklasse 2a entfällt jeweils der Bereich der homogen gestauten Zustände (HCT)

⁴ Der Begriff „synchronisierter Verkehr“ (*synchronized traffic*) bezieht sich ursprünglich auf die Synchronisation der Geschwindigkeiten verschiedener Fahrstreifen. Da dies aber für alle Arten gebundenen Verkehrs zutrifft („im Stau sind alle gleich“), ist diese Bezeichnung eher missverständlich.

oszillatorischen Zustände TSG und OCT getrennt ist. Falls der HST-Zustand metastabil ist, können starke Störungen im Verkehrsfluss zu einem Übergang zu Stop-and-Go-Verkehr führen.⁵

Für höhere Engstellenstärken und demzufolge höhere Verkehrsichten $\rho_e > \rho_2$ ist der Verkehrsfluss, genau wie in der Stabilitätsklasse 1, instabil und es bilden sich Stauwellen des Typs TSG oder OCT. Da die Instabilitäten bei Klasse-2-Modellen aber fast immer konvektiv sind, sich Störungen also nur entgegen der Fahrtrichtung vergrößern können, bildet sich am Staukopf nahe der Engstelle ein Bereich mit nahezu stationärem Verkehrsfluss, der durchaus eine Ausdehnung von mehreren Kilometern haben kann. Erst weiter stromaufwärts entstehen die TSG- oder OCT-Muster (Abb. 16.2 rechts). Im Gegensatz dazu breiten sich bei absolut instabilem Verkehr die Schwankungen bis hin zum Staukopf aus (Abb. 16.2 links).

Die weitaus meisten der beobachteten ausgedehnten Staus sind nahe des Staukopfes weitgehend homogen, der Verkehrsfluss also nur konvektiv instabil. Beispielsweise sind in den empirischen Daten in Abb. 5.1 zwei Bereiche mit OCT (links und rechts) und zwei einzelne Stauwellen (TSG) zu sehen. In einem bis zu 3 km ausgedehnten Bereich stromaufwärts des Staukopfes herrscht aber in allen drei Fällen im Wesentlichen stationärer Verkehr. All dies spricht dafür, dass der reale Verkehrsfluss der Stabilitätsklasse 2 zuzuordnen ist.

Wie in der Stabilitätsklasse 1 gibt es zwei Unterklassen. Beim Untertyp 2b führen sehr hohen Engstellenstärken zu einer *Restabilisierung*, also zu HCT-Staumustern. Bei Klasse-2a-Modellen bleibt hingegen der Verkehrsfluss instabil bzw. wird erst bei Stillstand, also einer Komplettsperrung, trivialerweise stabil.

Schließlich sei noch bemerkt, dass es laufende und stehende isolierte Stauwellen bei freiem Umgebungsverkehr, also MLC-, TSG- und PLC-Muster, nur geben kann, falls auch freier Verkehr einen metastabilen Dichtebereich aufweist, also $\rho_1 < \rho_K$, während die Definition der Klasse 2 die Relation $\rho_2 > \rho_K$ bedingt. Hingegen sind HCT-, OCT- und HST-Zustände auch für $\rho_K < \rho_1 < \rho_{\max}$ möglich.

16.2.3 Stabilitätsklasse 3

In der Stabilitätsklasse 3 ist homogener Verkehr im gesamten Dichtebereich stabil und außerdem der Kapazitätsabfall ε (Gl. (16.1)) sehr klein oder gleich Null. Damit ist die Dynamik im Wesentlichen dieselbe wie bei den LWR-Modellen und es gibt nur HCT bzw. HST als gestaute Zustände. Diese beiden Zustände sind in Klasse-3-Modellen aber nicht unterscheidbar.

⁵ Dies entspricht einer Prämisse der sogenannten *Drei-Phasen-Theorie*. Nach dieser Theorie entsteht Stop-and-Go-Verkehr immer über den Zwischenzustand „synchronisierter Verkehr“. Dies trifft in der Praxis häufig, aber nicht immer zu. Gegenbeispiele sind die Staumuster der Abb. 17.2c und 17.3 sowie das OCT-Muster der Abb. 16.6.

16.3 Simulierte und reale Staumuster

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Herleitungen der Phasendiagramme in offenen inhomogenen Systemen beruhen im Wesentlichen auf dem Stabilitätsdiagramm. Da dieses für mikroskopische und makroskopische Modelle gültig ist, sollte auch eine Simulation der Staumuster mit beiden Modellkategorien möglich sein.

Wir stellen als Beispiel die Simulation mit dem mikroskopischen Intelligent-Driver-Modell (IDM, Abschn. 11.3) und dem makroskopischen GKT-Modell (Abschn. 9.4.3) vor. Durch eine geeignete Parametrisierung kann man mit beiden Modellen die Stabilitätsklasse (1a, 1b, 2a, 2b oder 3) beliebig wählen (vgl. das Klassendiagramm in Abb. 15.11). Da die Stabilitätsklasse 2 den empirischen Daten am besten entspricht, werden die Simulationen für diese Klasse durchgeführt.⁶ Für das IDM wurden die Autobahn-Parameter der Tabelle 11.2 verwendet, welche der Stabilitätsklasse 2a entsprechen. Für das GKT-Modell wurden hingegen der Stabilitätsklasse 2b entsprechende Parameter gewählt.

Die Abb. 16.4 und 16.5 zeigen die Ergebnisse für das IDM und das GKT-Modell. Simuliert wurden bei unveränderten Parameterwerten jeweils verschiedene offene Systeme, welche verschiedenen Punkten im Phasendiagramm entsprechen.

Die *Verkehrsnachfrage* Q_{main} ist direkt durch den Zufluss Q_{main} pro Fahrstreifen gegeben, in der Simulation also durch die stromaufwärtigen Randbedingungen des offenen Systems. Die Engstelle und damit die *Engstellenstärke* (16.4) wird in beiden Fällen durch eine Zufahrt mit, je nach Punkt im Phasendiagramm, verschie-

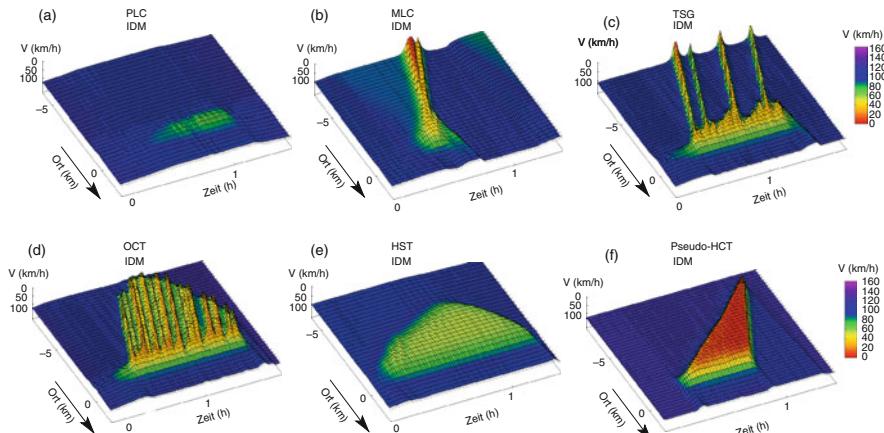


Abb. 16.4 Modellierung der Stautypen des Phasendiagramms der Stabilitätsklasse 2a mit dem Intelligent-Driver-Modell (Autobahn-Parameter der Tabelle 11.2). Obwohl diese Stabilitätsklasse keinen HCT-Zustand aufweist, ist das bei hohen Engstellenstärken entstehende Staumuster („Pseudo-HCT“) kaum davon zu unterscheiden

⁶ Simulierte Staumuster und Phasendiagramme der Klasse 1 sind in den ersten beiden Referenzen der Literaturhinweise zu diesem Kapitel gezeigt.

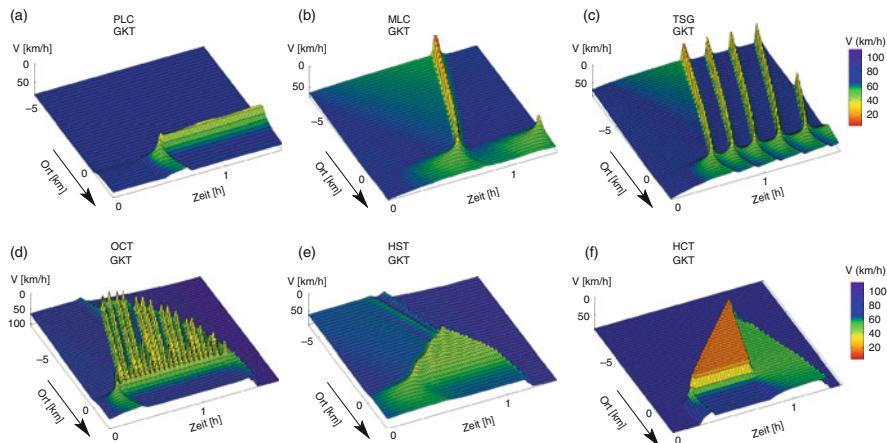


Abb. 16.5 Modellierung des Phasendiagramms der Abb. 16.1 mit dem makroskopischen GKT-Modell in einer Parametrisierung, welche der Stabilitätsklasse 2b entspricht

denen Zuflussstärken Q_{rmp} realisiert. Wie in den bisherigen Simulationen wird der Zufluss in der Makrosimulation direkt durch den Quellterm der Kontinuitätsgleichung (7.11) berücksichtigt, während in der Mikrosimulation der Wechsel auf die (als einstreuig angenommene) Hauptfahrbahn durch das einfachste Spurwechselmodell – Wechsel in die größte Lücke – modelliert wird.

Aus der Mikrosimulation (Abb. 16.4) und der Makrosimulation (Abb. 16.5) ergeben sich durch Zusammenfassen qualitativ gleicher Staumuster simulierte *Phasendiagramme*, die durch den Zufluss Q_{main} und die Engstellenstärke bzw. den Zufluss $\delta Q \approx Q_{\text{rmp}}$ aufgespannt werden (siehe Abb. 16.3). Die wesentlichen Eigenschaften der in den Teilbildern (a–f) der Abb. 16.4 und 16.5 dargestellten Staumuster können wie folgt zusammengefasst werden:

Pinned Localized Cluster (PLC): Einzelne stehende Stauwelle, die am Ort einer Störstelle fixiert ist und eine begrenzte Ausdehnung hat. Dieser Zustand kann bei unterschiedlichen Engstellenstärken entstehen, wenn die Verkehrsnachfrage Q_{main} auf der Hauptstrecke kleiner ist als ein Wert, welcher zu ausgedehnten Staumustern (TSG, OCT, oder HCT) führen würde.

Moving Localized Cluster (MLC): Einzelne laufende Stauwelle begrenzter Ausdehnung, die sich mit einer konstanten, charakteristischen Geschwindigkeit stromaufwärts ausbreitet. Die Engstelle ist hier so klein, dass Verhältnisse wie auf einer homogenen Strecke herrschen.

Triggered Stop-and-Go (TSG): Stauwellen, welche sich aus einer nahezu statischen Zone gebundenen Verkehrs ablösen bzw. in dieser Zone erzeugt werden.

Oscillating Congested Traffic (OCT): Ausgedehnter Stau mit oszillierender innerer Struktur.⁷ Die Wellenlängen der Oszillationen können verschieden sein, die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Strukturen ist aber nahezu dieselbe (Teilbild (d) in Abb. 16.4 und 16.5). Die Zustände OCT und TSG entsprechen dem, was gemeinhin als *Stop-and-Go-Verkehr* bezeichnet wird. Gemäß dem Phasendiagramm entstehen sie bei mittleren Engstellenstärken (beispielsweise Autobahnkreuze) und hohem Verkehrsaufkommen.

Homogeneous Synchronized Traffic (HST): Weitgehend homogener (gleichmäßiger) gebundener Verkehr ohne starke Geschwindigkeitsschwankungen an der Grenze zwischen freiem Verkehr und Stau. Dieses Muster tritt bei geringen Engstellenstärken (verursacht beispielsweise durch Anschlussstellen) und hohem Verkehrsfluss auf der Hauptstrecke auf, sofern das Stabilitätsverhalten der Klasse 2 entspricht. Die Tatsache, dass auch in der Realität solche Staumuster beobachtet werden, ist ein starkes Indiz dafür, dass realer Verkehrsfluss auf Fernstraßen dieser Stabilitätsklasse entspricht.

Homogeneous Congested Traffic (HCT): Homogener (gleichmäßiger) Stau ohne starke Geschwindigkeitsschwankungen, der auch als „zähflüssig kriechender Verkehr“ charakterisiert werden kann. Dieses Staumuster tritt, im Gegensatz zu HST, als Folge sehr starker Engstellen (typischerweise Teilsperren nach Unfällen) auf, wenn Restabilisierung vorliegt. Dies ist bei der GKT-Simulation der Fall (Abb. 16.5f). Aber auch ohne Restabilisierung, wie bei der IDM-Simulation, werden die Schwankungen des OCT-Zustandes bei sehr hohen Engstellenstärken so hochfrequent, dass sie in der Praxis, also bei Rekonstruktion aus aggregierten Detektordaten, nicht von rein statistischen Schwankungen unterschieden werden können. In der Abb. 16.4f wird dieser OCT-Zustand deshalb als „Pseudo-HCT“ bezeichnet.

Vergleich mit empirischen Staumustern. Der letztendliche Beweis für die Tragfähigkeit des Phasendiagramm-Konzeptes muss natürlich durch Vergleich mit beobachteten, realen Verkehrsdaten geführt werden (siehe Kap. 17). Allerdings sind die empirischen Staumuster, wie z.B. die der Abb. 17.1 und 17.2, in der Regel das Ergebnis eines komplexen Zusammenspiels von stauerzeugenden Streckeninhomogenitäten (Engstellen) mit bereits vorher entstandenen Staus sowie der Überlagerung und Wechselwirkung verschiedener Stauregionen.

In fast allen Fällen können diese komplexen Staumuster jedoch als Überlagerung weniger *idealtypischer Stauformen* aufgefasst werden. Manchmal kann man die Grundmuster auch direkt „in Reinform“ beobachten. Abbildung 16.6 zeigt diese anhand von rekonstruierten Verkehrszusammenbrüchen auf der A5 bei Frankfurt. Dabei wurde das HCT-Muster durch eine unfallbedingte Teilsperre verursacht, während die anderen Muster durch Autobahnkreuze, Anschlussstellen und Steigungen hervorgerufen wurden.

⁷ Dieses Staumuster wird in empirischen Daten oft beobachtet (siehe z.B. Abb. 17.1).

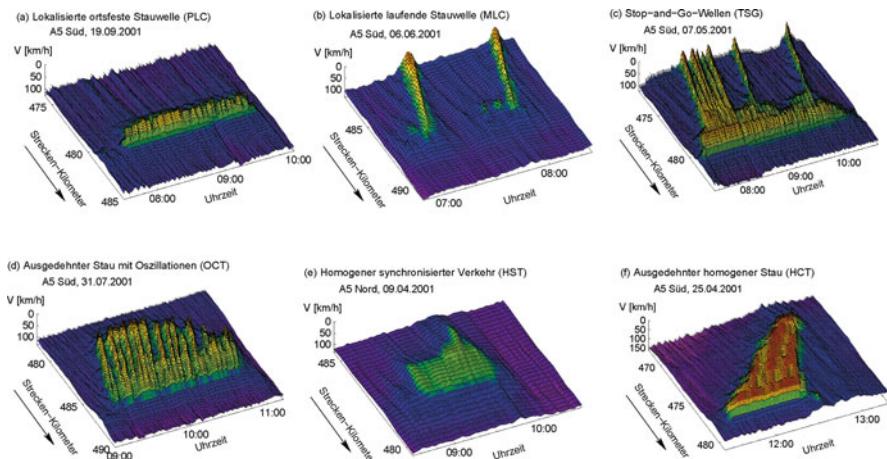


Abb. 16.6 Idealtypische Staumuster, beobachtet auf der Autobahn A5 in der Nähe von Frankfurt

Literaturhinweise

- Lee, H., Lee, H., Kim, D.: Origin of synchronized traffic flow on highways and its dynamic phase transition. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1130 (1998)
- Helbing, D., Hennecke, A., Treiber, M.: Phase diagram of traffic states in the presence of inhomogeneities. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4360–4363 (1999)
- Helbing, D., Treiber, M., Kesting, A., Schönhof, M.: Theoretical vs. empirical classification and prediction of congested traffic states. *Eur. Phys. J. B* **69**, 583–598 (2009)
- Kerner, B.S.: The physics of traffic: empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory. Springer, New York, NY (2004)

Teil III

Anwendungen der Verkehrsmodellierung

Kapitel 17

Staumentstehung und Stauausbreitung

Wissenschaft hat etwas Faszinierendes an sich. So eine geringfügige Investition an Fakten liefert so einen reichen Ertrag an Voraussagen.

Mark Twain

17.1 Drei Faktoren für den Verkehrszusammenbruch

Wie entsteht ein Stau? Um die Mechanismen der Staumentstehung in Raum und Zeit zu analysieren und Hypothesen wie die folgende „Drei-Zutaten-Hypothese“ zu belegen, werden Daten von stationären Detektoren verschiedener Autobahnstrecken herangezogen und mit Hilfe spezialisierter Verfahren wie der *Adaptive Smoothing Method* (Abschn. 5.2) daraus die raumzeitliche Verkehrsdynamik rekonstruiert.

Bei der Analyse zeigen sich bemerkenswerte Regelmäßigkeiten in den Staumustern. Eine wesentliche Erkenntnis dabei ist, dass die beobachteten Staus nahezu ausschließlich an durch Streckeninhomogenitäten bewirkten *Engstellen* entstehen. Für einen Verkehrszusammenbruch sind neben diesem räumlichen Bezug im Allgemeinen noch zwei weitere „Zutaten“ erforderlich, ein hohes Verkehrsaufkommen und Störungen im Verkehrsfluss. Nachfolgend werden diese drei Einflussfaktoren beschrieben.

Engstellen. Die in realen Straßennetzwerken immer vorhandenen Streckeninhomogenitäten wirken als „Kondensationskeime“ für einen Verkehrszusammenbruch. Die Engstellen (*bottlenecks*) können verschiedenster Art sein. Die häufigsten Beispiele, vor allem auf Autobahnen, sind:¹

- Zufahrten und Abfahrten,
- Spurperrungen, -verengungen, -verschwenkungen (insbesondere im Bereich von Baustellen),
- Kurvenstrecken,
- Steigungs- und Gefällestrecken,
- unfallbedingte Behinderungen,
- Staus oder Unfälle auf der Gegenfahrbahn.

¹ In Stadtnetzen sind es offensichtlich die Lichtsignalanlagen, die als (periodisch aktivierte) Engstellen die Verkehrsdynamik in der Stadt dominieren.

Das gemeinsame Merkmal dieser Streckeninhomogenitäten ist eine *lokal reduzierte Streckenkapazität* (siehe auch Abb. 20.4). Diese Eigenschaft wird auch bei der Modellierung von Engstellen genutzt (vgl. Abschn. 8.4.3). Die meisten der genannten Engstellen beruhen auf Eigenschaften der Infrastruktur und sind daher *permanent* vorhanden. Unfälle stellen *temporäre Engstellen* dar. Schließlich können besondere Ereignisse auf der *Gegenfahrbahn* (wie Staus oder Unfälle) vom Verkehrsgeschehen in der eigenen Fahrtrichtung ablenken und dadurch ebenfalls temporäre *verhaltensinduzierte Engstellen* verursachen.

Bricht Verkehr an einer Engstelle zusammen, spricht man von einer *aktivierten Engstelle*. In Übereinstimmung mit den Simulationen geht die Aktivierung meist mit einer deutlichen Minderung des Verkehrsflusses, dem sogenannten *capacity drop*, einher.

Als Beispiele für Auffahrten als aktivierte Engstellen können die Staus in den Abb. 17.1a, 17.2c sowie in Abb. 17.2b die ausgedehnten Staus mit den Stauköpfen bei Kilometer 472 und 482 betrachtet werden. Auf der A8 (Abb. 17.1b) entsteht der Stau als Folge der Sperrung des rechten Fahrstreifens bei Streckenkilometer 43.5

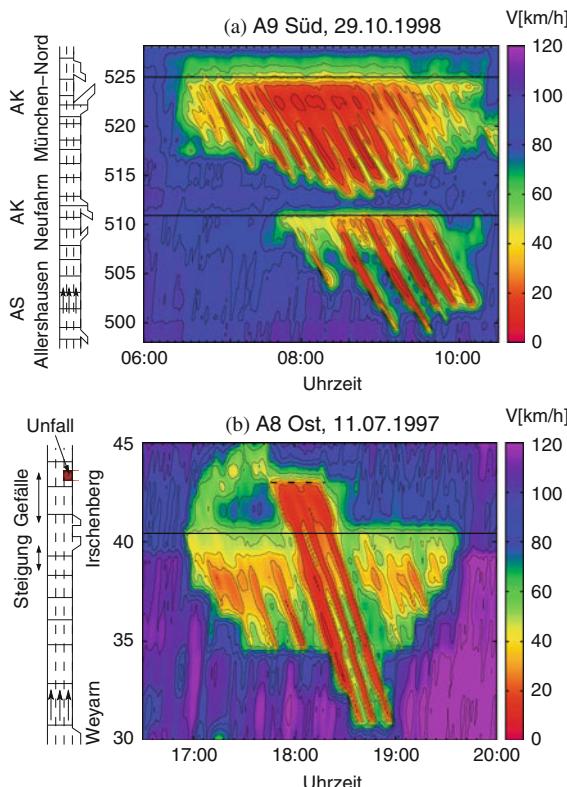


Abb. 17.1 Raumzeitliche Geschwindigkeitenprofile auf den Autobahnen A9 (Fahrtrichtung Süd) und A8 (Fahrtrichtung Ost)

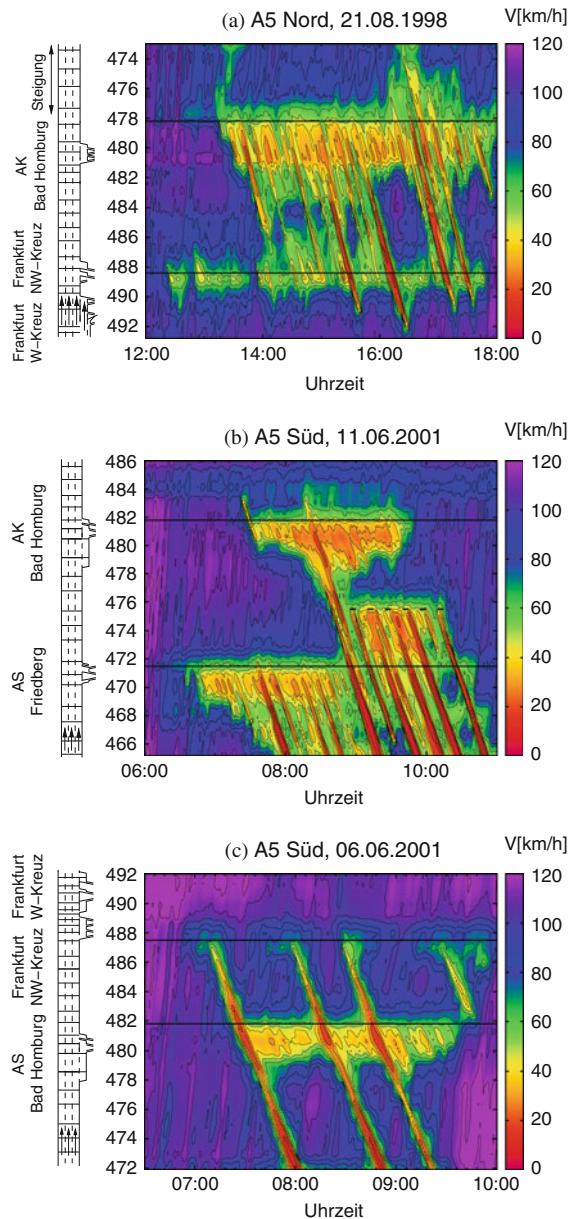


Abb. 17.2 Raumzeitliche Geschwindigkeitsprofile auf der Autobahn A5 nördlich des Frankfurter West-Kreuzes in beiden Fahrtrichtungen

zwischen 17:40 und 18:20 Uhr. Und in der Abb. 16.6f kommt es durch eine unfallbedingte Vollsperrung auf der A5 bei Kilometer 478 zwischen 11:40 und 12:40 Uhr zu einem ausgedehnten Stau. In der Abb. 17.1b wurde der ausgedehnte Stau mit einem Staukopf bei etwa Kilometer 40 durch den Irschenberg verursacht. (Der weiter oben erwähnte unfallbedingte Stau wandert durch diesen hindurch.)

Hohes Verkehrsaufkommen. Eine Engstelle ist ein notwendiger, jedoch nicht hinreichender Faktor für die Entstehung eines Staus. Daneben bedarf es eines *hohen Verkehrsaufkommens*, wie es z.B. vor allem während der morgendlichen und abendlichen Spitzenzeiten (*peak hours*) oder während der Sommermonate auf einigen Autobahnen mit viel Urlaubsverkehr beobachtet wird. Die mit einem hohen Verkehrsfluss verbundene höhere Dichte sorgt dafür, dass die Fahrer auf die Vorderfahrzeuge unmittelbarer reagieren, die „Wechselwirkungskette“ also wirksam ist (vgl. Kap. 15). Bei hohem Verkehrsaufkommen können sich Störungen, die den dritten Einflussfaktor für einen Verkehrszusammenbruch darstellen, überhaupt erst vergrößern.

Störungen im Verkehrsfluss. Neben den räumlichen und zeitlichen Abhängigkeiten, die durch eine Engstelle und hohes Verkehrsaufkommen gegeben sind, bedarf es noch lokaler Störungen als *auslösendes Moment* für einen Verkehrszusammenbruch (vgl. Kap. 15). Störungen im Verkehrsablauf kommen permanent vor und werden beispielsweise durch Unachtsamkeit, fehlerhafte Fahrstreifenwechsel, mangelnden Sicherheitsabstand, nicht angepasste Geschwindigkeit oder einander überholende LKWs („Jumborennen“) verursacht.

Derartige Störungen sind in aggregierten Detektordaten allerdings nicht direkt beobachtbar. Die als Folge dieser Störungen eventuell entstehende Kolonne dicht auffahrender Fahrzeuge kann allerdings in Darstellungen des Verkehrsflusses als kurzfristiger „Hochflusszustand“ identifiziert werden, teilweise sogar in den Geschwindigkeitsprofilen, wie z.B. in Abb. 17.3 gezeigt: Der Verkehrszusammenbruch wird kurz nach 7:00 Uhr auf der A5 am Frankfurter NW-Kreuz beobachtet. Das hohe Verkehrsaufkommen ist durch die morgendliche Rush Hour gegeben, während die Abfahrt des Autobahnkreuzes die Engstelle darstellt. Die Störung im Verkehrsfluss (möglicherweise sich überholende LKWs) führt zu einem sich vergleichsweise langsam, mit etwa 75 km/h in Fahrtrichtung bewegenden raumzeitlichen Geschwindigkeitsbereich. Die Gleichheit von Ausbreitungs- und Fahrzeuggeschwindigkeit lässt auf eine Fahrzeugkolonne schließen. Der eigentliche Verkehrszusammenbruch mit den typischen, sich entgegen der Fahrtrichtung ausbreitenden Stauwellen findet jedoch erst statt, wenn diese Kolonne die Engstelle bei Streckenkilometer 488 passiert.

Abgesehen von Unfällen sind die ersten beiden Einflussgrößen für die Stauentstehung überwiegend deterministischer Natur. Das spontane Entstehen bzw. Anwachsen einer Störung im Verkehrsfluss hängt dagegen vom Zufall ab. Daraus folgt, dass eine exakte Voraussage eines Verkehrszusammenbruchs nicht möglich ist. Ein Verständnis für die Einflussfaktoren stellt jedoch eine wichtige Voraussetzung dar, um zumindest Stauwahrscheinlichkeiten anzugeben. Dagegen lässt sich der zeitliche

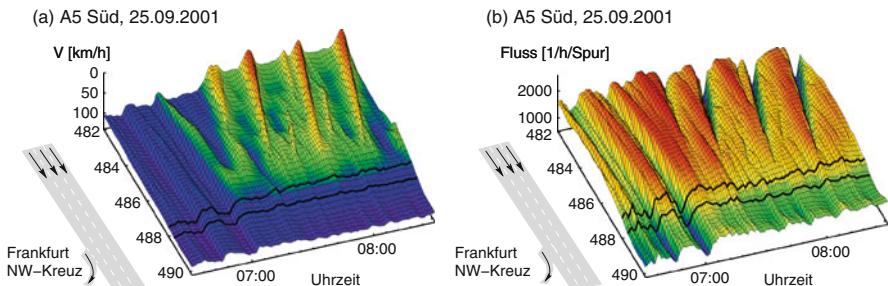


Abb. 17.3 Visualisierung der drei Faktoren für einen Verkehrszusammenbruch am Beispiel der A5 in Fahrtrichtung Süd anhand der raumzeitlichen Darstellung der Geschwindigkeit und Verkehrsstärke

Verlauf eines *einmal entstandenen* Verkehrsstaus relativ präzise prognostizieren (vgl. auch Abb. 8.20 in Kap. 8).

Die Analyse raumzeitlicher Geschwindigkeitsprofile zeigt, dass nahezu alle Staus durch das Zusammenwirken folgender drei Einflussfaktoren entstehen:

1. Hohes Verkehrsaufkommen (zeitlicher Bezug),
2. eine *Engstelle* (räumlicher Bezug) sowie
3. *lokale Störungen* im Verkehrsfluss (auslösendes Moment).

Empirische Staumuster. Die beobachtbaren Staumuster, wie die in den Abb. 17.1 und 17.2, sind in der Regel das Ergebnis einer komplexen Wechselwirkung von stauerzeugenden Streckeninhomogenitäten (Engstellen) mit bereits vorher entstandenen Staus sowie der Überlagerung verschiedener Stauregionen.

Beispielsweise breitet sich der durch einen Unfall bei Kilometer 43.5 verursachte ausgedehnte Stau auf der A8-Ost, Abb. 17.1a, durch den bereits vorhandenen ebenfalls ausgedehnten Stau am Irschenberg mit Staukopf bei etwa Kilometer 40 hindurch aus. In den in den Abb. 17.2a–c gezeigten Staumustern interagieren einzelne laufende Stauwellen mit weiteren Engstellen und bereits vorhandenen Staus. In der Abb. 17.2c ist ab 7:00 Uhr eine laufende Stauwelle zu sehen, welche beim Passieren des Autobahnkreuzes Bad Homburg bei Kilometer 481 eine zusätzliche stehende Welle erzeugt. Die laufende Stauwelle stellt damit den dritten Faktor zur Staumentstehung – Störung im Verkehrsfluss – dar. Weitere laufende Stauwellen passieren die stehende Welle nahezu unbeeinflusst. Besonders komplex sind die Wechselwirkungen in Abb. 17.2b: Eine sich aus einem Stau am Bad Homburger Kreuz lösende laufende Stauwelle verursacht um etwa 9:00 Uhr bei Kilometer 476 eine temporäre Engstelle (vermutlich aufgrund eines Unfalls), die ihrerseits einen ausgedehnten Stau hervorruft. Sowohl die laufende Stauwelle als auch der ausgedehnte Stau treffen bei Kilometer 471 auf eine weitere Engstelle (AS Friedberg) und beeinflussen den dort bereits früher entstandenen ausgedehnten Stau. Ferner führt der

Zusammenbruch bei Kilometer 476 zu einer Reduktion des Verkehrsflusses stromabwärts (*capacity drop*), welcher zu einer beschleunigten Auflösung des Staus am AK Bad Homburg führt.

17.2 Charakteristische Merkmale der Stauausbreitung

Die im Kap. 5 vorgestellte verkehrsadaptive Interpolationsmethode (*Adaptive Smoothing Method*) erlaubt eine detailgetreue Darstellung der Verkehrs dynamik anhand von Querschnittsdaten in Raum und Zeit. Bei der Analyse der Geschwindigkeitsprofile zeigen sich bemerkenswerte Regelmäßigkeiten in den zu beobachtenden Stau mustern (vgl. Abschn. 16.3). Diese „Gesetzmäßigkeiten“ bzw. *idealtypischen Merkmale* fassen wir folgendermaßen zusammen:

- (1) *Räumliche Ausdehnung entweder beschränkt oder ausgedehnt.* Der Bereich gestauten Verkehrs ist entweder lokalisiert mit einer konstanten Ausdehnung von typischerweise 1 bis 2 km (siehe Abb. 17.2c bei Streckenkilometer 480) oder ausgedehnt mit variabler räumlicher Ausdehnung (z.B. alle Staus in Abb. 17.1).
- (2) *Staukopf fix oder beweglich mit konstanter Geschwindigkeit.* Der stromabwärtsige Übergang von gestautem in freien Verkehr, der „Staukopf“, ist entweder an der Engstelle *fixiert* oder *bewegt sich stromaufwärts* mit einer charakteristischen Geschwindigkeit von etwa –15 km/h. Beide Ausbreitungsgeschwindigkeiten können innerhalb eines einzigen Staus beobachtet werden, wie z.B. in Abb. 17.1a: Der stationäre Staukopf bei Streckenkilometer 510 löst sich um etwa 9:45 Uhr von der Engstelle ab und breitet sich mit etwa 17 km/h entgegen der Fahrtrichtung aus. Bei unfallbedingten Staus wird die Ablösung durch die Aufhebung der temporären Engstelle (Abb. 17.1b bei Streckenkilometer 43.5 um 18:30 Uhr) bewirkt. Sie kann aber auch an permanenten Engstellen beobachtet werden, wie z.B. am Autobahnkreuz Neufahrn (Abb. 17.1a bei Kilometer 510 um etwa 10:00 Uhr). Da die beiden charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten auch für räumlich beschränkte Staus zutreffen, sind diese entweder ortsfest oder bewegen sich als *Stop-and-Go-Welle* stromaufwärts (vgl. Abb. 17.2c).
- (3) *Stromaufwärtsige Staufront ohne charakteristische Geschwindigkeit.* Die stromaufwärtsige Staufront ausgedehnter Staus (d.h. der Übergangsbereich von freiem in gestauten Verkehr) hat keine charakteristische Geschwindigkeit. Insbesondere kann sie sich sowohl in stromaufwärtiger als auch stromabwärtiger Richtung entsprechend der Engstellenstärke und der stromaufwärtigen Verkehrs nachfrage fortpflanzen. Zur Veranschaulichung können alle in Abb. 17.1 gezeigten Stau muster dienen.
- (4) *Einheitliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.* In räumlich ausgedehnten Staus wird meist eine signifikant von statistischen Schwankungen unterschiedliche „innere Struktur“ in Form von mehr oder weniger ausgeprägten Stauwellen beobachtet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Strukturen ist konstant und gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit sich bewegender stromabwärtiger Staufronten. Damit pflanzen sich alle Stauwellen, unabhängig von ihrer Größe, mit einer einheitlichen

Geschwindigkeit (Betrag zwischen 15 und 20 km/h) fort. In den raumzeitlichen Darstellungen sind daher *alle* Strukturen einer gestauten Region sowie eine eventuell vorhandene sich bewegende stromabwärtige Staufront zueinander parallel (vgl. Abb. 17.1 und 17.2).

(5) *Variable Wellenlänge.* Im Gegensatz zur Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt die Wellenlänge der Stauwellen signifikant von der Stärke des Staues ab. Die zeitliche Periode nimmt mit der Stärke des Staues ab und beträgt zwischen 4 und 60 min, was aufgrund der charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeit von etwa 15 km/h Wellenlängen zwischen 1 und 15 km entspricht. In Übereinstimmung mit der Theorie erzeugen kleinere Engstellen generell Stop-and-Go-Verkehr größerer Wellenlänge, während bei stärkeren Engstellen (wie der unfallbedingten Engstelle in Abb. 5.1) die Stauwellen dicht hintereinander folgen. Diese Abhängigkeit ist deutlich in Abb. 17.1b zu sehen: Die Steigung des Irschenbergs um den Streckenkilometer 40 stellt eine vergleichsweise schwache Engstelle dar und führt zu Stop-and-Go-Verkehr mit größeren Wellenlängen als die des überlagerten, durch einen Unfall bei Kilometer 43.5 verursachten Staues.

(6) *Anwachsende Störungen.* Die Stauwellen wachsen, während sie sich stromaufwärts *entgegen* der Fahrtrichtung fortpflanzen. Insbesondere ist dies für *alle* in diesem Buch abgebildeten ausgedehnten empirischen Staumuster der Fall. Am Staukopf in der Nähe der Engstelle ist der gestauten Verkehr meist weitgehend gleichmäßig (Stationarität nahe der Engstelle). Aus kleinen Schwankungen nahe der Engstelle entstehen oft mehr oder weniger ausgeprägte „Stop-and-Go-Wellen“, die sich bis hin zu *isolierten* Stop-and-Go-Wellen verstärken können. In Grenzfällen, wie in Abb. 16.6c, ist eine eindeutige Definition einer stromaufwärtigen Staufront nicht mehr sinnvoll und die Stauwellen werden besser als eigenständige lokalisierte Staustaus betrachtet.

(7) *Gleichmäßiger Stau nur bei starken oder schwachen Engstellen.* Nur für sehr stark oder gering ausgeprägte Engstellen werden teilweise auch ausgedehnte Regionen gebundenen, gleichmäßigen Verkehrs gefunden, welche, abgesehen von statistischen Schwankungen, als stationär und homogen angesehen werden können (vgl. Abb. 16.6e–f des Kap. 16).

17.3 Gibt es den „Stau aus dem Nichts“?

In Abschn. 17.1 wurde erläutert, dass ein Stau in den allermeisten Fällen durch das Zusammenwirken von drei Faktoren entsteht. Verdeutlicht man sich die im vorherigen Abschn. 17.2 diskutierten Eigenschaften der raumzeitlichen Stauausbreitung *aus der Sicht des Autofahrers*, so kann durchaus der *subjektive Eindruck* eines „Staus aus dem Nichts“ gerechtfertigt erscheinen.

Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass sich ein einmal entstandener Stau in Form einer oder mehrerer Stauwellen in stromaufwärtiger Richtung ausbreiten kann. Solche Stauwellen, wie sie z.B. in den Abb. 17.1 und 17.2 beobachtet wurden,

werden vom Autofahrer in der Regel räumlich und zeitlich von der Ursache entkoppelt durchfahren. Dies kann, insbesondere bei unfallbedingten Staus, so weit gehen, dass zum Wahrnehmungszeitpunkt die (räumliche) Ursache des Staus gar nicht mehr existiert. Beispielsweise laufen in Abb. 17.1b zwischen 18:30 und 19:00 Uhr drei Stop-and-Go-Wellen durch den Bereich zwischen Streckenkilometer 30 und 34. Diese Stauwellen wurden durch eine unfallbedingte Sperrung des rechten Fahrstreifens bei Streckenkilometer 43,5, also etwa 10 km stromabwärts, verursacht (räumliche Entkopplung). Außerdem wurde die Streckensperrung bereits um 18:20 Uhr, also mindestens 10 min davor, aufgehoben (zeitliche Entkopplung).

In den Stabilitätsuntersuchungen des Kap. 15 wurde gezeigt, dass es durchaus auch einen Mechanismus für einen Stau *ohne* räumliche Ursache gibt und daher der „Stau aus dem Nichts“ *existiert*. Praktisch kann dieser aber nicht beobachtet werden, weil die dazu nötigen Flüsse auf freier Strecke aufgrund der Engstellen de facto nicht erreicht werden.

Schließlich bleibt noch zu bemerken, dass Unfallereignisse natürlich auch außerhalb infrastruktureller Engstellen stattfinden können, so dass eine unfallbedingte temporäre Engstelle selbst quasi „aus dem Nichts“ entsteht. Der Stau bildet sich in jedem Fall aber erst als *Folge*.

17.4 Grundlagen der Verkehrslageschätzung

Eine wichtige Anwendung und Grundlage vieler Telematikdienste ist die Verkehrslageschätzung und -prognose. Die Problemstellung verlangt, aus den zum aktuellen Zeitpunkt verfügbaren Daten entweder die Verkehrslage in *real-time* zu schätzen oder die zukünftige Verkehrssituation, z.B. für die nächste Viertelstunde oder – mit abnehmender Zuverlässigkeit – Stunde, zu prognostizieren.

Für derartige Anwendungen eignen sich vor allem makroskopische Modelle. Das Cell-Transmission-Modell wurde beispielsweise in Abb. 8.20 dazu verwendet, die Dynamik der Staugrenzen mit Hilfe von zwei Detektorzeitreihen für den Verkehrsfluss zu prognostizieren. Eine andere Herausforderung stellt die Konsistenzprüfung und Fusion von Daten aus unterschiedlichen Quellen oder verschiedener Kategorien dar. Hierfür eignet sich z.B. die *Adaptive Smoothing Method* (vgl. Abschn. 5.3).

Wie bereits bei der Diskussion der drei „Zutaten“ zu einem Verkehrszusammenbruch erwähnt, hängt die Stauentstehung auch vom Zufall ab und ist damit nicht exakt vorhersagbar. Hingegen lässt sich der zeitliche Verlauf eines einmal *entstandenen Verkehrsstaus* relativ präzise prognostizieren. Daher sollten sowohl modell- als auch regelbasierte Ansätze die wesentlichen Einflussfaktoren und „Gesetzmäßigkeiten“ der Verkehrsflussdynamik berücksichtigen. Die Ausdehnung des Staus in Abb. 8.20 hängt beispielsweise im Wesentlichen von der Bilanz der Nachfrage Q_{main} und dem Ausfluss Q_{out} am Staukopf ab.

Weiterhin bestimmen, abgesehen von den durch Unfälle verursachten temporären Engstellen, die infrastrukturellen und damit *permanenteren Engstellen* die raumzeitliche Staudynamik (siehe Abschn. 17.2). Zusammen mit der häufig ebenfalls

messbaren *Bottleneck*-Stärke δQ (siehe Gl. (16.3)) lassen sich noch weitergehende Aussagen hinsichtlich der entstehenden Staumuster treffen (vgl. Kap. 16): Isolierte stehende oder laufende Stauwellen entstehen eher an schwachen Engstellen, während ausgedehnte Staus sich in Folge stärkerer Engstellen ausbilden. Aus den vorgestellten „Gesetzmäßigkeiten“ der Stauausbreitung ergeben sich noch weitere Aspekte für die Verkehrslageschätzung:

- Laufende isolierte Stauwellen sowie alle Dichte- und Geschwindigkeitsänderungen innerhalb von ausgedehnten Staus breiten sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $-c_{\text{stopGo}}$ entgegen der Fahrtrichtung aus (siehe Gesetzmäßigkeit (4) des Abschn. 17.2). Im dreieckigen Fundamentaldiagramm (8.7) lässt sich diese *Stop-and-Go-Ausbreitungsgeschwindigkeit*

$$c_{\text{stopGo}} = -\frac{1}{T\rho_{\max}} = -\frac{s_0 + l}{T} \quad (17.1)$$

als Funktion der Mittelwerte von Fahrzeuglänge, Mindestabstand und Folgezeit ausdrücken. Sie liegt bei etwa 15 km/h.

- Der Ausfluss Q_{out} am Staukopf von ausgedehnten Staus (*dynamische Kapazität*) ist relativ konstant. Im Rahmen von Mikro- und Makromodellen wurde als obere Grenze des Fundamentaldiagramms (8.7) die *statische Kapazität* Q_{\max} pro Fahrstreifen eingeführt. Es gilt

$$Q_{\text{out}} \leq Q_{\max} = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{s_0 + l}{s_0 + l + v_0 T} \right). \quad (17.2)$$

Typische Werte des Ausflusses aus dem Stau sind $Q_{\text{out}} = 2\,000 \text{ Fz/h}$ pro Fahrstreifen. Die Größen c_{stopGo} und Q_{out} können daher auch als „Staukonstanten“ bezeichnet werden. Diese Größen hängen geringfügig vom mittleren Verhalten und der Zusammensetzung des Fahrerkollektivs ab und können daher abhängig von Land und Tageszeit leicht variieren. Im Wesentlichen sind sie aber unabhängig von der Art des Staus.

- Gemäß Gesetzmäßigkeit (2) ist die stromabwärtige Staufront entweder ortsfest an Inhomogenitäten fixiert oder bewegt sich stromaufwärts mit der bereits bekannten festen Geschwindigkeit c_{stopGo} :

$$c_{\text{down}} = \begin{cases} 0 & \text{Engstelle aktiv,} \\ c_{\text{stopGo}} & \text{Engstelle deaktiviert.} \end{cases}$$

Für die stromabwärtige Staufront sind *keine* anderen Geschwindigkeiten möglich. Ein Beispiel eines sich stromaufwärts bewegenden Stauendes im Stadtverkehr ist die sich auflösende Warteschlange nach Grünwerden der Ampel, d.h. nach Deaktivieren der Störstelle. Im Allgemeinen ist jedoch die Frage, ob und wann eine Engstelle deaktiviert wird, die Staufront sich also von der Störstelle ablöst, nicht systematisch zu beantworten.

- Die Ausbreitung der *stromaufwärtigen* Staufront lässt sich in guter Näherung durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit (8.6) für Schockwellen,

$$c_{\text{up}} = \frac{\Delta Q}{\Delta \rho},$$

beschreiben. Die minimale Geschwindigkeit (z.B. Vollsperrung mit $Q_{\text{jam}} = 0$ bei gleichzeitig maximaler Verkehrs nachfrage $Q_{\text{in}} = Q_{\text{max}}$) beträgt $c_{\text{up}} = c_{\text{stopGo}}$. Die maximale positive Geschwindigkeit (bei der Verkehrs nachfrage $Q_{\text{in}} = 0$) ist gleich der Geschwindigkeit $V_{\text{jam}} = Q_{\text{jam}} / \rho_{\text{jam}}$ der Fahrzeuge im Stau.

- Oft ist der Verkehr im Stau instabil, so dass z.B. durch Fahrmanöver entstehende Störungen anwachsen (Gesetzmäßigkeit (6)). Gleichzeitig können diese Störungen sich aber nur mit der Geschwindigkeit c_{stopGo} *stromaufwärts* ausbreiten, so dass nahe der Störstelle der Verkehr homogen bzw. gleichmäßig bleibt. Im Falle dieser *konvektiven Instabilität* erhält man weiter stromaufwärts stärkere Geschwindigkeitsvariationen, die bis zur Ausbildung einzelner Stauwellen führen können.

Literaturhinweise

- Treiber, M., Kesting, A., Helbing D.: Three-phase traffic theory and two-phase models with a fundamental diagram in the light of empirical stylized facts. *Transportation Research Part B: Methodological* **44**(8–9), 983–1000 (2010).
- Kerner, B., Rehborn, H., Aleksic, M., Haug, A.: Recognition and tracking of spatio-temporal congested traffic patterns on freeways. *Transp. Res. C Emerg. Technol.* **12**, 369–400 (2004)
- Wang, Y., Papageorgiou, M.: Real-time freeway traffic state estimation based on extended kalman filter: a general approach. *Transp. Res. B Methodol.* **39**, 141–167 (2005)

Kapitel 18

Schätzung der Reisezeit

Nicht mit Erfindungen, sondern mit Verbesserungen macht man Vermögen.

Henry Ford

18.1 Definitionen der Reisezeit

Die Reisezeit ist definiert durch die Zeitspanne, die ein Fahrzeug für die Durchfahrt eines Streckenabschnitts $[x_1, x_2]$ benötigt. Als streckenbezogene Größen können Reisezeiten einzelner Fahrzeuge entweder für den Eintrittszeitpunkt t_1 oder den Austrittszeitpunkt t_2 definiert werden. Die *tatsächlich benötigte Reisezeit* $\tau_{12}(t)$ eines Fahrzeugs, welches zum Zeitpunkt $t = t_2$ den Abschnitt bei $x = x_2$ verlässt, lautet

$$\tau_{12}(t_2) = t_2 - t_1 . \quad (18.1)$$

Die *erwartete Reisezeit* $\tilde{\tau}_{12}(t)$ von Fahrzeugen, die zur Zeit $t = t_1$ in den Abschnitt hineinfahren, lautet hingegen

$$\tilde{\tau}_{12}(t_1) = t_2^* - t_1 . \quad (18.2)$$

Die Reisezeit $\tilde{\tau}_{12}$ ist die relevante Größe für eine Online-Anwendung, setzt aber eine *Kurzfristprognose* über die zukünftige Verkehrslage voraus, um die zu erwartende Austrittszeit t_2^* zu schätzen.

Weiterhin kann man die *Gesamtreisezeit* τ_{tot} aller Fahrzeuge in einem raumzeitlichen Bereich $[x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ definieren. Sie kann z.B. als zu minimierende Zielfunktion einer Verkehrsfluss-Optimierung dienen (vgl. Kap. 20).

18.2 Reisezeitbestimmung in der Mikrosimulation

Da man in mikroskopischen Simulationen die vollständige Information über jedes Fahrzeug hat, ist eine direkte Bestimmung der Reisezeiten möglich. Für die individuellen Reisezeiten τ_{12} und $\tilde{\tau}_{12}$ erhält man

$$\tau_{12}(t) = t_2^\alpha - t_1^\alpha \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_{12}(t) = t_2^\beta - t_1^\beta, \quad (18.3)$$

wobei α das Fahrzeug kennzeichnet, welches als letztes aus dem Abschnitt (bei $x = x_2$) herausgefahren ist ($t_2^\alpha \leq t < t_2^{\alpha+1}$), während β das Fahrzeug kennzeichnet, welches als letztes in das Gebiet (bei $x = x_1$) hineingefahren ist ($t_1^\beta \leq t < t_1^{\beta+1}$).

Für das raumzeitliche Gebiet $[x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ ergibt sich die *Gesamtreisezeit aus der Mikrosimulation*

$$\tau_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} n_{12}(t) dt$$

(18.4)

durch Aufintegrieren der sich zur Zeit t auf der Strecke befindlichen Fahrzeugzahl n_{12} über die Simulationszeit.

Die Reisezeit eines Fahrzeugs, definiert durch das für die Durchfahrt der Strecke benötigte Zeitintervall, liegt aber erst am Ende des betrachteten Streckenabschnitts vor. Alternativ kann man in der Simulation zu jedem Zeitpunkt t die *instantane* mittlere Reisezeit $\tau_{\text{inst}}(t)$ aus der Summe der aktuellen Bruttozeitlücken aller Fahrzeuge definieren:

$$\tau_{\text{inst}}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n_{12}(t)} \Delta t_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n_{12}(t)} \frac{\Delta x_\alpha}{v_\alpha}. \quad (18.5)$$

Da diese Größe nur definiert ist, wenn alle Fahrzeuggeschwindigkeiten $v_\alpha > 0$ sind, sollte man für die Auswertung eine endliche Minimalgeschwindigkeit annehmen.

18.3 Kumulierte Fahrzeugzahl

Die Darstellung kumulierter Fahrzeugzahlen (*N-curves*) ist die einzige Möglichkeit, aus aggregierten Detektordaten (Aggregierungsintervall Δt) die Reisezeit zu bestimmen. Dazu wird für mehrere Querschnitte i an den Orten x_i die kumulierte Fahrzeugzahl entweder aus dem Integral des Verkehrsflusses berechnet,

$$N_i(t) = N_i(t_0) + \int_{t_0}^t Q_i(t') dt', \quad (18.6)$$

oder am Ende des k -ten Aggregierungsintervalls direkt aus den Zählwerten $n_{k'}$ der vorhergehenden Intervalle ($k < k'$):

$$N_i(t_k) = N_i(t_0 + k \Delta t) = N_i(t_0) + \sum_{k'=1}^k n_i(t_{k'}). \quad (18.7)$$

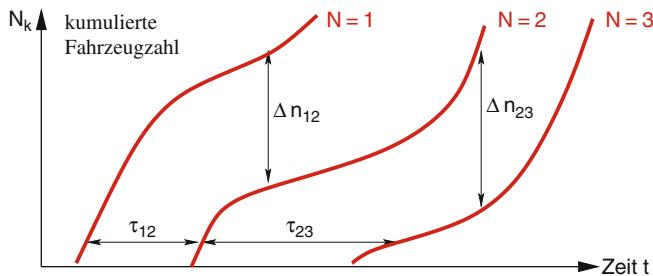


Abb. 18.1 Bestimmung der Reisezeiten zwischen je zwei Querschnitten mit Hilfe kumulierter Fahrzeugzahlen

Unter der Voraussetzung, dass gleiche kumulierte Zählerstände N_i bei allen Detektoren *dieselben* Fahrzeug zugeordnet werden können, ergeben sich in einer Darstellung der zeitabhängigen Zählerstände die Reisezeiten zwischen je zwei Querschnitten direkt als horizontale Abstände der zugeordneten *N-curves* (vgl. Abb. 18.1). Insbesondere sind die Reisezeiten zwischen zwei Detektoren 1 und 2 gemäß den Definitionen der Gl. (18.3) gegeben durch

$$N_1(t - \tau_{12}(t)) = N_2(t), \quad N_1(t) = N_2(t + \tilde{\tau}_{12}(t)). \quad (18.8)$$

Außerhalb von Zu- und Abfahrten und unter Vernachlässigung von Detektor-Zählfehlern sowie von Fahrstreifenwechseln und Überholvorgängen kann die Bedingung gleicher Zählstände eines Fahrzeugs an allen Querschnitten durch die Vorgabe fester Anfangswerte $N_i(t_0)$ erfüllt werden. Mit in Fahrtrichtung steigendem Detektorindex, $x_{i+1} > x_i$, gilt

$$N_i(t_0) = N_{i+1}(t_0) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x, t_0) dx. \quad (18.9)$$

Diese Bedingung ist allerdings eher theoretischer Natur. Im folgenden Abschnitt wird ein praktikables und auch bei Messfehlern und Mehrspurverkehr anwendbares Verfahren zur Reisezeitbestimmung vorgestellt, bei der Floating Cars zur Initialisierung und Korrektur verwendet werden.

18.4 Reisezeitschätzung aus Detektor- und Floating-Car-Daten

Als Anwendungsbeispiel wird eine Reisezeitschätzung vorgestellt, die auf der Methode der kumulierten Fahrzeugzahlen des vorhergehenden Abschnitts aufbaut. Zusätzlich werden *Floating-Car-Daten* (vgl. Kap. 2) genutzt, um die Zählstände der Detektoren zu initialisieren bzw. akkumulierte Detektions- und Bilanzfehler (durch Auf- und Abfahrten) zurückzusetzen. Bei üblichen Zählratenfehlern von etwa 1%

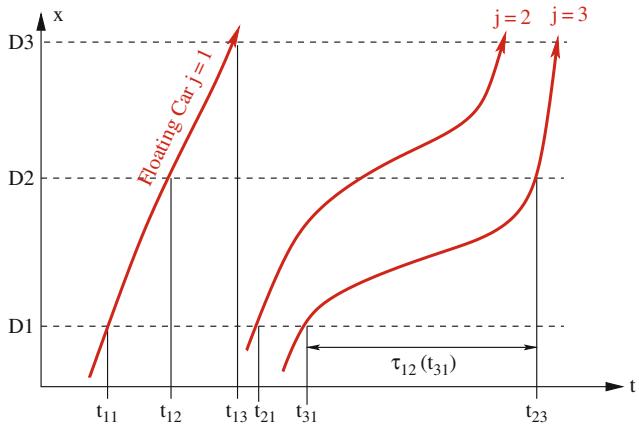


Abb. 18.2 Nutzung von FC-Daten zur Rücksetzung der kumulierten Fahrzeugzahlen zu den FC-Durchgangszeiten t_{ji} . Im Gegensatz zu Abb. 18.1 bezeichnet die vertikale Achse den Ort (mit den Detektoren D_i) und nicht die kumulierten Fahrzeugzahlen

wird etwa alle halbe Stunde ein Floating Car benötigt. Die Methode nutzt folgende Input-Informationen (vgl. Abb. 18.2):

- Mindestens zwei, vorzugsweise aber mehrere Querschnitte i , die für jedes Aggregierungsintervall k die über alle Fahrstreifen summierten Zähldaten (*vehicle-counts*) $n_i(t_k)$ liefern,
- *Floating Cars (FC) j* , wobei j in der Reihenfolge der Überfahrt am ersten Detektor gezählt wird.¹ Benötigt werden die Zeiten t_{ji} , zu denen das j -te FC den i -ten Detektorquerschnitt passiert.

Die Querschnitts-Zählstände werden durch das erste FC $j = 1$ zu den Durchgangszeiten t_{1i} zurückgesetzt:

$$N_i(t_{1i}) = 0. \quad (18.10)$$

In der Abb. 18.2 kann die Rücksetzung z.B. durch das FC $j = 1$ erfolgen: $N_1(t_{11}) = N_2(t_{12}) = N_3(t_{13}) = 0$. In der Praxis ist zu beachten, dass die Querschnittsdaten nur nach jedem Aggregationsintervall (z.B. $\Delta t = 1$ Minute) aktualisiert werden, während die Durchgangszeiten t_{ji} zumindest sekundengenau sind. Um einen unnötigen Genauigkeitsverlust durch die Minutenaggregation zu vermeiden, werden die nach dem FC in derselben Minute noch den Querschnitt passierenden Fahrzeuge anteilig berücksichtigt und die Zählstände am Ende des Zeitintervalls k (Zeit t_k mit $t_{k-1} \leq t_{1i} < t_k$) nicht auf Null, sondern auf den Wert

¹ Zusätzlich müssen Routinen zum Indextausch bereit gestellt werden für den Fall, dass sich zwei Floating Cars gegenseitig überholen.

$$N_i(t_k) = n_i(t_k) \frac{t_{1k} - t_{k-1}}{\Delta t} \quad (18.11)$$

gesetzt. Die eigentliche Schätzung der Reisezeiten zwischen zwei Detektoren i und $i + 1$ erfolgt dann direkt mit Gl. (18.8), also $N_i(t - \tau_{i,i+1}(t)) = N_{i+1}(t)$. Praktisch liest man $N_{i+1}(t)$ ab und ermittelt, zu welcher vergangenen Zeit $t - t'$ die Bedingung $N_i(t') = N_{i+1}(t)$ gilt. Dann ist $\tau_{i,i+1}(t) = t - t'$.

Die Korrektur auflaufender Zählfehler erfolgt immer dann, wenn ein neues FC j den jeweiligen Querschnitt i (zur Zeit t_{ji}) passiert, und zwar durch Verallgemeinerung der Initialisierungsgleichung (18.11):

$$N_i(t_k) = n_i(t_k) \frac{t_{jk} - t_{k-1}}{\Delta t}, \quad t_{k-1} \leq t_{ji} < t_k. \quad (18.12)$$

Daraus folgt natürlich, dass zu gegebener Zeit t_k einige Detektoren bereits durch aktuellere FCs zurückgesetzt sein können als andere. Um bei der Reisezeitbestimmung (18.8) nicht inkonsistent zurückgesetzte Detektoren zu verwenden, müssen bei jedem Querschnitt der Index des letzten vorbeigefahrenen FCs und außerdem die kumulierten Fahrzeugzahlen bezüglich aller nicht zu lange vergangenen Rücksetzungen vorgehalten werden, so dass Gl. (18.8) stets mit konsistent zurückgesetzten Zählerständen angewandt werden kann.

Die geschätzten Reisezeiten vor und nach der Korrektur der Zählerstände können gleichzeitig auch als Qualitätskontrolle dienen. Je geringer die sich daraus ergebenden Sprünge in der Reisezeit sind, desto geringer ist der Gesamtfehler dieser Schätzmethode. Die Fehler werden z.B. durch Detektorfehler, FC-Datenfehler, Diskretisierungsfehler, Zeitstempelfehler, aber auch durch Überholvorgänge hervorgerufen.

18.5 Reisezeitbestimmung in der Makrosimulation

Neben der direkten Reisezeitbestimmung mit Hilfe generierter „virtueller Trajektorien“ (Abschn. 18.6) lässt sich das Verfahren der kumulierten Fahrzeugzahlen auch anhand makroskopischer Simulationsergebnisse unter Verwendung „virtueller“ (d.h. simulierter) Querschnittsdetektoren anwenden.

Man benötigt nur zwei virtuelle Detektoren an den Begrenzungen x_1 (stromaufwärts) und x_2 des Streckenabschnitts. Ferner ergeben sich natürlich keinerlei Probleme mit der Initialisierung der Zählstände der Detektoren, da die anfängliche Fahrzeugzahl

$$n(t_0) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_0) dx$$

bekannt ist. Die Initialisierung der kumulierten Zählwerte N_i für die beiden Detektoren lauten gemäß Gl. (18.9) einfach $N_1(t_0) = n(t_0)$ und $N_2(t_0) = 0$.

Die Gesamtzeit τ_{tot} lässt sich makroskopisch wiederum einfach bestimmen, indem man berücksichtigt, dass $n(t) = \int dx \rho(x, t)$ die Zahl der Fahrzeuge auf dem Streckenabschnitt zur Zeit t ist und die Gesamtzeit aller Fahrzeuge die mittlere Fahrzeuganzahl auf der Strecke multipliziert mit dem Zeitintervall ist. Die Gesamtreisezeit aus einer Makrosimulationen ist damit gegeben durch

$$\boxed{\tau_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t).} \quad (18.13)$$

18.6 Schätzung der Reisezeit aus dem Geschwindigkeitsfeld

Eine Schätzung von Reisezeiten aus Querschnittsdaten ist auch anhand einer rekonstruierten raumzeitlichen Geschwindigkeitsfunktion $V(x, t)$ möglich (siehe Kap. 5). Auf einem Streckenabschnitt $[x_1, x_2]$ betrachten wir dafür „virtuelle Trajektorien“ $x_{\text{FC}}(t)$, deren lokale Geschwindigkeiten durch das raumzeitliche Feld $V(x, t)$ vorgegeben sind. Die Bewegungsgleichung eines *virtuellen Floating-Cars* lautet daher

$$\frac{dx_{\text{FC}}}{dt} = V(x_{\text{FC}}(t)) \quad \text{mit} \quad x_{\text{FC}}(t_1) = x_1 \quad (18.14)$$

als Anfangsbedingung. Man kann auch einen kompletten Satz virtueller Trajektoriendaten gemäß Gl. (8.17) generieren. In jedem Fall werden die Gleichungen durch numerische Integration gelöst. Anschließend werden die Reisezeiten $\tau_{12}(t)$ gemäß Gl. (18.3) und die dazugehörigen mittleren Geschwindigkeiten, $v_{12}(t) = \tau_{12}(t)/(x_2 - x_1)$, ermittelt.

Die Abb. 18.3 und 18.4 veranschaulichen dies anhand eines Geschwindigkeitsfeldes, welches mit Hilfe der *Adaptive Smoothing Method* (Kap. 5) aus Querschnittsdaten eines 20 km langen Abschnitts der A5 bei Frankfurt/Main erzeugt wurde. Man erkennt, dass die Fahrzeit auf dem 20 km langen Abschnitt der A5 durch einen Stau von ca. 10 min auf bis zu 30 min in der Spitze anwächst, wodurch sich die mittlere Reisegeschwindigkeit bis auf ungefähr 40 km/h reduziert. Zu beachten ist, dass die Reisezeiten und -geschwindigkeiten aus der über alle Fahrstreifen gemittelten makroskopischen Geschwindigkeit $V(x, t)$ folgen. Betrachtet man lediglich die Detektoren des linken (rechten) Fahrstreifens, bekäme man im freien Verkehr höhere (niedrigere) Reisegeschwindigkeiten. Im gestauten Verkehr sind diese Unterschiede jedoch durch die *Synchronisation der Geschwindigkeiten* zu vernachlässigen.

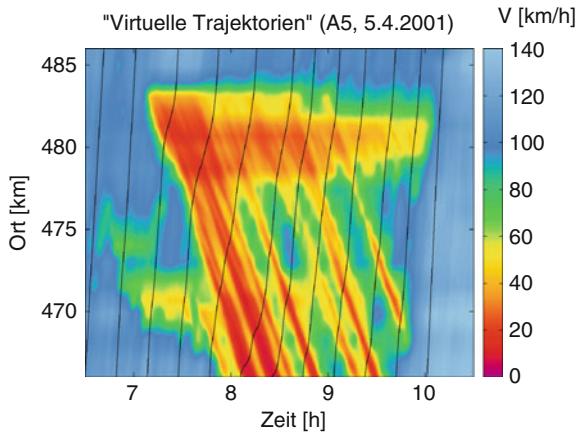


Abb. 18.3 Veranschaulichung des Konzepts „virtueller Trajektorien“, die aus dem raumzeitlichen Geschwindigkeitsfeld $V(x, t)$ durch Integration der Bewegungsgleichung (18.14) folgen. Daraus abgeleitete Reisezeitschätzungen sind in Abb. 18.4 dargestellt

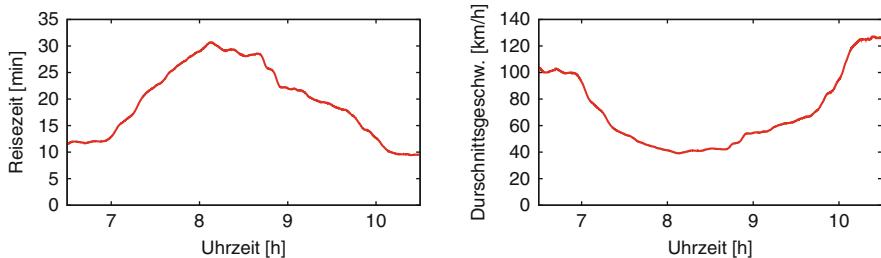


Abb. 18.4 Zeitreihen der geschätzten Reisezeit τ_{12} und der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit als aggregierte Größen, die sich aus den „virtuellen Trajektorien“ für die in Abb. 18.3 dargestellte Verkehrssituation ergeben. Aufgrund eines Staus auf der A5 erhöht sich die Reisezeit in der Spitze gegen 8:00 Uhr auf ca. das Dreifache

Übungsaufgaben

18.1 Reisezeit aus kumulierten Zähldaten

Unter welcher Bedingung gilt bei der Reisezeitermittlung mit kumulierten Fahrzeugzahlen der Zusammenhang „Reisezeit gleich horizontaler Abstand“ exakt? Wie kann man sich behelfen, wenn kein Testfahrzeug für die Initialisierungen der Fahrzeugzahlen zur Verfügung steht?

18.2 Reisezeitbestimmung aus aggregierten Detektordaten

Die beiden Detektoren D1 und D2 sind 4 km voneinander entfernt und zeigen im Zeitverlauf folgende Verkehrsstärken (jeweils über beide Fahrstreifen summiert) an:

	Zeit	< 16:42	16:42–16:50	16:50–16:58	> 16:58
D1:	Q (Fz/h)	1 800	0	3 600	1 800
D2:	Zeit	< 16:00	16:00–16:30	16:30–17:00	> 17:00
	Q (Fz/h)	1 800	0	3 600	1 800

1. Wie könnte die zu diesen Detektor-Zeitreihen führende raumzeitliche Verkehrsdynamik aussehen? *Hinweis:* Es gibt einen Unfall mit Totalsperrung. Mindestens zwei verschiedene Szenarien führen zu demselben qualitativen Verlauf der angegebenen Zeitreihen.
2. Bestimmen Sie die kumulierten Fahrzeugzahlen $n_1(t)$ und $n_2(t)$ an den beiden Detektoren. Geben Sie die Zeit t in Sekunden ab 16:00 Uhr an und berücksichtigen Sie zur Berechnung von $n(t_{\text{start}})$ bei Detektor D1, dass vor 16:00 Uhr die Fahrzeuge alle mit 120 km/h fuhren und der Gesamtfluss bei beiden Detektoren konstant und gleich 1 800 Fz/h war.
3. Stellen Sie die kumulierten Fahrzeugzahlen grafisch dar und bestimmen Sie daraus die Reisezeiten τ_{12} und $\tilde{\tau}_{12}$ für 16:40 Uhr, also $t = 2400$ s.
4. Geben Sie $\tilde{\tau}_{12}(t)$ analytisch für die Intervalle $t < -120$ s und $-120 \leq t < 2\,520$ s sowie $\tau_{12}(t)$ für das Intervall $1\,800 \leq t < 3\,000$ s an. Warum springt $\tilde{\tau}_{12}(t)$ bei $t = -120$ s um 1 800 s, d.h. um 30 Minuten?

Literaturhinweise

- Cassidy, M.J., Windover, J.R.: Methodology for assessing dynamics of freeway traffic flow. *Transp. Res. Rec.* **1484**, 73–79 (1995)
- Cassidy, M.J., Bertini, R.L.: Some traffic features at freeway bottlenecks. *Transp. Res. B Methodol.* **33**, 25–42 (1999)
- Coifman, B.: Estimating travel times and vehicle trajectories on freeways using dual loop detectors. *Transp. Res. A Policy Pract.* **36**, 351–364 (2002)
- Van Lint, J.: Reliable travel time prediction for freeways. TRAIL thesis series, Delft University Press (2004)

Kapitel 19

Treibstoffverbrauch und Emissionen

Die höchsten Kilometerkosten von allen Wagentypen hat immer noch ein Einkaufswagen im Supermarkt.

Lothar Schmidt

19.1 Modell-Übersicht

Allgemein unterscheidet man auch bei Verbrauchs- und Emissionsmodellen mikroskopische und makroskopische Ansätze. Beide Ansätze werden im Folgenden vorgestellt.

19.1.1 Makroskopische Ansätze

In dieser Modellklasse werden nur globale, für alle Fahrzeuge bzw. eine Fahrzeugklasse gültige Bedingungen, nicht aber das Fahrverhalten einzelner Fahrer berücksichtigt. Solche Modelle werden angewandt, um den Verbrauch für ein komplettes Streckennetz oder global für eine ganze Region zu berechnen.

Ein Modellansatz basiert beispielsweise auf *Emissionsfaktoren (emission-factor models)*. In Abhängigkeit von Fahrzeugtyp und Verkehrssituation (Stadt, Landstraße, Autobahn) werden die streckenbezogenen Verbräuche bzw. Emissionen ermittelt. Dies geschieht üblicherweise durch Verbrauchs- bzw. Emissionsmessung bei typischen Vertretern der Fahrzeugklasse, welche standardisierte Testzyklen durchlaufen.

Ein anderer Modellansatz basiert auf *Durchschnittsgeschwindigkeiten (average-speed models)*. Verbrauchsmessungen werden anhand einer Vielzahl von Fahrten mit einer Vielzahl von Fahrzeugtypen durchgeführt und die entsprechenden Mittelwerte anschließend nur nach einem einzigen Beeinflussungsfaktor disaggregiert: der mittleren Geschwindigkeit.

Makroskopische Verbrauchsmodelle liefern als abhängige (erklärte) Variable spezifische Verbräuche bzw. Emissionen, z.B. in Einheiten von Liter/Kfz/km oder kg/Kfz/km in Abhängigkeit des Verkehrstyps. Dieser ist z.B. durch den Streckentyp (Stadtverkehr, Landstraße oder Autobahn) oder durch die mittlere Geschwindigkeit charakterisiert. Mit entsprechenden Verkehrsleistungen (in Einheiten von „Fahrzeugkilometern“, d.h. Kfz · km), welche z.B. von Verkehrsbefragungen oder Ver-

kehrsplanungsberechnungen stammen können, sind damit globale Aussagen über Verbräuche bzw. Emissionen möglich. Umgekehrt kann man anhand der Menge des verkauften Treibstoffes die schwierig zu bestimmende Verkehrsleistung abschätzen.

19.1.2 Mikroskopische Ansätze

Ein Nachteil der makroskopischen Ansätze liegt darin, dass die Beeinflussung des Verbrauchs durch *Beschleunigungs- und Bremsmanöver* sowie durch den Motorbetriebszustand unberücksichtigt bleibt. Detailliertere Modelle, sogenannte *mikroskopische Verbrauchsmodelle (modal-consumption models)*, ermöglichen hingegen, Fragen nach der Abhängigkeit des Verbrauchs vom (individuellen) Fahrstil hinsichtlich Beschleunigungs-, Brems- und Gangwahlverhalten zu beantworten. Insbesondere kann man mit dieser Modellklasse untersuchen, wie stark Verkehrsstaus und Stop-and-Go-Verkehr den Verbrauch erhöhen und ob lichtsignalisierte Kreuzungen oder Kreisverkehre hinsichtlich des Verbrauchs eine günstigere Knotenpunktregelung erlauben.

Die erklärten Variablen dieser Modelle sind für jeden Fahrzeugtyp Verbrauchs-raten, d.h. Kraftstoff-Flüsse bzw. Emissionsraten $\frac{dc}{dt}$ in Abhängigkeit von Ge-schwindigkeit, Beschleunigung, Motorbetriebszustand und ggf. externen Variablen wie die Steigung der Strecke. Um zu einer Aussage bezüglich des Verbrauchs bzw. der Emissionen zu kommen, benötigt man also als *Input* für mikroskopische Verbrauchsmodelle genau den *Output* mikroskopischer Verkehrsmodelle (d.h. Ge-schwindigkeiten und Beschleunigungen).

Eine Unterkategorie stellen die *phänomenologischen (tabellenbasierten) Modelle* dar, bei denen die Verbrauchsrate als Funktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung im Fahrzeug gemessen und daraus eine zweidimensionale „Verbrauchsmatrix“ als *Lookup-Tabelle* der Verbrauchsrate erstellt wird. Ein-flussfaktoren wie Steigungen, die Beladung oder die Gangwahl bleiben dadurch aber unberücksichtigt. Außerdem muss man die Verbrauchsmatrix aufwändig durch Testfahrten erzeugen.

Bei *physik-basierten Modellen* werden dagegen universell gültige physikalische Prinzipien zur Ermittlung des Leistungsbedarfs als Funktion von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung angewandt und dann mittels eines *Motorkennfeldes* die Verbrauchs- und Emissionsraten ermittelt. Der Vorteil bei diesem Ansatz ist, dass die Leistungsfunktionen analytisch berechnet werden (also keine Messungen nötig sind), solange einige globale Fahrzeugeigenschaften wie Masse und cw-Wert bekannt sind. Die benötigten Motorkennfelder wiederum kann man in Motorprüf-ständen messen. Dieses Vorgehen ist universeller und erfordert insbesondere keine aufwändigen Testfahrten. Schließlich ist ein derartiger Modellansatz anschaulicher und verdeutlicht die Einflussfaktoren des Verbrauchs prägnanter als die phänome-nologischen Modelle. Im Weiteren wird ein physik-basiertes Modell detailliert vor-gestellt.

19.2 Physik-basiertes Modell für den Treibstoffverbrauch

Abbildung 19.1 zeigt die Ansatzpunkte des Modells in der Übersicht. Die Hauptursache des Kraftstoffverbrauchs liegt in der Überwindung des *Fahrwiderstandes* F , welcher hauptsächlich (mittels der Trägheitskraft und des Luftwiderstandes) von der Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängt, also von genau den Größen, welche in Fahrzeugfolgemodellen berechnet werden.

Aus dem Fahrwiderstand berechnet sich nach der Formel „Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit“, d.h.

$$P = F v, \quad (19.1)$$

die benötigte mechanische Leistung. Zu dieser muss allerdings die Betriebsleistung zur Versorgung der Nebenaggregate und zur Überwindung allfälliger Verluste hinzugaddiert werden. Mit der resultierenden Leistung wird unter Berücksichtigung eines im Allgemeinen vom Betriebszustand abhängigen Wirkungsgrades die Verbrauchsrate und aus dieser der auf z.B. 100 km hochgerechnete Verbrauch berechnet. Diese letzte Größe wird – leicht tiefpassgefiltert – in vielen modernen Fahrzeugen direkt angezeigt. In den folgenden Unterabschnitten werden die einzelnen Modellkomponenten vorgestellt.

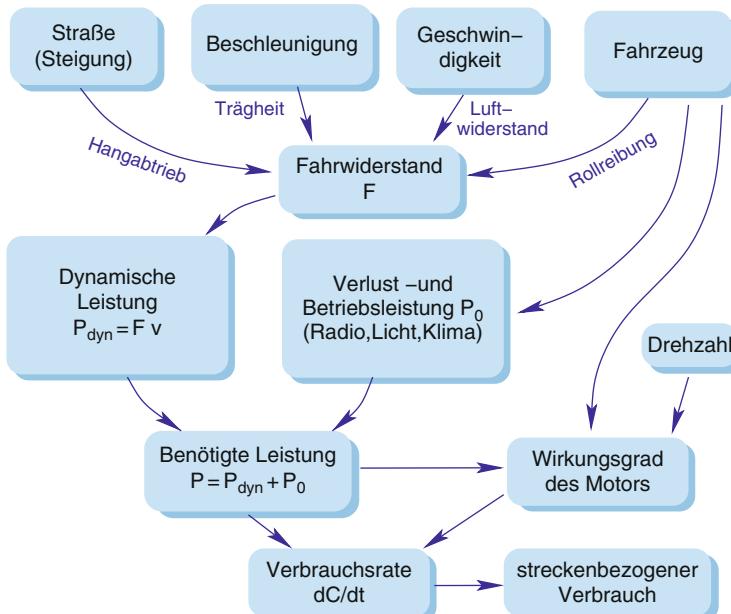


Abb. 19.1 Diagramm zur Veranschaulichung der instantanen Kraftstoff-Verbrauchsmodellierung mit einem physik-basierten Modellansatz

19.3 Fahrwiderstand

Der Fahrwiderstand, d.h. die zur Aufrechterhaltung der vorgegebenen Geschwindigkeit und Beschleunigung notwendige mechanische Kraft, wird durch folgenden Ansatz modelliert:

$$F(v, \dot{v}) = m\dot{v} + (\mu + \beta)mg + \frac{1}{2}c_w\rho Av^2. \quad (19.2)$$

Diese Fahrwiderstands-Formel enthält folgende Beiträge:

1. Die *Trägheitskraft* $m\dot{v}$ ergibt sich nach dem klassischen Newton'schen Gesetz aus der Gesamtmasse m multipliziert mit der Beschleunigung $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Bei Verzögerungen ist diese Kraft negativ und wird mit den anderen Kraftbeiträgen „verrechnet“.
2. Die Kraft $mg\mu$ aufgrund geschwindigkeitsunabhängiger *Roll- und Festkörperreibung* ist proportional zur Gewichtskraft mg (mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$) und dem Reibungskoeffizienten μ . Es gibt auch geschwindigkeitsproportionale Anteile der Reibung, welche hier aber vernachlässigt werden.
3. Die *Hangabtriebskraft* $mg \sin(\beta) \approx mg\beta$ berücksichtigt den Einfluss von Steigungen und Gefällen. Da bei üblichen Neigungswinkeln β die Näherung $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$ anwendbar ist, kann man β direkt durch die geläufigen „Steigungsprozenten“ angeben: Eine 10-prozentige Steigung entspricht $\beta = 0.1$. Auf Gefällestrecken gilt entsprechend $\beta < 0$.
4. Der *Luftwiderstand* $\frac{1}{2}c_w\rho Av^2$ enthält neben der nicht beeinflussbaren Luftdichte ($\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$ auf Meereshöhe) die Fahrzeug-Querschnittsfläche A (von vorne gesehen, typische Werte für PKW um 2 m^2) und den dimensionslosen Luftwiderstandsbeiwert c_w , welcher auch einfach „cw-Wert“ genannt wird. Er besitzt bei modernen Fahrzeugen Werte von 0.25–0.35, während er beim VW Käfer noch ca. 0.5 betrug. Vor allem hängt der Luftwiderstand aber auch quadratisch von der Geschwindigkeit ab, weshalb er ab Geschwindigkeiten von etwa 130 km/h den dominanten Fahrwiderstands- und damit Verbrauchsbeitrag darstellt (vgl. die Abb. 19.5).

19.4 Motorleistung

Neben der zur Überwindung des Fahrwiderstandes benötigten *mechanischen Leistung* $P_{\text{dyn}} = Fv$ fällt beim Betrieb eines Kraftfahrzeugs immer auch ein zusätzlicher Mindestleistungsbedarf P_0 an, welcher auch *Betriebsleistung* genannt wird. Er setzt sich vor allem zusammen aus (i) dem Leistungsbedarf durch Licht, Radio, Klimaanlage etc., (ii) dem Leistungsbedarf diverser Nebenaggregate und Stellmotoren (Fensterheber, Lüftung, Scheibenwischer etc.), (iii) verschiedenster elektrischer

Verluste, aber auch (iv) die zum Leerlaufbetrieb benötigte Leistung zur Überwindung der inneren Motorreibung.¹

Berücksichtigt man, dass in modernen Fahrzeugen im *Schleppbetrieb* (Motorbremse) die Kraftstoffzufuhr abgeschaltet wird (*Schubabschaltung*), ergibt sich folgender zur Berechnung des Verbrauchs relevanter *effektiver Leistungsbedarf*:

$$P(v, \dot{v}) = \max [P_0 + vF(v, \dot{v}), 0]. \quad (19.3)$$

Die Maximum-Bedingung in Gl. (19.3) bringt zum Ausdruck, dass beim Bremsen keine Energie gespeichert werden kann. Allerdings können negative Beiträge von Fv (durch Gefälle oder Verzögerungen) ebenfalls den Beitrag P_0 bestreiten, denn auch bei Einsatz der Motorbremse wird der Generator (bzw. die Lichtmaschine) angetrieben. Modifiziert man die Leistungsformel (19.3), können auch ältere und sehr moderne Formen des Energiemanagements modelliert werden. Bei alten Fahrzeugen ohne Schubabschaltung fällt ein P_0 entsprechender Verbrauch immer an. Dies wird abgebildet durch

$$P(v, \dot{v}) = P_0 + \max [vF(v, \dot{v}), 0]. \quad (19.4)$$

Bei Elektro- oder Hybridfahrzeugen, die beim Bremsen die kinetische Energie vollständig speichern können, gilt dagegen

$$P(v, \dot{v}) = P_0 + vF(v, \dot{v}). \quad (19.5)$$

Im Schleppbetrieb wird die Leistung nach Gl. (19.5) negativ, was eine Umkehrung des Leistungsstroms in Richtung Batterie/Schwungrad etc. entspricht.

19.5 Verbrauchsrate

Bei einem Motor-Wirkungsgrad von 100%, also einer vollständigen Umwandlung der volumenbezogenen kalorischen Energiedichte w_{cal} des Kraftstoffs in mechanische Energie ΔE , gelte für den Verbrauch ΔC (in Litern) die Definitionsgleichung $\Delta E = w_{\text{cal}} \Delta C$. Typische Werte der Energiedichte liegen für Benzin und Diesel bei $39.6 \times 10^6 \text{ J/l} = 11 \text{ kWh/l}$.

Gegen diese ideale Beziehung spricht aber der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Reale Motoren haben einen vom Arbeitspunkt abhängigen *Wirkungsgrad* γ in der Größenordnung von 0.25, welcher definiert ist durch

$$\Delta E = \gamma w_{\text{cal}} \Delta C. \quad (19.6)$$

¹ Im Fahrbetrieb kann die innere Reibung indirekt auch durch Motorkennfelder (Abschn. 19.6) berücksichtigt werden, im Stillstand bzw. Leerlauf ist dies aber problematisch.

Der Arbeitspunkt ist durch den Leistungsbedarf P und die Motordrehzahl f bestimmt, so dass sich mit $P = \frac{d\Delta E}{dt}$ folgende Formel für die Verbrauchsrate \dot{C} (Liter pro Zeiteinheit) zur Bereitstellung der nach Gl. (19.3) benötigten Motorleistung ergibt:

$$\boxed{\dot{C} = \frac{dC}{dt} = \frac{P}{\gamma(P, f) w_{\text{cal}}}.} \quad (19.7)$$

Die *Motordrehzahl* $f = f(v, g)$ hängt direkt von der gefahrenen Geschwindigkeit v , dem gewählten Gang g und den Übersetzungsfaktoren des Getriebes ab. Bei gegebenen Getriebedaten und einer gegebenen Gangwahlstrategie (man kann z.B. immer den verbrauchsoptimalen Gang wählen) hängt der Wirkungsgrad γ nur von der Leistung P und der Geschwindigkeit v ab. Setzt man nun die Leistung (19.3) mit Gl. (19.2) in den Ausdruck (19.7) ein, erhält man die (instantane) Verbrauchsrate allein als Funktion der Ausgangsgrößen der Verkehrssimulation – Geschwindigkeit und Beschleunigung – sowie des Motorkennfeldes. Letzteres wird nun näher betrachtet.

19.6 Motorkennfeld und instantane Verbrauchsrate

Der Wirkungsgrad des Motors hängt im Wesentlichen vom „Arbeitspunkt“ des Motors ab, also von der *Drehzahl* f und dem *effektiven Mitteldruck* (d.h. die Druckdifferenz im Zylinder). Weitere Abhängigkeiten wie die von der Betriebstemperatur werden hier nicht betrachtet. Diese Abhängigkeiten werden in Motorprüfständen ermittelt und in Form sogenannter *Motorkennfelder* dargestellt. Folgende Darstellungsformen der Motorkennfelder sind üblich:

1. Die abhängige Variable kann angegeben werden als *Wirkungsgrad* γ (in Abb. 19.3), als *spezifischer Verbrauch* (in kg/kWh) bezüglich der Masse bzw. bezüglich des Volumens (in l/kWh, Abb. 19.2), oder als Effizienz (Kehrwert des spezifischen Verbrauchs). Für den volumenbezogenen spezifischen Verbrauch C_{spez} gilt

$$\frac{1}{\gamma w_{\text{cal}}} = C_{\text{spez}}. \quad (19.8)$$

Für den massenbezogenen spezifischen Verbrauch muss man C_{spez} mit der spezifischen Masse (z.B. bei Benzin etwa 0.8 kg/l) multiplizieren.

2. Die erste unabhängige Variable ist relativ einheitlich die *Motordrehzahl*. Diese kann allerdings auch normiert angegeben werden mit den Werten $f_{\text{norm}} = 0$ bei der Leerlaufdrehzahl und $f_{\text{norm}} = 1$ bei der zur maximalen Leistung gehörigen (also nicht der maximalen) Drehzahl.
3. Die zweite unabhängige Variable kann definiert werden als *Motorleistung* P , Motormoment M , effektiver Mitteldruck \bar{p} oder Gaspedalstellung. Die ersten

drei Größen sind elementar über die Drehzahl und das effektive Zylindervolumen V_{zyl} umrechenbar über die Beziehungen

$$P = 2\pi f M, \quad \text{und} \quad \bar{p} = \frac{2M}{V_{\text{zyl}}}. \quad (19.9)$$

Die zweite Beziehung gilt allerdings nur für Viertaktmotoren. Alle drei Größen steigen monoton mit der Gaspedalstellung: Ihre Werte sind umso höher, je stärker man das Gaspedal „runterdrückt“. In Abb. 19.2 wurde die Motorleistung dargestellt, da dieses die anschaulichste und auch direkt durch Gl. (19.3) mit der Simulation verbundene Größe ist.

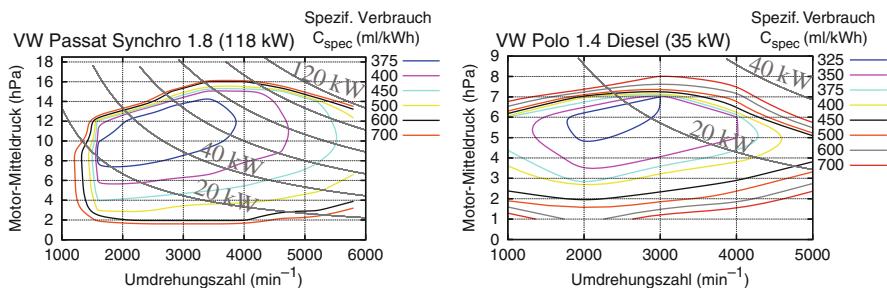


Abb. 19.2 Aus Motorprüfständen gewonnene Motorkennfelder verschiedener PKW-Typen. Die horizontale Achse stellt die Motordrehzahl f dar, während die auf der vertikalen Achse aufgetragende Größe („effektiver Mitteldruck“, proportional zu P/f) mit dem Druck auf das Gaspedal steigt. Die als Höhenschichtlinien dargestellte abhängige Variable ist hier der spezifische Verbrauch \tilde{C} in Einheiten von 1 ml Treibstoff pro kWh mechanischer Energie. Für Benzin mit dem Brennwert $w_{\text{cal}} = 11 \text{ kWh/kg}$ gilt $\gamma = 90 \text{ ml/kWh}/\tilde{C}$

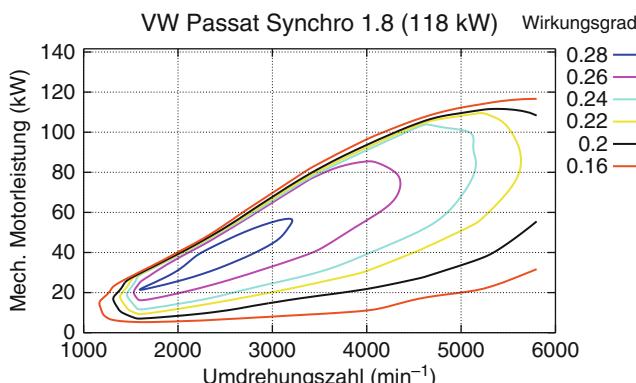


Abb. 19.3 Alternative Darstellung des Kennfeldes. Die zweite unabhängige Variable ist nun die über Gl. (19.9) aus der Drehzahl und dem effektiven Mitteldruck umgerechnete Leistung. Die abhängige Variable ist der mit Gl. (19.8) aus dem spezifischen Verbrauch berechnete Wirkungsgrad

Generell spiegelt sich in den Motorkennfeldern die „Kraftstoff-Sparregel“ wider, die fordert, dass man beim Beschleunigen bei möglichst geringer Drehzahl möglichst viel „Gas“ geben soll (linkes oder mittleres oberes Ende der Diagramme, je nach Leistungsanforderung) und danach ein möglichst hoher Gang gewählt wird, so dass man sich wieder möglichst weit „links“ im Diagramm befindet.

19.7 Auswertung

Mit Hilfe des vorgestellten Modells zur Berechnung des Treibstoffverbauchs lassen sich anschauliche Größen wie der Verbrauch bezogen auf eine Strecke von 100 km oder der Gesamtverbrauch aller Fahrzeuge in einer Simulation ermitteln. Außerdem können neben dem Kraftstoffverbrauch auch Emissionen sekundärer Größen wie z.B. Kohlendioxid berechnet werden.

19.7.1 Verbrauch bezogen auf 100 km

Aus der Verbrauchsrate (19.7) lässt sich die Größe „Kraftstoffverbrauch pro 100 km“ berechnen. Mit der Kettenregel

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dC}{dx} \quad (19.10)$$

ergibt sich der *hochgerechnete* instantane „100 km“-Verbrauch zu

$$C_{100} = 100 \text{ km} \frac{dC}{dx} = \frac{100 \text{ km}}{v} \frac{dC}{dt} = \frac{100\,000 \text{ m}}{w_{\text{cal}}} \frac{P}{v\gamma(P, f(v, g))}. \quad (19.11)$$

Diese Größe hängt vom Kennfeld, der Geschwindigkeit, der Gangwahl und, über die Leistungsformel (19.3), von der Beschleunigung ab. Sie wird in manchen Fahrzeugen direkt (tiefpassgefiltert) im Cockpit angezeigt.

Die Abb. 19.4 und 19.5 zeigen mit Hilfe der Motorkennfelder aus Abb. 19.2 die aus Gl. (19.11) berechnete *Fahrzeug-Verbrauchscharakteristik* unter Berücksichtigung des jeweils verbrauchsoptimalen Gangs. Bildlich gesehen „baut“ man den Motor beim Übergang vom Motorkennfeld zur Verbrauchscharakteristik „in ein Fahrzeug ein“. Diese Verbrauchscharakteristik entspricht der Verbrauchsmatrix, welche bei tabellenbasierten mikroskopischen Modellen durch Fahrtests bestimmt wird. Sie wird manchmal auch als *Jante-Diagramm* bezeichnet. Typische Parameter zusammen mit typischen Werten für die Berechnung der Verbrauchscharakteristiken sind in der Tabelle 19.1 zusammengefasst.

In den Abb. 19.4 und 19.5 wird die bereits erwähnte Kraftstoff-Sparregel direkt sichtbar: Man sollte generell einen möglichst hohen Gang wählen und nur bei erhöhtem Leistungsbedarf (Beschleunigung oder Steigung) „herunterschalten“.

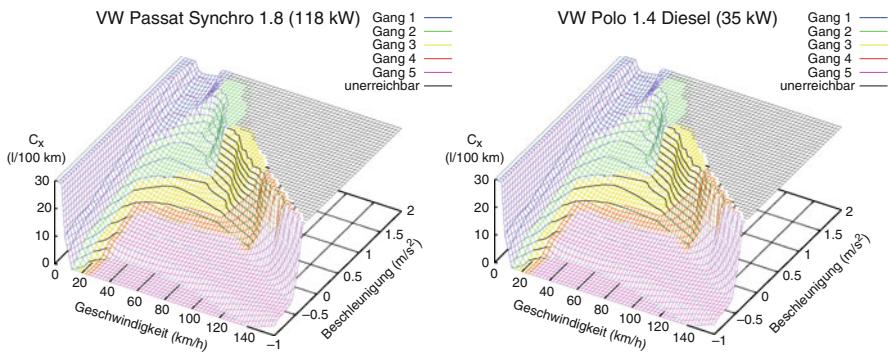


Abb. 19.4 Aus den Motorkennfeldern 19.2 bzw. 19.3 unter Verwendung von Gl. (19.11) und den jeweiligen Fahrzeuggrößen berechnete Verbrauchscharakteristik. Gezeigt ist jeweils der hochgerechnete 100-km-Verbrauch C_{100} als Funktion von Geschwindigkeit und Beschleunigung

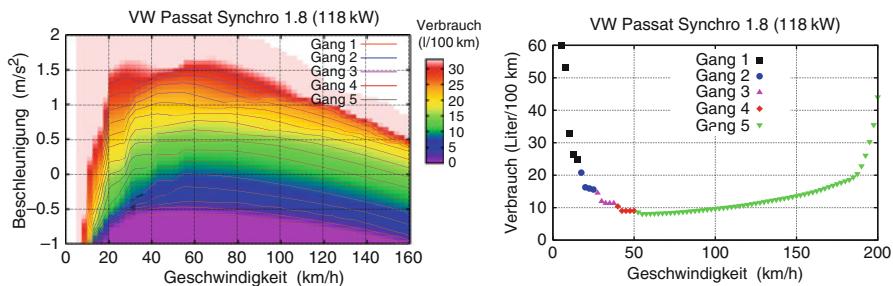


Abb. 19.5 Links: Alternative Darstellung des hochgerechneten 100-km-Verbrauchs C_{100} eines VW Passat (118 kW). Rechts: Konstantfahrt (d.h. Beschleunigung $\dot{v} = 0$) jeweils im verbrauchsoptimalen Gang

Tabelle 19.1 Beeinflussungsfaktoren mit typischen Werten für die Berechnung des Treibstoffverbrauchs

Einflussgröße	Symbol	Wert
Grundleistung	P_0	3 kW
Fahrzeugmasse	m	1 500 kg
Reibungskoeffizient	μ	0.02
cw-Wert	c_w	0.3
Querschnitts- oder Stirnfläche	A	2 m ²
Dichte der Luft	ρ	1.3 kg/m ³
Gravitationskonstante	g	9.81 m/s ²
Brennwert des Treibstoffs	w_{cal}	$39.6 \cdot 10^6 \text{ J/l} \approx 11 \text{ kWh/l}$
Dynamischer Reifenradius	r_{dyn}	0.286 m
Übersetzungsverhältnisse 1. bis 5. Gang (Beispiele)		13.90, 7.80, 5.26, 3.79, 3.09

19.7.2 Berechnung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs

Intuitiv vermutet man, dass sich der Treibstoffverbrauch durch Stau stark erhöht. Mit dem vorgestellten Modell kann man in mikroskopischen Verkehrssimulationen die Antwort auf diese Frage *quantifizieren*. Für die Simulation benötigt man (i) die Zusammensetzung der Fahrzeugflotte, (ii) die Motorkennfelder für repräsentative Vertreter der Flotte und alle zur Ermittlung der Fahrzeug-Verbrauchskennfelder $\dot{C}_\alpha(v, \dot{v}, g)$ benötigten Fahrzeugparameter und (iii) eine Regel, wie man die Gänge $g_\alpha(t)$ wählt (z.B. verbrauchsoptimal).

Aus einem realitätsnahen Mikromodell (z.B. dem IDM) kann man dann für alle in der Simulation beteiligten Fahrzeuge α die Geschwindigkeiten $v_\alpha(t)$ und Beschleunigungen $\dot{v}_\alpha(t)$ erhalten. Der Gesamt-Kraftstoffverbrauch der mikroskopischen Verkehrssimulation im raumzeitlichen Gebiet $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}] \times [x_1, x_2]$ berechnet sich dann durch

$$C_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha=\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \dot{C}_\alpha(v_\alpha(t), \dot{v}_\alpha(t), g_\alpha(t)). \quad (19.12)$$

Die unteren und oberen Grenzen $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ geben die Indizes der zur Zeit t stromaufwärtigsten bzw. stromabwärtigsten Fahrzeuge an. Abbildung 20.5 im Kapitel „Verkehrsoptimierung“ zeigt ein Beispiel für die Anwendung der Gl. (19.12) zur Bestimmung des Mehrverbrauchs durch Staus.

19.7.3 Kohlendioxid- und andere Schadstoffemissionen

Mit Hilfe von Motorkennfeldern kann man nicht nur den Treibstoffverbrauch berechnen, sondern auch verschiedene Emissionen wie Kohlendioxide, Stickoxide, Rußpartikel etc. ermitteln. Die Emission an CO₂ ist beispielsweise direkt proportional zum Kraftstoffverbrauch. Für „Super Plus“ mit einer Oktanzahl von 98 ROZ gilt z.B. das Verhältnis von 2.32 kg/l, während es für Diesel bei 2.68 kg/l liegt. Zur Berechnung anderer Emissionen mit komplexeren Abhängigkeiten sind spezielle Kennfelder nötig.

19.8 Ermittlung des Treibstoffverbrauchs mit Makromodellen

Analog zum Fahrzeugkennfeld bei Mikromodellen hängt in Makromodellen der Treibstoffverbrauch von Geschwindigkeit, Beschleunigung und natürlich vom Fahrzeugtyp ab. Sinnvollerweise mittelt man über alle Fahrzeugtypen, um ein *makroskopisches Fahrzeugkennfeld*

$$\dot{C}(V, \dot{V}) = \langle C_\alpha(V, \dot{V}, g) \rangle$$

zu erhalten. Die Mittelung $\langle \cdot \rangle$ erfolgt dabei über die Fahrzeuge α und die Gangwahl-Strategien g bei fester (makroskopischer) Geschwindigkeit V und Beschleunigung \dot{V} (vgl. Kap. 9).

Den Gesamtverbrauch (bzw. die Gesamtemissionen) bei einer makroskopischen Simulation über ein raumzeitliches Gebiet $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}] \times [x_1, x_2]$ erhält man dann aus

$$C_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \dot{C}[V(x, t), A(x, t)] \quad (19.13)$$

mit der makroskopischen Beschleunigung A (siehe Gl. (9.1)).

Übungsaufgaben

19.1 Lesen eines Drehzahl-Leistungs-Motorkennfeldes

Wie hoch ist bei einem Kennfeld gemäß Abb. 19.3 die Motorleistung bei 3 000 Umdrehungen/min und Vollgas? Bei welcher Drehzahl wird die in einer gewissen Fahrsituation benötigte Leistung von 60 kW verbrauchsoptimal bereitgestellt?

19.2 Lesen eines Drehzahl-Mitteldruck-Motorkennfeldes

Betrachten Sie nun einen Motor mit Kennfeld gemäß Abb. 19.2. (i) Welche Leistung erhält man bei 2 600 Umdrehungen pro Minute, wenn man Vollgas gibt? (ii) Ist es bergauf bei einer benötigten Leistung von 40 kW besser, bei niedriger Drehzahl (2 600/min) viel Gas oder bei höherer Drehzahl (4 000/min) entsprechend weniger Gas zu geben?

19.3 Stauvermeidung=Kraftstoffersparnis?

Warum ist die Reduktion des Verbrauchs bei Vermeidung eines Staus weniger deutlich, wenn bei freiem Verkehr mit hohen Geschwindigkeiten gefahren wird?

19.4 Einflussfaktoren auf den Treibstoffverbrauch

Diskutieren Sie, welche der folgenden Aussagen bezüglich des Kraftstoffverbrauchs korrekt sind und welche nicht. Begründen Sie das Ergebnis, indem Sie zeigen, an welcher Formel und an welcher Stelle sich der Inhalt der Aussage auswirkt. Rechnen Sie ggf. explizit die Änderungen mit Tabelle 19.1 und der Annahme eines konstanten spezifischen Verbrauchs (300 g/kWh) aus.

1. Der Mehrverbrauch durch Klimaanlagen wirkt sich vor allem in der Stadt aus.
2. Der Mehrverbrauch durch Dachgepäckträger wirkt sich vor allem in der Stadt aus. (Der cw-Wert erhöhe sich durch den Dachgepäckträger auf 0.38.)
3. Fährt man bergab im Leerlauf statt mit Motorbremse, schadet das zwar den Bremsen, führt aber zu geringerem Verbrauch.
4. Auf Autobahnen (Geschwindigkeit 144 km/h) kann man wesentlich, d.h. mehr als 2%, Benzin sparen, wenn man nicht volltankt, sondern den Tank nur zur Hälfte füllt und dafür häufiger auftankt (Tankfüllung 60 l).

5. Tempo 30-Zonen statt „Tempo 50“ reduzieren den Kraftstoffverbrauch.
6. Tempo 130 statt Tempo 150 reduziert den Kraftstoffverbrauch.

19.5 Treibstoffverbrauch „Autobahn gegenüber Pass-Straße“

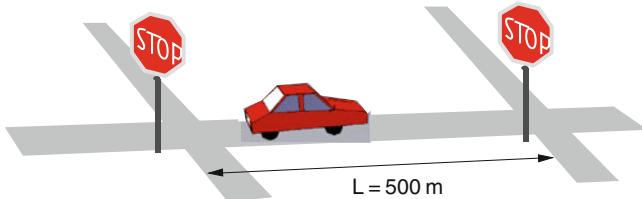
Unter welchen Bedingungen verbraucht man im Mittel mehr Treibstoff pro Kilometer:

1. Bei einer Konstantfahrt mit 150 km/h auf einer ebenen Autobahn oder
2. auf einer Pass-Straße mit Steigung $\beta = 8\%$, die man im Aufstieg mit 72 km/h sowie bei der Abfahrt mit Motorbremse fährt?

Nehmen Sie einen konstanten spezifischen Verbrauch von 300 g/kWh an.

19.6 Treibstoff- und CO₂-Verbrauch bei Kreuzungen mit Anhaltepflicht

In Amerika und Australien gibt es häufig *Four-way-Stop*-Kreuzungen, bei denen man prinzipiell anhalten muss. Wie groß wäre die Ersparnis an Treibstoff und CO₂, wenn man diese Stopp-Regelung durch eine Vorfahrtsstraße (welche man ohne Bremsen durchfahren kann) ersetzen würde?



Zur Modellierung werden folgende Annahmen getroffen: (i) Die freie Geschwindigkeit zwischen den Kreuzungen beträgt $v_0 = 16 \text{ m/s}$. (ii) Vor bzw. nach jeder Kreuzung wird mit 2 m/s^2 verzögert bzw. beschleunigt. (iii) Da kein Kreuzungsverkehr herrscht, kann man nach jedem Stopp sofort wieder anfahren. Als Kenngrößen für das Treibstoffmodell dienen die Werte in der Tabelle 19.1.

19.7 Treibstoffverbrauch mit dem Optimal-Velocity-Modell

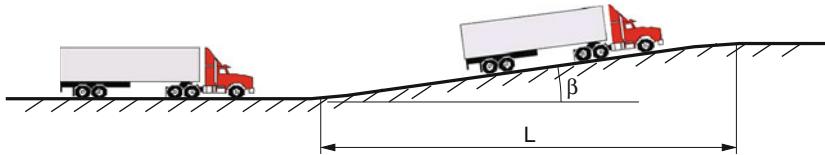
Betrachten Sie ein einzelnes Fahrzeug, welches gemäß des Optimal-Velocity-Modells (Abschn. 10.5) auf freier Strecke beschleunigt.

1. Bestimmen Sie τ für eine Wunschgeschwindigkeit v_0 von 120 km/h und einer Maximalbeschleunigung von 2 m/s^2 .
2. Berechnen Sie die benötigte Motorleistung während des Beschleunigungsvorgangs für die Parameter aus Tabelle 19.1. Drücken Sie das Ergebnis in der Form $A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3$ aus und geben Sie die Koeffizienten A_i an. Für welche Geschwindigkeit wird die maximale Motorleistung benötigt und wie hoch ist sie?

19.8 LKW an Steigungsstrecken

Um zu langsame LKW an Steigungsstrecken zu verhindern, ist die Steigung auf Autobahnen im Allgemeinen auf $\beta = 4\%$ begrenzt (in Sonderfällen $\beta = 5\%$).

Allerdings hängt die Behinderung, d.h. die minimale Geschwindigkeit der LKW am Ende der Steigung auch von der Länge L der Steigungsstrecke ab.



Zur Modellierung wird als *Worst Case* ein LKW betrachtet, welcher vollbeladen auf ebener Strecke gerade die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h erreicht und dessen Motor unabhängig von der Geschwindigkeit eine konstante Maximalleistung abgeben kann. Die relevanten Parameter sind: Fahrzeugmasse 38 t, Reibungskoeffizient 0.03, ein c_w -Wert von 0.8 und eine Stirnfläche von 10 m^2 . Nehmen Sie außerdem für die Gravitationskonstante $g = 10 \text{ m/s}^2$ und für die Dichte der Luft 1.3 kg/m^3 an.

1. Wie groß ist die für den Antrieb benötigte Leistung?
2. Der LKW fährt nun mit seiner Maximalgeschwindigkeit von 80 km/h in eine Steigung mit 4 bzw. 5% hinein. Wie groß sind jeweils die anfänglichen Verzögerungen bei unveränderter Motorleistung? Berechnen Sie außerdem die Endgeschwindigkeiten, wenn die beiden Steigungen hinreichend lang sind. Da die Endgeschwindigkeiten sehr niedrig sind, können Sie bei ihrer Berechnung den Luftwiderstand vernachlässigen.
3. Der Verzögerungsvorgang an der Steigung soll nun mit dem Optimal-Velocity-Modell (OVM) für eine freie Strecke nachgebildet werden:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0 - v}{\tau}.$$

Ermitteln Sie für die beiden Steigungsstrecken jeweils die zwei Modellparameter v_0 und τ unter folgenden Vorgaben:

- Die Geschwindigkeit nähert sich für hinreichend lange Steigungen den Endgeschwindigkeiten 37 km/h (5%-Steigung) bzw. 42 km/h (4%-Steigung).
 - Die anfängliche Verzögerung bei Beginn der Steigung beträgt 0.5 m/s^2 (5%-Steigung) bzw. 0.4 m/s^2 (4%-Steigung).
4. Ermitteln Sie nun die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit, indem Sie das obige Mikromodell lösen. Dabei soll der LKW zur Zeit $t = 0$ den Beginn der Steigung passieren. Geben Sie das Ergebnis allgemein an.
 5. Werden die LKW auf einer 5%-igen Steigung von 500 m Länge oder auf einer 1 km langen 4%-igen Steigung langsamer? Gehen Sie dabei von den Zahlenwerten $v_0 = 37 \text{ km/h}$, $\tau = 24 \text{ s}$ (Steigung 5%) bzw. $v_0 = 42 \text{ km/h}$, $\tau = 26 \text{ s}$ (Steigung 4%) aus. Nehmen Sie außerdem an, dass das Ende der 5%-igen Stei-

gung nach 29.1 s und das Ende der 4%-igen Steigung nach 64.2 s erreicht wird (diese Zeiten sind nicht elementar ausrechenbar).

Literaturhinweise

- Mitschke, M., Wallentowitz, H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer, New York, NY (2004)
- Barth, M., An, F., Norbeck, J., Ross, M.: Modal emissions modeling: a physical approach. *Transp. Res. Rec.* **1520**, 81–88 (1996)
- Panis, L., Broekx, S., Liu, R.: Modelling instantaneous traffic emission and the influence of traffic speed limits. *Sci. Total Environ.* **371**, 270–285 (2006)
- Cappiello, A., Chabini, I., Nam, E., Lue, A., Abou Zeid, M.: A statistical model of vehicle emissions and fuel consumption. *Proceedings of the IEEE 5th international conference on intelligent transportation systems*, 801–809 (2002)
- Ahn, K., Rakha, H., Trani, A., Aerde, M.V.: Estimating vehicle fuel consumption and emissions based on instantaneous speed and acceleration levels. *J. Transp. Eng.* **128**, 182–190 (2002)
- Treibler, M., Kesting, A., Thiemann, C.: How much does traffic congestion increase fuel consumption and emissions? Applying a fuel consumption model to the NGSIM trajectory data. In: TRB annual meeting 2008 CD-ROM, Transportation Research Board of the National Academies, Washington, DC (2008)

Kapitel 20

Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

Das Entscheidende am Wissen ist, dass man es beherzigt und anwendet.

Konfuzius

20.1 Grundprinzipien

Aus der Analyse der raumzeitlichen Staudynamik auf Autobahnen in Kap. 17 ergibt sich, dass die meisten Staus durch das gemeinsame Zusammentreffen folgender drei „Zutaten“ entstehen:

- (A) Hohes Verkehrsaufkommen,
- (B) eine die Kapazität reduzierende Streckeninhomogenität (Engstelle) sowie
- (C) lokale Störungen im Verkehrsfluss als „Auslöser“.

Daraus folgt das

Grundprinzip der Optimierung des Verkehrs:

Homogenisiere den Verkehrsfluss (i) zeitlich, (ii) räumlich und (iii) bezüglich der Geschwindigkeiten so gut wie möglich.

Für eine Umsetzung des Prinzips durch *Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen* gibt es verschiedene Möglichkeiten. Sie wirken auf unterschiedliche Aspekte der Homogenität und außerdem auf unterschiedlich großen raumzeitlichen Skalen.

Verkehrsplanerische Maßnahmen wirken v.a. auf den „Stau-Faktor“ (A), d.h. das Verkehrsaufkommen. Durch den Ausbau, Neubau und Rückbau von Strecken lässt sich die globale Verkehrsnachfrage beeinflussen.¹ Die Nachfrage lässt sich auch

¹ Die Effekte können dabei durchaus gegenintuitiv sein. Zum Beispiel kann ein Neubau einer Strecke im „Nutzergleichgewicht“ zu einer Verlängerung der Reisezeiten für alle Nutzer führen (Braess'sches Paradoxon).

durch politische Maßnahmen wie z.B. eine (zeitabhängige) Maut beeinflussen. Darüber hinaus können Änderungen in der Verkehrsregelung das Verkehrsaufkommen reduzieren. Als Beispiel seien die in den USA üblichen *HOV-Lanes* (HOV steht für *High Occupancy Vehicles*), die nur von mit mindestens zwei Personen besetzten Autos benutzt werden dürfen, angeführt. Weiterhin kann durch eine Förderung des öffentlichen Verkehrs (z.B. durch eine Verringerung der Taktzeiten, die Einrichtung neuer Linien, aber auch durch eine *ÖV-Priorisierung* an Kreuzungspunkten) die Verkehrsmittelwahl beeinflusst werden. Durch Ausbaumaßnahmen können schließlich auch infrastrukturelle Engstellen beseitigt bzw. in ihrer Kapazitätsreduzierenden Wirkung abgeschwächt werden (Staufaktor (B)). Üblicherweise erfordern derlei Maßnahmen große Zeiträume (von bis zu mehreren Jahren) für ihre Umsetzung.

Dynamische, verkehrsabhängige Verkehrsführungen beeinflussen ebenfalls den Staufaktor (A), wirken aber auf mittleren räumlichen und zeitlichen Skalen. Eine Umleitung infolge eines Staus auf der Autobahn kann beispielsweise das nachgeordnete Streckennetz in einem Bereich von 5–50 km über mehrere Stunden beeinflussen. Ein verkehrsabhängiges Verkehrs- und Baustellenmanagement kann dagegen wesentlich zur Vermeidung derartiger Situationen beitragen.

Lokale, adaptive Verkehrsbeeinflussung wirkt auf kleinen räumlichen (< 5 km) und zeitlichen (< 10 min) Skalen. Als Beispiele gelten (i) Geschwindigkeitsbeschränkungen zur Reduzierung der Störungen im Verkehrsfluss, (ii) Zuflussdrosselungen an Autobahnauffahrten, die den Verkehrsfluss zeitlich homogenisieren, (iii) Verkehrsführungen an und vor Baustellen und, *last but not least*, (iv) der Einfluss des Fahrverhaltens. Im folgenden werden einige Maßnahmen der lokalen Verkehrsbeeinflussung näher betrachtet.

20.2 Geschwindigkeitsbeschränkungen

Tempolimits homogenisieren den Verkehr vor allem bezüglich der Geschwindigkeiten. Bei einem Tempolimit von z.B. 80 km/h ist die *erlaubte Geschwindigkeit* von PKWs und LKWs dieselbe und außerdem gleich oder kleiner als die *Wunschgeschwindigkeit* der Fahrer oder als die *Höchstgeschwindigkeit* des Fahrzeugs (vgl. Abschn. 4.2). Damit hat die *tatsächliche Geschwindigkeit* im freien Verkehr, die im Wesentlichen gleich dem Minimum aus allen obigen Geschwindigkeiten ist, eine geringere Varianz. Dadurch reduzieren sich die lokalen Störungen, weil ein Großteil der Bremsmanöver vermieden wird (Staufaktor (C)).

Damit am Beginn von „Langsamfahrrpassagen“ (mit einem Tempolimit von z.B. 60 km/h) keine zu starken Bremsmanöver entstehen, leitet man derartige Zonen durch sogenannte *Geschwindigkeitstrichter*, also gestaffelte Tempolimits von z.B. 120 → 100 → 80 → 60 km/h, ein.

Mit Hilfe von mikroskopischen Modellen lassen sich die Wirkungen von Geschwindigkeitsbeschränkungen simulieren (vgl. das Beispiel in Abb. 20.1). Die durch das Tempolimit hervorgerufene Homogenisierung der Geschwindigkeit erleichtert die notwendigen Fahrstreifenwechsel und reduziert damit potenziell

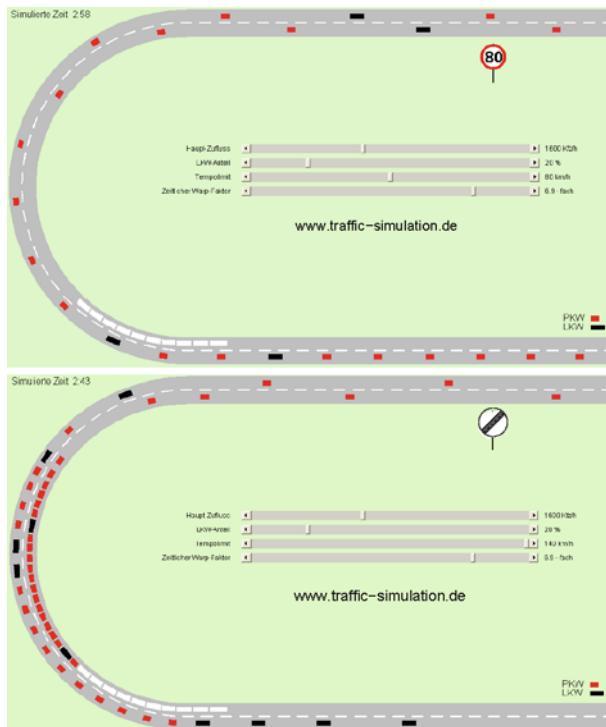


Abb. 20.1 Auswirkung einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf die Staubildung vor einer (z.B. durch eine Baustelle hervorgerufenen) Fahrstreifenreduktion. Die dargestellte Simulation kann interaktiv auf der Webseite www.traffic-simulation.de durchgeführt werden

stauverursachende abrupte Fahrmanöver. Dadurch wird ein Verkehrszusammenbruch verhindert bzw. verzögert, so dass man trotz Tempolimits letztendlich schneller vorankommt.

Bei geringem Verkehrsaufkommen (Staufaktor (A) ist nicht gegeben) führen auch hohe Geschwindigkeitsunterschiede nicht zu kritischen Störungen im Verkehrsfluss, so dass in diesem Fall Tempolimits nicht zur Verkehrsflussoptimierung beitragen. Selbsterklärend können sie aber aus anderen Gründen, z.B. für die Verkehrssicherheit oder Lärmschutz, sinnvoll sein.

Auswirkung von Tempolimits:
„Langsamer ist manchmal schneller.“

20.3 Zuflussdosierung an Auffahrten

Zufluss-Dosierung, auch als Zuflussregelung oder englisch *ramp metering* bezeichnet, sind vor allem in den USA eine verbreitete Verkehrsbeeinflussungs-Maßnahme:² Kommt ein Verkehrsfluss-*Peak* bzw. „Fahrzeugschwäll“ auf der Hauptfahrbahn mit hohem Verkehrsaufkommen auf einer Autobahn-Zufahrt zusammen, werden die Fahrzeuge auf der Zufahrt durch eine „Pförtnerampel“ kurzzeitig am Einfahren auf die Autobahn gehindert, bis die Belastungsspitze vorbei ist. Dadurch wird der *zeitliche* Verlauf des Verkehrsflusses homogenisiert und gleichzeitig die Stärke der durch die Einfahrt bewirkten *Streckeninhomogenität* verringert. Damit nach Freigabe der Auffahrt kein neuer Fahrzeugschwäll durch die auffahrenden Fahrzeuge entsteht, werden durch kurze Grünphasen jeweils nur eines oder wenige Fahrzeuge auf die Autobahn gelassen.

Verschiedene Regelungsstrategien für die Zuflussdosierung lassen sich im Rahmen von mikroskopischen Verkehrssimulationen untersuchen und bewerten. Eine einfache Strategie z.B. lautet: „Reduziere den Zufluss Q_{rmp} so, dass die Summe $Q_{\text{main}} + Q_{\text{rmp}}$ aus Verkehrsfluss auf Hauptstrecke und Rampe einen kritischen Wert Q_c nicht überschreitet“. Diese Regel wird in der Abb. 20.2 illustriert.

Abbildung 20.3 zeigt eine Simulation, in der diese Regelung angewandt wurde. Als Randbedingung für die Verkehrs nachfrage wurden in der Simulation empirische Verkehrsflussdaten verwendet. Die Parameter des Intelligent-Driver-Modells (vgl. Abschn. 11.3) sind so kalibriert worden, dass die Simulation zu einer ähnlichen Staubildung führte wie sie tatsächlich beobachtet wurde (linkes oberes Bild). Das Diagramm 20.3 rechts oben zeigt die Verkehrssituation bei optimal eingestelltem

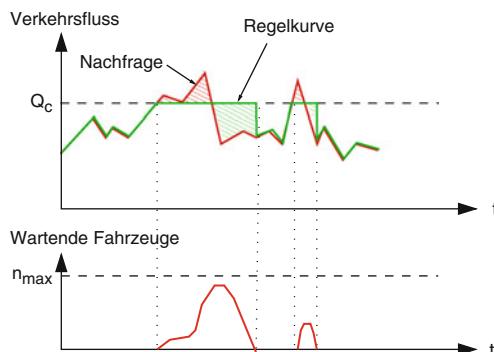


Abb. 20.2 Einfache Regelstrategie für eine Zuflussdosierung. *Oben:* Der Gesamtfluss auf der Hauptstrecke wird durch eine Pförtnerampel auf der Zufahrt auf Q_c beschränkt und dadurch die Verkehrs nachfrage auf die Regelkurve transformiert. Die Flächen zwischen der Nachfragekurve und der Regelkurve geben die Maximalzahl von wartenden Fahrzeugen an. *Unten:* Zeitlicher Verlauf der wartenden Fahrzeuge. Falls diese Fahrzeugzahl die Pufferkapazität n_{max} überschreitet, drohen Beeinträchtigungen des untergeordneten Straßennetzes

² In den letzten Jahren nimmt ihre Anwendung aber auch in Deutschland zu.

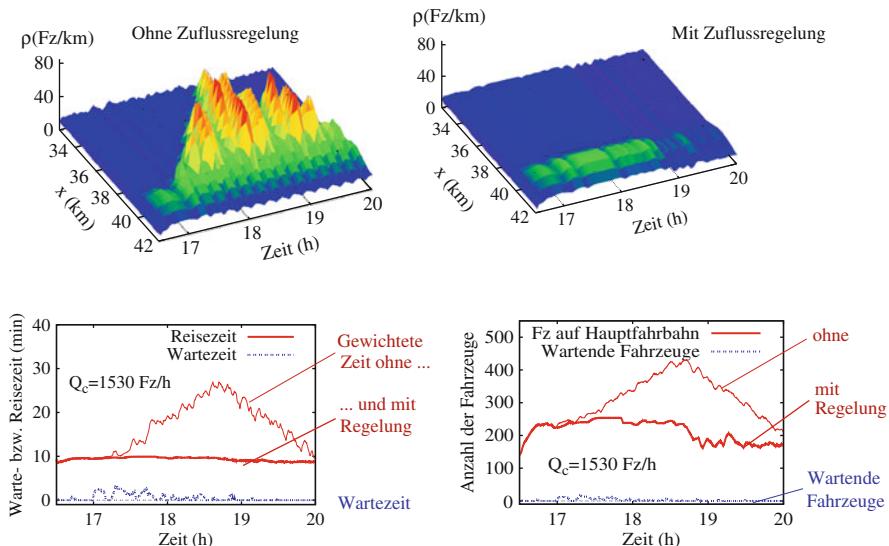


Abb. 20.3 Stauvermeidung durch Zuflussregelung

Regelparameter Q_c . Dieser Parameter der Zuflussregelung muss durch eine nicht-lineare Optimierung bestimmt werden (siehe Abschn. 20.6). Die Zeitreihen links unten zeigen Reisezeiten ohne und mit Zuflussregelung sowie die bei Zuflussregelung an der Zufahrt vor der Ampel entstehenden Wartezeiten.

Die Simulation zeigt, dass nicht nur die Fahrer auf der Hauptstrecke profitieren, sondern, abgesehen von einem sehr kleinen Zeitintervall um 17:00 Uhr, auch die an der Zufahrt auffahrenden Fahrzeuge: Die notwendige Wartezeit ist kleiner als die anschließende Reisezeitersparnis auf der Hauptstrecke durch den ausbleibenden Verkehrszausammenbruch.

Bei der Umsetzung in die Praxis ist eine Regelung der Zuflussdosierung meist komplizierter und hängt regelbasiert u.a. von Zeitreihen benachbarter stationärer Detektoren sowie der Tageszeit ab. Beispielsweise muss man vermeiden, dass ein durch die Pförtnerampel verursachter Rückstau in das Nebennetz gelangt und dieses dadurch beeinträchtigt. Droht die Warteschlange der gestauten Fahrzeuge deshalb die von der Infrastruktur vorgegebene Aufnahmefähigkeit zu überschreiten, wird die Regelung im Allgemeinen wieder deaktiviert.

*Auswirkung von Zuflussdosierungen:
„Weniger ist manchmal mehr.“*

20.4 Effizientes Fahrverhalten und ACC-Systeme

Der wichtigste kapazitätsbestimmende Faktor ist die Zeitlücke T (vgl. Abschn. 4.3). Dies legt nahe, den kapazitätsmindernden Einfluss von Streckeninhomogenitäten wie z.B. Baustellen, Steigungen oder Auffahrten durch eine etwas verkürzte Folgezeit beim Durchfahren dieser Streckeninhomogenitäten zu mindern (vgl. Abb. 20.4). Damit diese *dynamische Reduzierung* der Engstellen-Stärke nicht auf Kosten der Verkehrssicherheit geht, ist natürlich erhöhte Aufmerksamkeit nötig. Damit bietet sich diese Art der Effizienzsteigerung vor allen in Kombination mit dem Einsatz von adaptiven Beschleunigungsreglern (*Adaptive Cruise Control, ACC*) an.

Im Rahmen von mikroskopischen Verkehrssimulationen kann man untersuchen, wie eine verkehrseffiziente Fahrweise im Bereich von Engstellen aussehen könnte. Die Herausforderung bei einem Eingriff in das individuelle Fahrverhalten besteht dabei – unter Berücksichtigung von Sicherheits-, Akzeptanz- und rechtlichen Aspekten – im Ausgleich der Gegensätze Fahrkomfort und Verkehrseffizienz. Während sich ein komfortables Fahren durch große Abstände bei geringen Fahrzeugbeschleunigungen auszeichnet, erfordert ein verkehrsoptimierendes Verhalten kleinere Abstände und eine schnellere Anpassung an Geschwindigkeitsänderungen der umgebenden Fahrzeuge.

Diese gegensätzlichen Ziele können durch eine *verkehrsadaptive Fahrstrategie* miteinander vereinbart werden und durch ein ACC-System mittels Anpassung der das Fahrverhalten charakterisierenden Parameter umgesetzt werden. Die Wahl der Parameter erfolgt in Abhängigkeit von der lokalen Verkehrssituation, die auf der Basis der im Fahrzeug zur Verfügung stehenden Informationen bestimmt wird.³ Durch die Unterscheidung verschiedener Verkehrssituationen wird lediglich ein kurzzeitiger Wechsel in ein verkehrseffizientes Fahrregime (zum Beispiel beim Herauffahren aus einem Stau) ermöglicht. Formal entspricht dies einem ACC- bzw. Fahrzeugfolgemodell (vgl. Kap. 11) mit einer automatischen, ereignisgesteuerten Wahl der Modellparameter.

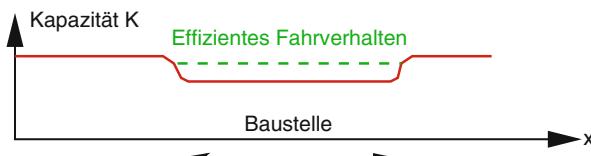


Abb. 20.4 Homogenisierung der Streckenkapazität und Abschwächung der Engstelle durch eine ortsabhängige effiziente Fahrweise bzw. ACC-Regelung

³ *Fahrerinformations-* und ebenso wie *Fahrerassistenzsysteme* ein aktuelles Forschungsfeld. Informationen über die Infrastruktur und die lokale Verkehrslage können über verschiedene Kanäle erfasst werden und in das Fahrzeug gelangen. Beispiele sind dynamische digitale Karten, die Kommunikation zwischen Fahrzeugen (*car-to-car communication*), die Kommunikation mit stationären Sendern am Straßenrand (*vehicle-infrastructure integration*) oder die Nutzung von Mobilfunkdaten (*Floating-Phone-Daten*) zur Lageschätzung.

Eine situationsabhängige Fahrstrategie kann beispielsweise folgende fünf Verkehrszustände mit unterschiedlichen Zielsetzungen unterscheiden: (i) Freier Verkehr, (ii) Annäherung an einen Stau, (iii) Stau, (iv) Ausfahrt aus dem Stau und (v) Engstelle. Während z.B. im Zustand „Freier Verkehr“ ein komfortabler Fahrstil angestrebt wird, kommt es bei der „Ausfahrt aus dem Stau“ darauf an, dass die Fahrzeuge rechtzeitig und zügig beschleunigen, um den Ausfluss aus dem Stau (d.h. die *dynamische Kapazität*) zu erhöhen. Besonders wichtig für die Stauvermeidung ist die Fahrstrategie an „Engstellen“. Da eine lokale Kapazitätsreduktion

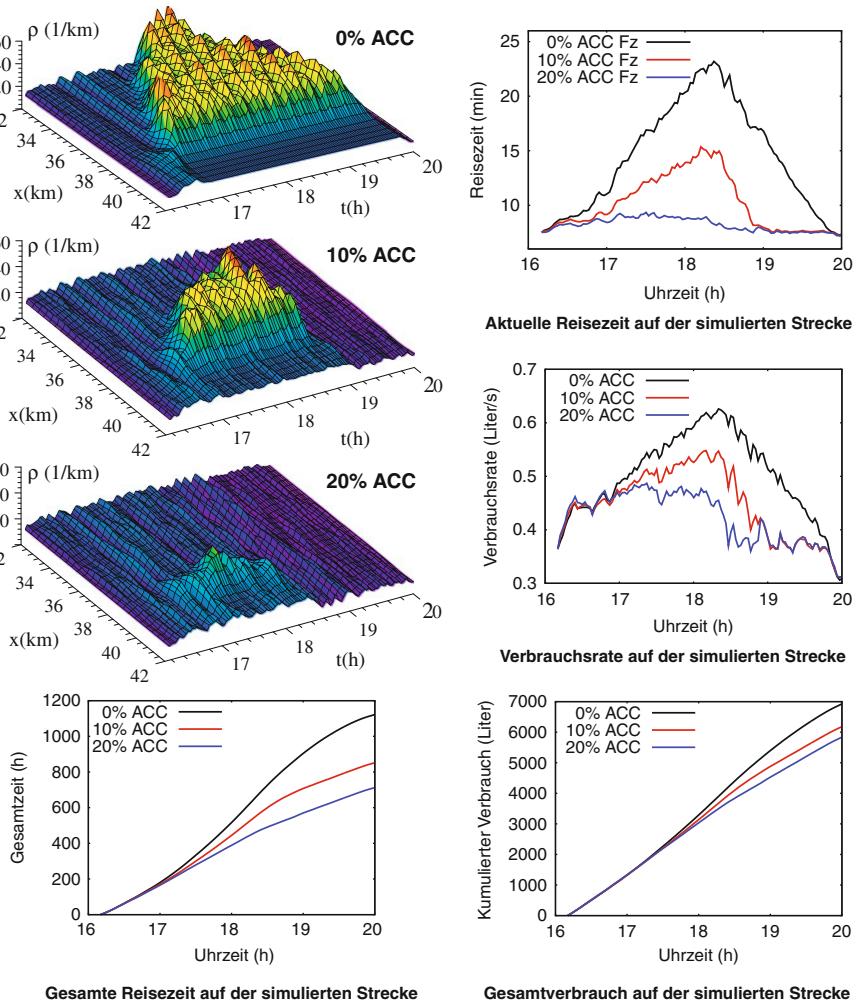


Abb. 20.5 Reduktion des Staus und damit einhergehende Reduktion der Reisezeiten und des Treibstoffverbrauchs durch eine verkehrsadaptive Fahrstrategie von ACC-Fahrzeugen anhand einer nachsimulierten Verkehrssituation auf der A8-Ost (Salzburg-München mit dem Irschenberg als Engstelle)

das gemeinsame Merkmal dieser Engstellen ist (siehe Abb. 20.4), ist das Ziel in diesem Verkehrszustand, das „Kapazitätsloch“ durch ein aufmerksames Fahren bei kleineren Abständen zum Vordermann „aufzufüllen“. Denn – wie die Simulationen in Abb. 20.5 zeigen – bereits eine geringe Abschwächung des Engpasses durch wenige Prozent effizienter Fahrer bzw. Fahrzeuge kann einen Verkehrszusammenbruch hinauszögern und damit die Zeitverluste infolge des Staus deutlich verringern.

Die Umsetzung dieser Fahrstrategien erfolgt durch die situationsangepasste Änderung der das Fahrverhalten beeinflussenden ACC-Parameter. So kann z.B. die gewünschte Zeitlücke innerhalb einer Engstelle in einem gewissen Rahmen reduziert oder die Agilität des Fahrzeugs bei der Ausfahrt aus dem Stau erhöht werden. Bei der Verwendung des Intelligent-Driver-Modells (IDM, vgl. Abschn. 11.3) bieten sich hierfür die Parameter T (Folgezeit), a (maximale Beschleunigung) und b (komfortable Verzögerung) an. So wird für jeden der fünf Verkehrszustände ein Satz von IDM-Parametern hinterlegt (siehe Tabelle 20.1). Diese „Strategiematrix“ ist durch Multiplikationsfaktoren relativ formuliert, so dass individuelle Grundeinstellungen des Fahrers erhalten bleiben.

Tabelle 20.1 Fahrstrategie mit situationsabhängigen Parametrisierungen für das Intelligent-Driver-Modell. Die relativen Faktoren λ_T , λ_a und λ_b bewirken eine Veränderung der ACC-Parameter für die *gewünschte Zeitlücke T* , der *maximalen Beschleunigung a* und der *komfortablen Verzögerung b* eines ausgestatteten Fahrzeugs

Verkehrssituation	λ_T	λ_a	λ_b	Fahrverhalten
Freier Verkehr	1	1	1	Standardeinstellungen
Annäherung an Stau	1	1	0.7	Erhöhung der (kollektiven) Sicherheit
Stau	1	1	1	Standardeinstellungen
Ausfahrt aus dem Stau	0.5	2	1	Erhöhung der dynamischen Kapazität
Engstelle	0.7	1.5	1	Verhinderung des Verkehrszusammenbruchs

In der Abb. 20.5 wurde der Anteil an ACC-Fahrzeugen mit dieser verkehrsadaptiven Fahrstrategie variiert. Die Simulationsergebnisse zeigen eine Reduktion des Staus für einen Ausstattungsanteil von bereits 10% der Fahrzeuge mit der situationsabhängigen Fahrstrategie. Zum einen wirkt die lokale erhöhte Kapazität durch die Fahrstrategie „Engstelle“ stauverzögernd – in dem Simulationsbeispiel bei einem Anteil von 20% sogar vollkommen stauvermeidend. Zum anderen bewirkt ein agileres Beschleunigen am Staukopf einen höheren Ausfluss und verringert damit den *capacity drop*, mit dem die Abnahme der Verkehrsstärke im Stau bezeichnet wird. Als Folge kann der Stau nicht mehr so stark wie im Referenzszenario wachsen. Die drastischen Wirkungen eines Staus zeigen sich auch in den aktuellen und kumulierten Reisezeiten (vgl. Abschn. 18.2). Die Reisezeiten der Fahrer erhöhen sich zwischen 16:00 und 18:00 Uhr auf etwa das Dreifache. Die staubedingten Gesamtzeitverluste betragen ca. 400 Stunden und damit über 50% in diesem Simulationszenario. Mit dem Modell für den Treibstoffverbrauch (vgl. Kap. 19) lässt sich auch die Verbrauchsrate und der Gesamtverbrauch berechnen. Der Mehrverbrauch an Treibstoff durch einen Stau fällt mit ca. 15% erwartungsgemäß aber niedriger aus (vgl. Abschn. 19.7.2).

Solche Simulationen zeigen des Weiteren, dass auch „menschliche“ Fahrer die Auflösung eines bereits entstandenen Staus fördern können, ohne den Vorschriften widersprechende zu geringe Folgezeiten zu fahren oder die Verkehrssicherheit zu gefährden.⁴

Beitrag des Fahrers zur Verkehrsoptimierung:

- (i) Bei Engstellen keine zu großen Abstände lassen und (ii) am Ende eines Staus oder einer Engstelle zügig beschleunigen.

20.5 LKW-Überholverbot und weitere lokale Verkehrsregeln

Weitere geeignete Maßnahmen zur Verkehrshomogenisierung werden nun am Beispiel einer dreistreifigen Autobahn diskutiert.

LKW-Überholverbote, vor allem an Steigungs- oder Gefällestrichen, verhindern „Jumborennen“, bei denen LKWs auf dem mittleren Fahrstreifen z.B. nur 50 km/h oder noch langsamer fahren. Damit werden gefährliche Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen mittleren und rechten Fahrstreifen reduziert.

Mindestgeschwindigkeiten auf dem rechten und mittleren Fahrstreifen und gleichzeitig *Höchstgeschwindigkeiten* auf Steigungsstrecken vermeiden gefährlich hohe Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen mittleren und linken Fahrstreifen. Eine Kombination mit LKW-Überholverboten ist offensichtlich sinnvoll.

Empfehlungen, den Fahrstreifen so selten wie möglich zu wechseln (Stay-in-Lane-Recommendation), um so die Zahl der Störungen so gering wie möglich zu halten.

Fahrstreifenwechselverbote „Rechts-Mitte“ vor größeren Einfahrten können den Störfaktor vor Einfahrten, der durch ein Wechseln auf die linken Fahrstreifen entsteht, reduzieren. Diese Regelung erfordert u.a. lange Beschleunigungsstreifen, so dass nach etwa einem Drittel der Länge der Beschleunigungsstreifen ein Fahrstreifenwechselverbot wieder aufgehoben wird, um allen auffahrenden Fahrzeugen einen störungsfreien Fahrstreifenwechsel auf die Hauptfahrbahnen zu ermöglichen (vgl. Abb. 20.6). Als Gesamteffekt bewirkt diese Maßnahme, dass lange Beschleunigungsstreifen bei Bedarf auch genutzt werden und damit die Stärke der Engstelle „Auffahrt“ reduziert wird. Andernfalls würden die meisten Fahrer bereits am Anfang auf die Hauptfahrbahn auffahren, so dass die Verkehrsdynamik de facto wie bei einer den Verkehrsfluss störenden kurzen Auffahrt wäre. Außerdem wird *dynamisch* ein ähnlicher Effekt wie bei der Zuflussdosierung erreicht.

⁴ Die gesetzliche Vorgabe „Abstand gleich halber Tacho“ entspricht einer Zeitlücke von $T = 1.8$ s. Auf deutschen Autobahnen werden aber als wahrscheinlichste Folgezeiten Werte um 0.9 s beobachtet (vgl. Abschn. 4.3).

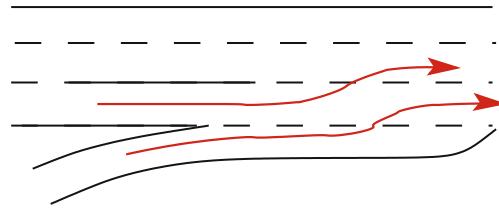


Abb. 20.6 Lokales Wechselverbot vom rechten auf den mittleren Fahrstreifen im Vorfeld von größeren Ausfahrten. Die Länge des Wechselverbots ist verkürzt gezeichnet

Einfädeln nach dem „Reißverschlussprinzip“ steigert ebenfalls die Effektivität, da bei Fahrstreifensperrungen (und dadurch verursachten Staus) der voraus gesperrte Fahrstreifen bis zum Ende genutzt wird.

20.6 Zielfunktionen für die Verkehrsoptimierung

Die Aufgabe bei der Verkehrsoptimierung besteht in der Minimierung der auf einem raumzeitlichen Gebiet $G = [x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ definierten Zielfunktion \mathcal{F} durch eine oder mehrere der in diesem Kapitel besprochenen Optimierungsmaßnahmen. Die Nebenbedingung in einer Verkehrssimulation besteht aus einer vorgegebenen Verkehrsnachfrage-Ganglinie $Q_{\text{in}}(t)$ auf der Hauptstrecke und ggf. einer Zufahrts-Ganglinie $Q_{\text{zu}}(t)$. Das Gebiet G muss dabei so gewählt werden, dass es weder an den räumlichen Rändern x_1 und x_2 noch an den zeitlichen Rändern t_{start} und t_{end} zu Staus kommt. Andernfalls ist nicht gewährleistet, dass die ganze Verkehrsnachfrage $Q_{\text{in}}(t)$ und $Q_{\text{zu}}(t)$ im Optimierungszeitraum „abgefertigt“ wird, so dass verschiedene Simulationsläufe nicht miteinander verglichen werden können.

Für eine Verkehrsoptimierung werden geeignete *Zielfunktionen* bzw. *Zielfunktionale* benötigt.⁵ Mögliche Zielvorgaben einer Optimierung sind z.B. die Minimierung der Zeitverluste, die Minimierung der Emissionen oder die Maximierung des Fahrkomforts. Im Folgenden werden für diese Größen geeignete Zielfunktionen diskutiert und dabei gleich für ein ganzes *Netzwerk* von Verkehrsverbindungen formuliert.

Minimierung der Gesamtreisezeiten. Die dimensionslose Gesamtreisezeit in einer Mikrosimulation berechnet sich gemäß

$$\mathcal{F}_\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\{ij\}} n_{ij}(t). \quad (20.1)$$

⁵ Eine Funktion ist eine Abbildung von Zahlen auf andere Zahlen, während ein Funktional ganze Funktionen auf Zahlen abbildet wie z.B. ein bestimmtes Integral.

Hierbei ist $n_{ij}(t)$ die Fahrzeugzahl auf der Strecke von Knoten i nach Knoten j und die Summe geht über alle Knotenkombinationen $\{ij\}$, für die im Untersuchungsgebiet direkte Streckenanbindungen bestehen. Die Normierungskonstante T_0 ist zunächst beliebig und dient dazu, die Zielfunktion dimensionslos zu machen sowie die Prioritäten gegenüber anderen Zielkriterien festzulegen. Sie wird später gleich der Gesamtreisezeit des nichtoptimierten Systems gewählt.

In einer makroskopischen Simulation lautet die entsprechende Zielfunktion für die Gesamtreisezeit

$$\mathcal{F}_\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{\text{alle Strecken}} dx \rho(x, t). \quad (20.2)$$

Für die Optimierung eines kompletten Netzwerks geht das Ortsintegral über alle Strecken des Netzwerks. Als Nebenbedingung der Optimierung hat man u.a. eine vorgegebene Verkehrs nachfrage, oder, bei Netzwerken, eine Nachfragematrix. Im Fall von *Streckenbeeinflussungsanlagen* (Tempolimits etc.) wird in der Regel nur eine Strecke betrachtet. Im Falle von Beeinflussungsmaßnahmen, die auch Zufahrten betreffen (z.B. Zuflussdosierung), schließt die Summe über alle Strecken bzw. das Ortsintegral auch die Zufahrten mit ein. Für eine Zuflussdosierung ist die Zielfunktion z.B. proportional zu der Summe der Flächen unter den Kurven der Fahrzeuganzahl auf der Hauptstrecke und der Zufahrt (vgl. Abb. 20.3).

Maximierung des Fahrkomforts. Der Fahrkomfort wird im Wesentlichen durch Beschleunigungen $a = \dot{v}$ und durch abrupte Änderungen der Beschleunigungen, $J = \ddot{a} = \ddot{v}$ bestimmt. Die zeitlich Änderung der Beschleunigung bewirkt im Fahrzeug einen „Ruck“ (*jerk*). Besonders anschaulich wird der Fahrkomfort bzw. sein Fehlen durch die Dynamik einer schwappenden Kaffeetasse („Coffeemeter“) repräsentiert (vgl. Abb. 20.7). Für die Optimierung wird der zu minimierende „Diskomfort“ $\mathcal{F}_{\text{comf}}$ in einer mikroskopischen Simulation z.B. durch

$$\mathcal{F}_{\text{comf}} = \frac{1}{T_0 a_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha} \left(\dot{v}_{\alpha}^2 + \tau_0^2 \ddot{v}_{\alpha}^2 \right) \quad (20.3)$$

ausgedrückt. Die Summe läuft über alle Fahrzeuge α auf den relevanten Strecken. In einer makroskopischen Simulation lautet die entsprechende Formulierung

$$\mathcal{F}_{\text{comf}} = \frac{1}{T_0 a_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \left[A^2(x, t) + \tau_0^2 \dot{A}^2(x, t) \right]. \quad (20.4)$$

Die Zeitkonstante τ_0 (mit Werten in der Größenordnung von 1 s) gibt die relative Gewichtung des Rucks gegenüber der Beschleunigung an, während die Beschleunigung a_0 (Werte in der Größenordnung der Fahrzeugbeschleunigungen, also um



Abb. 20.7 Fahrerperspektive in einer Mikrosimulation. Das *Coffeemeter* visualisiert die Fahrzeugbeschleunigung und deren Zeitableitung (Ruck, engl. *jerk*)

1 m/s^2) die relative Gewichtung des Fahrkomforts gegenüber der Reisezeit angibt. Die im Bezugssystem des Fahrers bestimmte „makroskopische“ Beschleunigung“ $A(x, t)$ ist durch Gl. (9.1) gegeben.

Minimierung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs. In der Mikro-Simulation lautet die Zielfunktion

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{T_0 \dot{C}_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha} \dot{C}_{\alpha}(v_{\alpha}(t), \dot{v}_{\alpha}(t), g_{\alpha}(t)). \quad (20.5)$$

In der Makro-Simulation lässt sich der gesamte Treibstoffverbrauch durch den Ausdruck

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{T_0 \dot{C}_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \dot{C}(V(x, t), A(x, t)) \quad (20.6)$$

berechnen. Die Konstante \dot{C} gibt die relative Gewichtung des Treibstoffverbrauchs gegenüber dem Zeitaufwand an. Ein Wert $\dot{C}_0 = 101/\text{h}$ bedeutet zum Beispiel, dass ein Zeitverlust von einer Stunde so hoch gewichtet wird wie 10 Liter an zusätzlich verbrauchtem Treibstoff.

Für eine multikriterielle Optimierung wird die Zielfunktion hinsichtlich der verschiedenen Kriterien betrachtet:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\tau} + \mathcal{F}_{\text{comf}} + \mathcal{F}_c. \quad (20.7)$$

Die Prioritäten in dieser Zielfunktion werden durch die Wahl der Parameter a_0 , τ_0 , und \dot{C}_0 festgelegt. Den Wert von T_0 könnte man im Prinzip gleich Eins setzen,

da er in den Summanden von \mathcal{F} als gemeinsamer Faktor vorkommt. Ein besserer Vergleich des Optimierungserfolgs bei verschiedenen raumzeitlichen Gebieten G sowie verschiedenen Verkehrsnachfrage-Ganglinien wird jedoch ermöglicht, indem man T_0 gleich der Gesamtreisezeit vor der Optimierung setzt. In diesem Fall ist die Zielfunktion \mathcal{F} immer dimensionslos und hat einen Wert in der Größenordnung von Eins.

Bei der vorgestellten Optimierungsaufgabe handelt es sich um eine *nichtlineare* Optimierung mit einer nur relativ aufwändig zu errechnenden, bezüglich der Parameter der Optimierungsmaßnahmen nicht differenzierbaren Zielfunktion \mathcal{F} . Die Ermittlung eines Wertes von \mathcal{F} erfordert jeweils einen kompletten Simulationslauf. Bei der Optimierung sollte man daher darauf achten, dass die Zielfunktion selten berechnet wird und dass man bei der Suche möglichst nicht in Nebenminima gerät.

Literaturhinweise

- Papageorgiou, M., Hadj-Salem, H., Blosseville, J.: ALINE A: a local feedback control law for on-ramp metering. *Transp. Res. Rec.* **1320**, 58–64 (1991)
- Treiber, M., Helbing, D.: Microsimulations of freeway traffic including control measures. *Autonomatisierungstechnik* **49**, 478–484 (2001)
- Kesting, A., Treiber, M., Schönhof, M., Helbing, D.: Adaptive cruise control design for active congestion avoidance. *Transp. Res. C Emerg. Technol.* **16**, 668–683 (2008)

Anhang A

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Aufgaben aus Kap. 2

2.1 Floating-Car-Daten. GPS-Daten enthalten Orts- und Zeitinformationen, außerdem (anonymisiert) eine ID des absendenden Fahrzeugs. Durch Verbinden der Orts-Zeit-Koordinaten kann man für diese Fahrzeuge *Trajektorien* konstruieren und durch die Steigung im Raum-Zeit-Diagramm auch *Geschwindigkeiten* ermitteln. Niedrige Geschwindigkeiten (z.B. 30 km/h) auf der Autobahn kann man im Allgemeinen als Indiz für einen *Stau* werten. Da Orte und Zeiten bekannt sind, erhält man auch (zumindest bei hinreichendem Ausstattungsgrad) die *Länge von Staus* sowie die *Lage der Staufronten*. Da die Genauigkeit der Positionsbestimmung etwa 20 m beträgt, muss man durch Plausibilitätsbetrachtungen Fehlsignale durch z.B. auf Seitenstreifen bzw. Rastplätzen haltende Fahrzeuge oder von Fahrzeugen auf parallelen Straßen ausschließen. Wegen dieser Ungenauigkeit sind *keine Fahrstreifenwechsel* detektierbar. Da auch der Ausstattungsgrad (der Anteil von sendenden Fahrzeugen) nicht bekannt ist, kann man anhand der Trajektorien weder *Verkehrsdichte* noch *Verkehrsfluss* bestimmen.

2.2 Trajektoriendaten

1. *Lokale Verkehrsflussgrößen*: Beispiel für freien Verkehr $[10 \text{ s}, 30 \text{ s}] \times [20 \text{ m}, 80 \text{ m}]$:

1. Fluss $Q = 11 \text{ Fz}/20 \text{ s} = 1980 \text{ Fz}/\text{h}$
2. Dichte $\rho = 3 \text{ Fz}/50 \text{ m} = 60 \text{ Fz}/\text{km}$
3. Geschwindigkeit $V = 60 \text{ m}/5 \text{ s} = 12 \text{ m/s} = 43.2 \text{ km/h}$

Geschwindigkeit aus der hydrodynamischen Beziehung:

$$V = \frac{Q}{\rho} = 39.6 \text{ km/h},$$

was im Rahmen der Ablesegenauigkeit in Ordnung ist. (Man könnte beim Fluss auch 12 Fahrzeuge in 20 s zählen, käme dann auf $Q = 2160 \text{ Fz/h}$ und damit $Q/\rho = 43.2 \text{ km/h}$.) Beispiel für gestauten Verkehr $[50 \text{ s}, 60 \text{ s}] \times [40 \text{ m}, 100 \text{ m}]$:

1. Fluss $Q = 2 \text{ Fz}/10 \text{ s} = 720 \text{ Fz}/\text{h}$
2. Dichte $\rho = 6 \text{ Fz}/60 \text{ m} = 100 \text{ Fz}/\text{km}$
3. Geschwindigkeit $V = 20 \text{ m}/10 \text{ s} = 2 \text{ m/s} = 7.2 \text{ km/h}$

Geschwindigkeit aus der hydrodynamischen Beziehung:

$$V = \frac{Q}{\rho} = 7.2 \text{ km/h.}$$

Eine Abweichung von bis zu $\pm 20\%$ wäre wegen der geringen Anzahl an Trajektorien im Messintervall (z.B. 5 anstatt 6) und der Heterogenität innerhalb dieses Bereichs ebenfalls in Ordnung.

2. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Staubereichs: Der Staubereich ist durch nahezu waagerechte Trajektorien definiert. Die stromaufwärtige Staufront (dort, wo die Fahrzeuge in den Stau einfahren) tritt zur Zeit $t = 33 \text{ s}$ beim Ort $x = 140 \text{ m}$ in den durch die Trajektorien erfassten Bereich ein und verlässt diesen bei $x = 0$ zur Zeit $t = 60 \text{ s}$ wieder. Die Staufront propagiert daher *entgegen* der Fahrtrichtung mit der Geschwindigkeit

$$c \approx -\frac{140 \text{ m}}{(60 - 33) \text{ s}} = -5.2 \text{ m/s} = -19 \text{ km/h.}$$

Die stromabwärtige Staufront (dort, wo die Fahrzeuge aus der Stockung herausfahren) breitete sich im Trajektoriendiagramm nahezu parallel zur stromaufwärtigen Staufront aus und besitzt daher ebenfalls eine Geschwindigkeit von etwa -19 km/h .

3. Zeitverlust des zur Zeit $t = 50 \text{ s}$ einfahrenden Fahrzeugs: Dieses Fahrzeug fährt zur Zeit $t \approx 86 \text{ s}$ aus dem Messbereich heraus, so dass die Reisezeit 36 s beträgt. Die Reisezeit ohne die Stockung ergibt sich durch lineare Extrapolation der ersten Sekunden der Trajektorie vor der Staueinfahrt. Dies ergibt eine theoretische Ausfahrtszeit $t \approx 66 \text{ s}$, entsprechend einem Zeitverlust von 20 s .

4. Fahrstreifenwechselrate im raumzeitlichen Bereich $[0 \text{ s}, 80 \text{ s}] \times [0 \text{ m}, 140 \text{ m}]$:

$$r \approx \frac{6 \text{ Wechsel}}{80 \text{ s} \cdot 140 \text{ m}} = 0.00054 \frac{\text{Wechsel}}{\text{m s}} \approx 1900 \frac{\text{Wechsel}}{\text{km h}}.$$

Hier wurden sowohl die Wechsel auf den Fahrstreifen (beginnende Trajektorien) als auch Wechsel auf andere Fahrstreifen (vor Ende des Messbereichs endende Trajektorien) gezählt.

2.3 Trajektoriendaten eines Verkehrsflusses mit „Störung“

1. Stopp an einer roten Ampel. Der horizontale Balken stellt die Ampelposition zur Zeit der Rotphase dar.
2. Zufluss $Q_{\text{in}} = 5 \text{ Linien pro } 20 \text{ s} = 0.25 \text{ Fz/s} = 900 \text{ Fz/h.}$

3. Betrachten Sie für die Geschwindigkeit z.B. die Linie, welche bei $x = -80$ m zur Zeit $t = -16$ s beginnt und bei $(x, t) = (80 \text{ m}, 0 \text{ s})$ endet:

$$v_{\text{in}} = \frac{160 \text{ m}}{16 \text{ s}} = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}.$$

Dichte: entweder 1 Strich pro 40 m oder mittels $\rho = Q/v$. Beides führt auf $\rho = 25 \text{ Fz/km}$.

4. Dichte im gestauten Bereich: 8 horizontale Striche/40 m $\Rightarrow \rho_{\text{jam}} = 200 \text{ Fz/km}$.
 5. Ausfluss nach Aufhebung der Behinderung: Am besten Zahl der Striche in einem 20 s-Kasten oberhalb der blauen „Ende der Beschleunigungsphase“-Punkte auswerten: 10 Striche/20 s $\Rightarrow Q_{\text{out}} = 0.5 \text{ Fz/s} = 1800 \text{ Fz/h}$. Geschwindigkeit wie beim freien Verkehr stromaufwärts, da Linien zu jenen parallel: $V = 36 \text{ km/h}$. Dichte durch Strichezählen (2 Striche pro 40 m) oder via hydrodynamischer Relation: $\rho = 50 \text{ Fz/km}$.
 6. Front-Ausbreitungsgeschwindigkeiten entweder durch Steigung der Front-Linien (bzw. der „Punkteketten“) oder durch die Kontinuitätsgleichung (vgl. Kap. 7):

$$\begin{aligned} \text{Frei} \rightarrow \text{Stau: } v_g^{\text{up}} &= \frac{\Delta Q}{\Delta \rho} = \frac{-900 \text{ Fz/h}}{175 \text{ Fz/km}} = -5.14 \text{ km/h}, \\ \text{Stau} \rightarrow \text{Frei: } v_g^{\text{down}} &= \frac{\Delta Q}{\Delta \rho} = \frac{1800 \text{ Fz/h}}{-150 \text{ Fz/km}} = -12 \text{ km/h}. \end{aligned}$$

7. Ohne Verzögerung wäre das bei $x = -80$ m zur Zeit $t = 20$ s einfahrende Fahrzeug zur Zeit $t_{\text{end}} = 38$ s am „Ende“ des Diagramms bei $x = 100$ m. Tatsächlich ist es erst zur Zeit $t = 69$ s dort, also mit 31 s Verzögerung.
 8. Bremsweg: $s_b = 25 \text{ m}$; Beschleunigungsweg: $s_a = 50 \text{ m}$, also

$$b = \frac{v^2}{2s_b} = 2 \text{ m/s}^2, \quad a = \frac{v^2}{2s_a} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Man kann den Bremsweg auch direkt aus der Definition der Beschleunigung über die Dauer der Beschleunigungs- bzw. Bremsphase Δt berechnen:

$$b = -\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{-10 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2, \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Aufgaben aus Kap. 3

3.1 Daten-Aggregierung an einem Querschnitt

1. Aggregierung: Flüsse ($n_1 = 6, n_2 = 4, \Delta t = 30 \text{ s}$):

$$Q_1 = \frac{n_1}{\Delta t} = 0.2 \text{ Fz/s} = 720 \text{ Fz/h}, \quad Q_2 = \frac{n_2}{\Delta t} = 0.133 \text{ Fz/s} = 480 \text{ Fz/h}.$$

Geschwindigkeiten:

$$V_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{\alpha} v_{1\alpha} = 25.8 \text{ m/s}, \quad V_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{\alpha} v_{2\alpha} = 34.0 \text{ m/s}.$$

2. *Dichte*: Da der Korrelationskoeffizient nach Annahme gleich Null ist, ist auch die Kovarianz $\text{Cov}(v_{\alpha}, \Delta t_{\alpha}) = 0$ und damit

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{V_1} = 7.74 \text{ Fz/km}, \quad \rho_2 = \frac{Q_2}{V_2} = 3.92 \text{ Fz/km}.$$

3. *Gesamte Richtungsfahrbahn*: Dichte und Fluss durch einfache Summation:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 11.66 \text{ Fz/km}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = 1200 \text{ Fz/h}.$$

Die Geschwindigkeit entweder mit der hydrodynamischen Beziehung oder durch das gewichtete *harmonische* Mittel (diese beiden Berechnungsarten sind identisch!):

$$V = \frac{Q}{\rho} = \frac{Q}{Q_1/V_1 + Q_2/V_2} = 28.5 \text{ m/s} = 102.9 \text{ km/h}.$$

4. *LKW-Anteil*: Anteil $2/6 = 1/3$ auf dem rechten Fahrstreifen, 0 auf dem linken, $2/10 = 1/5$ insgesamt.

3.2 Bestimmung makroskopischer Größen aus Einzelfahrzeug-Daten. Auf beiden Fahrstreifen ist der Bruttoabstand $\Delta x_{\alpha} = 60 \text{ m}$ konstant. Die Fahrzeuge haben alle die gleiche Fahrzeuglänge $l = 5 \text{ m}$. Die Geschwindigkeiten betragen

$$v_{\alpha}^l = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}, \quad v_{\alpha}^r = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}.$$

1. *Zeitlücken*: Die Brutto-Zeitlücken $\Delta t_{\alpha} = \Delta x_{\alpha}/v_{\alpha}$ betragen

$$\Delta t_{\alpha}^l = \frac{60 \text{ m}}{40 \text{ m/s}} = 1.5 \text{ s}, \quad \Delta t_{\alpha}^r = \frac{60 \text{ m}}{20 \text{ m/s}} = 3.0 \text{ s}.$$

Die Netto-Zeitlücken T_{α} ergeben sich daraus, indem man die Zeit für die Überfahrt der Eigenlänge des Vordermanns $l_{\alpha-1}$ abzieht,

$$T_{\alpha} = \Delta t_{\alpha} - \frac{l_{\alpha-1}}{v_{\alpha-1}}.$$

Da die Fahrzeuglängen identisch sind, ergibt sich

$$T_{\alpha}^l = \frac{60 - 5}{40} = 1.375 \text{ s}, \quad T_{\alpha}^r = \frac{60 - 5}{20} = 2.75 \text{ s}.$$

2. Makrogrößen: Zunächst Berechnung der makroskopischen Größen Fluss Q , Belegung O und Geschwindigkeit V für jeden Fahrstreifen. Das Aggregationsintervall betrage $\Delta t = 60$ s. Aufgrund der stationären und homogenen Verkehrsverhältnisse für beide Fahrstreifen $Q = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t_\alpha}$ beträgt der Fluss

$$Q^l = \frac{1}{\Delta t_\alpha^l} = \frac{1}{1.5 \text{ s}} = 2400 \text{ Fz/h}, \quad Q^r = \frac{1}{\Delta t_\alpha^r} = \frac{1}{3 \text{ s}} = 1200 \text{ Fz/h}.$$

Für die Belegung gilt analog wegen der stationären und homogenen Verhältnisse für beide Fahrstreifen:

$$O = \frac{\Delta N (\Delta t_\alpha - T_\alpha)}{\Delta t} = \frac{\Delta t_\alpha - T_\alpha}{\Delta t_\alpha},$$

also

$$O^l = \frac{0.125}{1.5} = 0.083 = 8.3\%, \quad O^r = \frac{0.25}{3.0} = 0.083 = 8.3\%.$$

Das arithmetische Geschwindigkeitsmittel ist

$$V^l = \frac{1}{\Delta N^l} \sum_\alpha v_\alpha^l = 144 \text{ km/h}, \quad V^r = \frac{1}{\Delta N^r} \sum_\alpha v_\alpha^r = 72 \text{ km/h}.$$

Wegen der homogenen Verhältnisse kann man das auch direkt aus den konstanten Einzelgeschwindigkeiten schließen. Außerdem ist das arithmetische Mittel hier gleich dem harmonischen.

Gesamtwerte und Mittelwerte über beide Fahrstreifen: Hierbei muss man *extensive* Größen unterscheiden, welche sich mit den Fahrstreifen summieren (wie Fluss und Dichte) und bei denen daher Gesamtgrößen (mit Index „tot“) und fahrstreifengemittelte Größen (ohne Index) sinnvoll sind, und *intensive* Größen, bei denen nur mit extensiven Größen gewichtete Mittelwerte über die Fahrstreifen sinnvoll sind (Geschwindigkeit, Belegung).

Fluss:

$$Q_{\text{tot}} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N^l + \Delta N^r}{\Delta t} = 3600 \text{ Fz/h}, \quad Q = \frac{Q_{\text{tot}}}{2} = 1800 \text{ Fz/h}.$$

Belegung:

$$O = O^l = O^r = 0.083.$$

Arithmetisches Geschwindigkeitsmittel:

$$V = \frac{1}{\Delta N} \sum_\alpha v_\alpha = \frac{40 \cdot 40 + 20 \cdot 20}{60} = 120 \text{ km/h}.$$

Harmonisches Geschwindigkeitsmittel:

$$V_H = \frac{\Delta N}{\sum 1/v_\alpha} = \frac{60}{\frac{40}{40} + \frac{20}{20}} = 108 \text{ km/h.}$$

Das harmonische Mittel ist also das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten auf den einzelnen Fahrstreifen. Das arithmetische Mittel liegt höher, weil in einem Aggregierungsintervall Δt mehr schnelle Fahrzeuge den Querschnitt überfahren. Dieser statistische Effekt der Zeitmittelung führt zu einer systematischen Verschiebung.

3. Geschwindigkeitsvarianz zwischen den Fahrstreifen: Die Geschwindigkeitsvarianz zwischen dem linken und rechten Fahrstreifen beträgt

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= \left\langle (v_\alpha - \langle v_\alpha \rangle)^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{60} \left(40[40 - 33.3]^2 + 20[20 - 33.3]^2 \right) \\ &= 88.9 \text{ m}^2/\text{s}^2.\end{aligned}$$

4. Gesamtvarianz: Geschwindigkeitsvarianz

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\alpha} (v_\alpha - V)^2$$

aufteilen in Summen über rechten bzw. linken Fahrstreifen. Auswertung der Ausdrücke unter Verwendung von $\sigma_V^2 = \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2$ führt auf

$$\sigma_V^2 = \frac{\Delta N_1}{\Delta N} \left[\sigma_{V1}^2 + (V_1 - V)^2 \right] + \frac{\Delta N_2}{\Delta N} \left[\sigma_{V2}^2 + (V_2 - V)^2 \right], \text{ q.e.d.}$$

Mit $p_1 = p_2 = 1/2$ gilt $V = (V_1 + V_2)/2$ und damit

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_{V1}^2 + \sigma_{V2}^2 + (V_1 - V_2)^2 \right].$$

Aufgaben aus Kap. 4

4.1 Analytisches Fundamentaldiagramm. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: (i) freier, ungestörter Verkehr und (ii) gebundener Verkehr.

Freier Verkehr:

$$V^{\text{free}}(\rho) = V_0 = \text{const.}$$

Fluss aus hydrodynamischer Beziehung:

$$Q^{\text{free}}(\rho) = \rho V^{\text{free}}(\rho) = \rho V_0.$$

Gebundener Verkehr: Aus dem von der Geschwindigkeit abhängigen Gleichgewichtsabstand der Kolonne, $s(v) = s_0 + vT$, ergibt sich die Gleichgewichtsgeschwindigkeit $V^{\text{geb}}(s)$ bei gegebenem Abstand zu

$$V^{\text{geb}}(s) = \frac{s - s_0}{T}.$$

Umrechnung des Abstandes s in Dichte ρ durch Anwendung der Definition der Dichte:

$$\rho = \frac{\text{Fahrzeugzahl}}{\text{Strecke}} = \frac{\text{ein Fahrzeug}}{\text{ein Bruttoabstand}} = \frac{1}{\text{Fahrzeulgänge+Nettoabstand}} = \frac{1}{l + s}.$$

Also gilt $s(\rho) = \frac{1}{\rho} - l$ und damit

$$V^{\text{geb}}(\rho) = \frac{s - s_0}{T} = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\rho} - (l + s_0) \right].$$

Fluss-Dichte-Beziehung wieder durch Multiplikation mit der Dichte (hydrodynamische Beziehung):

$$Q^{\text{geb}}(\rho) = \rho V^{\text{geb}}(\rho) = \frac{1}{T} [1 - \rho(l + s_0)].$$

Man sieht, dass die Summe $l_{\text{eff}} = l + s_0$ aus Fahrzeulgänge und Mindestabstand so etwas wie eine *effektive Fahrzeulgänge* darstellt (in der Stadt typischerweise um die 7 m, auf Autobahnen etwas mehr). Dementsprechend hat die maximal mögliche Dichte,

$$\rho_{\max} = \frac{1}{l + s_0} = \frac{1}{l_{\text{eff}}},$$

Werte zwischen 120 Fz/km und 150 Fz/km, bei hohem LKW-Anteil auch weniger.

Nun bestimmt man die Grenzdichte ρ_c zwischen freiem und gebundenem Verkehr:

$$Q^{\text{geb}}(\rho) = Q^{\text{free}}(\rho) \Rightarrow \rho V_0 T = 1 - \rho(l + s_0) \Rightarrow \rho_c = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}.$$

Da dies der „Spitze“ des dreieckigen Fundamentaldiagramms entspricht, ist der dazugehörige Fluss der maximal mögliche, also gleich der Kapazität K :

$$K = Q^{\text{geb}}(\rho_c) = Q^{\text{free}}(\rho_c) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{1 + \frac{l_{\text{eff}}}{V_0 T}} \right). \quad (\text{A.1})$$

Die Kapazität K hat also die Größenordnung der inversen Folgezeit T , ist aber immer etwas kleiner. Je geringer die freie Geschwindigkeit V_0 , desto stärker weicht die Kapazität vom „Idealwert“ $1/T$ nach unten ab. Zahlenwerte:

$$\rho_{\max} = 143 \text{ Fz/km}, \quad \rho_c = 16.6 \text{ Fz/km}, \quad K = 0.552 \text{ Fz/s} = 1990 \text{ Fz/h}.$$

4.2 Fundamentaldiagramme aus empirischen Daten. Die freie Geschwindigkeit wird aus dem Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm bei sehr kleinen Dichten abgelesen:

$$V_{A8}^{\text{free}} = 125 \text{ km/h}, \quad V_{A9}^{\text{free}} = 110 \text{ km/h}.$$

(In Holland wird das Tempolimit durch Kennzeichen-Erfassung kontrolliert. Deshalb fährt kaum ein Fahrer über 110 km/h.)

Aus dem Fluss-Dichte-Diagramm kann man direkt die maximale Dichte (rechter Achsenabschnitt der ρ -Achse) sowie die Kapazität (maximaler Fluss-Wert des „Dreiecks“) ablesen:

$$\begin{aligned} \rho_{A8}^{\max} &= 80 \text{ Fz/km}, & \rho_{A9}^{\max} &= 110 \text{ Fz/km}, \\ K_{A8} &= 1700 \text{ Fz/h}, & K_{A9} &= 2400 \text{ Fz/h}. \end{aligned}$$

Die Folgezeiten erhält man durch Auflösen der Kapazitätsformel (A.1) nach T :

$$T = \frac{1 - \frac{l_{\text{eff}}K}{V_0}}{K} = \frac{1 - \frac{K}{V_0 \rho_{\max}}}{K}$$

und damit die mittleren Folgezeiten

$$T_{A8} = 1.91 \text{ s}, \quad T_{A9} = 1.27 \text{ s}.$$

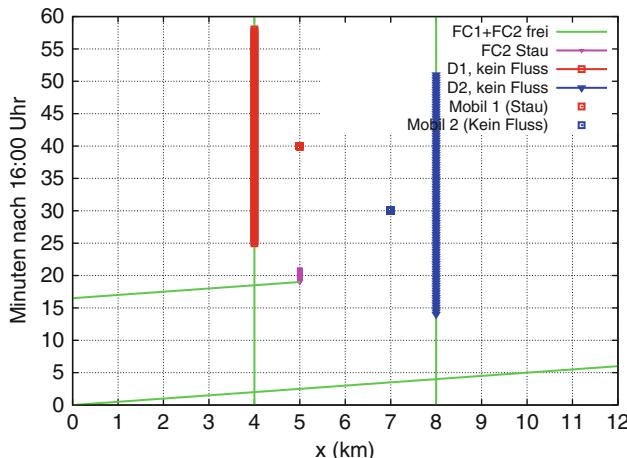
Aufgaben aus Kap. 5

5.1 Rekonstruktion der Verkehrslage mit einem Unfall

Teilaufgabe 1: Raum-Zeit-Diagramm (eindeutig freier Verkehr ist in folgendem Diagramm jeweils grün mit dünnen Linien gekennzeichnet, alle anderen Informationen mit anderen Farben und dickeren Strichstärken).

Teilaufgabe 2: Durch das erste Floating Car (FC1) ist die Geschwindigkeit im freien Verkehr mit $120 \text{ km/h} = 2 \text{ km/min}$ bekannt. Durch das zweite Floating Car (FC2) wissen wir, dass eine stromaufwärtige Staufront um 16:19 Uhr den Ort $x = 5 \text{ km}$ passiert.

Anhand der stationären Detektoren D1 bei 4 km und D2 bei 8 km kann man bei verschwindendem Fluss nicht entscheiden, ob die Fahrbahn „leer“ ist oder ob Stau



herrscht (dies gilt selbst für Detektoren mit Geschwindigkeitsmessung). Der von FC2 stromabwärts von D1 gemeldete Stau ist ein starkes Indiz dafür, dass D1 einen Stau detektiert. Die Staufront kommt also um 16:25 Uhr am Ort $x = 4$ km vorbei. Damit ist die Geschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront durch

$$c^{\text{up}} = \frac{-1 \text{ km}}{6 \text{ min}} = -10 \text{ km/h}$$

gegeben (vgl. folgende Abbildung).

Das an D2 bei $x = 8$ km um 16:14 Uhr detektierte Verschwinden des Flusses ist nicht konsistent mit dem Passieren der stromaufwärtigen Staufront, da diese den Ort von D2 bereits um 16:01 Uhr passiert haben müsste. Selbst wenn man von der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit c^{up} der stromaufwärtigen Staufront abrückte, ist die negativste mögliche Geschwindigkeit c^{up} (bei Maximalzufluss, der auf eine Vollsperrung trifft) betragsmäßig kaum größer als $|c^{\text{down}}|$. Insbesondere ist ein Wert von $-4 \text{ km}/5 \text{ min}$ nicht möglich. Dies ist ein starkes Indiz dafür, dass D2 ab 16:14 Uhr einen leeren Streckenabschnitt detektiert, die Streckensperrung also weiter stromaufwärts liegt.

Der Ort und der Zeitpunkt der Streckensperrung liegt damit auf dem Schnittpunkt der Gleichung der stromaufwärtigen Staufront (x in km und t in Minuten ab 16:00 Uhr)

$$x^{\text{up}}(t) = 4 + c^{\text{up}}(t - 25) = 4 - (t - 25)/6$$

mit der Trajektorie $x_{\text{last}}(t)$ des letzten vor der Sperrung durchkommenden Fahrzeugs, welche im Ort-Zeit-Diagramm parallel zu FC1 liegt. Dieses kommt offensichtlich zur Zeit 16:14 Uhr bei $x = 8$ km an und hat damit die Trajektoriengleichung

$$x_{\text{last}}(t) = 8 + v_0(t - 14) = 8 + 2(t - 14).$$

Mit $x^{\text{up}}(t) = x_{\text{last}}(t)$ ergeben sich Ort und Zeitpunkt der Sperrung:

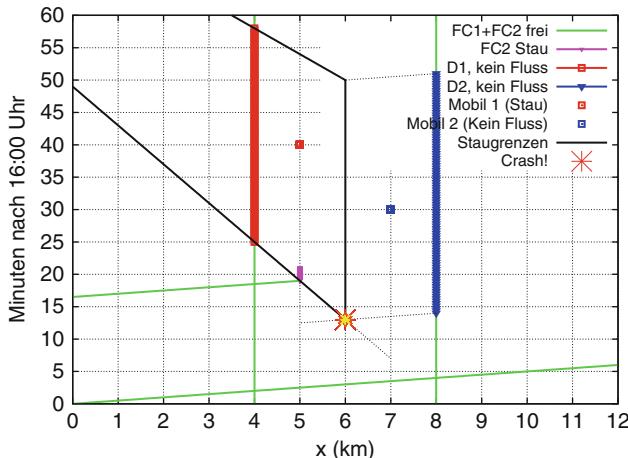
$$x_{\text{crash}} = 6 \text{ km}, \quad t_{\text{crash}} = 16:13 \text{ Uhr}.$$

Teilaufgabe 3: Nach der Aufhebung der Streckensperrung bewegt sich eine strom-abwärtige Staufront gegen die Fahrtrichtung mit der universellen Geschwindigkeit von $c^{\text{down}} = -15 \text{ km/h} = -1 \text{ km/4 min}$. Da der Detektor bei $x = 4 \text{ km}$ um 16:58 Uhr wieder einen Verkehrsfluss misst, lautet die Gleichung

$$x^{\text{down}}(t) = 4 + c^{\text{down}}(t - 58).$$

Der Unfallort bei $x_{\text{crash}} = 6 \text{ km}$ ergibt damit eine Aufhebung der Sperrung um

$$t_{\text{aufl}} = 16:50 \text{ Uhr}.$$



Hinweis: Da wir eine konstante stromaufwärtige Ausbreitungsgeschwindigkeit c^{up} angenommen haben (was konstanten Zufluss impliziert), ist Detektor D2 hier für die Aufklärung gar nicht nötig. Lässt man aber variable Werte von c^{up} zu, ist die Information von D2 zur Bestimmung des Unfallortes notwendig.

5.2 Behandlung inkonsistenter Informationen. Mit Gleichgewichtung, $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$, ergibt sich bei verschwindenden systematischen Fehlern und unabhängigen zufälligen Fehlern die Fehlervarianz

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2) = \frac{5}{4}\sigma_1^2.$$

Der Fehler vergrößert sich also durch Hinzunahme der FCD um den Faktor $\sqrt{5/4}$. Bei der optimalen Gewichtung

$$V_{\text{opt}} = \frac{1}{5}(4V_1 + V_2)$$

ergibt sich die Fehlervarianz

$$(\sigma_V^2)_{\text{opt}} = \frac{1}{25} (16\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \frac{1}{25} (16\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2) = \frac{4}{5}\sigma_1^2.$$

Der Fehler verändert sich also durch Hinzunahme der FCD um den Faktor $\sqrt{4/5}$, er *verkleinert* sich also.

Aufgaben aus Kap. 6

6.1 Tempolimit auf Autobahnen? Die *Sicherheitswirkung* kann man mit Verkehrsflussmodellen nicht seriös beurteilen, da diese Modelle für Normalsituationen (einschließlich Stau) entwickelt werden und nicht für eine Verkettung unglücklicher Umstände, welche typischerweise zum Unfall führt. Die *Verkehrsauswirkung* kann mit Mikromodellen und die *Umweltauswirkung* (Kraftstoffverbrauch und Emissionen) sowohl mit Mikro- als auch mit Makromodellen beschrieben werden. Für die Beurteilung der *makroökonomischen Auswirkung* benötigt man zunächst eine Nachfrage- und Routenwahlmodellierung, also Konzepte aus der Verkehrsplanung. Für eine detaillierte Auswertung einiger volkswirtschaftlicher Aspekte (Verkehrs- und Umweltauswirkung) können danach Verkehrsflussmodelle herangezogen werden.

Aufgaben aus Kap. 7

7.1 Fluss-Dichte-Geschwindigkeitsbeziehungen. Es soll

$$Q_{\text{tot}} = \sum_i Q_i = \sum_i \rho_i V_i = \rho_{\text{tot}} V$$

gelten. Diese Bedingung ist erfüllt, falls das Geschwindigkeitsmittel V über alle Richtungsfahrbahnen definiert ist wie in Gl. (7.6), also

$$V = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{\text{tot}}} V_i = \sum_i w_i V_i.$$

7.2 Fahrzeugerhaltung. Die Fahrzeugzahl im Ring ist das geschlossene Integral der Dichte $\rho_{\text{tot}} = I(x)\rho$ über den gesamten Umfang. Damit gilt mit Gl. (7.15) für

$v_{\text{rmp}} = 0$ sowie der Beziehung $\rho V = Q$:

$$\frac{dn}{dt} = - \oint \left(I(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) \frac{dI}{dx} \right) dx = - \oint \frac{\partial I Q}{\partial x} dx = I Q|_{x_a}^{x_e}.$$

Falls die Strecke geschlossen ist ($x_e = x_a$), ist das Integral und damit die Änderungsrate $\frac{dn}{dt} = 0$, die Fahrzeugzahl n also konstant.

7.3 Kontinuitätsgleichung I. (i) Die Kontinuitätsgleichung im Bereich ($x < 0$ oder $x > L = 300$ m) ohne Quellen lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Im Zufahrtsbereich gibt es auf der rechten Seite eine zusätzliche Quelle $v_{\text{rmp}}(x, t)$, die im Allgemeinen von Ort und Zeit abhängt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = v_{\text{rmp}}(x, t).$$

Wir nehmen an, dass der Quellterm konstant über die Länge L ist ($v_{\text{rmp}}(x) = v_{\text{rmp}}$). Der Zusammenhang von v_{rmp} mit dem Rampenfluss Q_{rmp} erfolgt durch Integration über die Länge der Zufahrt. Da fahrstreifengemittelte Größen betrachtet werden, muss zusätzlich die Fahrstreifenanzahl I berücksichtigt werden:

$$Q_{\text{rmp}} = I \int_0^L v_{\text{rmp}} dx = I v_{\text{rmp}} \int_0^L dx = I v_{\text{rmp}} L. \quad (\text{A.2})$$

Damit ergibt sich

$$v_{\text{rmp}} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{IL} = \frac{1}{I} \frac{600 \text{ Fz/h}}{300 \text{ m}} = \frac{2}{I} \frac{\text{Fz}}{\text{m h}}. \quad (\text{A.3})$$

(ii) Der Quellterm $v_{\text{rmp}}(x)$ kann auf beliebige Zu- und Abgangsverteilungen verallgemeinert werden:

$$v_{\text{rmp}}(x, t) = \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{I} f(x).$$

Hier ist $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Positionen x , bei denen die Beschleunigungsfahrstreifen bzw. die Hauptfahrbahn verlassen werden. Liegen die Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsstreifen im Streckenabschnitt $a \leq x \leq b = a + L$, so erhält man Gl. (A.3) durch die Dichte der Gleichverteilung:

$$f(x) = f_G(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{falls } a \leq x \leq b = a + L, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wird bevorzugt am Anfang gewechselt, so ersetzt man $f_G(x)$ durch die Dichte einer unsymmetrischen Verteilung, z.B der Dreiecksverteilung

$$f_{\Delta}(x) = \begin{cases} \frac{2(b-x)}{L^2} & \text{falls } a \leq x \leq b = a + L, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Eine *zeitliche* Abhängigkeit des Zuflusses kann direkt durch $Q_{\text{rmp}} = Q_{\text{rmp}}(t)$ berücksichtigt werden.

7.4 Kontinuitätsgleichung II

Teilaufgabe 1: Wir wollen den Verkehrsfluss $Q(x)$ für *stationäre Verhältnisse* bestimmen. In diesem Fall ändert sich das System nicht mehr zeitlich und alle Zeitableitungen verschwinden. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Damit vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (7.15) (für fahrstreifengemittelte Größen) mit einer variablen Fahrstreifenanzahl zu

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{Q(x)}{I(x)} \frac{dI}{dx} + v_{\text{rmp}}(x). \quad (\text{A.4})$$

Bemerkung: Es handelt sich nun um eine *gewöhnliche* Differentialgleichung (DGL) für die Variable x . Das fahrstreifengemittelte Verkehrsaufkommen sei konstant mit $Q(x=0, t) = Q_0$.

(i) Die DGL (A.4) kann durch *Trennung der Variablen* gelöst werden:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dI}{I} \frac{dx}{dx} = -\frac{dI}{I}.$$

Integration von $\int dx/x = \ln x$ liefert $\ln Q = -\ln I + \tilde{C}$ mit der Integrationskonstanten \tilde{C} . Damit folgt durch Anwenden der Exponentialfunktion die Lösung

$$Q(x) = \frac{C}{I(x)}.$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir durch $C = I(x=0)Q(x=0) = I_0 Q_0$, wobei I_0 die anfängliche Zahl der Fahrstreifen bei $x=0$ ist. Damit ist die räumliche Abhängigkeit des Flusses festgelegt:

$$Q(x) = \frac{I_0 Q_0}{I(x)}. \quad (\text{A.5})$$

(ii) Zur Beschreibung einer Zu- bzw. Abfahrt (mit Q_{zu} bzw. Q_{ab}) auf einer Hauptstrecke mit I Fahrstreifen betrachten wir den zweiten Quellterm der Gl. (A.4), wobei wir eine gleichmäßige Verteilung der Fahrstreifenwechsel voraussetzen:

$$\nu_{\text{rmp}} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{IL} = \text{const.}$$

Nun lautet die zu lösende (gewöhnliche) DGL

$$\frac{dQ}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{ausserhalb der Zu- und Abfahrt,} \\ \nu_{\text{rmp}} & \text{auf Höhe der Zu- bzw. Abfahrt} \end{cases}$$

mit den Ab- bzw. Zuflüssen Q_{ab} und Q_{zu} für Abfahrt und Zufahrt. Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$Q(x) = \begin{cases} C & \text{ausserhalb der Zu- und Abfahrt,} \\ \nu_{\text{rmp}}x + C & \text{auf Höhe der Zu- bzw. Abfahrt.} \end{cases}$$

Die Integrationskonstante ergibt sich vor der Abfahrt zu

$$Q(x = 0) = Q_0 = C_1,$$

nach der Abfahrt zu

$$Q(x = 500) = Q_0 - \frac{Q_{\text{ab}}}{I} = C_2$$

und nach der Auffahrt zu

$$Q(x = 1000) = Q_0 - \frac{Q_{\text{ab}}}{I} + \frac{Q_{\text{zu}}}{I} = C_3.$$

Auf der Höhe der Abfahrt bzw. Auffahrt lautet der Fluss also

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0 - \frac{Q_{\text{ab}}}{I} x & \text{falls } 300 \text{ m} \leq x \leq 500 \text{ m,} \\ Q_0 - \frac{Q_{\text{ab}}}{I} + \frac{Q_{\text{zu}}}{I} x & \text{falls } 700 \text{ m} \leq x \leq 1000 \text{ m.} \end{cases}$$

Dazwischen ist der Fluss konstant.

Teilaufgabe 2: Gegeben ist eine anfänglich dreistreifige Autobahn ($I_0 = 3$) mit einem Gesamtzufluss von $Q_{\text{tot}} = 3\,600 \text{ Fz/h}$, die sich auf einem Abschnitt der Länge L auf $I = 2$ Fahrstreifen reduziert:

$$I(x) = \begin{cases} 3 & x < 0, \\ (3 - \frac{x}{L}) & 0 \leq x \leq L, \\ 2 & x > L. \end{cases}$$

Da das Gesamtverkehrsaufkommen konstant ist und es keine weitere explizite Zeitabhängigkeit gibt (konstante Fahrzeuganteile, keine Heterogenität etc.), ist das (offene) System *stationär*. Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich damit wieder auf die Ortsabhängigkeit von Q (vgl. die vorherige Teilaufgabe):

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{Q(x)}{I(x)} \frac{dI}{dx}.$$

Die Lösung (vgl. Gl. (A.5)) lautet für den Abschnitt mit variablem $I(x)$

$$Q(x) = \frac{I_0 Q_0}{I(x)} = \frac{Q_{\text{tot}}}{I(x)}.$$

Vor und nach der Fahrstreifensperrung ist $I(x)$ konstant und wir haben den einfachen Fall

$$Q(x) = \frac{Q_{\text{tot}}}{I}.$$

Damit ergeben sich die folgenden *fahrstreifengemittelten* Größen

$$Q(x) = \begin{cases} 1200 / \text{h} & x < 0, \\ \frac{3600}{3 - \frac{x}{L}} \frac{1}{\text{h}} & 0 \leq x \leq L, \\ 1800 / \text{h} & x > L. \end{cases}$$

Die Dichte ergibt sich durch die hydrodynamische Beziehung $Q = \rho V$ mit $V = 108 \text{ km/h}$ zu

$$\rho(x) = \frac{Q}{V} = \begin{cases} 11.11 / \text{km} & x < 0, \\ \frac{33.33}{3 - \frac{x}{L}} \frac{1}{\text{km}} & 0 \leq x \leq L, \\ 16.67 / \text{km} & x > L. \end{cases}$$

Teilaufgabe 3: Wir setzen die Terme $I(x) = 3 - x/L$, $dI/dx = -1/L$ und $Q(x) = \frac{3600}{3 - \frac{x}{L}}$ in den Term für die Fahrstreifensperrung auf der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung (A.4) ein:

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{Q(x)}{I(x)} \frac{dI}{dx} = +\frac{1}{L} \frac{3600}{(3 - \frac{x}{L})^2}.$$

Die rechte Seite ist mit dem gesuchten Rampenterm zu identifizieren:

$$v_{\text{rmp}} = + \frac{1}{L} \frac{3600}{(3 - \frac{x}{L})^2}.$$

Durch diesen – nun von x abhängigen – Rampenquellterm v_{rmp} erhalten wir analog zu Gl. (A.2) den Rampenfluss

$$Q_{\text{rmp}} = \frac{23600}{L} \int_0^L \frac{dx}{(3 - \frac{x}{L})^2} = 7200 \left(\frac{1}{3 - \frac{x}{L}} \right) \Big|_0^L = 1200,$$

wobei das Integral

$$\int \frac{dx}{(3 - \frac{x}{L})^2} = \frac{L}{3 - \frac{x}{L}}$$

verwendet wurde.

7.5 Parabolisches Fundamentaldiagramm

1. Fundamentaldiagramm:

$$Q(\rho) = \rho V(\rho) = \rho V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

2. Maximaler Fluss bei Dichte ρ_K , definiert durch

$$Q'(\rho_K) = V_0 - 2 \frac{V_0 \rho_K}{\rho_{\max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_K = \frac{1}{2} \rho_{\max}.$$

Damit der maximale Fluss (statische Kapazität):

$$Q_{\max} = Q(\rho_K) = \frac{\rho_{\max} V_0}{4}.$$

Aufgaben aus Kap. 8

8.1 Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs frei → gestaut. Das dreieckige Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho)$ ist eine konkave Funktion, d.h. eine Verbindungsgerade beliebiger Punkte $(\rho_1, Q_e(\rho_1))$ und $(\rho_2, Q_e(\rho_2))$ mit $\rho_1, \rho_2 \in [0, \rho_{\max}]$ liegt immer unterhalb oder höchstens auf der Kurve $Q_e(\rho)$. Damit ist die Steigung $c_{12} = (Q_2 - Q_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ dieser Verbindungsgerade (mit $Q_i = Q_e(\rho_i)$) immer größer oder gleich der minimalen Steigung c und kleiner oder gleich der maximalen Steigung V_0 des Fundamentaldiagramms. Da c_{12} die Schockwellengeschwindigkeit bezeichnet, ist die Behauptung bewiesen. Sie gilt nicht nur für

das dreieckige Fundamentaldiagramm, sondern für alle konkaven (z.B. umgekehrt parabelförmigen) Fundamentaldiagramme. Statt auf konkaven Funktionen kann man das Argument auch auf der äquivalenten Eigenschaft einer monoton fallenden Ableitung $Q'_e(\rho)$ aufbauen.

8.2 Ausbreitungsgeschwindigkeiten bei freiem Verkehr. Es gibt keinerlei Wechselwirkungen. Ansonsten würden die hinteren Fahrer auf die jeweiligen Vorderfahrzeuge reagieren, was einer Ausbreitung von Geschwindigkeits- oder Dichteänderungen mit einer Geschwindigkeit unterhalb der Fahrzeuggeschwindigkeit entsprechen würde.

8.3 Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Übergangs gestaut → frei. Eine Geschwindigkeit von $c = l_{\text{eff}}/T$ bedeutet bei einer Warteschlangen-Verkehrsdichte von $\rho_{\max} = 1/l_{\text{eff}}$, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit in jedem Zeitintervall T genau ein Auto passiert. Jeder Fahrer fährt also um ein Zeitintervall T später an als sein/ihr Vorgänger. Assoziiert man diesen Anfahrvorgang mit Fahrzeugen, welche unendlich schnell auf die Wunschgeschwindigkeit beschleunigen (Abb. 8.12), entspricht T genau der Reaktionszeit.

Es sei aber ausdrücklich bemerkt, dass das LWR-Modell eine Reaktionszeit gleich Null beinhaltet. Auch in einem Mikromodell ohne Reaktionszeit, in dem die Geschwindigkeit instantan auf die dem dreieckigen Fundamentaldiagramm entsprechenden Wert „Nettoabstand geteilt durch T “ angepasst werden würde, ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c nicht, die Front würde allerdings aufweichen. Grundsätzlich gilt:

Die Tatsache, dass an einer Ampel nicht die ganze Warteschlange gleichzeitig anfährt, ist eine Folge der notwendigen Sicherheitsabstände und nicht der Reaktionszeiten.

8.4 Gesamt-Wartezeit hinter einer LSA während eines Umlaufes. Gesamt-Wartezeit:

$$\tau_{\text{tot}} = \frac{1}{2} Q_{\text{in}} \tau^2 \frac{K}{K - Q_{\text{in}}}.$$

8.5 Staudynamik I: Unfall

Teilaufgabe 1: Mit $l_{\text{eff}} = l + s_0 = 8 \text{ m}$ und den sonstigen Größen aus der Aufgabenstellung ergibt sich die fahrstreifenbezogene Kapazität

$$Q_{\max} = \frac{V_0}{V_0 T + l_{\text{eff}}} = 2016 \text{ Fz/h}$$

und damit die Kapazität der gesamten Richtungsfahrbahn

$$K = 2Q_{\max} = 4032 \text{ Fz/h.}$$

Dies ist größer als die Nachfrage von 3024 Fz/h, also ausreichend. Der fahrstreifenbezogene Fluss ist gleich dem Zufluss dividiert durch zwei Fahrstreifen, während man die fahrstreifenbezogene Dichte aus der Inversion des freien Zweigs des Fundamentaldiagramms erhält:

$$Q_1 = Q_{\text{in}}/2 = 1512 \text{ Fz/h}, \quad \rho_1 = \frac{Q_1}{V_0} = 15 \text{ Fz/km.}$$

Die Reisezeit für die $L = 10 \text{ km}$ lange Strecke ergibt sich durch Konstantfahrt mit V_0 :

$$t_{\text{trav}} = \frac{L}{V_0} = 357 \text{ s} \approx 6 \text{ min.}$$

Teilaufgabe 2: An der Stelle des Unfalls ist nur noch ein Fahrstreifen befahrbar, so dass an dieser Stelle die Kapazität der Richtungsfahrbahn

$$K_{\text{Unfall}} = Q_{\max} = 2016 \text{ Fz/h}$$

geringer als die Nachfrage $Q_{\text{in}} = 3024 \text{ Fz/h}$ ist. Damit wirkt die unfallbedingte Sperrung des zweiten Fahrstreifens als stauverursachende Engstelle. Zur Berechnung der fahrstreifenbezogenen Größen Q_2 und ρ_2 im Bereich des entstehenden Staus ist die Engstellenkapazität K , d.h. der Durchfluss durch die Engstelle, entscheidend. Da stromaufwärts des Unfalls beide Fahrstreifen verfügbar sind, gilt

$$Q_2 = \frac{K_{\text{Unfall}}}{2} = 1008 \text{ Fz/h.}$$

Die Verkehrsdichte ergibt sich wieder aus der Umkehrfunktion des gestauten Zweigs des Fundamentaldiagramms:

$$\rho_2 = \rho_{\text{cong}}(Q_2) = \frac{1 - Q_2 T}{l_{\text{eff}}} = 72.5 \text{ Fz/km.}$$

Teilaufgabe 3: Mit der Stoßwellenformel ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront zu

$$c^{\text{up}} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = -8.77 \text{ km/h.}$$

Teilaufgabe 4: Nach Aufhebung der unfallbedingten Fahrstreifensperrung ist die Kapazität wieder überall durch $K = 2Q_{\max} = 4032 \text{ Fz/h}$ gegeben. In den hier betrachteten Modellen erster Ordnung (LWR-Modelle) ist auch der Ausfluss aus

gestautem Verkehr durch K gegeben, pro Fahrstreifen also $Q_3 = Q_{\max}$. Mit der Schockwellenformel und $Q_3 = \rho_3 V_0$ erhält man die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront

$$c = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{Q_3 - Q_2}{Q_{\max}/V_0 - \rho_2} = -8.77 \text{ km/h} = -19.2 \text{ km/h}.$$

Der Stau löst sich auf, wenn sich die beiden Staufronten treffen. Setzt man die Zeit t gleich der Zeit nach 15:00 Uhr und $L = 10 \text{ km}$ gleich der Position des Unfalls, erhält man aus den Ausbreitungsgeschwindigkeiten folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}x_{\text{up}}(t) &= L + c^{\text{up}} t, \\x_{\text{down}}(t) &= L + c(t - 1800 \text{ s}).\end{aligned}$$

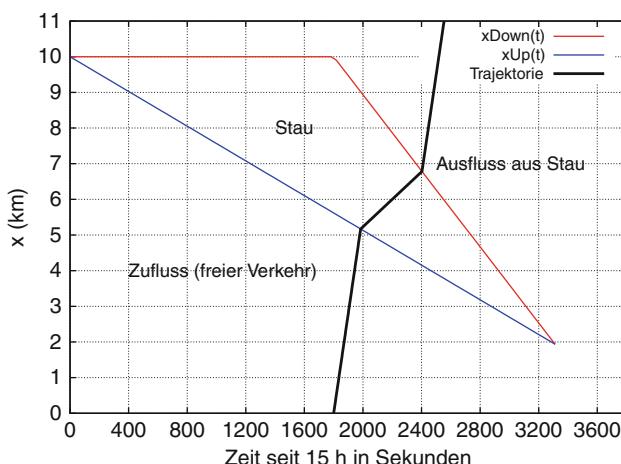
Gleichsetzen ergibt den Zeitpunkt der vollständigen Stauauflösung:

$$t_{\text{dissolve}} = 1800 \text{ s} \frac{c}{c - c^{\text{up}}} = 3312 \text{ s}.$$

Teilaufgabe 5: Die gestaute Region hat im raumzeitlichen Diagramm folgende drei Grenzbereiche:

- Einen stationären stromabwärtigen Grenzbereich am Ort des Unfalls während der Zeit der aktiven Fahrstreifensperrung („Staukopf“),
- einen sich stromaufwärts mit der Geschwindigkeit c bewegenden stromabwärtigen Grenzbereich, welcher sich aus der stationären Front nach Aufhebung der Sperrung entwickelt („Ablösen der Staufront“)
- und der sich ebenfalls stromaufwärts mit der Geschwindigkeit c_{up} fortpflanzenden stromaufwärtigen Grenze des Staus.

Zum Zeichnen benötigt man noch den Ort der Stauauflösung, in dem sich die laufenden stromaufwärtigen und stromabwärtigen Fronten treffen:



$$x_{\text{dissolve}} = x_{\text{up}}(t_{\text{dissolve}}) = 1936 \text{ m}.$$

Teilaufgabe 6: Hier wird das Fahrzeug einfach abschnittsweise auf seiner Trajektorie durch den Stau verfolgt (vgl. Diagramm) und alle Zeiten ab 15:00 Uhr gemessen.

1. *Bereich stromaufwärts des Staus:* Einfahrt bei $t_0 = 1800$ s, Geschwindigkeit v_0 , Trajektorie $x(t) = v_0(t - t_0)$.
2. *Durchfahrt durch den Stau:* Die Zeit t_{up} der Einfahrt in den Stau ergibt sich durch Vergleich von $x(t) = v_0(t - t_0)$ mit der Bewegungsgleichung $x_{\text{up}}(t) = L + c^{\text{up}} t$:

$$t_{\text{up}} = \frac{L + V_0 t_0}{V_0 - c^{\text{up}}} = 1984 \text{ s}.$$

Der Ort der Staueinfahrt ergibt sich durch Einsetzen in die Trajektorie:

$$x_{\text{up}} = v_0(t_{\text{up}} - t_0) = 5168 \text{ m}.$$

Die Trajektorie im Staubereich ergibt sich damit zu

$$x(t) = x_{\text{up}} + v_{\text{cong}}(t - t_{\text{up}}), \quad v_{\text{cong}} = \frac{Q_2}{\rho_2} = 3.86 \text{ m/s}.$$

3. *Ausfahrt aus dem Stau und freie Fahrt danach:* Da zur Zeit t_{up} der Stau sich bereits auflöst, werden Ort und Zeit der Fahrzeugaufnahme aus dem Stau durch Vergleich der Trajektorie mit der *laufenden stromabwärtigen Staufront* bestimmt:

$$t_{\text{down}} = \frac{L - x_{\text{up}} - ct_0 + v_{\text{cong}}t_{\text{up}}}{v_{\text{cong}} - c} = 2403 \text{ s},$$

$$x_{\text{down}} = x_{\text{up}} + c_{\text{cong}}(t_{\text{down}} - t_{\text{up}}) = 6783 \text{ m}.$$

Schließlich fährt das Fahrzeug bis zum Ende des betrachteten Streckenabschnitts wieder mit der Geschwindigkeit V_0 , so dass sich die Austrittszeit ergibt durch

$$t_{\text{end}} = t_{\text{down}} + \frac{L - x_{\text{down}}}{V_0} = 2518 \text{ s}.$$

Die gesamte Reisezeit ist somit

$$\tau = t_{\text{end}} - t_0 = 718.1 \text{ s}.$$

8.6 Staudynamik II: Steigung und Reduktion der Fahrstreifenzahl

Teilaufgabe 1: Die maximale Kapazität Q_{\max} pro Fahrstreifen wird durch das Maximum der Fluss-Dichte Relation im Gleichgewicht bestimmt ($l_{\text{eff}} = 1/\rho_{\max}$):

$$Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho) = \begin{cases} V_0 \rho & \text{falls } \rho \leq \rho_c, \\ \frac{V_0}{T} [1 - \rho l_{\text{eff}}] & \text{falls } \rho_c < \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases}$$

Das Maximum wird offensichtlich bei der Dichte ρ_c erreicht, wo beide „Zweige“ den gleichen Fluss liefern:

$$Q_{\max} = \rho_c V_0(\rho) = \frac{1}{T} (1 - \rho_c l_{\text{eff}}).$$

Daraus ergibt sich

$$\rho_c = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}, \quad Q_{\max} = \frac{V_0}{V_0 T + l_{\text{eff}}},$$

und außerhalb der Steigung $Q_{\max} = 2000 \text{ Fz/h}$ pro Fahrstreifen, während sich im Bereich der Steigung die fahrstreifenbezogene Kapazität auf 1440 Fz/h reduziert.

Teilaufgabe 2: Konstanter Zufluss über alle Fahrstreifen: $Q_{\text{in}} = 2000 \text{ Fz/h}$. Wegen der stationären Verhältnisse (also $\frac{\partial}{\partial t} = 0$) gilt für die auf die gesamte Richtungsfahrbahn bezogenen Größen

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{\text{tot}}}{\partial x} = \frac{\partial Q_{\text{tot}}}{\partial x} = 0$$

und damit überall $Q_{\text{tot}} = Q_{\text{in}} = \text{const.}$

Außerdem herrscht in jedem der Bereiche freier Verkehr ($V_e = V_0$). Damit (und mit der hydrodynamischen Beziehung $\rho = Q/V$) erhält man für die vier Bereiche folgende, auf jeweils einen Fahrstreifen bezogene Größen:

$$\begin{aligned} \text{Bereich I: } Q &= \frac{Q_{\text{in}}}{3} = 667 \text{ Fz/h}, \quad V = V_0 = 120 \text{ km/h}, \quad \rho = 5.56 \text{ Fz/km}, \\ \text{Bereiche II/IV: } Q &= \frac{Q_{\text{in}}}{2} = 1000 \text{ Fz/h}, \quad V = V_0 = 120 \text{ km/h}, \quad \rho = 8.83 \text{ Fz/km}, \\ \text{Bereich III: } Q &= \frac{Q_{\text{in}}}{2} = 1000 \text{ Fz/h}, \quad V = V_0 = 60 \text{ km/h}, \quad \rho = 16.67 \text{ Fz/km}. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 3: Der Ort des Zusammenbruchs liegt dort, wo erstmals die neue Nachfrage von 3600 Fz/h die Kapazität überschreitet. Die Kapazität K der verschiedenen Bereiche ist gegeben durch

$$K = I Q_{\max} = \begin{cases} 6000 \text{ Fz/h} & \text{Bereich I,} \\ 4000 \text{ Fz/h} & \text{Bereiche II und IV,} \\ 2880 \text{ Fz/h} & \text{Bereich III.} \end{cases}$$

Also bricht der Verkehr am Beginn des Bereiches III bei $x = 3 \text{ km}$ zusammen.

Der Zeitpunkt des Zusammenbruchs ist dann erreicht, wenn die plötzliche Fluss erhöhung den Beginn der Engstelle bei $x = 3 \text{ km}$ erreicht hat. Mit der Schockausbreitungsformel (8.6) und $\rho = Q/V$ ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c zu

$$c = \frac{Q_I - Q_{II}}{\rho_I - \rho_{II}} = \frac{667 - 1200}{5.56 - 10} \text{ km/h} = 120 \text{ km/h} = 2 \text{ km/min.}$$

Die Geschwindigkeit der Schockfront ist im freien Verkehr gleich der Fahrzeugschwindigkeit. Damit erreicht die Flussänderung den Beginn der Engstelle 90 s nach 16:00 Uhr, also zum Zeitpunkt

$$t_{\text{breakdown}} = 16:01:30 \text{ Uhr.}$$

Teilaufgabe 4: Der Verkehrsfluss stromabwärts der stauverursachenden Engstelle ist auf die Kapazität der Engstelle beschränkt:

$$Q_{III}^{\text{tot}} = Q_{IV}^{\text{tot}} = 2880 \text{ Fz/h}, \quad Q_{III} = Q_{IV} = 1440 \text{ Fz/h.}$$

Da es keine Zu- oder Abfahrten gibt, gilt derselbe Gesamtfluss auch im Bereich des gestauten Verkehrs stromaufwärts der Engstelle, $x_c < x < 3 \text{ km}$ (x_c ist der Übergang des freien Verkehrs in den Stau), ansonsten gilt der Verkehrsfluss der Nachfrage am Zufluss:

$$Q_I^{\text{tot}} = \begin{cases} 3600 \text{ Fz/h} & x < x_c, \\ 2880 \text{ Fz/h} & x \geq x_c. \end{cases}$$

Falls $x_c > 2 \text{ km}$, gilt dieselbe Gleichung auch für Q_{II} . Daraus folgt für die *fahrstreifenbezogenen Größen* mit $I = 3$ bzw. 2 Fahrstreifen in den Bereichen I und II:

$$\begin{aligned} Q_{I, \text{free}} &= 1200 \text{ Fz/h}, \quad Q_{II, \text{free}} = 1800 \text{ Fz/h}, \\ Q_{I, \text{cong}} &= 960 \text{ Fz/h}, \quad Q_{II, \text{cong}} = 1440 \text{ Fz/h}. \end{aligned}$$

Stromabwärts des Beginns der Engstelle bei $x = 3 \text{ km}$ herrscht nach den Prinzipien der Verkehrs dynamik freier Verkehr. Damit erhält man für die *fahrstreifenbezogenen Größen* die Dichten

$$\rho_{III} = \frac{Q_{III}}{V_0^{III}} = 24 \text{ Fz/km}, \quad \rho_{IV} = \frac{Q_{IV}}{V_0^{IV}} = 12 \text{ Fz/km.}$$

Stromaufwärts des Staues ($x < x_c$) erhält man für die Bereiche I und II die Dichten:

$$\rho_{I, \text{free}} = \frac{Q_I}{V_0^I} = 10 \text{ Fz/km}, \quad \rho_{II, \text{free}} = \frac{Q_{II}}{V_0^{II}} = 15 \text{ Fz/km.}$$

Stromabwärts des Staues, $x > x_c$, erhält man die fahrstreifenbezogene Dichte aus der Inversion des „gestauten Zweigs“ des Fundamentaldiagramms:

$$\rho_{\text{cong}}(Q) = \frac{1 - T Q}{l}.$$

Mit $T = 1.5$ s, $l = 10$ m und $Q_{\text{cong}} = Q_{\text{tot}}/I$ ($I = 3$ im Bereich I und $I = 2$ im Bereich II):

$$\rho_{\text{I, cong}} = 60 \text{ Fz/km}, \quad \rho_{\text{II, cong}} = 40 \text{ Fz/km}.$$

Teilaufgabe 5: Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt nach der Schockwellenformel

$$c_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

wobei der Index 1 für den (freien) Verkehr stromaufwärts der Staufront und der Index 2 für den (gestauten) Verkehr stromabwärts steht. Einsetzen ergibt

$$\text{Bereich I: } c_{12}^{\text{I}} = -4.8 \text{ km/h, } \text{Bereich II: } c_{12}^{\text{II}} = -14.4 \text{ km/h.}$$

Falls ein Fahrzeug genau bei $x_c = 1$ km in die Staufront einfährt, beträgt die Reisezeit für die ersten 4 km (einschließlich des ersten Kilometers):

$$\tau = \frac{x_c}{V_{\text{free}}^{\text{I}}} + \frac{2 \text{ km} - x_c}{V_{\text{cong}}^{\text{I}}} + \frac{1 \text{ km}}{V_{\text{cong}}^{\text{II}}} + \frac{1 \text{ km}}{V^{\text{III}}} = 415 \text{ s.}$$

Der erste Summand beschreibt die freie Fahrt im Abschnitt I, der zweite den Stau im Abschnitt I, der dritte den Stau im Abschnitt II und der vierte die Fahrt an der Grenze von freiem Verkehr zum Stau im Bereich der Steigung. Die Reisezeit beträgt also 6 min und 55 s.

8.7 Diffusions-Transport-Gleichung. Einsetzen der Anfangsbedingungen in Gl. (8.44) ergibt

$$\rho(x, t) = \rho_0 \int_0^L dx' \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[\frac{-(x - x' - \tilde{c}t)^2}{4Dt} \right].$$

Da der Integrand der Dichtefunktion $f_N(x)$ einer (μ, σ^2) -Gaußverteilung entspricht (mit von der Zeit abhängigem Erwartungswert $\mu(t) = \tilde{c}t$ und Varianz $\sigma^2(t) = 2Dt$), kann man dies auch schreiben als

$$\rho(x, t) = \rho_0 \int_0^L dx' f_N^{(\mu, \sigma^2)}(x - x').$$

Beim Integrieren ist zu beachten, dass über x' und nicht über x integriert wird. Substitution $x' = -y$, $dx' = -dy$ ergibt

$$\rho(x, t) = -\rho_0 \int_0^{-L} dy f_N^{(\mu, \sigma^2)}(y + x) = \rho_0 \int_{-L}^0 dy f_N^{(\mu, \sigma^2)}(y + x).$$

Das Integral kann durch die (kumulierte) Verteilungsfunktion der Gaußverteilung

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^x f_N(x') dx'$$

ausgedrückt werden, also

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left[F_N^{(\mu, \sigma^2)}(x) - F_N^{(\mu, \sigma^2)}(x - L) \right].$$

Schließlich drückt man dieses Ergebnis am besten mit Hilfe der tabellierten Standardnormalverteilung $\Phi(x) = F_N^{(0,1)}(x)$ aus, indem man die bekannte Beziehung $F(x) = \Phi((x - \mu)/\sigma)$ anwendet:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_0 \left[\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x - L - \mu}{\sigma}\right) \right] \\ &= \rho_0 \left[\Phi\left(\frac{x - \tilde{c}t}{\sqrt{2Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{x - L - \tilde{c}t}{\sqrt{2Dt}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Im Grenzfall verschwindender Diffusion entarten die beiden kumulierten Standardnormalverteilungen zu Sprungfunktionen an den Stellen $\tilde{c}t$ und $L + \tilde{c}t$ und man erhält die bereits aus der analytischen Untersuchung des Section-Based-Modells bekannte Lösung $\rho(x, t) = \rho_0(x - \tilde{c}t)$, wobei $\rho_0(x)$ die in der Aufgabenstellung gegebene Anfangsdichte bezeichnet. Für endliche Diffusionsstärken D verschmieren die Dichteverläufe mit der Zeit.

Aufgaben aus Kap. 9

9.1 Rampenterm der Geschwindigkeitsgleichung. Eine effektive makroskopische „Beschleunigung“ durch Rampenzuflüsse findet dann statt, wenn die Rampenzuflüsse die mittlere Geschwindigkeit im Rampenbereich verändern, ohne dass ein Einzelfahrzeug beschleunigt oder bremst. Wir betrachten ein kleines, mit der Geschwindigkeit auf der Hauptstrecke mitbewegtes Streckenelement dx parallel zur Zufahrt mit Fahrzeugzahl $n = \rho I dx$. Solange das Streckenelement auf Höhe der Rampe ist, gilt für den Zuwachs an Fahrzeugen der anteilige Rampenfluss

$$\frac{dn}{dt} = q = \frac{Q_{\text{rmp}}}{L_{\text{rmp}}} dx. \quad (\text{A.6})$$

Falls die Fahrzeuge auf der Hauptfahrbahn (einschließlich der bereits aufgefahrenen Rampenfahrzeuge) auf dem betrachteten Element im Mittel die Geschwindigkeit V und die im Element auffahrenden Fahrzeuge die Geschwindigkeit V_{rmp} haben (und auch nach der Einfahrt zunächst nach Voraussetzung *nicht* beschleunigen), gilt

$$A_{\text{rmp}} = \frac{d(V)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha} v_{\alpha} \right).$$

Da die variable Anzahl $n = n(t)$ sowohl in der Summe als auch im Nenner kommt, muss die Quotientenregel beachten werden:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} v_{\alpha} = q V_{\text{rmp}} \quad \text{und} \quad \frac{dn}{dt} = q.$$

Damit ergibt sich unter Verwendung von Gl. (A.6)

$$\begin{aligned} \frac{d\langle V \rangle}{dt} &= \frac{q V_{\text{rmp}} n - q n V}{n^2} \\ &= \frac{q(V_{\text{rmp}} - V)}{n} \\ &= \frac{Q_{\text{rmp}} dx (V_{\text{rmp}} - V)}{n L_{\text{rmp}}} \\ &= \frac{Q_{\text{rmp}} (V_{\text{rmp}} - V)}{I \rho L_{\text{rmp}}}. \end{aligned}$$

9.2 Kinematische Dispersion

Teilaufgabe 1: Die mittlere, fahrstreifengemittelte Geschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) \\ &= \frac{V_1 + V_2}{2} = 108 \text{ km/h}. \end{aligned}$$

Die Varianz zum Zeitpunkt $t = 0$ ist (mit Fahrstreifenindex $k = 1$ für den rechten und $k = 2$ für den linken Fahrstreifen) gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta(x, 0) &= \langle (V(x, 0) - \langle V \rangle)^2 \rangle \\ &= \frac{\rho_1 (V_1 - \langle V \rangle)^2 + \rho_2 (V_2 - \langle V \rangle)^2}{\rho_1 + \rho_2}. \end{aligned}$$

Mit $\rho_1 = \rho_2$ ergibt sich damit

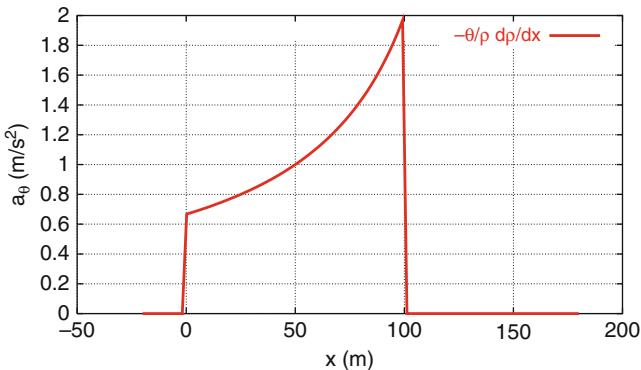
$$\theta(x, 0) = \frac{(V_1 - V_2)^2}{4} = 100 \text{ (m/s)}^2.$$

Man beachte, dass es sich hier um Erwartungswerte von echten räumlichen Größen handelt. Würde man die Varianz direkt aus stationären Detektordaten bestimmen, indem man als Gesamtheit für den Erwartungswert $\langle \cdot \rangle$ alle gemessenen, den Querschnitt passierenden Fahrzeuge annimmt, bekäme man z.B. für den Fahrstreifen 1 den Gewichtungsfaktor $Q_1/(Q_1 + Q_2) = 1/3$ statt des korrekten Faktors $\rho_1/(\rho_1 + \rho_2) = 1/2$.

Teilaufgabe 2: Der hier betrachtete *kinematische Druckanteil* der allgemeinen Geschwindigkeitsgleichung (9.8) für Makromodelle ergibt sich zu $P_\theta = \rho\theta$ (vgl. Abschn. 9.3).¹ Der Beschleunigungsanteil $A_\theta(x, t)$ durch den Druckanteil P_θ ergibt sich aus der allgemeinen Geschwindigkeitsgleichung zu

$$A_\theta = \left(\frac{d}{dt} + V \frac{d}{dx} \right) V = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -\frac{\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \begin{cases} \frac{0.01 \text{ s}^{-2}}{\rho} & 0 \leq x \leq 100 \text{ m}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

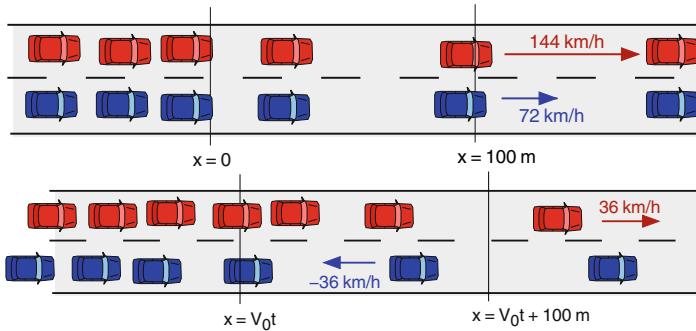
Der Faktor 0.01 ergibt sich aus der Umrechnung der Längen von km nach m in x und ρ . Damit folgt aus dem negativen Dichtegradienten $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ effektiv ein positiver Beitrag zur makroskopischen Beschleunigung $\frac{dV}{dt}$ (vgl. das folgende Diagramm).



Teilaufgabe 3: Gibt es eine Geschwindigkeitsvarianz θ und einen Dichtegradienten $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, z.B. bei einem Übergang von dichtem Verkehr auf eine geringe Verkehrsdichte, so fahren die schnellsten Fahrzeuge aus dem Bereich dichten Verkehrs in den Bereich geringer Verkehrsdichte hinein und erhöhen dort die Dichte und den Anteil der schnelleren Fahrzeuge. Im mitbewegten System (auf der linken Seite der Geschwindigkeitsgleichung steht ja die *konvektive Ableitung*) fahren die Fahrzeuge auf dem linken Fahrstreifen mit 10 m/s vorwärts, die auf der rechten mit 10 m/s rückwärts, d.h. die Gesamtdichte bleibt in erster Ordnung konstant, aber der Anteil der schnellen Fahrzeuge wird im mittleren Teil der Strecke stark erhöht. Dadurch erhöht

¹ Er ist von dem in der Aufgabe 9.3 behandelten *Anticipationsanteil* zu unterscheiden, denn hier beschleunigt *kein einziges einzelnes Fahrzeug*.

sich die makroskopische Geschwindigkeit. Man erhält also eine makroskopische Beschleunigung $A(x, t)$, ohne dass ein *einziges* Fahrzeug beschleunigt oder bremst. Die folgenden Abbildungen, eine im Ruhesystem und eine im mit V mitbewegten System, verdeutlichen dies:



Teilaufgabe 4: Durch den in Teilaufgabe 3 beschriebenen Effekt findet eine „Entmischung“ der Verteilung der verschiedenen Wunschgeschwindigkeiten statt. Im Stadtverkehr sind z.B. stromabwärts nach Grünwerden einer Ampel die ersten Fahrzeuge mit hoher Wahrscheinlichkeit diejenigen mit einer hohen Wunschgeschwindigkeit. Neben der Dynamik der Geschwindigkeiten findet also auch bezüglich der raumzeitlichen Verteilung der *Wunschgeschwindigkeiten* ein dynamischer Prozess statt, der eigentlich durch eine eigene dynamische Gleichung beschrieben werden müsste. Dies wird in allen gängigen Makromodellen ignoriert.

9.3 Modellierung der Antizipation durch den Druckterm

Teilaufgabe 1: Da die Verkehrsichte per Definition die Zahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit ist, ist sie insbesondere gleich dem Kehrwert des Bruttoabstandes, also

$$d = \frac{1}{\rho((x + x_a)/2, t)} \approx \frac{1}{\rho(x, t)}.$$

Der erste Ausdruck nach dem Gleichheitszeichen ist dabei „in zweiter Ordnung“ genau, der zweite in erster Ordnung, was aber im Weiteren ausreichend ist.

Teilaufgabe 2: Hierzu wird der nichtlokale Teil $V_e(\rho(x + d, t))$ des antizipierten Geschwindigkeitsanpassungsterms,

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{\text{relax}} = \frac{V_e(\rho(x + d, t)) - V(x, t)}{\tau},$$

bezüglich $x' = x + d$ um x in erster Ordnung Taylor-entwickelt:

$$V_e(\rho(x + d, t)) = V_e(\rho(x, t)) + \frac{dV_e(\rho(x, t))}{dx} d.$$

Durch Einsetzen in den Anpassungsterm erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{\text{relax}} &= \frac{V_e(\rho(x, t)) - V(x, t)}{\tau} + \frac{1}{\rho\tau} \frac{dV_e(\rho(x, t))}{dx} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{V_e(\rho(x, t)) - V(x, t)}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{dP(x, t)}{dx}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Druckterm der allgemeinen Geschwindigkeitsgleichung eingesetzt wurde. Vergleich mit der Taylorentwicklung liefert damit

$$P(x, t) = -\frac{V_e(\rho(x, t))}{\tau}.$$

Teilaufgabe 3: Die Verkehrsdichte gehorcht nach Aufgabenstellung der Funktion (mit $\rho_0 = 20 \text{ Fz/km} = 0.02 \text{ Fz/m}$, $c = 100 \text{ Fz/km}^2 = 10^{-4} \text{ Fz/m}^2$ und x in m)

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0 & x < 0, \\ \rho_0 + cx & 0 < x \leq 200, \\ 2\rho_0 & x > 200. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

(i) Beschleunigungsunterschied durch Antizipation unter Verwendung des ursprünglichen Anpassungsterms:

$$\Delta \dot{V} = \frac{V_e(\rho(x + 1/\rho(x, t), t)) - V_e(\rho(x, t))}{\tau},$$

wobei $V_e(\rho) = V_0(1 - \rho/\rho_{\max})$ in der Aufgabenstellung gegeben ist (diese Gleichgewichtsrelation ist eher unrealistisch, sie veranschaulicht aber auf einfachste Weise das Prinzip). Setzt man Gl. (A.7) ein, ergibt sich

$$\Delta \dot{V} = \begin{cases} 0 & x \leq -1/\rho_0 \text{ oder } x > 200, \\ \frac{-V_0 c}{\tau \rho_{\max}} \left(\frac{1}{\rho_0} + x \right) & -\frac{1}{\rho_0} < x \leq 0, \\ \frac{-V_0 c}{\tau \rho_{\max} \rho} & 0 < x \leq 200 - \frac{1}{2\rho_0}, \\ \frac{-V_0}{\tau \rho_{\max}} (2\rho_0 - \rho) & 200 - \frac{1}{2\rho_0} < x \leq 200, \end{cases}$$

wobei die letzten beiden Bereichsabgrenzungen nur „ungefähr“ gelten.

(ii) Drückt man den Beschleunigungsunterschied angenähert durch den Druckterm aus, erhält man

$$\Delta \dot{V} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ oder } x > 200, \\ \frac{-V_0 c}{\tau \rho_{\max} \rho} & 0 < x \leq 200 - \frac{1}{2\rho_0}. \end{cases}$$

Bis auf die Übergangsbereiche am Anfang und Ende des Dichtegradients sind die Ergebnisse dieselben. Im Gegensatz zur Druckterm-Näherung liefert aber der nichtlokale Anpassungsterm „echte“ Antizipation, z.B. im Bereich $-1/\rho_0 \leq x < 0$, wo die lokale Näherung „noch nichts sieht“. Daher sind nichtlokale Terme, obwohl sie zunächst komplizierter erscheinen, im Allgemeinen numerisch stabiler.

9.4 Gleichgewichtsgeschwindigkeit des GKT-Modells. Bei homogen-stationären Verhältnissen verschwinden alle Ableitungen. Die GKT-Geschwindigkeitsgleichung (9.19) reduziert sich daher auf $V = V_e^*$. Ferner folgt aus der Homogenität $V_a = V$ sowie $\rho_a = \rho$ und damit der Boltzmann-Faktor $B(0) = 1$. Mit Gl. (9.22) wird damit die Bedingung $V = V_e^*$ zu

$$\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{\alpha(\rho)}{\alpha(\rho_{\max})} \left(\frac{\rho_a V T}{1 - \rho_a / \rho_{\max}} \right)^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in V mit der Lösung

$$V = V_e(\rho) = \frac{\tilde{V}^2}{2V_0} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4V_0^2}{\tilde{V}^2}} \right)$$

und der Abkürzung

$$\tilde{V} = \sqrt{\frac{\alpha(\rho_{\max})}{\alpha(\rho)}} \frac{1 - \rho / \rho_{\max}}{\rho T}.$$

Für Dichten nahe der maximalen Dichte gilt $\tilde{V} \ll V_0$ sowie $\alpha(\rho) \approx \alpha(\rho_{\max})$ und damit

$$V_e(\rho) \approx \tilde{V} \approx \frac{1 - \rho / \rho_{\max}}{\rho T} = \frac{s}{T}$$

wobei die Mikro-Makro-Beziehung $s = 1/\rho - 1/\rho_{\max}$ verwendet wurde. Damit hat T die Bedeutung einer Folgezeit.

9.5 Herleitung der flusserhaltenden Form der Makromodelle. Zunächst kann man in der Kontinuitätsgleichung direkt $V = Q/\rho$ setzen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{Q}{I} \frac{dI}{dx} + v_{\text{rmp}}.$$

Multiplikation der Geschwindigkeitsgleichung (9.8) mit ρ und direktes Ersetzen von $V = Q/\rho$ ergibt zunächst

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + Q \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho V_e^* - Q}{\tau} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial(Q/\rho)}{\partial x} \right) + \rho A_{\text{rmp}}.$$

Nun wird die Zeitableitung der Geschwindigkeit mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung in eine Zeitableitung des Flusses transformiert. Die linke Seite obiger Gleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial t} + Q \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial t} - V \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t} + V \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{Q}{I} \frac{dI}{dx} - V v_{\text{rmp}} + Q \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(QV)}{\partial x} + V \frac{Q}{I} \frac{dI}{dx} - V v_{\text{rmp}}. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun wieder V durch Q/ρ und fasst die Ortsableitungen zusammen, ergibt sich das Endergebnis

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{\rho} + P - \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\rho} \right) \right] = \frac{\rho V_e^* - Q}{\tau} + \frac{Q^2}{\rho I} \frac{dI}{dx} - \frac{Q v_{\text{rmp}}}{\rho} + \rho A_{\text{rmp}}.$$

9.6 Simulation des GKT-Modells. Vernachlässigt man den im GKT-Modell sehr kleinen Druckterm (sein relativer Einfluss ist maximal von der Größenordnung $\sqrt{\alpha} = 10\%$), so lautet die Bedingung (9.33):

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{V_0} = 1.5 \text{ s}.$$

Da das GKT-Modell keine Diffusionen enthält, entfällt die entsprechende Bedingung (9.34). Hingegen muss man die Bedingung (9.35) testen. Die charakteristische Gleichung $\det(\underline{L} - \lambda \underline{1}) = 0$ zur Bestimmung der Eigenwerte λ der Anpassungsmatrix \underline{L} der linearen Gleichung (9.30) lautet:

$$-\lambda \left[-\lambda + \frac{1}{\tau} \left(-1 + \rho \frac{\partial \tilde{V}_e(\rho, Q)}{\partial Q} \right) \right] = 0$$

und damit

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \left(1 - \rho \frac{\partial \tilde{V}_e(\rho, Q)}{\partial Q} \right).$$

Der erste Eigenwert besagt, dass ohne Rampenterme oder Spurzahländerungen die Kontinuitätsgleichung keinerlei Quell- und damit Anpassungsterme hat. Dieser Eigenwert entspricht $\Delta t \rightarrow \infty$ und ist damit irrelevant. Der zweite Eigenwert ergibt sich nach Durchführung der partiellen Ableitung zu

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{2V_e(\rho)}{\hat{V}(\rho)} \right)$$

mit der bereits bei der Ermittlung des Fundamentaldiagramms verwendeten Abkürzung

$$\hat{V}(\rho) = \frac{2\alpha(\rho_{\max}) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2}{\alpha(\rho) V_0 \rho^2 T^2}.$$

Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit wurde bereits in Aufgabe 9.4 berechnet:

$$V_e(\rho) = -\frac{\hat{V}(\rho)}{2} + \sqrt{\frac{\hat{V}^2(\rho)}{4} + V_0 \hat{V}(\rho)}.$$

Der zweite Eigenwert ist am kritischsten (d.h. negativsten) bei der maximal in der Simulation vorkommenden Dichte von $\rho = \rho_{\max,\text{sim}} = 0.1 \text{ Fz/m}$ (am besten in SI-Einheiten rechnen). Einsetzen ergibt

$$V_e(\rho_{\max,\text{sim}}) = 4.14 \text{ m/s}, \quad \lambda_2(\rho_{\max,\text{sim}}) = -0.756 \text{ s}^{-1}$$

und damit

$$\Delta t < \frac{1}{|\lambda_2|} = 1.32 \text{ s}. \quad (\text{A.8})$$

Die schärfere der beiden Bedingungen muss natürlich zutreffen, also letztendlich $\Delta t < 1.32 \text{ s}$.

Die numerische Diffusion bei $V = 20 \text{ m/s}$ und einer Aktualisierungsschrittweite von $\Delta t = 1 \text{ s}$ (also innerhalb der Stabilitätslimits) beträgt in beiden Gleichungen (wenn man wieder den wesentlich kleineren Druckterm außer Acht lässt)

$$D_{\text{num}} = V \frac{\Delta x}{2} \left(1 - V \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = 300 \text{ m/s}^2.$$

Dies ist nur 1/30 der typischerweise verwendeten „echten“ Diffusion des KK-Modells und damit vernachlässigbar.

Aufgaben aus Kap. 10

10.1 Beschleunigen und Bremsen zwischen zwei Lichtsignalanlagen

Teilaufgabe 1 (Modellparameter). Die freie Beschleunigung ist wie beim OVM: v_0 ist die Wunschgeschwindigkeit und τ die Geschwindigkeitsanpassungszeit. Gebremsst wird, falls die Annäherungsrate hinreichend groß ist. Dabei ist b die Brems-

verzögerung. Aus der Kinematik folgt, dass beim Abstand s_0 die Annäherungsrate gleich Null wird, zumindest wenn das Vorderfahrzeug steht oder nicht beschleunigt. Also ist s_0 der Mindestabstand. Das Modell berücksichtigt *keine* Folgezeit (und auch keine Reaktionszeit). Eine Folgefahrt im Abstand s_0 ist daher bei beliebigen Geschwindigkeiten stabil. (Das Modell ist allerdings nicht unfallfrei.)

Teilaufgabe 2 (Beschleunigungsvorgang). Es gilt die erste Bedingung des Modells. Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0 - v}{\tau} \quad \text{mit } v(0) = 0.$$

Geschwindigkeit. Die Lösung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $v_H(t)$ und einer speziellen Lösung der vollen inhomogenen Gleichung, z.B. $v_I(t) = v_0$. Mit dem Exponentialansatz $e^{\lambda t}$ ergibt sich die Bedingung $\lambda = 1/\tau$, also die allgemeine Lösung

$$v(t) = v_H(t) + v_I(t) = Ae^{-t/\tau} + v_0.$$

Aus der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ergibt sich die Integrationskonstante zu $A = -v_0$ und damit

$$v(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Ort. Einfache Integration mit $x(0) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t') dt' = v_0 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) dt' \\ &= v_0 \left[t' + \tau e^{-\frac{t'}{\tau}} \right]_{t'=0}^{t'=t} = v_0 t + v_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Lösung $v(t)$ kann man dies schreiben als

$$x(t) = v_0 t - v(t)\tau.$$

Beschleunigung. Diese erhält man direkt durch Ableiten von $v(t)$ oder auch durch Einsetzen von $v(t)$ in die Differentialgleichung: $\dot{v} = (v_0 - v)/\tau = v_0/\tau e^{-1/\tau}$.

Teilaufgabe 3 (Abbremsvorgang). Die Ampel stellt ein „stehendes Hindernis“ dar, also $\Delta v = v$. Es wird mit Bremsen begonnen, wenn die Grenze der Ungleichung erreicht ist: $\Delta v = v = \sqrt{2b(s - s_0)}$. Löst man dies nach s auf und berücksichtigt $v \approx v_0$, erhält man für den Abstand $s = s_c$ bei Bremsbeginn

$$s = s_c = s_0 + \frac{v^2}{2b} = 50.2 \text{ m.}$$

Die Bremsverzögerung ist gleich $-\frac{dv}{dt} = b$. Da der Bremsweg bei konstanter Verzögerung b durch $\Delta x = v^2/(2b)$ gegeben ist, kommt das Fahrzeug im Abstand $s = s_0$ zum Stehen.

Teilaufgabe 4 (Trajektorie). Für den Ort des Bremsbeginns gilt

$$x_c = L - s_c = L - s_0 - \frac{v^2}{2b} \approx 450 \text{ m.}$$

Nun wird aus der Trajektorie der Beschleunigungsphase, $x(t) = v_0 t - v(t)\tau$, die Zeit t_c bei Beginn der Bremsphase bestimmt:

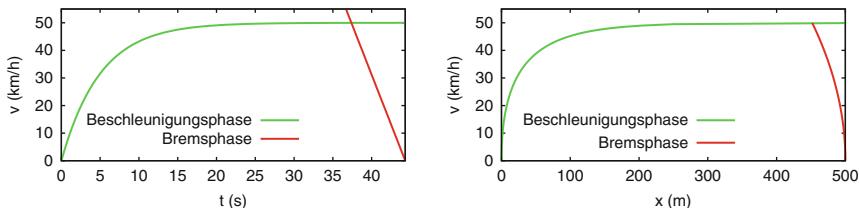
$$x_c(t_c) = v_0 t_c - v(t_c)\tau \approx v_0(t_c - \tau) \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{x_c}{v_0} + \tau = 32.4 \text{ s} + 5.0 \text{ s} = 37.4 \text{ s.}$$

Damit ist auch die Zeit bekannt, bei der das Fahrzeug wieder stoppt:

$$t_{\text{stop}} = t_c + \frac{v_0}{b} = 44.3 \text{ s.}$$

Aus diesen Angaben ergibt sich der Geschwindigkeitsverlauf (siehe Diagramme) zu

$$v(t) = \begin{cases} v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & 0 \leq t < t_c, \\ v_0 - b(t - t_c) & t_c \leq t \leq t_{\text{stop}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



10.2 OVM-Beschleunigung auf freier Strecke. Die maximale Beschleunigung findet zur Zeit $t = 0$ statt: $a_{\max} = \frac{v_0 - v(0)}{\tau} = \frac{v_0}{\tau}$. Mit $a_{\max} = 2 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 120 \text{ km/h}$ ergibt sich eine Relaxationszeit von

$$\tau = \frac{v_0}{a_{\max}} = 16.7 \text{ s.}$$

Die Bedingung für die Zeit t_{100} lautet

$$v(t_{100}) = v_{100} = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t_{100}}{\tau}}\right).$$

Damit ergibt sich

$$\frac{v_{100}}{v_0} = 1 - e^{-\frac{t_{100}}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad t_{100} = -\tau \ln \left(1 - \frac{100}{120} \right) \approx 29.9 \text{ s.}$$

10.3 Beschleunigen mit dem Optimal-Velocity-Modell. Auf einer Ringstraße mit identischen Fahrzeugen α , die zum Zeitpunkt $t = 0$ im gleichen Nettoabstand $s_\alpha(0) = s(0)$ voneinander stehen, herrschen zwar keine stationären, wohl aber homogene Verhältnisse: Die Abstände bleiben konstant, $s_\alpha(t) = s(0)$. Damit lautet das OVM für jedes Fahrzeug (Index weggelassen)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{\text{opt}}(s(0)) - v}{\tau}.$$

Die Lösung ist analog zu der Lösung der Aufgabe 10.2, nur dass die Wunschgeschwindigkeit v_0 durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit bzw. optimale Geschwindigkeit $v_e = v_{\text{opt}}(s(0))$ ersetzt wird.

10.4 Full-Velocity-Difference-Modell. Hinreichend weit entfernt vom stehenden Hindernis gilt $v_{\text{opt}}(s) \rightarrow v_0$, unabhängig von der verwendeten Funktion für $v_{\text{opt}}(s)$. Für $v_l = 0$ bzw. $\Delta v = v$ lautet damit die Beschleunigungsgleichung des FVDM

$$\dot{v} = \frac{v_0 - v}{\tau} - \lambda v = \frac{v_0}{\tau} - \left(\frac{1}{\tau} + \lambda \right) v.$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Insbesondere wird die Beschleunigung bei der Geschwindigkeit

$$v^* = \frac{v_0}{1 + \lambda \tau}$$

gleich Null. Für ein anfangs stehendes Fahrzeug stellt v^* die maximale Geschwindigkeit dar. Für die angegebenen Parameterwerte ergibt sich $v^* = 13.5 \text{ km/h}$, in Übereinstimmung mit Abb. 10.5.

10.5 Einfaches Modell für eine Notbremsung

Teilaufgabe 1 (Modellparameter). T_r = Reaktionszeit, b_{\max} = maximal mögliche Bremsverzögerung (Verzögerung bei Notbremsung).

Teilaufgabe 2 (Anhalte- und Bremsweg). Bremsweg $s_B(v)$ und Anhalteweg $s_A(v) = vT_r + s_B(v)$ sind nach elementarer Integration der konstanten Verzögerung gegeben durch

$$s_B(v) = \frac{v^2}{2b}, \quad s_A(v) = vT_r + s_B(v).$$

Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} v = 50 \text{ km/h} : \quad s_B(v) &= 12.1 \text{ m}, \quad s_A(v) = 25.9 \text{ m}, \\ v = 70 \text{ km/h} : \quad s_B(v) &= 23.6 \text{ m}, \quad s_A(v) = 43.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Teilaufgabe 3 (Notbremsung). Zunächst wird aus der Situation mit $v_1 = 50 \text{ km/h}$ der anfängliche Abstand ermittelt:

$$s(0) = s_A(v_1) = 25.95 \text{ m}.$$

Am Ende der Reaktionszeit wäre bei der Situation mit $v_2 = 70 \text{ km/h}$ das Kind nur noch

$$s(T_r) = s(0) - v_2 T_r = 6.50 \text{ m}$$

von der Stoßstange des Fahrzeugs entfernt. Nun bräuchte der Fahrer noch die Strecke $s_B(v_2) = 23.6 \text{ m}$ zum Bremsen, hat aber nur $s(T_r) = 6.5 \text{ m}$ zur Verfügung. Ohne Kollision würde das Fahrzeug also eine zusätzliche Strecke $\Delta s = 17.13 \text{ m}$ bis zum Stillstand benötigen. Daraus ergibt sich die Kollisionsgeschwindigkeit durch Umstellen der Bremsweggleichung zu²

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = 16.56 \text{ m/s} = 59.6 \text{ km/h}.$$

Setzt man alle Zahlenwerte erst zum Schluss ein, bekommt man

$$\begin{aligned} s(T_r) &= v_1 T_r + \frac{v_1^2}{2b} - v_2 T_r, \\ \Delta s &= \frac{v_2^2}{2b} - s(T_r) = (v_2 - v_1) \left(\frac{v_1 + v_2}{2b} + T_r \right) \end{aligned}$$

und damit den allgemeinen Ausdruck

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \sqrt{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1 + 2bT_r)}.$$

Aufgaben aus Kap. 11

11.1 Bedingungen an das mikroskopische Fundamentaldiagramm. Die Bedingung (11.4) gilt insbesondere für $v_l = 0$, also $a_{\text{mic}}(s, 0, 0) = 0$ für $s \leq s_0$. Dies entspricht $v_e(s) = 0$ für $s \leq s_0$, also insbesondere für $s = 0$.

Die Bedingungen (11.1) und (11.2) gelten insbesondere für $v = v_l$. Für die Beschleunigungsfunktion \tilde{a} folgt daraus

² Die „offizielle“ Antwort bei der Führerscheinprüfung lautet 60 km/h.

$$\frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} \geq 0, \quad \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} < 0.$$

Längs der Gleichgewichtskurve $v_e(s)$ muss das Differential von \tilde{a} bei gleichzeitiger Variation von s und v (bei $\Delta v = 0$) verschwinden:

$$d\tilde{a} = \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} ds + \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{a}(s, v, 0)}{\partial v} v'_e(s) \right) ds = 0.$$

Hierbei wurde die Definition der Gleichgewichtskurve, $dv = v'_e(s)ds$, angewandt, also

$$v'_e(s) = \frac{-\partial \tilde{a}(s, v, 0)/\partial s}{\partial \tilde{a}(s, v, 0)/\partial v} \geq 0.$$

Es gilt $v'_e(s) = 0$, falls das Vorderfahrzeug aufgrund der Entfernung die eigene Fahrweise nicht beeinflusst (zweiter Ausdruck in (11.2)).

Schließlich folgt die Bedingung $\lim_{s \rightarrow \infty} v_e(s) = v_0$ direkt aus dem zweiten Teil der Bedingung (11.1).

11.2 Faustregeln für Abstand und Bremsweg

Teilaufgabe 1. Gemäß der „Abstand gleich halber Tacho“-Regel ist der Abstand proportional zur Geschwindigkeit. Damit ist der Quotient $T = s/v$, also die gesuchte Folgezeit, unabhängig von der Geschwindigkeit. Den Zahlenwert erhält man durch einfaches Einsetzen, wobei man aber sorgfältig auf die Einheiten achten muss:

$$\begin{aligned} \text{Abstand in m} &= \frac{1}{2} (\text{Geschwindigkeit in km/h}) \\ \frac{s}{m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right), \end{aligned}$$

also

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{2} m \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)}{v} = \frac{\frac{1}{2} m}{\text{km/h}} = \frac{0.5 \text{ h}}{1000} = \frac{1800 \text{ s}}{1000} = 1.8 \text{ s}.$$

Teilaufgabe 2. Eine Meile entspricht etwa 1.6 km. Es ist aber nicht eindeutig, wie lang das „car“ sein soll. Wir nehmen einen USA-Straßenkreuzer mit $l = 5 \text{ m}$ an. Mit der üblichen Bezeichnung mph für *miles per hour* erhält man

$$T = \frac{s}{v} = \frac{l}{5 \text{ mph}} = \frac{5 \text{ m}}{5 \text{ mph} \cdot 1.6 \frac{\text{km/h}}{\text{mph}} \frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}}} = \frac{10 \text{ m} \cdot 3.6 \text{ s/m}}{16} = 2.25 \text{ s}.$$

Die „aggressivere“ Variante mit 10 mph pro Fahrzeulgänge entspräche $T = 1.13$ s. Dies ist zwar konsistent mit realen Zeitabständen (vgl. Abb. 4.8), aber als Regel doch zu wenig sicher.

Teilaufgabe 3. Die Faustformel „Bremsweg gleich Quadrat der Geschwindigkeit durch 100“ für den Bremsweg s in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v lautet unter Berücksichtigung der Einheiten:

$$\frac{s}{\text{m}} = 0.01 \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)^2.$$

Ein Vergleich mit der kinematischen Bremswegformel $s_B = v^2/(2s)$ liefert

$$b = \frac{v^2}{2s} = \frac{v^2}{0.02 \text{ m}} \left(\frac{\text{km}}{\text{h } v} \right)^2 = \frac{50}{3.6^2} \text{ m/s}^2 = 3.86 \text{ m/s}^2.$$

Zum Vergleich: Komfortable Verzögerungen liegen um 2 m/s^2 , während eine Vollbremsung auf trockener Straße etwa 8 bis 10 m/s^2 entspricht. Auf feuchter Straße werden noch etwa 4 bis 6 m/s^2 erreicht. Mit der Bremswegregel liegt man auch bei nasser Fahrbahn noch auf der sicheren Seite, nicht jedoch bei verschneiter oder vereister Fahrbahn.

11.3 Reaktion auf einscherende Fahrzeuge

Reaktion beim IDM. Der Gleichgewichtsabstand als Funktion der Geschwindigkeit beträgt

$$s = s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta}}.$$

Der wesentliche Anteil ist der geschwindigkeitsabhängige Abstand $vT = v_0T/2$. (Für $s_0 = 2 \text{ m}$ und $\delta = 4$ machen die restlichen Anteile etwa 10% aus.) Nach Einscheren des neuen Vorderfahrzeugs reduziert sich nach Aufgabenstellung der Abstand von s_e auf $s_e/2$, aber die Geschwindigkeitsdifferenz zum Vorderfahrzeug bleibt (nach Voraussetzung) gleich Null. Damit ergibt sich als IDM-Reaktion (mit $a = 1 \text{ m/s}^2$ und $\delta = 4$):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\text{IDM}} &= a \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s_0 + vT}{s} \right)^2 \right] \\ &\stackrel{(v=v_0/2, s=s_e/2)}{=} a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_0T/2}{s_e/2} \right)^2 \right] \\ &\stackrel{s_e(v)=s_e(v_0/2)}{=} -3a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^\delta \right] = -\frac{45}{16} \text{ m/s}^2 = -2.81 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Reaktion beim vereinfachten Gipps-Modell. Für den Gleichgewichts-Nettoabstand gilt $s_e(v) = v\Delta t$. Vor dem Einscheren gilt $v = v_0/2$ und $s = (v_0\Delta t)/2$. Genau zum Zeitpunkt t werde nun eingeschert, so dass der Abstand zum Berechnen der neuen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch den halben Gleichgewichtsabstand $s = (v_0\Delta t)/4$ gegeben ist. Die neue Geschwindigkeit ist durch v_{safe} begrenzt:

$$v(t + \Delta t) = v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{bv_0\Delta t}{2}} = 19.07 \text{ m/s}.$$

Damit ergibt sich eine effektive Beschleunigung von

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{Gipps}} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx -0.93 \text{ m/s}^2.$$

Das Gipps-Modell modelliert also eine eher entspannte Fahrer-Reaktion auf den nur noch halben Sicherheitsabstand. Sowohl das Gipps-Modell als auch das IDM würden deutlich höhere Verzögerungen erzeugen für den Fall, dass das einscherende Fahrzeug langsamer wäre. Dann wäre „Gefahr im Verzug“.

11.4 IDM-Bremsstrategie. Hier muss man die Quotienten- und Kettenregeln anwenden und danach $\dot{s} = -v$ und $\dot{v} = -b_{\text{kin}}^2/b = -v^4/(4bs^2)$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{db_{\text{kin}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2s} \right) = \frac{4vs\dot{v} - 2v^2\dot{s}}{4s^2} \\ &= \frac{v^3}{2s^2} \left(1 - \frac{v^2}{2sb} \right) = \frac{v b_{\text{kin}}}{s b} (b - b_{\text{kin}}). \end{aligned}$$

11.5 Analyse eines Mikromodells

Teilaufgabe 1. Bei Beschleunigung auf freier Strecke ist $v_{\text{safe}} > v_0$; v_{safe} spielt also keine Rolle. Daher bedeuten v_0 die Wunschgeschwindigkeit und a die Beschleunigung falls $v < v_0$, aber auch die Verzögerung im Fall $v > v_0$.

Das Folgeverhalten bei konstantem Abstand und konstanter Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$v = \min(v_0, v_{\text{safe}}).$$

Entweder gilt $v_{\text{safe}} > v_0$ und damit $v = v_0$, oder es gilt $v = v_{\text{safe}}$ und wegen der Bedingung gleichbleibenden Abstands auch $v_l = v = v_{\text{safe}}$. Aus der Gleichung für v_{safe} mit $v = v_l$,

$$v = -aT + \sqrt{a^2 T^2 + v^2 + 2a(s - s_0)},$$

folgt

$$s = s_0 + vT.$$

Damit ist s_0 der Mindestabstand und T die gewünschte minimale Folgezeitlücke.

Falls $v > v_0$ oder $v > v_{\text{safe}}$ ist, wird mit der Beschleunigung $-a$ abgebremst. Also gibt a nicht nur die Wunsch-Beschleunigung, sondern auch die einheitliche Bremsverzögerung an. Das Modell ist symmetrisch bezüglich Beschleunigen und Bremsen.

Teilaufgabe 2. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit als Funktion des Abstandes (mikroskopisches Fundamentaldiagramm) ist gegeben durch

$$v_e(s) = \min \left(v_0, \frac{s - s_0}{T} \right).$$

Damit erhält man das dreieckige Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min \left(v_0 \rho, \frac{1 - \rho l_{\text{eff}}}{T} \right)$$

mit dem Flussmaximum $Q_{\max} = (T + l_{\text{eff}}/v_0)^{-1} = 1800 \text{ Fz/h}$ bei einer Dichte $\rho_K = 1/(l_{\text{eff}} + v_0 T) = 25 \text{ /km}$. Für eine weitere Diskussion der Eigenschaften siehe Abschn. 8.4.

Teilaufgabe 3. Die Strecken zum Beschleunigen von Null auf $v_0 = 20 \text{ m/s}$ und der Bremsweg von v_0 zum Stillstand sind gleich groß und betragen

$$s_a = s_b = \frac{v_0^2}{2a} = 200 \text{ m}.$$

Bei einem Mindestabstand von 3 m und einer Haltelinien-Position bei 603 m wird also von $x = 0$ bis $x_1 = 200 \text{ m}$ beschleunigt und von $x_2 = 400 \text{ m}$ bis $x_3 = 600 \text{ m}$ verzögert. Beschleunigungs- und Abbremszeit betragen je $v_0/a = 20 \text{ s}$ und die Zeit für das Zurücklegen der 200 m langen Reststrecke mit der Wunschgeschwindigkeit beträgt 10 s. Damit ergibt sich die vollständige Trajektorie zu

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2 & t \leq t_1 = 20 \text{ s}, \\ x_1 + v_0(t - t_1) & t_1 < t \leq t_2 = 30 \text{ s}, \\ x_2 + v_0(t - t_2) - \frac{1}{2}a(t - t_2)^2 & t_2 < t \leq t_3 = 50 \text{ s}. \end{cases}$$

11.6 Heterogener Verkehr. Bei einer Kombination aus heterogenem Verkehr und mehreren Fahrstreifen ergibt sich auch bei dreieckigen Fundamentaldiagrammen eine Absenkung der mittleren Geschwindigkeit vor dem Kapazitätsmaximum. Zunächst ist bereits das flottengemittelte Fundamentaldiagramm gekrümmt, da die Dichte ρ_K beim Flussmaximum für die verschiedenen Fahrzeugklassen an unterschiedlichen Stellen liegt und bei hinreichend hoher Dichte einige

Fundamentaldiagramme bereits abfallen. Ohne Überholmöglichkeit würde sich aber dennoch keine Geschwindigkeitsabsenkung ergeben, da sich alle Fahrzeuge hinter den langsamsten Fahrzeugen stauen und damit nur das Fundamentaldiagramm der langsamsten Fahrzeugklasse relevant ist.

Nimmt man dagegen mehrere Fahrstreifen, aber mit wachsender Verkehrsdichte abnehmende Wechsel- und Überholmöglichkeiten an, ergibt sich bei geringer Dichte die flottengemittelte Geschwindigkeit. Nahe der Kapazität und wenigen Überholmöglichkeiten erhält man aber nahezu die Geschwindigkeit der langsamsten Fahrzeuge. Das Ergebnis ist eine Geschwindigkeitsabsenkung mit der Dichte bereits bei freiem Verkehr.

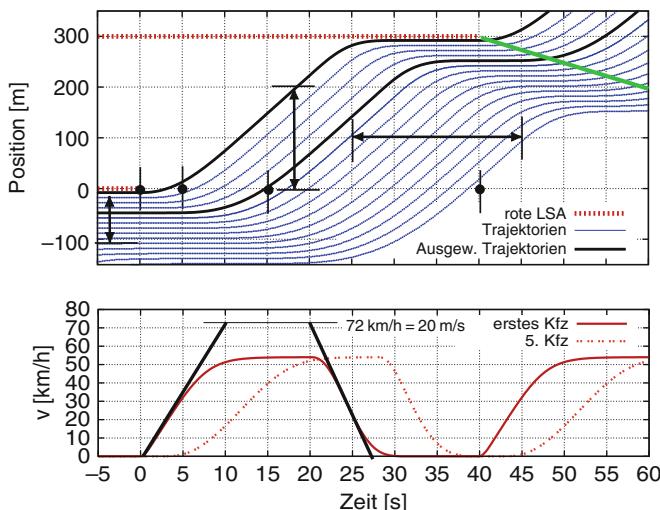
11.7 Stadtverkehr mit dem modifizierten IDM

- Die Kapazität K ist durch den maximal möglichen stationären Fluss ohne Hindernisse (hier Ampeln) definiert. In der Abbildung ist der maximale Fluss durch die *dynamische* Kapazität gegeben. Durch Ablesen (horizontaler Doppelpfeil in der Mitte) ergibt sich:

$$K = Q_{\max} \approx \frac{9 \text{ Fz}}{20 \text{ s}} = 1620 \text{ Fz/h.}$$

- Die Zahl $n(\tau)$ der Fahrzeuge bei verschiedenen Grünzeiten τ sind die Fahrzeuge zwischen den schwarzen Punkten: $n(5) = 1$, $n(15) = 5$, $n(40) = 15$. Der Wert β ist gleich dem Kehrwert der Kapazität,

$$\beta = \frac{1}{K} = \frac{40 \text{ s} - 15 \text{ s}}{15 - 5} = 2.5 \text{ s/Fz},$$



und stimmt mit K im Rahmen der „Messgenauigkeit“ von einem Fahrzeug überein. (Man hätte β auch aus der kleinsten und mittleren Grünzeit berechnen können, was zum selben Ergebnis führt.) Daraus ergibt sich die *Zusatzzeit* für das erste Fahrzeug zu $\tau_0 = 15 \text{ s} - 5\beta = 2.5 \text{ s}$.

3. Steigung des stromabwärtigen Übergangs Warteschlange → anfahrende Fahrzeuge:

$$c_{\text{cong}} = -\frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = -5 \text{ m/s} = -18 \text{ km/h}.$$

4. Wunschgeschwindigkeit als Maximalgeschwindigkeit auf leerer Strecke: $v_0 = 15 \text{ m/s} = 54 \text{ km/h}$. Die effektive Länge ergibt sich aus der Verkehrsdichte im Stau (linker Markierungs-Doppelpfeil): $\rho_{\max} = 1/l_{\text{eff}} = 10 \text{ Fz}/100 \text{ m} = 100 \text{ Fz/km} \Rightarrow l_{\text{eff}} = 10 \text{ m}$. Folgezeit: $T = 1/(\rho_{\max} c_{\text{cong}}) = 2 \text{ s}$. Bestimmung der Beschleunigungen aus maximaler bzw. minimaler Tangentensteigung des ersten Fahrzeugs im unteren Diagramm:

$$a = \frac{20 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2, \quad b = \frac{20 \text{ m/s}}{7 \text{ s}} = 2.9 \text{ m/s}^2.$$

Aufgaben aus Kap. 12

12.1 Statistische Eigenschaften des Wiener-Prozesses. Zur Bestimmung des Erwartungswertes $\langle w(t)w(t') \rangle$ wird die angegebene formale Lösung $w(t)$ der stochastischen Differentialgleichung eingesetzt und es wird dabei ausgenutzt, dass die Reihenfolge von Erwartungsbildung und Integration unerheblich ist (man unterscheide sorgfältig die Argumente t und t' von den Integrations-Laufvariablen t_1 und t_2):

$$\langle w(t)w(t') \rangle = \frac{2}{\tilde{\tau}} \int_{t_1=-\infty}^t \int_{t_2=-\infty}^{t'} e^{-(t-t_1+t'-t_2)/\tilde{\tau}} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle dt_1 dt_2.$$

Setzt man $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)$ und nutzt die Integrationseigenschaft $\int f(t)\delta(t)dt = f(0)$ des δ -Funktionalen zur Eliminierung des Integrals über t_1 aus,³ erhält man ein Einfachintegral

$$\langle w(t)w(t') \rangle = \frac{2}{\tilde{\tau}} \int_{t_2=-\infty}^{t'} e^{(2t_2-t-t')/\tilde{\tau}} dt_2.$$

³ Da nach Voraussetzung $t \geq t'$ und ferner die Integrationseigenschaft des δ -Funktionalen nur gilt, falls das Argument der δ -Funktion an einer Stelle innerhalb des Integrationsintervalls gleich Null wird bzw. $t_1 = t_2$ gilt, kann die δ -Funktion nicht zur Eliminierung des Integrals über t_2 verwendet werden. Dann würde nämlich die andere Integrationsvariable t_1 als Parameter wirken und für t_1 im Bereich $[t', t]$ würde das Integral über t_2 nicht den Wert t_1 enthalten.

Dies kann elementar integriert werden und ergibt

$$\langle w(t)w(t') \rangle = e^{-(t-t')/\tau}.$$

Für den Fall $t < t'$ verläuft die Rechnung analog mit dem Ergebnis $\langle w(t)w(t') \rangle = e^{-(t'-t)/\tau}$. Insgesamt ergibt sich also

$$\langle w(t)w(t') \rangle = e^{-|t-t'|/\tau}.$$

Als Sonderfall ergibt sich $\langle w^2(t) \rangle = 1$. Außerdem ergibt sich direkt aus der formalen Lösung $\langle w \rangle = 0$ und damit die Bedingungen (12.7).

12.2 Auswirkung von Schätzfehlern. Wird der Abstand systematisch um 10% bzw. den Faktor 1.1 überschätzt, verkleinert sich der tatsächliche Abstand im Fließgleichgewicht. Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich

$$1.1s_e = s_0 + vT \quad \Rightarrow \quad s_e = \frac{s_0 + vT}{1.1} = 28.3 \text{ m}$$

anstelle des Abstandes $s_e = 31.1$ m ohne Schätzfehler. Bei einer konstanten Zusatzbeschleunigung $a_z = 0.4 \text{ m/s}^2$ gilt im Fließgleichgewicht bei der durch den LKW vorgegebener Geschwindigkeit

$$\dot{v} = a_z + \frac{\frac{s_e - s_0}{T} - v}{\tau} \stackrel{!}{=} 0,$$

also mit den angegebenen Zahlenwerten $s_e = s_0 + vT - \tau a_z = 30.9$ m.

12.3 Multiantizipation beim IDM. Für das IDM spezialisiert sich Gl. (12.17) zu

$$c \sum_{j=1}^{n_a} a \left(\frac{s_0 + vT}{js} \right)^2 = a \left(\frac{s_0 + vT}{s} \right)^2,$$

woraus $c = 1/(\sum_{j=1}^{n_a} \frac{1}{j^2})$, also Gl. (12.18) folgt. Anstelle der Einführung von c kann man offensichtlich auch die Parameter s_0 und T durch Multiplikation mit einem gemeinsamen Faktor „renormieren“. Dazu wird die linke Seite der obigen Gleichung geschrieben als

$$\sum_{j=1}^{n_a} a \left(\frac{\sqrt{c}s_0 + v\sqrt{c}T}{js} \right)^2$$

und der im Aufgabentext angegebene Faktor \sqrt{c} ist offensichtlich. Übrigens liegt \sqrt{c} im Wertebereich $[\sqrt{6}/\pi, 1] = [0.78, 1]$. Die Parameter werden also nur geringfügig verändert.

Aufgaben aus Kap. 13

13.1 Dynamische Eigenschaften des Nagel-Schreckenberg-Modells. Die Wunschgeschwindigkeit $v_0^{\text{phys}} = v_0 \Delta x / \Delta t$ in physikalischen Einheiten beträgt 135 km/h für $v_0 = 5$ (Autobahn) und 54 km/h für $v_0 = 2$ (Stadtverkehr).

Im deterministischen Modell ist die Beschleunigung gleich $a_{\text{det}} = \Delta x / (\Delta t)^2 = 7.5 \text{ m/s}^2$ und damit

$$\tau_{0 \rightarrow 100} = \frac{v_{\text{phys}}}{a_{\text{det}}} = 3.7 \text{ s}.$$

Im stochastischen Modell wird bei freier Beschleunigung pro Zeitschritt nur mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ die nächste Geschwindigkeitsstufe erreicht. Im Mittel reduziert sich also die Beschleunigung um den Faktor $1 - p$. Damit vergrößert sich die Beschleunigungszeit im Mittel um den Faktor $(1 - p)^{-1}$ auf 6.2 s.

13.2 Annäherung des NSM an eine rote Ampel. Die Annäherung geschieht mit maximaler Geschwindigkeit, bis der „Aktionspunkt“ im Abstand $g = v_0$ von der Haltelinie überfahren wird. Danach erfolgt das Bremsmanöver in ein oder in zwei Schritten: in einem Schritt $v_0 \rightarrow 0$, falls nach Überquerung des Aktionspunktes der Abstand bereits Null beträgt oder in zwei Schritten $v_0 \rightarrow v_1 < v_0 \rightarrow 0$, falls der Abstand nach Überquerung des Aktionspunktes v_1 Zellen beträgt.

13.3 Fundamentaldiagramm des deterministischen NSM. Ohne stochastischen Anteil ist ein Fließgleichgewicht wohldefiniert und durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit

$$v_e(g) = \max(v_0, g)$$

gegeben. Das Fundamentaldiagramm ist also das bereits bekannte dreieckige Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \min \left[V_0 \rho, \frac{1}{T} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right],$$

welches (im physikalischen Raum) durch die drei makroskopischen Parameter

$$V_0^{\text{phys}} = v_0 \Delta x / \Delta t, \quad T^{\text{phys}} = \Delta t, \quad \rho_{\max}^{\text{phys}} = \frac{1}{\Delta x}.$$

charakterisiert ist. Die Folgezeit ist also 1 s und die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Stau $c_{\text{cong}} = -\Delta x / \Delta t = -27 \text{ km/h}$. Im stochastischen Modell liegen die mittleren Flüsse $\langle Q(\rho) \rangle$ in Abhängigkeit der globalen Dichte ρ darunter. Das Diagramm ist nicht mehr dreieckig und auch die Tangentensteigungen an den Extrempunkten sind unterschiedlich (siehe die folgenden beiden Aufgaben):

$$V'_e(0) = (v_0 - p) \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad c_{\text{cong}}(\rho_{\max}) = V'_e(\rho_{\max}) = -(1 - p) \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

13.4 Makroskopische Wunschgeschwindigkeit. Ohne Wechselwirkung fällt bei der Geschwindigkeitsgleichung (13.3) die Begrenzung durch den Abstand g weg. Für $v < v_0$ kann die Geschwindigkeit im nächsten Schritt nur steigen oder (falls für diesen Schritt „Trödeln“ zutrifft) gleich bleiben und für $v = v_0$ nur gleich bleiben oder durch das „Trödeln“ um eine Stufe abnehmen. Die Geschwindigkeit ist also nach hinreichend langer Zeit entweder gleich $v_0 - 1$ oder gleich v_0 : falls $v = v_0$, wird die Geschwindigkeit im nächsten Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit p auf $v_0 - 1$ herabgesetzt oder falls $v = v_0 - 1$, wird die Geschwindigkeit im nächsten Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf v_0 erhöht.

Bei im stochastischen Sinn stationären Verhältnissen ist der Erwartungswert der Geschwindigkeiten konstant.⁴ Setzt man θ gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass $v = v_0$ ist, ergibt dies

$$\langle v(t+1) - v(t) \rangle = -\theta p + (1 - \theta)(1 - p) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \theta = 1 - p$$

und damit

$$\langle v \rangle = \theta v_0 + (1 - \theta)(v_0 - 1) = v_0 - p,$$

also in physikalischen Einheiten die Formel in der Aufgabenstellung.

13.5 Stau-Ausbreitungsgeschwindigkeit. Ausgangspunkt ist eine Warteschlange von Fahrzeugen mit $v_\alpha = 0$ und $g_\alpha = 0$ für $\alpha > 1$, aber $g_\alpha > 0$ für $\alpha = 1$. Es hat also nur der Fahrer des ersten Fahrzeugs eine Lücke vor sich und kann beschleunigen, was mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auch tatsächlich geschieht. Dadurch kann das nächste Fahrzeug im darauffolgenden Zeitschritt beschleunigen, was wieder mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ realisiert wird, und so fort. Der Ort des erstmaligen Beschleunigens pflanzt sich also mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_{\text{cong}} = -(1 - p)\Delta x / \Delta t$ fort.

Aufgaben aus Kap. 14

14.1 Das Stau-Paradoxon. Wir nehmen jeweils zwei versetzte Bereiche derselben Länge L an (vgl. Abbildung in der Aufgabenstellung):

- einen „langsameren“ Bereich 1 mit höherer Dichte,
- einen „schnelleren“ Bereich 2 mit geringerer Dichte, also $\rho_1 > \rho_2$, aber $V_1 < V_2$.

⁴ Diesen Sachverhalt kann man auch als *Master-Gleichung* ausdrücken: Die Bilanz der Wahrscheinlichkeitsströme der Übergänge $v_0 - 1 \rightarrow v_0$ und $v_0 \rightarrow v_0 - 1$ muss gleich Null sein.

Beide Bereiche sind nach Voraussetzung im „gebundenen“ Teil des Fundamental-Diagramms, also $\rho_2 > \rho_c = 1/(l + v_0 T)$ bzw. $V_2 < V_0$. Dann gilt, dass die Bereichsgrenzen abrupte Übergänge (Fronten) darstellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Formel (8.6) gegeben ist,

$$c = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = -\frac{l}{T} = -5 \text{ m/s},$$

wobei die „Staugerade“ $Q(\rho) = (1 - l\rho)/T$ verwendet wurde. Der Zeitanteil, in dem man sich – unabhängig vom Fahrstreifenindex – auf dem jeweils „langsameren“ Fahrstreifen befindet, ist offensichtlich gleich dem Zeitanteil, in dem man sich in Bereichen vom Typ 1 befindet:

$$p_{\text{langamer}} = p_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Hier gibt τ_i die Zeit an, welche man braucht, um einen der sich – entgegen der Fahrtrichtung – bewegenden Bereiche vom Typ i zu durchqueren. Die Relativgeschwindigkeit zu den Übergängen ist also $V_i + |c|$. Damit gilt

$$p_1 = \frac{\frac{L}{V_1 + |c|}}{\frac{L}{V_1 + |c|} + \frac{L}{V_2 + |c|}} = \frac{V_2 + |c|}{V_2 + V_1 + 2|c|}.$$

Zum Beispiel gilt für $V_1 = 0$ und $V_2 = 10 \text{ m/s}$:

$$p_1 = \frac{10 + 5}{10 + 10} = \frac{3}{4}.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% befindet man sich in diesem Fall auf dem langsameren Fahrstreifen – egal, ob man nun wechselt oder nicht!

Alternativ kann man diese Aufgabe auch lösen, indem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass ein beliebig herausgepicktes Auto im Bereich 1 fährt. Dies ist offensichtlich proportional zum Anteil der Fahrzeuge im Bereich 1, welcher – da die beiden Bereiche dieselbe Ausdehnung L haben – durch den Dichtequotienten gegeben ist:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{200}{200 + 200/3} = \frac{3}{4}.$$

14.2 Bremsen vor Lichtsignalanlagen. Zwei Fälle werden unterschieden: (i) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist bei unveränderter Geschwindigkeit möglich. Die Bedingung dafür lautet

$$s < s_1 = v\tau_g.$$

(ii) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist nicht möglich. In diesem Fall wird nach der Reaktionszeit T_r mit konstanter Verzögerung b so gebremst, dass man gerade vor der roten Ampel zum Stehen kommt:

$$s = vT_r + \frac{v^2}{2b}.$$

Der *Worst Case* für den Abstand s bei Gelbwerden der Ampel ist offensichtlich $s = s_1$, denn in diesem Fall würde man bei der Entscheidung „Weiterfahren“ die Ampel gerade beim Umschalten auf Rot passieren. Die resultierende Bremsverzögerung erhält man durch Gleichsetzen:

$$v\tau_g = vT_r + \frac{v^2}{2b}.$$

Nach Kürzen von v erhält man damit

$$b = \frac{v}{2(\tau_g - T_r)} = 3.47 \text{ m/s}^2.$$

Dies ist eine „ganz ordentliche“ Verzögerung, die etwas unterhalb der Verzögerung von 3.86 m/s^2 gemäß der Bremswegregel „Tacho² durch 100“, aber oberhalb der komfortablen Verzögerung von etwa 2 m/s^2 liegt. Die Fahrschulregel und die Mindestgelbzeit sind also konsistent.

14.3 Baustelleneinfahrt. In dieser Situation kann man sowohl das Sicherheitskriterium (14.4) des allgemeinen Spurwechselmodells als auch direkt das Sicherheitskriterium (14.18) des Entscheidungsmodells beim Einfahren auf eine vorfahrtsberechtigte Straße anwenden. Mit den Bezeichnungen von Abb. 14.6 ergibt sich für $b_{\text{safe}} = 0$

$$\hat{s}_h > s_{\text{safe}}(\hat{v}_h, \hat{v}) = s_{\text{opt}}(\hat{v}_h) = \hat{v}_h T = 20 \text{ m}.$$

Im kritischsten Fall wird also angefahren, wenn das Fahrzeug auf der Autobahn nur $s_c = 20 \text{ m}$ entfernt ist. Danach beschleunigt es nach Aufgabenstellung mit $a = 2 \text{ m/s}^2$. Um in dieser Situation einen Auffahrunfall zu vermeiden, muss das Fahrzeug auf der Hauptfahrbahn im Mittel mit der kinematischen Verzögerung

$$b_{\text{kin}} = \frac{\hat{v}_h^2}{2s_c} - a = 8 \text{ m/s}^2$$

bremsen. (Dies ergibt sich durch Anwendung der Bremswegformel $s_{\text{Brems}}(v, b) = v^2/(2b)$ auf die Beschleunigungssumme $b = b_{\text{kin}} + a$ und Auflösen nach b_{kin} .) Der Wert von b_{kin} ist unrealistisch hoch (er entspricht einer Vollbremsung), obwohl das Sicherheitskriterium mit $b_{\text{safe}} = 0$ extrem konservativ angesetzt wurde. Daran

sieht man, dass bei Spurwechsel-Entscheidungen die hier nicht berücksichtigte Geschwindigkeitsdifferenz eine wesentliche Einflussgröße ist.

14.4 Einfahren auf eine vorfahrtsberechtigte Straße. In dieser Situation (Abb. 14.6 mit $\hat{v} = 0$) lautet das Sicherheitskriterium (14.18) für das IDM

$$\hat{s}_h > s_{\text{safe}}^{\text{IDM}}(\hat{v}_h, 0) = \frac{s_0 + v_h T + \frac{v_h^2}{2\sqrt{ab}}}{\sqrt{\frac{a_{\text{free}}(v_h)}{a} + \frac{b_{\text{safe}}}{a}}},$$

bzw. mit $s_0 = 0$ sowie $v_h = v_0$ und $a = b = b_{\text{safe}}$ (dann ist die Wurzel gleich 1)

$$\hat{s}_h > s_{\text{safe}}^{\text{IDM}} = v_h T + \frac{v_h^2}{2b_{\text{safe}}}.$$

Der Mindestabstand entspricht also dem Anhalteweg (Bremsweg zuzüglich des in der Reaktionszeit zurückgelegten Weges) des Fahrzeugs h auf der Hauptfahrbahn, wenn man die Reaktionszeit $T_r = T$ setzt und wenn dieses Fahrzeug mit b_{safe} verzögern würde. Das Sicherheitskriterium ist also konsistent. Als Zahlenwert für $T = 1 \text{ s}$, $b_{\text{safe}} = 2 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 50 \text{ km/h}$ erhält man $s_{\text{safe}}^{\text{IDM}} = 31 \text{ m}$.

Aufgaben aus Kap. 15

15.1 Charakterisierung von Instabilitätsmustern. Die Fahrdynamik ist lokal stabil, da jedes Fahrzeug zum Gleichgewicht zurückfindet (es hält maximal einmal an), aber kolonneninstabil, da sich die Schwingungen von Fahrzeug zu Fahrzeug aufschaukeln. Die Instabilität ist eine konvektive (eine einzige rückwärtslaufende Stauwelle bildet sich), die durch eine große Störung, also nichtlinear, hervorgerufen wurde.

15.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stauwellen in Mikromodellen. Zunächst wird die im mitbewegten System gegebene Geschwindigkeit in ein ortsfestes System transformiert:

$$\tilde{c} = v_e + \tilde{c}_{\text{rel}} = v_e - (s_e + l)v'_e(s_e) = v_e - \frac{v'_e(s_e)}{\rho_e}.$$

Nun wird die mikroskopische Größe $v'_e(s)$ durch den makroskopischen Gradienten $V'_e(\rho)$ ausgedrückt. Mit $v_e(s) = V_e(\rho(s))$ gilt

$$v'_e(s) = \frac{dv_e}{ds} = \frac{dV_e}{d\rho} \frac{d\rho}{ds} = -\frac{V'_e(\rho)}{(s+l)^2} = -\rho^2 V'_e(\rho). \quad (\text{A.9})$$

Also

$$\tilde{c} = v_e - \frac{v'_e(s_e)}{\rho_e} = V_e + \rho_e V'_e(\rho_e) = \frac{d}{d\rho_e}(\rho_e V_e) = Q'_e(\rho_e).$$

15.3 Stabilitätsgrenzen beim Velocity-Difference-Modell

Teilaufgabe 1: Die lokale Stabilität ist gegeben, falls

$$\tilde{a}_v + \tilde{a}_{\Delta v} = -\frac{1}{\tau} - \gamma \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \geq -\frac{1}{\tau} = -0.2 \text{ s}^{-1}.$$

Diese Bedingung ist selbst für geringfügig negative Werte von γ erfüllt, obwohl dies nicht sinnvoll ist. Dann würde man nämlich bei Annäherungen beschleunigen. Insofern reflektiert dieses Ergebnis die allgemeine Erkenntnis, dass als Differentialgleichungen formulierte Modelle bei sinnvoller Parametrisierung immer lokal stabil sind.

Teilaufgabe 2: Für $v < v_0$ (sonst herrscht freier Verkehr und es gibt keinerlei Schwingungen bzw. Instabilitäten) gilt $v'_e(s) = 1/T$ und außerdem $\tilde{a}_v = -1/\tau$ sowie $\tilde{a}_{\Delta v} = -\gamma$. Die Bedingung (15.22) für Schwingungsfreiheit ergibt also

$$\frac{1}{T} \leq \frac{1}{4\tau} (1 + \gamma\tau)^2.$$

Dies liefert eine quadratische (Un-)gleichung für γ mit den Lösungen

$$\gamma = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{2}{\sqrt{T\tau}} = 0.69 \text{ s}^{-1}.$$

Hier wurde berücksichtigt, dass wegen der Bedingung $\gamma \geq 0$ für sinnvolle Modelle nur das positive Vorzeichen relevant ist.

Teilaufgabe 3: Für das Kriterium der Kolonnenstabilität kann man direkt Gl. (15.64) verwenden. Umstellen ergibt

$$\gamma > \frac{1}{T} - \frac{1}{2\tau} = 0.9 \text{ s}^{-1}.$$

Selbst Fahrstrategien, die bei einer Folgefahrt völlig schwingungsfrei sind, können also kolonneninstabil sein (hier im Parameterbereich $0.69 \text{ s}^{-1} < \gamma \leq 0.9 \text{ s}^{-1}$!).

15.4 Stabilität des Optimal-Velocity-Modells im Vergleich zum Payne-Modell.

Das OVM-Kriterium lautet $v'_e(s) \leq 1/(2\tau)$ und das Payne-Kriterium $-V'_e(\rho) \leq 1/(2\rho^2\tau)$. Mit der bereits in Aufgabe 15.2 benötigten Relation (A.9) zwischen $v'_e(s)$ und $V'_e(\rho)$ kann man direkt durch Einsetzen zeigen, dass die Payne- und OVM-Kriterien äquivalent sind:

$$\frac{1}{2\tau} \geq v'_e(s_e) = -\rho_e^2 V'_e(\rho_e(s_e)) \Rightarrow -V'_e(\rho) \leq \frac{1}{2\rho^2\tau}, \text{ q.e.d.}$$

15.5 Stabilitätsbereiche im Payne- und im Kerner-Konhäuser-Modell

Teilaufgabe 1: Das Kriterium für Stabilität beim Payne-Modell lautet $|V'_e(\rho)| < 1/(2\tau\rho^2)$. Aus der gegebenen Gleichgewichtsrelation bekommt man zunächst $V_e(\rho) = Q_e(\rho)/\rho$ und daraus die Ableitung

$$V'_e(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \leq \rho_K, \\ -\frac{1}{\rho^2 T} & \rho > \rho_K, \end{cases}$$

mit $\rho_K = 1/(V_0 T + l_{\text{eff}}) = 20 \text{ Fz/km}$. Damit erhält man wegen $V'_e(\rho) = 0$ uneingeschränkte Stabilität für $\rho < \rho_K$, während für $\rho \geq \rho_K$ die Bedingung

$$\tau < \frac{T}{2}$$

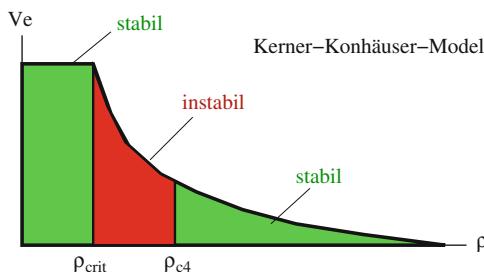
gültig ist. Das Modell ist also für hinreichend (unrealistisch) kleine Anpassungszeiten stabil.

Teilaufgabe 2: Das Stabilitätskriterium für das KK-Modell lautet $(\rho V'_e(\rho))^2 < \theta_0$. Einsetzen der obigen Gleichgewichtsrelation $V_e(\rho)$ ergibt hier wieder uneingeschränkte Stabilität für $\rho < \rho_c = 20 \text{ /km}$. Die Bedingung für die untere Grenze des Instabilitätsbereichs ist damit für alle Werte von θ erfüllt. Für $\rho > \rho_K$ gilt

$$\frac{1}{\rho^2 T^2} < \theta_0.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung an die Geschwindigkeitsvarianz θ_0 für die Dichte $\rho_4 = 50 \text{ /km}$, oberhalb derer das Modell ebenfalls stabil sein soll ($T = 1.1 \text{ s}$):

$$\theta_0 = \frac{1}{\rho_4^2 T^2} = 331 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$



15.6 Stabilität des GKT-Modells. Für hohe Dichten gilt $Q_e \approx 1/T(1 - \rho/\rho_{\max})$ und damit $V'_e(\rho) = -1/(T\rho^2)$. Ohne Antizipation folgt daher aus dem Stabilitätskriterium (15.63)

$$(\rho_e V'_e)^2 - P'_e = \frac{1}{T^2 \rho_e^2} - \sigma_V^2(\rho_e) \leq 0.$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass wegen des konstanten Variationskoeffizienten die Geschwindigkeit $P'_e = \sigma_V^2(\rho_e)$ gilt. Da $(T\rho)^{-2}$ für $\rho \rightarrow \rho_{\max}$ gegen die quadrierte Ausbreitungsgeschwindigkeit c^2 strebt, die Geschwindigkeitsvarianz σ_V^2 aber dann gegen Null geht, kann die Bedingung nicht erfüllt werden. Das GKT ist somit ohne Antizipation kolonneninstabil.

Bei endlicher Antizipationsreichweite s_a sorgt hingegen die negative eckige Klammer des Stabilitätskriteriums (15.63) dafür, dass die Bedingung für hinreichend hohe Dichten erfüllt wird. Die Klammer divergiert nämlich für $\rho \rightarrow \rho_{\max}$ gegen minus unendlich, während der Vorfaktor der Klammer endlich und positiv bleibt.

15.7 Stabilitätsklassen-Diagramm des IDM für andere Werte von b und s_0 . Im Folgenden werden die skalierten einheitenlosen Variablen und Parameter mit einer Tilde gekennzeichnet. Aus der Aufgabenstellung gilt für den Übergang von unskalierten zu skalierten Orts- und Zeitvariablen sowie den daraus abgeleiteten Größen:

$$t = \sqrt{\frac{s_0}{b}} \tilde{t}, \quad x = s_0 \tilde{x}, \quad v = \sqrt{bs_0} \tilde{v}, \quad \frac{dv}{dt} = b \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}}.$$

Setzt man dies in die IDM-Gleichungen ein, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} &= \frac{a}{b} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{bs_0}\tilde{v}}{v_0} \right)^4 - \left(\frac{\tilde{s}^*}{\tilde{s}} \right)^2 \right], \\ \tilde{s}^* &= \frac{s^*}{s_0} = 1 + \sqrt{\frac{b}{s_0}} T \tilde{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\tilde{v} \Delta \tilde{v}}{2}. \end{aligned}$$

Die Vorfaktoren dieser Gleichungen sind konsequenterweise auch einheitenlos und kommen nur in drei Kombinationen vor. Diese kann man zu drei neuen einheitenlosen Parametern zusammenfassen:

$$\tilde{v}_0 = \frac{v_0}{\sqrt{bs_0}}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{b}, \quad \tilde{T} = T \sqrt{\frac{b}{s_0}}.$$

Damit werden die skalierten IDM-Gleichungen

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{a} \left[1 - \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{v}_0} \right)^4 - \left(\frac{\tilde{s}^*}{\tilde{s}} \right)^2 \right], \quad \tilde{s}^* = 1 + \tilde{v}\tilde{T} - \frac{\tilde{v}\Delta\tilde{v}}{2\sqrt{\tilde{a}}}.$$

Ändert man die IDM-Parameter so, dass \tilde{v}_0 , \tilde{a} und \tilde{T} unverändert bleiben, so ändern sich die skalierten IDM-Gleichungen nicht und die Dynamik bleibt dementsprechend identisch. Damit hat man das zweidimensionale Stabilitätsklassendiagramm in Abb. 15.11 ohne weitere Berechnungen auf ein Vierdimensionales erweitert und es gelten die Aussagen der Aufgabenstellung, die zu beweisen waren.

Nur der fünfte IDM-Parameter, die Wunschgeschwindigkeit, kann nicht unabhängig geändert werden. Da die Stabilitätsklassen auch vom makroskopischen Fundamentaldiagramm $Q_e(\rho)$ abhängen, muss man zusätzlich die Fahrzeulgänge mit s_0 skalieren. Nur dann bleibt das skalierte Fundamentaldiagramm unverändert. Das mikroskopische Fundamentaldiagramm $\tilde{s}_e(\tilde{v})$ hingegen hängt nicht von der Fahrzeulgänge ab.

15.8 Fundamentaldiagramm mit Hysterese

Teilaufgabe 1: Maximaler Fluss bei freiem Verkehr

$$Q_{\max}^{\text{free}} = v_0 \rho_{\max}^{\text{free}} = 2400 \text{ Fz/h.}$$

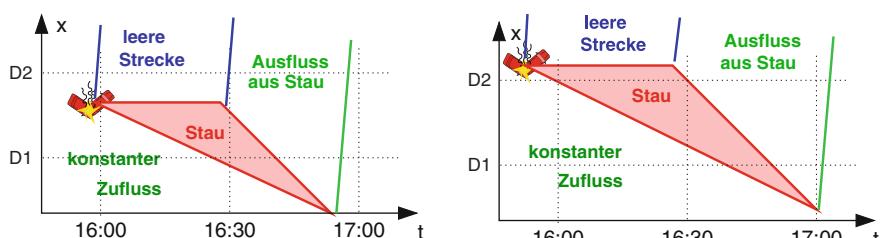
Teilaufgabe 2: Der gestaute Zweig entspricht dem gestauten Zweig des dreieckigen Fundamentaldiagramms des Section-Based-Modells: $Q_{\text{cong}}(\rho) = 1/T(1 - \rho l_{\text{eff}})$ mit $l_{\text{eff}} = l + s_0 = 6.6 \text{ m}$. Der freie Zweig wird an derselben Stelle geschnitten wie bei einem dreieckigen Fundamentaldiagramm ohne Hysterese, also bei

$$\rho_{\min}^{\text{cong}} = \rho_{\text{out}} = \frac{1}{v_0 T + l_{\text{eff}}} = 16.67 \text{ Fz/km.}$$

Teilaufgaben 3 und 4: Ausfluss aus dem Stau $Q_{\text{out}} = v_0 \rho_{\text{out}} = 2000 \text{ Fz/h.}$ Der *capacity drop* ist damit gegeben durch

$$\Delta Q = Q_{\max} - Q_{\text{out}} = 400 \text{ Fz/h. bzw. } 16.7\%.$$

Die Dichte des Ausflussbereiches ist dieselbe wie die minimale Dichte des gebundenen Verkehrs, also 16.67 Fz/h. Im Dichtebereich $\rho \in [\rho_{\text{out}}, \rho_{\max}^{\text{free}}]$, also innerhalb



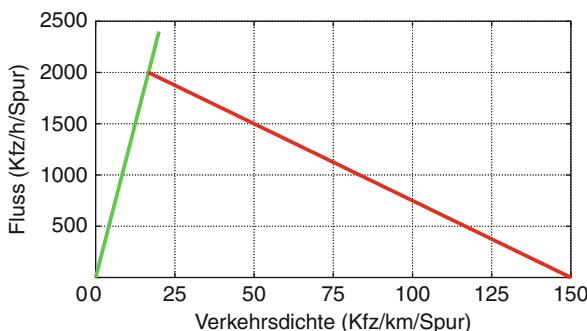
[16.67 Fz/h, 20 Fz/h] können zwei Werte des Flusses auftreten, die dem freien bzw. gestauten Zweig entsprechen.

Aufgaben aus Kap. 18

18.1 Reisezeit aus kumulierten Zähldaten. Die Methode der *N-Curves* funktioniert exakt auf einer Richtungsfahrbahn ohne Zu- und Abfahrten, wenn die Detektoren fehlerfrei zählen und es weder Fahrstreifenwechsel noch Überholvorgänge gibt. Ohne FC-Daten kann man heuristisch vorgehen: Sprechen andere Indizien (Geschwindigkeitsdaten) für freien Verkehr und bauen sich Unterschiede zwischen den *N*-Werten der verschiedenen Querschnitte nur langsam im Rahmen der Messfehler auf, werden die Unterschiede fortlaufend, beispielsweise mittels Gl. (18.9) unter Annahme einer zu freiem Verkehr gehörigen Dichte Q/V zurückgesetzt. Ändern sich die Unterschiede $N_i - N_{i+1}$ jedoch rapide, baut sich ein Stau auf und man hat bis zum Stauende keinerlei Korrekturmöglichkeit.

18.2 Reisezeitbestimmung aus aggregierten Detektordaten

Teilaufgabe 1: Die folgende Abbildung verdeutlicht die alternativen Verkehrssituationen: Der fehlende Fluss an Detektor D2 zwischen 16:00 und 16:30 Uhr kann entweder durch eine „leere“ Fahrbahn als Folge einer unfallbedingten Totalsperrung stromaufwärts von D2 (links) oder durch Stillstand der Fahrzeuge in Folge einer Totalsperrung stromabwärts von D2 (rechts) entstehen.



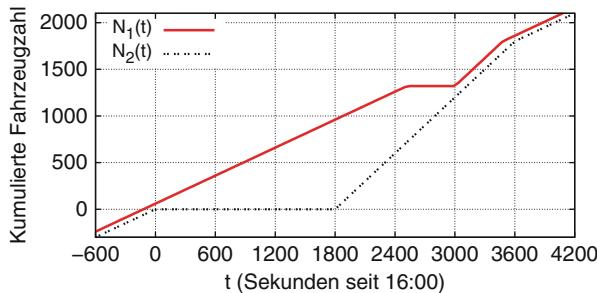
Teilaufgabe 2: Für das Durchfahren des 4 km langen Abschnitts zwischen D1 und D2 mit Geschwindigkeit von 120 km/h werden $\tau_{12} = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$ benötigt. In diesem Zeitintervall sind an D1 $\Delta n = 60$ Fahrzeuge vorbeigefahren. Setzt man t gleich der Zeit in Sekunden seit 16:00 Uhr und die kumulierte Fahrzeugzahl an D1 zu dieser Zeit $= 0$, $N_1(0) = 0$, gilt $N_2(0) = 60$. Die Bestimmung von $N_1(t)$ und $N_2(t)$ als Funktion der Zeit geschieht durch stückweise Integration der jeweiligen Flüsse. Damit gilt für D1

$$N_1(t) = \begin{cases} 60 + 0.5 t & t < 2520, \\ 1320 & 2520 \leq t < 3000, \\ 1320 + (t - 3000) = t - 1680 & 3000 \leq t < 3480, \\ 1800 + 0.5(t - 3480) = 60 + 0.5t & t \geq 3480. \end{cases}$$

Die kumulierte Fahrzeugzahl für D2 ist gegeben durch

$$N_2(t) = \begin{cases} 0.5t & t < 0, \\ 0 & 0 \leq t < 1800, \\ t - 1800 & 1800 \leq t < 3600, \\ 0.5t & t \geq 3600. \end{cases}$$

Teilaufgabe 3: Skizze der kumulierten Fahrzeugzahlen:



Die Zeit $\tau_{12}(t)$ der zur Zeit $t = 2400$ am Streckenende *ankommenden* Fahrzeuge ist gleich dem horizontalen Abstand der beiden *N-curves* für $N_2(2400) = 600$: $\tau_{12}(t) \approx 1300$ (genau: 1320, siehe unten). Die Zeit $\tilde{\tau}_{12}(t)$ der zur Zeit $t = 2400$ in das Streckenintervall *einfahrenden* Fahrzeuge ist gleich dem horizontalen Abstand der beiden *N-curves* für $N_1(2400) = 1250$: $\tilde{\tau}_{12}(t) \approx 600$ (genau: 660).

Teilaufgabe 4: Der Abbildung mit den *N-curves* entnimmt man, dass für die Berechnung von $\tilde{\tau}_{12}(t)$ im Intervall $-120 \leq t < 2520$ für $N_1(t)$ der erste Bereich und für $N_2(t)$ der dritte Bereich genommen werden muss:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_2(t + \tilde{\tau}_{12}) \\ 60 + \frac{t}{2} &= (t + \tilde{\tau}_{12}) - 1800 \Rightarrow \quad \tilde{\tau}_{12} = 1860 - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Für $t < -120$ ist $\tilde{\tau}_{12}$ gleich der Reisezeit für freien Verkehr, also 2 Minuten bzw. $\tilde{\tau}_{12} = 120$. Bei $t = -120$ gibt es also einen Sprung von 120 auf 1920, also um 1800 s bzw. 30 min. Das entspricht dem letzten Fahrzeug, welches gerade noch der Blockade entkommen ist und dem ersten danach, welches die vollen 30 min der Sperrung warten muss.

Für $\tau_{12}(t)$ im Intervall $1\,800 \leq t < 3\,120$ gilt ebenfalls für $N_1(t)$ der erste Bereich und für $N_2(t)$ der dritte Bereich:

$$\begin{aligned} N_1(t - \tau_{12}) &= N_2(t) \\ 60 + \frac{1}{2}(t - \tau_{12}) &= t - 1\,800 \Rightarrow \quad \tau_{12} = 3\,720 \text{ s} - t. \end{aligned}$$

Aufgaben aus Kap. 19

19.1 Lesen eines Drehzahl-Leistungs-Motorkennfeldes. Vollgas entspricht angehert der obersten „Höhenlinie“ konstanten Wirkungsgrades, also 70 kW bei 3 000 Umdrehungen. Bei einer Leistungsanforderung von 60 kW sind 3 300 Umdrehungen (bzw. der daran am nächsten liegende Gang) verbrauchsoptimal.

19.2 Lesen eines Drehzahl-Mitteldruck-Motorkennfeldes. (i) 60 kW; (ii) Eine Drehzahl von $2\,600 \text{ min}^{-1}$ ergibt einen spezifischen Verbrauch unterhalb von 375 ml/kWh, während er bei $4\,000 \text{ min}^{-1}$ oberhalb von 400 ml/kWh liegt. Erstes ist also besser.

19.3 Stauvermeidung=Kraftstoffersparnis? Bei hohen Geschwindigkeiten steigt der Verbrauch nahezu quadratisch an, so dass die Ersparnis bei Stauvermeidung geringer wird und sogar nahe Null gehen kann.

19.4 Einflussfaktoren auf den Treibstoffverbrauch. Geht man von einem konstanten Wirkungsgrad aus, erhält man aus (19.11) mit (19.8), (19.3) und (19.2) für den streckenbezogenen Verbrauch:

$$C_x = \frac{dC}{dx} = C_{\text{spez}} \max \left[0, \left(\frac{P_0}{v} + m\dot{v} + (\mu + \beta)mg + \frac{1}{2}c_w\rho Av^2 \right) \right]. \quad (\text{A.10})$$

1. *Klimaanlagen:* Ja, denn die durch die Klimaanlage zusätzlich benötigte Leistung ΔP_0 wird zur Grundeistung P_0 addiert, so dass die Verbrauchserhohung $\Delta C_x = C_{\text{spez}}\Delta P_0/v$ umso höher wird, je niedriger die Geschwindigkeit ist. (Zahlenwerte bei $\Delta P_0 = 4 \text{ kW}$: 3 l/100 km bei 40 km/h und 1.5 l/100 km bei 80 km/h)

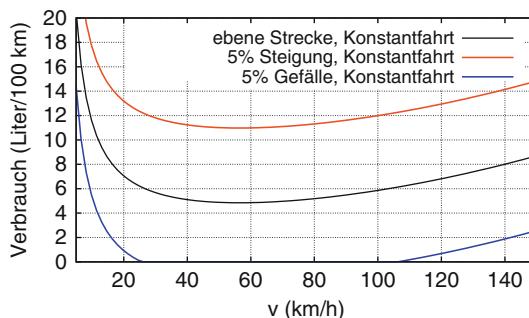
2. *Dachgepäckträger:* Nein, denn der Dachträger erhöht den c_w Wert und die streckenbezogene Verbrauchserhohung $\Delta C_x = C_{\text{spez}}\Delta c_w\rho Av^2/2$ wächst mit dem *Quadrat* der Geschwindigkeit. (Zahlenwerte 0.4 l/100 km bei 80 km/h und 1.6 l/100 km bei 160 km/h)

3. *Bergab-Fahrt:* Nein, denn mit eingelegtem Gang ist die Schubabschaltung aktiv und es wird weniger Kraftstoff verbraucht, sobald $F < 0$ und kein Kraftstoff, wenn $F < -P_0/v$. Bei Leerlauf kann die Schubabschaltung nicht wirken und der Verbrauch pro Streckeneinheit ist $\Delta C_x = C_{\text{spez}}P_0/v$. (Zahlenwerte bei 50 km/h:

Leerlaufverbrauch 1.6 l/100 km; Gefälle, bei dem der Fahrwiderstand=0 ist: -2.5% ; Gefälle, ab dem die Schubabschaltung voll wirksam ist und der Verbrauch gegen Null geht: -4.0%)

4. *Tankfüllung:* Nein. Die mittlere Massen-Ersparnis bei Fahrt zwischen halber Tankfüllung und leerem Tank (mittlere Tankfüllung also ein Viertel, 15 l) und Ausnutzen des ganzen Tanks (im Mittel halbe Tankfüllung, 30 l) entspricht einer mittleren Massen-Ersparnis Δm von weniger als 15 kg (da die spezifische Masse kleiner als 1 kg/l ist). Die resultierende Verringerung des mittleren Verbrauchs bei Konstantfahrt beträgt $\Delta C_x = -C_{\text{spez}} \Delta mg \mu < 0.024 \text{ l}/100 \text{ km}$, ist also unabhängig von der Geschwindigkeit vernachlässigbar.

5. *Tempo 30- bzw. Tempo 50-Zonen:* Nein, bei derart niedrigen Geschwindigkeiten steigt C_x schon wieder. Mit Gl. (A.10) erhält man (vgl. die Abbildung) bei Tempo 30 einen Verbrauch von 5.7 l/100 km und bei 50 km/h einen Verbrauch von 4.9 l/100 km. Bei Tempo 30 verbraucht man also bereits wieder mehr, nicht weniger Treibstoff.



6. *Tempo 130 statt Tempo 150:* Ja, da der Luftwiderstand quadratisch eingeht (vgl. die Abbildung): Verbrauch bei 130 km/h: 7.4 l/100 km, und bei 150 km/h: 8.7 l/100 km.

19.5 Treibstoffverbrauch „Autobahn gegenüber Pass-Straße“. Auf der Autobahn werden bei einer konstanten Geschwindigkeit von 150 km/h (vgl. Lösung 19.4) 8.7 l/100 km verbraucht.

Auf der Pass-Straße wird nur während der Fahrt bergauf Treibstoff verbraucht. Mit Gl. (A.10) erhält man für die Bergauffahrt ($\beta = 0.08$) einen Verbrauch von 14.8 l/100 km. Der Abbildung in der Lösung von Aufgabe 19.4 entnimmt man, dass 8% Steigung bei weitem für eine Motorbremse ausreicht, so dass sich der Gesamtverbrauch bei kompletter Passbefahrung halbiert auf 7.4 l/100 km. Trotz der durchaus beträchtlichen Steigung wird also am Pass weniger Treibstoff verbraucht! (Die Verhältnisse kehren sich ab 10% Steigung oder bei langsameren Geschwindigkeiten auf der Autobahn um.)

19.6 Treibstoff- und CO₂-Ersparnis durch Entfernen von Stoppschildern. Zunächst einmal wird mit der Gleichung in Aufgabe 19.4 der Verbrauch auf der $L = 500$ m langen Strecke zwischen zwei Kreuzungen ohne Stoppschilder, also bei freier Fahrt mit $v_0 = 16$ m/s errechnet:

$$C_{\text{frei}} = LC_x = 26.5 \text{ ml.}$$

Für den Fall von Stopp-Kreuzungen wird die Verbrauchsberechnung in drei Etappen vorgenommen: Beschleunigen von 0 auf v_0 , Konstantfahrt und Abbremsen zum Stillstand.

Etappe 1: Beschleunigen. Mit $\dot{v} = a = 2 \text{ m/s}^2$ beträgt die Beschleunigungszeit $t_a = 8 \text{ s}$ und die Beschleunigungsstrecke $L_a = v_0^2/2a = 64 \text{ m}$. Zur Verbrauchsberechnung muss man auf jeden Fall explizit integrieren. Da man sinnvollerweise über die Zeit und nicht über die Strecke integriert, kommt Gl. (A.10) nicht als Integrand in Frage, sondern direkt die Verbrauchsrate (19.7). Setzt man wieder Gln. (19.3) und (19.2) ein, erhält man in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der Beschleunigung

$$\frac{dC}{dt} = \dot{C}(v, \dot{v}) = C_{\text{spez}} \left(P_0 + m\dot{v}v + (\mu + \beta)mvgv + \frac{1}{2}c_w\rho Av^3 \right). \quad (\text{A.11})$$

Für das Integral über die Beschleunigungszeit von t_a muss man berücksichtigen, dass sich $v = at$ mit der Zeit ändert:

$$\begin{aligned} C_{\text{acc}} &= \int_0^{t_a} \dot{C}(v(t), \dot{v}(t)) dt = \int_0^{t_a} \dot{C}(at, a) dt \\ &= C_{\text{spez}} \left[P_0 t_a + \int_0^{t_a} \left(ma^2t + \mu mgat + \frac{1}{2}c_w\rho_L Aa^2t^2 \right) dt \right] \\ &= C_{\text{spez}} \left[P_0 t_a + \frac{1}{2}ma(a + \mu g)t_a^2 + \frac{1}{8}c_w\rho_L Aa^3t_a^4 \right]. \end{aligned}$$

Mit $t_a = v_0/a$ und $L_a = \frac{1}{2}at_a^2$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$C_{\text{acc}} = C_{\text{spez}} \left[P_0 t_a + \frac{1}{2}mv_0^2 + m\mu gL_a + \frac{1}{4}c_w\rho_L Av_0^2 L_a \right] = 20.6 \text{ ml.}$$

Die Terme in den eckigen Klammern haben folgende Bedeutungen: (i) $P_0 t_a$ ist die Arbeit („Leistung-Zeit“) durch die konstante Grundleistung, (ii) $\frac{1}{2}mv_0^2$ ist die durch das Beschleunigen gewonnene kinetische Energie, (iii) $m\mu gL_a$ ist die durch die Festkörper- und Rollreibung „verbrauchte“ Arbeit („Kraft mal Weg“ mit der Reibungskraft $mg\mu$), (iv) $\frac{1}{4}c_w\rho_L Av_0^2 L_a$ ist die durch den Luftwiderstand aufzuwen-

dende Arbeit, welche gleich der Hälfte der Arbeit bei konstanter Geschwindigkeit v_0 ist („Kraft mal Weg“ mit der Luftwiderstandskraft $\frac{1}{2}c_w\rho_LA v_0^2$).

Etappe 2: Konstantfahrt. Diese findet auf einer Strecke $L - L_a - L_b = 372$ m statt, da die Bremsverzögerung betragsmäßig gleich der Beschleunigung ist und damit der Bremsweg ebenfalls $L_b = L_a = 64$ m. Auf dieser Etappe beträgt der Verbrauch also

$$C_{\text{const}} = (L - L_a - L_b)C_x(v_0, \dot{v} = 0) = 19.7 \text{ ml.}$$

Etappe 3: Abbremsen. Hier wird keinerlei Treibstoff verbraucht, $C_{\text{brake}} = 0$.

Ergebnis: Insgesamt verbraucht man also während eines Stop&Go-Zyklus zwischen zwei Kreuzungen die Menge $C_{\text{acc}} + C_{\text{const}} + C_{\text{brake}} = 40.2$ ml, während bei freier Fahrt der Verbrauch $C_{\text{free}} = 26.5$ ml betragen würde. Die Ersparnis (etwa 35%) ist also enorm.

19.7 Treibstoffverbrauch mit dem OVM

Teilaufgabe 1: Die Beschleunigung des OVM auf freier Strecke beträgt $\dot{v} = (v_0 - v)/\tau$, hat also den maximalen Wert bei $v = 0$. Bei vorgegebener maximaler Beschleunigung $a = 2 \text{ m/s}^2$ ergibt sich also $\tau = v_0/a = 16.67$ s. (Bei diesen hohen Werten ist das OVM allerdings extrem instabil und kann nicht zur Modellierung von Folgefahrten verwendet werden.)

Teilaufgabe 2: Die momentane Antriebsleistung $P(v) = P_0 + vF(v)$ wird direkt mit (19.3) und (19.2) berechnet, wobei bei Beschleunigung die Maximums-Bedingung wegfällt:

$$P(v, \dot{v}) = \frac{\dot{C}(v, \dot{v})}{C_{\text{spez}}} = P_0 + m\dot{v}v + (\mu + \beta)mgv + \frac{1}{2}c_w\rho Av^3.$$

Setzt man aus dem OVM die freie Beschleunigung $\dot{v} = (v_0 - v)/\tau$ ein, erhält man $P(v)_{\text{OVM}} = A_0 + A_1v + A_2v^2 + A_3v^3$ mit

$$\begin{aligned} A_0 &= P_0 = 3 \text{ kW}, & A_1 &= m \left(g\mu + \frac{v_0}{\tau} \right) = 3294 \text{ W s/m}, \\ A_2 &= -\frac{m}{\tau} = -90 \text{ W (s/m)}^2, & A_3 &= \frac{1}{2}c_w\rho_LA = 0.39 \text{ W (s/m)}^3. \end{aligned}$$

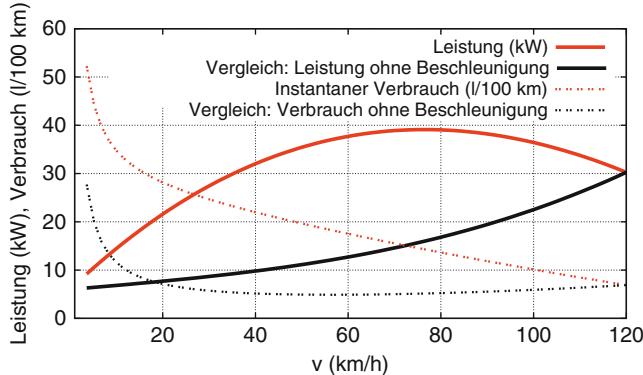
Die maximale Leistung und die Geschwindigkeit, bei der diese notwendig ist, erhält man durch Ableiten der Antriebsleistung nach der Geschwindigkeit:

$$\frac{dP_a}{dv} = A_1 + 2A_2v + 3A_3v^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei positive Lösungen mit den dazugehörigen Leistungen $P_a(v)$:

$$v_1 = 132.6 \text{ m/s} = 477.4 \text{ km/h}, \quad P_a(v_1^*) = -233 \text{ kW}, \\ v_2 = 21.2 \text{ m/s} = 76.4 \text{ km/h}, \quad P_a(v_2^*) = 36.1 \text{ kW}.$$

Hier ist die zweite Lösung die richtige, da die erste wegen der negativen Leistung offensichtlich unphysikalisch ist. Die maximale Leistung wird also während des Beschleunigungsvorgangs bei 76 km/h erreicht und beträgt 36.1 kW.



19.8 LKW an Steigungsstrecken

1. Ebene Strecke. Mit (19.3) und (19.2) gilt für das Tempolimit $v = v_{\text{limit}} = 80 \text{ km/h}$

$$P_a = P - P_0 = vF(v) = \mu mgv + \frac{1}{2}c_w\rho_L A v^3 = 253.3 \text{ kW} + 57.1 \text{ kW} = 310 \text{ kW}.$$

2. Anfangsverzögerung. Beim Fahrwiderstand F muss nun auch noch die Trägheitskraft $m\dot{v}$ und die Hangabtriebskraft $mg\beta$ berücksichtigt werden. Nach (19.3) und (19.2) gilt daher nun

$$P_a = (\mu g + \beta g + \dot{v})mv + \frac{1}{2}c_w\rho_L A v^3.$$

Am Anfang der Steigung ist der Wert der Geschwindigkeit derselbe wie im ersten Aufgabenteil. Außerdem ist nach der Aufgabenstellung die Antriebsleistung P_a unverändert. Damit erhält man

$$\beta g + \dot{v} = 0 \Rightarrow \dot{v} = -\beta g = \begin{cases} -0.5 \text{ m/s}^2 & \text{bei } 5\% \text{ Steigung,} \\ -0.4 \text{ m/s}^2 & \text{bei } 4\% \text{ Steigung.} \end{cases}$$

Die Endgeschwindigkeit berechnet sich mit derselben Formel für P_a , indem man $\dot{v} = 0$ setzt und, wegen des zu vernachlässigenden Luftwiderstandes, $c_w = 0$,

$$P_a = (\mu + \beta)gm v \Rightarrow v_\infty = \frac{P_a}{(\mu + \beta)gm} = \begin{cases} 10.2 \text{ m/s bei } 5\% \text{ Steigung,} \\ 11.7 \text{ m/s bei } 4\% \text{ Steigung.} \end{cases}$$

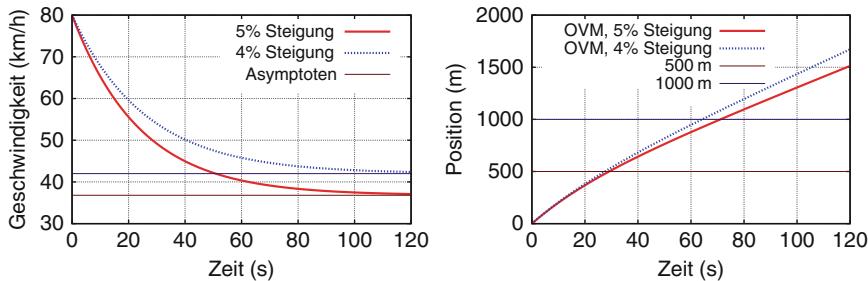
3. Endgeschwindigkeit und OVM-Parameter. Da die Geschwindigkeit des OVM sich bei leerer Strecke der „Wunschgeschwindigkeit“ v_0 annähert, ist $v_0 = v_{\text{infty}}$. Die anfängliche Beschleunigung bei $t = 0$ des OVM ist gegeben durch $\dot{v} = (v_0 - v_{\text{limit}})/\tau$, also $\tau = (v_0 - v_{\text{limit}})/\dot{v}$. Dies ergibt

$$\tau = \begin{cases} 24.0 \text{ s bei } 5\% \text{ Steigung,} \\ 26.4 \text{ s bei } 4\% \text{ Steigung.} \end{cases}$$

Teilaufgabe 4: Zu lösen ist die inhomogene Differentialgleichung $\dot{v} = (v_0 - v)/\tau$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = v_{\text{limit}}$. Die Vorgehensweise beim Lösen dieser Differentialgleichung wurde bereits in Aufgabe 10.1 gezeigt. Der einzige Unterschied hier ist eine endliche Anfangsgeschwindigkeit, was zu anderen Integrationskonstanten führt. Man erhält (vgl. auch die folgende Abbildung)

$$v(t) = v_0 + (v(0) - v_0) e^{-t/\tau},$$

$$x(t) = v_0(t - \tau) + v(0)\tau - (v(0) - v_0) \tau e^{-t/\tau}.$$



Teilaufgabe 5: Steigung 5%, Länge $L = 500$ m. Mit den angegebenen Modellparametern ergibt sich zur Zeit $t = t_1 = 29.1$ s:

$$v(t_1) = 13.8 \text{ m/s} = 49.8 \text{ km/h.}$$

Probe zurückgelegte Strecke: $x(t_1) = 500.5$ m. Analog ergibt sich für Steigung 2 bei $t = t_2 = 64.2$ s:

$$v(t_2) = 12.6 \text{ m/s} = 45.2 \text{ km/h.}$$

Probe zurückgelegte Strecke: $x(t_2) = 1000.2$ m.

Diskussion: Obwohl die 500 m lange Steigung steiler ist, werden auf ihr die LKW nicht so langsam wie auf der flacheren 1000 m langen Steigung. Deshalb ist es

sinnvoll, die Obergrenzen von Steigungen auf hinreichend lange gleitende Mittel zu beziehen. In der Tat wurde im Jahre 2008 im Handbuch für die Bemessung von Straßenverkehrsanlagen (HBS) diese Länge von 500 m auf 1 000 m heraufgesetzt.

Sachverzeichnis

A

- Abfluss, 64
- Abstand, 9, 140
 - Brutto-, 14
 - Netto-, 15, 143, 168
- Abstandsregel, 170
- Abszisse, 8
- Adaptive Cruise Control (ACC), 54, 162, 173, 294
- Adaptive Smoothing Method (ASM), 40, 257, 262
- Aggregierung, 54
- Aktualisierungsvorschrift, *siehe* Lösungsverfahren, numerisches
- Aktualisierungszeitschritt, 90, 125, 131, 149–150, 159, 175
- Ampel, *siehe* Lichtsignalanlage
- Ampelsteuerung, 3
- Anfangsbedingungen, 77, 109, 215, 272
- Angebot, 52, 90, 95, 99
- Anhalten, 206
- Anhalteweg, 153, 157
- Anpassungsterm, 120, 133, 226
- Anpassungszeit, 123, 144, 159, 163, 230
- Anreizkriterium, 199
 - MOBIL-, 202
- Antizipation, 54, 120
 - räumliche, 174
 - zeitliche, 173
- Antriebsleistung, 287, 359
- Arbeit, 358
- arithmetisches Mittel, 16
- Auffahrt, 65, 258, 292
- Aufmerksamkeitsspanne, 175
- Autokorrelationsfunktion, 178
- Automat
 - zellulärer, *siehe* Modell
- Average-speed model, 275

B

- Bando-Modell, *siehe* Optimal-Velocity-Modell (OVM)
- Belegungsgrad, 15, 23
- Beschleunigungsrauschen, 179, 183, 185, 199
- Betriebsleistung, 278
- Bewegungsgleichung, 89, 99, 272
- Boltzmann, Ludwig, 128
- Bottleneck, *siehe* Engstelle moving, 27
- Bottleneck strength, *siehe* Engstellenstärke
- Braess, Paradoxon von, 289
- Bremswegregel, 348

C

- CAN-Bus, 8
- Capacity drop, 25, 31, 33, 167, 215, 243, 258
- Capacity restraint (CR-) Funktion, 56
- Car-to-car communication, 294
- Cell-Transmission-Modell (CTM), *siehe* Modell
- Cellular automaton (CA), *siehe* Modell
- Coffeemeter, 299
- Cole-Hopf-Transformation, 109
- Conservation equation, *siehe* flusserhaltende Form
- Control parameter, *siehe* Steuerparameter
- Coupled map, *siehe* iterierte Abbildung
- Courant-Friedrichs-Lowy- (CFL-) Stabilitätsbedingungen, 133
- cw-Wert, 278

D

- Daten
 - aggregierte, 15
 - makroskopische, 15
- Datenfusion, 45
- Deltafunktion, Diracsche, 178, 343
- Detektor

- Querschnitts-, 16
- stationärer, 20
- virtueller, 54, 125, 146, 271
- Dichte, *siehe* Verkehrsdichte
- Differentialgleichung
 - hyperbolische partielle, 129
 - Delay-, 175
 - gewöhnliche, 55, 140
 - partielle, 55, 98, 115
 - stochastische, 178
- Differenzengleichung, 73
- Diffusion
 - numerische, 90, 134, 230
- Diffusionskonstante, 109, 119
- Diffusionsterm, 109, 119, 133
- Disaggregierung, 54
- Dispersion, 81, 123, 135, 236
- Dispersion fan, 76
- Downwind-Verfahren, 132
- Drei-Phasen-Theorie, 192, 249
- E**
 - Einbiegen, 207
 - Einstein, Albert, 119
 - Emission-factor model, *siehe* Verbrauchsmodell, makroskopisches
 - Emissionsfaktor, 275
 - Engstelle, 81, 89–90, 243
 - aktivierte, 247, 257–258
 - flusserhaltende, 90
 - klassische, 91
 - permanente, 26, 258
 - temporäre, 26, 80, 258, 264
 - verhaltensinduzierte, 91, 258
 - Engstellenstärke, 91, 93, 244
 - Erwartungswert, 16
 - Eulersche Darstellung, 68, 116
- F**
 - Fahrer-Fahrzeug-Einheit, 2, 58, 139
 - Fahrer-Kollektiv, 28, 116
 - Fahrerassistenzsystem, 294
 - Fahrerinformationssystem, 294
 - Fahrstrategie, 294
 - Fahrstreifensperrung, 66, 91, 174, 258, 291
 - Fahrstreifenwechselrate, 10
 - Fahrwiderstand, 278
 - Fahrzeug
 - virtuelles, 146, 171
 - Fahrzeug-Fahrzeug-Kommunikation, 294
 - Fahrzeug-Infrastruktur-Kommunikation, 294
 - Fahrzeugdynamik, 3, 197
 - Fahrzeugfolgemodell, *siehe* Modell
 - Fahrzeulgänge, 13, 181
- effektive, 83, 112, 188
- mittlere, 23, 33
- Faltung, 37
- finite Differenzen, 128
- Finite-size effects, 237
- First-order model, *siehe* Modell
- Fließgleichgewicht, 142, 147, 168, 191
- Floating-Car-Daten (FCD), 7, 45, 269
- Floating-Phone-Daten, 45, 294
- Flow-conserving bottleneck, *siehe* Engstelle, flusserhaltende
- Fluss, *siehe* Verkehrsfluss
- flusserhaltende Form, 130
- Folgezeit, 88, 145, 159, 163, 225, 294
 - Brutto-, 9, 20, 31
 - Netto-, 33, 84
- Fouriertransformation, 234
- Freigabezeit, 94
- Full-Velocity-Difference-Modell (FVDM),
 - siehe* Modell
- Fundamentaldiagramm, 32, 73
 - dreieckiges, 82
 - freier Zweig, 83
 - gestauter Zweig, 83, 243
 - mikroskopisches, 143
- Funktional, 178, 298
- Fußgänger, 58, 83, 194
- G**
 - Gap-Acceptance-Modell, 203
 - Gaskinetic-Based-Traffic-Modell (GKT), *siehe* Modell
- Geschwindigkeit
 - Ausbreitungs-, 41, 82, 132, 190, 222, 262
 - freie, 28
 - optimale, 144
 - Stauwellen-, 41, 265
 - synchronisierte, 30
 - Verteilung, 29
 - Wunsch-, 28, 32, 85, 144, 155
- Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm, 28
- Geschwindigkeitsanpassungszeit, *siehe* Anpassungszeit
- Geschwindigkeitsmittel
 - arithmetisches, 15
 - harmonisches, 16
- Geschwindigkeitstrichter, 290
- Geschwindigkeitsvarianz, 16
- getriebene Teilchen, 142
- Gipps-Modell, *siehe* Modell
- GKT-Modell, *siehe* Modell
- Glättungsverfahren, 40
- Gleichgewichtsannahme, 73

- Godunov-Verfahren, 132
 Grüne Welle, 105
 Gravitationskonstante, 287
 Greens-Funktion, 110
 Größe
 extensive, 62
 intensive, 62
- H**
 Heuristik, 180
 Höflichkeitsfaktor, 202
 Homo Oeconomicus, 199
 Homogeneous Congested Traffic (HCT), 247, 252
 Homogeneous Synchronized Traffic (HST), 248, 252
 HOV-Lane, 290
 Hysterese, 33, 84, 167, 215
- I**
 Improved-Intelligent-Driver-Modell (IIDM),
 siehe Modell
 Individuum, 1
 Induktionsschleife, 13
 Doppel-, 13
 Einfach-, 13
 Inhomogenität, *siehe* Engstelle
 Instabilität, 88
 diffusive, 133
 große Wellenlängen, 217
 kleine Wellenlängen, 217
 konvektive, 132, 216, 266
 nichtlineare, 134, 214
 Integrationsschrittweite, *siehe* Aktualisierungszeitschritt
 Intelligent-Driver-Modell (IDM), *siehe* Modell
 Inter-driver variability, 58
 Interpolation
 isotrope, 39
 lineare, 131, 175
 raumzeitliche, 37, 41
 verkehrsadaptive, 42
 Intra-driver variability, 58
 Inverse- λ -Form, 34, 166, 215, 243
 Iterated map, *siehe* iterierte Abbildung
 Iterationsverfahren, *siehe* Lösungsverfahren,
 numerisches
 iterierte Abbildung, *siehe* Modell
- J**
 Jante-Diagramm, 282
 Jerk, *siehe* Ruck
 Jumborennen, 260, 297
- K**
 Kaffeetasse, 299
 Kalibrierung, 1, 43, 100
 Kapazität, 33, 84
 dynamische, 215, 243, 265
 statische, 215, 243
 Kapazitätsabfall, *siehe* Capacity drop
 Kapazitätsloch, 101, 296
 Kapazitätsreduktion, *siehe* Engstelle
 Kerner-Konhäuser- (KK-) Modell, *siehe* Modell
 KKW-Modell, *siehe* Modell, KKW-
 Kollektivphänomene, 2
 Konsistenzordnung, 132
 Kooperation, 198
 Korrelationskoeffizient, 18
 Kovarianz, 18
 Kraft, 277
 elektrostatische, 181
 Gravitations-, 181
 Hangabtriebs-, 278
 Luftwiderstands-, 359
 Trägheits-, 278
 Kreisstrecke, *siehe* Ringstraße
 Kreuzung, 207
 Four-way-Stop-, 286
 kumulierte Fahrzeugzahl, 268
- L**
 Längsdynamik, 58, 139
 Lagrange-Multiplikator, 47
 Lagrangesche Darstellung, 68, 116
 Leistung, 277
 Lichtsignalanlage (LSA), 94, 146, 171, 209
 Lighthill-Whitham-Richards- (LWR-) Modell,
 siehe Modell
 LKW-Überholverbot, 297
 Lösungsverfahren
 explizites, 129
 implizites, 129
 numerisches, 128, 141
 Luftdichte, 287
 Luftwiderstand, 278
- M**
 Master-Gleichung, 54, 346
 Maximalflusszustand, 86
 McCormack
 Korrektor, 131
 Prädiktor, 131
 Verfahren, 130
 Memory-Effekt, 184
 Metastabilität, 215, 237
 Mikro-Makro-Beziehung, 143

- Mindestabstand, 139
 Mindestgelzeit, 348
 Minimalmodell, 139, 155
MOBIL, 202
 - Parameter, 201
 Mobilität, 3
 Modal-consumption model, 276
 Modalwert, 31
 Modell
 - Cell-Transmission-, 82, 129, 194, 264
 - Cellular Automaton, *siehe* Modell, zellulärer Automat
 - deterministisches, 57
 - effektives, 66
 - erster Ordnung, 74, 116
 - Fahrzeugfolge-, 53
 - First-Principles-, 57, 140, 161
 - Full-Velocity-Difference-, 147, 204
 - Fußgänger-, 58
 - gaskinetisches, 54
 - GKT-, 126
 - heuristisches, 57, 140
 - hydrodynamisches, 52
 - Improved-Intelligent-Driver-, 169
 - Intelligent-Driver-, 161, 204
 - Iterierte Abbildung, 55, 64
 - Kerner-Konhäuser-, 125
 - KKW-, 192
 - Lighthill-Whitham-Richards-, 74
 - Longitudinal-, 139
 - makroskopisches, 52, 116
 - mesoskopisches, 54
 - mikroskopisches, 53
 - Newell-, 148
 - nichtlokales, 116
 - Optimal-Velocity-, 144, 203
 - Payne-, 123
 - Robustheit, 45, 128, 147, 159, 194
 - Section-Based-, 82
 - Spurwechsel-, 58, 139, 197
 - stochastisches, 57
 - Traffic-Stream-, 56
 - vollständiges, 148
 - Wiedemann-, 184
 - zellulärer Automat, 56, 59, 187
 - zweiter Ordnung, 115
 Motordrehzahl, 280
 Motorkennfeld, 276, 280
 Moving Localized Cluster (MLC), 247, 251
 Multiantizipation, 174, 181
 - IDM-, 185
 Multinomial-Logit-Modell, 199
- N**
 Nachfrage, 2, 25, 52, 90
 Nachfragematrix, 299
 Naturwissenschaft, 1
 N-curves, *siehe* kumulierte Fahrzeugzahl
 Newell-Modell, *siehe* Modell
 Newton, Isaac, 1
 Nichtgleichgewicht, 34
 numerische Genauigkeit, 132
 Nutzen, 199
 Nutzenfunktion, 198
 Nutzenmaximierung, 199
- O**
 Optimal-Velocity-Modell (OVM), *siehe* Modell
 Optimierung
 - multikriterielle, 300
 - nichtlineare, 301
 Optimierungsproblem
 - restringiertes, 47
 Ordinate, 8
 Oscillating Congested Traffic (OCT), 247, 252
- P**
 Payne-Modell, *siehe* Modell
 Phase, 245
 Phasendiagramm, 245, 250
 Pinch-Effekt, 160
 Pinned Localized Cluster (PLC), 247, 251
- Q**
 Quellterm, 67, 119
 Querdynamik, 58, 197
 Querschnittsfläche, 278
- R**
 Ramp metering, 292
 Rampenfluss, 64
 Rampenterm, 64
 Randbedingungen, 57, 82, 97, 98, 100, 292
 Random Walk, 119
 Raum-Zeit-Diagramm, 8
 Reaktionszeit, 2, 84, 124, 149, 159, 173, 174
 - effektive, 176, 182
 Regelungstechnik, 175
 Reißverschlussprinzip, 198, 298
 Relaxationsterm, 120
 Resignationseffekt, 184
 Restabilisierung, 233, 247, 249
 Ringstraße, 237
 Robustheit, *siehe* Modell, *siehe* Modell, *siehe* Modell, *siehe* Modell
 Rollreibung, 278

- Routenwahl, 197
 Ruck, 161, 299
 Runge-Kutta-Verfahren, 141
- S**
 Schätzfehler, 57, 173
 Abstands-, 177
 Geschwindigkeits-, 177
 Zeitabhängigkeit, 178
 Schleppbetrieb, 279
 Schockwellen, 78, 100, 119, 212
 Ausbreitungsgeschwindigkeit, 79, 97
 Schubabschaltung, 279
 Second-order model, *siehe* Modell
 Section-Based-Modell, *siehe* Modell
 Selbstorganisation, 247
 Selbstregulierung, 164
 Sicherheitskriterium, 198, 199
 Simulation, 3, 54, 97, 125, 202, 237, 291
 Simulationssoftware, 139, 198
 Slow-to-start-Regel, 192
 soziales Kräftemodell, 59
 Sperrzeit, 94
 Spursperrung, *siehe* Fahrstreifensperrung
 Spurwechselmodell, *siehe* Modell
 Stabilität, 115
 absolute, 215
 Kolonnen-, 214
 lineare, 214
 lokale, 213
 nichtlineare, 214
 numerische, 125, 132
 Stabilitätsbedingung, 228, 229
 Stabilitätsdiagramm, 237, 243
 Stabilitätsklasse, 239
 Standardabweichung, 16
 Stationarität, 248
 Stau aus dem Nichts, 212, 263
 Stauanfang, 27
 Stauende, 27
 Stauentstehung, 257
 Staufront, 99, 115
 stromabwärtige, 26, 69, 262
 stromaufwärtige, 26, 262
 Staukonstanten, 265
 Staukopf, 216, 262, 296
 Staumuster, 213, 244, 262
 Stauwelle, 10, 39, 115, 190, 211, 251, 262
 stehende, 69, 247, 251
 Steuerparameter, 237, 244
 Stirnfläche, 287
 stochastischer Prozess, 178
 Stop-and-Go-Mechanismus, 212
- Stop-and-Go-Welle, *siehe* Stauwelle
 Streckeninhomogenität, *siehe* Engstelle
 String stability, *siehe* Stabilität, Kolonnen-Supply-Demand-Methode, 94, 102
 Synchronized traffic, 248
 System
 ausgedehntes, 217
 geschlossenes, 244
 offenes, 216, 244
- T**
 Tagessganglinie, 25
 Taylor-Reihe, 223
 Taylorentwicklung, 136, 218
 Thermodynamik, 2
 Tiefpass-Filter, 39
 Time-to-Collision (TTC), 177, 207
 Totzeit, 175
 Toy system, 237
 Traffic-Stream-Modell, *siehe* Modell
 Trajektorie, 7, 69, 146
 virtuelle, 272
 Trajektorien-Diagramm, 8
 Trajektoriendaten, 7
 Transportplanung, 3
 Triggered Stop-and-Go (TSG), 246, 251
- U**
 Übergangszeit, 94
 Update time, *siehe* Aktualisierungszeitschritt
 Upwind-Verfahren, 130, 132
 Utility, *siehe* Nutzen
- V**
 Varianz, 16
 Variationskoeffizient, 16, 126, 177
 Vehicle-infrastructure integration, *siehe* Fahrzeug-Infrastruktur-Kommunikation
 Verbrauchscharakteristik, 282
 Verbrauchsmodell
 makroskopisches, 275
 mikroskopisches, 276
 phänomenologisches, 276
 physik-basiertes, 276
 Verkehr
 heterogener, 30, 58, 126, 143
 nichtmotorisierter, 58
 Verkehrsbeeinflussungsanlage, 30
 Verkehrsichte, 17
 Verkehrsdruck, 121, 228
 Verkehrsdynamik, 51, 52, 264
 hysteretische, 33, 167, 215
 raumzeitliche, 40, 262
 Verkehrsfluss, 9, 15

- Verkehrsflussdynamik, *siehe* Verkehrsdynamik
Verkehrsinstabilität, *siehe* Instabilität
Verkehrslage-Rekonstruktion, 40
Verkehrsleistung, 275
Verkehrsmittelwahl, 197
Verkehrsplanung, 3, 51
Verkehrstelematik, 3, 264
Verkehrswissenschaften, 2
Verkehrszusammenbruch, 25, 88, 257
Vielteilchensystem, 3
Vorfahrt, 207
- W**
Wardrop-Formel, 19
Wardrop-Gleichgewicht, 19
Wechselverbot, 297
Wechselwirkung, 2, 85, 111, 139, 156, 252, 261
Wechselwirkungsanteil, 181
Wellengleichung
 nichtlineare, 75
Wellenzahl, 227
- Wiedemann-Modell, *siehe* Modell
Wiener-Prozess, 178
Wunschabstand, 162, 211
Wunschgeschwindigkeit, *siehe* Geschwindigkeit
Wunschrichtung, 59
- Z**
Zeitlücke, 161, 296
 Brutto-, 14, 268
 Netto-, 14, 30, 85, 239
 Verteilung, 30
 Wunsch-, 34
Zeitreihe, 8, 25
Zellulärer Automat, *siehe* Modell
Zentraler Grenzwertsatz, 179
Zielfunktion, 298
Zielwahl, 197
Zufallsbeschleunigung, 179, 183, 185, 199
Zufluss, 64
Zuflussregelung, 292