Antwort auf https://www.gutefrage.net/frage/bestimmung-ganzeationaler-funktionen

Die Aufgabe in Symbolen

Bestimme die Bildungsvorschrift für die Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

(1) Symmetrie: $f(x)=f(-x)$ (gerade Funktion)

(2) Ganzrational 4. Ordnung: $f(x)=a_4 x^4+a_3 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0$

(3) Enthaltene Punkte: $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f''(1)>0$

Lösung

Planung

In Voraussetzung (3) befinden sich bereits 3 Gleichungen, die ein bezüglich der a_n lineares Gleichungssystem bilden. Da alle Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, bilden die Gleichungen ein Gleichungssystem, dessen Lösung die a_n sind. Damit (1) auf dem gesamten Definitionsbereich erfüllt ist, muß $a_1=0$ und $a_3=0$ sein. Die fehlenden 3 Koeffizienten kann man als Lösung eines Systems aus den drei Gleichungen in Voraussetzung (3) berechnen. Anschließend muß die Überprüfung der Ungleichung mit den gefundenen a_n wahre Aussagen ergeben.

Ausführung

Symmetrie

$$\begin{array}{ccc}
f(x) & = & f(-x) \\
a_4 x^4+a_3 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0 & = & a_4(-x)^4+a_3(-x)^3+a_2(-x)^2+a_1(-x)+a_0 \\
a_4 x^4+a_3 x^3+a_2 x^2+a_1 x+a_0 & = & a_4 x^4-a_3 x^3+a_2 x^2-a_1 x+a_0 \\
a_3 x^3+a_1 x & = & -a_3 x^3-a_1 x \\
2(a_3 x^3+a_1 x) & = & 0 \\
2x(a_3 x^2+a_1) & = & 0
\end{array}$$

Falls die Schlußfolgerung in der Planung verstanden wurde, sollte spätestens nach dieser äquivalenten Umformung der Symmetriebedingung klar sein, daß $a_3=a_1=0$ gelten muß, damit sie für alle x gilt.

Nach Einsetzen in die Bedingung (2) ergeben sich die folgenden vereinfachten Gleichungen mit nur noch 3 unbekannten Koeffizienten:

$$f(x)=a_4 x^4+a_2 x^2+a_0$$
$$f'(x)=4 a_4 x^3+2 a_2 x$$
$$f''(x)=12 a_4 x^2+2 a_2$$

Gleichungssystem lösen

Aus der gegebenen Voraussetzung (3) kann man 3 Gleichungen bilden, um die fehlenden Koeffizienten zu berechnen:

$$\begin{array}{llcl} (a) & 2 & = & a_0 \\ (b) & 0 & = & a_4 + a_2 + a_0 \\ (c) & 0 & = & 4a_4 + 2a_2 \end{array}$$

Gleichung (a) und a_0 können im nächsten Schritt eliminiert werden:

$$(b) \quad -2-a_2 = a_4$$

Damit kann a_4 in Gleichung (c) ersetzt werden:

$$\begin{array}{lrcl} (c) & 0 & = & 4(-2-a_2)+2a_2 \\ & 0 & = & -8-2a_2 \\ & 2a_2 & = & -8 \\ & a_2 & = & -4 \end{array}$$

Durch Einsetzen in die letzte Form der Gleichung (b) ergibt sich $a_4=2$.

Bezüglich der Gleichungen in den Bedingungen (1) bis (3) erhalten wir die Funktion

$$f(x)=2x^4-4x^2+2$$

und die Ableitungen

$$f'(x)=8x^3-8x \quad \text{und} \quad f''(x)=24x^2-8 \quad .$$

Die Überprüfung der Vorgaben (1) bis (3) mit dieser Funktion und ihren Ableitungen ergibt, daß die gefundene Funktion f eine Lösung der Aufgabe ist.