

# Volumenberechnung mit Spatprodukt

Zu einer Frage auf [gutefrage.net](https://www.gutefrage.net)

## Gegebene Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Gleichung aufstellen und lösen

Diese Vektoren werden in die folgende Volumenformel für das Spatprodukt eingesetzt. Das Ergebnis wird äquivalent umgeformt.

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})| = 180 \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+3k \\ -6-1 \\ k-2k \end{pmatrix} \right| = 180 \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4k \\ -7 \\ -k \end{pmatrix} \right| = 180 \\ &= |4k - 14 + 3k| = 180 \\ &= |7k - 14| = 180 \end{aligned}$$

Dengleichen absoluten Betrag haben genau 2 reelle Zahlen, nämlich eine Zahl und ihre entgegengesetzte Zahl. Somit können 2 Zahlen k aus den folgenden beiden linearen Gleichungen ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 7k_1 - 14 &= 180 & -(7k_2 - 14) &= 180 \\ 7k_1 &= 194 & 7k_2 - 14 &= -180 \\ k_1 &= \frac{194}{7} & 7k_2 &= -166 \\ & & k_2 &= -\frac{166}{7} \end{aligned}$$

## Probe

**k<sub>1</sub>**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{194}{7} \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{194}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{194}{7} \\ -3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{194}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{194}{7}+\frac{3\cdot 194}{7} \\ -6-1 \\ \frac{194}{7}-\frac{2\cdot 194}{7} \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{776}{7} \\ -7 \\ -\frac{194}{7} \end{pmatrix}\right|=\left|\frac{776}{7}-14+\frac{582}{7}\right|=180$$

**k<sub>2</sub>**

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{166}{7} \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{166}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{166}{7} \\ -3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{166}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{166}{7}-\frac{3\cdot 166}{7} \\ -6-1 \\ -\frac{166}{7}+\frac{2\cdot 166}{7} \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-4\cdot 166}{7} \\ -7 \\ \frac{166}{7} \end{pmatrix}\right| \\ &= \left| -4\cdot\frac{166}{7}-14-3\cdot\frac{166}{7} \right|=|-180|=180 \end{aligned}$$