Einholaufgabe

Berechnung

$$v_1 = 7{,}2\,\frac{km}{h}, s = v_1 t \quad \text{(Jogger)}$$

$$a_2 = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}, s_0 = 200\,m, \left\{ \begin{matrix} v = 0, s < s_0 \\ v = a_2 (t - t_0), s \geq s_0 \end{matrix} \right\} \quad \text{(Auto)}$$

Dabei ist s_0 der Weg, den der Jogger zurücklegt, bevor das Auto startet. Das Auto startet zum Zeitpunkt t_0, also nachdem der Jogger s_0 gleichförmig zurückgelegt hat.. Aus dem Weg-Zeit-Gesetz für den Jogger erhält man also

$$t_0 = \frac{s_0}{v_1} = \frac{200\,m}{7{,}2\,\frac{10^3 m}{h}} = 0{,}027\,h = 97{,}2\,s$$

Für das Auto habe ich aus der Aufgabe das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz aufgestellt. Durch Integration (Umkehrung der Geschwindigkeitsdefinition), erhält man das Weg-Zeit-Gesetz. Bei der Integration setze ich voraus, daß der erste Teil der Autobewegung ($s < s_0$ bzw. $t < t_0$) mit der Geschwindigkeit 0 ausgeführt wird. Daraus ergibt sich

$$s = \int_0^t v\,d\tau = \left\{ \begin{matrix} \int_0^t 0\,d\tau, t < t_0 \\ \int_0^{t_0} 0\,d\tau + \int_{t_0}^t v\,d\tau \end{matrix} \right\}$$

$$s = \left\{ \begin{matrix} 0, t \leq t_0 \\ \frac{a_2}{2}(t - t_0)^2, t > t_0 \end{matrix} \right\}$$

Das Auto holt den Jogger ein, wenn beide diegleiche Wegposition zur gleichen Zeit erreicht haben. Weil das nicht geschehen kann, solange das Auto steht, befasse ich mich nur mit dem zweiten Abschnitt der Autofahrt, also für $s > s_0$ bzw. $t > t_0$. Wenn s_1 der von Jogger zurückgelegte Weg und s_2 der vom Auto zurückgelegte Weg ist, dann suchen wir also den Punkt, an dem $s_1 = s_2$. Diese Gleichung läßt sich für die Zeit, nach der dieser Punkt erreicht ist, so lösen:

$$
\begin{aligned}
s_1 = v_1 t &= \frac{a_2}{2}(t-t_0)^2 = s_2 \\
0 &= \frac{a_2}{2}t^2 - a_2 t\, t_0 + \frac{a_2}{2}t_0^2 - v_1 t = \frac{a_2}{2}t^2 - (a_2 t_0 + v_1)t + \frac{a_2}{2}t_0^2 \\
0 &= t^2 - \left(2t_0 + 2\frac{v_1}{a_2}\right)t + t_0^2 \\
0 &= t^2 - 2\left(t_0 + \frac{v_1}{a_2}\right)t + t_0^2 \\
t &= t_0 + \frac{v_1}{a_2} \pm \sqrt{\left(t_0 + \frac{v_1}{a_2}\right)^2 - t_0^2} = 97{,}2\,s + \frac{7{,}2\cdot 10^3 \frac{m}{3600\,s}}{1{,}5\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(97{,}2\,s + \frac{7{,}2\cdot 10^3 \frac{m}{3600\,s}}{1{,}5\frac{m}{s^2}}\right)^2 - (97{,}2\,s)^2} \\
t &= 98{,}535\,s \pm 16.155\,s = \left\{\begin{matrix} 82{,}38\,s = 0{,}0228\,h \\ 114{,}689\,s = 0{,}0319\,h \end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

Weil das Auto erst nach 97,2 s losfährt, kann die erste Lösung nicht die gesuchte sein. Also holt das Auto den Jogger nach 114,7 s ein. Dann haben beide den Weg

$s_1 = v_1 t = \frac{7{,}2\cdot 10^3\,m}{3600\,s}\cdot 114{,}689\,s = 229{,}378\,m$ zurückgelegt.

Grafik

Man zeichnet ein Weg-Zeit-Diagramm groß genug, daß alle interessanten Punkte in die Grafik eingeschlossen sind, z.B. eine Zeitachse von 0 bis 120 s und eine Wegachse von 0 bis 250 m. Die Gerade für den Läufer beginnt im Nullpunkt und geht durch einen beliebigen Punkt, den man mit dem Weg-Zeit-Gesetz des Joggers berechnen kann. Für die quadratische Parabel (Weg-Zeit-Gesetz des Autos nach dem Start) kann man eine Wertetabelle aufstellen, die dicht genug ist, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Die berechneten Punkte trägt man in das Diagramm ein und verbindet sie glatt oder durch Geradenstücke. Der Schnittpunkt beider Graphen ergibt die Weg und Zeit beim Einholen.