Bakterien vernichten

Antwort auf https://www.gutefrage.net/frage/exponentielles-abklingen

Warum findet das Exponentialgesetz Anwendung?

(1) $\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}=k\cdot B(t_0)$

Das ist durch die Aufgabenstellung gegeben, die sagt, daß die Änderung der Anzahl der Bakterien bis zum Zeitpunkt t proportional zur Anzahl der Bakterien am Anfang der Vernichtung t_0 sei. „proportional“ bedeutet konstantes Verhältnis, das hier durch die Konstante k gegeben sei. Wenn das für den gesamten Vernichtungsprozeß gelten soll, muß die Aussage für beliebig kurze Zeitabschnitte gültig sein, also für $t \to t_0$. Mit der Substitution $h=t-t_0 \equiv t=t_0+h$ ergibt sich daraus

(2) $\frac{B(t_0+h)-B(t_0)}{h}=k\cdot B(t_0)$ bzw. (3) $\lim_{h\to 0}\frac{B(t_0+h)-B(t_0)}{h}=k\cdot B(t_0)$

Weil die rechte Seite nicht von h abhängt, bleibt sie bei der Grenzwertberechnung unverändert. Der Grenzwert auf der linken Seite ist die Definition der 1. Ableitung der Funktion B an der Stelle t_0. Als Gleichung sieht das so aus:

(4) $B'(t_0)=k\cdot B(t_0)$

Weil t_0 ein frei wählbarer Zeitpunkt ist, ersetzen wir zur Vereinfachung den Ausdruck in der weiteren Betrachtung durch t. Gleichzeitig bringen wir durch äquivalente Umformung die Differentialgleichung in eine Standardform:

(5) $0=-B'(t)+k\cdot B(t)$

Dabei wird deutlich, daß es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung handelt. Eine solche hat die Lösung

(6) $B(t)=B_0\exp(\lambda t)$

mit der Ableitung

(7) $B'(t)=B_0\lambda\exp(\lambda t)$

Ersetzt man in der Differentialgleichung (5) $B(t)$ und $B'(t)$ mit diesem Ansatz, ergibt sich

(8) $0=-B_0\lambda\exp(\lambda t)+c\,B_0\exp(\lambda t)$

Weil die Aufgabenstellung eine zeitabhängige Lösung verlangt, befassen wir uns nicht mit anderen möglichen Lösungen und können annehmen, daß $B_0\neq 0$ und $\exp(\lambda t)\neq 0$. Unter dieser Voraussetzung kann man die Gleichung äquivalent umformen, indem man sie durch beide Ausdrücke dividiert. Man erhält

(9) $0=-\lambda+k \equiv \lambda=k$

Unter dieser Voraussetzung löst also die Funktionsgleichung (6) die durch die Aufgabenstellung gegebene Differentialgleichung (4). Also findet der betrachtete Abklingvorgang nach der Exponentialfunktion

(10) $B(t)=B_0 \exp(k\,t)$

statt.

B_0 berechnen

Gegeben ist $B(0)=1000000$.

Aus Gleichung (10)ergibt sich

$1000000=B_0 \exp(k\cdot 0)=B_0$.

k berechnen

Gegeben ist $B(1\,h)=(1-0{,}225)\,B(0)=0{,}775*1000000=775000$.

Wir wenden das gefundene Exponentialgesetz (10) an:

$$\begin{array}{ccc}
775000 & = & 1000000 \exp(k\cdot 1\,h) \\
\frac{775000}{1000000} & = & \exp(k\cdot 1\,h) \\
\ln \frac{775000}{1000000} & = & k\cdot 1\,h \\
\frac{1}{1\,h} \ln \frac{775000}{1000000} & = & k \\
-0{,}25489224962879\,h^{-1} & = & k
\end{array}$$

Wie lange dauert es bis keine Bakterien mehr vorhanden sind?

Die Abklingfunktion kann nicht 0 werden, also eine Zeit t_1 mit $B(t_1)=0$ kann nicht berechnet werden. Da aber weniger als 1 Bakterium nicht lebensfähig ist, müßte t_1 nur die Zeit bis zum Zustand $B(t_1)=1$ überschreiten. Wir berechnen also eine Zeit t_1 , die überschritten sein muß, um alle Bekterien zu vernichten, mit Gleichung (10) und den bisher bekannten Daten:

$$
\begin{aligned}
1 &= B_0 \exp(k\, t_1) \\
\frac{1}{B_0} &= \exp(k\, t_1) \\
\ln \frac{1}{B_0} &= k\, t_1 \\
\frac{-\ln B_0}{k} &= t_1 \\
t_1 &= \frac{-\ln 1000000}{-0{,}25489224962879\, h^{-1}} \\
t_1 &= 54{,}201375593351166\, h
\end{aligned}
$$