Volumenberechnung mit Spatprodukt

Zu einer Frage auf gutefrage.net

Gegebene Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\k\\-3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\k\\1\end{pmatrix}$$

Gleichung aufstellen und lösen

Diese Vektoren werden in die folgende Volumenberechnung mittels Spatprodukt eingesetzt. Das Ergebnis wird äquivalent umgeformt.

$$\begin{array}{ccccc}
V & = & \left|\vec{a}\,(b\dot{\times}c)\right| & = & 180\\
 & = & \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\dot{}\begin{pmatrix}k+3k\\-6-1\\k-2k\end{pmatrix}\right| & = & 180\\
 & = & \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\dot{}\begin{pmatrix}4k\\-7\\-k\end{pmatrix}\right| & = & 180\\
 & = & |4k-14+3k| & = & 180\\
 & = & |7k-14| & = & 180
\end{array}$$

Dengleichen absoluten Betrag haben genau 2 reelle Zahlen, nämlich eine Zahl und ihre entgegengesetzte Zahl. Somit können 2 Zahlen k aus den folgenden beiden linearen Gleichungen ermittelt werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
7k_1-14 & = & 180 & -(7k_2-14) & = & 180\\
7k_1 & = & 194 & 7k_2-14 & = & -180\\
k_1 & = & \frac{194}{7} & 7k_2 & = & -166\\
 & & & k_2 & = & -\frac{166}{7}
\end{array}$$

Probe

k_1

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\\frac{194}{7}\\-3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\\frac{194}{7}\\1\end{pmatrix}$$

$$V=\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\\frac{194}{7}\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\\frac{194}{7}\\1\end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{194}{7}+\frac{3\cdot194}{7}\\-6-1\\\frac{194}{7}-\frac{2\cdot194}{7}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{776}{7}\\-7\\-\frac{194}{7}\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{776}{7}-14+\frac{582}{7}\right|=180$$

k_2

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{166}{7}\\-3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{166}{7}\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}V&=\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\-\frac{166}{7}\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-\frac{166}{7}\\1\end{pmatrix}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{166}{7}-\frac{3\cdot166}{7}\\-6-1\\-\frac{166}{7}+\frac{2\cdot166}{7}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-4\cdot166}{7}\\-7\\\frac{166}{7}\end{pmatrix}\right|\\&=\left|-4\cdot\frac{166}{7}-14-3\cdot\frac{166}{7}\right|=\left|-180\right|=180\end{aligned}$$