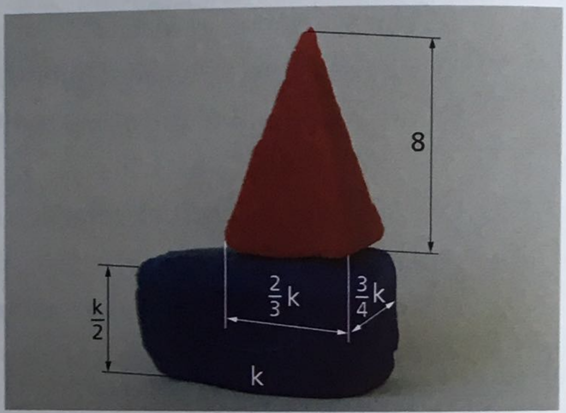
5. In einer Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ seien die Koeffizienten a, b, c und d ganze Zahlen. *Begründen Sie:* Wenn eine ganze Zahl x_1 Lösung dieser Gleichung ist, dann ist x_1 ein Teiler des Absolutgliedes d.
Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit dem Rechner.

6. In einem Wettbewerb besteht die Aufgabe darin, aus einer Menge von einem Liter Knetmasse das nebenstehende Gebilde nach den vorgegebenen Längenverhältnissen zu gestalten. Die Höhe der aufgesetzen Pyramide ist mit 8 cm festgelegt. Es soll die gesamte Knetmasse verbraucht werden.



a) *Ermitteln Sie* rechnerisch die Maße des Quaders.
b) *Berechnen Sie* die Länge der Grundseiten der aufgesetzen Pyramide.
c) Der Künstler möchte wie im Bild mit zwei Farben arbeiten. Wie viel rote und wie viel blaue Knetmasse benötigt er (Angabe in Liter oder cm^3)?

7. Motoren werden nach ihrer Leistung gekennzeichnet. Diese ist abhängig von der Drehzahl des Motors. Die Leistung wird in Kilowatt (kW) angegeben, die Drehzahl in Umdrehungen pro Minute (U/min). Für ein Fahrzeug mit Benzinmotor kann die Abhängigkeit der Leistung von der Motordrehzahl in etwa durch die Funktion $f(x) = 60x + 50 - 10x^2$ beschrieben werden, bei einem Dieselfahrzeug entspricht der funktionale Zusammenhang etwa $g(x) = 38x - 10x^2 + 60$. Dabei bezeichnet x die Motordrehzahl in 1 000.
a) Welche Leistung entwickelt der Motor eines mit Benzin getriebenen Fahrzeugs bei 1 200 U/min, bei 4 000 U/min und bei 5 500 U/min?
b) Welche Leistung entwickelt ein Dieselfahrzeug bei diesen Umdrehungen?

Aufgabe 6

Gegeben

$$V_P = \frac{1}{3} G h_P = \frac{1}{3} d e h_P \quad mit \quad d = \frac{2}{3} k, \; e = \frac{3}{4} k, \; h_P = 8\,cm \,(Pyramide)$$

$$V_Q = abc, \; mit \quad a = k, \; b = \frac{3}{4} k, \; c = \frac{k}{2} \,(Quader)$$

$$V = V_P + V_Q = 1000\,cm^3 \,(Gesamtvolumen)$$

Gesucht

a) $a, \; b, \; c$

b) $d, \; e$

c) $V_P \; (rot), \; V_Q (blau)$

Lösung

k berechnen

Durch Einsetzen der passenden Terme mit k in die Gleichung für das Gesamtvolumen erhält man eine Gleichung, von der k eine Lösung und außerdem die einzige Unbekannte ist:

$$\begin{aligned} V &= V_P + V_Q \\ V &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}k\cdot\frac{3}{4}k\cdot h_P + k\cdot\frac{3}{4}k\cdot\frac{k}{2} \\ V &= \frac{1}{6}h_P k^2 + \frac{3}{8}k^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{8}k^3+\frac{h_P}{6}k^2-V \\ 0 &= k^3+4\frac{h_P}{9}k^2-\frac{8}{3}V \end{aligned}$$

Diese Gleichung könnte man mangels einer vereinfachenden Idee mit dem Newtonschon Näherungsverfahren lösen. Das heißt, man berechnet die Nullstelle der Funktion

$f(k)=k^3+\frac{4}{9}h_P k^2-\frac{8}{3}V$, indem man an einen geschätzten Nulpunkt die Tangente anlegt und deren Nullstelle berechnet. Wegen der Beziehungen zwischen k und den Kantenlängen muß k eine positive Zahl sein. Außerdem können wegen der Form einer solchen kubischen Funktion die Nullstellen nur auf monotonen Abschnitten, also zwischen den Nullstellen der ersten Ableitung liegen.

$$f'(k)=3k^2+\frac{8}{9}h_P k=k\left(3k+\frac{8}{9}h_P\right)$$

Man sieht, für $k>0$ ist der Anstieg immer positiv, das heißt, im interessierenden Lösungsbereich ist $f(k)$ monoton wachsend. Da die Funktion an der Stelle 0 negativ ist aber keinen Anstieg hat, ist 0 als Startwert für das Newtonsche Näherungsverfahren nicht geeignet. Jeder Punkt für $k>0$ liegt jedoch auf einem streng monoton wachsenden Abschnitt der Funktion, wobei

$f(0)=\frac{-8}{3}V<0$. Das bedeutet, jede Tangente an f für $k>0$ hat immer eine Nullstelle.

Ich verwende den Startwert $k_0=1$. Die Tangente an einer Stelle k_n hat die Gleichung

$$g(k)=f(k_n)+f'(k_n)(k-k_n)$$

Wenn die Nullstelle der Tangente k_{n+1} ist, dann erfüllt sie die Gleichung

$$\begin{aligned} g(k_{n+1})=f(k_n)+f'(k_n)(k_{n+1}-k_n) &= 0 \\ f'(k_n)(k_{n+1}-k_n) &= -f(k_n) \\ k_{n+1}-k_n &= \frac{-f(k_n)}{f'(k_n)},\quad f'(k_n)\neq 0 \\ k_{n+1} &= k_n-\frac{f(k_n)}{f'(k_n)},\quad f'(k_n)\neq 0 \end{aligned}$$

Hiermit haben wir eine rekursive Bildungsvorschrift für eine Zahlenfolge nach dem Newtonschen Näherungsverfahren, die gegen eine Nullstelle unserer Funktion konvergiert, also $\lim_{n-\infty} k_n = k$. Mit einem kleinen Programm auf dem Taschenrechner oder auf dem PC läßt sich so ein beliebig genauer Näherungswert für die gesuchte Länge k mit $f(k)=0$ berechnen. Ich erhalte $k=12{,}7776006024861262262\,cm$.

Antworten

a)
$a=12{,}7776006024861262262\,cm$, $b=9{,}5832004518645946700\,8\,cm$, $c=6{,}3888003012430631131\,0\,cm$

b) $d=8{,}5184004016574174844\,2\,cm$, $e=9{,}5832004518645946700\,8\,cm$

c) $V_P=217{,}689436208871754594\,cm^3$, $V_Q=782{,}310563791128245614\,cm^3$

Probe: $V=V_P+V_Q=1000\,cm^3=1\,l$