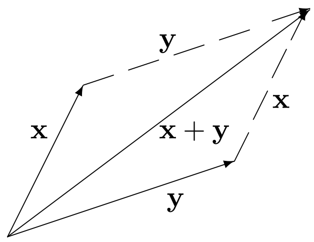
$\mathbf{y}$ werden addiert, indem man den Anfangspunkt von $\mathbf{y}$ an den Endpunkt von $\mathbf{x}$ setzt oder umgekehrt. Der Summenpfeil beginnt dann am Anfangspunkt von $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{y}$ und endet am Endpunkt von $\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{x}$ und entspricht somit der Diagonalen des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms. Die nachstehende Grafik verdeutlicht das.



Wird ein Punkt gar nicht verschoben, so gilt **x=0**. **0** ist somit das neutrale Element. Die inverse Verschiebung beginnt am Endpunkt von $\mathbf{x}$ und endet am Anfangspunkt von $\mathbf{x}$. Sie wird als **-x** bezeichnet. Die Kommutativität ist offensichtlich.

Gruppen besitzen einige wichtige Eigenschaften. Diese werden im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 1.3 (Eigenschaften von Gruppen)
Jede Gruppe $(G, \star)$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Zum neutralen Element:*
   1.1 *Es existiert genau ein neutrales Element $e \in G$ $\forall a \in G$.*
   1.2 *$\forall a \in G$ gilt $a \star e = a$.*
2. *Zum inversen Element:*
   2.1 *$\forall a \in G$ existiert genau ein inverses Element $a' \in G$.*
   2.2 *$\forall a \in G$ gilt: $a' \star a = e \Rightarrow a \star a' = e$.*
3. *Weiteres:*
   3.1 *Das inverse Element wird im Folgenden als a^{-1} bezeichnet.*
   3.2 *$\forall a, b \in G$ gilt:*
   $$(a^{-1})^{-1} = a \quad \textit{und} \quad (a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$$
   3.3 *$\forall a, b \in G$ sind die Gleichungen $a \star x = b$ und $y \star a = b$ eindeutig lösbar.*

Diese Eigenschaften mögen auf den ersten Blick selbstverständlich erscheinen, sie sind es aber nicht. Alle (mit Ausnahme der Bezeichnungsvereinbarung) können und müssen mit Hilfe der Gruppenaxiome mathematisch streng bewiesen werden.
An dieser Stelle soll exemplarisch nur der Beweis der unter 3.3 genannten Eigenschaft erfolgen.
Der Beweis gliedert sich in zwei Teile: Im ersten Teil wird die Existenz der Lösung bewiesen und im zweiten deren Eindeutigkeit.
Existenz der Lösung:
Eine Lösung der Gleichung $a \star x = b$ lautet $x = a^{-1} \star b$, denn es gilt:

$$a \star (a^{-1} \star b) \overset{G1}{=} (a \star a^{-1}) \star b \overset{G3}{=} e \star b \overset{G2}{=} b$$

Eindeutigkeit der Lösung:
Angenommen, es existieren zwei Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $a \star x = b$ mit $x_1 \neq x_2$.
Dann gilt:

$$a \star x_1 = b \quad \wedge \quad a \star x_2 = b$$

Daraus folgt:

$$a \star x_1 = a \star x_2$$

und daher

$$a^{-1} \star (a \star x_1) = a^{-1} \star (a \star x_2)$$

Somit gilt

$$x_1 = x_2$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also ist x eindeutig bestimmt.
Der Beweis für die Lösung der Gleichung $y \star a = b$ erfolgt analog.

q.e.d.

Bisher wurden die Gesetzmäßigkeiten beim Anwenden nur einer Operation auf eine Menge betrachtet. Dies führte auf den Begriff der Gruppe. Bezieht man noch eine zweite Operation mit ein, kommt man zum Begriff des Körpers.

Definition 1.8 (Körper)
Gegeben seien eine Menge K und Elemente $a, b \in K$. Ferner seien auf K die Operationen $+$ und $\cdot$ definiert (sie werden allgemein als Addition und Multiplikation bezeichnet). Die Operationen $+$ und $\cdot$ ordnen jedem Paar (a, b) eindeutig ein Element $a+b$ bzw. $a \cdot b$ zu. Wenn dabei die nachfolgenden Axiome erfüllt sind, bezeichnet man K als **Körper***:*

- *Für die Addition $+$ gilt: $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h. es gilt:*

(K1) Assoziativität der Addition:
$\forall a, b, c \in K$ *gilt:*
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(K2) Existenz des Nullelementes:
$\exists\, \mathbb{0} \in K\ \forall a \in K$ *mit*
$$\mathbb{0} + a = a$$

(K3) Existenz des inversen Elementes bzgl. der Addition:
$\forall a \in K\ \exists (-a) \in K$ *mit*
$$-a + a = \mathbb{0}$$

(K4) Kommutativität der Addition:
$\forall a, b \in K$ *gilt*
$$a + b = b + a$$

- *Für die Multiplikation $\cdot$ gilt:*

(K5) Assoziativität der Multiplikation:
$\forall a, b, c \in K$ *gilt*
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(K6) Existenz des Einselementes:
$\exists \mathbb{1} \in K\ \forall a \in K$ *mit* $\mathbb{1} \neq \mathbb{0}$ *so dass gilt*
$$\mathbb{1} \cdot a = a$$

(K7) Existenz des inversen Elementes bzgl. der Multiplikation:
$\forall a \in K$ *mit* $a \neq \mathbb{0}\ \exists\, a^{-1} \in K$ *so dass gilt*
$$a^{-1} \cdot a = \mathbb{1}$$

(K8) Distributivität:
$\forall a, b, c \in K$ *gilt*
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(K9) Kommutativität der Multipliaktion:
$\forall a, b \in K$ *gilt*
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Anmerkungen

1. Das Nullelement $\mathbb{0}$ und das Einselement $\mathbb{1}$ in einem Körper sind eindeutig bestimmt.

2. Die inversen Elemente bzgl. der Addition und der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

3. Schreibweisen:

   – Der Multiplikationspunkt wird oft weggelassen, d.h. man schreibt ab statt $a \cdot b$.

   – Die Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ wird zur Klammerersparnis verwendet.

   – Es wird vereinbart:

$$\begin{aligned} a - b &:= a + (-b) \\ \frac{a}{b} &:= a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

Beispiele

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper. (Warum?)

3. Es ist möglich, einen kleinsten Körper K zu konstruieren. Dazu sei $K = \{0, 1\}$, und $+$ und $\cdot$ seien über nachfolgende Verknüpfungstafeln definiert.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

   Die Definition der Verknüpfungen ist naheliegend, lediglich die Verknüpfung $1 + 1 = 0$ bedarf einer Erklärung: Wäre $1 + 1 = 1$, dann wäre 1 das Nullelement (das Nullelement ist 0, siehe weiter unten), d.h. es gälte $1 = \mathbb{0} = 0$, aber das ist ausgeschlossen; da K nur die Elemente 1 und 0 enthält, muss $1 + 1 = 0$ gelten.
   Es lässt sich zeigen, dass beide Verknüpfungen assoziativ sind.
   Das Nullelement ist offensichtlich 0. Es gilt: $-0 = 0$, $-1 = 1$
   Das Einselement ist 1. Das inverse Element der Multiplikation ist 1. (Es gilt: $1^{-1} = 1$)
   Die Kommutativität beider Verknüpfungen ist offensichtlich.
   Der hier beschriebene Körper ist der Restklassenkörper $\mathbb{Z}_2$.

Schließlich seien noch Rechenregeln für Körper zusammengestellt.

Satz 1.4 (Rechenregeln für Körper)
Gegeben sei ein Körper $(K, +, \cdot)$. Dann gilt $\forall a, b \in K$:

1. $0 \cdot a = 0$.
2. $(-1)a = -a$.
3. *Aus* $a \neq 0$ *folgt* $a^{-1} \neq 0$.
4. *Sofern* $a \neq 0$ *erfüllt ist, gilt* $-(-a) = a$ *und* $(a^{-1})^{-1} = a$.
5. *Aus* $a \cdot b = 0$ *folgt* $a = 0 \quad \vee \quad b = 0$ *(K ist nullteilerfrei).*
6. *Es gilt* $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$.
7. *Für* $a, b \neq 0$ *gilt* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
8. *Es gilt* $(-a)(-b) = ab$ *und* $(-a)b = a(-b) = -ab$.

In einem Körper kann man also so rechnen, wie man es von den reellen Zahlen her gewohnt ist.

1.3 Vektorräume

Aus den vorigen Paragraphen kennen wir bereits die Eigenschaften einer Gruppe, speziell auch einer abelschen Gruppe, sowie die Eigenschaften eines Körpers. Wir wenden uns nun einem weiteren wichtigen mathematischen Objekt zu, den Vektoren.

Entgegen dem Vorgehen in der Schule werden die Vektoren nicht anhand einiger spezieller Vektoren eingeführt und die Begriffe verallgemeinert, sondern der Weg wird in umgekehrter Richtung beschritten. Im Vergleich gesprochen steht zuerst die allgemeine botanische Definition von Obst im Mittelpunkt, und anschließend wird identifiziert, dass auch Äpfel und Birnen zu dieser Kategorie gehören. So lässt sich der weit verbreitete Fehler vermeiden, Äpfel und Obst gleichzusetzen.
Beim Vorgehen der Definition von Vektoren ist eine weitere Analogie hilfreich. Wer sind Jugenstrafanstaltsgefangene? Dies sind all jene Personen, die in einer Justizvollzugsanstalt einsitzen, z.B. in der JVA Vechta oder Hameln. Was aber sind die Kennzeichen einer JVA? Die Insassen haben eine Zelle, einen vorgegebenen Tagesablauf und so weiter.
In dieser Analogie gesprochen entsprechen den Jugendstrafgefangenen die Vektoren und der Justizvollzugsanstalt der Vektorraum. Das bedeutet:

Vektoren sind die Elemente eines Vektorraums. Welche Eigenschaften hat ein Vektorraum?

Definition 1.9 (Vektor, Skalar, Vektorraum-Axiome)
Ein **Vektorraum über dem Körper** K *besteht aus*

- *einer* **abelschen Gruppe** $(V,+)$, *deren Elemente Vektoren heißen,*
- *einem* **Körper** K, *dessen Elemente Skalare heißen,*
- *einer* **Multiplikation**, *die jedem Paar* $(a,\mathbf{x})$ *mit* $a \in K$, $\mathbf{x} \in V$ *genau einen Vektor* $a \cdot \mathbf{x}$ *zuordnet, wobei die folgenden drei* **Vektorraum-Axiome** *erfüllt sind:*

(V1) Assoziativität: $\forall \mathbf{x} \in V \wedge \forall a, b \in K$ *gilt*

$$(a \cdot b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x}).$$

(V2) Distributivität: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \wedge \forall a, b \in K$ *gilt*

$$a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y} \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}.$$

(V3) Einselement: $\forall \mathbf{x} \in V$ *und das Einselement* $1 \in K$ *gilt*

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Anmerkung: *Es gilt*

$$a \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot a$$

Bezeichnungen

1. Vektoren und Skalare werden hier immer mit kleinen lateinischen Buchstaben angegeben, Vektoren dabei in der Regel durch **Fettdruck** gekennzeichnet.
2. **Wichtig:** Die **Symbole + und** $\cdot$ treten **in unterschiedlichen Bedeutungen** auf: Mit + kann sowohl die Addition von Vektoren als auch von Skalaren gemeint sein. Welcher Fall vorliegt, geht aus dem Zusammenhang hervor.
   Ebenso folgt aus dem Kontext, ob mit $\cdot$ die Multiplikation von Skalaren oder von einem Skalar mit einem Vektor gemeint ist.
3. Zwischen Skalaren und Vektoren wird das Symbol $\cdot$ meist weggelassen und einfach $a\mathbf{x}$ geschrieben.
4. Nach üblicher Konvention sollen die Addition in V und die Addition in K weniger stark binden als die Multiplikation mit Skalaren. Das erspart viele Klammern.
5. Das eindeutig bestimmte neutrale Element in $(V,+)$ heißt **Nullvektor** und wird mit $\mathbf{o}$ bezeichnet.
6. Der zu $\mathbf{x} \in V$ **inverse Vektor** wird mit $-\mathbf{x}$ bezeichnet.
7. Für $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ wird kurz $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ geschrieben. Dieser Vektor heißt auch **Differenzvektor** von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.
8. Im Fall $K = \mathbb{R}$ spricht man auch von einem **reellen Vektorraum**.

Satz 1.5 (Regeln für Rechnungen mit o, 0 und -1)
Ist V ein Vektorraum über K, so gilt für beliebige Vektoren $\mathbf{x} \in V$ und Skalare $a \in K$:

1. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ *und* $a \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$
2. *Aus* $a \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ *folgt* $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ *oder* $a = 0$.
3. $-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}$.

1.4 Beispiele für Vektorräume und Vektoren

1.4.1 Vektorraum der Zahlentupel

Wir betrachten einen beliebigen Körper K.
Die n-Tupel $\mathbf{x} \in K^n$ mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

und $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ sind die Vektoren.
Der Skalarenkörper sei K.

Die Addition $+$ zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert als

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

und die Multiplikation $\cdot$ eines Skalars $a \in K$ mit einem Vektor $\mathbf{x}$ als

$$a \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

$(K^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe, denn es gilt:
Assoziativität:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}
\end{aligned}
$$

Neutrales Element:
Das neutrale Element ist

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}.$$

Inverses Element:
Es existiert ein inverses Element

$$(-\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix},$$

denn dieses Tupel erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}.$$

Kommutativität:
Es gilt

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$(K, +, \cdot)$ sei ein Körper.

Dann sind auch die drei Vektorraumaxiome erfüllt:
(V1) Assoziativität:

$$(ab) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (ab)x_1 \\ (ab)x_2 \\ \vdots \\ (ab)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(bx_1) \\ a(bx_2) \\ \vdots \\ a(bx_n) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ \vdots \\ bx_n \end{pmatrix} = a(b \cdot \mathbf{x})$$

(V2) Distributivität:

$$a \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a \cdot \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1+y_1) \\ a(x_2+y_2) \\ \vdots \\ a(x_n+y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+ay_1 \\ ax_2+ay_2 \\ \vdots \\ ax_n+ay_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \\ \vdots \\ ay_n \end{pmatrix} = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$$

$$(a+b) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (a+b)x_1 \\ (a+b)x_2 \\ \vdots \\ (a+b)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+bx_1 \\ ax_2+bx_2 \\ \vdots \\ ax_n+bx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ \vdots \\ bx_n \end{pmatrix} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$$

(V3) Einselement:

$$1 \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

Spezialfälle

1. Vektorräume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$

Als Körper K werden die reellen Zahlen gewählt, d.h. es gilt $K = \mathbb{R}$. Die Anzahl Elemente in $\mathbb{R}$ ist unendlich; sie ist sogar überabzählbar, d.h. man kann sie nicht zählen, indem man allen Elementen in $\mathbb{R}$ mittels einer bijektiven Abbildung die natürlichen Zahlen zuordnet.

Für $n = 2$ und $K = \mathbb{R}$ ergibt sich der Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Die Vektoren sind dann Zahlenpaare der Gestalt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Da die Komponenten von $\mathbf{x}$ reelle Zahlen sind, enthält auch der $\mathbb{R}^2$ unendlich viele Elemente, genauer gesagt sogar überabzählbar unendlich viele.

Der Fall $n = 3$ und $K = \mathbb{R}$ führt auf den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Hier sind die Vektoren Zahlentripel der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Auch der $\mathbb{R}^3$ enthält unendlich viele Elemente, genauer gesagt überabzählbar unendlich viele.

An dieser Stelle ist aber etwas ganz Wichtiges zu beachten:
Weil die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ eine reelle Komponente mehr besitzen als die Vektoren im $\mathbb{R}^2$, enthält der $\mathbb{R}^3$ nicht mehr Vektoren als der $\mathbb{R}^2$. „Unendlich“ (Symbol ∞) ist ein abstrakter Begriff. Mit ihm kann man nicht rechnen in der Art $3 \cdot \infty$ ist mehr als $2 \cdot \infty$. Man kann daher sogar allgemein sagen:

> Der $\mathbb{R}^n$ enthält im Vergleich zum $\mathbb{R}^m$ mit $m < n$ nicht mehr Vektoren.

In Kapitel 1.7 werden wir behandeln, wie man den $\mathbb{R}^n$ und den $\mathbb{R}^m$ mit $m < n$ charakterisieren und vergleichen kann.

2. Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$
Nun sei $K = \mathbb{Z}_2$. Der $\mathbb{Z}_2$ enthält genau zwei Elemente, denn es gilt: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Er führt auf die Vektorräume $\mathbb{Z}_2^n$, die in der Codierungstheorie sehr wichtig sind. Die Vektoren des $\mathbb{Z}_2^n$ bestehen aus n-Tupeln der Zahlen 0 und 1. Somit enthält der Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$ genau 2^n Vektoren.
Als Beispiel betrachten wir den Fall $n = 3$. Hier gilt:

$$\mathbb{Z}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.4.2 Vektorraum der Funktionen

Die Vektoren sind die reellen Funktionen $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$.
Der Skalarenkörper sei $\mathbb{R}$.
Die Addition zweier Funktionen f und g sei definiert als

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) \quad \forall x \in [\,a, b\,]$$

und die Multiplikation als

$$c \cdot f(x) = (cf)(x) \quad \forall c \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in [\,a, b\,]$$

Dann ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, und die Vektorraumaxiome werden erfüllt.

Zum besseren Verständnis soll auf den Unterschied zwischen $f(x)+g(x)$ und $(f+g)(x)$ sowie zwischen $c \cdot f(x)$ und $(c \cdot f)(x)$ noch einmal näher eingegangen werden.
f und g beschreiben die Abbildungsvorschriften zweier Funktionen. Als Beispiel soll gelten:

$$\begin{aligned} f &: \square^2 + 4\square + 6 \\ g &: 5\square - 2 \end{aligned}$$

Die Vorschrift für f lautet also: „Quadriere die abzubildende Zahl, addiere dann das Vierfache der Zahl und addiere schließlich 6.“ Analoges gilt fir g.
Für die Summe $f + g$ und das skalare Vielfache $c \cdot f$ ergeben sich somit die Abbildungsvorschriften:

$$\begin{aligned} f + g &: \square^2 + 9\square + 4 \\ c \cdot f &: c\square^2 + 4c\square + 6c \end{aligned}$$

Wendet man nun die einzelnen Abbildungsvorschriften auf x an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+4x+6 \\ g(x) &= 5x-2 \\ (f+g)(x) &= x^2+9x+4 \\ (c\cdot f)(x) &= cx^2+4cx+6c \end{aligned}$$

Hiermit wird offensichtlich, dass die oben genannten Definitionen $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$ und $c\cdot f(x)=(c\cdot f)(x)$ sinnvoll sind.

1.5 Anwendungen von Vektoren und Vektorräumen

1.5.1 Anwendungen von Vektoren

1.5.1.1. Vektor als gerichtete Größe

Man unterscheidet skalare Größen und gerichtete Größen. Zu den skalaren Größen gehören z.B. Temperatur T und Masse m. Bei ihnen interessiert nur der Zahlenwert, bei der Temperatur $T=15^oC$ oder bei der Masse $m=15\,kg$. Demgegenüber spielt bei gerichteten Größen wie etwa der Geschwindigkeit, der Kraft oder dem Magnetfeld auch die Richtung eine Rolle. So reicht bei der Geschwindigkeit die Angabe $v=5\frac{km}{h}$ allein nicht aus, weswegen man sie mittels Vektoren darstellt. Die Komponenten geben dann die Geschwindigkeiten parallel zu den jeweiligen Koordinatenachsen an. Bei der grafischen Darstellung als Pfeil kennzeichnet die Pfeilspitze, in welche Richtung sich das Objekt bewegt, und die Länge des Pfeils ist ein Maß für den Betrag der Geschwindigkeit.
Beispiel: Der Vektor

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\left[\frac{km}{h}\right]$$

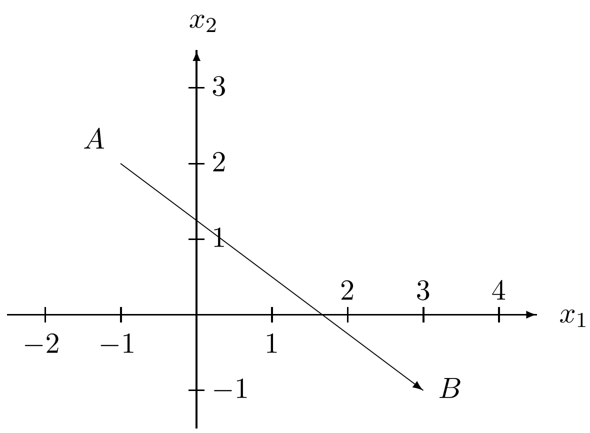
gibt eine Geschwindigkeit mit dem Betrag $v=5\frac{km}{h}$ an, wobei die Bewegung in x-Richtung mit $3\frac{km}{h}$ und in y-Richtung mit $4\frac{km}{h}$ erfolgt.

1.5.1.2. Vektor als Verschiebungspfeil

Ein Vektor

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

gibt an, dass ein Punkt in x_1-Richtung um 4 und in x_2-Richtung um -3 verschoben wird.

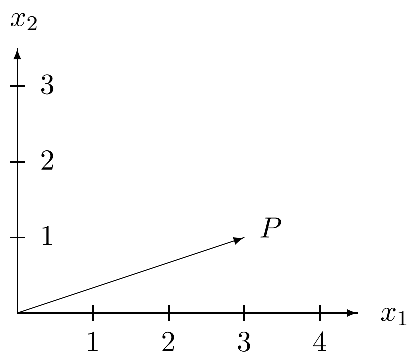


Analoges lässt sich auch für Zahlentripel formulieren.

1.5.1.3 Vektoren als freie Vektoren und Ortsvektoren

Als freie Vektoren bezeichnet man Pfeile, die von einem beliebigen Punkt A zu einem beliebigen Punkt B führen.

Pfeile, die als Anfangspunkt den Koordinatenursprung besitzen, bezeichnet man als Ortsvektoren. Jedem Punkt P kann eindeutig ein solcher Pfeil zugeordnet werden, der vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt führt.



In dem dargestellten Fall liegt also folgende Zuordnung vor:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P(x_1, x_2)$$

1.5.2 Anwendungen von Vektorräumen

Eine wichtige Anwendung betrifft die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, denn sie entsprechen den Vektorräumen der Ortsvektoren der zweidimensionalen Ebene bzw. des dreidimensionalen Raumes. Diese Vektoren und Vektorräume werden in der Computergrafik und in der analytischen Geometrie viel angewendet.

1.5.2.1 Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

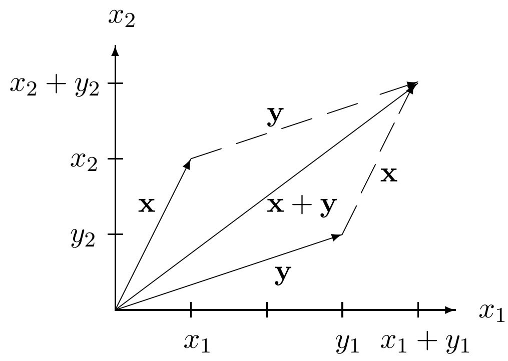
werden als Ortsvektoren aufgefasst. Führt man ein kartesisches Koordinatensystem ein und setzt den Ursprung als Anfangspunkt der Ortsvektoren fest, so lässt sich jedem Ortsvektor $\mathbf{x}$ ein Punkt P mit den Koordinaten (x_1, x_2) zuordnen. Die Koordinaten von P stellen dann die Komponenten des Ortsvektors dar. Also gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\mapsto (x_1, x_2) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto P(x_1, x_2) \end{aligned}$$

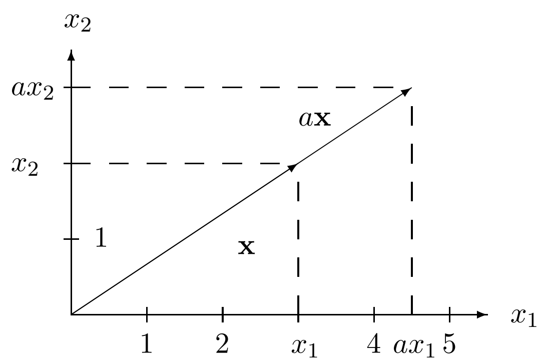
In Abschnitt 1.4.1 wurde bereits gezeigt, dass die aus Zahlenpaaren gebildeten Vektoren die Axiome des Vektorraums erfüllen.
Die Summe zweier Vektoren $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ und die Multiplikation von $\mathbf{x}$ mit einem Skalar a lassen

sich leicht veranschaulichen:

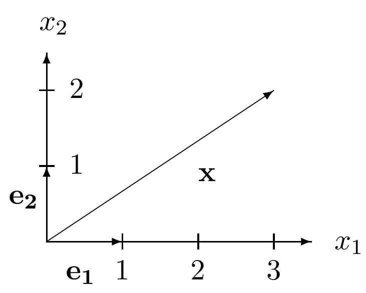
Wir betrachten zuerst die Summe zweier Vektoren **x** und **y**.
Die Ortsvektoren **x** und **y** werden addiert, indem der Anfangspunkt von **y** an die Spitze von **x** gesetzt wird. Der Summenvektor **x** + **y** beginnt dann im Anfangspunkt von **x** und endet bei der Spitze von **y**. Offensichtlich lassen sich diese Operationen auch in umgekehrter Reihenfolge ausführen. So ergibt sich ein Parallelogramm, bei dem die zu addierenden Vektoren die Seiten und der Summenvektor die Diagonale bilden.



Als Nächstes widmen wir uns der Multiplikation eines Vektor **x** mit einem Skalar a.
Diese Multiplikation wird ausgeführt, indem der Vektor **x** um den Faktor a verlängert wird (oder für $|a| < 1$ verkürzt wird). Für $a < 0$ zeigt der Vektor $a \cdot \mathbf{x}$ in die entgegengesetzte Richtung von **x**.
Die nachstehende Grafik verdeutlicht noch einmal die Operation.



Sinnvoll ist die Einführung von Einheitsvektoren $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$. Diese Vektoren besitzen die Länge eins und liegen auf der x_1- bzw. x_2-Achse. Dies verdeutlicht folgende Grafik:

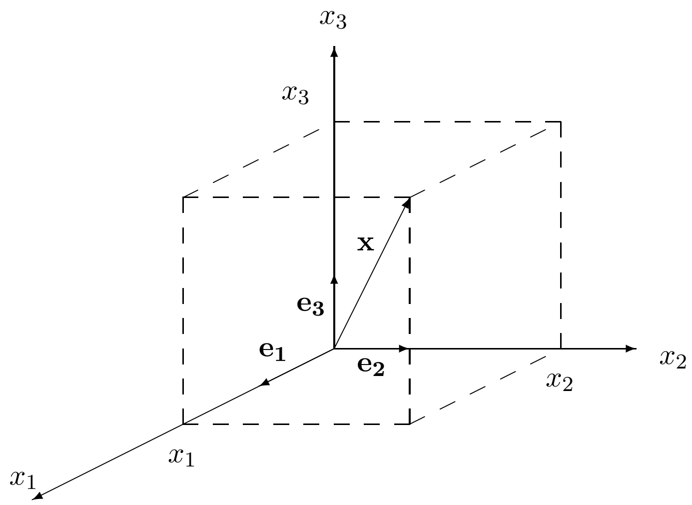


Mit Hilfe von $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ lässt sich ein Vektor $\mathbf{x}$ wie folgt darstellen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$$

1.5.2.2 Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Als Koordinatensystem wird nun ein dreidimensionales Koordinatensystem zugrunde gelegt.



Analog zum $\mathbb{R}^2$ wird jedem Vektor $\mathbf{x}$ ein Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ zugeordnet, dessen Koordinaten als Komponenten eines Vektors des $\mathbb{R}^3$ interpretiert werden.

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Führt man wieder Einheitsvektoren $\mathbf{e_i}$, $i = 1, 2, 3$ ein, so gilt:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + x_3\mathbf{e_3}$$

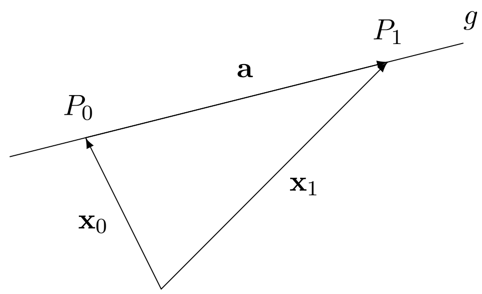
Die oben stehende Grafik verdeutlicht diesen Zusammenhang.

1.5.2.3 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ lassen sich mithilfe von Vektoren sehr gut beschreiben.

a) Geraden

Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig festgelegt. Durch Angabe zweier Ortsvektoren $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_1$ lässt sich daher eine Gerade g vektoriell beschreiben:



Der Ortsvektor $\mathbf{x}_0$ führt zu einem Punkt auf der Geraden g. Mittels eines zweiten Ortsvektors $\mathbf{x}_1$ bestimmt man den Richtungsvektor $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, der auf g liegt und die Richtung der Geraden festlegt. Die Geradengleichung lautet somit:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

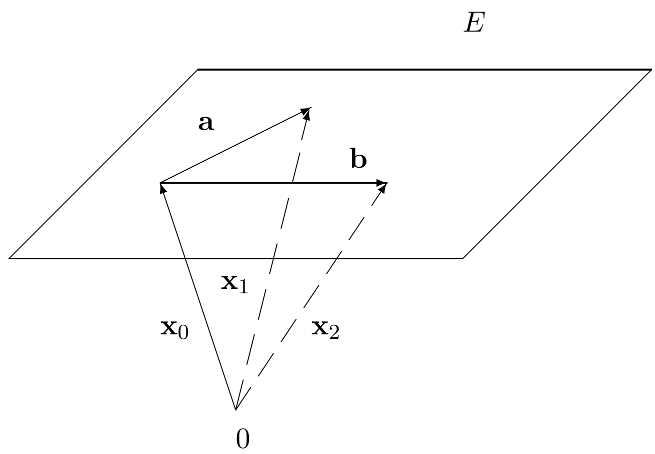
Dabei stellt $\mathbf{x}$ den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf g dar und λ einen freien Parameter.

b) Ebenen

Eine Ebene wird durch drei Punkte eindeutig definiert. Daher benötigt man nun drei Ortsvektoren $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, mit denen man zwei Richtungsvektoren $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{b} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$ bestimmt. Die Ebenengleichung lautet daher:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x}$ ist der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt der Ebene, und λ, μ sind frei wählbare Parameter.



1.6 Untervektorräume

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Untervektorräumen oder auch Teilräumen. Bei ihnen handelt es sich nicht bloß um Teilmengen eines Vektorraums, sondern es müssen definierte Eigenschaften erfüllt sein. Dies beschreibt die folgende Definition.

Definition 1.10 (Untervektorraum)
Gegeben sei ein Vektorraum V über dem Körper K und eine Teilmenge $U \subseteq V$. Dann wird U als **Untervektorraum** *oder* **Teilraum** *bezeichnet, wenn gilt:*

(U1) $U \neq \{\ \}$

(U2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ *gilt* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$
(d.h. U ist abgeschlossen gegenüber der Addition)

(U3) $\forall a \in K, \quad \mathbf{x} \in U$ *gilt* $a\mathbf{x} \in U$
(d.h. U ist abgeschlossen gegenüber der Multiplikation mit Skalaren)

Die Eigenschaften (U2) und (U3) von Untervektorräumen bedeuten: Addition von Vektoren oder Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar führen nicht aus dem Untervektorraum heraus. Hierin besteht der große Unterschied zu einer einfachen Teilmenge: Angenommen, der Vektorraum sei der $\mathbb{R}^3$, und wir betrachten als Teilmenge W einen dreidimensionalen Würfel der Kantenlänge 1, dessen eine Ecke im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Schon die Multiplikation des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit 2 führt aus W heraus. W ist also kein Untervektorraum!

Die in der Definition von Untervektorräumen aufgeführten Eigenschaften zeigen: Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die im Vektorraum V definiert sind, werden auch in U induziert. Wenn also die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ im Vektorraum V definiert sind, dann gelten sie analog auch im Untervektorraum U. Die Beziehung zwischen Untervektorräumen und Vektorräumen ist sogar noch enger:

Satz 1.6 (Der Untervektorraum als Vektorraum)
Wenn V ein Vektorraum über einem Körper K ist und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist auch U ein Vektorraum über K.

Die Bezeichnung Unter**vektorraum** hat also ihren Grund und ist inhaltlich gerechtfertigt.

Überprüfung, ob eine Menge $M \subseteq V$ einen Untervektorraum darstellt:

Da $U \neq \{\ \}$ gilt, gibt es wenigstens einen Vektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \in U$. Wegen der Eigenschaft (U3) gilt: Mit $\mathbf{x}$ muss auch $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ in U liegen. Somit enthält ein Untervektorraum stets den Nullvektor.
Soll also untersucht werden, ob eine Menge $M \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, so prüft man am besten zuerst, ob der Nullvektor in M liegt. Falls $\mathbf{o} \in M$ gilt, ist (U1) erfüllt. Falls $\mathbf{o} \notin M$, kann M kein Untervektorraum sein.

Beispiele

1. $U = \{\mathbf{o}\}$ ist ein Untervektorraum. Er ist in jedem Vektorraum V enthalten und wird als **Nullraum** bezeichnet.
   Der Beweis, dass U einen Untervektorraum darstellt, erfolgt durch Überprüfung der Untervektorraumeigenschaften:
   (U1) ist erfüllt da $\mathbf{o} \in U$ gilt.
   (U2) ist erfüllt wegen $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} \in U$.
   (U3) ist ebenfalls erfüllt, da $\forall a \in K$ gilt $a \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} \in U$.

2. Gegeben sei der Vektorraum K^3 mit beliebigem Körper K. Wir betrachten nun verschiedene Teilmengen des K^3.

   2.1 Die Menge
   $$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in K \right\}$$
   mit $U_1 \subset K^3$ ist ein Untervektorraum.
   Beweis:
   (U1) Da $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$ gilt, folgt $U_1 \neq \{\,\}$.
   (U2) Es seien $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$. Dann gilt
   $$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \quad .$$
   Also ist (U2) erfüllt.
   (U3) Es sei $\mathbf{x} \in U_1$ und $a \in K$. Dann gilt:
   $$a \cdot \mathbf{x} = a \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \quad .$$
   Somit ist auch U3 erfüllt.

   2.2 Die Menge
   $$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, c \in K \right\}$$
   mit $U_2 \subset K^3$ hingegen ist kein Untervektorraum.
   Überprüfung Nullvektor:

   Es gilt $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2$, daher kann U_2 kein Untervektorraum sein.

   (U1) Wegen $0 \in K$ gilt:
   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$$

Somit ist U_2 nicht leer, und (U1) ist erfüllt.
(U2) gilt nicht, da

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2 \quad .$$

(U3) ist ebenfalls nicht erfüllt, da für alle $a \in K$ mit $a \neq 1$ gilt

$$a \cdot \mathbf{x} = a \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2 \quad .$$

Wichtig dabei anzumerken ist, dass es zum Nachweis, dass U_2 kein Untervektorraum ist, genügt hätte zu zeigen, dass eine einzige Untervektorraumeigenschaft nicht erfüllt ist.

3. Untervektorräume treten auch im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen auf. Wir betrachten daher nun ein lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über dem Körper K. Es besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + \cdots + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Koeffizienten $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ sowie die rechten Seiten der Gleichungen $b_i, i = 1, \ldots, m$ sind gegeben. Unter der Lösung eines linearen Gleichungssystems versteht man ein n-Tupel $\mathbf{x}$ mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \quad ,$$

dessen Komponenten $x_j, j = 1, \ldots, n$ nach Einsetzen in die linearen Gleichungen jede einzelne dieser Gleichungen erfüllen.
Die Menge aller $\mathbf{x}$, die das lineare Gleichungssystem erfüllen, bezeichnet man als Lösungsmenge.
Wenn $b_i = 0$ gilt für $i = 1, \ldots, m$, spricht man von einem homogenen linearen Gleichungssystem. Die Lösungsmenge U eines solchen homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum. Wir beweisen das.
(U1) Das Tupel $\mathbf{x}$ mit $x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$ ist eine Lösung. Also gilt $\mathbf{o} \in U$.
(U2) Die Tupel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

seien Elemente der Lösungsmenge. Setzt man nun

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

in das lineare Gleichungssystem ein, so ergibt sich für jede Gleichung $i, i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = 0$$

Ausmultiplizieren liefert

$$a_{i1}x_1 + a_{i1}y_1 + a_{i2}x_2 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}x_n + a_{in}y_n = 0$$

Nach Umordnen ergibt sich

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n}_{= 0 \quad \text{nach Vor.}} + \underbrace{a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n}_{= 0 \quad \text{nach Vor.}} = 0$$

Also liegt $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in der Lösungsmenge.
(U3) Sei $\mathbf{x} \in U$ und $a \in K$. Setzt man

$$a\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

in das lineare Gleichungssystem ein, so folgt für alle i mit $i = 1, \cdots, m$

$$a_{i1}ax_1 + a_{i2}ax_2 + \cdots + a_{in}ax_n = 0$$

und somit

$$a\,\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}_{= 0 \quad \text{nach Vor.}} = 0$$

Also liegt $a\mathbf{x}$ in der Lösungsmenge.

Die Unterraumaxiome (U2) und (U3) zeigen: Man kann Vektoren addieren und gleichzeitig jeden von ihnen mit einem Skalar multiplizieren, und der sich jeweils ergebende neue Vektor liegt wieder im Untervektorraum. Dies führt auf den Begriff der Linearkombination.

Definition 1.11 (Linearkombination)
Gegeben seien ein Vektorraum V sowie ein beliebiger Körper K. Ferner seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ und Skalare $a_1, a_2, \ldots, a_r \in K$ gegeben. Dann bezeichnet man

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{v}_i$$

als **Linearkombination** *der Vektoren $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$.*
Gilt für einen Vektor $\mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathbf{v}_i \quad ,$$

so sagt man: „$\mathbf{v}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$“ oder „$\mathbf{v}$ lässt sich aus $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linear kombinieren“.

Beispiel
Gegeben seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \\ &= -2 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_1 und a_2 lassen sich wegen $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen:

$$\begin{aligned} -4 &= a_1 - 2a_2 \\ -8 &= 4a_1 + 0a_2 \\ 13 &= -3a_1 + 7a_2 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert $a_1 = -2$. Einsetzen in die erste oder dritte Gleichung führt auf $a_2 = 1$.

Der Vektor

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hingegen lässt sich nicht aus $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear kombinieren, denn es gilt:

$$\begin{aligned} -1 &= a_1 - 2a_2 \\ 12 &= 4a_1 + 0a_2 \\ 4 &= -3a_1 + 7a_2 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert $a_1 = 3$. Setzt man dies in die erste und die dritte Gleichung ein, so erhält man unterschiedliche Werte für a_2: Die erste Gleichung führt auf $a_2 = 2$ und die dritte auf $a_2 = \frac{13}{7}$. Dies ist ein Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem ist also nicht lösbar. Die Annahme, $\mathbf{w}$ lasse sich aus $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear kombinieren, war also falsch.

Ausgehend von der Definition der Linearkombination stellt sich die Frage: Was lässt sich über die Gesamtheit aller Vektoren aussagen, die sich als Linearkombination von gegebenen Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ darstellen lassen? Dies führt als Erstes auf den Begriff der linearen Hülle.

Definition 1.12 (Lineare Hülle)
Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$ eines Vektorraumes V über einem Körper K. Dann bezeichnet man die Menge aller Linearkombinationen der $\mathbf{v}_i$ als **lineare Hülle** *der Vektoren $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$. Man schreibt:*

$$LH(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r) = \{a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_r\mathbf{v}_\mathbf{r} \mid \mathbf{v}_i \in V,\ a_i \in K,\ i = 1, \ldots, r\}$$

Statt linearer Hülle spricht man auch von einem Erzeugnis.

Es lässt sich sogar zeigen, dass die lineare Hülle ein Untervektorraum ist. Präziser gesprochen gilt:

Satz 1.7 (Lineare Hülle und Untervektorraum)
Die lineare Hülle $LH(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ ist ein Untervektorraum. Sie ist der kleinste Untervektorraum, der die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ enthält.

Die folgenden beiden Beispiele machen die Eigenschaften einer linearen Hülle noch verständlicher.

Beispiele

1. Das erste Beispiel illustriert den Zusammenhang zwischen einer linearen Hülle und Unterräumen, die diejenigen Vektoren enthalten, deren lineare Hülle gebildet wurde.
   Gegeben seien die zwei Vektoren $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für ihre lineare Hülle gilt

$$\begin{aligned} LH(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) &= \{\, a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

   Die lineare Hülle ist also der $\mathbb{R}^2$. Der Raum $\mathbb{R}^2$ stellt einen Untervektorraum dar, der $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ enthält. Aber auch der $\mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum, der $\mathbf{e_1}$ und $\mathbf{e_2}$ enthält, jedoch ist der $\mathbb{R}^3$ nicht der kleinste Untervektorraum mit dieser Eigenschaft.

2. Im zweiten Beispiel werden ein spezieller Körper und ein spezieller Vektorraum gewählt. Diese spezielle Wahl hat interessante Konsequenzen für die Eigenschaften der linearen Hülle.
   Es gelte $K = \mathbb{Z}_2$. Gegeben seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (\mathbb{Z}_2)^3$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

   Somit ergibt sich für die lineare Hülle

$$\begin{aligned} LH(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2 \right\} \\ &= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1=a_2=0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1=1, a_2=0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_1=0, a_2=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_1=a_2=1} \right\} \end{aligned}$$

   Offensichtlich enthält hier die lineare Hülle und somit ein Untervektorraum lediglich vier Vektoren!

1.7 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Im letzten Abschnitt haben wir gelernt, was eine Linearkombination ist und dass mit ihrer Hilfe die Vektoren von Untervektorräumen dargestellt werden können. Wir stellen nun die Frage: Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Eigenschaften der Vektoren, deren Linearkombination gebildet wird, und denjenigen Vektoren, die mittels dieser Linearkombination darstellbar sind? Um diese Frage zu beantworten, untersuchen wir, wie sich aus gegebenen Vektoren der Nullvektor linear kombinieren lässt.

Am einfachsten lässt sich der Nullvektor aus beliebigen Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ linear kombinieren, indem man alle Koeffizienten Null setzt. Die Gleichung

$$\mathbf{o} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r$$

wird also erfüllt für

$$a_1 = \ldots = a_r = 0 \quad .$$

Weil dies eine sehr einfache („triviale“) Lösung des Problems ist, bezeichnet man dies auch als die triviale Darstellung.

In bestimmten Fällen lässt sich der Nullvektor aus gegebenen Vektoren auch dann linear kombinieren, wenn nicht alle Koeffizienten gleichzeitig Null sind. Beispielsweise folgt für

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\mathbf{o} = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 2 \cdot \mathbf{u}_2 - 1 \cdot \mathbf{u}_3 \quad .$$

Es gilt also

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_3 = -1$$

Genauso ist es aber auch möglich, dass sich drei Vektoren ausschließlich auf die triviale Weise zum Nullvektor linear kombinieren lassen. Dies gilt zum Beispiel für

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung

$$\mathbf{o} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3$$

führt auf dies lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 0 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung ist

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad .$$

Die Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ bezeichnet man als linear abhängig und die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ als linear unabhängig.

Die allgemeine Definition von linearer Abhängigkeit und Unabhängigkeit wird im Folgenden zusammengefasst:

Definition 1.13 (Linear abhängig, linear unabhängig)
Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$.

- *Die Vektoren* $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, n$ *sind* **linear unabhängig**, *wenn*

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}$$

  nur für

$$a_1 = \ldots = a_r = 0$$

  erfüllt ist. Das heißt: Alle Koeffizienten müssen gleichzeitig Null sein.

- *Die Vektoren* $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$ *sind* **linear abhängig**, *wenn*

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}$$

  für mindestens ein $a_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, r\}$ *erfüllt ist. Das heißt: Es müssen nicht alle Koeffizienten gleichzeitig Null sein.*

Zur Illustration betrachten wir einige spezielle Vektoren.
Wir beginnen mit dem Nullvektor $\mathbf{o}$. Da $a_1 \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ auch für $a_1 \neq 0$ gilt, ist der Nullvektor immer linear abhängig.
Ein einzelner Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ hingegen kann die Gleichung $a_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o}$ nur für $a_1 = 0$ erfüllen. Daher ist ein einzelner Vektor stets linear unabhängig.
Eine wichtige Rolle spielen die Vektoren $\mathbf{e}_i \in K^n$, $i = 1, \ldots, n$ mit

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn die Gleichung

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

ist nur für $a_i = 0, i = 1, \ldots, n$ erfüllt. Die Vektoren $\mathbf{e}_i$ bezeichnet man als **kanonische Einheitsvektoren** des K^n (Alle besitzen die Länge 1, und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander.).

Eine weitere wichtige Frage ist, ob sich ein Vektor als Linearkombination anderer gegebener Vektoren darstellen lässt. Auch diese Frage kann mit Hilfe der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit beantwortet werden.

Satz 1.8 (Darstellbarkeit als Linearkombination, lineare (Un-)Abhängigkeit)
Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.
Die Vektoren $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$ *sind genau dann linear abhängig, wenn sich mindestens ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen lässt.*
Die Vektoren $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$ *sind genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner der* $\mathbf{v}_i$ *als Linearkombination der anderen darstellen lässt.*

Das kann man auch verstehen:
Wir betrachten die Aussage über linear abhängige Vektoren.
Angenommen, die $\mathbf{v}_i, i = 1, \ldots, r$ sind linear abhängig. Dann gilt

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}$$

mit $a_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Für dieses i ergibt sich

$$a_i\mathbf{v}_i = -a_1\mathbf{v}_1 - \ldots - a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} - \ldots - a_r\mathbf{v}_r$$

Somit ist $\mathbf{v}_i$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar.
Nun nehmen wir an, dass der Vektor $\mathbf{v}_k$, $k \in \{1, \ldots, r\}$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist. Das bedeutet:

$$\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + a_r\mathbf{v}_r$$

Daraus folgt

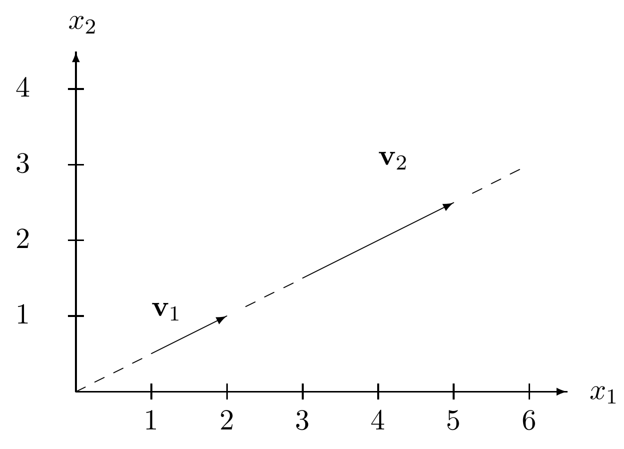
$$\mathbf{o} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1) \cdot \mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + a_r\mathbf{v}_r$$

Dies ist aber eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Somit sind die $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, r$ linear abhängig.
Die Aussage über linear unabhängige Vektoren kann man analog beweisen.

Die Aussage dieses Satzes hilft, die Untersuchung von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu verstehen. Dazu betrachten wir einige Beispiele.

Beispiele

1. Angenommen, es gilt $V = \mathbb{R}^2$. Wenn man nun die Vektoren als Verschiebungspfeile interpretiert, dann liegen alle Vektoren auf einer Geraden. Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ wie im nachstehenden Bild dargestellt.



$\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind linear abhängig, denn es gilt

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 \quad .$$

Dabei gilt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Nun sei $V = \mathbb{R}^2$. Gegeben seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind linear abhängig, denn es gilt

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{5} \cdot \mathbf{v}_2 \quad .$$

3. Die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig wegen $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$.
Die Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hingegen sind linear unabhängig.

4. Nun seien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ Vektoren aus V über $\mathbb{R}$. Dann sind

$$\mathbf{a},\ \mathbf{a} - 2\mathbf{b},\ \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$$

linear abhängig, denn es gilt:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$$

Es erhebt sich nun die Frage: Wann kann man sämtliche Vektoren eines Vektorraums V aus einer gegebenen Menge von Vektoren darstellen? Offensichtlich ist dies dann möglich, wenn V der linearen Hülle der gegebenen Vektoren entspricht oder in der linearen Hülle liegt. In beiden Fällen können mit Hilfe von Linearkombinationen der Vektoren der gegebenen Menge sämtliche Vektoren aus V dargestellt werden.

Die folgende Definition fasst unsere neu gewonnene Erkenntnis zusammen und führt dazu zwei neue Begriffe ein.