Numerične metode 1, 2016/2017

2. domača naloga

Nalogo rešite v programu Matlab ali Octave. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn2.zip` v spletni učilnici najkasneje do 6. aprila 2017.

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{25\times 25}$ bločna diagonalna matrika z elementom $a_{i,j}$ na mestu (i,j), v kateri vsak diagonalni blok velikosti 5×5 ustreza matriki

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

   Poleg tega naj bo $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{25}) = (1, 2, \ldots, 25)$. Preverite, da lahko približek za rešitev $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{25})$ sistema $Ax = b$ dobimo s tako imenovano Jacobijevo iteracijo

$$x_i^{(r)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{(r-1)} \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, 25, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

   pri začetnem približku $x^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)$. Koliko korakov iteracije r je potrebnih, da se približek $x^{(r)}$ v drugi normi razlikuje od točne rešitve x, ki jo izračunate z vgrajeno metodo, za manj kot 10^{-10}?

2. Dan je sistem $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $b \in \mathbb{C}^n$. Sestavite funkcijo, ki sprejme matriko A in vektor b ter dan kompleksni sistem nadomesti z ekvivalentnim realnim sistemom $By = c$, kjer je $B \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ in $c \in \mathbb{R}^{2n}$. Funkcija naj nato izračuna LU razcep z delnim pivotiranjem $PB = LU$ (uporabite vgrajeni ukaz `lu`), s pomočjo matrik L, U in P določi $y \in \mathbb{R}^{2n}$ ter vrne rešitev $x \in \mathbb{C}^n$ in matrike L, U, P. Funkcijo preizkusite s podatki

$$\begin{aligned} &\texttt{A} = \texttt{fliplr}(\texttt{magic}(5)) + \texttt{1i} * \texttt{flipud}(\texttt{magic}(5)); \\ &\texttt{b} = (\texttt{0} : \texttt{2} : \texttt{8})' + \texttt{1i} * (\texttt{1} : \texttt{2} : \texttt{9})'; \end{aligned}$$

   in preverite, da se dobljena rešitev ujema z rešitvijo, ki jo dobite z direktnim reševanjem kompleksnega sistema z ukazom `A\b`. Izračunajte tudi $\|L\|_1$, $\|U\|_\infty$, $\|LPU\|_2$ in $\|UL\|_F$ za ta primer.

3. Dan je sistem dveh nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + y^2) - \sin(xy) &= \ln(2) + \ln(\pi), \\ e^{x-y} + \cos(xy) &= 0. \end{aligned}$$

Zapišite sistem v obliki

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (0,0)$$

in z uporabo vgrajenih ukazov `meshgrid` in `contour` narišite krivulji $f_1(x,y) = 0$ in $f_2(x,y) = 0$ na kvadratnem odseku $[-5,5] \times [-5,5]$. Slika naj vam služi kot orodje za določevanje začetnih približkov pri izračunu vseh rešitev sistema na tem odseku z Newtonovo metodo. Pri iskanju vsake izmed rešitev metodo izvajajte, dokler za približek $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ ne velja $\|f(\widetilde{x}, \widetilde{y})\|_2 < 10^{-10}$. Opazujte, koliko korakov iteracije je za to potrebnih.

4. Na spletni strani ARSO pridobite zgodovinske podatke o temperaturi tal za Ljubljano - Bežigrad. Vsebino datoteke (formata `.csv`) naložite v Matlab s pomočjo ukaza `importdata`. Izluščite podatke za 1. maj v letih od 1990 do 2016 in iz njih izračunajte povprečno temperaturo na višini 2, 5, 10, 20, 30, 50 in 100 centimetrov od tal. Določite parabolo, ki opisuje odvisnost temperature od višine in se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom.

   (a) Narišite podatke in parabolo ter izračunajte, kakšen je maksimalni absolutni odmik parabole od temperaturnih podatkov.

   (b) Ocenite, kakšna je povprečna temperatura tal 150 centimetrov nad tlemi.