Raport z MN2 z zadania 46

Jakub Bazyluk

11 maja 2022

Spis treści

1 Wstęp

W ramach projektu II z Metod Numerycznych zaimplementowałem dwa algorytmy do wyznaczania zer wielomianu - metoda Halley'a oraz metoda parabol. Przy wyznaczaniu wartości odpowiednich pochodnych zastosowano algorytm Hornera. Obie metody zostały przetestowane pod kątem zbieżności (również ilości iteracji), oraz czasu wykonywania obliczeń. Oczywiście im mniejsza liczba iteracji tym algorytm jest bardziej przydatny, szczególnie przy wyznaczaniu zer wielomianu dużego stopnia

2 Metoda Halley'a

Metoda wyznaczania zer wielomianu postaci $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Metoda polega na coraz dokładniejszym przybliżaniu miejsca zerowego funkcji, aż do pożądanej dokładności, korzystając z przybliżenia

$$w(x) \approx w(x_k) + w'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} w''(x_k)(x - x_k)^2$$

Następnie przyjmując $w(x_{k+1}) \approx 0$ otrzymujemy:

$$0 \approx w(x_k) + w'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} w''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Wyznaczamy x_{k+1}:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{w(x_k)}{w'(x_k) + \frac{1}{2} w''(x_k)(x_{k+1} - x_k)}$$

Korzystając z metody Newtona dostajemy:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{w(x_k)}{w'(x_k) - \frac{1}{2} w''(x_k) \frac{w(x_k)}{w'(x_k)}}$$

W ten sposób otrzymujemy kolejne przybliżenia "hiperboliczne"miejsca zerowego interesującego nas wielomianu.

3 Metoda parabol

Metoda wyznaczania zer wielomianu postaci $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Metoda polega na przybliżaniu miejsca zerowego funkcji, aż do pożądanej dokładności, rozwiązując równanie kwadratowe. W tym celu, podobnie jak przy metodzie Halley'a korzystamy z przybliżenia:

$$w(x) \approx w(x_k) + w'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}w''(x_k)(x - x_k)^2$$

Następnie przyjmując $w(x_{k+1}) \approx 0$ otrzymujemy równanie kwadratowe (ze względu na zmienną $(x_{k+1} - x_k)$):

$$0 \approx w(x_k) + w'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}w''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Rozwiązujemy to równanie otrzymując dwa rozwiązania (być może czasem będzie tylko jedno) i wybieramy to którego norma jest mniejsza (tzn. różnica przybliżeń $(x_{k+1} - x_k)$ jest mniejsza). W ten sposób otrzymujemy kolejne przybliżenia miejsca zerowego wielmianu.

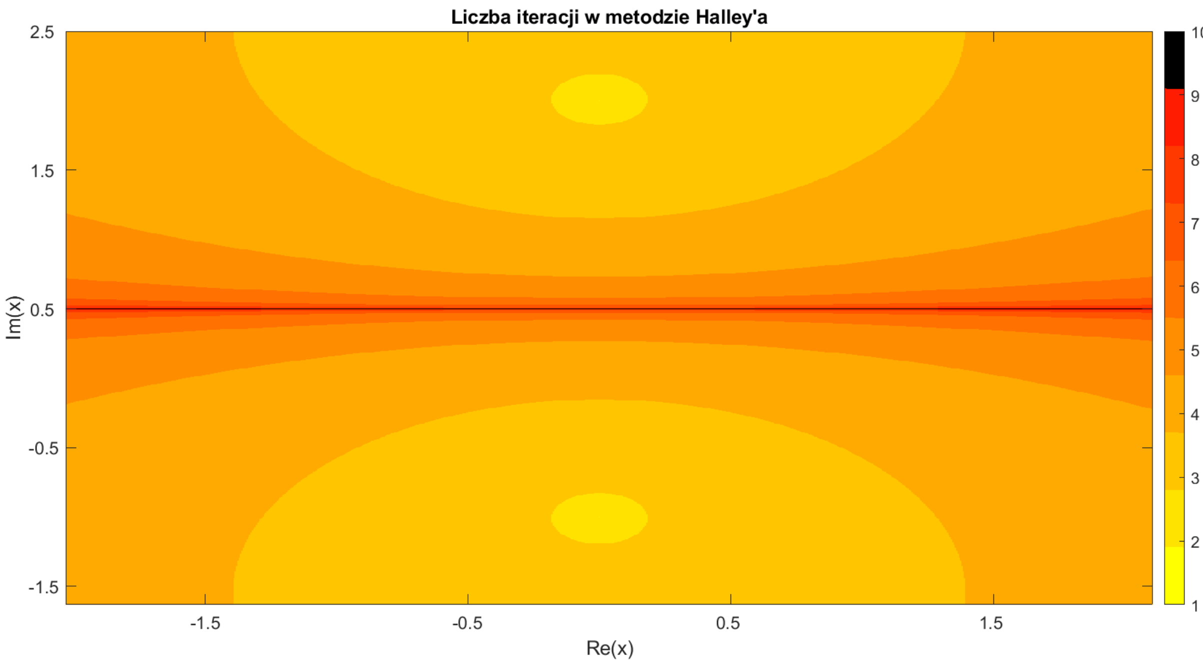
4 Uwagi

Ze względu na na wykorzystanie drugiej pochodnej metody nie działają dla funkcji stałych i liniowych. Warto zwrócić uwagę, że powyższe metody znajdują tylko jedno miejsce zerowe wielomianu dla danego punktu startowego x_0. Aby otrzymać wszystkie (lub przynajmniej te, które nas interesują) miejsca zerowe należy powtórzyć metodę dla różnych punktów początkowych. W tym celu weźmy kwadrat $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ oraz wybierzmy z niego na $n \times m$ równomiernie oddalonych punktów początkowych. W ten sposób wyznaczymy (w zależności od liczby punktów) interesujące nas rozwiązania. W tym miejscu warto zaznaczyć, że może dojść do sytuacji w której znalezione rozwiązanie będzie spoza naszego kwadratu. Jest to jak najbardziej poprawna procedura, gdyż kolejne iteracje mogą wyprowadzić nasze miejsce zerowe poza sprecyzowany obszar. Kolejną istotną rzeczą wartą odnotowania jest fakt, że wyznaczanie kolejnych przybliżeń poprzez rozwiązanie równania kwadratowego (metoda parabol) ma lepsze własności numeryczne niż bezpośrednie wyliczenie x_{k+1} (metoda Halley'a), gdyż przy obliczaniu kolejnego przybliżenia bierzemy pod uwagę poprawkę na x_k, a nie wyliczamy je ód nowa".

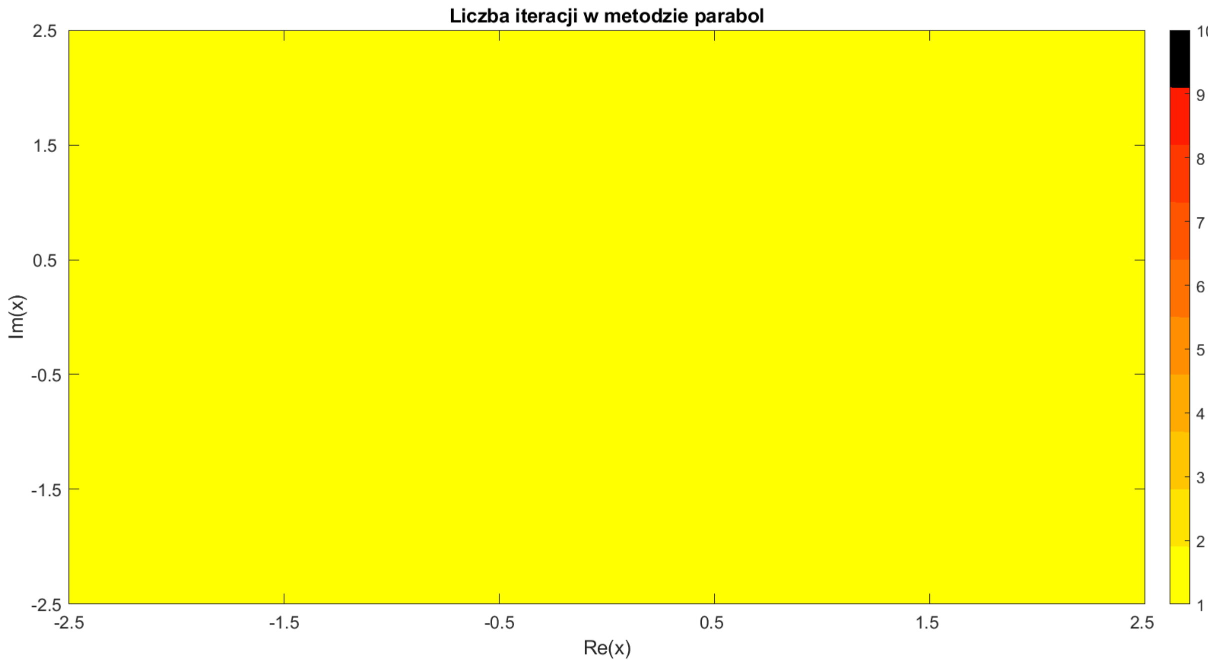
5 Przykłady obliczeniowe

5.1 Przykład 1.

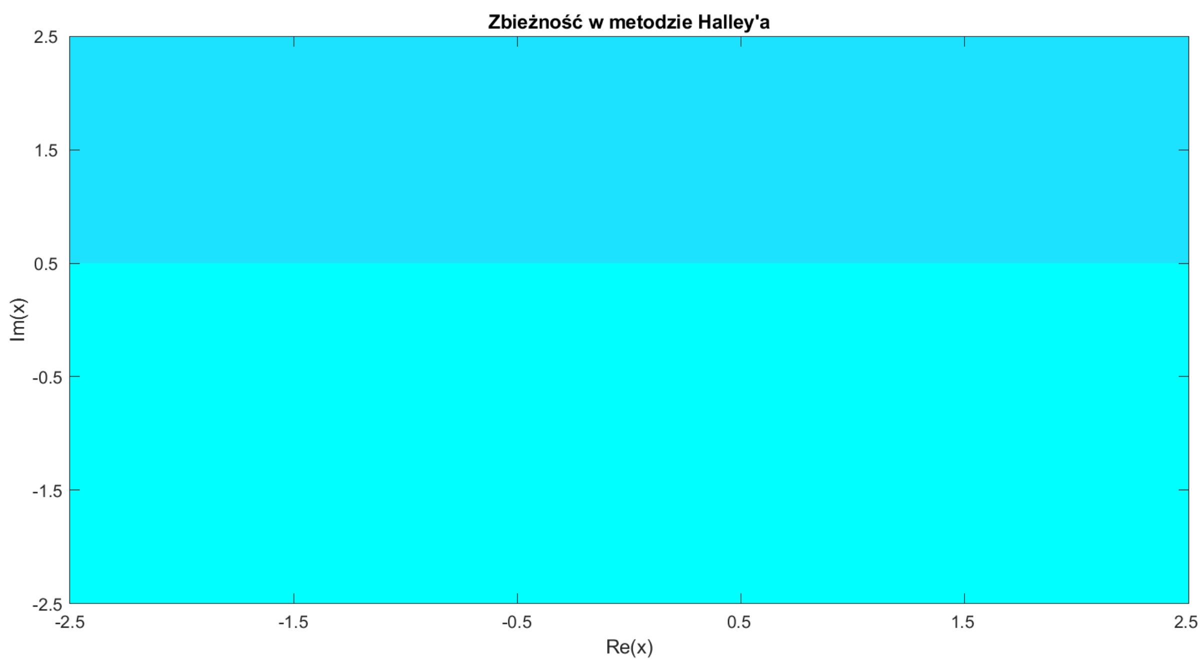
Zacznijmy od prostego wielomianu rzeczywistego $w(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ Zobaczmy ile iteracji potrzeba do otrzymania rozwiązania metodą Halley'a dla różnych punktów początkowych:



Widać, że w okolicy oczekiwanych rozwiązań iteracji potrzeba naprawdę niewiele. Zauważmy jednak, że dla $Re(x) = \frac{1}{2}$ metoda nie jest zbieżna (co potwierdzają testy dla większej liczby iteracji). Dla porównania spójrzmy na metodę parabol:



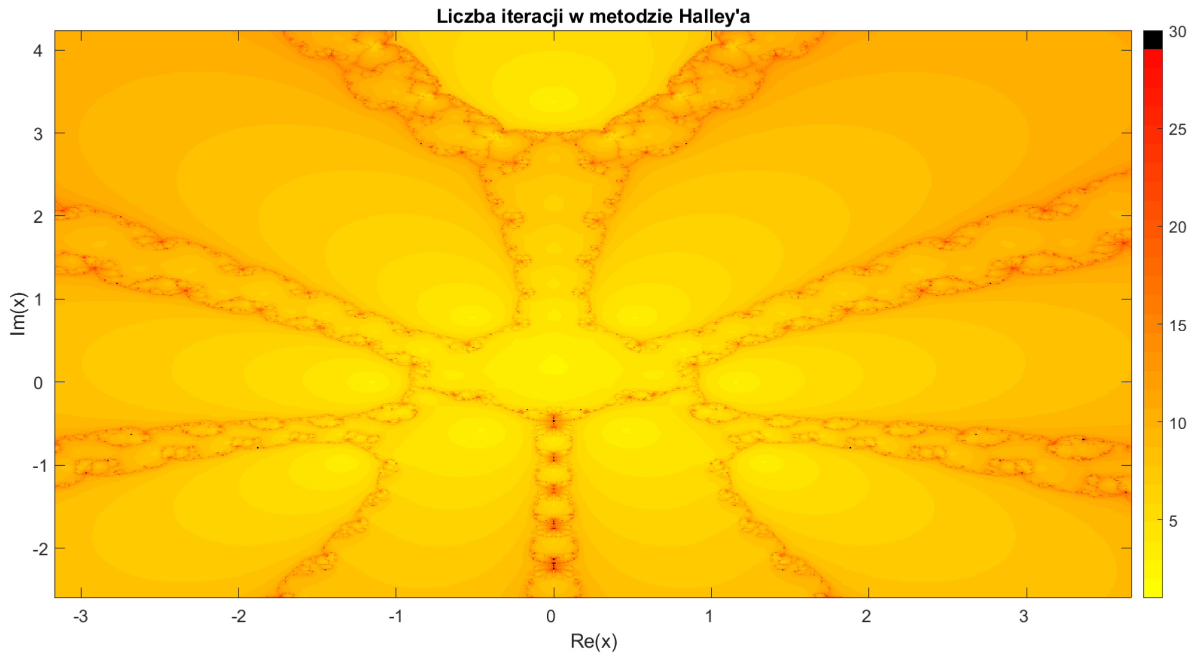
Okazuje się, że wystarczyła jedna iteracja!
Kontynuując dany przykład spójrzmy do którego rozwiązania zbiega metoda Halley'a dla różnych punktów początkowych:



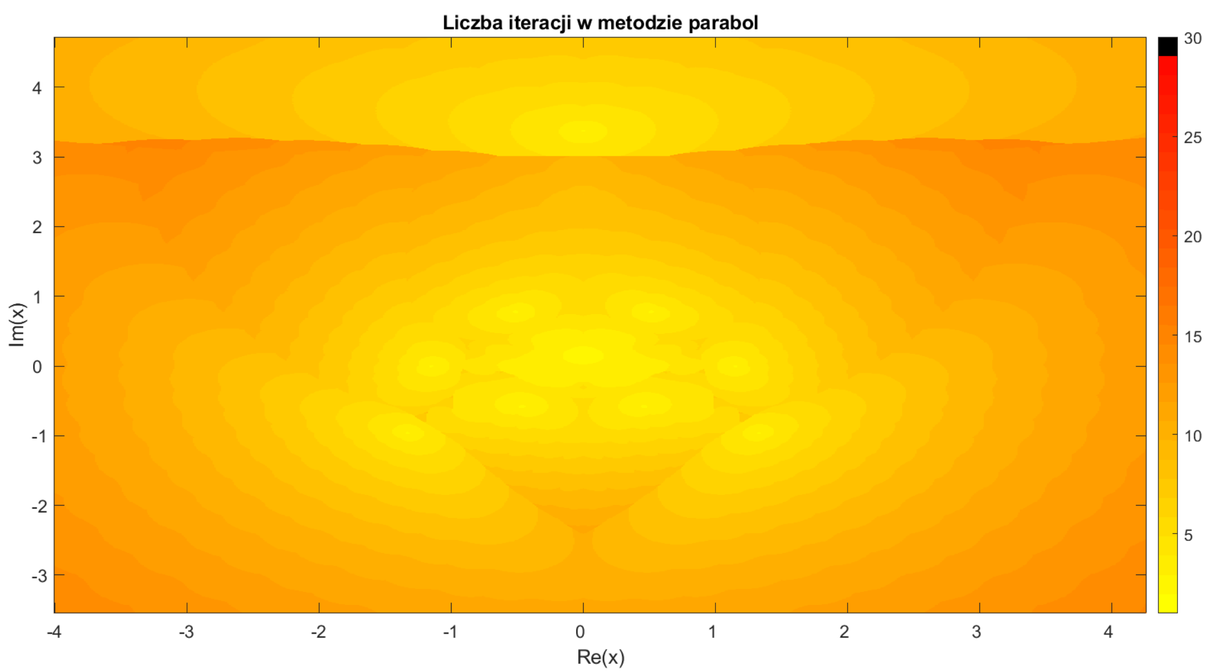
Okazuję się, że dla tak prostego wielomianu zbiega po prostu do tego punktu, którego jest na początku bliżej. Podobnie zresztą, zachowuje się metoda parabol i dlatego jej wykres pominiemy.

5.2 Przykład 2.

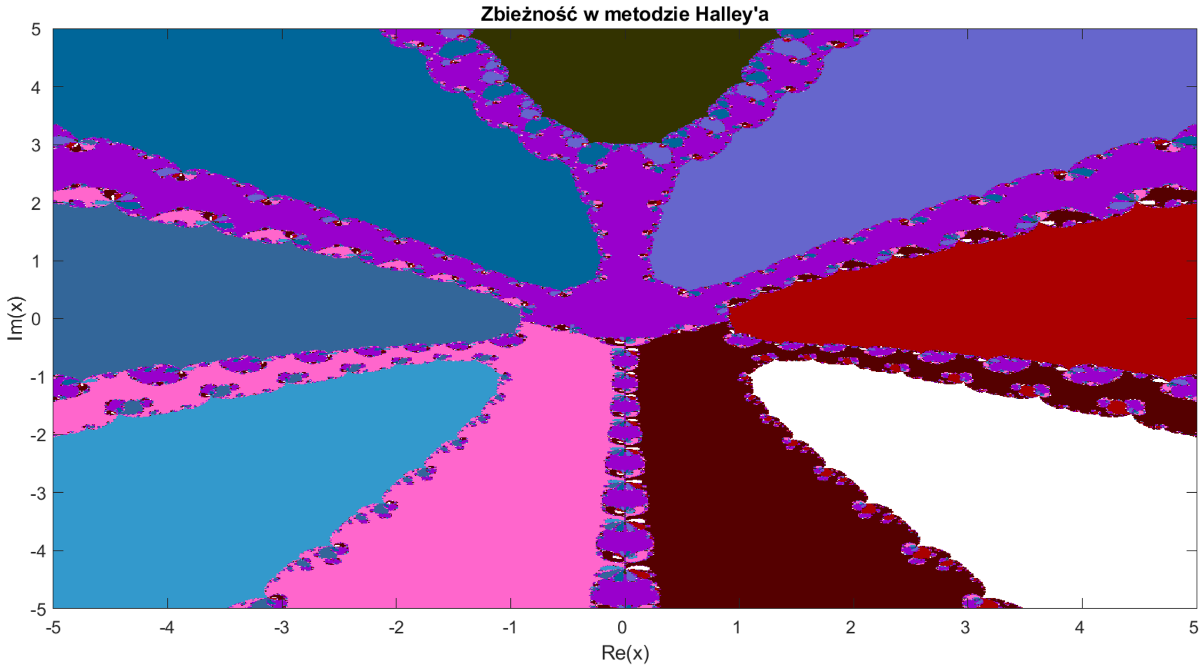
Jako drugi przykład weźmiemy wielomian rzeczywisty 10 stopnia
$w(x) = x^{10} + 2x^9 - 2x^8 + 9x^7 + 2x^6 + 7x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x + 1.$
Zobaczmy ile iteracji potrzeba do otrzymania rozwiązania metodą Halley'a dla różnych punktów początkowych:



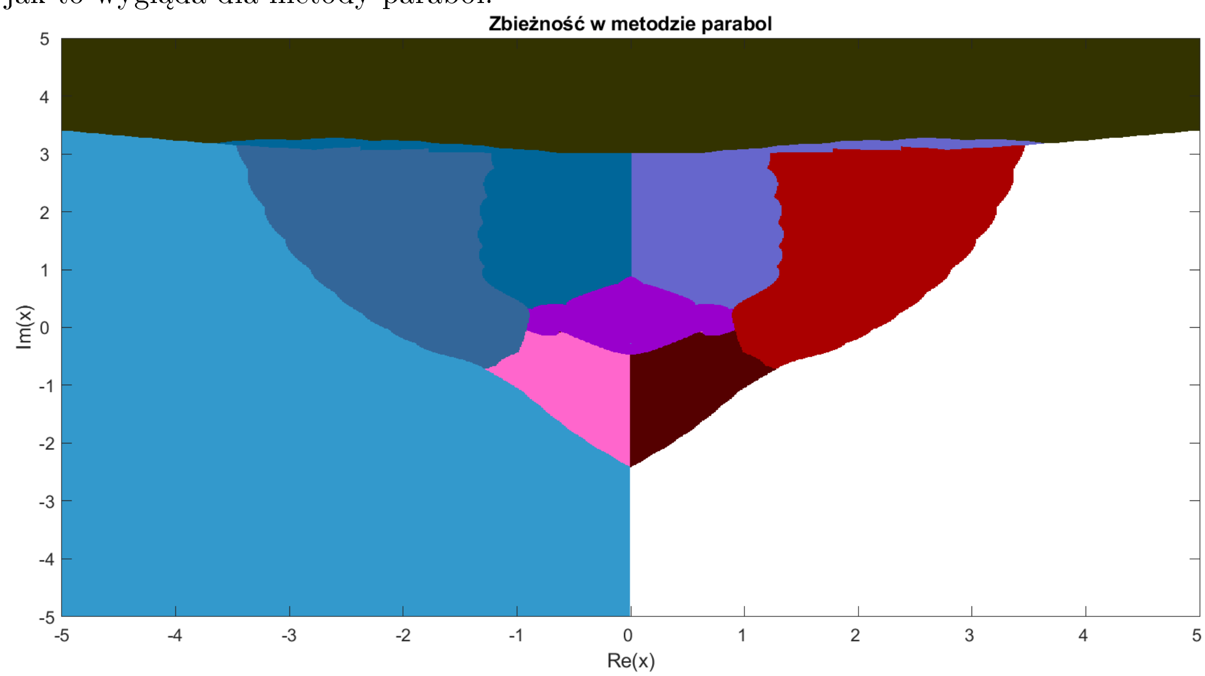
Wykres jest imponujący! Pojawiają się skomplikowane struktury, mimo to liczba iteracji nie wzrosła znacząco. Cały czas pojawiają się punkty, w których metoda nie jest zbieżna.



Liczba iteracji podobna co w metodzie Halley'a, jednak wykres jest zdecydowanie bardziej regularny i nie występują punkty rozbieżności.
Kontynuując dany przykład spójrzmy do którego rozwiązania zbiega metoda Halley'a dla różnych punktów początkowych:



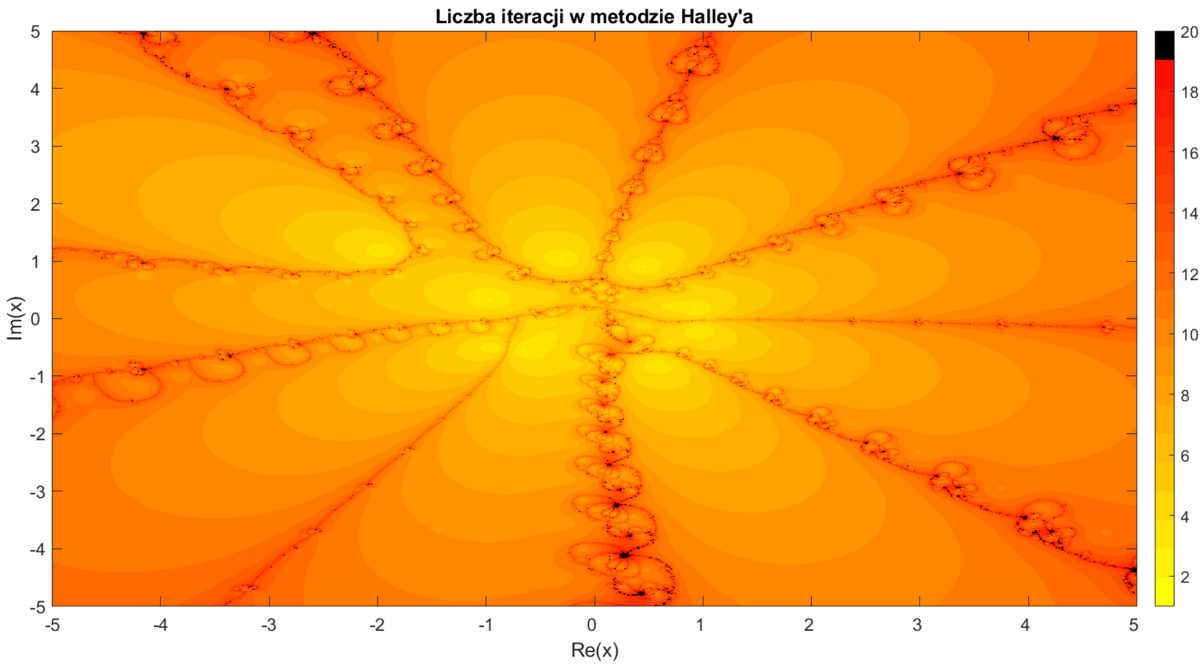
Wykres ten przypomina kształtem wykres liczby iteracji dla metody Halley'a. Spójrzmy jak to wygląda dla metody parabol:



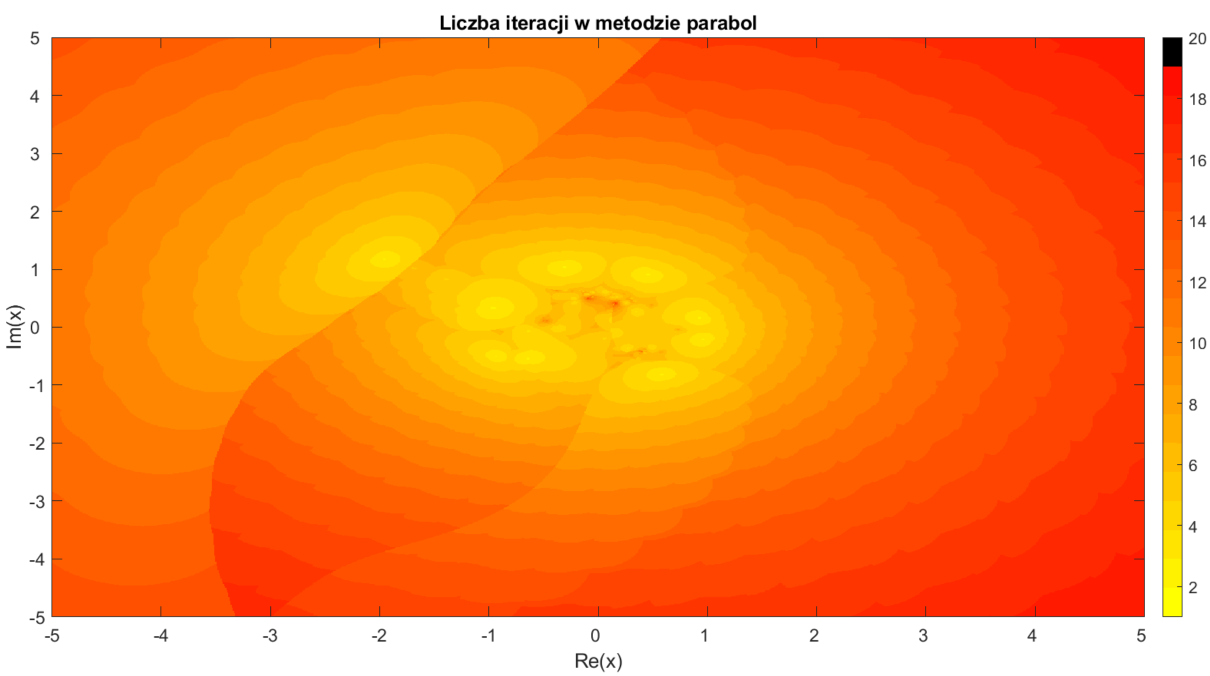
Podobnie zauważamy podobieństwo kształtu z analogicznym wykresem.

5.3 Przykład 3.

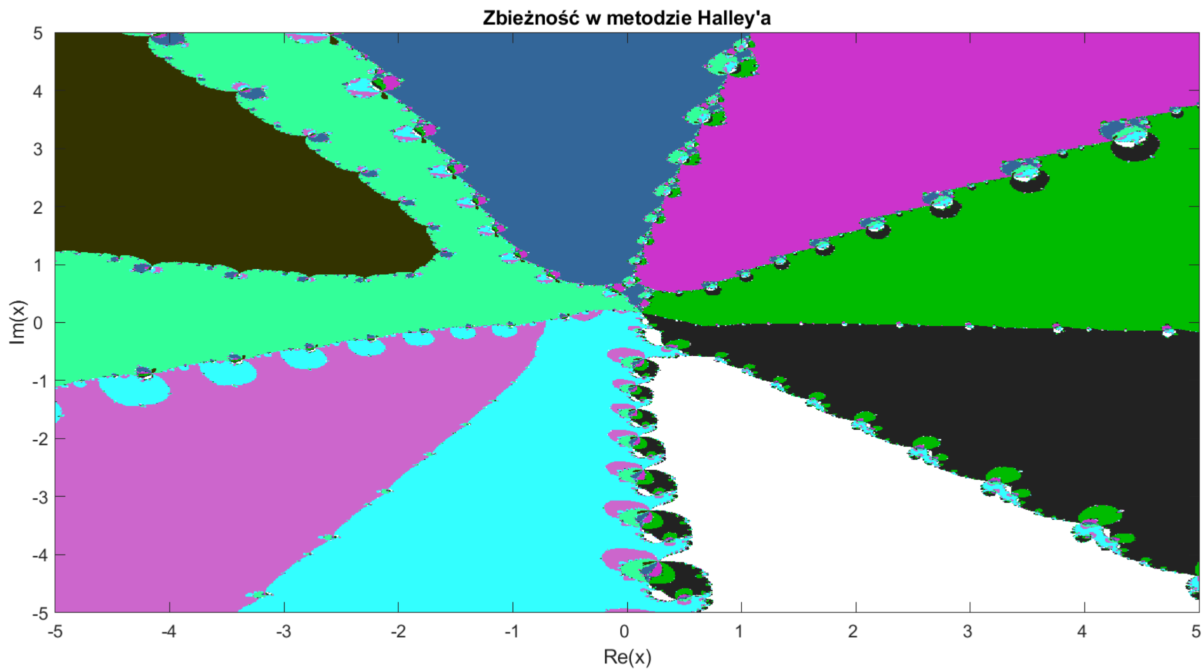
Ostatnim, zarazem najciekawszym przykładem będzie losowo wygenerowany wielomian zespolony. Zobaczmy ile iteracji potrzeba do otrzymania rozwiązania metodą Halley'a dla różnych punktów początkowych:



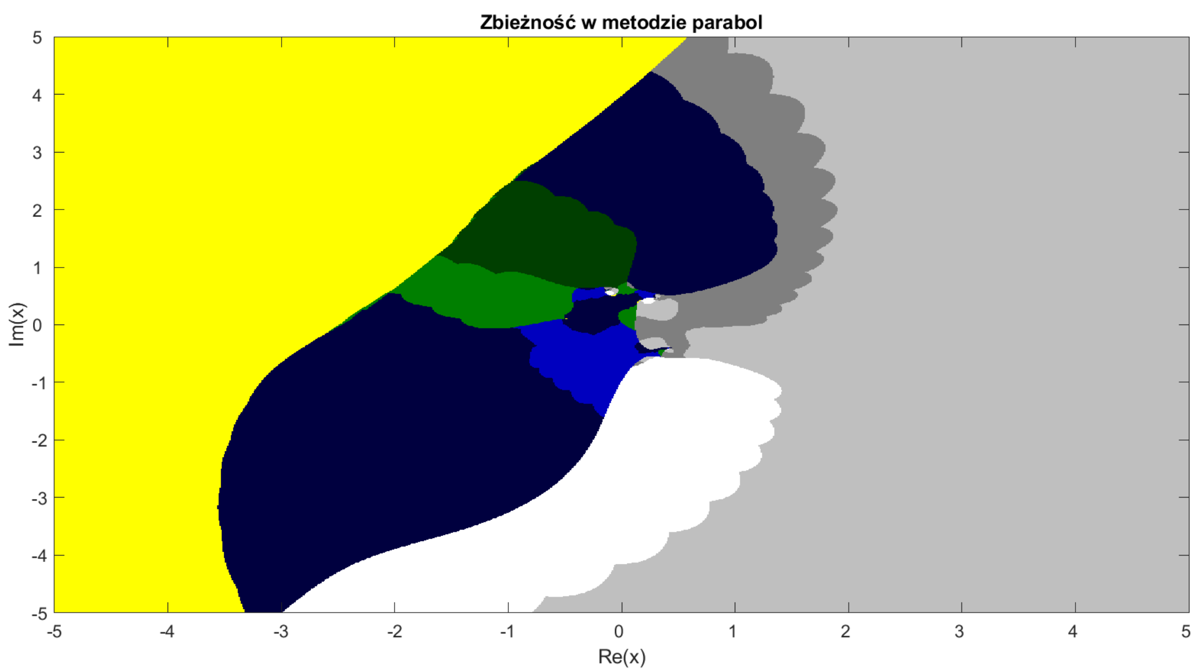
Kolejny ciekawy wykres. W przeciwieństwie do poprzednich przykładów nie jest on symetryczny, wynika to najprawdopodobniej z tego, że współczynniki wielomianu są zespolone. Dla porównania spójrzmy na metodę parabol:



Podobne wnioski co poprzednio - wykres bardziej regularny aczkolwiek również nie jest symetryczny.
Kontynuując dany przykład spójrzmy do którego rozwiązania zbiega metoda Halley'a dla różnych punktów początkowych:



Spójrzmy jak to wygląda dla metody parabol



6 Wnioski

Obie metody wyznaczania zer wielomianów są bardzo skuteczne. Z dowolnie małym błędem znajdują zera w zadanym obszarze. Liczby iteracji potrzebnych do uzyskania zamierzonego celu jest dla obu metod bardzo podobna i została przedstawiona na przykładach. Jak można zaobserwować na przykładach metoda parabol daje bardziej przewidywalne wyniki i nie zdarzają jej się punkty rozbieżności, tak jest w przypadku metody Halley'a.

Literatura

[1] Notatki do wykładu Metody Numeryczne 2021