SPRAWOZDANIE NUM7

JAKUB KRĘCISZ

Treść zadania

Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1, 1 \rangle$ dla funkcji $y = \frac{1}{1+25x^2}$ dla:

(a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1} \quad (i = 0, \dots, n)$

(b) $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right) \quad (i = 0, \dots, n)$

Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić $W_n(x)$ dla różnych n na jednym wykresie). Zaproponuj również inne funkcje i znajdź dla nich wielomiany interpolacyjne dla węzłów zdefiniowanych w pkt. (a) i (b). Czy nasuwają się jakieś wnioski?

UWAGA: Nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku). Algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

Omówienie zadania

Naszym zadaniem jest znalezienie i wykreślenie wielomianów interpolacyjnych dla funkcji $y = \frac{1}{1+25x^2}$ oraz innych zaproponowanych przez nas funkcji na zadanym przedziale x. Do interpolacji będziemy używać dwóch zadanych w zadaniu węzłów interpolacji, jednorodnej i niejednorodnej.

Zacznijmy od omówienia czym właściwie jest interpolacja. Interpolacja to znalezienie funkcji, która przechodzi podane odgórnie punkty nazywane węzłami. Punkty zazwyczaj są podane jako funkcja w postaci stabelaryzowanej. Dzięki znalezieniu takiej funkcji, jesteśmy w 'tani' sposób obliczyć jej wartość w danym punkcie, nie musimy przetrzymywać wszystkich wartości w jakichkolwiek tabelkach.

Jednym z rodzajów interpolacji, jest interpolacja wielomianowa, której właśnie w tym zadaniu użyjemy. Skoro wiemy, że wielomian $W_n(x_i) = y_i$, zapiszmy to w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem takiego równania na macierzach, są współczynniki a_n. Macierz ta jest macierzą Vandermonde'a i w niej możemy znaleźć taką zależność, że jeśli punkty $x_0, \dots, x_n$ nie będą się pokrywać to wyznacznik takiej macierzy jest różny od zera i wynosi:

$$\prod_{0<i<j<n} (x_j - x_i)$$

Dzięki temu, wiemy, że istnieje wielomian interpolacyjny stopnia nie większego niż n.

Do obliczenia naszych wartości wielomianu interpolacyjnego, użyjemy wzór Lagrange'a:

$$W_n(x) = \sum_j y_j \phi_j(x)$$

Gdzie $\phi_j(x)$ to:

$$\phi_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

Uruchomienie programu

Do uruchomienia programu wykorzystamy Makefile:

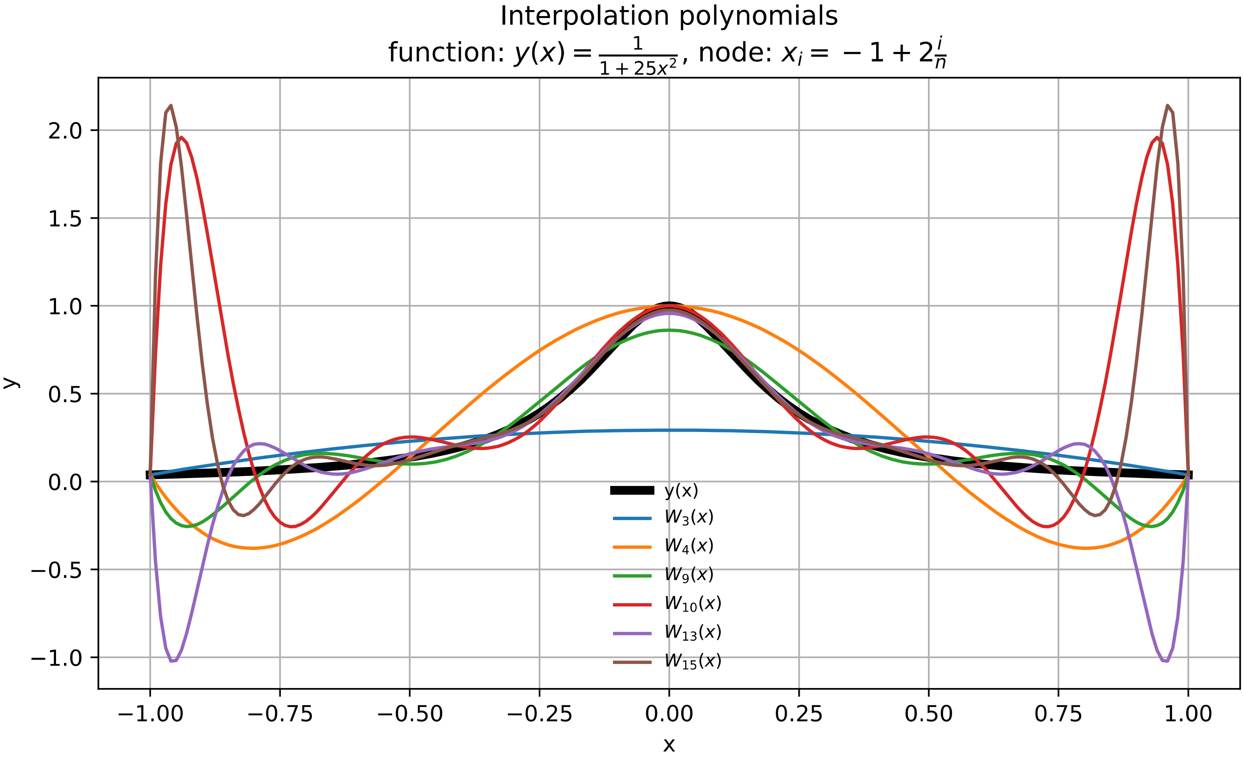
Aby uruchomić nasz program i wyświetlić wykresy, wystarczy użyć polecenia:

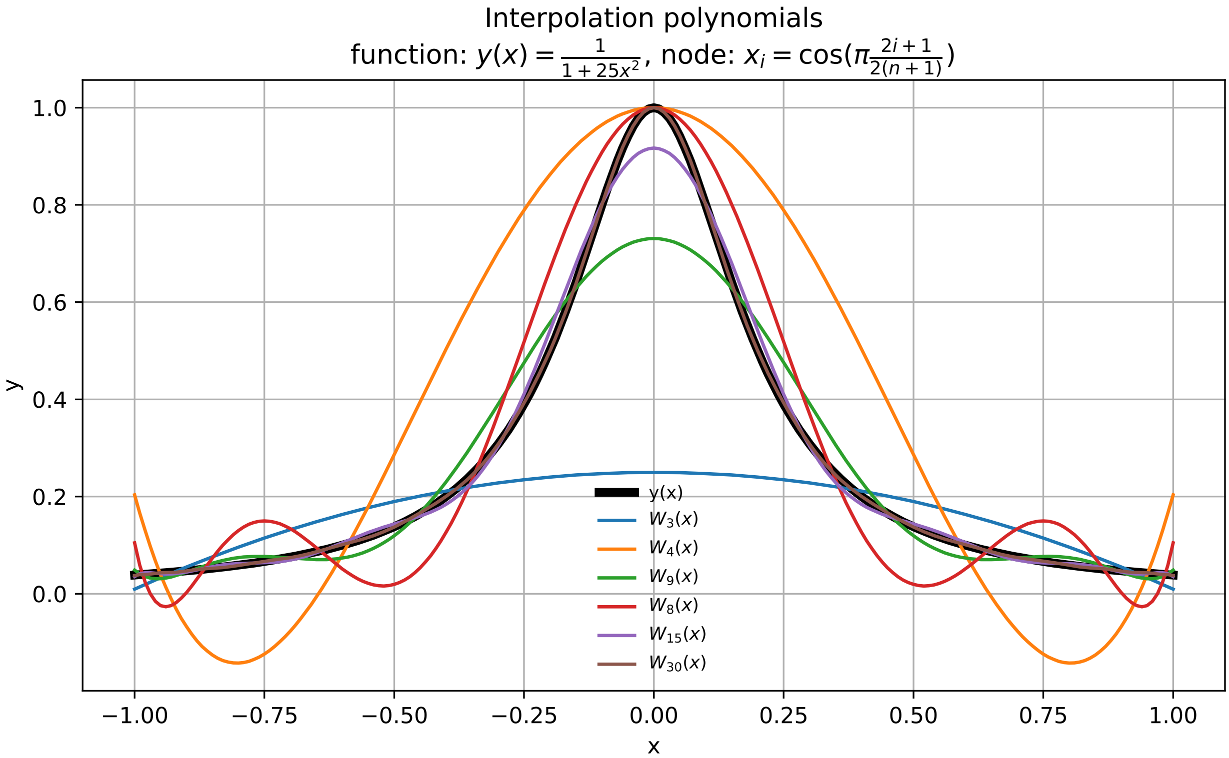
make show_plots

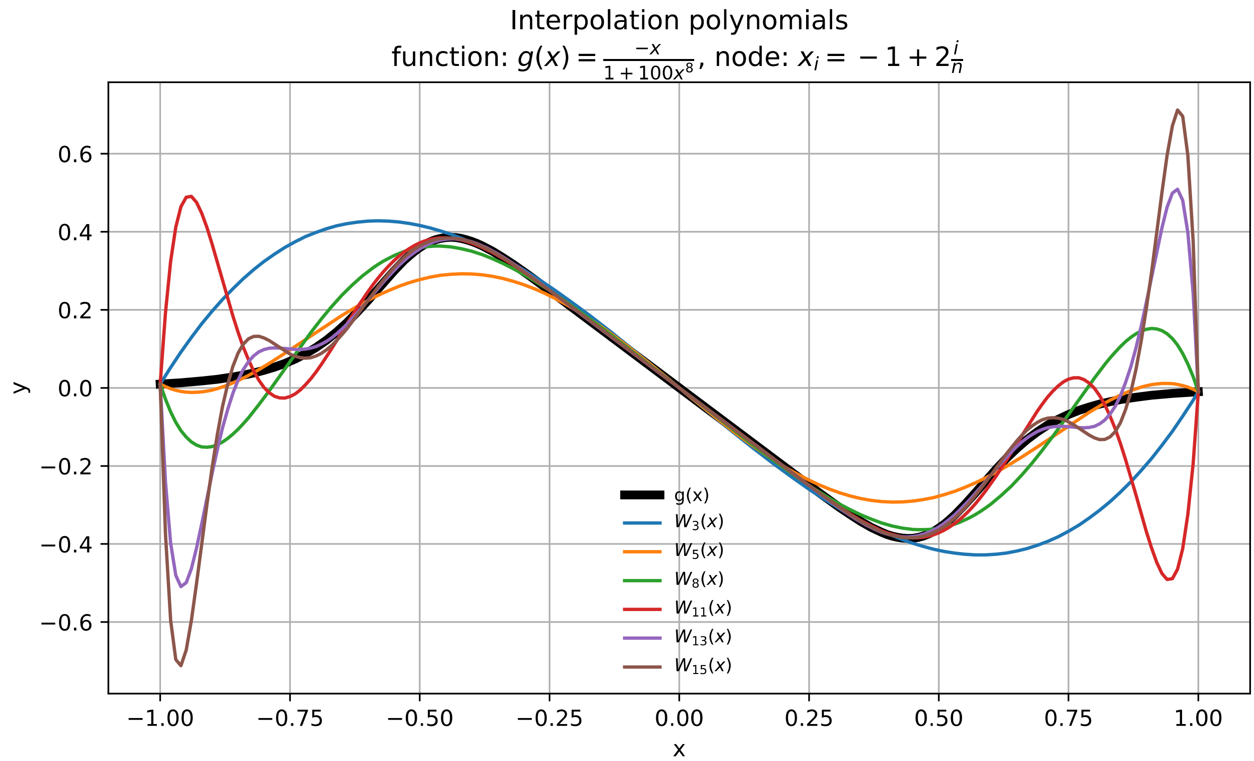
Aby uruchomić nasz program i zapisać wykresy w postaci plików svg, wystarczy użyć polecenia:

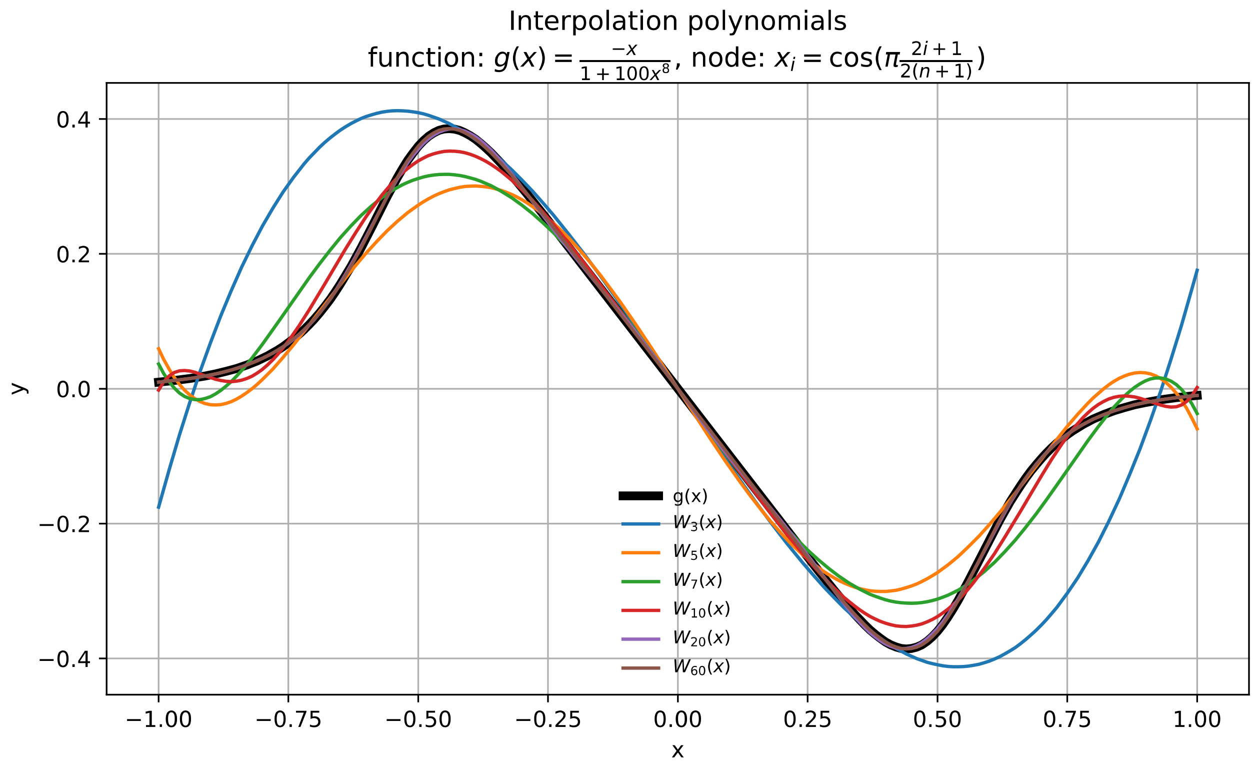
make save_plots

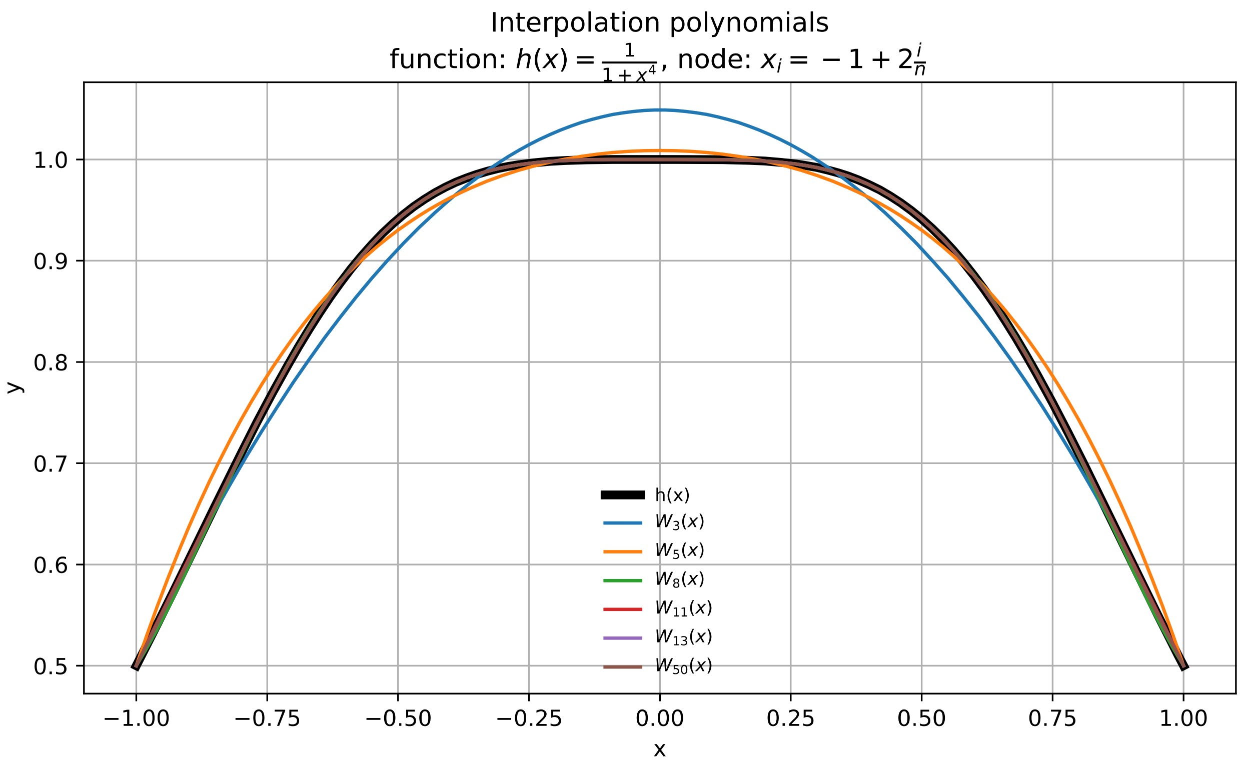
Wyniki

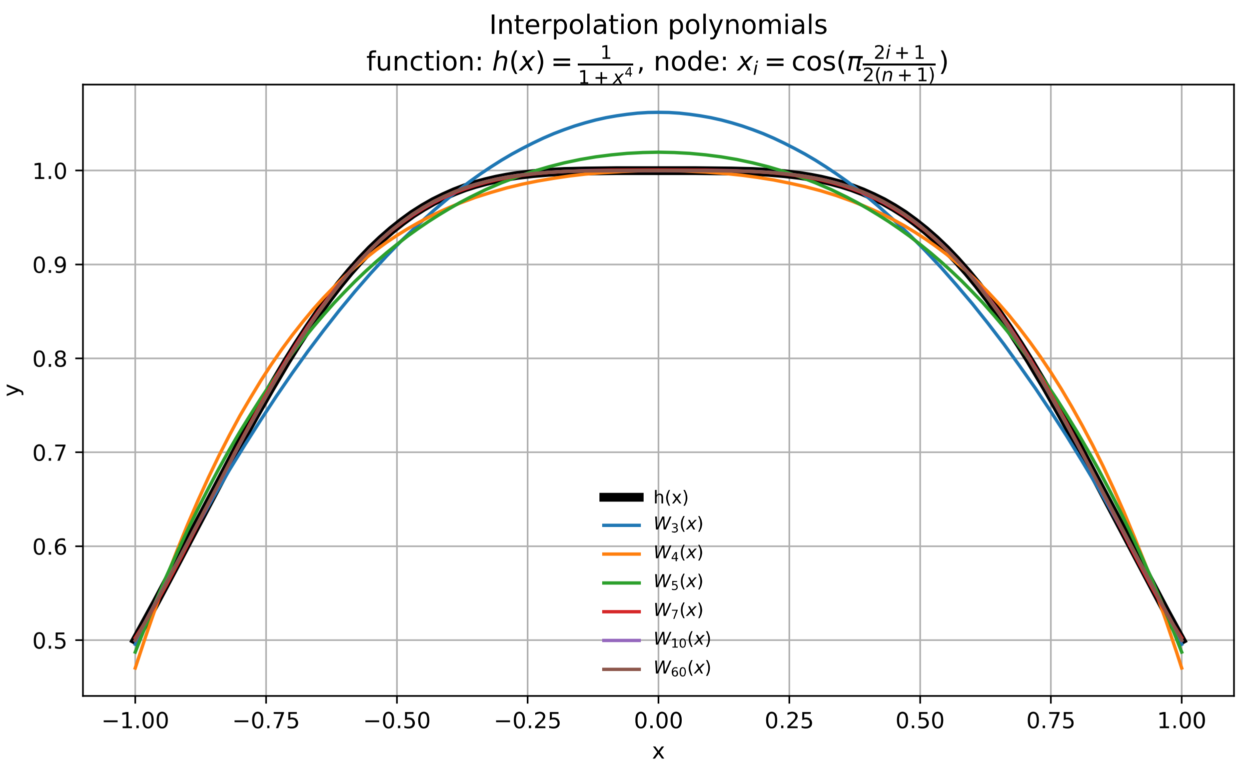

Interpolation polynomials
function: $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, node: $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$
y
x
y(x)
$W_3(x)$
$W_4(x)$
$W_9(x)$
$W_{10}(x)$
$W_{13}(x)$
$W_{15}(x)$


Interpolation polynomials
function: $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, node: $x_i = \cos(\pi\frac{2i+1}{2(n+1)})$
y
x
y(x)
$W_3(x)$
$W_4(x)$
$W_9(x)$
$W_8(x)$
$W_{15}(x)$
$W_{30}(x)$


Interpolation polynomials
function: $g(x) = \frac{-x}{1+100x^8}$, node: $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$
g(x)
$W_3(x)$
$W_5(x)$
$W_8(x)$
$W_{11}(x)$
$W_{13}(x)$
$W_{15}(x)$
x
y


Interpolation polynomials
function: $g(x) = \frac{-x}{1+100x^8}$, node: $x_i = \cos(\pi\frac{2i+1}{2(n+1)})$
g(x)
$W_3(x)$
$W_5(x)$
$W_7(x)$
$W_{10}(x)$
$W_{20}(x)$
$W_{60}(x)$
x
y


Interpolation polynomials
function: $h(x) = \frac{1}{1+x^4}$, node: $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$
y
x
h(x)
$W_3(x)$
$W_5(x)$
$W_8(x)$
$W_{11}(x)$
$W_{13}(x)$
$W_{50}(x)$


Interpolation polynomials
function: $h(x) = \frac{1}{1+x^4}$, node: $x_i = \cos(\pi\frac{2i+1}{2(n+1)})$
y
x
h(x)
$W_3(x)$
$W_4(x)$
$W_5(x)$
$W_7(x)$
$W_{10}(x)$
$W_{60}(x)$

Wnioski

Jak widzimy funkcje y(x) i g(x) dla rozkładu jednorodnego (podpunkt (a)) wraz ze zwiększeniem się stopnia wielomianu, nasze przybliżenie funkcji jest coraz dokładniejsze. Lecz niestety w pewnym momencie, gdy nasz stopień n jest już za duży, nagle na krańcach przedziału mamy wielkie amplitudy oscylacji, jest to nic innego jak efekt Rungego. Żeby uniknąć występowania tego efektu, powinniśmy wyznaczyć więcej punktów na krańcach przedziału. Jeżeli jednak chodzi o rozkład niejednorodny (podpunkt (b)) dla tych funkcji to przybliżenie funkcji wraz ze wzrostem n jest coraz dokładniejsze i nie zauważamy efektu Rungego nawet dla dużych wartości n. Jeżeli chodzi jednak o funkcję h(x), w niej możemy zauważyć, że w obu rozkładach nie zauważymy efektu Rungego dla dużych wartości n.