

SPRAWOZDANIE NUM2

JAKUB KRĘCISZ

Treść zadania

Zadane są macierze:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2.34332898 & -0.11253278 & -0.01485349 & 0.33316649 & 0.71319625 \\ -0.11253278 & 1.67773628 & -0.32678856 & -0.31118836 & -0.43342631 \\ -0.01485349 & -0.32678856 & 2.66011353 & 0.85462464 & 0.16698798 \\ 0.33316649 & -0.31118836 & 0.85462464 & 1.54788582 & 0.32269197 \\ 0.71319625 & -0.43342631 & 0.16698798 & 0.32269197 & 3.27093538 \end{pmatrix}$$

oraz:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2.34065520 & -0.05353743 & 0.00237792 & 0.32944082 & 0.72776588 \\ -0.05353743 & 0.37604149 & -0.70698859 & -0.22898376 & -0.75489595 \\ 0.00237792 & -0.70698859 & 2.54906441 & 0.87863502 & 0.07309288 \\ 0.32944082 & -0.22898376 & 0.87863502 & 1.54269444 & 0.34299341 \\ 0.72776588 & -0.75489595 & 0.07309288 & 0.34299341 & 3.19154447 \end{pmatrix}$$

Zdefiniuj wektory:

$\mathbf{b} \equiv (3.55652063354463, -1.86337418741501, 5.84125684808554, -1.74587299057388, 0.84299677124244)^T$

oraz $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$. Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania $\mathbf{A}_i \mathbf{y}_i = \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{A}_i \mathbf{y}_i' = \mathbf{b}'$ dla $i = 1, 2$. Wyznacz $\Delta_i \equiv \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i'\|_2$ oraz zinterpretuj różnicę wartości Δ_1 i Δ_2 .

Wstęp

Wrażliwość układów równań na zaburzenia danych jest podatnością układów równań na zauważalne różnice w wynikach przy bardzo małym zaburzeniu danych w układzie. Gdy niewielkie zaburzenia danych dają nam niewielkie różnice w wynikach/rozwiązaniach układu to wtedy możemy powiedzieć, że układ jest dobrze uwarunkowany.

Jedną z opcji sprawdzenia czy nasz układ jest dobrze uwarunkowany jest wyznaczenie współczynnika uwarunkowania układu równań. Dzięki temu, że w zadaniu mamy dwie macierze symetryczne możemy wyznaczyć ten współczynnik za pomocą wzoru: $\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$. Im mniejszy współczynnik uwarunkowania tym układ jest lepiej uwarunkowany i odporny na zaburzenia danych.

Implementacja

Korzystając z biblioteki numPy, program oblicza dwa układy równań składające się z macierzy A i wektory wyrazów wolnych b. Program również oblicza te same układy równań po zmodyfikowaniu wartości wektora wyrazów wolnych b. Następnym krokiem naszego programu jest wyznaczenie długości wektora różnicy pomiędzy rozwiązaniami wykorzystującymi początkowy wektor wyrazów wolnych a rozwiązaniami z zmodyfikowanym wektorem wyrazów wolnych. Na samym końcu program wyznacza również wskaźnik uwarunkowania macierzy w celu bardziej przejrzystej interpretacji wartości Δ_1 i Δ_2 .

Uruchomienie programu

Do uruchomienia programu wykorzystamy Makefile:

Aby uruchomić nasz program, wystarczy użyć polecenia:

```
make run
```

Wyniki

Solution for $A_1 y_1 = B$:

$y_1 = [2.03163246 \ -1.03652186 \ 3.22032664 \ -3.52251753 \ -0.1394951]$

Solution for $A_1 y_1' = B'$:

$y_1' = [2.03163717 \ -1.0365219 \ 3.22032706 \ -3.52251858 \ -0.13949605]$

Solution for $A_2 y_2 = B$:

$y_2 = [1.99998045 \ -0.33814057 \ 3.42431038 \ -3.56662167 \ 0.0329788]$

Solution for $A_2 y_2' = B'$:

$$y_2' = [3.42873475 \ -31.86258865 \ -5.78337449 \ -1.57579144 \ -7.75237481]$$

$$\Delta_1 = \|y_1 - y_1'\|_2$$

$$\Delta_1 = 0.00000493458713552989$$

$$\Delta_2 = \|y_2 - y_2'\|_2$$

$$\Delta_2 = 33.84063773324913881879$$

$$\text{cond}(A_1) = 4.00000002506492080556$$

$$\text{cond}(A_2) = 320612865.98137181997299194336$$

Wnioski

Mimo, że macierze A_1 i A_2 były do siebie bardzo zbliżone, to znaczy wartości w nich różniły się w zasadzie tylko o kilka miejsc dziesiętnych to same długości wektora różnicy bardzo od siebie odbiegają. Wygląda na to, że Macierz pierwsza jest źle uwarunkowana, co dodatkowo umacniają wyniki współczynników uwarunkowania układu równań dla obu macierzy A . Współczynniki uwarunkowania, jak widać powyżej bardzo się od siebie różnią.

Wnioski jakie możemy wynieść z naszego zadania są takie, że gdy współczynnik uwarunkowania danej macierzy jest niższy to również dana macierz jest bardziej odporna na zaburzenia.