SPRAWOZDANIE NUM6

JAKUB KRĘCISZ

Treść zadania

Zadana jest macierz:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0.2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Stosując algorytm QR znajdź wszystkie wartości własne macierzy **M**.
(b) Stosując metodę potęgową znajdź największą co do modułu wartość własną macierzy **B** z zadania 9 oraz odpowiadający jej wektor własny.

Wyniki sprawdź używając wybranego pakietu algebry komputerowej.

Dla ambitnych: w pkt. (a) wyznacz również wektory własne.

Omówienie zadania

Zacznijmy od omówienia problemu, z którym musimy się uporać. Mamy dane **A** i **b** oraz niewiadomy wektor **y**. Naszym zadaniem jest rozwiązanie równania: **Ay** = **b** numerycznie wybierając odpowiedni algorytm. Również mamy porównać wyniki z wbudowaną biblioteką stworzoną do tego typu operacji.

Jeżeli chodzi o macierz A, mamy do czynienia z macierzą, która nie jest gęsta, więc obliczenie jej standardową metodą będzie osiągało dużą złożoność a co za tym idzie zajmowało dużą ilość czasu na rozwiązanie takiej macierzy. Tak więc, pierwsze co możemy zrobić to sprowadzenie macierzy do macierzy rzadkiej, w szczególności do macierzy w postaci gdy jedyne niezerowe wartości znajdują się na jej diagonalach. W naszym przypadku, żeby sprowadzić macierz do takiej postaci wystarczy odjąć od każdego elementu wartość 1. Dzięki temu przekształceniu nasze obliczenia znacznie się skrócą. Macierz wtedy wyglądałaby tak:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Reprezentacja naszej macierzy **A** będzie przedstawiona jako suma dwóch macierzy, jak na górze. Widzimy że tak jak w przypadku zadania numerycznego **NUM3** idealnie nada się macierz wstęgowa do przechowania wartości jednej macierzy z naszej sumy:

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 9 & 7 \\ 9 & 7 \\ \vdots & \vdots \\ 9 & 7 \\ 9 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeżeli chodzi o macierz zbudowaną z samych jedynek, rozpiszmy ją jako iloczyn wektorów z samych jedynek, drugi oczywiście transponowany. Ułatwi nam to potem zastosowanie potrzebnych wzorów:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times (1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

Zapiszmy nasze macierze tak:

- Macierz rzadka jako B

- Iloczyn wektorów z samymi jedynkami jako $\mathbf{uv^T}$

$$Ay = b \Leftrightarrow (\mathrm{B} + \mathrm{uv}^{\mathrm{T}})\mathrm{y} = \mathrm{b}$$

Zastosujemy wzór Shermana-Morrisona, ale żeby go zastosować, musimy zrobić jeszcze jedno przekształcenie naszego równania. Dokładniej to musimy pomnożyć obustronnie przez odwrotność naszej macierzy **A**, wtedy będziemy mogli zastosować ten wzór:

Nasze przekształcenie:

$$(B + uv^T)y = b \Leftrightarrow y = (B + uv^T)^{-1}b$$

Wzór Shermana-Morrisona:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

Po zastosowaniu wzoru, nasze równanie ma postać:

$$y = (B + uv^T)^{-1}b \Leftrightarrow y = \left(B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u}\right)b \Leftrightarrow y = \left(B^{-1}b - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u}b\right)$$

Wiemy, że $B^{-1}b$ oraz $B^{-1}u$ będą wektorami, dla przejrzystości i dalszych przekształceń przyjmijmy, że:

$$B^{-1}b = x \qquad B^{-1}u = z$$

Wiemy również, że iloczyn wektoru transponowanego z wektorem daje nam skalar z sumą iloczynów ich elementów. Patrząc a iloczyn wektoru $\mathbf{v^T}$ z naszymi **x** i **z**, wiemy nawet że naszym skalarem będzie po prostu suma elementów wektoru x oraz z ze względu na to, że wektor $\mathbf{v^T}$ jest skonstruowany z samych jedynek. Mamy więc:

$$y = B^{-1}b - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u}b \Leftrightarrow y = x - z(\frac{sum(x)}{1 + sum(z)})$$

Zajmijmy się jeszcze **x** i **z**. Pomnóżmy obustronnie przez macierz B, żeby dostać iloczyn B (który jest macierzą trójkątną górną) z naszymi **x** i **z.**

$$B^{-1}b = x \Leftrightarrow b = Bx$$

$$B^{-1}u = z \Leftrightarrow u = Bz$$

Tak jak powiedziałem wcześniej, macierz B jest trójkątnie górna. Jak dobrze wiemy (z zadania NUM3) w takim przypadku możemy zastosować backward substitution:

Dla Bx = b:

$$x_n = \frac{b_n - B_{1_n}x_{n+1}}{B_{0_n}} \qquad x_{49} = \frac{b_{49}}{B_{0_{49}}}$$

Dla n < 49

Dla Bz=u:

$$z_n = \frac{1 - B_{1_n}z_{n+1}}{B_{0_n}} \qquad z_{49} = \frac{1}{B_{0_{49}}}$$

Dla n < 49

(B_0 - diagonala środkowa, B_1 – diagonala nad środkową)

Teraz mamy już wszystko by zacząć implementację naszego programu.

Uruchomienie programu

Do uruchomienia programu wykorzystamy Makefile:

Aby uruchomić nasz program, wystarczy użyć polecenia:

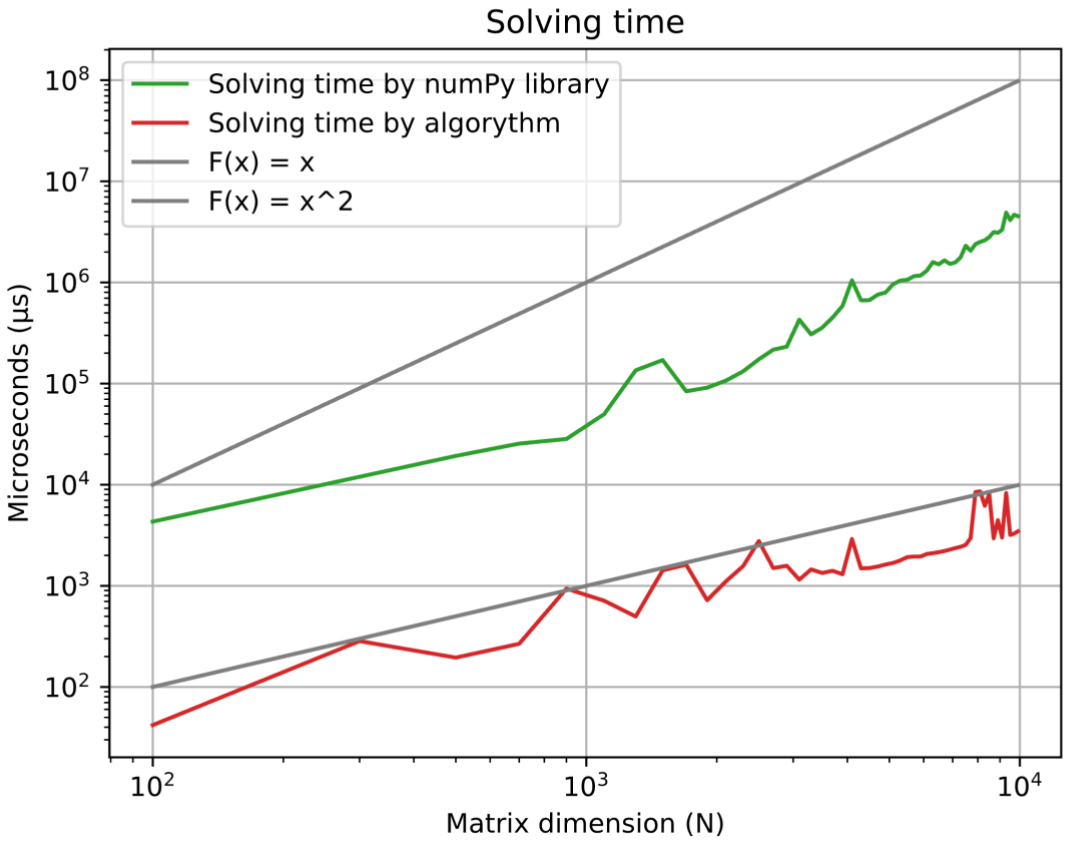
```
make run
```

Wyniki

1. Pierwszy podpunktem było policzenie dla N=50, wynik to:

y = [0.07525844089350037, 0.07525904117533852, 0.07525826938440369, 0.07525926168703423, 0.07525798586936636, 0.07525962620636797, 0.07525751720165161, 0.07526022877914401, 0.07525674246522518, 0.07526122486883524, 0.07525546177847939, 0.07526287146607977, 0.07525334472487927, 0.07526559339213704, 0.07524984510566277, 0.07527009290255826, 0.07524406002083556, 0.07527753086876468, 0.0752344969214272, 0.07528982628228972, 0.07521868853260927, 0.07531015135362709, 0.07519255629803279, 0.07534374994093965, 0.07514935811434514, 0.07539929046282379, 0.07507794887192268, 0.07549110234593842, 0.07495990502220382, 0.07564287300986267, 0.07476477131144413, 0.0758937592094108, 0.07444220334059656, 0.07630848945764337, 0.07390897873572605, 0.07699406394961972, 0.07302752581747077, 0.0781273605588052, 0.07157043017708939, 0.08000076923929544, 0.0691617618736019, 0.08309762848663654, 0.06518008569844908, 0.08821692642611872, 0.058598131204829124, 0.09667943934648726, 0.04771775745006959, 0.11066849131689238, 0.029731833488120224, 0.13379325069654147]

2. Drugim podpunktem było przyjęcie N jako zmienną, zmierzenie czasu i porzedstawienei wyników na wykresie:



Wnioski

Jeżeli chodzi o wyniki, nasz zaimplementowany algorytm oblicza macierze z takim samym rezultatem jak wbudowane biblioteki do tego stworzone (w naszym przypadku numPy).

Jeżeli chodzi o czas wykonania. Nasz zaimplementowany algorytm okazał się być naprawdę zauważalnie szybszy od metody ogólnej, którą jest w naszym przypadku, użycie funkcji z biblioteki numPy. Jak widzimy na wykresie, algorytm sobie o wiele lepiej radzi, dzięki zastosowaniu wzoru Shermana-Morrisona i backward substitution, udało nam się doprowadzić algorytm do wykonywania w czasie liniowym (O(n)), gdzie numpy te same obliczenia robi w $O(n^2)$. Wniosek z tego płynie taki, że zastosowanie odpowiednich algorytmów do danej sytuacji, pozwala na o wiele szybsze poradzenie sobie z problemem rozwiązania takiego równania.