SkaiWD – Laboratorium 4

Wartości własne i rozkład EVD

Iwo Błądek

17 kwietnia 2019

1 Wartości własne macierzy

Wektory własne macierzy kwadratowej A to takie wektory, które przemnożone przez tę macierz zostaną przeskalowane, ale ich kierunek nie ulegnie zmianie. Matematycznie wyrazić to możemy następującym równaniem:

wektor własny macierzy A

$$Ak = \lambda k \tag{1}$$

wartość własna macierzy A

gdzie k jest wektorem własnym macierzy A, a λ to współczynnik skalowania nazywany *wartością własną* macierzy A. Macierz kwadratowa o wymiarze n ma w ogólności n wartości własnych (choć niekoniecznie rzeczywistych), a dla każdej z tych wartości nieskończenie wiele wektorów własnych, bo wyobraźmy sobie $k, 2k, 3k, \ldots$ – macierz A przeskaluje niezmienniczo każdy z nich. W literaturze angielskojęzycznej zbiór zawierający wektor zerowy oraz wektory własne powiązane z daną wartością własną nazywany jest *eigenspace*.

Przekształcając równanie (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Ak - \lambda k &= \mathbf{0} \\ Ak - \lambda I k &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)k &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

Widać, że trywialnym rozwiązaniem zawsze będzie wektor $k = \mathbf{0}$. To trywialne rozwiązanie nie jest uznawane za wektor własny (ze względów raczej praktycznych niż matematycznych). Równanie (2) będzie mieć nietrywialne rozwiązania wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik macierzy $A - \lambda I$ będzie równy 0. Zapisując tę obserwację formalnie otrzymujemy *równanie charakterystyczne macierzy*:

$$|A - \lambda I| = 0,$$

którego rozwiązaniem będą wartości własne macierzy A.

Zadanie 1.1: Wskaż bez obliczeń wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Przedstaw wektory własne tej macierzy w postaci ogólnej (tj. sparametryzowanej zmiennymi $\alpha, \beta, \ldots$).

Zadanie 1.2: Jeżeli macierz A jest nieodwracalna, to znaczy że zawiera liniowo zależne kolumny oraz że jej wyznacznik jest równy zero. Co możemy powiedzieć o wartościach własnych A?

Zadanie 1.3: Dla jakich kątów α macierz rotacji:

$$\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$$

ma rzeczywiste wartości własne?

Zadanie 1.4: Mamy daną macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że jedna z wartości własnych A wynosi 3.

1. Oblicz a.
2. Czy ta macierz ma wartości własne inne niż 3? Jeżeli tak, to jakie?

Zadanie 1.5: Oblicz wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Przedstaw wektory własne tej macierzy w postaci ogólnej.

Zadanie 1.6: Oblicz wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Przedstaw wektory własne tej macierzy w postaci ogólnej.

2 Wektory własne jako atraktor przekształcenia

Wektory własne macierzy, a konkretniej przestrzenie własne (eigenspaces), mają tę własność, iż stanowią atraktory w przypadku wielokrotnej aplikacji danej transformacji liniowej: $AAA \ldots Av$. Jeżeli więc chcemy aproksymować wektor własny macierzy oraz powiązaną wartość własną, to możemy wykonać kilkukrotną aplikację macierzy A do dowolnego niezerowego wektora v (warto go normalizować po każdej aplikacji transformacji). Proces ten ma bardzo szybką zbieżność.

Zadanie 2.1: Wejdź na stronę `http://setosa.io/ev/eigenvectors-and-eigenvalues/` i przejdź do sekcji „What are eigenvalues/vectors good for?". Po zapoznaniu się z nią, przeanalizuj scenariusze w sekcjach „Fibonacci Sequence" oraz „Steady States".

Zadanie 2.2: Załóżmy, że macierz A ma tylko dodatnie wartości własne. Aplikujemy macierz A wielokrotnie do pewnego wektora v. Jeżeli v nie będzie się pokrywać z którymś z wektorów własnych A, to po wielokrotnej aplikacji A z normalizacją po każdym kroku rezultatem (atraktorem) będzie bardzo dobra aproksymacja wektora własnego (lub wektora do niego przeciwnego) związanego z największą wartością własną A.

Uzasadnij matematycznie ten fakt wyrażając v jako kombinację liniową wektorów własnych A.

3 Rozkład EVD (Eigenvalue Decomposition)

Zadanie 3.1: Przekształć iloczyn AK n-wymiarowej macierzy kwadratowej A i macierzy K zawierającej w kolumnach liniowo niezależne wektory własne A tak by dojść do KL, gdzie L to macierz diagonalna z wartościami własnymi (wartość własna w i'tym wierszu L odpowiada wektorowi własnemu w i'tej kolumnie K).

Zadanie 3.2: Mamy wektor $\vec{v}$, pewną macierz transformacji A_{22} oraz jej wektory własne k_1 i k_2 ułożone kolumnowo w macierzy $K = [k_1|k_2]$ (tzw. *eigenbasis*). Rozpatrz z geometrycznego punktu widzenia, co się dzieje w poniższych sytuacjach wraz z dokładaniem kolejnych transformacji:

- $K\vec{v}$
- $AK\vec{v}$
- $K^{-1}AK\vec{v}$

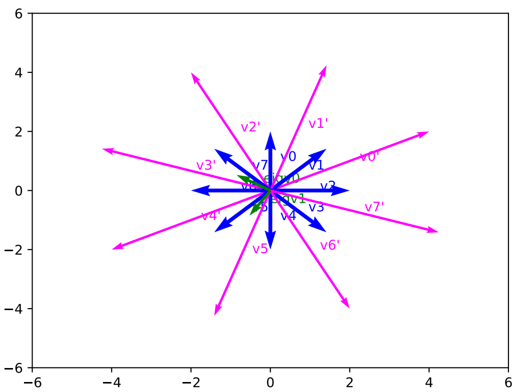
Macierz $L = K^{-1}AK$ będzie macierzą diagonalną z wartościami własnymi na przekątnej. Wykaż ten fakt.

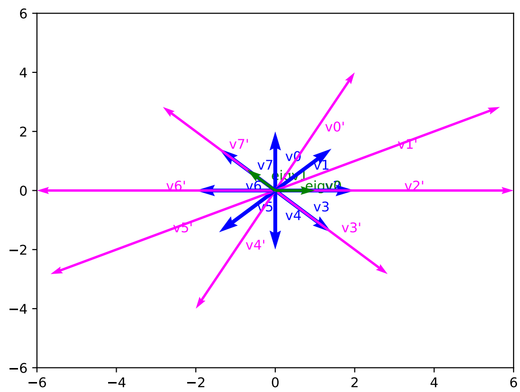
Zadanie 3.3: Dokonaj rozkładu EVD następującej macierzy: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4 Zadanie domowe (4 punkty)

Zadanie 4.1: (1 pkt) Korzystając z funkcji `np.linalg.eig` (`linalg` od ang. *linear algebra*) zaimplementuj w szablonie funkcję znajdującą wektory własne podanej przez użytkownika transformacji liniowej. Funkcja `np.linalg.eig` zwraca krotkę zawierającą wartości własne i znormalizowane powiązane z nimi wektory własne. Jest również funkcja `np.linalg.eigvals`, która zwraca tylko wartości własne. Zweryfikuj przykłady wyliczone w poprzednich zadaniach.

Uzupełnij kod w szablonie tak, by rysowane były wektory własne (na wykresach poniżej zielone strzałki) zadanego przekształcenia. Oczekiwane rezultaty:



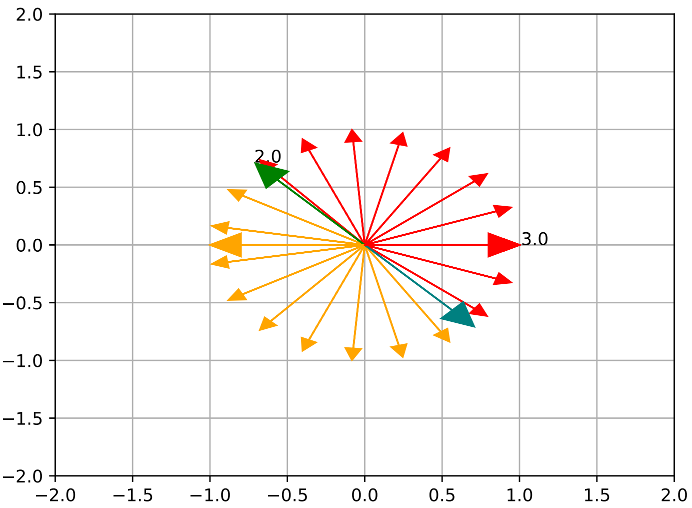


Zadanie 4.2: (1 pkt) Zaimplementuj w szablonie funkcję `EVD_decomposition` tak by obliczała rozkład EVD podanej przez użytkownika macierzy A wykorzystując wektory i wartości własne zwracane przez funkcję `np.linalg.eig`. Chodzi o to, by samemu skonstruować EVD z bazowych operacji a

nie korzystać z gotowej funkcji bibliotecznej. Wypisz macierze K^{-1}, L, K. Sprawdź, czy w wyniku mnożenia czynników uzyskiwana jest macierz wyjściowa A.

Zadanie 4.3: (2 pkt) Zaimplementuj dla każdego równomiernie generowanego wektora sprawdzenie, jaki będzie jego atraktor po kilkukrotnym wykonaniu pewnej transformacji A. By uniknąć nieskończenie kurczących się lub rosnących wektorów zakładamy, że interesuje nas kierunek wektora, czyli trzeba go np. znormalizować po każdej aplikacji A. Wizualnie pogrupuj na wykresie wektory, które wpadają do tego samego atraktora.

Poniższy rysunek przedstawia przykładową wizualizację atraktorów. Macierz A to $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i jest taka sama jak na rysunku powyżej po prawej stronie. Grube strzałki zielona i czerwona przedstawiają wektory własne, które zawsze są swoimi własnymi atraktorami. Grube strzałki pomarańczowa i zielononiebieska to z kolei wektory przeciwne do wektorów własnych. Kolor każdego cienkiego wektora odpowiada atraktorowi (którym jest jeden z grubych wektorów) w który ten cienki wektor wpadł. Wartość własna związana z czerwonym wektorem własnym jest większa, i dlatego razem ze swoim wektorem przeciwnym zdominował przestrzeń.



Poniżej znajduje się przykładowa wizualizacja atraktorów dla macierzy z jedną wartością własną o podwójnej krotności: