SkaiWD – Laboratorium 3

Działania na macierzach

Iwo Błądek

10 kwietnia 2019

1 Transformacje liniowe

Na transformacje liniowe można patrzeć jak na zmianę bazy przestrzeni liniowej (Sekcja 5). Wektor kolumnowy $\vec{x}$ wyrażony jest w „standardowym” układzie współrzędnych o bazie opartej na wektorach jednostkowych długości 1 (wersory). Po lewostronnym przemnożeniu przez pewną macierz A, otrzymujemy oryginalny wektor przerzutowany do przestrzeni określonej kolumnami macierzy A.

$$\vec{x} = I \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + x2 \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} + x3 \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + dx_2 + gx_3 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 \end{bmatrix}$$

Jeżeli po prawej stronie macierzy A byłaby macierz z k kolumnami, to wynikowa macierz byłaby złożona z osobno przemnożonych kolumn:

$$A \cdot \begin{bmatrix} \vec{x_1} & \cdots & \vec{x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x_1} & \cdots & A\vec{x_k} \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.1: Przedstaw problem wyliczania kombinacji liniowej wypukłej wierzchołków 2-wymiarowego trójkąta jako transformację liniową Ax. Co zawierać będzie A i x?

Zadanie 1.2: W grafice komputerowej w celu dokonywania transformacji na obrazach używany jest tzw. *jednorodny układ współrzędnych*, w którym n wymiarów reprezentowanych jest za pomocą $n+1$ współrzędnych. Przykładowo, w celu dokonania translacji (przesunięcia) o wektor $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ wykonywana jest następująca operacja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Jakie zalety i wady ma tego typu rozwiązanie?

2. Oblicz złożenie translacji i obrotu korzystając z przedstawionej na początku tej sekcji metody (wyjdzie o wiele szybciej niż obliczanie poszczególnych komórek, bo za jednym zamachem obliczana jest zawsze cała kolumna wyjściowej macierzy).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \alpha & -sin\ \alpha & 0 \\ 0 & sin\ \alpha & cos\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \ ?$$

2 Macierz odwrotna

Zadanie 2.1: Udowodnij, że macierz odwrotna do macierzy A, jeżeli istnieje, jest unikalna.

Zadanie 2.2: Udowodnij, że dla odwracalnych macierzy A i B zachodzi: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Zadanie 2.3: Przypomnij sobie metodę Gaussa-Jordana obliczania odwrotności macierzy. Jej punkt wyjścia to $[A|I]$, a celem jest doprowadzenie za pomocą operacji elementarnych na wierszach do sytuacji $[I|A^{-1}]$

1. Podaj dozwolone operacje elementarne w tej metodzie.
2. Czym się objawi nieodwracalność macierzy, jeżeli spróbujemy dla takowej wykonać obliczenia?
3. Dlaczego ta metoda działa? Spróbuj przeprowadzić dowód. Podpowiedź: operacje elementarne.

Zadanie 2.4: Przeanalizuj w 2-wymiarowym układzie współrzędnych możliwość odwracania macierzy. Przyda się wcześniej przedstawiona postać mnożenia wektora przez macierz:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 Układy równań liniowych

Zadanie 3.1: Układ równań liniowych ma ogólną postać: $Ax = \mathbf{b}$.

1. Ile taki układ może mieć rozwiązań?
2. Ile taki układ może mieć rozwiązań, jeżeli macierz A jest odwracalna? Czym się one charakteryzują?
3. Ile taki układ może mieć rozwiązań, jeżeli macierz A *nie* jest odwracalna?

Zadanie 3.2: Homogeniczny układ równań liniowych ma ogólną postać: $Ax = \mathbf{0}$.

1. Ile taki układ może mieć rozwiązań?
2. Ile taki układ może mieć rozwiązań, jeżeli macierz A jest odwracalna? Czym się one charakteryzują?
3. Ile taki układ może mieć rozwiązań, jeżeli macierz A *nie* jest odwracalna?

Zadanie 3.3: Przeanalizuj z perspektywy transformacji liniowych rozwiązywanie układu równań, w szczególności liczbę możliwych rozwiązań i kiedy takowych nie będzie.

4 Wyznacznik macierzy

Relationship	Operation
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	The first row of A is multiplied by k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	The first and second rows of A are interchanged.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	A multiple of the second row of A is added to the first row.

Zadanie 4.1: Dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Oblicz jej wyznacznik za pomocą algorytmu kondensacji Dodgsona.
2. Oblicz jej wyznacznik za pomocą rozwinięcia Laplace'a, korzystając z praw działań na wyznacznikach by uprościć obliczenia.

Zadanie 4.2: Jaka jest interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy? Co oznaczają ujemne wartości? Co możemy powiedzieć o transformacji liniowej wiedząc, iż jej wyznacznik jest równy 0?

Zadanie 4.3: Wyznacznik będzie równy 0 jeżeli któreś kolumny lub wiersze macierzy będą od siebie liniowo zależne. Jednocześnie transpozycja macierzy nie zmienia wartości wyznacznika, co sugeruje, że wiersze są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy gdy kolumny również są liniowo zależne. Pokaż, że dla dowolnej macierzy $2x2$ z liniowo zależnymi kolumnami wiersze również będą od siebie liniowo zależne.

5 Baza przestrzeni liniowej (wektorowej)

Zadanie 5.1: Podaj definicję przestrzeni liniowej (inna nazwa: przestrzeń wektorowa). Jakiego rodzaju obiekty wchodzą w jej skład, oraz jakie są aksjomaty które muszą zachowywać?

Zadanie 5.2: Wytłumacz znaczenie pojęcia bazy w przestrzeni liniowej, oraz na czym polega liniowa niezależność wektorów. Odpowiedz na poniższe pytania dotyczące przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

1. Czy wektor $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ stanowi bazę?
2. Czy wektory $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ stanowią bazę?
3. Czy wektory $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ stanowią bazę?
4. Czy wektory $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ stanowią bazę?
5. Czy wektory $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$ stanowią bazę?

Zadanie 5.3: Czym jest podprzestrzeń liniowa? Ile podprzestrzeni może mieć przestrzeń liniowa z dwoma wektorami bazowymi, i czym się będą te podprzestrzenie charakteryzować? Czy istnieje trywialna podprzestrzeń wspólna dla wszystkich możliwych przestrzeni liniowych?

Zadanie 5.4: Czy zbiór wszystkich wielomianów jest przestrzenią liniową? Jeżeli tak, to jaka jest baza tej przestrzeni?

Zadanie 5.5: Czy zbiór wszystkich możliwych funkcji jest przestrzenią liniową? Jeżeli tak, to jaka jest baza tej przestrzeni?