

# Barycentryczny układ współrzędnych

Iwo Błądek

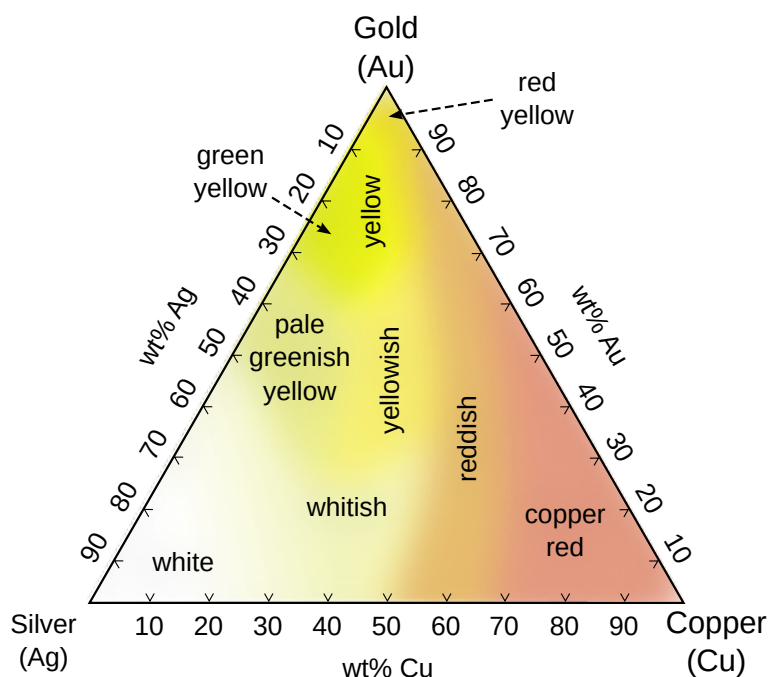
21 marca 2019

## 1 Barycentryczny układ współrzędnych

Podstawowa wiedza została przekazana na wykładzie. W tej sekcji znajdują się proste ćwiczenia na przypomnienie.

**Zadanie 1.1:** Narysuj trójkąt równoboczny ABC i zaznacz w nim, traktując wierzchołki jako wymiary barycentrycznego układu współrzędnych, następujące punkty (kombinacje wypukłe wierzchołków):  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 0, 1)$ ,  $d = (1/2, 1/2, 0)$ ,  $e = (0, 1/2, 1/2)$ ,  $f = (1/3, 1/3, 1/3)$ .

**Zadanie 1.2:** Odpowiedz na pytania dotyczące poniższego barycentrycznego wykresu (ang. ternary plot).



Źródło: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ag-Au-Cu-colours-english.svg>

1. Jaki potencjalnie kolor może mieć stop z 60% zawartością złota? A 60% srebra?
2. Jakim proporcjom stopów odpowiada wysokość trójkąta poprowadzona od wierzchołka dla złota do podstawy?
3. Podaj formułę logiczną opisującą możliwe stosunki metali prowadzące do czerwonego zabarwienia stopu (reddish, copper red).
4. Podaj formułę logiczną opisującą możliwe stosunki metali prowadzące do żółtawego zabarwienia stopu (yellow, yellowish, pale greenish yellow).

## 2 Ocena miar jakości klasyfikacji

Układ barycentryczny można wykorzystać do wizualizacji miar jakości klasyfikacji 2-klasowej i badania ich właściwości. Jednym z kierunków takiej analizy może być przypadek niezerównoważonej liczności klas, na którym się na tych zajęciach skupimy.

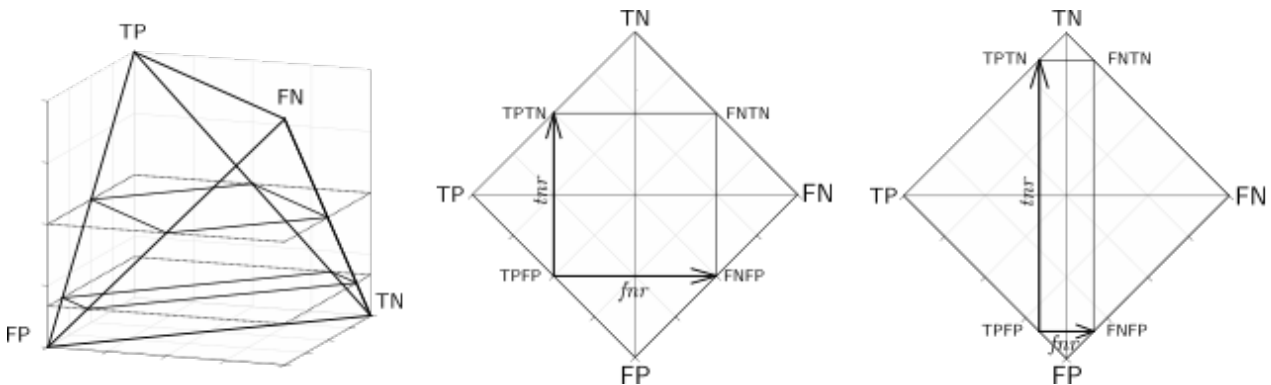
Poniżej po lewej stronie dla przypomnienia została przedstawiona macierz pomyłek. W środkowej tabelce zawarte są alternatywne oznaczenia. Po prawej stronie znajduje się macierz z przykładowymi wartościami dla równej liczności klas (50P, 50N).

	$P_{pred}$	$N_{pred}$
$P$	TP	FN
$N$	FP	TN

	$P_{pred}$	$N_{pred}$
$P$	a	c
$N$	b	d

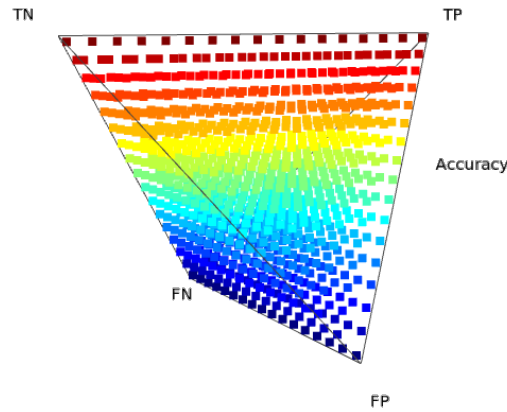
	$P_{pred}$	$N_{pred}$
$P$	40	10
$N$	20	30

Poniższa ilustracja pokazuje interpretację rzutów (*cross-sections*) dla pewnego stosunku elementów należących do pozytywnej i negatywnej klasy. Będzie to przydatne w dalszej części zadań.



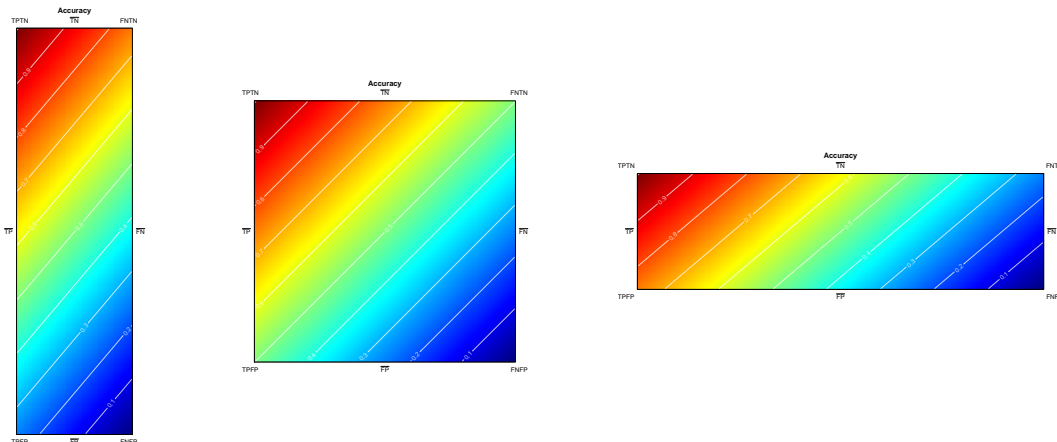
**Zadanie 2.1:** Wejdź na stronę <https://dabrze.shinyapps.io/Tetrahedron/>. Alternatywnie, możesz uruchomić środowisko lokalnie pobierając je z repozytorium (<https://github.com/dabrze/tetrahedron>) i instalując wymagane paczki języka R (np. korzystając ze skryptu *install\_libraries.R*). Poeksperymentuj trochę ze środowiskiem by poznać możliwości konfiguracji widocznych na ekranie elementów. Możesz również zapoznać się z pomocą w zakładce *Help*.

**Zadanie 2.2:** Przejdź do zakładki *Tetrahedron*. Jako miarę ustaw trafność klasyfikacji (*Accuracy*). Każdy punkt czworościanu odpowiada pewnej klasie macierzy pomyłek. Taką klasę można jednoznacznie zapisać wypełniając macierz iloczynami pewnych stałych i parametru  $n$  oznaczającego liczbę klasyfikowanych przypadków, np.  $\begin{pmatrix} 0.5n & 0 \\ 0.2n & 0.3n \end{pmatrix}$  (jak przyjmujemy taką interpretację  $n$ , to stałe muszą sumować się do 1). Innymi słowy, istotne są wzajemne proporcje między elementami wpadającymi w poszczególne pola, a nie absolutne wartości. Odpowiedz na poniższe pytania. Zapisuj klasy macierzy w abstrahującej od konkretnych wartości formie.



1. Jakie macierze pomyłek reprezentowane są w wierzchołkach czworościanu? Czy tego typu sytuacje często występują w problemach klasyfikacji?
2. Co się będzie zmieniać, jeżeli będziemy się stopniowo poruszać po krawędzi TNTP? A FNFP? Jakie klasy macierzy pomyłek odpowiadają takiej sytuacji?
3. Jakim macierzom pomyłek odpowiada punkt środkowy czworościanu?
4. Załóżmy, że mamy sytuację równej ilości przypadków należących do klasy decyzyjnej pozytywnej i negatywnej. Takiej sytuacji odpowiada pewien przekrój przez czworościan, na którym będą mogły się znajdować macierze pomyłek. Wskaż ten przekrój. Jaka to będzie figura geometryczna?
5. Załóżmy, że 75% przykładów należy do klasy  $N$ , a 25% do klasy  $P$ . Który przekrój przez figurę będzie odpowiadał takiej sytuacji? Jaka to będzie figura geometryczna?

**Zadanie 2.3:** Przejdź do zakładki *Cross-sections* i ustaw jako miarę *Accuracy*. W tym panelu można obserwować i analizować przekroje z ostatnich punktów poprzedniego zadania. Suwak *Minority ratio* pozwala na określenie stosunku między liczbą elementów w klasie pozytywnej do liczby wszystkich elementów (czyli 0.1 odpowiada sytuacji, gdy 10% przypadków należy do klasy pozytywnej, a 90% do negatywnej). Domyślnie ustawiona jest równa liczność elementów między klasami. Kolor odpowiada wartości miary w danym punkcie. Poniżej przedstawione są przekroje odpowiednio dla *Minority ratio* równego 0.25, 0.5 i 0.75.



1. Jakim macierzom pomyłek odpowiadają poszczególne wierzchołki? Podpowiedź: FNTN odpowiada sytuacji, w której wszystkie elementy są klasyfikowane jako należące do klasy  $N$ .
2. Zwróć uwagę na krawędzie przekroju. Oznaczenia na krawędziach, np.  $\overline{TN}$ , mówią o niezmienniku na danej krawędzi. Dla  $\overline{TN}$  oznacza to, że wszystkie przypadki negatywne są poprawnie klasyfikowane na odcinku TPTN-FNTN. Przeanalizuj pod tym względem pozostałe krawędzie.

3. Jak pewnie wiesz, trafność klasyfikacji uznawana jest za słabą miarę w przypadku niezbalansowanych klas. Przekonaj się o tym, analizując wartości tej miary w zależności od stopnia niezbalansowania. Na czym polega główny problem związany z tą miarą?
4. Jedną z modyfikacji trafności klasyfikacji jest *Balanced accuracy*, liczona jako  $\frac{1}{2}(\frac{TP}{P} + \frac{TN}{N})$ . Przeanalizuj tę miarę i spróbuj ocenić, czy rozwiązała główne problemy tradycyjnej trafności klasyfikacji.

**Zadanie 2.4:** Zmień miarę na *F1 score* (możesz sprawdzić jej definicję w zakładce *Measure definitions*). Co się zmieniło i jaki to będzie miało wpływ na ocenę jakości klasyfikacji w zależności od stopnia niezbalansowania?

**Zadanie 2.5:** Zmień miarę na *G-mean* (możesz sprawdzić jej definicję w zakładce *Measure definitions*). Co się zmieniło i jaki to będzie miało wpływ na ocenę jakości klasyfikacji w zależności od stopnia niezbalansowania?

**Zadanie 2.6:** Oblicz ręcznie wartości poszczególnych miar trafności klasyfikacji i wypełnij poniższą tabelkę. Sprawdź na odpowiednich przekrojach, czy wartości się zgadzają (poza pierwszym wierszem tabelki, *Minority ratio* powinno być ustawione na 0.2). Następnie odpowiedz na pytania pod tabelką.

	Accuracy	Balanced accuracy	G-mean	F1 score
$\begin{pmatrix} 40 & 40 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$	0.5	0.5	0.5	0.615
$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$	0.5			
$\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$	0.55			
$\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$	0.45			
$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 60 \end{pmatrix}$	0.7			
$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 60 & 20 \end{pmatrix}$	0.3			

1. Które miary są niezmiennicze ze względu na odwrócenie etykiet klas decyzyjnych?
2. Które miary są liniowe? Jak można zdefiniować liniowość miary jakości klasyfikacji?
3. Jaką własność G-mean i Balanced accuracy można wskazać na podstawie tabelki? Czy pozostałe miary również mają tę własność?
4. Zarówno Balanced accuracy jak i G-mean to średnie określone na TP rate i TN rate. Jakiego rodzaju to średnie?
5. (\*) Dla chętnych: sprawdź, jaki wykres miałaby średnia harmoniczna TP rate i TN rate korzystając z pola *Custom function* na wizualizacji (jako zmienne można użyć `tp`, `fn`, `tn`, `fp`; operatory matematyczne standardowo).

### 3 Wybieranie odpowiedniej miary

Jak można zauważyć w tabelce, każda z miar przypisuje inne oceny do tych samych macierzy pomyłek. Wybór miary jakości jest w istocie wyborem relacji porządku między różnymi macierzami

pomylek. Ponadto wybór ten jest subiektywny, ponieważ zależy zasadniczo od preferencji użytkownika chcącego rozwiązać jakiś problem uczenia maszynowego. Na dostępne w literaturze miary należy patrzeć jak na propozycje o pewnych charakterystykach i matematycznych właściwościach.

**Zadanie 3.1:** Zastanów się, w jakiej sytuacji nieliniowa miara jakości (np. F1 score, G-mean) może być bardziej użyteczna niż liniowa miara Balanced accuracy?

**Zadanie \*3.2:** (Dla chętnych) Przeczytaj esej krytykujący F1 score: [https://adamyedidia.files.wordpress.com/2014/11/f\\_score.pdf](https://adamyedidia.files.wordpress.com/2014/11/f_score.pdf).